Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

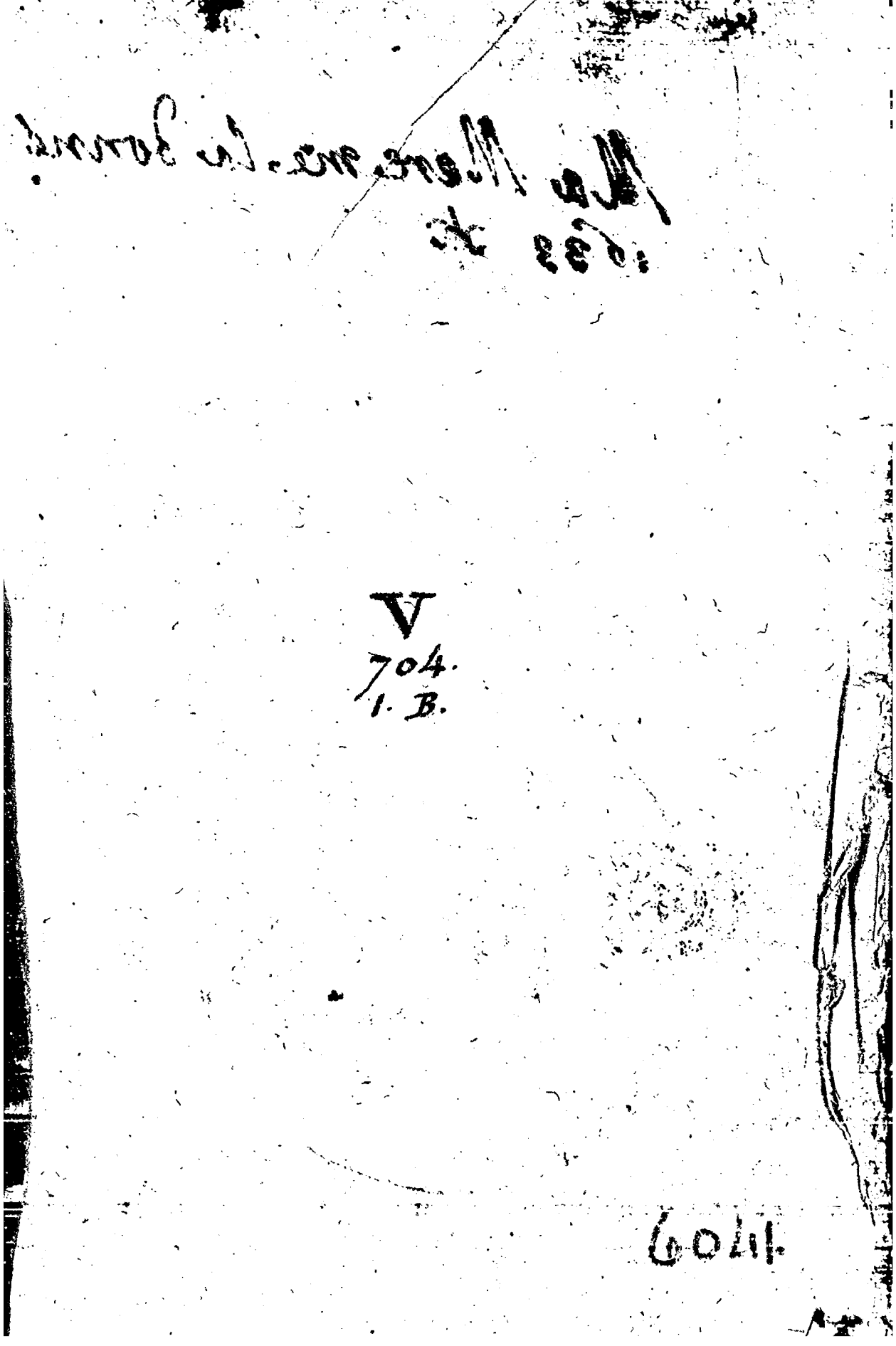
Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Bibliothèque nationale de France

Mr Mereme le donne
1633 2fc

V

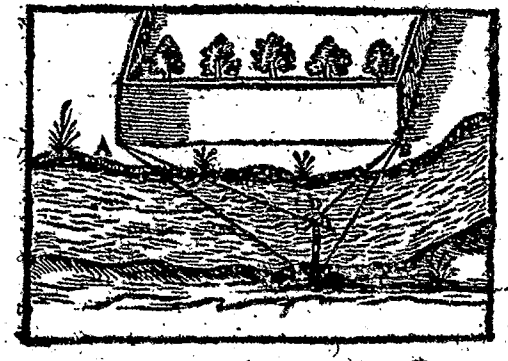

V
704.
1. B.

LES QVINZE LIVRES

DES ELEMENTS GEOMETRIQVES DE EVCLIDE

Traduicts en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur: auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precedentes.

Plus le Liure des DONNEZ du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son viuant.



Mus—C.
Tab. 54 a
n° 29

A PARIS,
De l'Imprimerie d'Isaac Dedin.
Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S. Michel, par la veufue dudit Henrion.

M. DC. XXXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

6041

L'IMPRIMEVR AV LECTEVR.

AMy Lecteur voicy le dernier des Oeuures du ſieur Henrion Profeſſeur és Mathematiques, contenant les quinze liures des Elements d'Euclide, traduicts en François, auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes: auſquels il a adiouſté le liure des Donnez du meſme Euclide, auſſi traduict en François; ce qui n'auoit point encores eſté faict iuſques icy, quoy que l'vſage de ce liure ſoit fort commun par toutes les Mathematiques, & particulierement en l'Analiſe, ſcience auiourd'huy tant eſtimee & recherchee, & qui a remis en ce temps la Geometrie en ſon luſtre autant qu'elle y fut iamais, auec eſperance d'vne perfection beaucoup plus grande. Cét œuure eſtoit imprimé dés le viuant de l'Autheur: & s'il ne l'a publiee, c'eſt que ſon intention eſtoit d'y adiouſter le reſte de ce qui ſe trouue des œuures d'Euclide, ſçauoir l'Optique, & Catoptrique, les Phenomenes, la Muſique, & vn fragment du leger & du peſant, toutes leſquelles parties il auoit deſia traduites, comme en font foy les manuſcripts qu'il a laiſſés, & qui ſont entre les mains de ſa veufue: ainſi il diuiſoit toutes les œuures d'Euclide en deux Tomes, deſquels le premier eſtoit celuy-cy, & le dernier deuoit contenir ce que nous auons dict maintenant, dont la pre-

miere feuille eſt deſia imprimee, & le reſte pourra eſtre imprimé cy-apres. Cependant reçoy cecy par aduance, & te ſouuiens de celuy qui te l'a preparé, lequel la mort à rauy en vn temps auquel il pouuoit & vouloit encore beaucoup ſeruir au public. Quant à l'impreſſion, ſa diligence accouſtumee à corriger ſes œuures te peut aſſeurer qu'il y aura peu ou point de fautes: ſi toutesfois tu en rencontres, il te ſera facile de les corriger ſans accuſer l'autheur qui t'auroit exempté de ceſte peine s'il euſt veſcu iuſques icy. C'eſt dequoy ie te ſupplie: t'aſſeurant que ie ſuis de tous les amateurs des Mathematiques.

Le tres-humble & tres-affectionné
ſeruiteur I. DEDIN.

ELEMENT PREMIER.

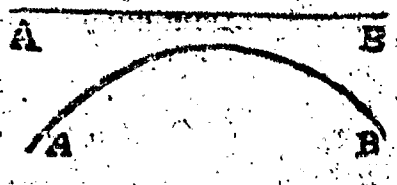
DEFINITIONS.

1. Le poinct, eſt ce qui n'a aucune partie.

LEs Phyſiciens diſent que le poinct eſt le moindre obiect de la veuë; & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe: Mais les Mathematiciens reiettans ceſte definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'intellect ſi ſubtil qu'il ne peut eſtre diuiſé en aucunes parties: Et iceluy ne ſe peut eſcrire, mais ſeulement entendre & imaginer: Bien eſt vray que pour le repreſenter à nos ſens exterieurs nous nous ſeruons du poinct Phyſique. Le poinct n'a donc aucunes des dimenſions geometriques, c'eſt à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny eſpoiſſeur, mais bien eſt il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt vne longueur ſans largeur.

Apres le poinct, Euclide vient à la ligne, qui n'eſt autre choſe que le flux ou coullement d'iceluy poinct d'vn lieu en vn autre: car par ainſi l'interualle compris entre ces deux lieux-là, ſera vne longueur ſans largeur, puis que le poinct du coullement duquel elle eſt produite n'en a aucune: & par conſequent la ligne (qui eſt la premiere eſpece de magnitude ou quantité continue) a ſeulement vne dimenſion, ſçauoir eſt longueur, car n'ayant aucune largeur, il eſt certain qu'elle n'aura auſſi aucune eſpoiſſeur ou profondeur. Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le poinct A eſtre meu ou coullé depuis A iuſques en B, & auoir laiſſé par ſon flux ou coullement la trace & veſtige AB: or ceſte trace AB ſera appellee ligne: car l'interualle



A

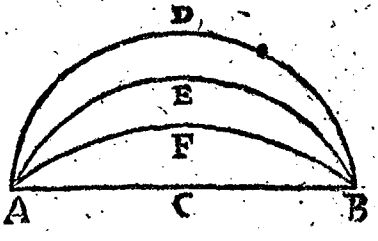
compris entre les deux poincts A & B eſt vrayement vne longueur ſans largeur & eſpoiſſeur, puis que le poinct A, par le coullement duquel elle eſt produicte, eſt priué de toute dimenſion.

3. Les extremitez de la ligne, ſont poincts.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminees commencent à vn poinct, & acheuent auſſi à vn poinct, comme les lignes precedentes AB, qui ont pour leurs extremitez les poincts A & B: car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt également compriſe & eſtendue entre ſes poincts.

Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, c'eſt aſçauoir la ligne droicte, la ligne circulaire, qu'ils appellent auſſi ligne courbe, & la ligne mixte: Euclide definit icy la droicte, laquelle il dit eſtre celle là qui eſt eſgalement eſtendue entre ſes poincts: ainſi la ligne ACB eſt dicte ligne droicte, pource que tous les poincts entremoyens d'icelle ligne, comme C, ſont éſgalement poſés entre les extremes A & B, l'vn n'eſtant plus eſleué ou abaiſſé que l'autre: ce qui n'aduient aux trois autres lignes ADB, AEB, AFB, car il eſt manifeſte que les poincts entremoiens D, E, F ſont bien plus eſleuez que les extremes A & B. Quelques autres Autheurs ont diuerſement definy la ligne droicte: car Campanus dit, que c'eſt le plus court chemin d'vn poinct iuſqu'à vn autre: &, ſelon Archimede, la ligne droicte eſt la plus courte de toutes celles qui ont meſmes extremitez. Mais Platon dit que c'eſt celle-là dont les poincts du milieu ombragent les extremes: comme par exemple, ſi en la ligne ACB, le poinct extreme A auoit la vertu d'illuminer, & le poinct du milieu C la force de cacher: iceluy poinct C empeſcheroit que le poinct extreme B fuſt illuminé de l'autre extreme A: Et auſſi l'œil eſtant au poinct extreme A, il ne pourroit voir l'autre extreme B, à cauſe du poinct C poſé entre iceux extremes: ce qui n'arriueroit pas aux lignes non droictes, comme le demonſtrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

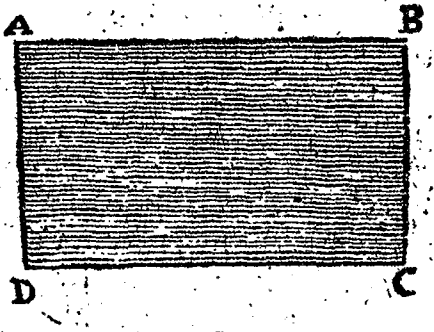


Or tout ainſi que les Mathematiciens conçoiuent la ligne eſtre deſcripte par le flux & mouuement imaginaire du poinct, ainſi auſſi entendent-ils la qualité de la ligne deſcripte par la qualité d'iceluy mouuement: car ſi on entend que le poinct coulle droict par le plus court chemin ne ſe deſtournant çà ne là, la ligne ainſi deſcripte ſera appellee ligne droicte: mais ſi le poinct fluant vacille en ſon mouuement, & s'eſcarte çà & là; la ligne deſcripte ſera appellee mixte: & finalement ſi le poinct fluant ne vacille en ſon mouuement,

mais eſt porté en rond d'vn certain mouuement vniforme & regulier, gardant touſiours vne eſgale diſtance à quelque certain poinct à l'entour duquel il eſt porté; ceſte ligne deſcripte ſera appellee circulaire. Or Euclide ne traicte icy que des deux ſimples lignes, ſçauoir eſt de la droicte & de la circulaire. Il a defini celle-là cy-deſſus, & il definira ceſte-cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la definition, pource qu'elle n'a aucun vſage en ſes elemens Geometriques: il y en a de pluſieurs ſortes, & d'icelles traictent amplement Apollonius, Pergeus, Nicomedes, Archimedes & autres Autheurs.

5. Superficie, eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité continue, & qui a vne ſeule dimenſion, Euclide definit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece de quantité, & a deux dimenſions: car on n'y trouue pas la ſeule longitude comme en la ligne, mais auſſi latitude, ſans toutesfois aucune profondité: comme la quantité A B C D compriſe entre les lignes AB, BC, CD, DA, & conſideree ſelon la lõgitude AB, ou DC, & ſelon la latitude AD, ou BC, ſans aucune eſpoiſſeur ou profondité, eſt appellee ſuperficie. Quelques vns deſcriuans la ſuperficie diſent, que c'eſt l'extremité du corps. Et comme dit Proclus, la ſuperficie nous eſt fort naïfuement repreſentee par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuuent penetrer au dedans de la terre, elles ſeront ſeulement longues & larges. Dauantage comme les Mathematiciens entendent que la ligne eſt produicte par le flux ou coullement du poinct, ainſi diſent-ils que la ligne ſe mouuant en trauers, produict la ſuperficie: comme par exemple, ſi on entend que la ligne AB ſe meuue vers la ligne DC, elle fera la ſuperficie A B C D, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'eſt la trace & veſtige du mouuement de la ligne AB qui n'a aucune profondité.



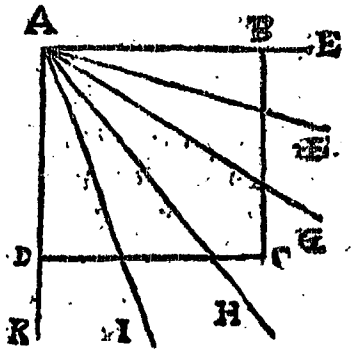
6. Les extremitez de la ſuperficie, ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornees, & terminees par lignes droites, cõme la ſuperficie ABCD cy deſſus, de laquelle les extremitez ſont les lignes AB, BC, CD, & DA: car il y a bien pluſieurs ſuperficies encloſes d'vne ſeule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mẽtion en ces Elemens-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la ſuperficie ſpherique, qui circuit & enuironne vn corps entierement rond & ſpherique. Comme donc la ligne terminee commence à vn poinct, & finit à vn autre poinct, ainſi auſſi la ſuperficie terminee commence par vne ligne, &

finit par vne ligne, tant ſelon ſa longueur, que ſelon ſa largeur.

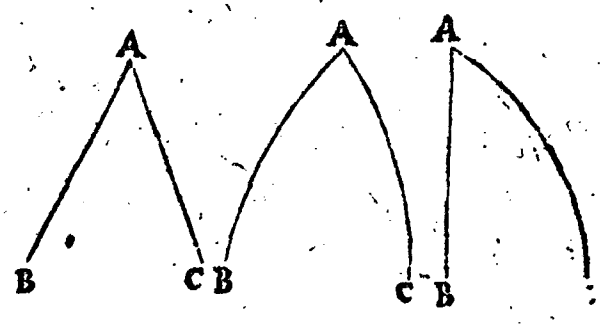
7. Superficie plane, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes lignes.

Ceſte definition de la ſuperficie plane a quelque ſimilitude & rapport à celle de la ligne droicte: car comme la ligne qui eſt également eſtendue entre ſes poincts, eſt appellee ligne droicte, ainſi auſſi la ſuperficie qui eſt également eſtendue entre ſes lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne ſont plus eſleuees ny abaiſſees que les extremes, eſt appellee ſuperficie plane. Et derechef, comme la ligne droicte eſt la plus courte d'entre ſes extremitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt la plus courte, ou briefue de toutes celles qui ont meſmes extremitez. C'eſt encore pour la méme raiſon que quelques autres deſcriuans la ſuperficie plane, diſent que c'eſt celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ſes extremes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle vne ligne droicte peut eſtre accommodee. Comme par exemple, la ſuperficie ABCD ſera dicte plane, ſi la ligne droicte AE ſe mouuant à l'entour du poinct immobile A, en ſorte qu'elle vienne à eſtre la meſme que AF, puis la meſme que AG, & puis encore la meſme que AH, en apres la meſme que AI, & finalement la meſme que AK; elle ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abaiſſé l'vn que l'autre, ains que tous les poincts de ladite ſuperficie ſoient touchez d'icelle ligne mouuante AE, & en quelque ſorte raclez par icelle. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les vns plus eſleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroicts d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade, ou bien l'exterieure d'vn globe, ou d'vne colomne ronde, & auſſi d'vn cone, &c. ſont appellees ſuperficies courbes: & icelles ſont de pluſieurs ſortes, c'eſt à ſçauoir conuexe, comme la ſuperficie exterieure d'vne ſphere, ou d'vne colomne ronde: & concaue, comme la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade: mais la contemplation de toutes ces choſes appartient à la Stereometrie dont traicte Euclide és cinq derniers liures: c'eſt pourquoy il explique ſeulement icy la ſuperficie plane, de laquelle il traicte és ſix premiers liures. Et cependant eſt à noter que ceſte ſuperficie eſt ſouuentesfois appellée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut touſiours entendre vne ſuperficie plane.



8. Angle plan, eſt l'inclination de deux lignes, l'vne à l'autre ſe touchant en vn plan non directement.

Euclide enſeigne icy que quand deux lignes conſtituees en quelque ſuperficie plane concurrent en vn poinct d'icelle ſuperficie, & ne ſe rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pour ce que les deux lignes A B, & A C, concurrent en A, & ne ſe rencontrent pas directement; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au poinct A, s'appelle angle: Et d'autant qu'iceluy angle eſt conſtitué au meſme plan qu'icelles deux lignes A B & A C, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les vns ſont nommez angles ſolides, deſquels traicte cy apres Euclide en la Stereometrie; & les autres ſont appellés angles ſpheriques, deſquels traictent amplement Menelaus & Theodoſe en leurs elemens ſpheriques, comme nous auons auſſi faict en nos triangles ſpheriques.

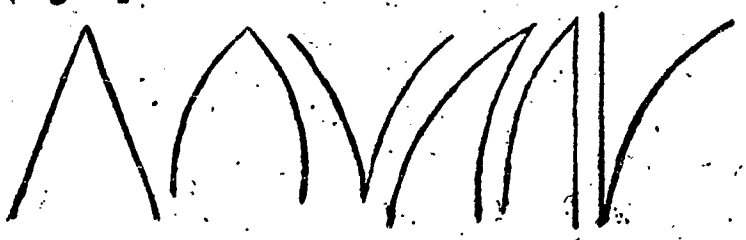


Or quant à l'angle plan cy-deſſus deffiny eſt à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan conſiſte en la ſeule inclination des lignes qui le conſtituent, & non pas en la longueur d'icelles lignes; car le prolongement deſdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conſequent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont eſtimé qu'afin que deux lignes faſſent angle, il eſtoit neceſſaire qu'eſtans continuées du poinct de leur rencontre, elles s'entrecoupaſſent en iceluy, dont s'enſuiuroit que deux cercles s'entretouchans en vn plan, ou qu'vne ligne droicte touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui eſt contre l'intention d'Euclide, ainſi qu'il appert, tant par ceſte definition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a auſſi bien demonſtré Clauius ſur la meſme propoſition, où il refute Pelletier, qui diſoit que la ligne droicte touchant le cercle, ne faiſoit angle; c'eſt pourquoy ceux qui tiennent encore ceſte opinion, ſe mocquent bien d'Euclide, de Clauius, & autres Geometres, qui diſent qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, fait vn angle contigent, ou d'attouchement.

9. Que ſi les lignes comprenant l'angle ſont droictes, l'angle ſera appelé rectiligne.

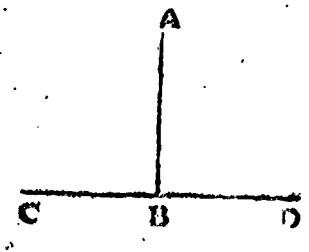
Tout angle plan eſt faict, ou de deux lignes droictes, & alors il ſe nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, &

alors on l'appelle angle curuiligne; ou bien d'vne ligne droicte & d'vne courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curuilignes peuuent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cauſe de la diuerſe inclination ou habitude des lignes courbes, ainſi qu'il appert manifeſtement aux angles plans de la figure cy appoſee.



10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, fait les angles de part & d'autre eſgaux entr'eux, les angles ſont droicts; & la ligne tombante, eſt perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.

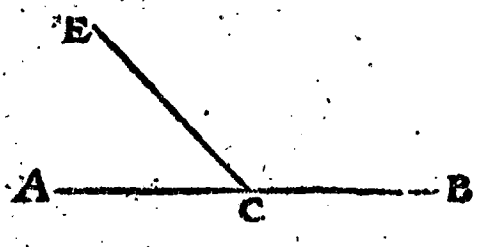
Il y a de trois ſortes d'angles rectilignes, ſçauoir eſt droict, obtus & aigu: le premier deſquels Euclide definit icy auec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres, il les definit aux deux definitions prochainement ſuiuantes. Il dit donc icy que ſi vne ligne droicte tombe ſur vne autre ligne droicte, en ſorte qu'elle faſſe les angles de part & d'autre eſgaux, ce qui aduient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'vn coſté que de l'autre; chacun d'iceux angles eſt appellé angle droict, & la ligne ainſi tombante, eſt dite perpendiculaire à celle-là ſur laquelle elle tombe. Comme par exemple, ſi la ligne droicte A B tombe ſur la ligne droicte C D, en ſorte qu'elle ne s'incline pas plus d'vn coſté que de l'autre, les deux angles, quelle faict au poinct B ſeront eſgaux entr'eux, & chacun d'iceux ſera nommé angle droict; mais la ligne A B ſera dicte perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Par meſme raiſon, la ligne droicte C B ſera auſſi dicte perpendiculaire à la ligne droicte A B, encore qu'icelle C B faſſe vn ſeul angle droict auec A B; Et ce d'autant que ſi ladicte ligne A B eſtoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit vn autre angle eſgal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle eſt droict, ou que la ligne qui le conſtitue, eſt perpendiculaire à vne autre, il faut ſeulement prouuer que ledit angle eſt eſgal à celuy de l'autre coſté. Semblablement, ſi quelque angle eſt dict droict, ou que l'vne des lignes qui le conſtitue ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra auſſi conclurre que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre coſté; car ſi ces angles-là n'eſtoient égaux, ils ne ſeroient nommez angles droicts, ainſi qu'il appert



tant par la ſuſdite definition, que par les deux ſuiuantes.

11. Angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.
12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre s'incline ou panche plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait conſequemment deux angles inégaux, dont l'vn eſt plus grand que l'angle droict, & ſe nomme angle obtus; mais l'autre eſt plus petit, & s'appelle angle aigu. Ainſi pource qu'en cette figure, la ligne droicte EC tombant ſur la ligne droicte AB, s'incline & panche plus du coſté de AC que de la part de BC, les deux angles du poinct C ſeront inégaux, & celuy vers B, qui eſt plus grand & ouuert que le droict ſera dit angle obtus: mais celuy de la part de A, qui eſt plus petit & fermé que l'angle droict, ſera nommé angle aigu.



Et d'autant que ſouuentefois en vn plan concurrent plus de deux lignes à vn meſme poinct, & par conſequent y conſtituent pluſieurs angles, les Geometres ont accouſtumé (pour euiter confuſion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, deſquelles celle du milieu denotte le poinct auquel les lignes conſtituent l'angle, & celles des extremes ſignifient les commancemens d'icelles lignes qui font iceluy angle: tellement qu'en la figure cy-deſſus l'angle obtus que nous auons dit eſtre celuy de la part de B, ſera exprimé & entendu par ces trois lettres ECB ou BCE, à cauſe qu'il eſt conſtitué au poinct C, & contenu par les deux lignes droictes EC, & BC, qui commançant en E & B, ſe vont rencontrer au ſuſdit poinct C. Mais l'angle aigu que nous auons dit eſtre de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres ECA ou ACE, par ce qu'il eſt conſtitué au poinct C, & fait par les deux lignes droictes EC & AC, qui commencent en E & A, & ſe vont rencontrer au ſuſdict poinct C. Ce qu'on doit bien notter, afin de connoiſtre & diſcerner facilement les angles, dont ſera faict mention és demonſtrations ſuiuantes.

13. Terme, eſt l'extremité de quelque choſe.

Ainſi les poincts ſont termes ou extremitez des lignes, les lignes des ſuperficies, & les ſuperficies des corps.

14. Figure, eſt ce qui eſt compris & enuironné d'vn, ou de pluſieurs termes.

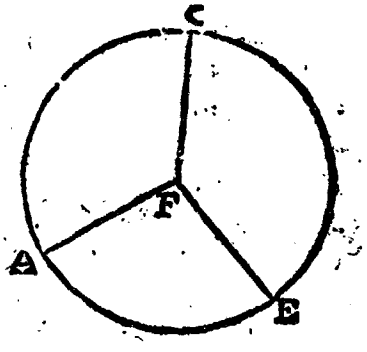
Toute quantité ayant termes, n'eſt pas dicte figure: mais ſeulement celles

que les termes enuironnent : ainſi la ligne terminee par deux poincts, n'eſt pas dite figure : mais toutes ſuperficies, & ſolides, finis & limitez, ſont nommez figures, pource qu'ils ſont enuironnez d'vn ſeul, ou de pluſieurs termes: d'vn ſeul, comme le Cercle, l'Ellipſe, & la Sphere: de pluſieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, eſt vne figure plane, contenue par vne ſeule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont en icelle figure, ſont égales entr'elles.

16. Et ce poinct-là eſt appellé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaicte eſt le cercle, lequel, ſelon que le definit icy Euclide, eſt vne figure plane contenue & enuironnee d'vne ſeule ligne, à laquelle toutes celles menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont dedans la figure, ſont égales entr'elles: & ceſte ligne-là s'appelle periphere, ou circonference du cercle; & le ſuſdict poinct, centre du cercle: Comme par exemple, ſi vne ſuperficie ou eſpace eſt enuironnee d'vne ſeule ligne ACE, & que de quelque poinct d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droictes menees au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, ſont égales entr'elles: telle figure plane ſera appellee cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & enuironne icelle figure, s'appelle periphere, ou circonference du cercle: mais ledit poinct F, eſt nommé centre du cercle.

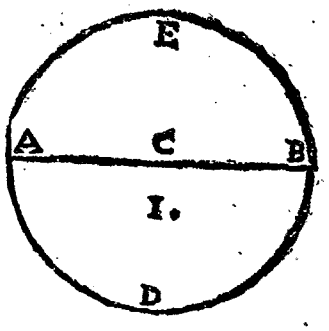


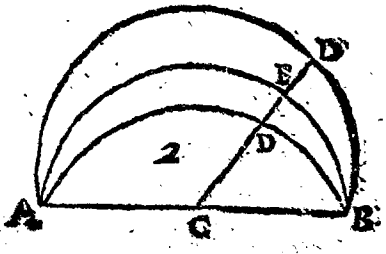
Quelques Geometres definiſſent autrement le cercle, & diſent, que c'eſt vne figure plane, deſcrite par vne ligne droicte finie, laquelle ayant vn des poincts extremes fixe, eſt meuë à l'entour d'iceluy iuſques à ce qu'elle retourne au meſme lieu où elle a commencé à mouuoir: comme ſi la ligne droicte AF ayant le poinct F fixe, eſt entendue ſe mouuoir à l'entour d'iceluy poinct F, tirant de A vers C, E, iuſques à ce qu'elle reuienne au meſme lieu FA, où elle a commencé ſon mouuement; elle deſcrira par iceluy mouuement le cercle ou eſpace ACE, duquel la circonference eſt deſcrite & traſſée par le poinct mobile A; & le poinct fixe F, eſt le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droictes menées à la ſuſdite circonference ACE, ſont égales entr'elles, puis qu'elles prouiennent toutes d'vne ſeule & meſme meſure, c'eſt à ſçauoir de la ligne FA.

17. Diametre du cercle, eſt vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finiſſant de part & d'autre à la circon-

circonference d'iceluy cercle, le diuiſe en deux également.

Si dans vn cercle on mene vne ligne droicte par le centre, qui aille de part & d'autre iuſques à la circonference ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en ceſte premiere figure, la ligne droicte A B, qui eſt tiree par le centre C, & va de part & d'autre iuſques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adiouſte Euclide, couppe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie AEB eſt égale à la partie ADB. Ce qui eſt aſſez manifeſte, puiſque ledit diametre AB paſſe par le milieu du cercle, c'eſt à ſçauoir par le centre C : car s'il ne diuiſoit le cercle en deux parties éſgales, les lignes droictes tirées du centre à la circonference, ne ſeroient pas égales, contre la definition du cercle : Neantmoins pluſieurs interpretes d'Euclide rapportent en cet endroict la demonſtration que Proclus dit, en auoir eſté faite par Thales Mileſien, qui eſt telle : Imaginons nous que la partie de cercle ADB ſoit ſuperpoſée & accommodée à l'autre partie du cercle AEB, en ſorte que le diametre AB ſoit commun à l'vne & à l'autre partie. Or la circonference ADB ſe rencontrera totallement auec la circonference AEB, ou bien elle tombera au deſſus d'icelle, ou au deſſoubs : Si elles ſe rencontrent & conuiennent l'vne à l'autre, il eſt euident que ces deux parties là faictes par le diametre AB, ſont égales entr'elles, puiſque l'vne n'excede l'autre. Mais ſi on dit que la circonference ADB ne ſe rencontre pas auec la circonference AEB, ains qu'elle tombe au deſſus ou au deſſoubs d'icelle, comme en la 2. figure, ſoit tiree du centre C vne ligne droicte, laquelle couppe la circonference ADB en D, & la circonference AEB en E ; les deux lignes droictes CD & CE, qui ſont tirées du centre à la circonference d'vn meſme cercle, ſeront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui eſt abſurde, car l'vne n'eſt que partie de l'autre. Donc l'vne de ces circonferences là ne tombera pas au deſſus ny au deſſoubs de l'autre ; mais ſe rencontreront & conuiendront totallement l'vne auec l'autre, & par conſequent ſeront égales : ce qu'il falloit demonſtrer.



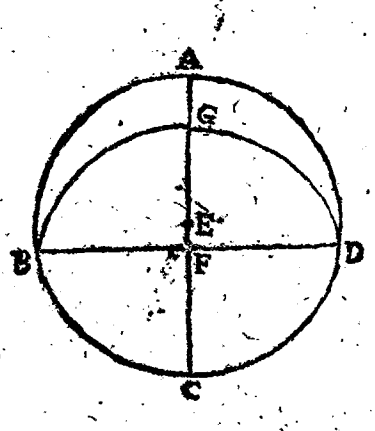


De ceſte demonſtration il appert que le diametre ne couppe pas ſeulement la circonference en deux egallement, mais auſſi toute l'aire & ſuperficie du cercle : Car puiſque les demyes circonferences conuiennent & s'accordent entr'elles, comme il a eſté demonſtré ; les ſuperficies contenuës & encloſes entre le diametre & chacune d'icelles demy circonferences conuiendront auſſi entr'elles, puiſque l'vne n'excede l'autre ; & par conſequent elles ſeront égales entr'elles.

18. Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & de moitié de la circonference.

19. Portion ou ſegment de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë ſoubs le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, eſt ditte demy cercle; car il a eſté demonſtré cy deſſus qu'icelle figure eſt moitié du cercle AEBD, & ce à cauſe que le diametre, ou ligne droicte AB, qui le diuiſe en deux parties, paſſe par le centre C: Mais quant vne ligne droicte, qui ne paſſe pas par le centre du cercle, le diuiſe en deux parties; chacune d'icelles parties contenuë ſoubs ladite ligne droicte, & vne partie de la circonference, eſt nommée ſegment ou portion de cercle; & ces deux parties ſont inegales, car celle où eſt le centre eſt plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoit vne ligne droicte BFD, qui couppe ledit cercle en deux parties ſans paſſer par ledit centre E; la partie BAD, compoſee ſoubs la ligne droicte BD, & la partie de circonference BAD, s'appelle ſegment ou portion de cercle, comme auſſi BCD, qui eſt contenuë ſoubs la meſme ligne droicte BD, & la circoference BCD. Or il eſt aſſés euident que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, attendu que ſi de B par le centre E on menoit vn diametre, il coupperoit le cercle en deux moitiez, chacune deſquelles ſeroit plus grande que la portion BCD, & moindre que l'autre portion BAD: Neantmoins Clauius & quelques autres interpretes d'Euclide le demonſtrent ainſi. Soit conceu ou imaginé que par le centre E, ſoit mené le diametre AC perpendiculaire à BD: donc ſi les ſuſdites portions BAD, & BCD, ſont dictes eſgales, & que la portion BCD, ſoit entendue ſe mouuoir à l'entour de la ligne droicte BD, en ſorte qu'elle tombe ſur l'autre portion BAD; ceſte portion là conuiendra auec ceſte-cy, & la ligne droicte CF à la ligne droicte AF, à cauſe que par la 10. defin. les angles du poinct F ſont droicts & egaux: Parquoy la ligne droicte FC, qui eſt maintenant la meſme que FA, ſera plus grande que EA, qui n'eſt que partie d'icelle FA. Mais d'autant que EC, eſt égale à EA, eſtans toutes deux menees du centre E à la circonference; FC ſera pareillement plus grande que EC, la partie que le tout: Ce qui eſt abſurde. Donc la portion BCD ne conuiendra pas à la portion BAD; ains elle tombera dedans icelle, comme eſt la portion BGD, de ſorte que la ligne droicte FG, qui ſera lors la meſme que FC ſera moindre que EA ou EC; car ſi on diſoit qu'elle tombe dehors, comme ſi le cercle eſtoit BCDG, duquel le centre fuſt E; auſſi la portion

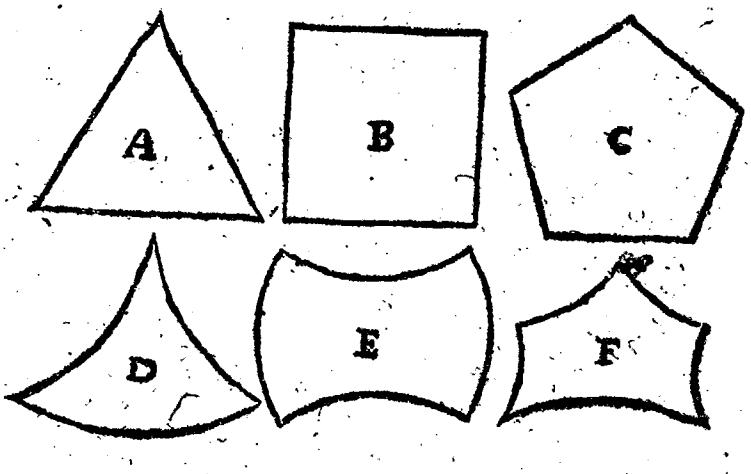


BCD tomberoit dehors BGD, ainſi que la portion BAD: Derechef FA, qui ſeroit lors la meſme que FC, ſeroit plus grande que EG, c'eſt à dire que EC; & partant la partie FC ſeroit derechef plus grande que le tout EC: Ce qui eſt abſurde. Il eſt donc manifeſte que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, puis que ceſte-cy eſt égale à la portion BGD, qui eſt partie de la portion BAD. Car puiſque il a eſté demonſtré que la portion BCD, meüe à l'entour de la ligne droicte BD, ne peut conuenir ſur la portion BAD, ne tomber hors icelle; elle tombera totalement au dedans comme BGD.

Or ces deux definitions n'eſtoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne ſont employées en ce premier liure, mais bien au troiſieſme, auquel la derniere eſt repetée.

20. Figure rectiligne, eſt celle qui eſt compriſe de lignes droictes.

Apres auoir definy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide paſſe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce ſont celles contenues & encloſes de lignes droictes, & telles ſont les trois figures cy deſſous cottees A, B, C; par conſequent les figures planes compriſes & enuironnees de lignes courbes, comme celles cottees D, E, F, ſont appellees figures courbelignes, ou curuilignes: mais les figures qui ſont circuites & encloſes en partie de lignes droictes, & en partie de lignes courbes, ſont nommees figures mixtes.



21. Figure de trois coſtez, eſt celle qui eſt compriſe de trois lignes droictes.

Euclide voulant deſcrire diuers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilateres, ou de trois coſtez, & dit que ce ſont celles qui ſont contenues & enuironnees de trois lignes droictes: & d'autant que telles figures ont touſiours trois angles, on les appelle communement triangles. Ainſi la figure A cy deſſus, laquelle eſt contenue ſoubs trois lignes droictes,

qui constituent trois angles, sera nommee figure trilatere, ou plustost triangle rectiligne; & y en a de diuerses especes, qui seront declarees cy apres: mais la figure D, circuite & enclose de trois lignes courbes, sera dicte triangle curuiligne.

22. Figure de quatre costez, est celle qui est comprise de quatre lignes droictes.

Apres les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres, ou de quatre costez, c'est à sçauoir les figures contenues soubs quatre lignes droictes lesquelles constituent aussi quatre angles; & pour ce sont elles souuent appellees quadrangles: ainsi entre les figures precedentes celle cottée B, comprise & enclose de quatre lignes droictes qui constituent quatre angles, sera appellee quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diuerses especes cy apres declarees: mais la figure cottee E enclose de quatre lignes courbes sera dicte quadrangle curuiligne.

23. Figures multilateres, ou de plusieurs costez, sont celles qui sont compriſes de plus de quatre lignes droictes.

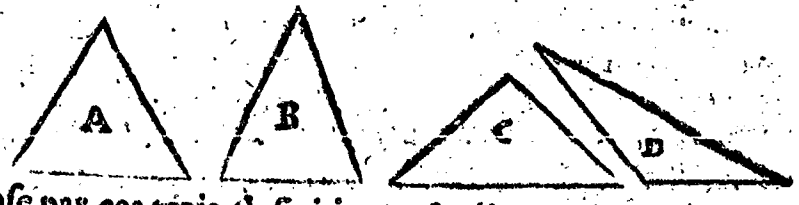
Le nombre des especes de figures rectilignes estant infiny, Euclide s'est contenté de definir, & particulierement denommer les deux premieres especes cy-dessus declarees, c'est à sçauoir celles contenues soubs trois & quatre lignes droictes: & quant aux autres especes de figures, qui sont contenues & encloses par plus de quatre lignes droictes, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulierement quelqu'vnes de ces figures multilateres, prenent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainsi les figures cy deuant cottees C, & F, lesquelles sont compriſes & enuironnées de cinq lignes, qui constituent cinq angles, sont appellées *Pentagones*: Et celles contenues de six lignes, sont nommées *Hexagones*; de sept, *Heptagones*; de huict, *Octogones*; de neuf, *Enneagones*; de dix, *Decagones*; de vnze, *Endecagones*; de douze, *Dodecagones*, &c.

24. Or des figures de trois costez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.

25. Triangle Isoscele, qui a deux costez egaux seulement.

26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.

Il y a diuerses especes de triangles rectilignes, soit qu'on les considere selon les costez, soit qu'on ait esgard à leurs angles: considerant les costez il y en a de trois especes, lesquelles Euclide expose par ces trois definitions; & dit premieremẽt que



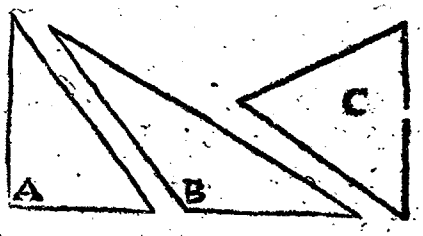
le triangle qui a tous les trois costez egaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral: Mais les triangles qui n'ont que deux costez egaux, comme B & C, s'appellent triangles Isoscelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois costez inégaux, comme D, est nommé triangle scalene. Or les triangles Equilateraux sont touſiours vniformes & d'vne meſme ſorte: mais les Iſoſcelles, & les Scalenes ſont diuerſifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois coſtez, celle ſe nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.

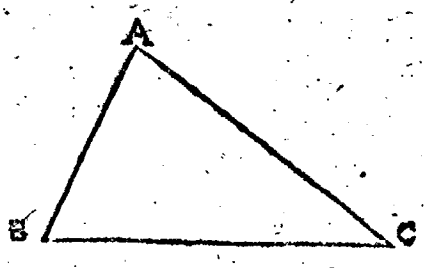
28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide conſidere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, leſquels triangles ſont de trois ſortes, c'eſt à ſçauoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles ſont ceux qui ont vn angle droict; & tel eſt icy le triangle A: mais les triangles ambligones, ſont ceux qui ont vn angle obtus, comme eſt icy le triangle B: & les triangles oxigones, ſont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel eſt icy le triangle C.

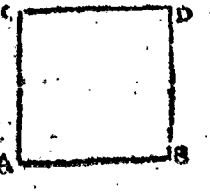


Or eſt à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes des trois qui le contiennent eſtans priſes pour deux coſtez, la troiſieſme reſtante a accouſtumé d'eſtre appellée par les Geometres, la baſe du triangle, ſoit qu'icelle ligne ſoit le coſté infime du triangle, ou non: tellement que chacune deſdites trois lignes qui conſtituent & enferment le triangle peuſt eſtre priſe pour baſe: Ainſi au triangle A B C, les lignes A B, & A C eſtans priſes pour les deux coſtés, la troiſiéme lig. B C ſera la baſe: mais ſi on prend A B, & B C pour les deux coſtés, A C ſera la baſe du triangle.



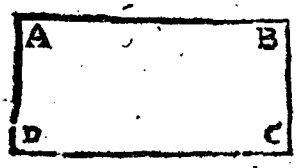
30. Mais des figures de quatre coſtez; celle qui a les quatre coſtés égaux, & les quatre angles droicts s'appelle quarré.

Apres les figures trilateres, Euclide expoſe les quadrilateres, qui ſont de cinq ſortes: la premiere d'icelles, qui eſt equilaterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainſi la figure quadrilatere A B C D, ayant tous les quatre coſtez égaux, & tous les quatre angles droicts ſera appellee quarré.



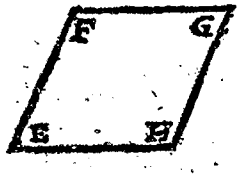
31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les costez égaux.

La seconde figure quadrilatere s'appelle quarré long, à cause qu'estãt plus long d'vne part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droicts. Ainsi la fig. quadrilatere A B C D sera appellée quarré lõg, car elle a les quatre angles droicts & non pas tous les costés égaux entr'eux, ains seulement les costés opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez A D, B C, qui sont aussi egaux entr'eux.



32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

La troisiesme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez egaux entr'eux, ainsi que le quarré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droicts; ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costés sont esgaux entr'eux, & les quatre angles non droicts, ains obtus & aigus, sera appellé Rhombe.

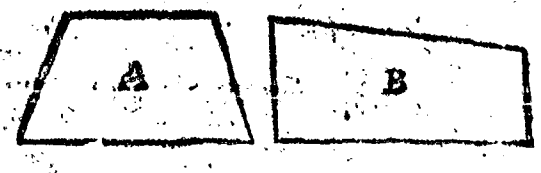


33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les costez opposez aussi egaux entr'eux, sans estre equilateral, ny rectangle.

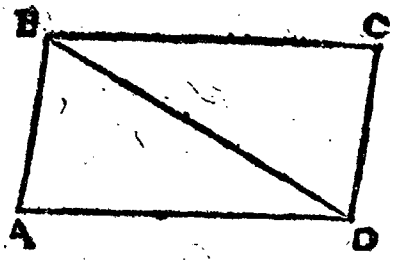
La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais à les costés opposés egaux entr'eux, & les angles opposés aussi égaux entre eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costés opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costés opposés I L, K M, qui sont pareillement egaux entr'eux, mais les angles opposés I, M, egaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi egaux entr'eux.

34. Toutte autre figure de quatre costez, est appellée trapeze.

Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçauoir qui n'est ny quarré, ny quarré long, ny Rhombe, ny Rhomboide, s'appelle trapese; & telles sont ces deux figures A & B; car l'vne ny l'autre n'est equilatere ny rectangle, ny n'a les angles opposez egaux, ny tous les costez opposez aussi égaux.

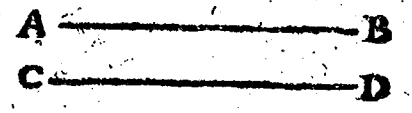


Or eſt icy à notter que quand d'vn angle de quelconque figure quadrilatere on tire vne ligne droicte à l'angle oppoſé, cette ligne eſt appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainſi au quadrilatere ABCD la ligne BD, menee de l'angle B à ſon oppoſé D eſt dicte diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droictes paralleles, ſont celles qui eſtans ſur vn meſme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne ſe rencontrent iamais.

Afin que les lignes droictes ſoient dictes paralleles, ou equidiſtantes, il ne ſuffit pas qu'eſtans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à ſe rencontrer; mais il eſt auſſi neceſſaire qu'elles ſoient en vne meſme ſuperficie plane: Car pluſieurs lignes droictes n'eſtans en vne meſme ſuperficie, pourroient bien eſtre prolongées à l'infiny & ne ſe rencontrer iamais, leſquelles toutesfois ne ſeroient dites paralleles. Comme par exemple, ſi deux lignes droictes poſées de trauers au milieu de l'air ne ſe touchent point, bien qu'elles ſoient prolongées tant qu'on voudra, elles ne ſe rencontreront iamais, & toutesfois elles ne ſeront pas dittes paralleles. Parquoy les deux lig. droictes AB, & CD, leſquelles ſont en vne meſme ſuperficie plane, & qui eſtans prolongees à l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne ſe rencontrent iamais, ſeront dictes lignes paralleles.



Or icy finiſſent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce meſme liure eſt ſouuent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, leſquels Euclide n'a point definy, nous adjouſterons icy leurs definitions.

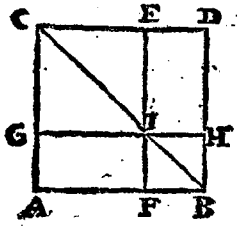
36. Parallelogramme, eſt vne figure quadrilatere qui a les coſtez oppoſez parallels, ou equidiſtans.

Telle figure eſt touſiours l'vne de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, & Rhomboide, car elles ont toutes leurs coſtez oppoſés parallels.

37. Mais quand en vn parallelogramme on mene vn diametre, & deux lignes droictes paralleles aux coſtez leſquelles couppant iceluy diametre à vn méme poinct, diuiſent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes; ces deux là par leſquels le diametre ne paſſe

point, ſont appellez complemens: mais les deux autres par leſquels le diametre paſſe, ſont dicts eſtre à l'entour du diametre.

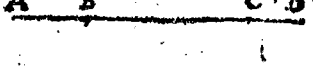
Soit vn parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & la ligne EF couppant iceluy diametre au poinct I, ſoit parallele aux coſtez AC, BD; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au meſme poinct I, ſoit parallele aux coſtés A B, CD. Il eſt manifeſte que tout le parallelogramme eſt diuiſé par leſdites 2 lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrames, deux deſquels, ſçauoir A G I F, & DEIH, par leſquels le diametre BC ne paſſe point, ſont appellez par les Geometres complemens, ou ſupplemens des deux autres parallelogrammes B F I H, C E I G, leſquels ſont dits eſtre à l'entour du diametre, à cauſe que par iceux paſſe le diametre



PETITIONS OV DEMANDES.

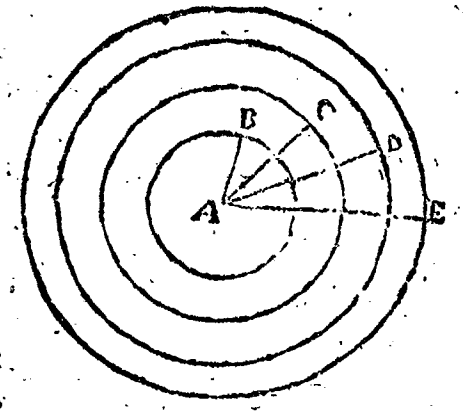
1. D'vn poinct donné à vn autre poinct mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnée & terminée.
3. Deſcrire vn cercle de quelque centre & interualle que ce ſoit.

Euclide ne ſe ſert en ces Elemens-cy que de deux ſortes de lignes ſimples, ſçauoir eſt de la droicte & de la circulaire, la deſcription deſquelles eſtant fort facile, il demande icy qu'on la luy concede & accorde, ſans qu'il ſoit contrainct de demonſtrer qu'elle eſt poſſible: ce qui eſt toutefois manifeſte; car puiſque la ligne eſt vn flux & coullement imaginaire du poinct, & partant la ligne droicte eſtre vn flux procedant de droict chemin, & le plus court qui puiſſe eſtre d'vn lieu à vn autre, il eſt certain que ſi on entend quelque poinct ſe mouuoir directement à vn autre, vne ligne droicte ſera menee d'vn poinct à l'autre. Parquoy on ne peuſt pas nier que depuis le poinct A iuſques à quelconque poinct B, on ne puiſſe mener vne droicte ligne, comme A B, ainſi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere des trois petitions ſuſdictes. Et ſi on entend le meſme poinct ſe mouuoir encore plus outre directement & ſans aucunement decliner çà ne là, la ligne droicte terminee ſera prolongee; & ce prolon-



gemens

gement ſe pourra faire à l'infiny, veu que nous pouuons entendre ce poinct là ſe mouuoir infiniment : Et partant perſonne ne pourra nier que la ligne droicte AB cy-deſſus ne puiſſe eſtre continuée iuſques en C, puis encore iuſques en D, & ainſi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais ſi on conçoit quelconque ligne droite terminee ſe mouuoir à l'entour d'vn de ſes poincts extremes qui demeure fixe, iuſques à ce qu'elle retourne au meſme lieu où elle a commencé ſon mouuement, ſera deſcrit vn cercle, & fait ce qui eſt requis par la 3. petition, comme il appert en ces quatre lignes droictes AB, AC, AD, AE, chacune deſquelles eſtant menée à l'entour du centre A, deſcrit vn cercle ſelon la grandeur & interualle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clauius a adiouſté la ſuiuante.

4. Eſtant donné quelconque grandeur, on en peuſt prendre vne autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continue peuſt eſtre infiniment augmentee par addition, & diminuée par diuiſion, il ne ſe peut donner quantité continue ſi grande, qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus grande ; ny vne ſi petite qu'il ne s'en puiſſe encore donner vne plus petite. Ce qui eſt dit icy touchant l'addition, eſt auſſi veritable aux nombres ; car chaque nombre peut eſtre augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'vnité, iaceoit qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuiſible.

AXIOMES OV communes ſentences.

1. Les choſes eſgales à vne meſme, ſont egales entr'elles.

A ce premier axiome, Clauius a adiouſté, qu'vne choſe qui eſt plus grande ou plus petite qu'vne des egales, eſt auſſi plus grande ou plus petite que l'autre : Et ſi l'vne des choſes egales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre eſt pareillement plus grande ou plus petite que la meſme grandeur.

2. Si à choſes egales, on adiouſte choſes egales, les tous ſont egaux.

3. Si de choſes egales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont egaux.

4. Si à choſes inegales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont inegaux.

A cet axiome Clauius a adjouſté, que ſi à choſes inegales on adiouſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite; les touts ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & ceſtuy-cy plus petit.

5. Si de choſes inegales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont inegaux.

A ceſte notion Clauius adiouſte auſſi, que ſi de choſes inegales on oſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les reſtes ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & ceſtuy-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choſes ou quantitez egales, il faut auſſi entendre vne meſme commune à pluſieurs; Car ſi à choſes égales on y en adiouſte vne meſme commune, les touts ſeront égaux. Et ſi de choſes égales on en retranche vne commune, les reſtes ſeront auſſi égaux. Et ſi a choſes inegales on en adjouſte vne commune; où à vne meſme choſe commune, on adjouſte choſes inegales, les tous ſeront inegaux. Et ſi de choſes inegales, on en retranche vne meſme commune, ou d'vne meſme choſe, on en retranche d'inegales, les reſtes ſeront inegaux.

6. Les choſes doubles d'vne autre ſont egales entr'elles.

Clauius adjouſte à cet axiome, que ce qui eſt double d'vne des choſes égales eſt pareillement double de l'autre: Mais il eſt auſſi manifeſte que les choſes qui ſont triples d'vne meſme, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. ſont égales entr'elles.

7. Les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont egales entr'elles.

Il eſt auſſi euident que les choſes égales entr'elles ſont moitiés d'vne meſme: Et ſemblablement que les choſes qui ſont tierces parties d'vne meſme, ou quartes, ou cinquieſmes, &c. ſont auſſi egales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par vne meſme quantité on doit auſſi entendre les quantitez egales, car les choſes doubles, triples, quadruples, &c. de choſes egales, ſont auſſi egales entr'elles; item, les choſes qui ſont moitiez, ou tierces parties &c. de choſes egales, ſont pareillement egales entr'elles.

8. Les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux grandeurs ſeront egales entr'elles, ſi eſtans poſees l'vne ſur l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux enſemble s'adjuſtent entr'elles: cõme deux lignes droictes, ſeront dictes eſtre egales entr'elles, ſi l'vne eſtant poſee ſur l'autre, celle qui eſt poſée deſſus s'adjuſte à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne ſoit excedee d'icelle. Ainſi auſſi deux angles rectilignes ſeront egaux entr'eux quand le ſommet de l'vn, eſtant poſé ſur le ſommet de l'autre, l'vn n'excede l'autre, mais les lignes de l'vn tombent totalement ſur celles de l'autre: car par ainſi les inclinations des lignes ſeront, egales combien que ſouuentefois icelles lignes ſoient inegales entr'elles. Ainſi auſſi deux ſuperficies ſeront eſgales entr'elles, quand l'vne eſtant poſee ſur l'autre, elle ne l'excede, ny n'eſt excedee par icelle, mais s'adjuſtent totalement entr'elles. Quelqu'vn expliquant cette notion a dit que conuenir, c'eſt auoir les extremitez ſur les extremitez: ce qui n'eſt pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple, vne ligne droicte peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne ligne courbe, laquelle neantmoins, ne luy ſera egale. Ainſi auſſi vne ligne courbe peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne autre ligne courbe, laquelle ne luy ſera pas pourtant egale. Or il eſt manifeſte que de cet axiome on peut bien conuertir & prendre pour principe, *que les lignes droictes egales conuiennent*: Auſſi *que les angles rectilignes egaux conuiennent*: Semblablement, *Que les ſuperficies planes egales & ſemblables conuiennent*. On peut bien encore tirer quelques autres conuerſes de cet axiome: mais de le vouloir conuertir vniuerſellement (comme quelques vns) c'eſt ſe moquer, veu que ſi on trouue vne ligne courbe egale à vne droicte, elles ne conuiendront pas pourtant: & auſſi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiligne egal, leſquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire meſme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne: leſquels pourtant ne peuuent iamais conuenir.

9. Le tout eſt plus grand que ſa partie.

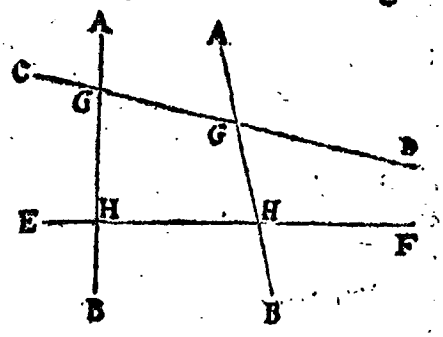
10. Tous les angles droicts ſont egaux entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn angle droict, eſt auſſi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles interieurs d'vn meſme coſté plus petits que deux droicts, icelles deux lignes eſtans continuées à l'infiny, ſe rencontreront du coſté où les angles ſont plus petits que deux droicts.

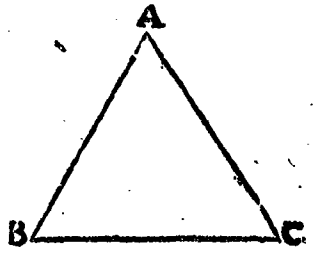
Comme par exemple, ſi la ligne droicte AB, tombant ſur les deux lignes

droictes CD, EF, & les couppant aux poincts G, H, faict les deux angles interieurs DGH, FHG, pris ensemble plus petis que deux droicts, icelles deux lignes CD, EF, estans continuees à l'infiny se rencontreront de la part de D, F, où les susdits angles interieurs sont faits moindres que deux droicts: Car il est manifeste que de l'autre costé, sçauoir est vers C, E, l'espace d'entre lesdites deux lignes CD, EF, s'eslargira tousiours de plus en plus; mais de cestuy cy, il s'estrecira en sorte que finallement icelles lignes se rencontreront à vn poinct.



12. Deux lignes droictes n'enferment pas vn espace.

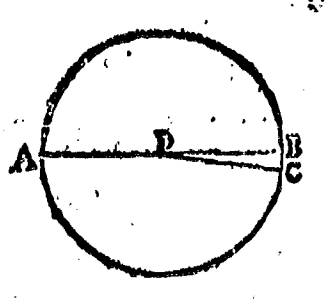
Vne seule ligne courbe enferme bien vn espace, comme font aussi vne ligne droicte & vne courbe, mais deux droictes ne le peuuent faire, ains il en faut du moins 3 pour contenir & enclotre vne espace, cõme il appert en ceste figure, en laquelle les 2 lignes droictes AB, & BC, qui font l'angle B, estans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne se joindront point, mais au contraire elles se dilateront tousiours de plus en plus; tellement que pour enclore l'espace d'entre icelles deux lignes, il sera necessaire d'en mener vne troisiesme, comme AC.



A ces 12 axiomes, Clauius & autres interpretes d'Euclide, ont encore adiousté les 8 suiuans.

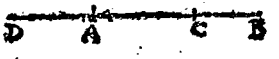
13. Deux lignes droictes se rencontrans indirectement n'ont pas vn mesme & commun segment.

Combien que par la nature de la ligne droicte, il soit assez manifeste que deux lignes droictes, se rencontrans de trauers, ne peuuent auoir aucune partie commune tant petite qu'elle puisse estre, outre le poinct de leur rencontre; si est ce toutesfois que Proclus le demonstre ainsi: Que deux lignes droictes ADB, ADC ayent, s'il est possible, vne partie commune AD. Du centre D, & de l'interualle d'icelle AD, soit d'escrit vn cercle couppant les deux lignes droictes proposees aux poincts B & C. Donc les circonferences AB, & ABC seront égales entr'elles: (car elles sont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC sont posez diametres)



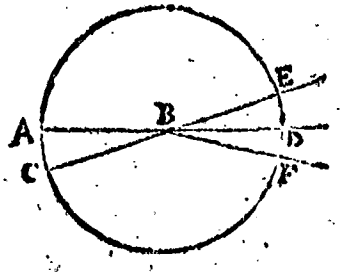
la partie & le tout : ce qui eſt abſurde. Donc deux lignes droictes, &c.

Or nous n'auons pas rapporté cet axiome, ny auſſi les ſept autres ſuiuans, tout de meſme qu'ils ſe trouuent dans Clauius & autres Interpretes d'Euclide, ains auons changé quelques mots aux vns, & adiouſté aux autres, afin d'oſter de ceux-là tout doubte & ambiguité, & ne laiſſer en ceux-cy aucune defectuoſité : comme par exemple, en ceſtuy-cy nous auons adiouſté *ſe rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droictes peuuent bien auoir vn commun ſegment, quand elles ſont poſees directement, & conſtituent comme vne ſeule ligne droicte, ainſi qu'il appert icy aux deux lignes droictes DC & BA, qui ont la partie ou ſegment AC commun : mais quand elles ſont poſees de trauers & indirectement, elles ne peuuent auoir aucune partie cõmune outre le poinct de leur rencontre.



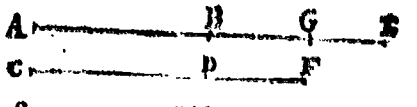
14. Deux lignes droictes ſe rencontrans à vn poinct indirectement, ſi elles ſont toutes deux prolongees, elles s'entrecoupperont neceſſairement en iceluy poinct.

Cet axiome depend auſſi de la nature de la ligne droicte, & toutesfois Clauius le demonſtre ainſi. Que deux lignes droictes AB, CB ſe rencontrent indirectement au poinct B : ie dis qu'icelles lignes eſtãs prolongees s'entrecoupperont à iceluy poinct B, ſçauoir eſt que CB prolongee tombera, comme en E, au deſſus de AB prolongee. Car ſi CB continuee ne tomboit au deſſus de AB prolongee, ou elle conuiendroit auec icelle AB continuee, de ſorte qu'elle paſſeroit par D, & par ainſi les deux lignes droictes ABD, CBD auroient vn meſme ſegment BD commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au deſſoubs de AB prolongee, comme en F, tellement que CBF ſeroit vne ligne droicte : Donc du centre B, & de quelconque interualle ſoit deſcrit vn cercle ACFD, couppant les lignes droictes AB, CB prolongees en D, F. Or puis que l'vne & l'autre ligne droicte ABD, CBF, paſſe par le centre B, tant ACD que CF ſera demy cercle par la 18 def. & conſequemment les circonferences ABD & CF ſeront égales entr'elles, le tout & la partie : ce qui eſt abſurde.



15. Si à choſes égales on adjouſte choſes inégales, l'excez des toutes ſera le meſme que l'excez des adiouſtees.

Aux grandeurs egales AB, CD, eſtans adiouſtees les inégales BE, DF, deſquelles la difference ou excés eſt GE ; il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE,

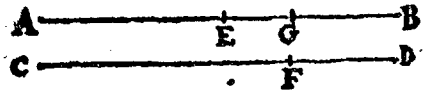


16. Si à choſes inégales on adiouſte choſes egales, l'excez des toutes ſera le meſme que l'excez de celles qui eſtoient au commencement.

Comme ſi (en la figure precedente) aux grandeurs inegales BE, DF, dont l'excez ou difference eſt GE, on adiouſte les grandeurs inegales AB, CD: il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE.

17. Si de choſes egales on retranche choſes inegales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excés des retranchees.

Des grandeurs égales A B, C D eſtans retranchees les inegales, B E, D F dont l'excez eſt E G, il eſt euident que le reſte C F excedera le reſte A E du meſme excez E G.



18. Si de choſes inegales on oſte choſes egales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excez des toutes.

Comme ſi des grandeurs inegales AB, CD, dont l'excez eſt B E, on retranche les grandeurs egales AF, CG, il eſt manifeſte que le reſte F B excedera le reſte G D du meſme excez B E.

19. Le tout eſt egal à toutes ſes parties priſes enſemble.

20. Si vn tout eſt double d'vn tout, & le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi double du reſte.

Comme par exemple, le nombre total 24, eſtant double du nombre total 12: & 18, retranché de celuy-là, double de 9, retranché de ceſtuy-cy; 14, reſte du premier tout, ſera auſſi double de 7, reſte du ſecond tout.

ELEMENT PREMIER.

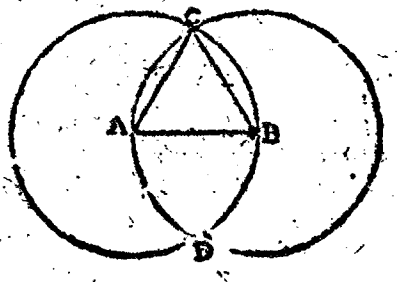
PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOit la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interuale de AB, soit descrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'interualle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'vn desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

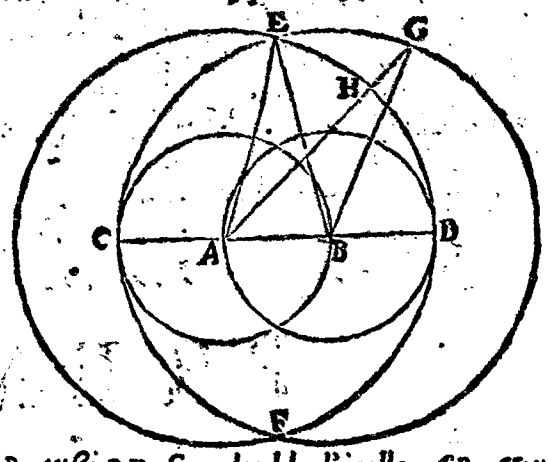
Car le costé AB, est egal au costé AC par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé BA est égal au coste BC. Dõc par la 1. coñ. sent. les costés CA, & CB seront égaux, chacun estant égal à AB: & partant le triangle ABC decrit sur AB, est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur vne ligne droitte donnee vn triangle Isoscelle, & vn Scalene, ce que nous ferons aussi en cette maniere. Soit vne ligne droitte donnee AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient descrits deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'autre

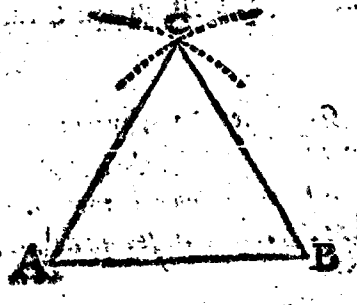
vers les circonferences iuſques en C & D: puis du centre A, & interuale AD, ſoit deſcrit le cercle DEF: Item, du centre B, & interuale BC, le cercle CEF, coupant le premier és poincts E & F, de l'vn ou l'autre deſquels, ſçauoir de E, ſoient menees aux poincts A & B, les deux lignes EA, EB: Ie dis que le triangle AEB, fait ſur la ligne donnee AB, eſt Iſoſcelle, qui eſt que les deux coſtez AE, EB, ſont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15 def. AE, eſt egale à la ligne droicte AD, & icelle AD eſt double de AB, veu que BA, & DB, ſont egales entr'elles: auſſi AE ſera double de AB. Derechef, parce que BE eſt egale à BC, & icelle BC eſt double de AB, auſſi BE, ſera double d'icelle AB. Veu donc que l'vn & l'autre coſté AE & BE eſt double de la meſme AB, ils ſeront egaux entr'eux par la 6. com. ſent. & partant plus grands que la ligne AB. Donc le triangle AEB eſt Iſoſcelle. Maintenant, ſi du poinct A, on tire la ligne droicte AG à la circonference EGF, qui ne ſoit la meſme que AE, ou AD, couppant la circonference EHD en H, & de G on mene à B la ligne droicte GB, ſera conſtitué le triangle AGB ſur la ligne AB, lequel ie dis eſtre ſcalene. Car par la 15 def. tant AH, AD, que BG, BC ſont egales. Mais AD, BC ſont doubles de AB: d'icelle ſeront donc auſſi doubles AH, BG: & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG eſt plus grande que AH, ou que BG: le triangle AGB ſera ſcalene: ce qu'il falloit faire.



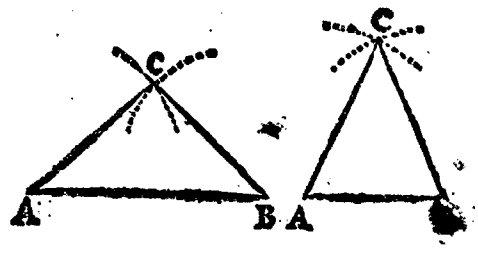
Or eſt icy à noter, que pour briefueté nous mettrons ſouuentesfois ce mot ligne au lieu de ligne droicte: & quelquesfois auſſi nous poſons ſimplement deux lettres capitales: comme par exemple AB, au lieu de dire la ligne droicte AB, c'eſt pourquoy quand on trouuera ledit mot ligne poſé ſimplement, ou bien deux lettres capitales de ſuite, il faudra entendre vne ligne droicte. Semblablement quand on trouuera ce mot angle, ou trois lettres capitales poſees ſimplement de ſuitte ſans aucune explication, il faudra entendre vn angle rectiligne, le lieu duquel ſera touſiours denotté par la lettre du milieu, ainſi que nous auons deſia remarqué à la 12. Def.

Et d'autant qu'en la conſtruction & demonſtration de la plus part des problemes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire pluſieurs lignes qui ne ſont neceſſaires pour pratiquer leſdits problemes, nous enſeignerons en ſuitte de leurs demonſtrations, comme on peut facilement & briefuement conſtruire leſdits problemes, & principalement ceux qui ſont les plus en vſage chez les Mathematiciens, & en la pratique deſquels on peut apporter quelque briefueté.

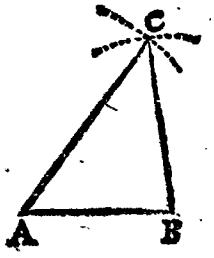
Premierement donc, pour deſcrire vn triangle equilateral ſur vne ligne droicte donnee AB, des centres A & B, mais de l'interualle d'icelle AB, ſoient deſcrits deux arcs de cercles s'entrecouppans en C: puis à iceluy poinct C, ſoient tirees les lignes droictes AC, BC, & ſera fait le triangle equilateral ACB.



Mais pour descrire vn triangle Isoscelle sur ladite ligne AB: des centres A & B, mais d'vn interuale plus grand qu'icelle AB, si on veut les costés plus grands que la ligne donnee, ou moindre (& toutesfois plus grand que la moitié d'icelle AB) si on veut les costez moindres: & soient descrits deux ares s'entrecouppans en C, puis tirées les deux lignes AC, BC, lesquelles feront sur AB le triangle Isoscelle ACB.



Et pour construire vn triangle scalene sur ladite AB, du centre B, & d'vn interualle plus grand que BA soit descrit vn arc, puis du centre A, & d'vn interualle encore plus grand que le precedent, soit descrit vn autre arc qui couppe le premier en C, auquel poinct soient menees les deux lignes droictes AC, BC, & sera fait le triangle scalene ACB.



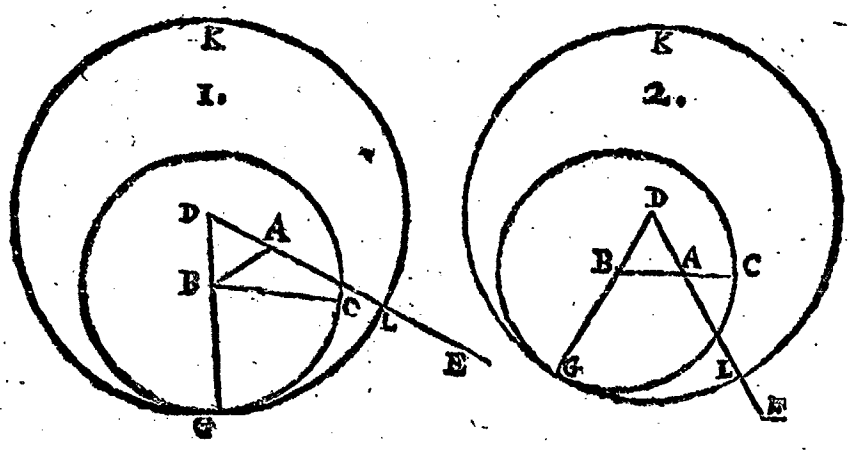
Voila donc comme il faut descrire sur vne ligne donnée vn triangle ou equilateral, ou Isoscelle, ou scalene, & sur-la 22. prop. de ce liure nous enseignerons comme il faut construire quelconque triangle ayant les trois costez egaux à trois lignes droictes donnees.

PROB. 2. PROP. II.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee BC: & il faut du poinct A, mener vne ligne droicte egale à icelle donnee BC.

De l'vn ou l'autre extreme de la ligne donnee BC, sçauoir est de B, comme centre, & de l'interualle d'icelle BC, soit descrit le cercle C G: puis du poinct donné A, au centre B, soit menee la ligne droicte AB (sinon que le poinct A fut donné en la ligne BC, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne AB par la precedéte proposition soit descrit le triangle equilateral ADB, & soit continué le costé DB, iusques à ce qu'il rencon-



tre la circonference en G: mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'interualle de la ligne droicte DG, soit d'escrit le cercle GkL couppant la ligne DE en L: Ie dis que la ligne AL, qui est menee du poinct donné A, est egale à la ligne droicte donnee BC.

Car les lignes droictes DG & DL sont egales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles lignes si on oste DA & DB, qui sont egales, estant DAB triangle equilateral: les restantes BG & AL seront aussi egales par la 3. com. sent. Mais BG est egale à BC, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc AL sera egale à BC, parce que les choses egales à vne mesme sont egales entr'elles. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte AL egale à la ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Ce probleme peut auoir diuers cas: car où le poinct donné est posé en la mesme ligne droicte donnee, ou hors icelle: & selon chacune de ces positions il y peust encor auoir diuers cas, deux desquels seulement nous auons rapporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a touſiours vne mesme construction & demonstration.

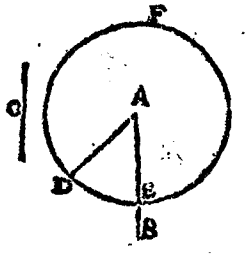
Que si en la construction on fait sur la ligne droicte AB le triangle ABD Isoscelle au lieu qu'il a esté fait equilateral, on demonstrera en la mesme maniere la ligne droicte AL estre egale à la ligne droicte BC.

Quant a la practique de ce probleme, elle est fort facile: car il n'y a qu'à prendre la ligne donnee BC, & de son interualle descrire vn arc du centre A, & quelconque ligne droicte menée d'iceluy centre à cet arc, sera egale à la ligne droicte donnee BC.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estans donnees, oster de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient les deux lignes droictes inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne egale à C.



A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne AB, sçauoir est au poinct A, soit posee par la precedente prop. la ligne droicte AD egale à la moindre C: puis du centre A, & de l'interualle AD, soit descrit vn cercle couppant AB en E, Ie dis que la ligne AE est egale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droictes AD, AE sont egales: & par la construction AD est egale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi egale à C. Nous auons donc osté de AB la ligne AE egale à C, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Il y peut bien auoir diuers cas en ce probleme, à cause des diuerses positions ausquelles se peuuent rencontrer les deux lignes donnees, mais en tous ces cas-là on

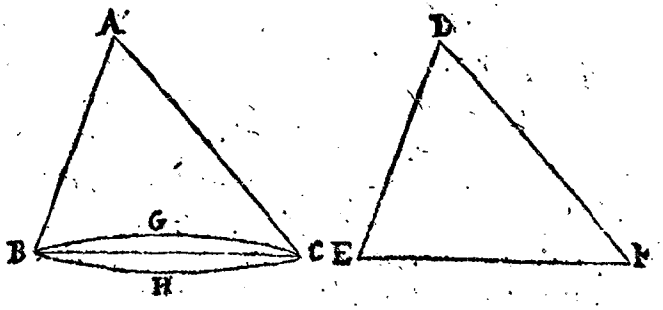
peut touſiours faire la meſme conſtruction & demonſtration que cy-deſſus, comme Proclus a fort bien remarqué ſur ceſte prop.

Quant à la pratique de ce probleme, elle eſt tres-aiſee, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnee, & de l'interuälle d'icelle, deſcrire de l'vn ou l'autre extreme de la plus grande ligne vn petit arc, qui couppera d'icelle, vne ligne egale a la moindre donnee.

THEOREME 1. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la baſe ſera egale à la baſe; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, deſquels le coſté AB ſoit egal au coſté DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que la baſe BC ſera egale à la baſe EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC egal au triangle DEF.

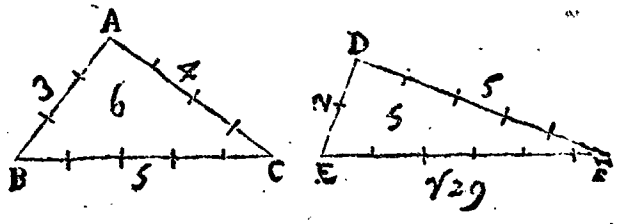


Qu'il ne ſoit ainſi; ſi on entend le triangle DEF, eſtre poſé ſur le triangle ABC, en ſorte que le poinct D ſoit ſur le poinct A, & que DE tombe ſur AB, auſſi DF tombera ſur AC: autrement l'angle A ne ſeroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les coſtez AB & AC ſont egaux aux coſtez DE & DF, chacun au ſien, ils conuiendront par la 8. com. ſent. conuertie, & partant les extremitez E & F tomberont ſur les extremitez B & C: ainſi la baſe EF conuiendra auec la baſe BC; car ſi elle ne conuenoit, elle tomberoit ou au deſſus d'icelle BC, comme BGC, ou au deſſous, comme BHC: ce qui eſt impoſſible, attendu que deux lignes droictes ne peuuent enclore vne eſpace par la 12 com. ſent. Donc les deux baſes BC, & EF conuiendront, & partant ſeront egales entr'elles par la ſuſdite 8. com. ſent. Et par ainſi tout le triangle DEF conuiendra auec tout le triangle ABC, conſequemment egal à iceluy, & l'angle B conuiendra auſſi auec l'angle E, & l'angle C auec l'angle F; partant egaux. Si donc deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

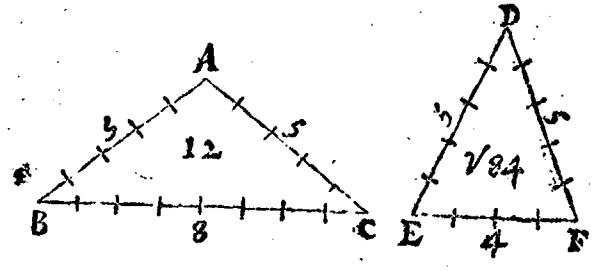
SCHOLIE.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y ſont du tout neceſſaires; la premiere deſquelles eſt que deux coſtez d'vn triangle ſoient egaux aux deux coſtez de l'autre chacun au ſien: & la ſeconde, que les deux angles contenus d'iceux coſtez egaux, ſoient auſſi egaux. Car defaillant l'vne ou l'autre de ces deux conditions, ny les baſes, ny les autres angles ne pourroient iamais eſtre egaux: & la derniere defaillant, les triangles peuuent bien eſtre quelquefois egaux, mais le plus ſouuent ils ſont inegaux: ce que nous pourrions facilement demonſter icy n'eſtoit que pluſieurs choſes à ce requiſes n'ont encore eſté demonſtrees: neantmoins afin de rendre aucunement euidente la neceſſité des ſuſdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus ſur ceſte propoſition, & Clauius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, ſoient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D egaux, ſçauoir droicts; & les deux coſtez AB, AC egaux aux deux coſtez DE, DF, non chacun au ſien, mais ces deux-là pris enſemble egaux à ces deux-cy auſſi pris enſemble: & ſoit AB 3, & AC 4, qui adiouſtez enſemble font 7, mais DE ſoit 2, & DF 5, qui font auſſi enſemble 7. Ce qu'eſtant ainſi, la baſe BC ſera 5, & la baſe EF, racine quarree de ce nombre 29, laquelle eſt plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou ſuperficie du triangle ABC ſera 6: mais l'aire du triangle DEF ne ſera que 5. Finalement les angles ſur la baſe BC ne ſeront pas egaux aux angles de deſſus la baſe EF, chacun au ſien. Toutes leſquelles inegalitez aduiennent à cauſe de ce que les coſtez AB, AC ne ſont pas egaux aux coſtez DE, DF chacun au ſien.



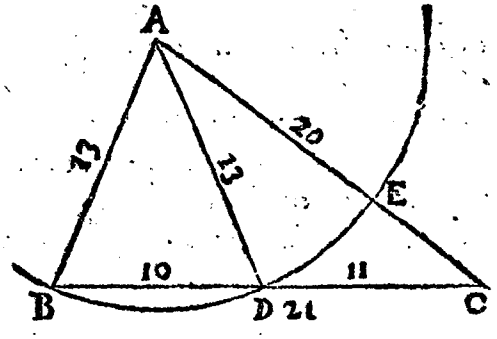
Quant a la ſeconde condition: Les coſtez AB, AC du triangle ABC ſoient egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & chacun d'iceux ſoit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux coſtez ſoient inegaux, & ſoit A plus grand que D. Toutes leſquelles choſes eſtans ainſi, la baſe BC ſera plus grande que la baſe EF, comme il ſera demonſtré en la 24. prop. de ce liure.



Que ſi nous poſons la baſe IC eſtre 8, & la baſe EF 4, l'aire du triangle ABC ſera 12; mais l'aire du triangle DEF ſera la racine quarree de ce nombre 84, laquelle eſt plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui eſt tres-bien cogneu des Geometres.

Et afin qu'on n'eſtime pas que ceſte inegalité aduienne à raiſon de ce que tous les quatre coſtez des triangles ſont egaux, & rendre tant plus manifeſte la neceſſité de

la ſeconde condition de ce theoreme, ſoit vn triangle ABC duquel le coſté AB ſoit moindre que le coſté AC, & auſſi que la baſe BC. Du centre A, & de l'interualle du petit coſté AB, ſoit deſcrit vn cercle BDE qui couppera tant le plus grand coſté AC, que la baſe BC: Car autrement il paſſeroit ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy; ce qui eſt abſurde, veu que toutes les lignes droictes tirées du centre A à la circonference du cercle BDE, doiuent eſtre egales entr'elles par la 15. def. Qu'il couppe donc la baſe BC en D, & ſoit tiree la ligne AD. Par la meſme 15. def. AB eſt egale à AD, & AC eſt commune à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux coſtez AB, AC egaux aux deux coſtez AD, AC, chacun au ſien; mais l'angle DAC, contenu des deux coſtez AD, AC, n'eſt que partie de l'angle BAC, contenu des coſtez egaux à ceux-là; & partant la baſe DC ne ſera auſſi que partie de la baſe BC, & pareillement le triangle ADC partie du triangle ABC. Ce qui eſt auſſi manifeſte par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres ſçauent tres-bien que le coſté AB eſtant 13, le coſté AC 20, & la baſe BC 21; le coſté AD ſera auſſi 13, & la baſe DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle ABC ſera 126, & celuy du triangle DAC ne ſera que 66. Donc afin que de deux triangles les baſes ſoient egales entr'elles, & leurs angles auſſi egaux entr'eux, & pareillement les triangles egaux; il eſt du tout neceſſaire que non ſeulement chaque coſté de l'vn ſoit egal à chaque coſté de l'autre, mais auſſi que les angles contenus d'iceux coſtez ſoient egaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.



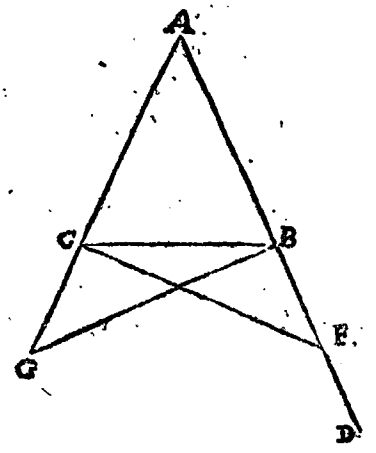
Finallement, nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des triangles rectilignes, car combien que cette propoſition & pluſieurs autres ſe puiſſent faire generales eſtans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des ſpheriques, ſi eſt-ce toutesfois que cela n'aduient pas en toutes propoſitions, comme on peut voir en noſtre traitté des triangles ſpheriques, c'eſt pourquoy nous eſtendrons toutes ſes propoſitions ſeulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les ſpecifie pas.

Les triangles Iſoſceles, ont les angles ſur la baſe egaux: & les coſtez egaux eſtans continuez, les angles exterieurs ſous la baſe ſont egaux.

Soit le triangle Iſoſcele ABC: Ie dis premierement que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont egaux.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient prolongez AB & AC, coſtez egaux iuſques en D & G; & ſoit fait AF egale à AG par la 3. prop. & ſoient menees les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux coſtez AB & AG egaux aux deux coſtez AC, & AF, chacun au ſien; & par 4. propoſition, la baſe BG ſera egale à la baſe CF, & l'angle ABG egal à l'angle ACF, & l'angle G egal à l'angle F. Item les triangles GCB,

FBC, ayant l'angle G egal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC egaux aux deux costez CF & FB: (Car CF a esté prouué tantost egal à BG; & AG, AF estans egaux; & AC, AB aussi egaux; les restes CG, & BF seront aussi egaux) par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir est l'angle GBC, egal à l'angle FCB. Et qui des angles egaux ABG & ACF, oste les angles egaux CBG & BCF; les demeurans ABC & ACB, seront egaux.



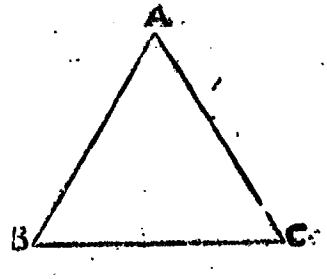
Pour la seconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont egaux, sçauoir FBC à BCG, elle a esté suffisamment demonstrée, lors qu'on a prouué que les triangles GBC, & CFB auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Isoscheles, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

SCHOLIE.

Ceste proposition est aussi vraye ès triangles equilatéraux. Car les deux costez AB, AC du triangle ABC estans egaux entr'eux, ou l'autre costé GB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral, ou bien inegal, comme il arriue au triangle Isoscele: Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il appert par la demonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De ceste 5. proposition il s'ensuit que tout triangle equilateral est aussi equiangle, c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle equilateral sont egaux entr'eux. Car soit vn triangle equilateral A B C: *Donc par ce que les deux costez* A B, A C *sont egaux, par la 5 prop. les deux angles* B & C *seront egaux. Semblablement, pour ce que les deux costez* AB, BC *sont egaux, les deux angles* A & C *seront aussi egaux. Donc par la 1. com. sent. tous les trois angles* A, B, C, *seront egaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonstrer.*

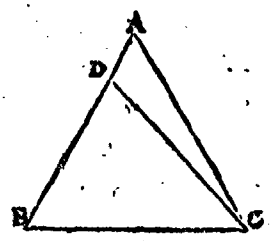


THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles, seront aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle A B C, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base

Bc ſont egaux : Ie dis que les deux coſtez AB & AC qui ſouſtendent les ſuſdits angles egaux, ſont auſſi egaux.



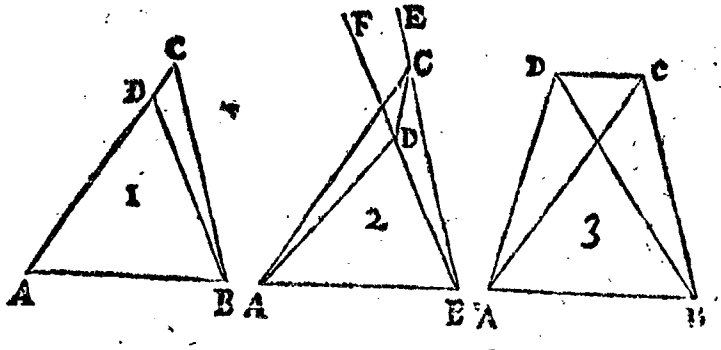
Autrement, ſoit AB plus grand que AC, s'il eſt poſſiſible : on en pourra donc retrancher vne partie egale à AC par la 3. prop. laquelle partie ſoit BD, & ſoit menee la ligne DC: les deux triangles DBC, & ACB, ont deux coſtes egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles compris d'iceux coſtez auſſi egaux; car les deux coſtez BD & BC du triangle BDC ſont egaux aux deux coſtez AC, & CB du triangle ACB, & l'angle B egal à l'angle ACB; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, ſeront egaux; ce qui eſt impoſſible: car l'vn eſt partie de l'autre, Donc les coſtez AB, & AC n'eſtoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

CORROLAIRE.

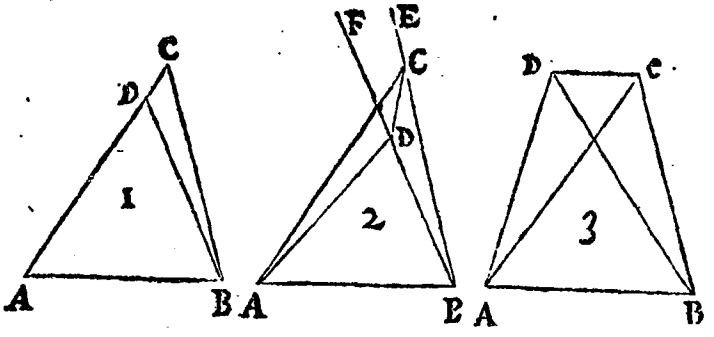
Il s'enſuit de cette propoſition, que tout triangle equiangle, c'eſt à dire qui a tous les angles egaux, eſt equilateral : car par ce qui a eſté icy demonſtré, les angles ABC, ACB *eſtans egaux, les deux coſtez* AB, AC, *ſeront pareillement egaux: Mais ſi les deux angles* A *&* B *eſtoient encore egaux, auſſi les coſtez* CA, CB *ſubtendans iceux angles, ſeroient auſſi egaux: & partant tous les trois coſtez* AB, AC, BC *egaux entr'eux, puis que les choſes egales à vne meſme, ſont egales entr'elles.*

Si des extremitez de quelque ligne droicte, on mene deux autres lignes droictes, ſe rencontrans à vn poinct; des meſmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres egales à icelles, chacune à la ſienne, & de meſme part, ſe rencontrans à vn autre poinct.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle ſoient menées deux lignes droictes AC & BC ſe rencontrant à quelconque poinct C. Ie dis que des meſmes extremitez A & B, & de la meſme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales à icelles AC, BC, chacune à la ſienne, qui ſe rencontrent à vn autre poinct que C; c'eſt à dire que ſi de l'extremité A on mene la ligne AD egale à AC, & de l'extremité B la ligne BD egale à BC; il ne peut eſtre que le poinct de rencontre D, ſoit autre que le poinct de rencontre C.



Car si faire se peut, que le poinct de rencontre D, tombe ailleurs qu'au poinct C: où iceluy poinct D tombera sur l'vne ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.



Premierement iceluy poinct de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent egales entr'elles, sçauoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D, ne se fera point sur AC, ny aussi sur BC, à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy poinct de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure: & apres auoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posees egales, le triangle ACD sera Isoscele, & par la 5. proposition les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront egaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE: (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE: & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE. Derechef, puis que les lignes BC, BD, sont posees egales, le triangle BCD doit estre Isoscele, & partant les angles CDF & DCE sous la base DC, seront egaux par la mesme 5. prop. Mais il a esté demonstré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le mesme angle CDF est moindre que l'angle DCE, & aussi egal à iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD, il s'ensuiura que les deux triangles ADC & BCD seront Isosceles; & partant qu'ils auront les angles sur la base CD egaux: sçauoir est ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, est plus grand que ACD: donc aussi BDC sera plus grand que ADC, c'est à dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC: Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C: Parquoy si des extremitez de quelque ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

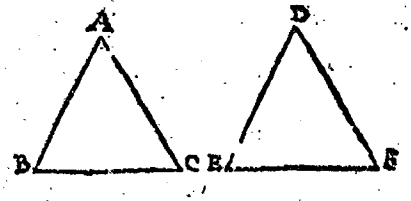
Il est manifeste que si AD, BD *prises ensemble estoient faictes egales à* AC, BC *aussi prises ensemble, le poinct de leur rencontre* D, *seroit autre que le premier poinct* C; *comme il seroit encore si on faisoit* AD *égale à* BC, *&* BD *egale à* AC, *mais en l'vne ny l'autre maniere, icelles lignes* AD, BD *ne seroient pas selon l'intention d'Euclide: car il veut que non seulement les lignes* AD, BD, *soient egales aux lignes* AC, BC, *chacune à la*

ne à la ſienne, mais auſsi que les lignes egales ſoient menees d'vn meſme poinct, & de plus que ce ſoit de meſme part. Car il eſt tres euident qu'icelles AD, B D, *peuuent bien eſtre tirées de l'autre coſté de* C, *c'eſt à ſçauoir au deſſoubs de la ligne* AB. *Donc fort à propos Euclide met en ce theoreme que les lignes ſoient egales chacune à la ſienne, & menees de meſme part, &c.*

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux coſtés égaux à deux coſtés, chacun au ſien, & la baſe egale à la baſe; ils auront auſſi l'angle compris d'iceux coſtez egaux, egal à l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, deſquels le coſté AB, eſt egal à DE; AC à D F, & la baſe BC à la baſe EF: Ie dis que les angles A & D compris d'iceux coſtez egaux, ſont egaux.



Car puis que la baſe BC eſt egale à la baſe EF; ſi on entend icelles eſtre poſees l'vne ſur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct E ſur le poinct B, & F ſur C: & par la 7. prop. les deux lignes ED, & FD, qui ſont egales à BA & CA, ſe rencontreront au poinct A, & conuiendront auec icelles lignes BA & CA: partant conuiendront auſſi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par conſequent ſeront egaux par la 8. com. ſent. Donc ſi deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

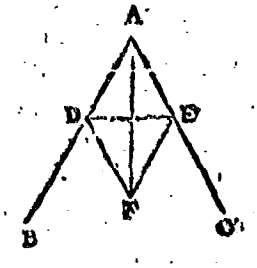
Puis que la baſe EF conuient auec la baſe BC, & les coſtez DE, D F, conuiennent auſsi auec les coſtez AB, AC, il s'enſuit que non ſeulement l'angle A eſt egal à l'angle D; mais auſsi que l'angle E eſt egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Coupper en deux egalement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut coupper en deux egalement; c'eſt dire en deux angles egaux entr'eux.

Soient de AB & AC retranchées deux parties egales AD, AE: & apres auoir mené la ligne DE, ſur icelle ſoit deſcrit le triangle equilateral D E F par la premiere propoſition, & ſoit menée la ligne AF: Ie dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux egalement.



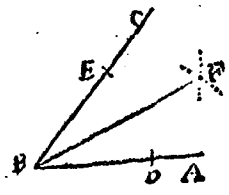
Car puiſque les lignes AD, AE ont eſté priſes egales, & AF eſt commune aux deux triangles DAF, EAF; les deux coſtez AD & AF, du triangle DAE, ſeront egaux

aux deux costez AE & AF du triangle EAF, & la base DF egale à la base EF: (estant DFE triangle equilateral) donc par la 8. prop. l'angle DAF sera egal à l'angle EAF: & partant l'angle BAC est couppé en deux egalement par la ligne AF. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Que si au lieu du triangle equilateral cy-dessus construit, on en faict vn Isoscelle, la demonstration sera tousiours la mesme: Ce qu'on peut aussi faire aux trois propositions suiuantes.

Quant à la practique de cette proposition nous l'auons enseignée en nostre Geometrie practique Probl. 5. Et neantmoins nous ne laisserons de la repeter icy; Et pource soit vn angle rectiligne ABC, qu'il faut coupper en deux egalement. Du centre B & de tel interualle qu'on voudra, soient couppees BD, BE egales; puis des poincts D & E soient descrits deux arcs s'entrecouppans en F, & d'icelle intersection soit tirée par le poinct B, la ligne droicte FB, laquelle diuisera l'angle donné ABC en deux egalement.



Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi coupper vn angle rectiligne en quatre parties egales, en huict, en seize, en trente deux, & ainsi consecutiuement, en procedant tousiours par augmentation double: Car apres qu'vn angle rectiligne est couppé en deux egalement, si on diuise derechef chasque partie en deux egalement, on aura quatre angles egaux. Que si on couppe derechef chacun d'iceux en deux egalement, nous aurons huict angles egaux, & ainsi consequemment.

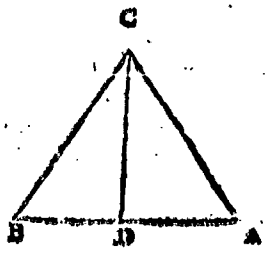
PROBL. 5. PROP. X.

Coupper en deux egalement vne ligne droicte donnée & terminée.

Soit la ligne droicte donnée & terminée AB: laquelle il faut coupper en deux egalement.

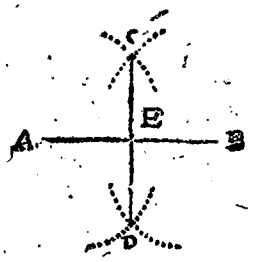
Sur icelle ligne AB soit construit le triangle equilateral ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C soit couppé en deux egalement par la ligne CD, tirée iusques à ce qu'elle coupe AB en D. Ie dis qu'icelle AB est couppée en deux egalement en D.

Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle ACB, est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez AC, CD, egaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du poinct C, qu'ils comprennent aussi egaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera egale à la base DB. Donc AB est couppee en deux egalement en D. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de cette propoſition en noſtre Geometrie practique Prob. 2. *& ce faict ainſi: Pour diuiſer la ligne droicte AB en deux parties egales, du centre A, & de quelque interualle que ce ſoit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) ſoient deſcrits deux arcs de cercle, l'vn au deſſus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au deſſous, comme D, puis du centre B, & du meſme interualle ſoient deſcris deux autres arcs qui couppent les precedens eſdicts poincts C & D, puis d'vne interſection à l'autre, ſoit tiree la ligne droicte CD, laquelle couppera AB en deux egalement au poinct E. Eſt à noter que ſi de part ou d'autre de AB on ne pouuoit deſcrire deux arcs comme D, il faudroit ayant deſcrit les deux arcs C, ouurir le compas d'vn plus grand interualle, & en deſcrire deux autres arcs au deſſus de C, & la ligne menee d'vne interſection à l'autre, & continuee iuſques à AB, la couppera en deux egallement.*



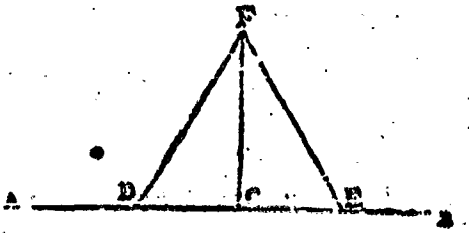
Or il appert par ce que deſſus, qu'on peut auſſi couppper vne ligne droicte finie en quatre parties egales, en 8, en 16, en 32. &c. ainſi que nous auons dit, en la precedente prop. de la diuiſion de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiſer vne ligne droicte terminee en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enſeigné en noſtre Geometrie pratique Probl. 7: & ce tant Geometriquement que Mechaniquement auec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnee, & d'vn poinct en icelle, eſleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

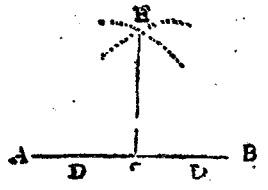
Soit vne ligne droicte donnee AB, & le poinct en icelle C: d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du poinct C prinſes les deux lignes egales CD & CE par la 3. propoſition, & ſur DE ſoit faict le triangle equilateral DFE, & de C à F ſoit menée la ligne CF: Ie dis qu'icelle CF eſt la ligne perpendiculaire demandée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, ſçauoir DC à CE par la conſtruction, & CF commun, & la baſe DF egale à la baſe EF, à cauſe que le triangle DFE eſt equilateral; par la 8. prop. les angles au poinct C, contenus des coſtez egaux, ſeront egaux; & partant par la 10. def. ils ſont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainſi qu'il falloit faire.

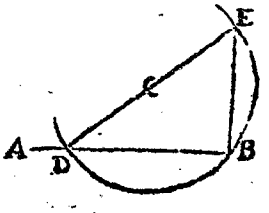


SCHOLIE.

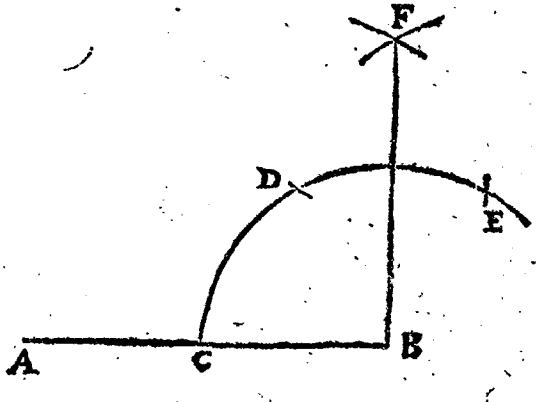
La pratique de cette proposition est enseignee en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neantmoins nous la repeterons encore icy. Pour esleuer sur A B vne ligne perpendiculaire du poinct C, soient marquees en icelle A B deux poincts comme D, egalemens distans de C, & d'iceux poincts, soient descrits deux arcs d'vn mesme interualle s'entrecouppans en E, de laquelle intersection soit tiree à C la ligne droicte EC, qui sera perpendiculaire à ladite A B.



Que si le poinct donné estoit B à l'extremité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle estant continuee faire comme dessus: ou bien nous prendrons vn poinct au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus prez du poinct donné B, que de l'autre extremité A; puis d'iceluy poinct C, & de l'interualle C B, nous descrirons la circonference D B E, qui couppe la ligne donnée en D, & d'iceluy poinct D par C, nous tirerons la ligne droicte D C E couppant la susdite circonference en E, duquel poinct E soit tiree la ligne droicte E B, laquelle sera perpendiculaire à A B.



Autrement, *du poinct donné B, & de quelque interualle que ce soit B C, moindre toutesfois que la ligne donnee, soit descrit vn arc C D E plus grand que le tiers de la circonference entiere du cercle, puis sur iceluy arc C D E soient pris deux interualles C D, D E, chacun egal au semidiametre B C, & des poincts D, E, soient descrits deux arcs de cercle s'entrecouppans au poinct F, duquel soit tiree au poinct B la ligne droicte F B, qui sera perpendiculaire à A B.*



Est à noter qu'encore que le poinct donné B ne fut l'extremité de la ligne, on pourroit neantmoins mener la perpendiculaire par l'vne ou l'autre des deux manieres cy-dessus.

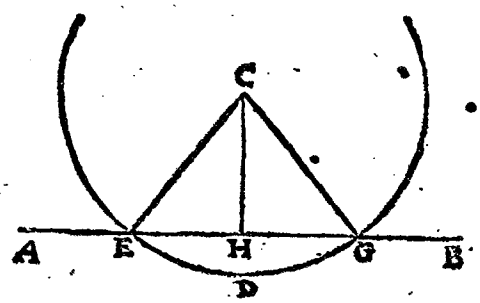
PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminee, & d'vn poinct hors icelle.

Soit la ligne droicte donnée & interminee A B, & le poinct hors icelle C;

duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

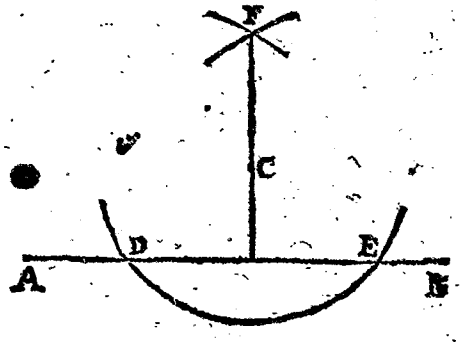
Soit pris audelà de la ligne AB quelconque poinct D; puis du centre C, & de l'interualle CD, soit descrit le cercle EDG, couppant la ligne AB és poincts E & G, puis par la 10. prop. soit couppee EG en deux egalement au poinct H, & soit menee la ligne CH, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.



Car estans tirées les lignes droictes CE, CG; les deux costez EH & HC; du triangle EHC, seront egaux aux deux costez GH & HC du triangle GHC, vn chacun au sien, & la base CE est egale à la base CG, estans icelles tirees du centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du poinct H seront egaux; & partant par la 10. definit. ils seront droicts, & la ligne CH perpendicul. à AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique de ce probleme est enseignée en nostre Geometrie practique probl. 3. & est telle qu'il ensuit. Pour mener à vne ligne donnee AB vne perpendiculaire d'vn poinct donné hors icelle, comme C; d'iceluy poinct C soit d'escrit vn arc qui couppe la ligne donnee en D & E, puis d'iceux poincts, comme centres, soient d'escrits deux arcs de cercles d'vn méme interualle, qui s'entrecouppent au poinct F: (il n'importe pas de quel costé ce soit, au dessus ou au dessoubs de la ligne AB) puis d'iceluy poinct F par celuy donné C, soit tiree vne ligne droicte FCG, qui rencontre la donnee en G, & icelle FCG sera perpendiculaire à AB.

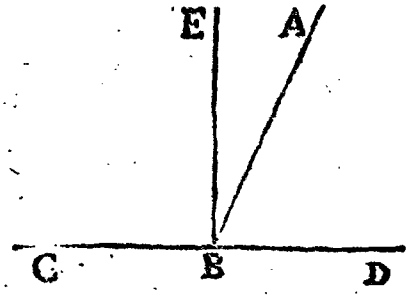


THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles, ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD, fait les angles CBA, & DBA: ie dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne AB eſt perpendiculaire à CD, ou elle ne l'eſt pas: Si elle eſt perpendiculaire, les deux angles ſont droicts par la 10. def. Si elle ne l'eſt pas, ſoit leuee la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE ſeront droicts par la ſuſdite deff. mais par la 19. com. ſent. le ſeul angle droict DBE eſt egal aux deux angles DBA, ABE enſemble: parquoy ſi on leur adiouſte le commun CBE, les trois angles DBA, ABE & CBE ſeront egaux aux deux droicts DBE, CBE. Derechef, d'autant que par la meſme 19. com. ſent. les deux angles CBE, ABE enſemble ſont egaux au ſeul ABC: ſi on adiouſte le commun DBA, les deux angles ABC, DBA ſeront egaux aux trois CBE, ABE, DBA: mais ces trois cy ont eſté demonſtrez egaux à deux droicts: donc ces deux-là ABC, ABD ſeront auſſi egaux à deux droicts. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Ceſte demonſtration de Theon eſt ſuiuie par la plus part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayans monſtré comme deſſus, que les deux angles CBE & DBE ſont droicts, concluent incontinent par le 8. com. ſent. que les deux ABC, & ABD enſemble, ſeront donc auſſi egaux à deux droicts, veu qu'ils occupent autant d'eſpace, voire le meſme, que les deux droicts CBE, DBE, & conuiennent auec eux.

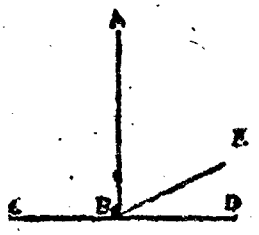
Auſſi Clauius a remarqué, que cette propoſition ſemble dependre de quelque commune notion de l'eſprit: car de ce que l'angle ABC excede l'angle droict EBC, l'angle reſtant ABD eſt excedé par l'angle droict EBD; car comme en celuy-là l'excez eſt l'angle ABE; ainſi en ceſtuy-cy le defaut eſt le meſme angle ABE. Parquoy l'on pourra conclurre, que les angles ABC, ABD ſont egaux à deux droicts, attendu que l'excez de l'angle obtus ABC, eſt le defaut de l'aigu ABD.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte ſe rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faiſant deux angles egaux à deux droicts: icelles deux lignes ſe rencontreront directement.

Soit la ligne droicte AB, & en icelle le poinct B, auquel ſe rencontrent deux autres lignes droictes CB & DB de part & d'autre d'icelle AB, faiſant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: ie dis que CB & DB ſe rencontrent directement, c'eſt à dire que CBD eſt vne ligne droicte.

Autrement, si CBD n'est ligne droicte, soit continuee CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombra ou au dessus de BD, ou au dessous : quelle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme BE, en sorte que CBE soit ligne droicte. D'autant que AB tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, seront egaux à deux droicts par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droicts, & par la 10. com. sent. tous les angles droicts sont egaux entr'eux : donc par la 1. com. sent. ces deux angles ABC, & ABD seront egaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ostant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront egaux, le tout & la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte CB estant prolongee, ne tombera pas au dessus de BD; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité : donc CB, & DB se rencontroient directement. Ce qu'il falloit demonstrer.

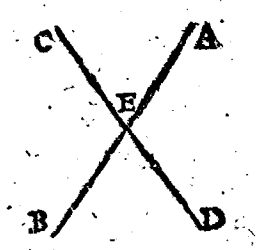


THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se couppans l'vne l'autre au poinct E : Ie dis que les angles opposez au sommet, sçauoir AEC, & DEB, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. prop. Item, pour la mesme raison, CEB, & DEB, seront egaux à deux droicts : partant les deux angles AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut aussi dire des deux angles opposez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonster.



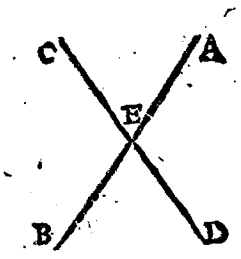
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'entrecouppans, font au poinct de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'vn seul & mesme poinct, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E, en la precedente figure, on meine tãt d'autres lignes droictes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituez au poinct E, en plusieurs parties; toutes lesquelles parties prinses ensemble, seront egales aux quatre angles d'iceluy poinct E, par la 19. vn. sent. c'est à dire à quatre angles droicts.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy la converſe de cette 15. prop. qui, ſelon Proclus, eſt telle.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte ſe rencontrent deux autres lignes droictes, non de meſme part, faiſant les angles au ſommet egaux: icelles deux lignes ſe rencontreront directement.

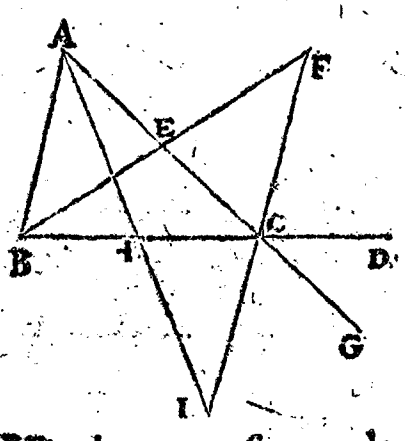


Soit la ligne droicte AB, & vn poinct en icelle E, auquel ſoient menees les deux lignes droictes CE, DE de part & d'autre de AB faiſant les angles CEA, DEB egaux entr'eux. Ie dis qu'icelles lignes CE, DE ſe rencontrent directement. Car adiouſtant aux angles egaux CEA, DEB, l'angle commun CEB: les deux angles CEA, CEB ſeront egaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB ſont egaux à deux droicts par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB ſeront auſſi egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les lignes droictes CE, DE ſe rencontreront directement. Ce qui eſtoit propoſé.

Pelletier a aucunement changé ceſte converſe: car il dit que ſi quatre lignes droictes AE, CE, BE, DE ſe rencontrans au poinct E y font quatre angles dont les oppoſez AEC, BED ſoient egaux entr'eux, & les oppoſez BEC, AED, auſſi egaux entr'eux: les deux lignes oppoſites AE, BE ſe rencontreront directement, comme auſſi les deux CE, DE. Ce qui eſt manifeſte, car ſi aux angles egaux AEC, BED, on adiouſte les egaux CEB, AED, par le 2. axiome les deux angles AEC, CEB ſeront egaux aux deux angles BED, AED. Donc tant les deux là que ces deux-cy ſont moitié des quatre angles faicts au poinct E, leſquels par le Corol. prec. ſont egaux à quatre droicts. Parquoy les deux angles AEC, CEB ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes, AE, BE ſe rencontreront directement. Et pour meſme raiſon CE, DE feront auſſi vne ſeule ligne droicte CD.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn coſté de quelconque triangle eſtant prolongé, l'angle exterieur eſt plus grand que l'vn ou l'autre des oppoſés interieurs.



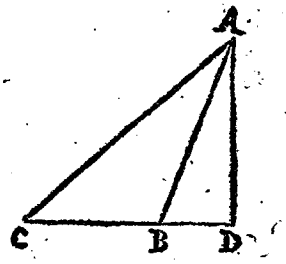
Soit le triangle A B C, duquel le coſté B C ſoit continué iuſques à D. Ie dis que l'angle exterieur A C D eſt plus grand que l'oppoſé interieur B A C: Et encore plus grand que A B C autre oppoſé interieur.

Qu'ainſi ne ſoit: Apres auoir coupé A C en deux egalement en E, ſoit menee la ligne BE, & continuee iuſques en F: en ſorte que EF ſoit faicte egale à BE, & ſoit menee FC. Les deux triangles AEB, & C E F, auront les deux coſtez AE & EB, egaux aux deux coſtez CE & EF, chacun au ſien par la conſtruction.

construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est egal à l'angle CEF: donc par la 4. prop. les bases AB & FC seront egales; & les autres angles egaux, chacun au sien: & partant l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison sera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC couppé en deux egalement en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI soit egale à AH, & soit menee CI: On demonstrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la proposition precedente à iceluy BCG, est egal l'externe ACD: donc iceluy ACD, est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC. Parquoy en tout triangle, vn costé estant prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ceste proposition il s'ensuit (dit Proclus) que d'vn mesme poinct on ne peut mener à vne mesme ligne droitte plus de deux lignes droittes egales entr'elles. Car si faire se peut, soient menees du poinct A à la ligne BC, trois lignes droittes AB, AC, AD, egales entr'elles: d'autant que les costez AB, AD, sont egaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB sur la base BD seront egaux. Derechef, pource que les costez AB, AC sont egaux, par la mesme 5. prop. les angles ABC, ACB sur la base BC seront egaux. Parquoy veu que chasque angle ADB & ACB, est egal à l'angle ABD, par la 1. com. sent. l'angle ABC sera egal à l'angle ADC, c'est à dire l'exterieur à l'opposé interieur: ce qui est absurde, puis que par ceste 16. p. l'externe est plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droittes egales entr'elles. Ce qui estoit proposé.

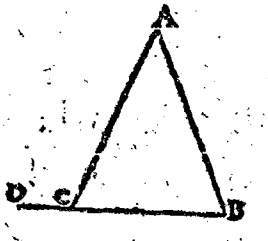


THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC: Ie dis que les deux angles B, & ACB sont ensemble plus petits que deux droicts; comme aussi les deux A, & ACB: item les deux A, & B.

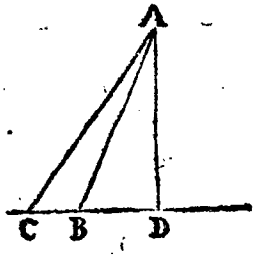
Car apres auoir continué le costé BC, iusques en D, il est euident par la 16 prop. que l'angle exterieur ACD est plus grand que l'opposé interieur B: & par la 4. com. sent. si on leur adiouste l'angle commun ACB, les deux ACD & ACB seront plus grãds que les deux B & ACB. Mais les deux ACD & ACB, sont egaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant ABC & ACB, sont plus petits que deux droicts.



On demonſtrera pareillement que lesdeux angles A & ACB: Item les deux angles A & B, en prolongeant vn autre coſté, ſont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonſter.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que d'vn meſme poinct on nepeut mener plus d'vne ligne perpendiculaire ſur vne ligne droicte. Car ſi faire ſe peut, ſoient menees de A ſur la ligne droicte BD, les deux perpendic. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB, ſeront egaux à deux droicts, puis que chacun eſt droict. Ce qui eſt impoßible: car il a eſté demonſtré cy deſſus que deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux angles droicts.



Il s'enſuit auſſi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle eſt droict, ou obtus, que les autres ſont aigus. Car puis qu'il a eſté demonſtré que deux angles quels qu'ils ſoient, ſont moindres que deux droicts, il eſt neceſſaire que s'il y en a vn droict ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres ſoit aigu: car autrement en vn triangle ſeroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'enſuit encore de cette prop. que ſi vne ligne droicte AB, fait auec vne autre ligne droicte CD, angles inegaux, ſçauoir eſt ABD, aigu, & ABC, obtus, & de quelconque poinct d'icelle AB, on tire vne perpendiculaire ſur CD, comme AD: icelle perpendiculaire AD, tombera de la part de l'angle aigu ABD: car qu'elle tombe, s'il eſt poßible, du coſté de l'angle obtus ABC, comme AC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB, obtus & droict, ſont plus grands que deux droicts; mais auſſi moindres que deux droicts par cette prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tiree de A, ne tombera donc pas du coſté de l'angle obtus, & partant tombera du coſté de l'angle aigu.

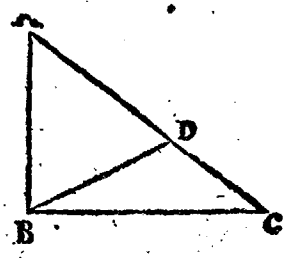
Eſt encore manifeſte par cette prop. que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles de deſſus la baſe d'vn triangle Iſoſcelle, ſont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils ſoient, d'vn triangle equilateral, & les deux de deſſus la baſe d'vn Iſoſcelle ſont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy enſemble, que ces deux-là, ſont moindres que deux droicts par cette prop. chacun d'iceux ſera moindre qu'vn droict, c'eſt à dire aigu: car s'il eſtoit droict, ou obtus, tous les deux enſemble ſeroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. 11. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle.

Soit vn triangle ABC, ayant le coſté AC plus grand que le coſté AB. Ie dis que l'angle ABC, eſt plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne ſoit ainſi : Puis que AC eſt plus grãd que AB, d'iceluy ſoit retranchée AD, egale à AB, & ſoit menee BD. Le triangle ABD eſt Iſoſcele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & ADB, ſur la baſe BD, ſeront egaux. Or l'angle exterieur ADB, eſt plus grand que l'oppoſé interieur C, par la 16. prop. Mais ABC eſtant plus grand que ABD, il ſera auſſi plus grãd que ſon egal ADB: & à plus forte raiſon ABC ſera plus grand que C. Par meſme raiſon, ſi on poſe le coſté AC, plus grand que le coſté BC; on demonſtrera l'angle ABC eſtre plus grand que l'angle BAC, ſçauoir eſt, ſi de CA on coupe vne ligne egale à BC, &c. Parquoy le plus grand coſté de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



CORROLAIRE.

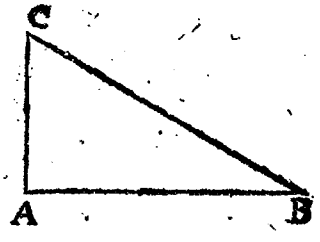
Il eſt donc manifeſte par cette demonſtration que tous les trois angles d'vn triangle ſcalene ſont inegaux.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A eſt plus grand que l'angle C. Ie dis que le coſté BC, qui ſouſtient le plus grand angle A, eſt plus grand que le coſté AB, qui ſouſtient vn moindre angle C.

Autrement, il ſera egal, ou plus petit : Il ne peut eſtre egal, d'autant que le triangle ſeroit Iſoſcelle, & par la 5. prop. les deux angles A & C ſeroient egaux contre l'hypotheſe. Il ne peut auſſi eſtre plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C, ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Il ſera donc plus grand. Par meſme raiſon on prouuera le coſté BC, eſtre plus grãd que le coſté AC, ſi on poſe l'angle A, eſtre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté. Ce qu'il falloit demonſtrer.



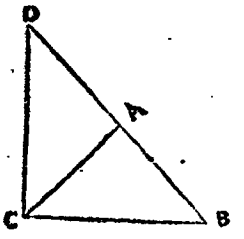
COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ceſte propoſition, que ſi de quelconque point on tire ſur vne ligne droicte tant d'autres lignes droittes qu'on voudra, l'vne deſquelles ſoit perpendiculaire, icelle perpendiculaire ſera la plus petite de toutes, puis qu'elle ſera touſiours oppoſée à vn angle aigu, & les autres à l'angle droict fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux coſtez de quelle façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit le triangle A B C : Ie dis que deux coſtez d'iceluy, leſquels on voudra, ſçauoir eſt AB & A C, ſont plus grands enſemble, que le troiſieſme coſté BC.

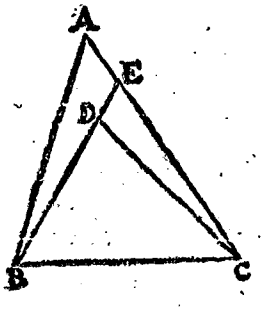


Qu'il ne ſoit ainſi : apres auoir prolongé BA iuſques en D, & fait AD egale à AC, ſoit menee la ligne DC. Le triangle DAC ſera Iſoſcelle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD ſur la baſe D C, ſeront egaux. Mais par le 9 ax. DCB eſt plus grand que D C A : il ſera donc auſſi plus grand que ſon egal ADC : & partant par la 19. prop. BD ſera plus grand coſté que B C. Mais BD eſt egal aux deux coſtez AC & BA : donc auſſi iceux AC & BA ſeront plus grands que BC. On demonſtrera en la meſme maniere que deux autres coſtez tels qu'e l'onvoudra ſont plus grands enſemble que l'autre. Parquoy deux coſtez d'vn triangle pris en quelque ſorte que ce ſoit, ſont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremités d'vn coſté de quelconque triangle, on meine deux lignes droictes ſe rencontrans au dedans d'iceluy : icelles ſeront plus petites que les deux autres coſtez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.

Soit le triangle ABC, & des extremitez du coſté B C, ſoient menees interieurement deux lignes droictes BD, CD, ſe rencontrans au poinct D : Ie dis qu'icelles lignes B D, & C D enſemble, ſont plus petites que les coſtez BA & CA enſemble : Mais que l'angle D, eſt plus grand que l'angle A.



Qu'ainſi ne ſoit : ſoit continuee BD, iuſques au poinct E. Donc par la 20. prop. les deux coſtez BA, & AE, du triangle BAE, ſeront plus grands que le troiſieſme B E : Et ſi on leur adiouſte choſe commune EC, par la 4. com. ſent. les tous CE, EB ſeront touſiours plus petits que les tous CE, EA, AB, c'eſt à dire CA, AB. Pareillement les deux coſtez CE & ED, du triangle CED, ſont plus grãds que le troiſieſme

CD, auſquels ſi on adiouſte choſe egale, ſçauoir DB; les tous CE, ED, DB, ou CE, EB, ſeront touſiours plus grands que les tous CD & DB. Mais il a eſté demonſtré que CA, AB ſont plus grands que CE, EB: donc CA, AB ſeront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui eſtoit propoſé en la premiere partie.

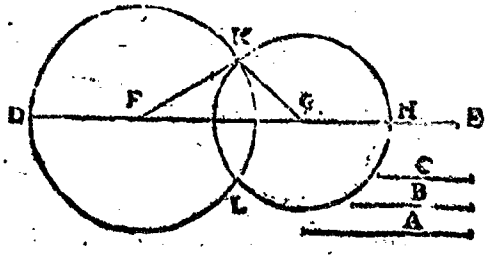
Pour la ſeconde partie, ſçauoir que l'angle BDC eſt plus grand que l'angle A. D'autant qu'il eſt exterieur du triangle CED, il ſera plus grand que ſon oppoſé interieur CED par la 16. prop. Mais pour la meſme raiſon, iceluy angle CED eſt auſſi plus grand que ſon oppoſé interieur A: donc à plus forte raiſon BDC ſera ſera plus grand que A. Si donc des extremitez d'vn coſté de quelconque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes egales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles ſoient priſes, ſoient plus grandes que l'autre; d'autant que de tout triangle, deux coſtez de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, deſquelles deux de quelle façon qu'elles ſoient priſes ſont plus grandes que la troiſieſme: car autrement d'icelles on ne pourroit pas conſtituer vn triangle, comme il appert de la 20. prop. en la quelle il a eſté demonſtré que de tout triangle deux coſtez ſont touſiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle ayant les trois coſtez egaux à icelles trois lignes donnees.

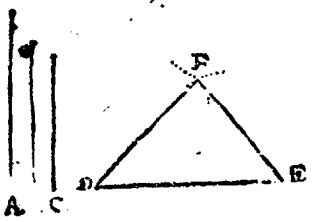
Soit priſe vne ligne droicte, tant grande qu'il ſera de beſoin, comme DE, de laquelle ſoit retranchee DF, egale à A; & puis du reſte ſoit priſe FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'interualle FD, ſoit deſcrit vn cercle DKL: Item vn autre cercle HkL du centre G, & de l'interualle GH, couppant le premier cercle au poinct K duquel ſoient menées les deux lignes KF, KG. Ie dis que les coſtés du triãgle FKG ſont egaux aux trois lig. donnees A, B, C.



Car d'autant que FD, FK ſont egales par la def. du cercle: item GK & GH; les trois coſtez du triangle FKG, ſont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, leſquelles eſtans egales aux trois donnees par la conſtruction; auſſi les coſtez du triangle FKG ſeront egaux à icelles lignes donnees A, B, C. Nous auons donc faict vn triangle de trois lignes droictes egales aux trois lignes droictes donnees A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probl. eſt enſeignee en noſtre Geometrie practique Prob. 11, *& eſt telle: Soit priſe la ligne droicte DE egale à quelconque des donnees comme à A, puis du poinct D, & interualle de la ligne B, ſoit deſcrit vn arc F: ſemblablement du poinct E, & de l'interualle de l'autre ligne C, ſoit deſcrit vn autre arc qui couppe le premier au poinct F: puis à ladite interſection ſoient tirees les deux lignes droictes DF, EF; & ſera fait le triangle DEF, ayant les trois coſtez egaux aux trois lignes droictes donnees A, B, C.*

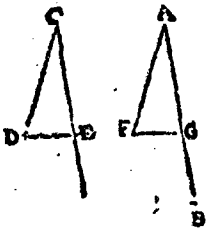


PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

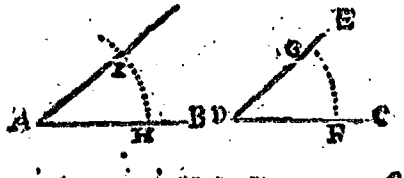
Soit la ligne donnée AB; & le poinct en icelle A; ſur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné C.

Ayant pris és lignes CD, CE, qui conſtituent l'angle donné C quelcõques poincts D, E, ſoit menee la ligne DE: & ſur AB ſoit conſtruict par la prop. precedente le triangle AFG, ayant les trois coſtez egaux aux trois coſtez du triangle CDE, ſçauoir eſt les deux coſtez AF, AG, egaux aux deux coſtez CD, CE, & la baſe FG à la baſe DE. Il eſt donc euident par la 8. prop. que l'angle A ſera egal à l'angle C donné. Nous auons donc faict ſur AB, & au poinct A, l'angle FAG egal à vn donné DCE, ainſi qu'il eſtoit requis.



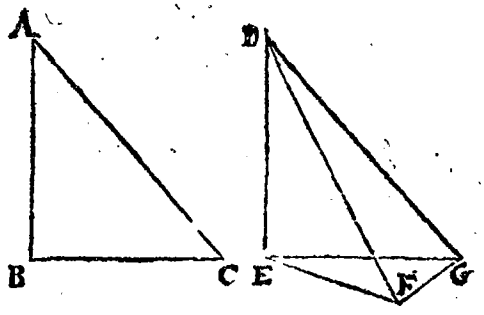
SCHOLIE.

Combien que la practique de ce probleme ſoit enſeignee en noſtre Geometrie pratique, neantmoins nous l'enſeignerons encore icy. Soit vne ligne donnee AB, & vn poinct en icelle A, auquel il faut faire vn angle rectiligne egal au donné CDE. Du centre D ſoit fait de tel interualle qu'on voudra vn arc EG, qui couppe les lignes de l'angle donné és poincts F, G: puis du meſme interualle, ſoit d'eſcrit du centre A vn arc interminé HI: En apres, ſoit priſe la diſtance FG, & icelle portee ſur l'arc HI, puis du poinct A par I, ſoit tiree la ligne droicte AI, & ſera fait l'angle HAI egal à l'angle donné CDE.



THEOR. 15. PROP. XXIV.

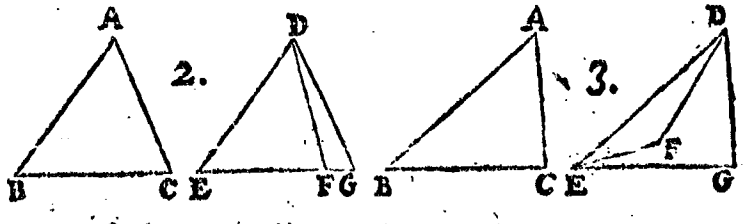
Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux coſtez plus grand que l'angle, ils auront auſſi la baſe plus grande que la baſe.



Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels deux coſtez AB, AC ſont egaux aux coſtez DE, DF, chacun au ſien: mais l'angle A eſt plus grand que l'angle EDF. Ie dis que la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF.

Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne DE, & au poinct D, ſoit fait par la precedente prop. l'angle EDG, egal à l'angle A, (& la ligne droicte DG, tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF a eſté poſé moindre que l'angle A) & ſoit poſee DG, egale à DF, c'eſt à dire à AC: Soit tiree puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au deſſus de la ligne EF, ou ſur icelle, ou au deſſous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au deſſus de EF, & ſoit tiree la ligne FG. D'autant que les deux coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux coſtez DE, DG, vn chacun au ſien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la conſtruction: la baſe BC ſera egale à la baſe EG, par la 4. prop. Et puis que les deux coſtez DF, DG, ſont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF ſeront auſſi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF eſt plus grand que l'angle EGF, par la 9. com. ſent. donc auſſi l'angle DFG ſera plus grand que le meſme angle EGF: parquoy tout l'angle EFG ſera beaucoup plus grand que le meſme angle EGF: donc au triangle EFG le coſté EG ſera plus grand que le coſté EF par la 19. prop. Mais il a eſté demonſtré que EG eſt egale à BC: donc BC ſera plus auſſi grande que EF: Ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, que EG tombe ſur icelle EF: ainſi qu'en la 2. fig. d'autant que comme deſſus la baſe EG, ſera egale à la baſe BC par la 4. prop. & GE eſt plus grande que EF par la 9. com. ſent. auſſi BC ſera plus grande que EF: Ce qui eſtoit propoſé.



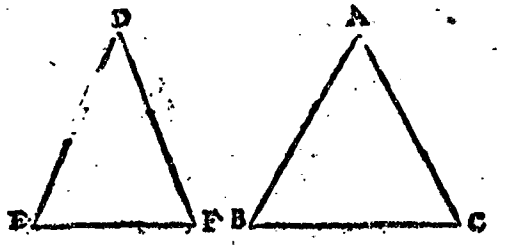
En troiſieſme lieu, que EG tombe au deſſous de EF. Il eſt euident que les deux lignes interieures DF, EF ſont plus petites que les deux coſtez

DG,EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF: donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC: donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez égaux,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux costez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien: Mais la base BC est plus grande que la base EF. Ie dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



Autrement, il sera égal, ou plus petit. Mais il ne peut estre égal: d'autant que par la 4. prop. les bases BC & EF seroient égales contre l'hypothese. Pareillement il ne peust estre plus petit; d'autant que par la 24. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a esté posee plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust estre egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

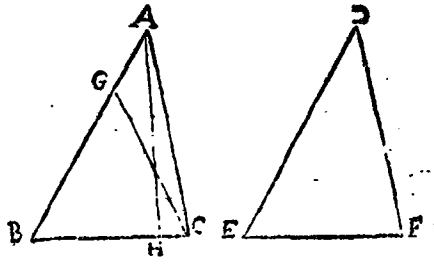
THEOR. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux, ou bien celuy qui soustient l'vn d'iceux angles egaux: ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B & ACB, sont egaux aux deux E & F, chacun au sien,& soit premierement le costé BC, aux extremitez duquel sont les angles B & ACB, egal au costé EF, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Ie dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez DE, DF, chacun au sien, sçauoir est AB à DE,

à DE, & AC à DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car ſi AB n'eſt egal à DE, l'vn d'iceux ſera plus grand: Soit donc AB plus grand, s'il eſt poſſible, & d'iceluy ſoit retranchee BG egale à DE: puis ſoit tirée la ligne droicte CG. Donc puis que les coſtez BC, BG, ſont egaux aux coſtez EF, DE, chacun au ſien, & l'angle B egál à l'angle E, par la 4. prop. la baſe CG ſera egale à la baſe FD, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au ſien, c'eſt à ſçauoir que l'angle BCG ſera egal à l'angle F, auquel eſt auſſi egal l'angle ABC par l'hypotheſe. Partant les deux angles ACB & GCB ſeroient egaux, la partie au tout: ce qui eſt abſurde. Donc le coſté AB n'eſtoit pas inegal au coſté DE, mais egal. Parquoy veu que les coſtez AB, BC ſont egaux aux coſtez DE, EF, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle E; la baſe AC ſera egale à la baſe DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D, par la 4. prop. de ce liure. Ce qui eſtoit propoſé.



Soient maintenant egaux deux autres coſtez ſçauoir eſt AB à DE ſouſtendans angles egaux ACB & F. Ie dis derechef que les deux autres coſtez AC, BC ſont egaux aux deux autres coſtez DF, EF, chacun au ſien, c'eſt à dire AC à DF, & BC à EF: & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D. Car ſi le coſté BC n'eſt egal au coſté EF, ſoit le plus grand BC, duquel ſoit couppé BH egal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les coſtez AB, BH ſont egaux aux coſtez DE, EF, vn chacun au ſien, & l'angle B eſt egal à l'angle E par l'hypotheſe, par la 4. prop. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, c'eſt à ſçauoir, que l'angle AHB ſera egal à l'angle F. Mais par l'hypotheſe l'angle ACB, eſt auſſi egal à l'angle F. Donc l'angle AHB ſera auſſi egal à l'angle ACB, l'exterieur à ſon oppoſé interieur: ce qui eſt abſurde: car il eſt plus grand par la 16. prop. Le coſté BC n'eſtoit donc pas plus grand que le coſté EF, ains egal. Parquoy les deux coſtez AB, BC, ſont egaux aux deux coſtez DE, EF, chacun au ſien, & par la 4. prop. l'angle B eſtant egal à l'angle E, les baſes AC, DF, ſeront egales, & les autres angles BAC & D auſſi egaux. Parquoy ſi deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration de cette propoſition, que le triangle eſt auſſi egal au triangle.

SCHOLIE.

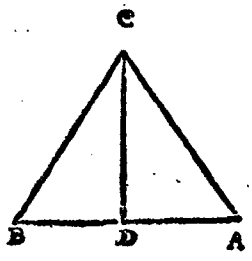
Nous demonſtrerons icy deux theoremes aſſez vtils & neceſſaires en Geometrie: le premier eſt tel.

En vn triangle equilateral, ou Iſoſcelle, eſtant menee vne ligne droicte de l'angle contenu des deux coſtez egaux, laquelle diuiſe en deux egalement, ou l'angle, ou la baſe; elle ſera perpendiculaire à la baſe: & ſi elle couppe l'angle en deux egalement, elle couppera auſſi la baſe en deux egalement:

Mais si elle couppe en deux egalement la base, elle couppera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire estant tiree vne ligne droicte perpendiculaire à la base, elle diuisera en deux egalement, tant la base que l'angle.

Au triangle A B C soient deux costez egaux A C, B C, & la ligne droicte C D diuise premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne C D est perpendiculaire à la base A B, & la diuise en deux egalement. Car puis que les deux costez A C, C D, sont egaux aux deux costez B C, C D, & les angles qu'ils contiennent aussi egaux, par la quatrieſme prop. les bases A D, B D seront aussi egales, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts.

Que si la ligne droicte C D diuise en deux egalement la ligne A B: Ie dis que la ligne droicte C D est perpendiculaire à la ligne A B, & que l'angle C est couppé en deux egalement. Car puis que les deux costez A D, D C, sont egaux aux deux costez B D, D C, & la base A C egale à la base B C, par la 8. prop. les angles du poinct D seront egaux, & partant droicts, & la ligne C D perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi egaux.



Maintenant soit la ligne droicte C D perpendiculaire à A B: Ie dis qu'elle couppe aussi la base B A, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle A C D, sont egaux aux deux angles B & D, du triangle B C D, vn chacun au sien, & le costé C D oppoſé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres costez A D, B D, seront aussi egaux, & les autres angles du poinct C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

Le second Theoreme est tel.

Le triangle auquel vne ligne droicte tiree de l'vn des angles perpendiculaire à la base, diuise ou la base ou l'angle en deux egalement, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est diuisee en deux egalement, l'angle sera aussi diuisé deux en egalement: Mais si l'angle est diuisé en deux egalement, aussi sera la base diuisee en deux egalement.

Au mesme triangle A B C, soit C D perpendiculaire à la base A B, & la diuise en deux egalement. Ie dis que les costez A C & B C sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez A D, D C, sont egaux aux deux costez B D, D C, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçauoir droicts par la 4. prop. les bases A C, B C, & les angles à C seront pareillement egaux.

Maintenant, que la perpendiculaire C D couppe en deux egalement l'angle C: ie dis que les costez A C, B C sont egaux; & les lignes A D, B D aussi egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle A C D, sont egaux aux deux angles D, C du triangle B C D, & le costé C D est commun, par la 26. prop. les deux costez A C, B C, seront egaux; & les costez A D, B D, aussi egaux: Ce qu'il falloit demonstrer.

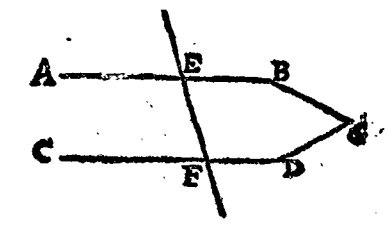
THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes faict

les angles oppoſez alternatiuement egaux ; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, lur leſquelles tombant la ligne droicte EF, faict les angles BEF, & EFC alternatiuement egaux. Ie dis que AB & CD ſont paralleles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans continuées elles ſe rencontreront: Que ſi elles ſe rencontroient, comme au poinct G, elles feroient vn triangle auec le coſte EF, & l'angle exterieur CFE ſeroit plus grand que l'oppoſé interieur FEB par la 16. prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc les deux lignes AB, & CD ne ſe rencontreront iamais; & par la 25. def. icelles lignes ſeront paralleles entr'elles. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

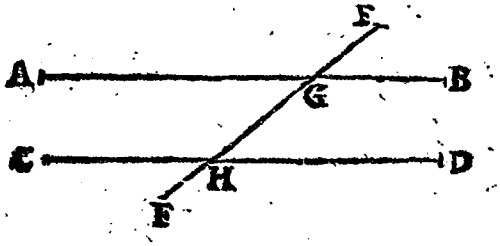


THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, faict l'angle exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté; ou bien les deux interieurs de méme coſté, egaux à deux droicts; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, ſur leſquelles tombant vne autre ligne droicte EF, faſſe l'angle exterieur EGA egal à GHC ſon oppoſé interieur de méme coſté. Ie dis que AB & CD ſont paralleles entr'elles.

Car puis que l'angle GHC eſt poſé egal à l'angle EGA, auquel eſt auſſi egal l'angle BGH par la 15. prop. les angles alternes BGH, GHC, ſeront egaux par la premiere commune ſentence: partant les lignes droictes AB, CD ſeront paralleles par la propoſition precedente. Ce qui eſtoit propoſé.



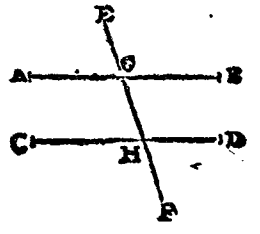
Pour la ſeconde partie. Ie dis que ſi les deux angles interieurs de meſme coſté AGH, & CHG ſont egaux à deux droicts, auſſi AB & CD ſeront paralleles. Car par la 13. propoſition, les deux angles GHC & GHD ſont egaux à deux droicts; partant auſſi egaux aux deux AGH & GHC. Que ſi d'iceux angles egaux, on oſte le commun GHC, les demeurans AGH & GHD ſe trouueront alternatiuement egaux, & par la 27. prop. AB & CD ſeront paralleles. Si donc vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, &c. Ce qui falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles opposez alternatiuement egaux; & l'exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, sur lesquelles tombe la ligne droicte EF. Ie dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont egaux.

Autrement, s'ils ne sont egaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre: Soit donc AGH plus petit, s'il est possible, que GHD: & si à iceux angles inegaux on adiouste chose comm. sçauoir l'angle GHC, les deux angl. AGH & GHC seront plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13. prop. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles: ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust egal à l'angle GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle exterieur EGB est egal à son opposé interieur de mesme costé GHD: ce qui est manifeste par ce qui a esté demõstré cy-dessus, sçauoir que les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. proposition; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront egaux, estans tous deux egaux au mesme AGH.

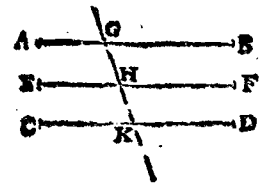
Pour la troisiesme partie: ie dis que les deux angles interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts: car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à vne mesme ligne droicte EF. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posees en vn mesme plan, soit tiree la ligne droicte GHK, qui les couppe toutes trois, sça-

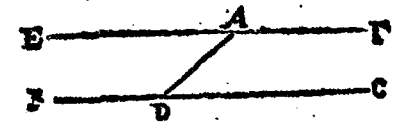
ſoit eſt AB en G ; EF en H; & CD en K. Et puis que AB eſt poſee parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, ſeront egaux entr'eux par la precedente propoſition. Derechef, puis que CD eſt auſſi poſee parallele à la meſme EF; l'angle DKH ſera auſſi egal au méme angle GHF c'eſt à ſçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH ſeront egaux entr'eux, leſquels eſtans alternes, les lignes AB & CD ſont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne meſme ligne droicte ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit démonſtrer.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn diſoit que AG & BG ſont paralleles à EF, & toutesfois elles ne ſont paralleles entr'elles, il faudroit reſpondre qu'icelles AG & BG ne ſont pas deux lignes, mais ſeulement les deux parties d'vne ſeule & meſme ligne: Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, ſoient infiniment produites ſans ſe rencontrer: mais il appert que AG eſtant prolongee ſe rencontre auec BG.

THEOR. 22 PROP. XXXI.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte parallele à la dõnee BC.

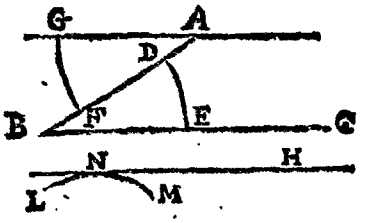


Soit menée la ligne AD faiſant auec la ligne donnee BC, quelconque angle ADC, & ſur icelle AD, & au poinct A ſoit fait l'angle DAE egal à l'angle ADC. Ie dis que la ligne EA tiree tant qu'on voudra vers F, eſt parallele à BC. Car puis que par la conſtruction les angles alternes ADC, DAE ſont egaux, les lignes BC, FE ſeront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous auons donc d'vn poinct donné A, mené vne ligne droicte EF parallele à vne ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

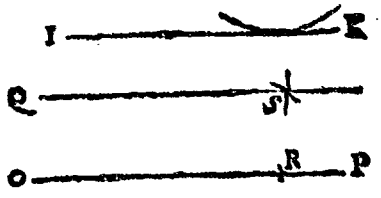
SCHOLIE.

Il eſt manifeſte par cette conſtruction, que le poinct donné doit eſtre tellement ſitué hors la ligne donnee, qu'icelle eſtant continuee directement ne rencontre iceluy. Quant à la prattique de cette propoſition, nous l'auons enſeignee en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geometrie prattique, laquelle toutesfois nous repeterõs ici. Du poinct donné A ſoit menee la ligne droicte AB faiſant auec la ligne donnee BC, l'angle ABC; puis de A & B comme centres, & d'vn meſme intervalle, ſoient deſcrits les deux arcs DE, FG, & fait FG egal à DE, puis par les poincts A & G ſoit menee la ligne droicte AG ſi grande qu'on voudra, & icelle ſera parallele à BC.

Autrement, ſi du poinct H on veut mener vne parallele à la ligne droicte IK, du centre H ſoit fait vn arc qui touche ſeulement la ligne donnee IK, puis du centre I (qui eſt l'extremité de la ligne le plus eſloigné de l'arc ia fait) & du meſme internalle ſoit deſcrit vn autre arc LM, puis du poinct H ſoit tiree la ligne droicte HN, qui touche l'arc LM, & icelle ligne HN ſera la parallele requiſe.



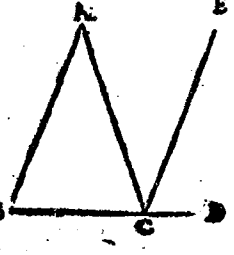
Encore autrement : Si du poinct Q, il faut tirer vne ligne parallele à vne ligne donnee OP, ſoit pris en icelle ligne quelconque diſtance, comme OR, auec laquelle ſoit deſcrit du centre Q vn arc S; puis ſoit pris la diſtance ou internalle QO, & d'iceluy ſoit auſſi deſcrit du centre R vn arc qui coupe le precedent en S, & d'icelle interſection ſoit tiree par le poinct donné Q la ligne droicte QS, laquelle ſera parallele à OP, ainſi qu'il eſtoit requis.



THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'vn des coſtez eſtant prolongé, l'angle exterieur eſt egal aux deux oppoſez interieurs; & de chacun triangle les trois angles interieurs ſont egaux à deux droicts.

Soit le triangle ABC, duquel le coſté BC, ſoit prolongé iuſques en D: Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, eſt egal aux deux oppoſez interieurs A & B.



Qu'il ne ſoit ainſi: qu'on meine CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe ſur les paralleles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, ſeront alternatiuement egaux: item l'exterieur ECD, ſera egal à ſon oppoſé interieur ABC. Partant il eſt manifeſte que le total ACD, eſt egal aux deux A & B, oppoſez interieurement.

Pour la ſeconde partie, que les trois angles A, B & C, interieurs du triangle ABC ſont egaux à deux droicts, il eſt euident, eſtant ACD egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, ſont enſemble egaux à deux droicts par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs A, B, & ACB, ſeront auſſi egaux à deux angles droicts. Si donc de tout triangle, l'vn des coſtez eſt prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

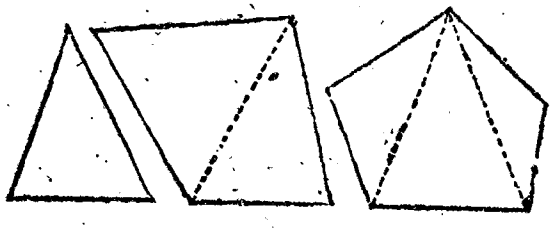
SCHOLIE.

De ceſte propoſition nous pouuons colliger à combien d'angles droicts ſont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe.

& ce par deux manieres, dont la premiere eſt telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle eſt entre les figures rectilignes.

C'eſt à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne ſont egaux à deux fois vn droict, c'eſt à dire, à deux droicts: Mais les angles de la ſeconde figure rectiligne, ſont egaux à deux fois deux droicts, ſçauoir eſt à quatre droicts: Mais ceux de la troiſieſme figure, ſont egaux à deux fois trois droicts, c'eſt à dire à ſix droicts, & ainſi des autres. Or le lieu qu'obtient chaſque figure rectiligne entre les figures rectilignes, eſt monſtré par le nombre des coſtez, ou des angles, deux d'iceux oſtez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas vne ſuperficie, & par conſequent ne conſtituent vne figure: mais ſont requiſes au moins trois lignes droictes pour conſtituer vne figure rectiligne: d'où vient que le triangle eſt la premiere figure rectiligne: Car de ſes coſtez, en eſtans oſtez deux, reſte vn: ainſi la figure ayant douze coſtez, ou douze angles, ſera la dixieſme figure, puis que deux eſtans oſtez de douze reſtent dix: & ainſi faut il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de douze coſtez, eſt la dixieſme, elle aura auſſi douze angles equiualians à vingt angles droicts, c'eſt à ſçauoir à deux fois dix angles droicts: Ainſi auſſi tous les dix angles de la figure contenue de dix coſtez, equiualent à ſeize angles droicts, puis qu'icelle figure eſt la huictieſme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raiſon de cecy eſt, que toute figure rectiligne ſe diuiſe en autant de triangles, qu'elle eſt quantieſme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de coſtés, deux eſtans oſtez: Car de quelconque angle d'vne figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles oppoſez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure ſera diuiſee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux eſtans oſtez. Ainſi il eſt euident que le triangle ne ſe peut diuiſer en autres triangles: mais le quadrangle ſe couppe en deux: le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles conſtituent tous les angles de la fig. propoſee, & tous les angles de quelconque triangle rectiligne ſont egaux à deux droicts: il eſt manifeſte que tous les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'eſt le nombre des triangles eſquels elle ſe diuiſe, c'eſt à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure eſt quantieſme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifeſtement és figures cy deſſus appoſees.

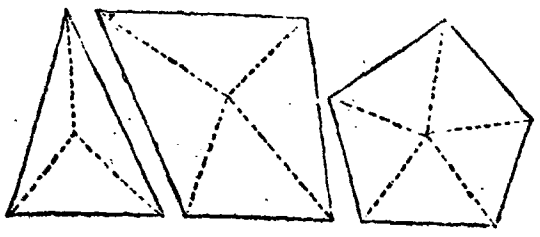


Le ſecond moyen par lequel on ſçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, eſt ceſtuy-cy.

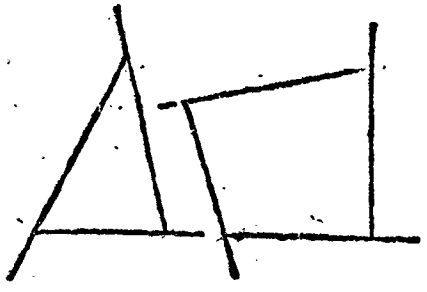
Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre eſtans oſtez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de coſtez.

C'eſt à dire, que les angles de chaſque triangle ſont egaux à deux fois trois droicts, quatre oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droicts: Ainſi auſſi les angles de la figure de douze coſtés, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, ſçauoir eſt vingt angles droicts, &c. Or la demonſtration de cela eſt telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en

ladite figure, qu'elle a d'angles ou de coſtez. Veu donc que les trois angles de chaſque triangle par la 32. prop. ſont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles, ſont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de coſtez en la figure. Mais il eſt euident que les angles des meſmes triangles qui ſont à l'entour du poinct pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure propoſee: & partãt ſi on oſte ces angles-là, les autres angles des triangles qui conſtituent ceux de la figure propoſee, ſeront auſſi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le poinct pris eſtans oſtez, qu'il y a de coſtez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le poinct pris, ſont ſeulement egaux à quatre droicts, ainſi que nous l'auons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant de droicts, quatre eſtans oſtez, que ladite figure contient d'angles ou de coſtez.



Or il appert de ce que deſſus, que ſi chaſque coſté dequelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles interieurs, eſt prolongé par ordre vers vne meſme part; tous les angles externes pris enſemble, ſeront egaux à quatre droicts. Car par la 13. prop. les angles interieurs pris auec les exterieurs, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de coſtez en la figure. Mais les angles interieurs ſont egaux à deux fois autant de droicts, quatre oſtez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons monſtré cy deſſus: partant les exterieurs ſont touſiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs enſemble, ſont egaux à ſix droicts: comme il appert en cette figure. Mais par la 32. prop. les internes ſeuls ſont egaux à deux droicts. Donc les ſeuls exterieurs ſeront egaux à quatre droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs, & les interieurs enſemble, ſont egaux à huict droicts. Mais les interieurs ſeuls ſont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonſtré: les exterieurs ſeuls ſeront donc auſſi egaux à quatre droicts. Toutes leſquelles choſes peuuent eſtre veuës ez figures appoſees cy deſſus. Il y a la meſme raiſon en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.



COROLLAIRE.

Il reſulte de cette 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris enſemble, ſont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris enſemble. Pource que tant ces trois-là, que ces trois-cy, ſont egaux a deux droicts: d'où vient que ſi deux angles d'vn triangle ſont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troiſieſme angle de l'vn ſera auſſi egal au troiſieſme angle de l'autre; & de plus, ſi les deux angles de ce triangle-là ſont egaux aux deux angles de ceſtuy-cy, chacun au ſien, les triangles ſeront equiangles.

Il appert auſſi que tout triangle Iſoſcelle, duquel l'angle compris des coſtez egaux eſt droict, à chacun des autres angles demy droict: car ces deux enſemble ſont vn droict, puis que par la 32. prop. les trois ſont egaux à deux droicts, & que le troiſieme eſt

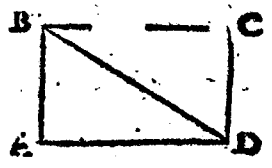
me eſt poſé droict : Parquoy puis que par la 5. prop. les deux reſtans ſont egaux entr'eux : chacun d'iceux ſera demy droict. Mais ſi l'angle contenu des coſtez egaux eſtoit obtus, chacun des autres ſeroit moindre qu'vn demy droict : car les deux enſemble ſeroient moindres qu'vn droict, &c. Finalement ſi ledit angle eſtoit aigu, chacun des autres, ſeroit plus grand qu'vn demy droict : pource que les deux enſemble ſeroient plus grands qu'vn droict, &c. D'où reſulte derechef que les triangles Iſoſcelles, qui ont les angles du ſommet egaux, ſont equiangles ; attendu que chacun des angles de deſſus la baſe, ſera la moitié du reſte de deux droicts.

Il eſt pareillement manifeſte, que chaſque angle d'vn triangle equilateral, eſt les deux tierces parties d'vn droict, ou la tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, auſquels ſont egaux les trois angles d'vn triangle equilateral par ceſte 32. propoſ. eſtans diuiſez en trois angles egaux, chacun d'iceux ſera neceſſairement la tierce partie de deux droicts, ou bien les deux tierces parties d'vn droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de meſme part, ſont auſſi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, qui conioignent de meſme part deux autres lignes droictes AD & BC egales & paralleles. Ie dis que AB & CD, ſont auſſi egales & paralleles.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoit menee la diagonalle BD: Icelle tombant ſur les deux paralleles AD & BC, fera les angles A D B & C B D alternatiuement egaux par la 29. prop. Item A D & BC eſtans egales, les deux triangles ABD & CBD, auront deux coſtez egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles qu'ils comprennent auſſi egaux, & par la 4. prop. la baſe AB ſera egale à la baſe C D, & l'angle A B D ſera egal alternatiuement à l'angle CDB, & par la 27. prop. icelles lignes egales A B & C D, ſeront auſſi paralleles. Donc les lignes droictes qui conioignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

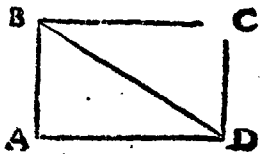
Euclide a dit que les lignes egales & paralleles doiuent eſtre conioinctes de meſme part, afin que celles qui les ioindront ſoient auſſi egales & paralleles.

pource que si on les conioignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D il est manifeste que les lignes qui les ioindroient ainsi, ne seroient iamais paralleles, ains s'entrecoupperoient tousiours, & ne seroient que rarement egales.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les costés & les angles opposez, sont egaux entr'eux ; & la diagonalle le couppe en deux egalement.

Soit le parallelogramme ABCD, auquel soit menee la diagonalle BD. Ie dis que le costé AB est egal à son opposé CD ; & aussi le costé AD egal au costé BC: Item que l'angle A est egal à son angle opposé C, & encore l'angle ABC egal à l'angle ADC: finalement qu'iceluy paralellelogramme ABCD, est couppé en deux egalement par la diagonalle BD.



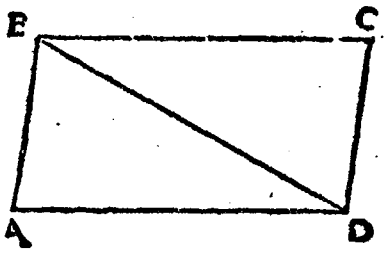
Car puis que la figure quadrilatere ABCD est vn parallelogramme, le costé AB sera parallele au costé CD, & le costé AD au costé BC, & par la 29. propos. l'angle ABD sera alternatiuement egal à BDC. Item l'angle ADB alternatiuement egal à l'angle CBD: Ainsi les deux triangles BAD & DCB auront les angles ABD & BDA, egaux aux angles BDC & CBD, chacun au sien : & le costé BD commun à tous les deux susdits triangles: Et partant par la 26. prop. les autres costez AB & AD, seront egaux aux autres costez CD & BC, chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'autre angle C. Et de plus il est euident que les deux angles du poinct B ensemble, seront egaux aux deux ensemble du poinct D. Encores par la 4. propos. les triangles ABD & CDB seront egaux ; & partant le parallelogramme ABCD est couppé en deux egalement par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Euclide a bien dit icy que la diagonalle couppe le parallelogramme en deux egalement, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les couppe quelquesfois en deux egalement, & d'autresfois inegallement, ainsi qu'il est demonstré au 3. Theoreme suiuant.

1. Tout quadrilatere ayant les coſtez oppoſez egaux eſt parallelogramme.

Au quadrilatere A B C D, les coſtez oppoſez A B, C D ſoient egaux, & auſſi les oppoſés A D, B C. Ie dis qu'iceluy quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle B D, les deux coſtez A B, B D du triangle A B D ſeront egaux aux deux coſtez D C, B D du triangle B C D, chacun au ſien, & la baſe B D, egale à la baſe B C. Donc par la 8. propoſ. l'angle A B D ſera egal à l'angle C D B, qui luy eſt alterne, & encore A D B à ſon alterne C B D par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes A B, C D ſeront paralleles; comme auſſi B C, A D: & par la 36. def. le quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Ce qui eſtoit propoſé.



De cecy reſulte que les Rhombes, & les Rhomboides ſont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs coſtez oppoſez egaux.

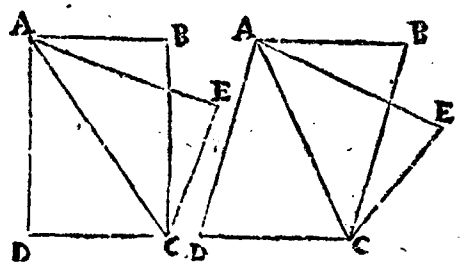
2. Tout quadrilatere qui a les angles oppoſez egaux, eſt parallelogramme.

Au quadrilatere A B C D, les angles oppoſez A & C ſoient egaux, comme auſſi les oppoſez B & D. Ie dis que A B C D eſt vn parallelogramme. Car ſi aux angles egaux A & C, on adiouſte les angles egaux B & D: par le 2. Ax. les deux angles A & B ſeront egaux aux deux angles C & D: partant les deux A & B ſeront la moitié des quatre angles A, B, C & D. Mais ces quatre cy ſont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonſtré au Scholie de la 32 prop. Donc les deux A & B ſeront egaux à deux droicts, & par la 28. prop. le coſtez A D, B C ſeront parallels. Par meſme raiſon les coſtez A B, D C ſeront auſſi parallels. Parquoy le quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Ce qui eſtoit propoſé.

De cecy reſulte que tout quadrilatere qui a tous les angles droicts eſt parallelogramme, attendu que les deux angles A & B ſeront egaux à deux droicts, comme auſſi les deux D & C, & c. Conſequemment tant le quarré, que le quarré long, ſont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous leurs angles droicts.

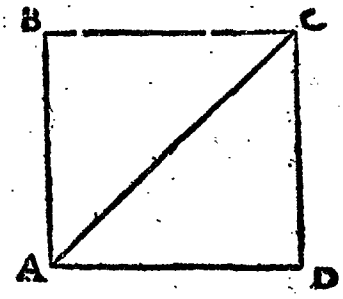
Or par les deux Theoremes precedents ſont conuerties les deux premieres parties de la 34. propoſ. mais quant à la 3. partie, on ne la peut pas conuertir, veu que tout quadrilatere qui eſt coupé en deux egalement par

la diagonalle, n'eſt pas parallelogramme. Car ſoit A B C D vn quarré long, ou bien vn Rhomboide, lequel ſera parallelogramme, & conſequemment eſtant tiree la diagonalle A C, elle le couppera en deux egalement: & ſur icelle ſoit cõſtruict le triangle A E C, en ſorte que le coſté A E ſoit egal au coſté A D, & le coſté C E egal au coſté C D: & ſera faict le trapeſe A D C E, duquel la diagonalle ſera A C, qui le couppera en deux egalement, puis que les deux triangles A D C, A E C ayans tous leurs coſtez egaux chacun au ſien, ſont conſequemment egaux.

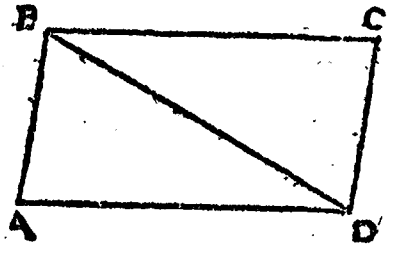


3. Si vn parallelogramme eſt equilateral, la diagonalle couppera les angles en deux egalement; mais inegalement s'il n'eſt equilateral.

Soit vn parallelogramme A B C D, duquel tous les coſtez ſoient egaux entr'eux, & ſoit menee la diagonalle A C: Ie dis qu'elle coupe les angles A & C en deux egalement. Ce qui eſt manifeſte par la 8. propoſ. veu que les deux triangles A B C, A D C ont tous les trois coſtez egaux, chacun au ſien.



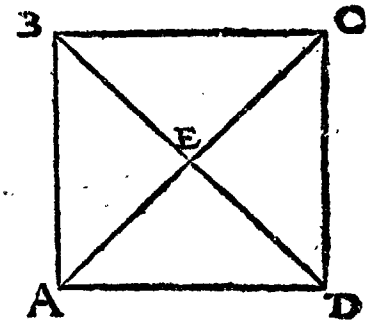
Soit derechef le parallelogramme A B C D, auquel le coſté A D ſoit plus grand que le coſté A B, & ſoit tiree la diagonalle B D: Ie dis qu'elle couppe inegalement les angles B & D. Car puis que au triangle A B D le coſté A D eſt plus grand que le coſté A B, par la 18. propoſ. l'angle A B D ſera plus grand que l'angle A D B. Mais par la 29. prop. l'angle A B D eſt egal à ſon alterne B D C, car A D eſt parallele à B C, puis que A B C D eſt vn parallelogramme. Donc auſſi l'angle B D C ſera plus grand que l'angle A D B: & partant tout l'angle D eſt couppé inegalement par la diagonalle B D. Il y a meſme raiſon des autres angles. Parquoy appert ce qui eſtoit propoſé.



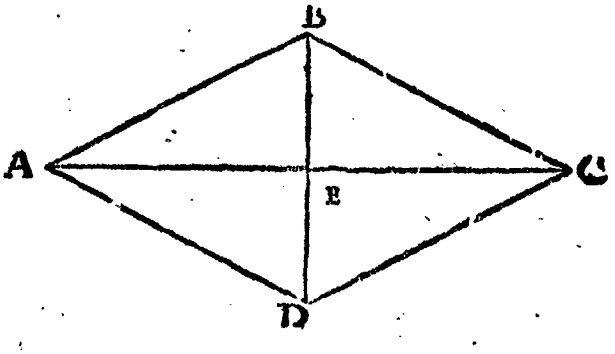
4. Si vn parallelogramme a tous les angles egaux, les deux diagonalles ſeront egales entr'elles: mais inegales, ſi les angles ſont inegaux.

Soit premierement vn parallelogramme A B C D, duquel tous les angles ſoient egaux, & ſoient menees les deux diagonalles A C, B D: Ie dis qu'i-

celles diagonalles ſont egalles entr'elles. Car attendu que les deux coſtez A B, B C du triangle A B C ſont egaux aux deux coſtez D C, C B du triangle B C D, chacun auſien, & l'angle B egal à l'angle C, par la 4. propoſ. la baſe A C ſera egale à la baſe B D : ce qui eſtoit propoſé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres ſont egaux, puis que l'vn & l'autre a tous les angles egaux, ſçauoir droicts.



Maintenant au parallelogramme A B C D, duquel l'angle A B C ſoit plus grand que l'angle B A D, & ſoient les deux diagonalles A C, B D. Ie dis que la diagonalle A C, qui ſouſtient le plus grand angle B, eſt plus grande que la diagonalle B D, qui ſouſtient le moindre angle A. Car d'autant qu'au triangle A B C les deux coſtez A B, B C, ſont egaux aux deux coſtez A B, A D du triangle B A D, chacun au ſien, & l'angle B plus grand que l'angle A, par la vingt-quatrieſme propoſition, la baſe A C ſera plus grande que la baſe B D. Ce qui eſtoit propoſé.



De cecy reſulte qu'au Rhombe, ou Rhomboide les diagonalles ſont inegales: car ils ont les angles obliques, & par conſequent inegaux.

5. En tout parallelogramme, les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement: & tout quadrilatere auquel les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement, eſt parallelogramme.

Au parallelogramme A B C D cy-deſſus, ſoient les deux diametres A C, B D qui s'entrecouppent au poinct E: Ie dis que chacun d'iceux diametres eſt couppé en deux parties egales en E, c'eſt à dire que A E, C E ſont egales, & B E, D E auſſi egales. Car d'autant que par la 29 prop. les deux angles E A B, E B A du triangle A B E, ſont egaux aux alternes E C D, E D C du triangle C D E, vn chacun au ſien, & le coſté A B egal au coſté oppoſé C D par la 34. prop. le coſté A E ſera egal au coſté C E, & le coſté B E au coſté E D par la 26. prop. Ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant, au quadrilatere A B C D ſoient les deux diagonalles A C, B D, qui s'entrecouppent en deux egalement en E: Ie dis qu'iceluy quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Car puis que les coſtez A E, B E du triangle A E B ſont egaux aux coſtez C E, D E du triangle C E D, chacun au ſien, & que par la quinzieſme propoſition les angles au ſommet E ſont auſſi

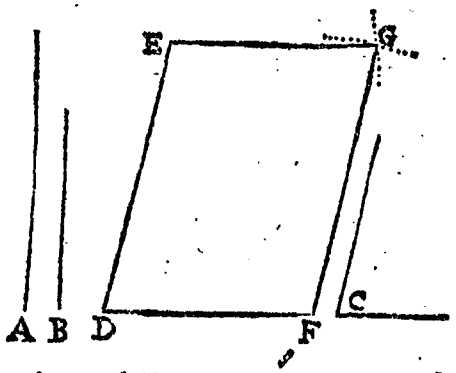
egaux; par la quatrieſme propoſit. les baſes A B, C D ſeront egales, & l'angle A B E egal à l'angle alterne C D E: Donc les lignes droictes A B, C D ſeront paralleles par la 27. propoſition. Par meſme raiſon A D, B C ſeront demonſtrées paralleles. Parquoy A B C D eſt vn parallelogramme.

De cecy appert que ſi on veut promptement conſtruire vn parallelogramme, il faut tirer deux lignes droictes interminees A C, B D, qui s'entrecouppent comme que ce ſoit en E; puis prendre A E, E C egales, & B E, E D auſſi egales, puis ſoient tirees les lignes A B, B C, C D, D A: & ſera faict le parallelogramme A B C D: lequel ſera vn Rhombe, ſi les angles du poinct E ſont faicts droicts, & s'ils ſont obliques, ce ſera vn Rhomboide: Mais les ſuſdicts angles eſtans droicts, ſi on faict toutes les quatre lignes E A, E B, E C, E D egales entr'elles; le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré: Finalement leſdits angles du poinct E eſtans obliques, & toutes les quatre ſuſdites lignes egales, le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré long; le tout comme il appert des choſes demonſtrees cy-deſſus.

A ce que deſſus nous adiouſterons encore ce probleme.

6. Conſtruire vn parallelogramme qui ait vn angle egal à vn angle donné, & les coſtez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droictes donnees.

Soient donnees deux lignes droictes A, B, & vn angle C: Il faut conſtruire vn parallelogramme ayant vn angle egal au donné C, & les deux coſtez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes donnees A & B.



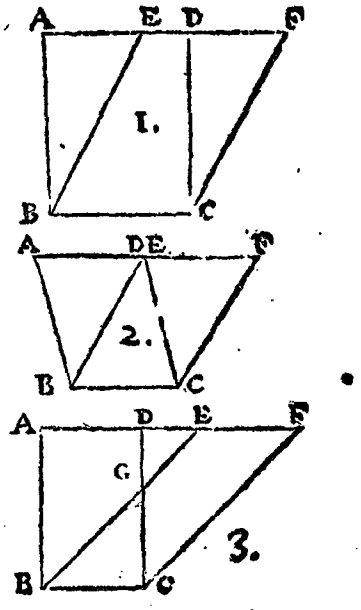
Soit priſe D E egale à A, puis à l'extremité D, ſoit faict l'angle E D F egal au donné C, faiſant D F egale à B: en apres du centre E, & du meſme interualle B ſoit deſcrit vn arc de cercle G, puis du centre F & interualle A ſoit deſcrit vn autre arc qui couppe le precedent G, & de l'interſection ſoient tirees les lignes droictes E G, F G: & le quadrilatere D E G F, ſera le parallelogramme requis, ainſi qu'il eſt manifeſte par leschoſes cy-deſſus demonſtrees.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes conſtituez ſur vne meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes A B C D & B C F E, tous deux ſur meſme baſe B C, & entre meſmes paralleles A F, & B C: Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

Or le poinct E tombera, ou entre A & D, ou au poinct D, ou entre D & F : qu'il tombe premierement entre A & D, comme en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme A B C D, le costé A D est egal au costé B C qui luy est opposé, & qu'au mesme B C est aussi egal E F costé du parallelogramme B E F D, par la 1. com. sent. les costez A D, E F seront egaux entr'eux : ostant donc d'iceux la partie commune E D, les restes A E & D F seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la mesme 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez opposez AB, DC sont aussi egaux; & puis qu'estans parallels, sur iceux tombe la ligne droicte FA, l'angle exterieur CDF sera egal à l'angle interieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprenent aussi egaux; & partant iceux triangles A B E, D C F seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur adiouſtant donc le trapeze commun B E D C, sera faict le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme B E F C. Ce qui estoit proposé.



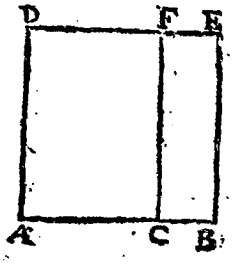
Maintenant, que le poinct E tombe auec le poinct D, comme en la deuxiesme figure, d'autant que comme dessus les lignes A D, E F seront egales entr'elles, & l'angle exterieur FEC egal à l'interieur DAB; les triangles B A D & C E F seront egaux par la quatriesme proposition. Adjoustant donc à chacun le triangle commun B D C, seront faicts egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisiesme lieu, que le poinct E tombe entre D & F, comme en la troisiesme fig. D'autant que par la 34 propos. les costez opposez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF; & partant A D & E F egaux, ausquels si on adjouste la ligne commune D E; la toute A E sera egale à la toute D F. Item A B est egale à D C, lesquelles estans paralleles, l'angle exterieur CDE sera egal à l'opposé interieur E A B : & par la quatriesme proposition les triangles B A E & C D F, seront egaux : desquels si on oste le triangle commun G D E, les demeurans trapezes B A D G & C G E F, seront egaux : ausquels si on adiouste le triangle commun B G C, le parallelogramme A B C D sera egal au parallelogramme B C F E : Donc les parallelogrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux : Ce qui estoit à demonstrer.

SCHOLIE.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de paralle-

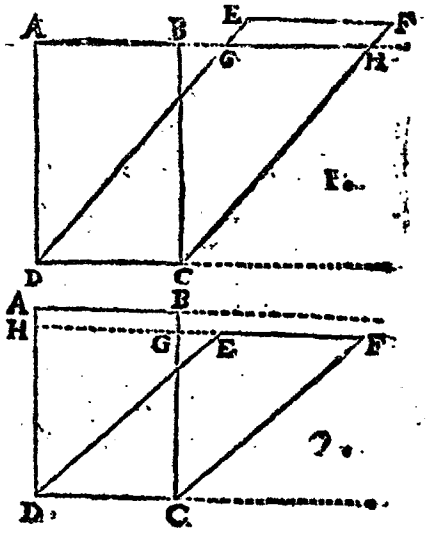
logrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes par alleles, il sentendent que ladite base soit en l'vne d'icelles paralleles comme aux exemples cy-dessus: Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre faulce, comme a fort bien remarqué le sieur Dounot, & ainsi qu'il appert en ces deux parallelogrammes A D F C, C F E B, lesquels sont tous deux constituez sur la base C F, & entre mesmes paralleles A B, D E: & toutesfois il est euident, qu'ils ne sont pas egaux: Ce qui aduient à cause de ce que leur base commune C F, n'est pas en l'vne ne l'autre des paralleles A B, D E. Le mesme se doit aussi entendre des parallelogrammes, & des triangles mentionnez aux propositions suiuantes, c'est à dire, qu'ils doiuent tous auoir leur bases en l'vne des paralleles.



Clauius a conuerty cette 35. prop. ainsi:

Les parallelogrammes egaux constituez sur vne mesme base, & de mesme part, seront entre mesmes paralleles.

Soient deux parallelogrammes egaux A B C D, C D E F, sur vne mesme base C D, & d'vne mesme part: Ie dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire que prolongeant la ligne droitte A B elle rencontrera directement E F. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombera, ou au dessus d'icelle E F ou au dessoubs. Premierement qu'elle tombe au dessoubs, s'il est possible, comme est A H, en la premiere figure. Donc par la 35. proposition le parallelogramme C D G H sera egal au parallelogramme A B C D: Mais à iceluy parallelogramme A B C D est posé egal le parallelogr. C D E F. Parquoy les parallelogrammes C D E F, C D G H seront egaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de A B ne tombera donc pas au dessous de E F.



Secondement, que A B prolongee tombe s'il est possible, au dessus de E F, comme en la 2. figure: donc E F prolongee tombera au dessoubs de A B. Parquoy comme dessus les parallelogrammes A B C D, C D H G seront egaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que A B produite ne tombera pas au dessus de E F, ny au dessoubs, elle la rencontrera directement. Ce qui estoit proposé.

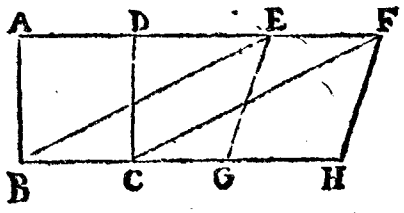
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes A B C D & E F G H, ayans les bases B C & G H egales, & entre mesmes paralleles A F & B H. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il

Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menees les deux lignes BB, CF: d'autant que BC eſt poſee egale à GH, & que par la 34. prop. la meſme GH eſt egale à ſon oppoſee EF; les deux lignes BC, EF, ſeront egales entr'elles par la 1. com. ſent. Mais elles ſont auſſi paralleles par l'hypotheſe: Donc les lignes BB, CF, qui les conioignent ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. propoſ. & par conſequent BEFC ſera vn parallelogramme conſtitué ſur meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles BH, AF que le parallelogram. ABCD, & par la 35. prop. ils ſeront egaux; & par la meſme prop. il ſera auſſi egal au parallelog. EFGH, eſtant ſur meſme baſe EF, auec iceluy, & entre meſmes paralleles AF, BH; Et par la 1. com. ſent. les parallelog. ABCD, & EFGH, ſeront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes conſtitués ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

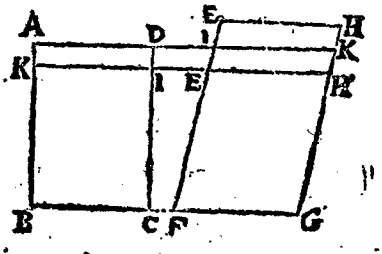


SCHOLIE.

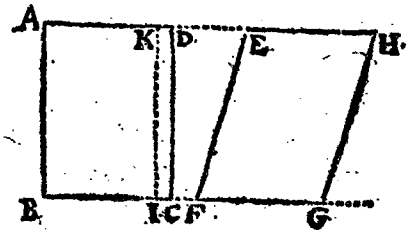
Clauius a conuerty cette 36. propoſ. ainſi qu'il enſuit.

Les parallelogrammes egaux conſtituez ſur baſes egales: & de meſme part ſont entre meſmes paralleles. Et ſi les parallelogrammes egaux conſtituez entre meſmes paralleles, n'ont vne meſme baſe, ils ſeront ſur baſes egales.

Premierement, ſoient deux parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, conſtituez ſur baſes egales BC, FG, & de meſme part: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que AD prolongee ſe rencontrera directement auec EH. Car autrement elle tomberoit ou au deſſoubs d'icelle EH, ou au deſſus; & il s'enſuiuroit le tout eſtre egal à la partie: comme il a eſté dit en la conuerſe de la precedente propoſition.



Secondement, ſoient les parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, entre meſmes paralleles AH, BG: Ie dis que leurs baſes BC, FG ſont egales: car autrement l'vne ſera plus grande que l'autre, & ſoit BC la plus grande, s'il eſt poſſible, & d'icelle ſoit retranchee BI egale à FG: puis ſoit menee IK parallele à AB. Donc par la 36. prop. le parallelogramme ABIK ſera egal au parallelogramme EFGH; & puis auſſi egal au parallelogramme ABCD, la partie au tout. Ce qui eſt abſurde. La baſe BC n'eſt donc pas plus grande que la baſe FG: Et par meſme raiſon elle ne ſera pas plus petite. Parquoy les baſes BG, FG ſont egales.



Clauius demonſtre encore icy ceſt autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes conſtituez entre meſmes paralleles, ont leurs baſes inegales; celuy-là ſera le plus grand, qui aura la plus grande baſe. Et au contraire, ſi deux parallelogrammes inegaux ſont entre meſmes paralleles; le plus grand aura vne plus grande baſe que l'autre.

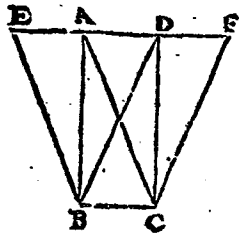
Soient les deux parallelogrammes ABCD, EFGH *de la figure precedente, estre les paralleles* AH, BG, *& soit la base* BC *plus grande que la base* FG: *Ie dis que le parallelogramme* ABCD, *qui est sur la plus grande base* BC, *est plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Car de* BC *soit retranchee* BI *egale à* FG, *& soit tiree* IK *parallele à* AB *par la 31. propos. de ce liure. Donc par la 36. propos. les parallelogrammes* ABIK, EFGH *constituez sur bases egales, seront egaux: & puis que par le 9. ax. le parallelogramme* ABCD *est plus grand que le parallelogramme* ABIK, *le mesme parallelogramme* ABCD *sera aussi plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Ce qui estoit proposé.*

Soient derechef les parallelogrammes ABCD, EFGH *inegaux, &* ABCD *le plus grand: Ie dis que la baze* BC *est plus grande que la base* FG. *Car si elle estoit egale, les parallelogrammes seroient egaux par la 33. proposition de ce liure. Ce qui est absurde, puis que* ABCD *a esté posé plus grand que* EFGH. *Mais si ladite base* BC *estoit moindre, le parallelogramme* EFGH *seroit plus grand que le parallelogramme* ABCD, *comme il a esté demonstré cy dessus: Ce qui est encore absurde. Donc puis que la base* BC *ne peut estre egale, ny moindre que la base* FG, *elle sera plus grande. Ce qui estoit proposé.*

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur vne mesme base; & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC, tous deux constituez sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles EF, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.



Car si on meine BE parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'accomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux seront egaux par la 35. prop. attendu qu'ils sont constituez sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles BC, EF. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, sont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont couppez en deux egalement par les diagonales AB, DC: donc aussi les triangles ABC, & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur vne mesme base, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

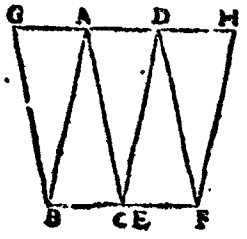
THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF, constituez sur bases egales BC & EF, &

entre meſmes paralleles GH & BF. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

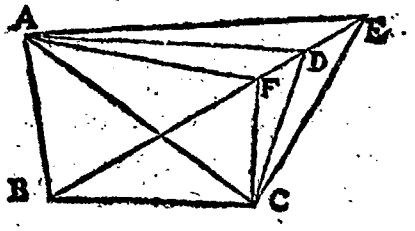
Car apres auoir mené BG, parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accompliſſent les deux parallelogram. ACBG, DEFH : iceux eſtans conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux par la 36. prop. auſſi egales ſeront leurs moitiez, ſçauoir les triangles propoſez ABC, & DEF par la 34. prop. eſtans les parallelogrammes couppez en deux egalement par les diagonales BA & DF. Donc les triangles conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & BCD conſtituez ſur vne meſme baſe BC, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire, que ſi on meine la lig. droicte AD, elle ſera parall. à BC.



Autrement, du poinct A, on en pourra mener vne autre qui ſera parallele à BC (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au deſſus de AD, ou au deſſous. Qu'elle tombe premierement au deſſus, & ſoit icelle AE, s'il eſt poſſible ; & apres auoir continué BD iuſques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux. Mais par l'hypotheſe les deux triangles BEC, & BDC ſont auſſi egaux : donc par la 1. com. ſent. les triangles BEC & BDC ſeroient auſſi egaux, la partie & le tout ; partant la parallele menee du poinct A, ne tombera pas au deſſus de AD. Le meſme inconuenient s'enſuiura ſi on la fait tomber au deſſous de AD, comme AF : car ayant mené CF, les triangles BFC & BDC ſe trouueroient egaux, ce qui ne peut eſtre : donc du poinct A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles egaux conſtituez ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

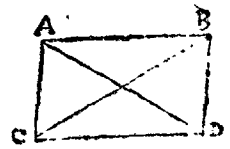
SCHOLIE.

Par cette prop. qui eſt la conuerſe de la 37. il eſt aiſé de demonſtrer comme a fait Commandin le Theor. ſuiuant.

Tout quadrilatere qui eſt couppé en deux egalement par l'vn & l'autre diametre, eſt parallelogramme.

Le quadrilatere ABDC ſoit diuiſé en deux egalement par l'vn & l'autre dia-

metre AD, BC : Ie dis qu'iceluy eſt parallelogramme. Car d'autant que les triangles ACD, BDC ſont chacun moitié du quadrilatere ABDC, ils ſont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont vne meſme baſe CD, & ſont de meſme part, ils ſont entre meſmes paralleles par la 39. prop. & partant AB eſt parallele à CD. Semblablement veu que les triangles ABC, ACD ſont egaux & ſur meſme baſe AC, icelle ligne AC ſera auſſi parallele à BD: donc le quadrilatere ABDC eſt parallelogramme, puis que les coſtez oppoſez d'iceluy ſont parallels. Ce qui eſtoit propoſé.

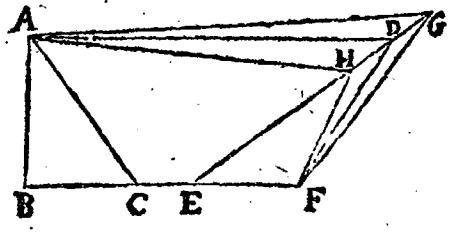


THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont auſſi entre meſmes paralleles: c'eſt à dire, que ſi on meine vne ligne droicte de A en D, qu'icelle ſera parallele à BF.

Autrement, du poinct A on en pourra mener vne autre qui ſera parall. à BF (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. laquelle tombera, ou au deſſus de AD, ou au deſſous. Soit donc premierement au deſſus, & ſoit icelle AG, s'il eſt poſſible, & apres auoir continué ED iuſques à ce qu'il rencontre AG en G, & mené FG, les deux triangles BAC, & EGF ſeront egaux par la 38. prop. mais par l'hypotheſe les triangle BAC & DEF ſont auſſi egaux: donc par la 1. com. ſent. le triangle EDB ſera egal au triangle EGF, la partie au tout; ce qui eſt impoſſible: Partant la parallele menee du poinct A ne tombera point au deſſus de AD. Le meſme inconuenient s'enſuiura ſi on la faît tomber au deſſoubs, comme AH, car les triangles EHF & EDF, ſe trouueroient egaux: donc du poinct A ne pourra eſtre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

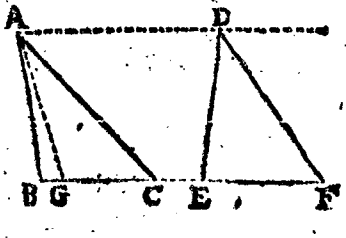


SCHOLIE.

Commandin & Clauius apres luy, demonſtrent en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si les triangles egaux conſtituez entre meſmes paralleles, n'ont vne meſme baſe, ils ſeront ſur baſes egales.

Soient les triangles egaux ABC, DEF, entre meſmes paralleles AD, BF, & ſur les baſes BC, EF: Ie dis qu'icelles baſes ſont egales entr'elles. Car ſi elles ne ſont



gales soit BC la plus grande, & d'icelle soit retranchée CG, egale à EF, & tirée AG. Donc par la 38. proposit. le triangle ACG sera egal au triangle DEF: Mais à ce mesme triangle a esté posé egal le triangle ABC. Donc par le 1. axiome les triangles AGC, ABC seront egaux, la partie & le tout: Ce qui est absurde. Donc les bases BC, EF, ne sont pas inegales, mais egales. Ce qui estoit proposé.

En suitte de ce theoreme Clauius demonstre encore le suiuant.

Si deux triangles constituez entre mesmes paralleles, ont leurs bases inegales, celuy-là sera le plus grand, duquel la base sera la plus grande. Et au contraire, si deux triangles inegaux sont entre mesmes paralleles, la base du plus grand sera la plus grande.

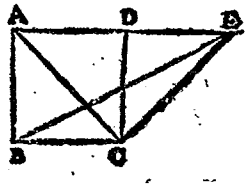
En la figure precedente soient entre mesmes paralleles AD, BF, les triangles ABC, DEF, & soit la base BC plus grande que la base EF: Ie dis que le triangle ABC, est plus grand que le triangle DEF. Car ayant pris CG egale à EF, & tiré AG, les triangles AGC, DEF, seront egaux par la 38. proposition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC est plus grand que le triangle AGC, le mesme triangle ABC sera plus grand que le triangle DEF.

Soient derechef les triangles inegaux ABC, DEF, & le plus grand soit ABC. Ie dis que la base BC est plus grande que la base EF. Car si on dit qu'elle est egale, le triangle ABC sera egal au triangle DEF: ce qui est absurde, attendu qu'il a esté posé plus grand. Et si on l'estime estre moindre, le triangle DEF sera plus grand que le triangle ABC, comme il a esté demonstré cy-dessus: Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a esté posé plus grand que DEF. Donc la base BC sera plus grande que la base EF, puis qu'elle ne peut estre ny egale, ny moindre. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes paralleles AE & BC. Ie dis que le parallelogramme ABCD est double du triangle BEC.

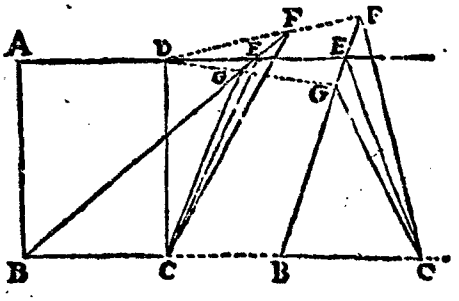


Car si on meine la diagonalle AC, le triangle ABC sera la moitié du parallelogramme ABCD par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le mesme triangle ABC sera egal au triangle BEC. Donc par la 6. com. sent. le parallelogramme ABCD, qui est double de l'vn, sera aussi double de l'autre. Si donc vn parallelogramme & vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Si les bases estoient egales, on demonstreroit encore la mesme chose, & en la mesme maniere que dessus, tirant le diametre du parallelogramme. Car d'autant que les tri-

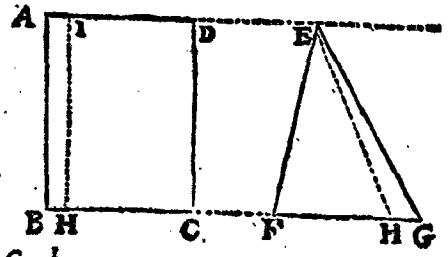
angles conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles ſont egaux entr'eux, le parallelogramme qui eſt double de l'vn, ſeroit auſſi double de l'autre.
Clauius a demonſtre apres Commandin la conuerſe de cette 41. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si vn parallelogramme double d'vn triangle eſt conſtitué ſur vne meſme baſe qu'iceluy, ou ſur vne baſe egale, & de meſme part, ils ſeront entre meſmes paralleles. Et ſi vn parallelogramme eſt double d'vn triangle, & entre meſmes paralleles, leurs baſes ſeront egales, ſi elles ne ſont vne meſme.



Soit le parallellogramme ABCD double du triangle EBC, ſur vne meſme baſe, ou ſur baſes egales: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que AD qui eſt parallele à BC, eſtant prolongee directement tombera au poinct E. Car autrement elle tombera ou au deſſus de E, ou au deſſous. D'où aduiendra comme il a eſté demonſtré en la 39. ou 40. prop. la partie eſtre egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme ſera pareillement double du triangle BFC, ou BGC: & par le 6. axiom. les triangles EBC, FBC, ou les triangles FBC, GBC ſeront egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde.

Soit maintenant le parallelogramme ABCD double du triangle EFG, & entre meſmes paralleles. Ie dis que la baſe BC eſt egale à la baſe FG. Car ſi l'vne d'icelles ſçauoir BC eſt plus grande, ayant pris CH egale à FG & tiré HI *parallele à* BA, *on demonſtrera les parallelogrammes* ABCD, IHCD *eſtre egaux, le tout & la partie: (pour ce que chacun eſt double du triangle EFG, celuy-là par l'hypotheſe, & ceſtuy cy par la 41. prop.) ce qui eſt abſurde.*

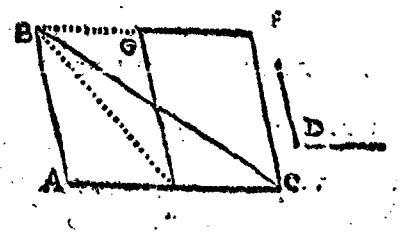


On demonſtrera encore le méme, ſi on dit la baſe FG eſtre plus grande que la baſe BC: Car ayant faict FH egale à BC, & tiré la ligne droicte HE, les triangles EFH, EFG ſeront egaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun eſt moitié du parallelogramme ABCD, celuy-là par la 41. prop. & ceſtuy-cy par l'hypotheſe) Ce qui eſt abſurde.

PROBL. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D: il faut faire vn parallelogramme egal au triangle donné ABC, & qui ait vn angle egal à l'angle donné D.



L'vn des coſtez du triangle, ſçauoir, AC ſoit couppé en deux egalement en E, par la 10. prop. puis ſoit fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. ſoit

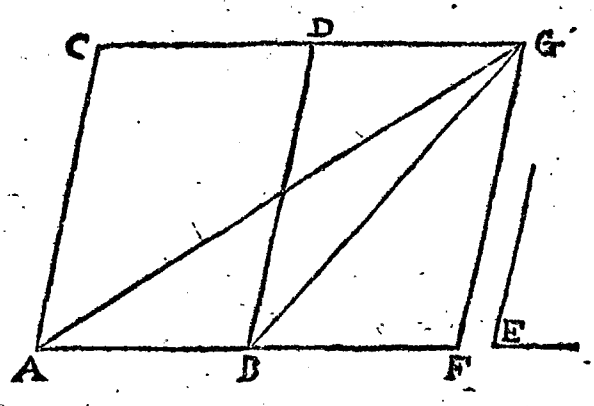
menee de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle couppe E G en G. Derechef, de C soit menee C F parallele à E G, rencontrant B F en F : & sera constitué vn parallelogramme EGFC, ayant l'angle CEG egal au donné D, lequel parallelogramme ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle E B C par la proposition precedente, duquel est aussi double le triangle ABC, iceluy estant egal aux deux A B E, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallelogramme E G F C, & le triangle ABC seront egaux entr'eux par la sixiesme commune sentence, & puis qu'iceluy parallelogramme a l'angle C E G egal au donné D par la construction, nous auons construict vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme est enseignee au 13. de nostre Geometrie practique : Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose : mais nous adiousterons icy (apres Pelletier) la conuerse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme A B D C, & l'angle rectiligne E : il faut faire vn triangle egal au parallelogramme donné A D, ayant vn angle egal au donné E. Soient prolongees C D, tant qu'il sera de besoin ; A B en sorte que B F soit egale à icelle A B ; puis au poinct A soit faict l'angle F A G egal au donné E, tirant A G iusques à ce qu'elle rencontre C D prolongee, & estant ioinct F G, le triangle A G F sera le requis: Car l'angle F A G est egal au donné E, & estant tiree B G, les triangles A G B & B G F seront egaux par la 38. prop. & partant le total A G F sera double de A G B : Mais par la 41. prop. le parallelogramme A D est aussi double d'iceluy triangle A B G. Donc le triangle A G F, & le parallelogramme A C D B seront aussi egaux entr'eux. Ce qu'il falloit faire.



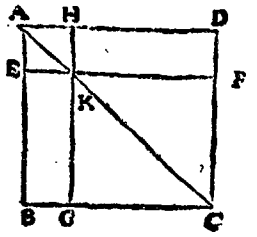
COROLLAIRE.

Il est euident par les deux demonstrations cy-dessus, qu'vn triangle qui a la base double de celle d'vn parallelogramme constitué entre mesmes paralleles qu'iceluy, est egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les supplemens des parallelogrãmes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

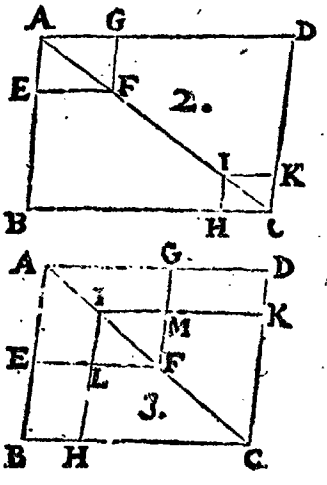
Soit le parallelogramme ABCD, ſon diametre AC, à l'entour duquel ſont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Ie dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle ſupplements, ſont egaux entr'eux.



Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC ſont egaux entr'eux : Item les triangles CKG, CFK auſſi egaux ; ſi on oſte ceux cy de ceux-là, reſteront egaux les trapezes ABGK, ADFK : Mais par la 34. prop. ſont auſſi egaux les triangles AEK, AHK ; partant ſi on les oſte des trapezes ſuſdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les ſupplements, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Si les deux parallelogrammes d'al'entour le diametre n'eſtoient conioincts au poinct K, *ainſi qu'en la figure cy-deſſus, mais que l'vn fut éloigné de l'autre, comme en la deuxieſme figure, ou bien qu'ils s'entrecouppaſſent ainſi qu'en la troiſieſme, on demonſtreroit en la meſme maniere que deſſus, eſtre auſſi egaux, les complemens ou reſtes, ſçauoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFIK, & en la 3. les parallelogrãmes BELH, DGMK : Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'vne & l'autre fig. ſont egaux entr'eux, comme auſſi les triangles AEF, AGF ; les trapezes BEFC, DGFC ſeront pareillement egaux par le 3. axiome. Parquoy ſi d'iceux trapezes de la ſeconde figure, on oſte les triangles egaux HIC, KIC, reſteront encore egaux les pentagones BEFIH, DGFIK. Mais adiouſtant aux trapezes de la troiſiéme fig. les triangles egaux LIF, MIF, les figures BELIC, DGMIC ſeront egales entr'elles, deſquelles ſi on oſte les triangles egaux HIC, KIC, reſteront auſſi egaux les parallelogrammes BELH, DGMK. Ce qui eſtoit propoſé.*



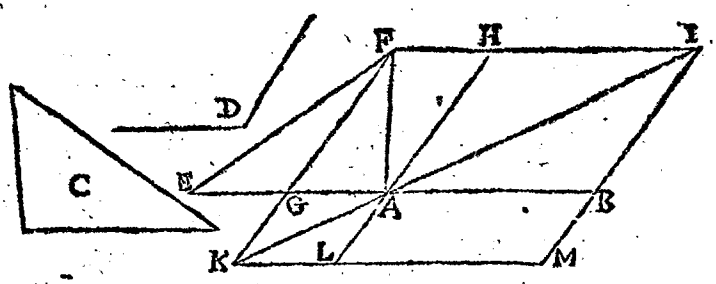
PROB. 12. PROP. XLIV.

Sur vne ligne droicte donnee, d'eſcrire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donné C, & l'angle rectiligne donné D. Il faut ſur AB deſcrire vn parallalogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

Soit pro-

Soit prolongee la ligne donnee A B iuſques en E, tellement que AE ſoit egale à quelconque des coſtez du triangle C, & ſoit acheué de conſtruire par la 22. prop. le triangle AFE, ayant les coſtez egaux auxcoſtez dudit triangle donné C, lequel luy ſera auſſi egal par le Coroll. de la 8. propoſ. Soit maintenant conſtruit par la 42. prop. le parallelogr. AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D: & apres auoir continué la ligne F H iuſques en I, tellement que HI ſoit egale à AB, ſoit menee IA iuſques à ce qu'elle rencontre F G prolongee en K: (ce qui doit arriuer, n'eſtant IA parallele à F G par la 11. com. ſent.) Puis du poinct K, ſoit menee K M parallele à GB, iuſques à ce qu'elle rencontre I B tiree en M: & finalement ſoit prolongee H A iuſques à ce qu'elle rencontre K M en L. Ie dis que le parallelogramme A B M L eſt le requis.



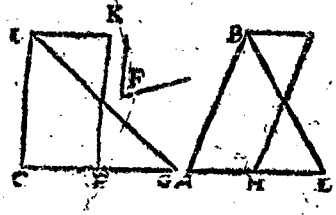
Car il eſt conſtitué ſur la ligne droicte donnee AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il eſt egal à l'angle G A H, qui a eſté fait egal à l'angle D: Finalement il eſt egal au triangle donné C, puis que par la 43. propoſ. il eſt egal au parallelogramme AHFG, lequel a eſté faict egal au triangle A F E, ou C. Nous auons donc deſcrit ſur la ligne donnee AB vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de ce Probl. en nos Memoires Mathematiques Probl. 15. de la Geometrie practique, & ne differe de la conſtruction cy deſſus. C'eſt pourquoy nous n'en dirons autre choſe, mais nous adiouſterons icy la conuerſe de cette propoſ. laquelle eſt telle.

Sur vne ligne droicte donnee, conſtruire vn triangle egal à vn paral lelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee A B, ſur laquelle il faut deſcrire vn triangle egal au parallelogramme C D K E, & qui ait vn angle egal à l'angle donné F. Soit prolongée C E iuſques en G, tellement que C E, E G ſoient egales, & ſoit menee D G, qui ſera le triangle C D G: En apres, par la prec. propoſ. ſoit conſtruit ſur A B le parallelogramme B H egal au triangle C D G, ayant l'angle B A H egal au donné F: puis ſoit prolongee A H iuſques en L, de ſorte que H L ſoit egale à A H, & ayant tiré B L, le triangle A B L, ſera le requis. Car par

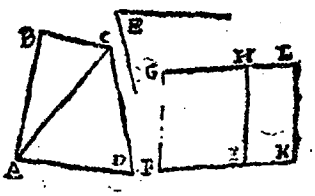


le corol. de la 42. prop. iceluy triangle A B L eſt egal au parallelogramme B H. Mais iceluy parallelog. eſt egal par la conſtruction au triangle D C G, lequel eſt egal au parallelog. C K par le meſme corol. Donc le triangle A B L ſera auſſi egal à iceluy parallelogramme C K: mais il a l'angle A egal au donné F, & eſt faict ſur la ligne donnee A B parquoy appert eſtre faict ce qui eſtoit propoſé.

PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée A B C D, & l'angle donné E: Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne A B C D, qui ait vn angle egal au donné E



Soit reſoluë la figure rectiligne donnee en triangles, ſçauoir eſt menant la ligne droicte A C: puis par la 42. propoſ. ſoit fait le parallelogramme F G H I egal au triangle A D C, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item ſur H I ſoit fait le parallelogramme H I K L, egal au triangle A B C, ayant vn angle H I K egal au donné E, & ſera fait ce qui eſt requis. Car les deux parallelogrammes F H & I L, ſont conſtruicts egaux à la figure rectiligne A B C D, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes enſemble en font vn ſeul. Car d'autant que chacun des angles G F I, H I k, eſt eſgal à l'angle donné E, ils le ſeront auſſi entr'eux: auſquels ſi on adiouſte l'angle commun F I H, les deux angles G F I, H I F, qui ſont egaux à deux droicts par la 29. prop, eſtant F I parallelogramme; ſeront egaux aux deux angles H I K, H I F, leſquels partant ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes F I, K I, ſe rencontreront directement. Pareillement les deux angles G H I, H L K eſtans egaux par la 34. prop. car ils ſont oppoſez à angles egaux G F I, H I K, ſi à iceux on adiouſte l'angle commun I H L, par le meſme diſcours que cy deſſus les deux lignes G H & L H ſe rencontreront directement: ainſi F K & G L eſtans lignes droictes, & conioignant de meſme part les egales & paralleles F G & K L; elles ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. prop. & partant F G L K ſera parallelogramme; lequel nous auons conſtruict egal à la figure rectiligne donnee A B C D, & à l'angle F egal au donné E, ainſi qu'il eſtoit requis.

SCHOLIE.

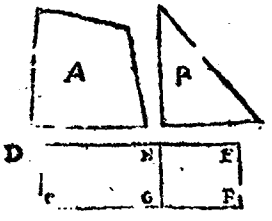
S'il y euſt eu dauantage de triangles en la figure donnee, il euſt fallu con

ſtruire ſur KL vn troiſieſme parallelogramme egal au troiſieſme triangle: puis ſur le coſté oppoſé à KL, vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainſi proceder de triangle en triangle iuſques à la fin. Et quant à la demonſtration, ce ſera touſiours la meſme que deſſus, repetee autant de fois qu'il ſera de beſoin. Or comme on deſcrira ſur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné; il eſt aſſez manifeſte par les choſes cy deſſus dictes: car pour exemple, ſi la ligne droicte FG euſt eſté donnee, nous euſſions par la precedente prop. deſcrit ſur icelle le parallelogramme FGHI: puis ſur la meſme ligne FG, ou pluſtoſt ſur vne egale à icelle HI, le parallelogramme HIKL, & ainſi conſecutiuement s'il y auoit d'auantage de triangle en la figure rectiligne donnee.

Pelletier a adiouſté en ce lieu vn Probleme fort vtile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus briefuement qu'il n'a fait.

Eſtans donnees deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus grande par deſſus la moindre.

Soient donnees deux figures rectilignes A & B, dont A eſt la plus grande: il faut trouuer l'excez de A par deſſus B. Par la 45. prop. ſoit faict le parallelogramme C D E F egal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis ſur la ligne C D ſoit fait le parallelograme CDHG egal au rectiligne B, ayant l'angle C commun, & le parallelogramme GH EF ſera l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B.

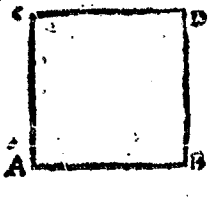


Car d'autant qu'iceluy parallelogramme GE eſt l'excez du parallelogramme CE egal à A, par deſſus le parallelogramme CH egal à B; le meſme parallelogramme GE ſera auſſi l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut deſcrire vn quarré. Du poinct A, ſoit menee A C ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle ſoit faicte egale à icelle A B, & apres auoir mené C D parallele à A B, & B D parallele à A C, par la 31. prop. Ie dis que le quadrilatere A B D C eſt vn quarré.



Car d'autant que par la conſtruction il eſt parallelogramme, les coſtez & les angles oppoſez ſont egaux par la 34. propoſ. partant le coſté AB eſt egal à CD, & AC à BD: mais AC eſtant egal à AB par la conſtruction; il eſt euident que les quatre coſtez ſont egaux entr'eux. Item l'angle A eſtant droict par la

conſtruction, auſſi ſon oppoſé D ſera droict. Et la ligne A C tombant ſur les deux lignes paralleles AB, C D, les deux angles interieurs A & C, ſont egaux à deux droicts par la 29. prop. Mais l'angle A eſt droict: donc l'angle C ſera auſſi droict: partant auſſi droict ſon oppoſé B. Ainſi les quatre angles A, B, C, D ſeront droicts: & par la def. du quarré la figure ABDC ſera quarree. Nous auons donc deſcrit vn quarré ſur la ligne droicte donnee AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

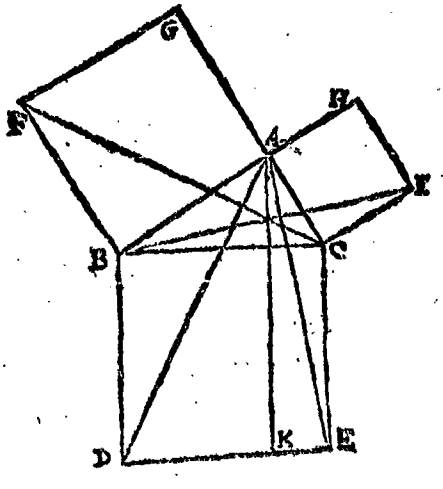
Nous auons enſeigné la practique de cette propoſ. en noſtre Geometrie practique Probl. 12. *laquelle ne differe guere de la conſtruction cy deſſus: car ayant mené la perpendiculaire A C, & icelle faict egale à A B, du meſme interualle A B ſoient deſcrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecouppent en D, duquel eſtans tirees les lignes C D, B D, ſera faict le quarré requis.*

Proclus demonſtre icy: Que les quarrez de lignes egales ſont egaux entre-eux: & que des quarrez egaux les lignes ſont egales. *Ce qui eſt aiſé à prouuer par la ſuperpoſition d'vn quarré ſur l'autre: Car les lignes eſtans egales, ſi l'vne eſt poſee deſſus l'autre, elles conuiendront entr'elles; & les angles eſtans auſſi egaux, c'eſt à ſçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que ſi les quarrez ſont egaux, il conuiendront entr'eux, à cauſe de l'egalité des angles: dont auſſi les lignes; autrement vn quarré ſeroit plus grand que l'autre. Nous auons laiſſé la demonſtration de Proclus qui eſt tres-longue, pour ſuiure celle-cy qui eſt briefue & facile.*

THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle A B C, ſur les coſtez duquel ſoient deſcrits les trois quarrez B C E D, A B F G, A H I C. Ie dis que le quarré B C E D deſcrit ſur le coſté B C, qui ſouſtient l'angle droict B A C, eſt egal aux deux quarrez A B F G & A C I H, deſcrits ſur les deux autres coſtez A B & A C.



Car ſoit menee la ligne A K parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, C F & B I. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A ſont droicts, les lignes droictes A B, A H ſe rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item C A, A G par la 14. prop. Derechef, puis que les angles A B F, C B D ſont egaux, car ils

ſont droicts, ſi on leur adjouſte le commun ABC, le total FBC ſera egal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux coſtez AB, BD, egaux aux deux coſtez FB, BC du triãgle CBF, chacun au ſien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux coſtez, egaux, & par la 4. p. les triangles ABD, CBF ſeront egaux. Mais le quarré AF eſt double du triangle FBC par la 41. prop. car ils ſont ſur meſme baſe BF, & entre meſmes paralleles BF, GC: il ſera donc auſſi double de ſon egal ABD, duquel le parallellogramme BK eſt auſſi double par la meſme 41. prop. & par conſequent le quarré AF ſera egal au parallelogramme BK: car les choſes doubles d'vne meſme ſont egales entr'elles. Par meſme diſcours on prouuera que le parallelog. CK eſt egal au quarré AI: partant les deux parallelogrammes enſemble BK & CK, ſeront egaux aux deux quarrez enſemble AF & AI. Donc le quarré BE qui eſt compoſé d'iceux parallelogrammes BK, CK, ſera auſſi egal aux meſmes quarrez AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, le quarré du coſté, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambligones le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus, eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des d'vnx autres coſtez: Et qu'en tout triangle le quarré d'vn coſté oppoſé à vn angle aigu eſt moindre que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez. Car ſi l'angle obtus eſt reſſerré iuſques à ce qu'il vienne à eſtre droict, les coſtez qui le comprennent demeurans les meſmes, le coſté oppoſé viendra moindre par la 24. propoſition. Mais ſi l'angle aigu eſt ouuert & eſlargy iuſques à ce qu'il vienne droict, les coſtez qui le contiennent demeurans les meſmes, le coſté oppoſé à iceluy angle ſera faict plus grand par la meſme 24. prop. veu donc qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le quarré du coſté oppoſé à l'angle droict, eſt egal aux deux quarrez enſemble des deux autres coſtez; il eſt euident que le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus, eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez; & que le quarré du coſté oppoſé à vn angle aigu, eſt moindre que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez: Mais de combien celuy-là eſt plus grand, & de combien celuy-cy eſt moindre, Euclide le demonſtrera ez 12 & 13. prop. du ſecond liure.

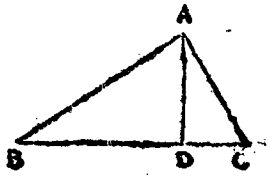
Or l'inuention de ce celebre & tant renommé Theoreme eſt attribuee à Pythagoras, lequel en fut ſi content & ioyeux, que pour en rendre grace aux dieux, pluſieurs diſent qu'il ſacrifia vn Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur ſacrifia qu'vn bœuf; ce qui eſt plus vray-ſemblable, que non pas qu'il en eût immolé 100, veu que ce Philoſophe faiſoit tres-grand ſcrupule d'eſpandre le ſang des animaux. Mais quoy qu'il en ſoit, ce Theoreme eſt vn des plus vtiles aux choſes Geometriques, encore qu'il ne ſemble pas ſi admirable que la 31. prop. du 6. liu. où Euclide demonſtre qu'aux triangles rectangles, la figure deſcripte ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux ſi-

gures ſemblables, deſcriptes & ſemblablement poſees ſur les deux coſtez qui contiennent icelui angle droict.

Par le moyen de cette 47. prop. il eſt fort aiſé de demonſtrer ces autre Theoreme ſuiuant.

Si de l'angle d'vn triangle compris de deux coſtez inegaux, eſt tiree vne perpendiculaire à la baſe, laquelle tombe dans le triangle; elle couppera la baſe en deux parties inegales, la plus grande deſquelles ſera vers le plus grand coſté: Et au contraire, ſi la baſe eſt couppee inegalement par la perpendiculaire, les deux coſtez ſeront inegaux, & le plus grand ſera celuy adjaceant au plus grand ſegment.

Au triangle ABC, duquel le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC, ſoit la ligne AD perpendiculaire à la baſe BC, laquelle tombe dedans le triangle: ce qui aduient touſiours quand l'vn & l'autre angle d'icelle baſe eſt aigu, ainſi qu'il appert du Cor. de la 17. prop. Ie dis que la partie BD eſt plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AD, BD; & le quarré de AC, egal aux deux de AD, CD: Mais le quarré de AB eſt plus grand que celuy de AC, puis que le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC; dont auſſi les deux quarrez de AD, BD, ſeront plus grands que les deux quarrez de AD, DC; parquoy oſtant le commun quarré de AD, reſtera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD; & partant la ligne droicte BD ſera plus grande que la ligne droicte CD.



Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD faſſe le ſegment BD plus grand que le ſegment CD. Ie dis que le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC. Car le quarré de BD ſera plus grand que le quarré de CD, & adiouſtant le cõmun quarré de AD, les deux quarrez de BD, AD, ſeront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. prop. le quarré de AB eſt egal aux deux de BD, AD, & celuy de AC egal aux deux de CD, AD. Donc auſſi le quarré de AB ſera plus grand que le quarré de AC, & par conſequent le coſté AB ſera plus grand que le coſté AC. Ce qu'il falloit prouuer.

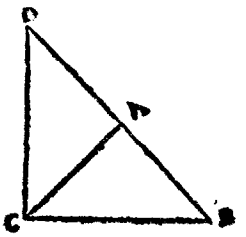
THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'vn des coſtez d'vn triangle, eſt egal aux quarrés des deux autres coſtez; l'angle ſouſtenu d'iceluy coſté eſt droict.

Au triangle ABC, le quarré du coſté BC ſoit egal aux quarrez des deux autres coſtez BA & AC. Ie dis que l'angle BAC, ſouſtenu d'iceluy coſté BC, eſt droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. &

faict icelle AD egale à AB, ſoit menee CD. Le triangle CAD ſera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD ſera egal aux deux quarrez de CA & AD, leſquels ſont egaux aux quarrez de BA & AC, eſtant leurs lignes egales ; & par la 1. com. ſent. le quarré de BC ſera egal au quarré de CD: partant la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe BC egale à la baſe DC, & par la 8. prop. l'angle BAC ſera egal à l'angle droict CAD : partant il ſera auſſi droict. Si donc le quarré de l'vn des coſtez d'vn triangle eſt egal, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

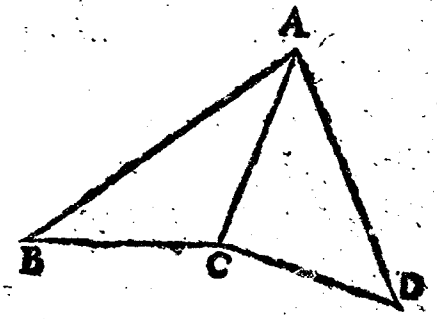


SCHOLIE.

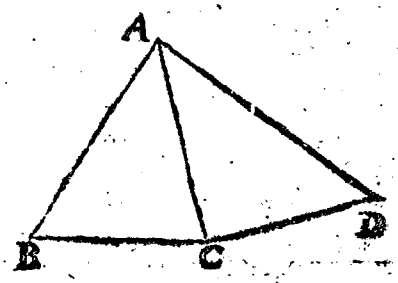
A cette propoſition, qui eſt la conuerſe de la precedente, nous adiouſterons cet autre theoreme.

Si le quarré d'vn coſté de quelque triangle eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez ; l'angle ſouſtenu d'iceluy coſté eſt obtus : Et s'il eſt moindre, aigu.

Au triangle ABC, le quarré du coſté AB, ſoit plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez AC, CB : Ie dis que l'angle ACB oppoſé au coſté AB eſt obtus. Car ſoit tiré de C perpendiculairement à AC, la ligne droicte CD egale à BC, & ſoit ioinct AD. D'autant que par la 47. prop. le quarré de AD eſt egal aux deux quarrez de AC, CD, c'eſt à dire AC, CB, & le quarré de AB a eſté poſé plus grand que les quarrez de AC, CB, le quarré de AD, ſera moindre que le quarré de AB ; & partant la ligne AD moindre que la dite ligne AB. Parquoy veu que les coſtez BC, AC, du triangle ABC, ſont egaux aux coſtez CD, AC, du triangle ACD, vn chacun au ſien, & la baſe AB plus grande que la baſe AD, par la 25. prop. l'angle ACB ſera plus grand que l'angle ACD : Mais iceluy ACD eſt droict. Donc ACB eſt plus grand qu'vn droict ; & partant obtus. Ce qui eſt propoſé.



Maintenant, ſoit le quarré de AB moindre que les deux quarrez des deux autres coſtez AC, CB : Ie dis que l'angle ACB ſouſtenu d'iceluy coſté AB, eſt aigu. Car ayant fait comme au parauant le triangle rectangle ACD, on prouuera par les meſmes raiſons que deſſus, que la baſe AD eſt plus grande que la baſe AB, & l'angle droict ACD plus grand que l'angle ACB, qui partant eſt aigu. Ce qui eſt propoſé.



Or d'autant que l'application des nombres

aux coſtez des triangles rectangles eſt vtile à pluſieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle eſt rectangle, duquel le plus grand coſté contenant 5 parties egales, le moindre contient trois des meſmes parties, & l'autre 4: ou bien ſelon trois autres nombres, doubles, ou triples ou quadruples, &c. des trois ſuſdits 5, 4, 3, comme 10, 8 & 6: ou 15, 12 & 9; ou 20, 16 & 12; ou 50, 40, & 30; &c. Car il appert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, eſt touſiours egal aux quarrez des deux autres nombres.

Mais ſi ſans auoir egard aux nombres cy deſſus, on vouloit faire vn triangle rectangle, ayant tous les trois coſtez en nombre de parties egales ſans fraction, on pourroit trouuer leſdits nombres en deux manieres; dont la premiere qu'on attribue auſsi à Pythagoras eſt telle. Soit pris pour le moindre coſté vn nombre de parties nompair, & iceluy nombre eſtant quarré, ſoit oſtee l'vnité de ſondit quarré, & la moitié du reſte d'iceluy quarré, ſera le moyen nombre, auquel adiouſtant l'vnité viendra le plus grand nombre: Comme par exemple prenant 5 pour le nombre des parties du moindre coſté, ſon quarré eſt 25, duquel oſtant l'vnité reſtent 24, dont la moitié eſt 12, pour le nombre des parties du moyen coſté; mais adiouſtant l'vnité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand coſté.

La deuxieſme maniere eſt attribuee à Platon, & eſt telle: Soit pris vn nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy ſoit oſtee l'vnité, & reſtera l'vn des deux autres nombres; mais adiouſtant ladite vnité au meſme quarré, viendra le troiſieſme nombre: comme par exemple, prenant 6 pour l'vn des nombres, le quarré de la moitie d'iceluy eſt 9, dont l'vnité eſtant oſtee, reſtent 8, pour l'vn des deux autres nombres; mais adiouſtant ladite vnité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troiſieſme nombre.

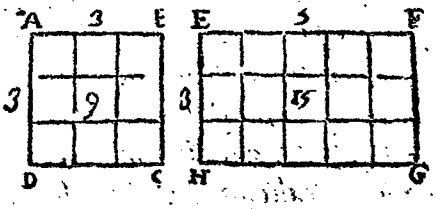
Fin du premier Element.

ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre contenu ſoubs deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a eſté dit en la 36. def. 1. que c'eſt que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre ſortes: mais maintenant il faut entendre qu'vn parallelogramme eſt dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par conſequent il y a ſeulement le quarré, comme A B C D, & le quarré long, comme E F G H, qui ſoient rectangles: car il n'y a que ces deux ſortes de parallelogrammes qui ayent les angles droicts. Et eſt à noter, qu'en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt donné droict, il eſt neceſſaire que les trois autres ſoient auſſi droicts: comme par exemple, ſi l'angle E du parallelogramme E F G H eſt droict. Ie dis que les trois autres F, G, H, ſont auſſi droicts. Car d'autant que les lignes E F, G H ſont paralleles, les angles internes E & H, ſont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais l'angle E eſt droict par l'hypotheſe: donc auſſi l'angle H ſera droict: & par la 34. p. 1. leurs oppoſez G & F ſeront auſſi droicts. Et puis que par la 34. p. 1. tout parallelogramme a les coſtez oppoſez egaux, il n'y peut auoir en vn parallelogramme que deux coſtez inegaux, leſquels conſtituent chaque angle d'iceluy: C'eſt pourquoy Euclide dit icy, tout parallelogramme rectangle eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui comprennent vn angle droict; tellement que le parallelog. rectangle E F G H ſera dict eſtre contenu ſous les deux lignes droictes, E F, E H: ou ſous les deux E F, F G: ou ſous F G, G H: ou finalement ſous G H, H E: ainſi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'vn parallelogramme rectangle: ſçauoir l'vne comme E F, ou H G, ſa lon-

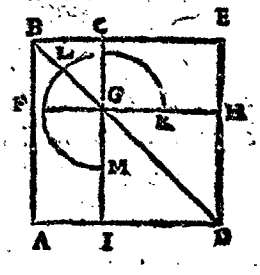


gueur : & l'autre comme EH, ou FG, ſa largeur : & par le mouuement imaginaire de l'vne de ces deux lignes en l'autre, ſe faict iceluy parallelogramme. Car ſi l'eſprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, ſe meuue en trauers, tellement qu'elle face touſiours angle droict auec icelle EH, iuſques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F au poinct G ; ſera deſcrit tout le parallel. rectangle E F G H. Le meſme ſera faict, ſi on poſe EH ſe mouuoir en trauers, ſelon la ligne EF. D'où aduient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallelogramme rectangle on multiplie vn coſté d'iceluy par l'autre : comme par exemple, le coſté EF eſtant de 5. pieds, & l'autre coſté EH de trois : ſi on multiplie vn nombre par l'autre, ſeront produicts 15 pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme E F G H. Pareillement au parallelogramme rectangle A B C D, le coſté AB eſtant de 3 pieds, & le coſté AD auſſi de trois pieds : multipliant l'vn par l'autre, ſeront produicts neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monſtre la figure cy-deſſus.

Or eſt icy à noter, qu'en ce ſecond liure, & és autres ſuiuans, Euclide appelle les parallelogrammes rectangles, ſimplement rectangles ; ce qu'obſeruent auſſi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut touſiours entendre parallelogr. rectangle. Derechef, que pour briefueté, & afin de ne repeter ſouuentesfois toutes les lettres appoſees aux parallelogrammes, les Geometres ont de couſtume d'exprimer chaque parallelogramme ſoit rectangle ou non par deux lettres ſeulement, ſçauoir celles qui ſont diametralement oppoſees : tellement que pour denotter le parallelogramme A B C D, on dira ſeulement le parallelogramme AC ou BD.

2. En tout parallelogramme, l'vn des parallelogrammes deſcrits à l'entour du diametre, auec les deux ſupplemens, eſt appellé Gnomon.

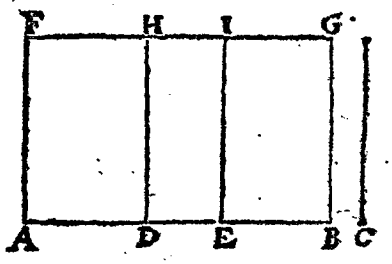
Au parallelogramme A B E D, ſoit menée la diagonalle B D ; & CGI parallele à AB couppant icelle diagonalle en G, & par iceluy poinct G ſoit menée FGH parallele à AD : & le parallelogramme ABED ſera diuiſé en quatre parallelogrammes, deux deſquels F C & H I, ſont dicts eſtre deſcrits à l'entour du diametre ou diagonalle, mais les autres deux E G, A G, ſont appellez ſupplemens, ainſi que nous auons dict à la 37. def. du premier liure. Or la figure compoſee d'iceux ſupplemens & de l'vn ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonalle, ſera dite Gnomon : comme la figure CED AFG, laquelle eſt compoſee des deux ſupplemens AG, GE, & du parallelogramme HI, qui eſt alentour le diametre ; ſera appellee Gnomon. Pour meſme raiſon la figure ABEHGI, qui eſt compoſee des deux ſupplemens I F, G E, & du parallelog. F C, qui eſt alentour le diametre, ſera auſſi dit Gnomon. Et eſt à noter que pour briefuement exprimer telles figures, les Geometres y deſcriuent quelques fois vne circonference, comme le Gnomon ſuſd. ABEHGI, auquel eſt deſcrite la circonference K L M, ſera exprimé & denotté par icelle circonference K L M.



THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droictes l'vne eſt couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſoubs les deux toutes, eſt egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'vne chacune partie de celle qui eſt couppee.

Soient deux lignes droictes AB & C, dont la premiere AB eſt couppee à l'aduanture en pluſieurs parties, ſçauoir eſt en AD, DE, EB. Ie diſque le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C, ſera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'vne chacune partie de la couppee AB.



Qu'il ne ſoit ainſi : qu'on meine AF perpendiculaire à AB, par la 11. p. 1. laquelle ſoit faite egale à C, & du poinct F ſoit menee FG parallele à AB; & BG parallele à AF par la 31. prop. 1. Il eſt euident que le quadrilatere AFGB, ſera vn parallelog. rectangle, & qu'iceluy ſera compris des deux lignes donnees AB & C, puis que AF eſt egale à C. Item ſoient menees les deux lignes DH & EI paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallelog. les trois quadrilateres AH, DI, EG, ſeront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois ſegmens AD, DE, EB, c'eſt à dire de la ligne C, & d'iceux trois ſegmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles enſemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. ſent. ils luy ſont egaux. Parquoy ſi de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propoſe en lignes aux dix premiers Theoremes de ce ſecond liure, nous l'auons applique & demonſtré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neantmoins i'eſtime qu'il ne ſera inutile de les expliquer des icy par nombres, comme a fait Clauius: Car d'autant que ce qui prouient de la multiplication d'vn nombre par vn autre reſpond au produit d'vne ligne en vne autre, on peut facilement & briefuement monſtrer par nombres ce qui eſt icy demonſtré en lignes auec beaucoup de paroles.

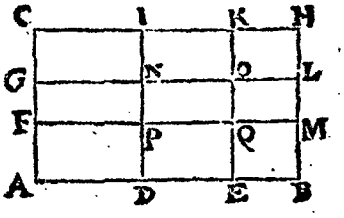
Soient donc propoſez deux nombres, comme 10 *&* 6, *le premier deſquels ſoit diuiſé en trois autres nombres ou parties,* 5, 3 *&* 2. *Or multipliant les deux nombres propoſez entre-eux, c'eſt à ſçauoir* 10 *&* 6, *ſera produict le nombre* 60, *auquel ſera egale la ſomme de ces trois nombres* 30, 18 *&* 12, *leſquels ſont procreez multipliant chaque partie du nombre diuiſé* 10, *c'eſt à ſçauoir* 5, 3, 2, *par le nombre non diuiſé* 6: *ainſi qu'il appert en l'operation cy-deſſoubs :*

10	5	3	2	30
6	6	6	6	18
				12
60	30	18	12	60.

Or Commandin demonſtre icy deux autres Theoremes, dont le premier eſt tel.

S'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre deſquelles ſoit couppee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, eſt egal aux rectangles contenus de chaque ſegment de l'vne, & en chacun des ſegmens de l'autre.

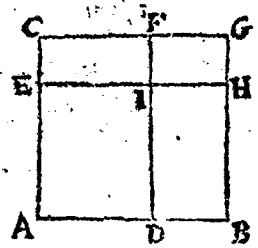
Soient deux lignes droictes AB, AC, contenant vn angle droict A, & AB ſoit couppée és poincts D & E, mais AC és poincts F & G. Ie dis que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles cõpris de chaque partie AD, DE, EB, & d'vn chacun ſegment AF, FG, GC, c'eſt à dire egal aux rectangles contenus de AD, AF; AD, FG; AD, GC: DE, AF; DE, FG; DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. Car eſtant accomply le rectangle AH, ſoient tirees DI, EK paralleles à AC: Item FM, GL paralleles à AB, qui couppperont les premieres és poincts P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle AF eſt contenu ſous AD, AF: & NF ſous AD, FG: & GI ſous AD, GC, (pource que par la 34. prop. 1. les lignes FP, GN ſont egales à icelle AD.) Item que les rectangles DQ, PO, NK, ſont contenus ſous DE, AF: DE, FG: DE, GC: (car DP, PN, NI ſont egales à icelles AF, FG, GC; & PQ, NO, à icelle DE, par la 34. prop. 1.) Et par la meſme raiſon les rectangles EM, QL, GH, ſont compris ſous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il eſt euident que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles compris ſous chacune des parties AD, DE, EB, & vn chacun des ſegmens AF, FG, GC: ce qui eſtoit propoſé.



Nous rendrons auſſi manifeſte ce Theoreme par nombres: & pource ſoient deux nombres 12 & 8, le premier deſquels ſoit diuiſé en trois parties 6, 4 & 2: mais le dernier ſoit ſeulement diuiſé en deux parties 5 & 3. Or le produict de ces deux nombres propoſez multipliez entr'eux eſt 96, auquel eſt manifeſtement egale la ſomme de ces ſix nombres, 30, 20, 10, 18, 12 & 6, leſquels ſont produicts par la multiplication de chacune des parties 6, 4, 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quant au ſecond il eſt tel qu'il enſuit.

S'il y a deux lignes droictes couppées comme on voudra, le rectangle compris ſous icelles, auec celuy compris ſous vne partie de l'vne d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, eſt egal aux rectangles contenus ſous les lignes totales, & les ſuſdictes parties reciproquement, auec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC, faiſant l'angle droict A, leſquelles ſoient couppees comme on voudra en D & E. Ie dis que le rectangle compris ſous AB, AC, auec celuy compris ſous les parties AD, EC, eſt egal aux rectangles contenus ſous AB, EC: AC, AD: DB, AE. Car ayant accomply le rectangle AG, ſoit menee DF parallele à AC; & EH à AB, s'entrecouppans en I. Veu donc que le rectangle AG eſt egal aux rectangles EG, AI, DH: ſi on leur adiouſte le commun rectangle EF: les rectangles AG, EF, qui ſont compris ſous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, ſeront egaux aux



rectangles EG, AF, DH, compris sous AB, EC: AC, AD: DB, AE: ce qui estoit proposé.

Afin que ce theor. de Commandin soit aussi manifeste par nombres, soient proposez deux quelconques nombres 9 & 5, le premier desquels soit diuisé en deux parties 5 & 4: mais l'autre soit diuisé en 3 & 2: Or le produit de ces deux nombres proposez est 45, & celuy de la partie 5, multipliee par la partie 3 est 15, & la somme de ces deux produicts est 60, auquel nombre est manifestement egale la somme & addition de ces trois nombres 27, 25 & 8, qui sont produicts de 9 par 3, des 5 par 5, & de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

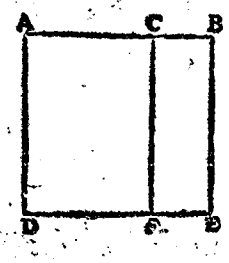
Parce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppee comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera egal au rectangle compris sous vne totalle, & vn segment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de l'autre segment de ceste-cy, & d'vn chacun segment de celle-là. Car le rectangle AG, qui est compris des deux toutes AB, AC, est egal au rectangle EG, contenu de la toute EH, c'est à dire AB, & du segment EC, & aux deux rectangles AI, DH, compris de l'autre segment AE, & des segmens AD, DE. Iceluy rectangle AG est aussi egal aux trois rectangles AH, EF, IG. Pareillement aux trois AF, DH, IG, comme aussi aux trois autres DG, AI, EF.

Le mesme se doit aussi entendre des nombres: car il est euident que les deux nombres cy dessus proposez, c'est assaueir 9 & 5, estans multipliez entr'eux produisent 45, auquel sont egaux ces trois nombres 27, 10 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3: & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainsi de toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra: les rectangles compris de la toute & d'vne chascune partie, sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte AB, couppee en deux parties telles qu'on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle de la toute AB, & de la partie AC, auec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, sont ensemble egaux au quarré de la toute AB.

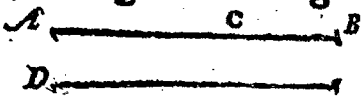


Qu'ainsi ne soit: Sur AB soit descrit le quarré AE; puis de C soit menee CF parallele à AD, laquelle CF sera egale à icelle AD, c'est à dire à AB: car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré. Il est donc euident que les deux rectangles AF & CE, sont compris de la toute AB, ou son egale CF, & des deux parties AC & CB, & si ils conuiennent auec le quarré AE, & par conse-

quent luy ſont egaux. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore ce Theoreme ainſi. Soit priſe vne ligne droicte D egale à AB: Or puis que AB eſt coupee en C, le rectangle contenu ſoubs la non couppee D, & la couppee AB (qui eſt le quarré de la toute AB) ſera egal aux deux rectangles compris ſoubs la non couppée D (c'eſt à dire ſoubs AB) & vn chacun des ſegmens AC, CB par la prec. prop. Ce qui eſtoit propoſé.



Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 diuiſé en deux nombres 7 & 5: il eſt euident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui eſt 144, ſont egaux les deux nombres 84 & 60, qui ſont produicts du meſme nombre 12 multiplié par chacune des parties 7 & 5: car ils font auſſi 144, comme monſtre l'addition d'iceux.

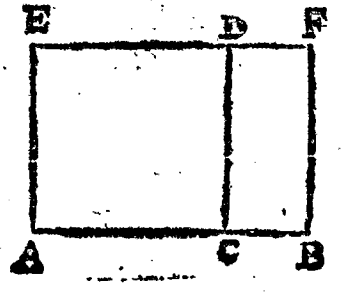
Or encore qu'en ce ſecond Theoreme Euclide propoſe d'vne ligne diuiſee en deux parties ſeulement, ſi eſt-ce toutesfois qu'en la meſme maniere ſera demonſtré le meſme, ſi la ligne eſt diuiſee en tant de parties qu'on voudra. Ce qui ſe peut auſſi voir par nombres, ainſi qu'il enſuit. Soit le nombre 12 diuiſé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre 12 ſera 144; auquel ſont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, leſquels ſont produicts d'iceluy nombre propoſé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera auſſi demonſtré comme deſſus, que ſi vne ligne droicte eſt couppee en tant de parties qu'on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux rectangles contenus ſoubs chaques ſegmens & vn chaſcun ſegment. Ce que nous rendrons auſſi manifeſte par nombres: & pour ce ſoit le nombre 10 diuiſé en trois parties 5, 3 & 2: Il eſt euident que le quarré du nombre total 10 eſt 100, & qu'à iceluy ſont egaux ces neuf nombres 25, 15, 10, 15, 9, 6, 10, 6 & 4, leſquels ſont produicts par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, eſt egal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement priſe.

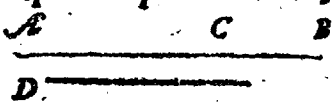
Soit la ligne droicte AB couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'vne ou l'autre partie, comme AC, eſt egal aux deux rectangles compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle auoit eſté premierement priſe.



Qu'il ne ſoit ainſi : Sur la partie AC ſoit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis ſoit menee BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongee en F. Il eſt donc euident que AD eſt le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle des parties AC & CB ; (car CD eſt egale à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, ſur laquelle a eſté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF enſemble, conuiennent auec le rectangle AF ; & par conſequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore ce Theor. ainſi. Soit priſe la ligne droicte D egale à la partie AC. D'autant que la ligne droicte AB eſt diuiſee en C, par la 1. pr. de ce liure, le rectangle contenu ſoubs D & AB (c'eſt à dire ſoubs AC & AB) ſera egal au rectangle compris ſoubs D & CB (c'eſt à dire ſoubs AC, CB) & au rectangle contenu ſoubs D & BC, c'eſt à dire au quarré de la partie AC. Ce qui eſt propoſé.

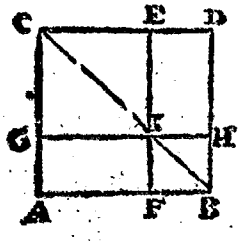


Pour accommoder ce Theor. aux nombres, ſoit quelconque nombre 12 diuiſé en deux parties telles qu'on voudra 7 & 5. Or multipliant ledit nombre propoſé 12 par ſa partie 7, viendront 84, auquel produit ſont egaux ces deux nombres 35 & 49, leſquels ſont produits de 7 multipliez par 5, & de 7 par ſoy meſme. Mais multipliant le meſme nombre 12 par l'autre partie 5, ſera produit le nombre 60, auquel ſont auſſi egaux ces deux nombres 35 & 25, qui ſont les produits des deux parties 7 & 5, multipliees entr'elles, & de la partie 5 en ſoy meſme. Et partant appert ce qui a eſté propoſé.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra ; le quarré de la toute eſt egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

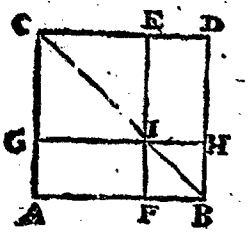
Soit la ligne donnee AB, couppee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez deſcrits ſur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB ſont enſemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne totale AB ſoit deſcrit le quarré AD ; & apres auoir mené la diagonalle BC ; du poinct F, ſoit menee la ligne droite FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy poinct I ſoit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. prop. 1. Ie dis premierement que les quadrilateres HF & EG ſont quarrez.

Car deſia il appert qu'ils ſont parallelogrammes, eſtans deſcrits entre

lignes paralleles. Item puis que A D eſt quarré, les deux coſtez AB & AC ſeront egaux, & le triangle A B C eſt Iſoſcelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles ſur la baſe B C, ſçauoir eſt A B C & A C B ſeront egaux. Pareillement la ligne B C tombant ſur les deux paralleles A C & F E fera l'angle exterieur F I B egal à l'oppoſé interieur A C B par la 29. propoſ. 1. lequel eſtant egal à A B C par la 1. com. ſent. A B C & F I B ſeront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux coſtez B F & F I ſeront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme H F aura les quatre coſtez egaux: & partant il ſera quarré; car l'angle F B H eſtant droict, les trois autres ſeront auſſi droicts, comme nous auons demonſtré à la 1. def. de ce liure. Par meſme diſcours on monſtrera G E eſtre auſſi quarré. Maintenant, d'autant que A I & I D ſont deſcrits entre lignes paralleles, & les angles A & D ſont droicts, il appert qu'ils ſont parallelogrammes rectangles, & egaux entr'eux par la 43. prop. 1. & ſont compris des deux parties AF, F B, eſtant E I egale à A F, & H I, I F à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant A I & I D ſont deux fois le rectangle de AF & F B, leſquels auec les deux quarrez F H & G E conuiennent auec le quarré total A D, & par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le quarré de la toute eſt egal, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration cy deſſus, que les parallelogrammes deſcrits à l'entour de la diagonalle d'vn quarré, & qui ont vn angle commun auec iceluy, ſont auſſi quarrez. Et de plus, il eſt euident que la diagonalle couppe en deux egalement les angles du quarré: Ce que nous auons auſſi demonſtré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainſi. D'autant que la ligne droicte A B eſt couppee en F, par la 2. prop. 2. le quarré de la toute A B ſera egal aux rectangles compris ſoubs la toute A B, & chacune des parties A F, F B. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu ſoubs A B, A F eſt egal au rectangle compris ſoubs A F, F B auec le quarré de la partie A F. Item le rectangle de A B, F B eſt egal au rectangle de F B, A F, auec le quarré de la partie F B. Donc le quarré de A B eſt auſſi egal aux quarrez des parties A F, F B, & aux rectangles contenus ſoubs A F, F B, & ſoubs F B, A F. Ce qui eſt propoſé.

A F B

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres: Soit le nombre 10 diuiſé en deux parties 6 & 4: Il eſt manifeſte que le nombre 100, qui eſt le quarré du nombre total 10, eſt egal à 36 & 16, qui ſont les quarrez des parties 6 & 4, auec deux fois 24, nombre produit deſdites parties 6 & 4 multipliees entr'elles: car tous ces quatre nombres 36,

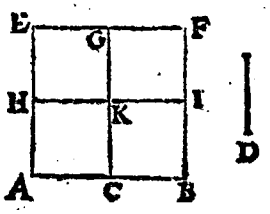
bres 36, 16, 24 & 24, font enſemble 100, ainſi qu'il appert en l'operation ſuiuante.

10	6	4	6	36
10	6	4	4	16
100.	36.	16.	24.	24
				24
				100.

Clauius demonſtre auſſi en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si vne ligne droicte eſt double d'vne autre, le quarré de celle là eſt quadruple du quarré de ceſte-cy : & ſi vn quarré eſt quadruple d'vn autre quarré, le coſté de celuy-là eſt double du coſté de ceſtuy-cy.

Soient deux lignes droictes AB & D, deſquelles AB eſt double de D. Ie dis que le quarré de AB eſt quadruple du quarré de D. Car ayant diuiſé AB en deux egalement en C, ſi on fait telle conſtruction qu'en ceſte 4. propoſ. il eſt euident que les 4. paralellogrammes AK, CI, HG, KF. ſeront quarrez, & egaux entr'eux. Mais le quarré AF eſt egal à iceux quatre quarrez : donc le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, c'eſt à dire de D, qui luy eſt egale : car AB eſt double de l'vne & de l'autre.



Pour la ſeconde partie : Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dis que AB eſt double de D. Car AB eſtant couppee en deux egalement en C, le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, comme il a eſté demonſtré cy deſſus. Mais le quarré de AB a eſté poſé auſſi quadruple du quarré de D : donc les quarrez des lignes AC & D ſont egaux, & partant icelles lignes AC & D auſſi egales. Mais AB eſt double de AC : donc auſſi double de D.

Ce Theoreme eſt auſſi manifeſté en nombres : Car ſoient deux quelconques nombres 10 & 5, dont le premier eſt double de l'autre. Il appert que 100, quarré du premier nombre 10, eſt quadruple de 25, quarré du dernier nombre 5.

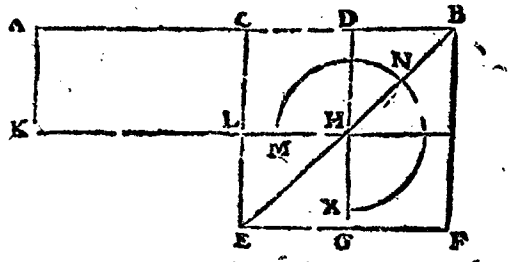
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & en deux inegales : le rectangle contenu d'icelles parties inegales auec le quarré de la partie du milieu, ſont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnee AB couppee en deux parties egales au poinct C, & en deux inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, auec le quarré de la partie du milieu CD, ſont egaux au quarré de la moitié CB.

Car ſur la ligne CB ſoit deſcrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres

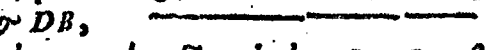
auoir mené DG parallele à BF ſoit menee la diagonalle BE couppant DG au poinct H, par lequel ſoit menee interminement IK parallele à AB, couppant CE en L: puis du poinct A, ſoit auſſi menee AK parallele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. prop. DI, LG ſeront quarrez; & partant la ligne DH ſera egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH eſt auſſi egale à CD: parquoy le rectangle AH eſt compris des deux ſegmens AD, DB; & LG ſera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, auec le quarré GL, eſt egal au quarré CF, faict ſur la ligne CB, moitié de la toute AB.



Or le rectangle AL eſt egal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales AC & CB, & entre meſmes paralleles AB & KI. Pareillement les ſupplemens CH & HF ſont egaux par la 43 prop. 1. auſquels ſi on adiouſte le quarré commun DI, les tous CI & DF ſeront egaux: & par la 1. com. ſent. DF ſera egal à AL, auſquels ſi on adiouſte auſſi le ſupplement commun CH, le Gnomon MNX ſera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le quarré GL, conuiennent auec le quarré CF, & partant ſont egaux par la 8. com. ſent. Donc auſſi le rectangle AH, & le quarré GL ſeront egaux au quarré CF par la 1. com. ſent. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons tant en ce Theor. qu'aux 5. ſuiuans les demonſtrations qu'en a faict le docte Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le quarré de CB eſt egal aux quarrez de CD & DB, auec deux fois le rectangle d'icelles; & que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB eſt egal au rectangle de CD, DB, auec le quarré de DB: le quarré de CD ſera egal à l'autre quarré de CD, auec le rectangle de CB, DB, & celuy de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des toutes AD, DB, eſt egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le quarré de CB ſera egal au quarré de CD, auec le rectangle de AD, DB. Ce qui eſtoit propoſé.



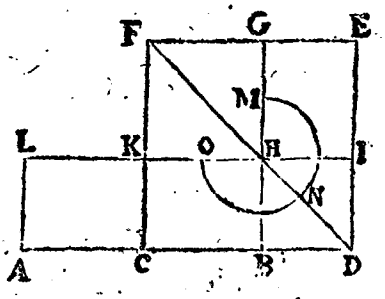
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux parties egales 6 & 6; Et auſſi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainſi la plus grande partie 8 excede la moitié 6 du nombre 2, qui eſt la partie du milieu. Il eſt euident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, auec 4 qui eſt le quarré de 2, eſt egal à 36, qui eſt le quarré de 6, moitié du nombre propoſé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, &

qu'on luy adiouſte directement quelque autre ligne droicte: le rectangle de la toute & de l'adiouſtee comme d'vne, & de l'adiouſtee, auec le quarré de la moitié, eſt egal au quarré qui eſt faict de la moitié & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement au poinct C; & à icelle AB ſoit adiouſtee directement la ligne BD. Ie dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'adiouſtee BD, auec le quarré de la moitié CB, eſt egal au quarré de la ligne CD, laquelle eſt compoſee de la moitié CB, & de l'adiouſtee BD.



Qu'ainſi ne ſoit: ſur la ligne CD ſoit deſcrit le quarré CE, & tiré ſa diagonalle DF; & apres auoir du poinct B, mené BG parallele à DE, laquelle couppe la diagonalle au poinct H; par iceluy poinct H ſoit menee interminement IKL parallelle à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle AI eſt compris de la toute & adiouſtee comme d'vne AD, & de l'adiouſtee DI (car icelle DI eſt egale à l'adiouſtee BD eſtant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce liure.) Item KG, qui eſt quarré par le meſme Cor. eſt faict ſur HK egale à la moitié CB par la 34. prop. Ie dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG ſont enſemble egaux au quarré CE. Car les deux ſupplemens CH & HE eſtans egaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH auſſi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles: & par la 1. com. ſent. AK ſera egal à HE, & en adiouſtant à chacun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO ſera egal au rectangle AI. Mais iceluy Gnomon auec le quarré GK, ſont egaux au quarré CE: donc le rectangle AI auec le quarré KG ſera egal au meſme quarré CE. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD eſt egal aux deux quarrez de CB, BD auec deux fois le rectangle d'icelles CB, BD;*

& que par la 1. pr. 2. le rectangle des toutes AD, BD eſt egal aux trois rectangles de DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui eſt le quarré de DB) le quarré de CD ſera egal à l'autre quarré de CB auec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

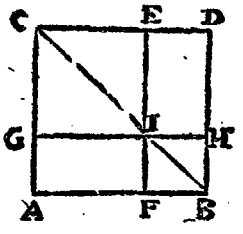
Pour appliquer ce Theor. aux nombres, ſoit le nombre 12. diuiſé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 ſoit adiouſté 3. Il eſt euident que le nombre 45 produict de tout le nombre compoſé 15 multiplié par l'adiouſté 3, auec 36 quarré de

la moitié 6, ſont 81, tout ainſi que le quarré de 9, compoſé de ladite moitié 6, & de l'adiouſté 3.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra; le quarré de la toute, & le quarré de l'vne des parties, ſont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement priſe.

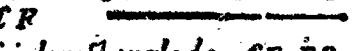
Soit la ligne AB coupee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, ſont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſur AB ſoit deſcrit le quarré AD auec ſa diagonalle BC: & apres auoir mené du poinct F, la ligne FE parallele à AC, laquelle couppe la diagonalle BC au poinct I; d'iceluy poinct ſoit menee GH parallele à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE ſeront quarrez par le Cor. de la 4. prop. de ce liu. & puis que par la 34. pr. 1. GI eſt egale à AF; GE ſera quarré du ſegm. AF. Derechef pource que AC eſt egale à AB, le rectangle AE ſera compris ſous la toute AB & le ſegm. AF. Par meſme raiſon le rectangle GD ſera compris ſous les meſmes lignes AB, AF: (car CD, CG ſont egales à AB, AF, à cauſe des quarrez AD, GE.) Veu donc que les rectangles AE & ID, auec le quarré FH ſont egaux au quarré AD: ſi on leur adiouſte le commun quarré EG, les quarrez AD, EG ſeront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun deſquels eſt compris de la toute AB & de la partie AF) auec le quarré FH. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; ſi on adiouſte le quarré commun de AF, les quarrez de AB, AF*



ſeront egaux aux trois quarrez de AF, AF, FB, auec deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF eſt egal au rectangle de AF, FB, auec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, eſt egal à deux fois le rectangle de AF, FB, auec deux fois le quarré de AF: donc les quarrez de AB, AF, ſont egaux à l'autre quarré de FB, auec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

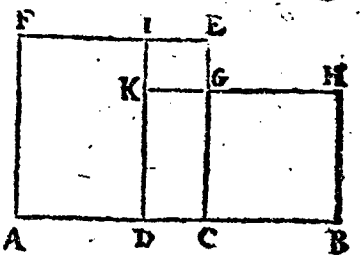
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, ſoit diuiſé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il eſt euident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, ſont enſemble egaux à 193, qui eſt fait de 25 nombre quarré de

l'autre partie 5, & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarrez de 12 & 5, ſont enſemble egaux à 169, fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie 5.

Commandin demonſtre en ce lieu le Theor. ſuiuant.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties inegales, les quarrez d'icelles parties ſont egaux au rectangle contenu deux fois ſous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droicte A B couppee en deux parties inegales AC, CB, deſquelles AC eſt la plus grande, & d'icelle AC ſoit priſe AD egale à B C, afin que DC ſoit l'excez de la partie AC par deſſus B C. Ie dis que les quarrez des parties AC, C B ſont egaux au rectangle contenu deux fois ſoubs AC, CB, & au quarré de D C. Car ſoient conſtruicts les quarrez AE, CH, & mené D I parallele à CE: puis prolongée H G iuſques à ce qu'elle rencontre DI en K. Or d'autant que les lignes B C, A D ſont egales, leur adiouſtant la commune DC, la toute AC, c'eſt à dire CE, ſera egale à la toute D B. Mais CG eſt auſſi egale à C B: donc auſſi le reſte GE ſera egal au reſte DC: & partant puis qu'auſſi IE eſt egale à DC par la 34. pr. 1. GE, IE ſeront egales: & partant IG ſera le quarré de l'excez DC. Et



d'autant que les rectangles AI, DH ſont contenus ſous les parties AC, CB; (car AC eſt egale à l'vne & à l'autre ligne AF, DB: & CB à l'vne & à l'autre AD, BH.) Il eſt manifeſte que les quarrez AE, CH, des parties A C, C B ſont egaux aux rectangles AI, DH, qui ſont contenus ſous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez D C. Ce qui eſtoit propoſé.

Le meſme eſt auſſi manifeſte par nombres: car le nombre 12 eſtant diuiſé en deux parties inegales 7 & 5, dont la plus grande excede la moindre de 2: les quarrez d'icelles parties ſeront 49 & 25, qui ſont enſemble 74, auquel nombre ſont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5, auec 4 quarré de l'excez 2.

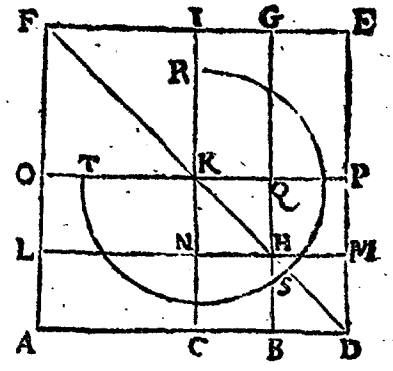
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra: quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'vne des parties, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement priſe comme d'vne ſeule ligne.

Soit la ligne donnee AB couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'vne ou l'autre partie, ſçauoir B C, auec le quarré de l'autre partie A C, ſont enſemble egaux au quarré de AD compoſee de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne ſoit ainſi: Soit prolongee A B vers D, & pris B D egale à B C,

puis ſur la totale AD ſoit fait le quarré AE auec ſa diagonale FD, & des deux poincts B & C, ſoient menees BG & CI paralleles à DE. Item des poincts H & K, auſquels elles couppent la diagonalle FD, ſoient menees LM & OP paralleles à AD, par la 31. prop. 1. leſquelles couppent les premieres paralleles en N & Q.



Premierement, par ce qui reſulte de la 4. prop. de ce liure les rectangles OI, NQ, BM au long de la diagonalle ſeront quarrez. Item d'autant que CB eſt egale à BD: CH, & BM, ſeront egaux & quarrez: (eſtant l'vn d'iceux quarré) pareillement NQ & HP auſſi egaux quarrez; ainſi les quatre CH, BM, NQ, HP, ſeront quarrez, & egaux: & par la 43. p. 1. les deux ſupplemens LK & KG ſeront auſſi egaux entr'eux, & par la 36. pr. 1. LK eſt egal à AN; & KG à QE: & par conſequent iceux quatre rectangles ſont auſſi egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il eſt euident que AH eſt vne fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui eſt vn des quatre rectangles auec vn des quatre petits quarrez egaux: donc iceux quatre rectangles auec iceux quatre quarrez faiſant le Gnomon RST ſeront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD; lequel Gnomon auec le quarré de OK, (egale à AC par la 34. p. 1.) ſçauoir eſt OI, conuiennent auec le quarré AE: & partant par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux: Si donc vne ligne droicte eſt couppee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement, *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD eſt egal aux quarrez de AB, BD, & à deux fois le rectangle d'icelles AB, BD, c'eſt à dire, aux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle de AB, BC: & que par la precedente les quarrez de AB, BC ſont egaux au quarré de AC auec deux fois le rectangle de AB, BC: le quarré de AD ſera egal à quatre fois le rectangle de AB, BC, auec le quarré de AC. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

A C B D

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, ſoit le nombre 12, diuiſé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, faict 84, qui pris quatre fois auec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui eſt le nombre quarré de 19, compoſé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui eſt faict du nombre propoſé 12 multiplié quatre fois par la partie 5, eſtant adiouſté auec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainſi que le quarré de 17, nombre compoſé du donné 12, & de la partie 5.

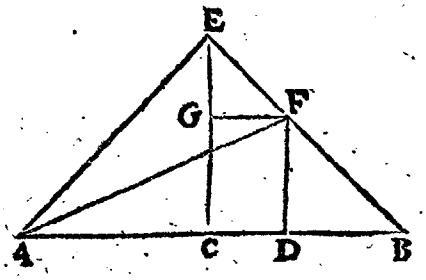
THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droicte eſt couppée en deux parties egales, & en deux inegales: les quarrés d'icelles parties inegales ſeront

doubles des quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppee en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement en D. Ie dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, ſont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne ſoit ainſi: au poinct C ſoit leuee la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres auoir mené AE & BE, ſoit leuee la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel poinct ſoit menee FG parallele à AB, couppant CE en G: & finalement ſoit menee AF.



Premierement, les triangles ACE, & ECB ſeront Iſoſcelles, & feront les angles ſur les baſes AE & EB egaux par la 5. prop. 1. eſtant l'angle ECB droict pour eſtre CE perpendiculaire. Item FDB eſtant droict, & DBF demy droict, auſſi par la 32. pr. 1. DFB ſera demy droict, & par la 6. pr. 1. les coſtez DB & DF, du triangle BDF, ſeront egaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera demonſtré que les coſtez GF, GE du triangle FGE, ſont egaux entr'eux. Item il eſt euident que l'angle AEB ſera droict, eſtant compoſé des deux demy droicts AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt double du quarré de AC; eſtant egal à tous les deux de AC & CE. Par meſme diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou de CD ſon egal par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF eſtant egal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC & CD. Mais par la meſme 47. pr. 1. le quarré de AF eſt egal aux deux de AD & DF, ou DB ſon egale: donc les deux quarrez de AD & DB ſeront doubles des deux de AC & CD. Si donc vne ligne droicte eſt couppee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD eſt egal aux deux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD: ſi on adiouſte le commun quarré de DB, les deux quarrez de AD, DB, ſeront egaux aux trois quarrez de AC, CD & DF, auec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarrez de BC ou AC, & de CD, ſont egaux au quarré de DB auec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD: & partant doubles d'iceux, Ce qu'il falloit demonſtrer.*

A C D B

Commandin demonſtre encore cette propoſition autrement, ainſi qu'il enſuit. D'autant que AC eſt egale à CB, & icelle CB excede CD de DB, auſſi AC excedera la

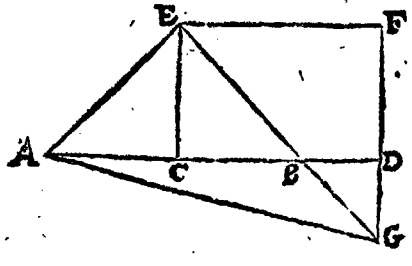
meſme CD de DB. Parquoy comme il a eſté demonſtré à la 7. propoſit. 2. les quarrez de AC, CD, ſont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, auec le quarré de DB, & partant les trois quarrez de AC, CD, DB, auec deux fois le rectangle de AC, CD, ſont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. propoſit. 2. le quarré de AD eſt egal aux quarrez de AC, CD, auec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont doubles des quarrez de AC, CD.

Pour auſſi rendre manifeſte ce Theoreme par nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux parties egales, 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4: de ſorte que la partie du milieu ſera 2. Or il eſt euident que 64 & 16, qui ſont les quarrez des parties inegales 8 & 4, ſont enſemble doubles de 36 & 4, qui ſont les quarrez de la moitié 6, & de la partie du millieu 2, comme vouloit la propoſition.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & on luy adiouſte directement quelque autre ligne droicte; le quarré de la toute auec l'adjouſtee comme d'vne, & le quarré de l'adiouſtee, ſont doubles des quarrez de la moitié, & de celle qui eſt faite de la moitié, & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement au poinct C, à laquelle ſoit adiouſtee directement BD. Ie dis que les quarrez de AD & BD, ſont doubles des quarrez de AC & CD. Qu'ainſi ne ſoit: au poinct C ſoit leuee la perpendiculaire CE par la 11. prop. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, ſoient menees par la 31. prop. 1. EF parallele à CD, & DF à CE ſe rencontrant en F, & ſoient continuees EB & FD, iuſques à ce qu'elles ſe rencontrent au poinct G: (elles s'y rencontreront puis que les deux angles BEF, EFD, ſont moindres que les deux droicts CEF, EFD.) Finalement ſoit tiree la ligne AG.



Premierement, puis que AC & CE ſont egaux; auſſi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA ſont egaux, & demy droicts par la 32. prop. 1. eſtant l'angle ACE droict. Par meſme diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droicts; & l'angle AEB droict, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droict: & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. prop. 1. l'angle BEF ſera egal à CBE, c'eſt à dire demy droict, & l'angle F eſtant droict par la 34. pr. 1. (car il eſt oppoſé à vn droict C) BGD ſera auſſi demy droict par la 32. p. 1.

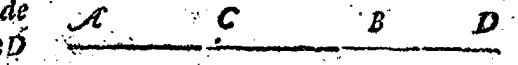
& par

& par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDC seront Isoscelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict C, est egal aux deux quarrez des deux autres costez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par méme discours EG se trouuera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy est egale par la 34. prop. 1. ainsi les deux quarrez de AE & EG, ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. prop. 1. sera double des deux de AC, CD. Mais par la mesme 47. p. 1. il est egal aux deux quarrez de AD & DG, ou BD son egal, & par consequent les deux quarrez de AD & BD, seront doubles des deux de AC & DC. Si donc vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CD, ou de BC, CD : Si on adiouste le commun quarré de BD, les deux quarrez de AD, BD seront egaux aux trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de BC, CD. Mais par la 7. p. 2. le quarré de BD*



auec deux fois le rectangle de BC, CD est egal aux quarrez de CD, BC, c'est à dire de AC, CD. Donc les quarrez de AD, BD, sont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD : & partant ils sont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.

Commandin demonstre encore cette prop. ainsi. D'autant que AC est egale à CB, & CD excede icelle CB de BD, aussi la mesme CD excedera AC du mesme excez BD: Parquoy comme il a esté demonstré à la 7. prop. de ce liure, les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD auec le quarré de BD: & partant les trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. p. 2. le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD: Donc les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC, CD.

Ce Theoreme est aussi euident en nombres: car le nombre 8 estant diuisé en deux parties egales 4 & 4, si en luy adiouste quelconque nombre 5, le nombre composé sera 13, duquel le quarré 169 auec 25 quarré du nombre adiousté 5, faict 194, qui est double du nombre 97, somme de ces deux nombres 16 & 81, qui sont les quarrez de la moitié 4, & de 9 composé de ladite moitié & du nombre adiousté 5.

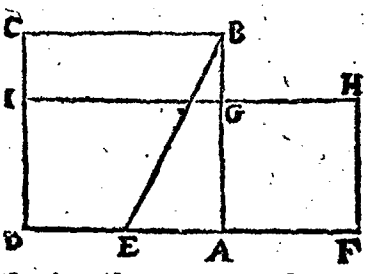
PROBL. 1. PROP. XI.

Couppervne ligne droicte donnee, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droicte donnee AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la proposition.

Apres auoir conſtruict ſur icelle AB le quarré AC, ſoit diuiſée AD en deux egalement au poinct E, & apres auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF ſoit egale à EB, ſur AF ſoit faict le quarré AH; & ſoit continuée HG iuſques en I. Ie dis que la ligne AB eſt couppee au poinct G, en ſorte que le rectangle CG, compris de BC egale à BA, & de BG partie de BA, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçauoir eſt à GF.

Car la ligne AD eſtant couppee en deux egalement en E, & on luy adiouſte directement AF, le quarré de la moitié & de l'adiouſtée comme d'vne, ſçauoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainſi les deux quarrez de BA & AE, ſeront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: oſtant donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, ſçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, ſçauoir FI, ſeront egaux; deſquels AC & FI, ſi on oſte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous auons coupé la ligne droicte AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB eſt egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Nous auons enſeigné en nos Memoires Mathematiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à coupper vne ligne droicte, non ſeulement comme enſeigne icy Euclide, mais auſſi en ſorte que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties ſoit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie: bref qu'iceluy rectangle ſoit au quarré, ſelon quelconque raiſon donnee.

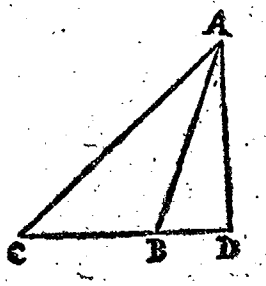
Quant aux nombres, ils ne ſe peuuent accommoder à ce probleme, ſinon qu'on y employe les nombres irrationaux: Car aucun nombre abſolu ne peut eſtre diuiſé en deux autres tels que le nombre produict du tout, multiplié par l'vne des parties ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il ſera demonſtré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens ſeront demonſtrez en nombres: Neantmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & ſuperfices mentionnez en la demonſtration cy-deſſus. Que la ligne AB ſoit 8: donc ſa moitié AE ſera 4, & leurs quarrez ſeront 64 & 16, qui ſont enſemble 80, pour le quarré de BE, ou EF, qui par conſequent ſera irrationelle, c'eſt à ſçauoir √80: & d'icelle EF, oſtons EA 4, & reſteront pour AF, ou AG, √80—4, qui oſtez de la toute AB 8, reſteront pour l'autre partie BG 8—√80—4, c'eſt à dire 12—√80, qui multipliez par le nombre total 8, ſeront 96—√5120 pour le rectangle GC, & autant eſt le quarré AH; car la partie AG, qui eſt √80—4, multipliee par ſoy-meſme fait auſſi 96—√5120, comme vouloit ce probleme.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient

l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des deux autres coſtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'vn des coſtez contenant l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dehors entre la perpendicu'aire & l'angle obtus.

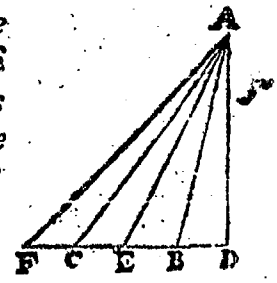
Soit le triangle ambligone ABC, duquel ſoit prolongé le coſté CB iuſques en D, & du poinct A ſoit menee la perpendiculaire AD par la 12 prop. 1. Ie dis que le quarré du coſté AC, qui ſouſtient l'angle obtus ABC, eſt plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, ſçauoir CB, qui eſt l'vn des coſtez faiſant l'angle obtus, celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD priſe dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'eſt à dire que le quarré du coſté AC eſt egal aux deux quarrez des coſtez AB, BC, auec deux fois le rectangle de CB, BD.



Qu'il ne ſoit ainſi: Puis que la ligne CD eſt couppee en B, le quarré d'icelle CD ſera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD, par la 4. prop. de ce liure: Adiouſtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, ſeront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de AC eſt egal aux quarrez de CD, DA: donc auſſi le quarré de AC ſera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB eſt egal aux quarrez de BD, DA; le quarré de AC ſera egal aux quarrez de CB, AB, & deux fois le rectangle de CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

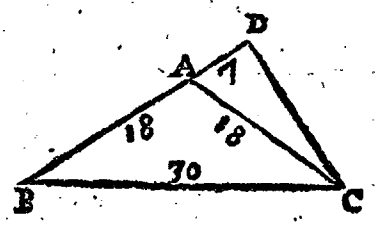
Or que la perpendiculaire tiree de A, doiue tomber ſur le coſté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demonſtrerons ainſi: Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le coſté CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendic. tiree de A tombe hors le triangle ſur le coſté CB prolongé, comme eſt la ligne droicte AD. Car ſi elle tomboit dans le triangle, comme eſt la ligne AE, les deux angles ABE, AEB ſeroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais ſi elle tomboit hors le triangle ſur le coſté BC prolongé de la part de C, comme eſt AF; derechef, au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB ſeroient plus grands que deux droicts: ce qui eſt abſurde.



Or afin de pouuoir par le moyen des nombres faire paroiſtre la verité de ce theoreme, nous enſeignerons icy certaines regles, par leſquelles on pourra conſtruire diuers triangles ambligones, ayans les coſtez commenſurables en nombre entier, & auſſi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Regle I.

Pour conſtruire vn triangle ambligone Iſoſcelle, ayant les coſtez, & la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commenſurables en nombre entier, ſoit faict le ſegment exterieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties ſe puiſſe diuiſer exactement par 7, comme de 7, ou de 14, ou de 21, ou de 28, ou 35, &c. puis apres ſoit poſé pour chaſque coſté cõgal, le double d'iceluy ſegment, & outre ce $\frac{2}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand coſté, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit ſegment exterieur: comme au triangle ABC, ou le ſegment AD eſt poſé de 7, & l'vn & l'autre des coſtez AB, AC de 18, qui eſt double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais le plus grand coſté BC de 30, qui eſt le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC compoſé comme deſſus ſoit ambligone, il eſt euident: Car le quarré du coſté BC eſt 900, & ceux des coſtez AB, AC ſont ſeulement enſemble 648, chacun d'iceux eſtant 324: & partant parce que nous auons demonſtrè au Scholie de la 48. p. 1. l'angle BAC ſera obtus. Donc le triangle ABC duquel les coſtez & la ligne exterieure AD ſont commenſurables en nombre entier, eſt ambligone. Parquoy le quarré dudit coſté BC, qui eſt 900 ſera egal à la ſomme des quarrez des deux autres coſtez AB, AC, & de deux fois BA en DA, c'eſt à dire à la ſomme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui font auſſi 900, comme veut cette 12. prop.



Regle II.

Pour conſtruire vn triangle Ambligone ſcalene duquel non ſeulement les coſtez & la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire tombant ſur le moindre coſté prolongé & l'angle obtus, mais auſſi ladite perpendiculaire, ſoient commenſurables en nombre entier; ſoit poſé le ſegment exterieur d'autant de parties qu'on voudra qui ſe puiſſent exactement diuiſer par 5; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties adiouſtez $\frac{1}{5}$ pour auoir le petit coſté, $\frac{3}{5}$ pour auoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour auoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit ſegment ſera le plus grand coſté. Ou bien poſez le ſegment exterieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui ſe puiſſe partir exactement par 9: puis pour le petit coſté prenez $\frac{7}{9}$ dudit ſegment; pour auoir le moyen, adiouſtez à iceluy ſegment $\frac{2}{3}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{3}$, & pour le grand coſté adiouſtez $\frac{1}{9}$ au double d'iceluy ſegment: comme ſi nous poſons que le ſegment exterieur ſoit de 9 parties egales, le plus petit coſté ſera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand coſté 20. Or le quarré d'iceluy coſté eſt 400, auquel eſt egale la ſomme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui ſont les quarrez des deux coſtez 15 & 7, & deux fois le produict de 9 multiplié par 7, c'eſt à dire le ſegment exterieur par le moindre coſté: Parquoy appert que le triangle ainſi conſtruict eſt ambligone, & cette 12. prop. eſtre veritable.

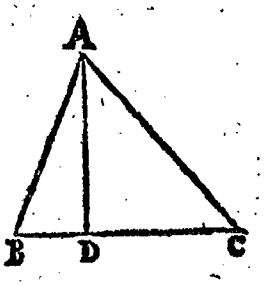
REGLE III.

Pour construire vn triangle ambligone Scalene, duquel les costez & le segment exterieur du moyen costé prolongé iusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier: soit pris ledit segment exterieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit adiousté $\frac{1}{5}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais multipliant ledit segment par 8, nous aurons le plus grand costé: comme si nous posons le segment exterieur de 5 parties, adiousťans $\frac{1}{5}$ d'iceluy segment à son triple 15, nous aurons 16 pour le moindre costé, & doublant iceluy costé viendront 32 pour le moyen costé: & finalement multipliant ledit segment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand costé du triangle: lequel sera ambligone, veu que le quarré d'iceluy costé 40, est 1600, & la somme des quarrez des deux autres costez 16 & 32 n'est que 1280; mais ces deux quarrez estant adiousťez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen costé 32 par le segment exterieur 5, font aussi 1600, comme veut Euclide en ceste 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Ie dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AC & CB, de deux fois le rectangle de BC & CD: sçauoir BC, l'vn des costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarrez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce liure, ausquels si on adiouste le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB: & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la

47. prop. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC: ce qui estoit proposé à prouuer. On demonstrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu, B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'Euclide propose ce Theoreme des triangles exigones seulement: toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droict ou obtus: Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus: & partant la perpendiculaire tombera touſiours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demostration cy-dessus: Ce qui est aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'vn angle aigu seroit plus grand que le droict. Ce qui est absurde.

Et comme au precedent Scholie nous auons enseigné à construire diuers triangles ambligones ayans les costés & le segment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus cõmensurables en nomb. entiers, afin de pouuoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demonstré en la 12. prop. aussi enseignerons nous icy quelques reigles pour construire diuers triangles oxigones ayant les costez & les segmens de la base commensurables en nombres entiers, afin de faire aussi paroistre en nombre la verité de cette 13. prop.

REGLE I.

D'autant qu'au triangle equilateral, & à l'Isocelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux costez egaux fait les segmens de la base egaux, ainsi qu'il a esté demonstré sur la 26. prop. 1. il sera fort aisé de construire tels triangles qui ayent les costez & les segmens commensurables en nombre entier, c'est pourquoy il n'est pas besoin de nous y arrester: Mais quand est requis vn triangle Isoscelle, auquel la base soit plus grande que chaque costé, & que la perpendiculaire tombe sur l'vn d'iceux costez egaux; elle le couppera en deux segmens inegaux, comme nous auons demonstré à la 47. prop. 1. le moindre desquels segmens il faut poser d'autant de parties qu'on voudra, & icelles estans multipliees par 8, produiront le plus grand segment, mais les multipliant par 12, sera produit la base, & les deux segmens estans adioustez, l'on aura l'vne & l'autre des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moindre segment par 9. Comme par exemple, ayant posé le moindre segment de 4 parties, nous les multiplierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand segment: mais les multipliant par 12, viennent 48 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque costé. Or que ce triangle Isoscelle soit oxigone, il est manifeste parce que nous auons demonstré au Scholie de la 48. prop. 2. car veu que le quarré de la base 48 n'est que 2304, & la somme des quarrez des deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296, l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par conſequent les autres seront

auſſi aigus, puis qu'ils ſont plus petits par la 18. prop. 1. Et ſi à iceluy quarré 2304, nous adiouſtons 288, qui ſont deux fois 144, nombre produit de 36, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, par 4, ſegment compris entre la perpendiculaire & l'angle oppoſé à ladite baſe, viendront auſſi 2592. Pareillement 1296, quarré de l'vne des iambes eſt moindre que 3600, ſomme des quarrez de la baſe & de l'autre iambe, de deux fois 1152, nombre produit du coſté 36 multiplié par le grand ſegment 32: car ces trois nombres 1296, 1152, 1152 ſont enſemble le meſme nombre 3600. Parquoy appert eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE II.

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit Iſoſcelle, ayant la baſe moindre que chacune iambe, & que ſur l'vne d'icelle tombe la perpendiculaire: il faudra poſer le moindre ſegment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand ſegment, mais multipliant ledit moindre ſegment par 3, on aura la baſe, & finalement la ſomme des deux ſegmens ſera chacune des iambes: qu'on aura auſſi multipliant la moitié du moindre ſegment par 9. Parquoy ayant poſé le moindre ſegment de 4, ie multiplie ſa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre ſegment, tellement que toute la iambe ſera 18, & multipliant ledit ſegment 4 par 3, viennent 12 pour la baſe. Or que ce triangle ſoit oxigone, il eſt euident, attendu que le quarré du coſté 18 n'eſt que 324, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 468: Et de plus, iceluy quarré 324 eſt moindre que ladite ſomme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 4, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à l'autre iambe: partant il appert eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE III.

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit ſcalene, & la perpendiculaire tombe ſur le moindre coſté, il faudra poſer le moindre ſegment de 70 parties, ou de 140, ou de quelque autre nombre qui ſe puiſſe diuiſer exactement par 70; puis adiouſter à iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand ſegment, & la ſomme de ces deux ſegmens ſera le moindre coſté; mais ayant doublé le moindre ſegment, & à iceluy double adiouſté $\frac{12}{70}$ c'eſt à dire $\frac{1}{7}$ dudit ſegment, ſera procreé le moyen coſté; & finalement ſi à ce double du moindre ſegment on adiouſte $\frac{11}{70}$, c'eſt à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand coſté. Comme ſi nous poſons le moindre ſegment de 70, & à iceluy adiouſtons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand ſegment, & par conſequent le moindre coſté ſera 169; mais adiouſtant $\frac{12}{70}$ au double d'iceluy moindre ſegment, viendront 182 pour le moyen coſté; & adiouſtant au meſme double $\frac{11}{70}$, viendront 195 pour le plus grand coſté. Or que ce triangle ſoit oxigone, il eſt euident, attendu que le quarré du plus grād coſté 195 n'eſt que 38025, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 61685: parquoy le plus grand angle eſt aigu, & conſequemment les autres ſont auſſi aigus. Que ſi à iceluy quarré 38025, on adiouſte deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre ſegment 70, viendra le meſme nōbre 61685. Parquoy apert encore eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. p.

REGLE IV.

Que ſi au triangle ſcalene il eſt requis que la perpendiculaire tombe ſur le moyen coſté, ſoit poſé le moindre ſegment de 5 parties, ou de 10, ou de quelqu'autre nombre qu'on puiſſe exactement diuiſer par 5, puis à iceluy ſegment ſoient adiouſtez $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand ſegment; & la ſomme d'iceux ſera le moyen coſté: mais adiouſtant $\frac{1}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre coſté, & le plus grand ſera le triple dudit ſegment. Parquoy ſi nous poſons le moindre ſegment de 10 parties, adiouſtant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre ſegment, & conſequement tout le moyen coſté ſera 28. Mais adiouſtant 6, qui ſont les $\frac{3}{5}$ du moindre ſegment 10, au double d'iceluy ſegment, viennent 26 pour le moindre coſté; & le plus grand ſera 30, triple dudit moindre ſegment. Or qu'iceluy triangle ſoit oxigone, il eſt manifeſte: car le quarré du plus grad coſté 30, n'eſt que 900, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 26 & 28 eſt 1460: & partant le plus grand angle eſt aigu, & conſequemment les autres angles ſont auſſi aigus. Maintenant ſi nous multiplions le coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, ſçauoir 28 par le moindre ſegment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui adiouſtés au ſuſdit quarré de 30 ſçauoir 900, font le meſme nombre 1460, ſomme des deux quarrez des deux autres coſtez 26 & 28, qui ſont 676 & 784. Pareillement le quarré du moindre coſté 26, n'eſt que 676, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 1684: tellement qu'il eſt moindre que cette dite ſomme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 18, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à iceluy moindre coſté. Parquoy appert derechef eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. propoſition.

REGLE V.

Et finalement, s'il eſtoit requis que la perpendiculaire tombe ſur le plus grand coſté, ſoit encore poſé le moindre ſegment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy ſegment ſoit adiouſté $\frac{1}{5}$, & viendra le plus grand ſegment, tellement que la ſomme d'iceux ſegmens ſera le plus grand coſté: mais adiouſtant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre coſté, & le moyen ſera le quadruple dudit ſegment. Par ainſi le moindre ſegment eſtant poſé de 5 parties, le plus grand ſera de 16, & le plus grand coſté 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand coſté 21, n'eſt que 441, & la ſomme des deux quarrez des deux autres coſtez 20 & 13 eſt 569: parquoy l'angle oppoſé à iceluy coſté, qui eſt le plus grand par la 18. prop. 1. eſt aigu, & conſequemment le triangle ſuſdit eſt oxigone. Dauantage le quarré du moindre coſté 13, ſçauoir 169, eſt plus petit que la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 20 & 21, ſçauoir eſt 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 16, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à iceluy moindre coſté. Pareillement le quarré du moyen coſté 20, ſçauoir 400, eſt moindre que 610, ſomme des quarrez des deux autres coſtez 13 & 21, de deux fois 105, nombre produict de 21 multiplié par le moindre ſegment 5. Parquoy appert encore par ce 5 triangle eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

Mais il eſt auſſi euident tant par la demonſtration d'Euclide, que par l'appli-

cation

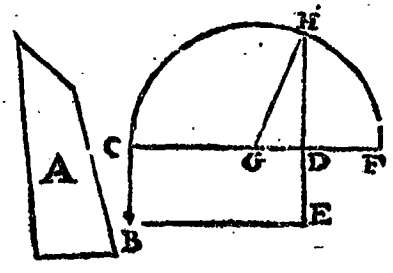
cation des nombres cy-deuant faicte, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, eſt auſſi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du coſté qui ſouſtient vn angle aigu eſt plus petit que la ſomme des quarrez des deux autres coſtez, de deux fois le rectangle contenu du coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne compriſe entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme B D egal à la figure donnee A, ayant vn angle droict par la 45. prop. 1. puis ſoit prolongé vn coſté, comme C D, iuſques en F, & fait D F egale à l'autre coſté D E: & apres auoir couppé C F en deux egalement au poinct G, & d'iceluy poinct G & interualle G C ou G F, deſcrit le demy cercle C H F, ſur laquelle continuee E D iuſques à ce qu'elle rencontre la circonference du demy cercle en H. Ie dis que le quarré de D H eſt egal à la figure rectiligne A.



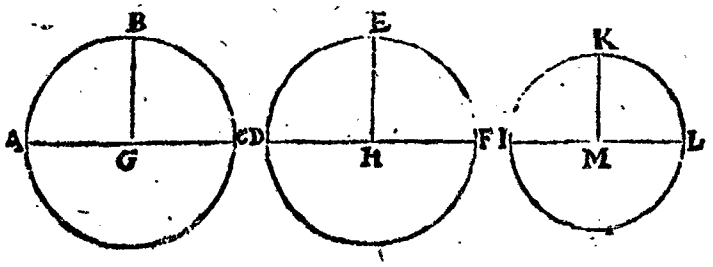
Car puis que C F eſt couppee en deux egalement au poinct G, & en deux inegalement au poinct D; le rectangle de C D & D F, ſçauoir B D, auec le quarré de la partie du milieu G D, eſt egal au quarré de la moitié G F par la 5. prop. de ce liure, ou de ſon egale G H, lequel eſt egal aux deux quarrez de G D & D H par la 47. prop. 1. Que ſi on oſte le quarré commun de G D, le demeurant quarré de D H ſe trouuera egal au demeurant rectangle B D: & par conſequent à la figure rectiligne donnee A. Nous auons donc trouué le coſté d'vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſecond Element.

ELEMENT
TROISIESME.
DEFINITIONS.

CERCLES egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux, ou deſquels les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont egales.

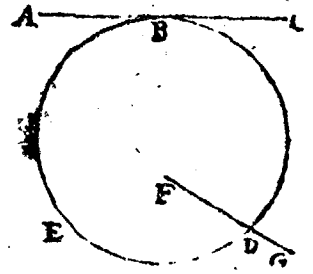
D'autant qu'Euclide demonſtre en ce 3. liure diuerſes proprietez & affections du cercle, il explique auparauant quelques termes dont l'vſage ſera fort frequent en iceluy: Il dit donc premierement que ces cercles-là ſont egaux, deſquels les diametres ou ſemidiametres ſont egaux. Car puis que le cercle eſt deſcrit par le mouuement & reuolution du demy diametre à l'entour d'vne de ſes extremitez fixe & immobile, comme nous auons dit à la 15. def. du 1. liure; il eſt euident que ces cercles-là ſont egaux deſquels les demy diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences ſont egales entr'elles: ou bien deſquels les diametres entiers ſont egaux entr'eux. Comme ſi les diametres AC, DF, ou les lignes droictes GB, HE, menees des centres G & H, ſont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF ſeront egaux entr'eux. Et au contraire, ſi les cercles ſont egaux, leurs diametres ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſeront auſſi egales.



De cecy il appert, que les cercles ſont inegaux quand les diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont inegales; & que celuy eſt le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre eſt le plus grand. Comme ſi les diametres DF, IL, ou les lig. droictes HD, MK, menees des centres aux circonfer. ſont inegales, les cercles DEF, IKL ſeront inegaux; & ſi le diametre DF eſt le plus grand, auſſi

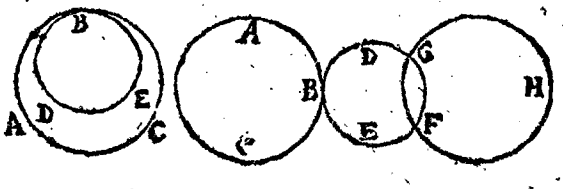
le cercle DEF ſera le plus grand. Et au contraire; des cercles inegaux, les diametres ou ſemidiametres ſeront inegaux, c'eſt à ſçauoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre, plus petit.

2. Vne ligne droicte eſt dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuee ne le coupe point.



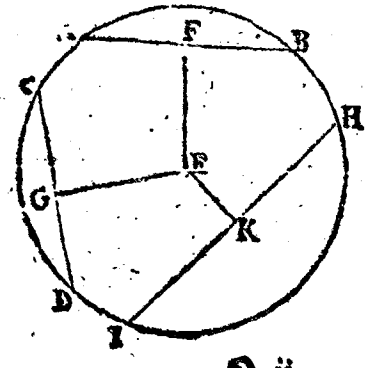
Comme la ligne droicte A B ſera dicte toucher le cercle B D E en B, ſi elle l'y touche, en ſorte qu'eſtant prolongee vers C, elle ne le couppe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droicte G D atteint le meſme cercle au poinct D, en telle ſorte qu'eſtant prolongee iuſques à F, elle couppe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne ſera pas dicte toucher le cercle, mais le coupper.

3. Les cercles ſont dicts ſe toucher l'vn l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe coupent point.



Ainſi les deux cercles A B C, D B E ſeront dicts ſe toucher l'vn l'autre en B, s'ils s'y touchent en ſorte qu'ils ne s'entrecouppent point. Or cet attouchement des cercles eſt de deux ſortes; Car les cercles s'entretouchent ou en dedans, ou en dehors: Ils ſe touchent en dedans, quand l'vn eſt poſé dedans l'autre; & en dehors, quand l'vn eſt conſtitué hors de l'autre, comme il appert icy. Mais ſi deux cercles s'atteignent de telle ſorte que l'vn couppe l'autre, comme ſont icy les deux cercles D G E, F G H, ils ſeront dicts ſe coupper, & non pas ſe toucher.

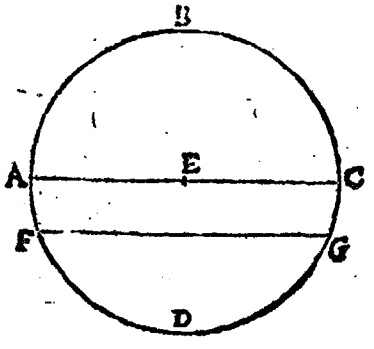
4. Au cercle, les lignes droictes ſont dictes eſtre egalement diſtantes du centre, lors que les perpendiculaires tirees du centre ſur icelles, ſont egales. Mais celle-là eſt dicte eſtre plus eſloignée du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.



Comme au cercle A B D C, les lignes droictes A B, C D, ſeront dites eſtre egalement diſtantes & eſloignees du centre E, ſi les perpendiculaires E F, E G, ſont egales: Mais la ligne droicte A B ſera dicte eſtre plus eſloignee du centre E que la ligne H I, ſi la perpendiculaire E F eſt plus grande que la perpendiculaire E K.

5. Segment, ou portion de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Si dans vn cercle, comme ABCD, on mene vne ligne droicte qui couppe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droicte FG; tant la figure FBG contenue ſoubs ladite ligne droicte FG, & la partie de circonference FBG, que la figure FDG compriſe ſoubs la meſme ligne droicte FG, & la partie de circonference FDG, ſera dicte ſegment ou portion de cercle. Mais eſt icy à noter qu'il y a de trois ſortes de ſegmens de cercle. Car ſi la ligne droicte paſſe par le centre du cercle, comme AEC, elle diuiſera le cercle en deux ſegmens egaux ABC, ADC, chacun deſquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a eſté dit au premier liu. Mais quand la ligne ne paſſe point par le centre, comme FG, elle diuiſe le cercle en deux parties inegales FBG, FDG, l'vne deſquelles, ſçauoir FBG, dans laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou ſegment maieur: mais l'autre portion FDG, eſt plus petite que le demy cercle, & s'appelle ſegment mineur. Dauantage, la ligne droicte FG eſt appellee chorde par pluſieurs Geometres, & la partie de circonferences FBG, ou FDG, arc.

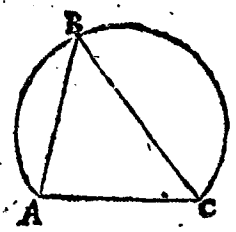


6. L'angle du ſegment, eſt celuy compris d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois ſortes d'angles que l'on conſidere aux cercles, & commence par l'angle du ſegment, diſant que l'angle mixte BFG, ou BGF, qui en la figure prec. eſt contenu ſous la ligne droicte FG, & la circonference FBG, s'appelle angle du ſegment. Que ſi le ſegment eſt vn demi cercle, l'angle d'iceluy ſera appellé angle du demi cercle, & tel eſt l'angle EAB, ou ECB. Mais ſi le ſegment eſt plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG, ou BGF, ſera dict angle du ſegment maieur: Et ſi le ſegment eſt plus petit que le demy cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG, ou DGF, ſera appellé angle du ſegment mineur.

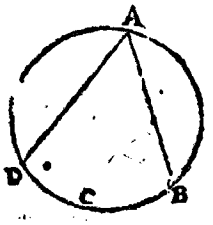
7. Vn angle ſe dit eſtre au ſegment, ou en la portion, lors qu'à vn poinct pris en la circonference du ſegment, ſont menees deux lignes droictes des extremitez de la ligne qui ſert de baſe au ſegment; & cet angle-là eſt celuy compris d'icelles deux lignes.

Soit vn ſegment de cercle A B C, duquel la baſe eſt la ligne droicte A C, des extremitez de laquelle ſoient menees au poinct B, pris en la circonference les deux lignes droictes A B, C B, qui conſtituent l'angle rectiligne ABC; iceluy angle eſt dit eſtre au ſegment ABC.

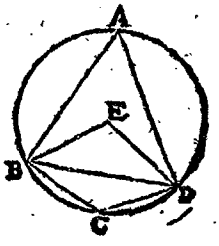


8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embraſſent quelque circonference, l'angle eſt dit eſtre, ou s'appuyer ſur icelle.

En la circonference du cercle A B C D ſoit pris quelconque poinct A, & d'iceluy à deux autres poincts B & D d'icelle circonference, ſoient menees deux lignes droictes A B, A D, qui conſtituent l'angle rectiligne D A B, & embraſſent la circonference B C D: Iceluy angle B A D ſera dit eſtre ou s'appuyer ſur icelle circonference B C D.

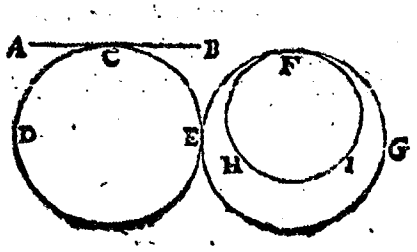


Eſt icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune difference entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour vn meſme: & toutesfois ſi on les conſidere bien, on y trouuera vne grande diſcrepance: Car celuy-là ſe refere au ſegment auquel il eſt conſtitué, & cettuy-cy ſe rapporte à la circonference qui luy ſert de baſe: Comme par exemple, ſi au cercle A B C D on prend quelque ſegment de cercle B C D, l'angle qui eſt en ce ſegment ne ſera pas le meſme que celuy qui inſiſte, ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy ſegment: car l'angle qui eſt en iceluy ſera B C D, & l'angle qui inſiſte ou s'appuye ſur la circonference d'iceluy, ſera l'angle B A D.



Vne autre choſe eſt encore à remarquer icy, c'eſt que les angles qui s'appuyent ſur la circonference, peuuent eſtre non ſeulement conſtituez en la circonference, comme il a eſté dit cy-deſſus, mais peuuent auſſi eſtre conſtituez au centre du cercle; comme par exemple, l'angle B E D conſtitué au centre E par les deux lignes droictes B E, D E, ſera auſſi dit s'appuyer ſur la circonference B C D, tellement qu'il y a icy deux angles appuyez ſur ladite circonference B C D, ſçauoir B A D conſtitué en la circonference, & B E D conſtitué au centre.

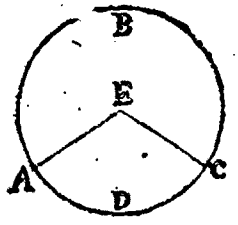
Or outre les trois ſortes d'angles cy-deſſus deſinis & expliquez, les Geometres en conſiderent encore vn autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'attouchement: ceſt angle eſt contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle, & de la circonference d'iceluy cercle, ou bien de deux circonferences ſe touchant l'vne l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, ſi la ligne droicte A B touche



che le cercle C D E au poinct C, l'angle mixte ACD, ou BCE ſera dit angle de contingence ou d'attouchement. Dereches, ſi le cercle E F G touche le cercle C D E au dehors en E, & le cercle H F I au dedans en F, tant l'angle curuiligne C E F, que E F H ou G F I, ſera appellé angle de contingence, ou d'attouchement.

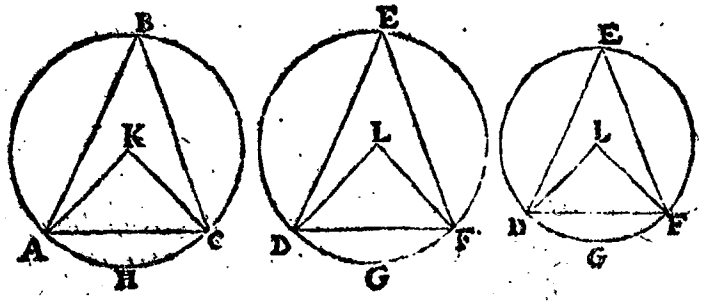
9. Secteur de cercle, eſt vne figure contenue ſoubs deux lignes droictes qui font vn angle au centre, & la circonference compriſe entre icelles lignes.

Si au cercle A B C D, duquel le centre eſt E, les deux lignes droictes A E, C E, conſtituent au centre E, l'angle A E C; la figure A E C D, contenue des deux lignes droictes A E, E C, & de la circonference A D C compriſe entre icelles lignes, ſera appellée ſecteur de cercle. Item la figure A B C E, compriſe des meſmes lignes droictes A E, E C, & de la circonference A B C, ſera auſſi dicte ſecteur de cercle.



10. Semblables portions de cercle, ſont celles qui reçoiuent angles egaux; ou bien eſquelles les angles ſont egaux entr'eux.

Comme ſi aux cercles A B C, D E F, les angles rectilignes B, E, ſont egaux; les ſegmens A B C, D E F, qui reçoiuent iceux angles egaux, ou eſquels ſont les ſuſdicts angles egaux, ſeront dicts ſegmens ſemblables: Et les circonferences A B C, D E F, ſeront pareillement dites ſemblables, c'eſt à dire que le ſegment A B C ſera telle partie de tout le cercle A B C H, que le ſegment D E F eſt partie de tout le cercle D E F G: & la circonference A B C ſera auſſi telle partie de toute la circonference A B C H, que la circonference D E F eſt de toute la circonference D E F G. Par meſme raiſon, les arcs ou circonferences A H C, D G F, ſur leſquelles s'appuient angles egaux, ſont auſſi dictes ſemblables: Comme ſi aux meſmes cercles A B C, D E F, les angles A B C, D E F ou A K C, D L F ſont egaux; les arcs ou circonferences A H C, D G F, ſur leſquelles s'appuient les ſuſdits angles, ſeront dicts arcs ſemblables.



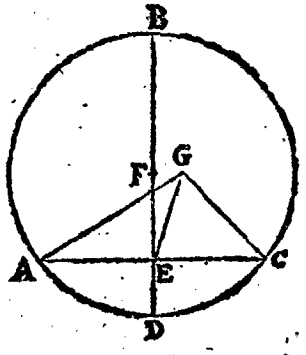
Des choſes ſuſdites, l'on peut colliger que les ſemblables portions d'vn meſme cercle, ou de cercles egaux, ſont auſſi egales entr'elles, attendu qu'elles ſont parties egales d'vne meſme choſe, ou de choſes egales.

PROBL. 1. PROP. I.

Trouuer le centre d'vn cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tiree en iceluy la ligne droicte AC, qui couppe la conference, comme que ce ſoit, és poincts A & C: puis par les 10. & 11. prop. 1. ſoit icelle AC couppee en deux egalement, & à droicts angles par la ligne droicte BD, ſe terminant à la peripheie és poincts B & D: & finalement icelle BD ſoit auſſi couppee en deux egalement en F, par la ſuſdite 10. prop. 1. Ie dis que F eſt le centre du cercle propoſé.



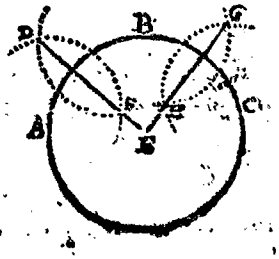
Car en icelle ligne droicte BD, vn autre poinct que F ne ſera pas le centre, veu que tout autre poinct la diuiſe inegalement. Si donc le poinct F n'eſt pas le centre, le poinct G hors la ligne BD ſoit le centre, (s'il eſt poſſible) duquel ſoient menees les trois lignes droictes GA, GE & GC. D'autant que G eſtant le centre, par la def. du cercle les lignes droictes AG & GC ſeront egales: mais par la conſtruction AE & EC ſont auſſi egales, & GE eſt commune aux deux triangles GEA & GEC: donc iceux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe AG egale à la baſe CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG ſeront egaux: & partant droicts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la conſtruction eſt droict, & tous les angles droicts ſont egaux par la 10. com. ſent. donc les deux angles AEG & BEA ſeront egaux, ſçauoir le tout à ſa partie: ce qui eſt abſurde. Donc le poinct G n'eſt pas le centre. Le meſme inconuenient s'enſuiura prenant tout autre poinct hors la ligne BD. Partant le poinct F ſera le centre du cercle ABC, requis à trouuer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi au cercle vne ligne droicte couppe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts, le centre du cercle ſera en icelle couppante. Car il a eſté demonſtré qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle ABC ſoit ailleurs qu'au poinct F, milieu de la ligne BD, laquelle couppe la ligne AC en deux egalement, & à angles droicts en E.

SCHOLIE.

Combien que la practique de ce Probleme ſoit aiſee par la conſtruction d'iceluy, ſi eſt-ce toutesfois qu'elle eſt encore plus briefue & facile, ainſi qu'il enſuit. Pour trouuer le centre du cercle ABC, ſoient pris en la circonferẽce d'iceluy les trois poincts A, B, C, comme on voudra: puis des deux poincts A & B, ſoient deſcrits d'vn

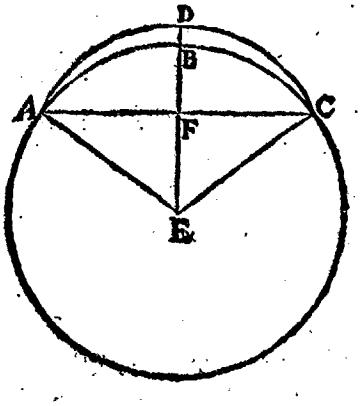


meſme interualle, deux arcs qui s'entrecouppent és poincts D & F, par leſquels ſoit menee la ligne droicte DFE interminement: en apres, des poincts B & C, ſoient auſſi deſcrits d'vn meſme interualle deux autres arcs s'entrecouppans ez poincts G & H, par leſquels ſoit menee la ligne droicte GH, qui couppe DF en E, & iceluy poinct ſera le centre requis.

THEOR. 1. PROP. II.

Si en la circonference d'vn cercle, on prend deux poincts comme on voudra; la ligne droicte menee de poinct à autre, tombera dans le cercle

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra A & C, le disqne la ligne droicte menee du poinct A au poinct C tombera dedans le cercle: car ſi elle ne tombe au-dedans, elle tombera, ou ſur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il eſt poſſible, comme la ligne ADC: & ayant trouué le centre E par la prec. prop. d'iceluy ſoient menees aux poincts A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque poinct D de la ligne ADC, ſoit auſſi menee ED, qui couppe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux coſtez EA, EC ſont egaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, ſur la baſe ADC, egaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le coſté AD eſt prolongé, l'angle exterieur EDC ſera plus grand que ſon oppoſé interieur EAD, par la 16. p. 1. Donc le meſme angle EDC ſera auſſi plus grand que l'angle ECD, qui eſt egal à EAD. Parquoy EC oppoſé au plus grand angle EDC ſera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB egale à EC, ſera auſſi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte menee de A à C ne tombera pas hors le cercle. On demonſtrera par meſme raiſon qu'elle ne peut pas auſſi tomber ſur la circonference ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droicte AFC. Parquoy ſi en la circonference d'vn cercle, &c. Ce qu'il alloit demonſtrer.



SCHOLIE.

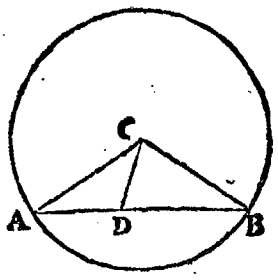
Ce meſme Theoreme peut auſſi eſtre demonſtré affirmatiuement ainſi qu'il enſuit.

En la circonference du cercle AB, dont le centre eſt C, ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra A & B. Ie dis que la ligne droicte AB menee d'vn poinct à l'autre tombe dans iceluy cercle.

Car ſoit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinct comme D, entre ſes extremes A & B, puis du centre C, ſoient menees les lignes droictes CA, CD, CB.

D'autant

D'autant que les deux costez AC, BC, du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC seront egaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. prop. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. prop. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tiree du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra pas iusques à icelle circonference, & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstré de tout autre poinct qu'on voudra prendre en icelle AB. Donc toute la ligne droicte AB tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il falloit prouuer.



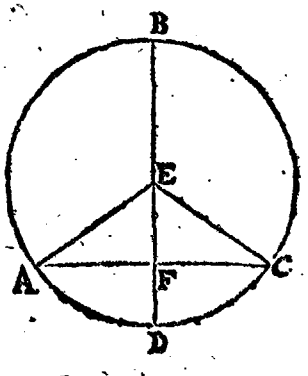
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, le touche seulement à vn poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle coupperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, & couppe en deux egalement vne autre ligne droicte, qui ne passe point par le centre; elle la couppera à angles droicts: & si elle la couppe à angles droicts, elle la couppera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droicte BD, laquelle passant par le centre E, couppe en deux egalement la ligne droicte AC, laquelle ne passe point par le centre; Ie dis que BD couppe aussi AC en angles droicts au poinct F.



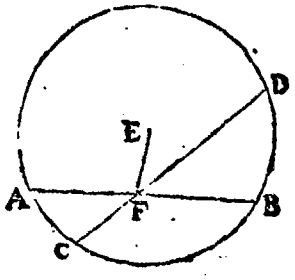
Car estans menees les deux lignes droictes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au poinct F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

Ie dis pareillement, que si BD couppe AC à angles droicts au poinct F; qu'elle la couppera aussi en deux egalement. Car les deux angles au poinct F estans droicts, ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. prop. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droictes ne paſſans point par le centre, s'entrecouppent; elles ne ſe coupperont pas l'vne l'autre en deux egalement.

Au cercle ACED, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droictes AB & CD, s'entrecouppans au poinct F, & deſquelles ny l'vne ny l'autre ne paſſe par le centre E. Ie dis que l'vne ou l'autre eſt couppee inegalement. Car du centre E eſtant mence la ligne EF; ſi icelles lignes AB, CD s'entrecouppent en deux egalement au poinct F, la ligne EF les couppera au meſme poinct auſſi en deux egalement, & à droicts angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB ſeront droicts, & egaux à CFE, EFD, auſſi droicts, & egaux: ce qui eſt impoſſible, n'eſtant AFE que partie de CFE: ainſi les lignes droictes AB, CD ne s'entrecouppoient pas en deux egalement. Parquoy ſi dans le cercle deux lignes droictes ne paſſant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

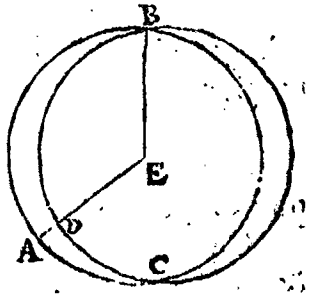


THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles ſe couppent l'vn l'autre, ils n'auront pas meſme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD ſe couppans l'vn l'autre en B & C. Ie dis qu'ils ne ſçauroient auoir vn meſme centre.

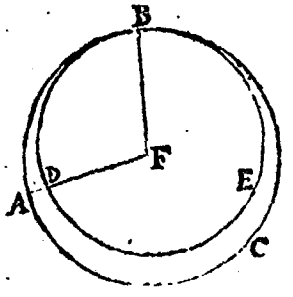
Car s'il eſt poſſible, ſoit leur centre commun E, duquel ſoient tirees deux lignes droictes, ſçauoir EB à la ſection B: Mais EA couppant l'vne & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E eſt poſé centre du cercle BCD, la ligne droicte ED ſera egale à la ligne droicte EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E eſt auſſi poſé centre du cercle ABC, la ligne droicte EA ſera auſſi egale à la meſme ligne EB, & par la 1. com. ſent. ED, EA ſeront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui eſt impoſſible: partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn meſme centre. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, ils n'auront pas meſme centre.

Soient les deux cercles ABC, & D B E se touchans l'vn l'autre au dedans en B. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.



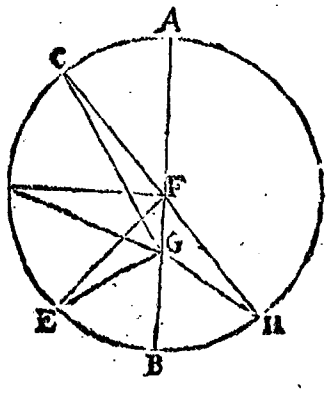
Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menees les deux lignes F A & F B: sçauoir est F B à l'attouchement B; & F A, coupant l'vn & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle A B C, les lignes droictes FA, FB seront egales: derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera egale à la ligne FB, à laquelle a esté demonstré estre aussi egale FA: donc FA, FD seront egales entr'elles; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy F ne pouuoit estre centre commun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont diuers: veu qu'vn des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque poinct qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droictes à la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus proche de celle qui est menee par le centre, est plus grande que la plus esloignee: Et du mesme poinct ne peuuent estre menees à la circonference que deux lignes droictes egales, de part & d'autre de la plus petite.

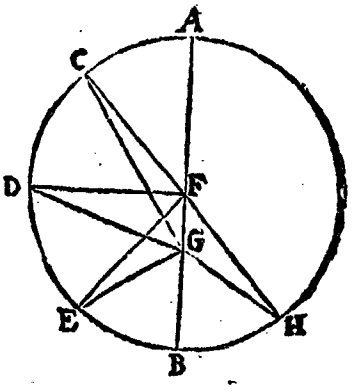


Au diametre AB du cercle A C D E B, duquel le centre est F, soit pris quelque poinct G outre le centre; & d'icelui poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes G C, G D, G E, en la circonference. Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference; G A en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menees à C, D & E, les lignes FC, FD & FE: le triangle G F C aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé G C par la 20. pr. 1.

Mais les lignes droictes GF, FC ſont egales aux ligne droictes GF, FA, c'eſt à dire à toute la ligne GA: donc GA ſera auſſi plus grande que GC. Par meſme raiſon GA ſera auſſi plus grande que GD, & que GE: parquoy la ligne GA eſt la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB eſt plus petite que GD, ou autre quelconque: car au triangle DFG, les deux coſtez DG & GF, ſeront plus grands que le troiſieſme DF par la 20 prop. 1. ou que ſon egale BF. Que ſi on oſte la ligne commune GF, le demeurant GD ſera plus grand que le demeurant GB. Par meſme raiſon GB, ſera auſſi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, eſt plus grande qu'icelle GD: & pour la meſme raiſon GD plus grande que GE, & ainſi des autres s'il y en auoit dauantage de tirees de G à la circonference. Car les deux coſtez GF, FC du triangle GFC, ſont egaux aux deux coſtez GF, FD du triangle GFD, chacun au ſien: mais l'angle CFG eſt plus grand que l'angle DFG; & partant par la 24. p. 1. la baſe GC ſera plus grande que la baſe GD. Pour meſme raiſon GC ſera auſſi plus grande que GE: Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui eſt menee par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.



Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, ſont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les coſtez EF, FG du triangle EFG, ſont egaux aux coſtez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG auſſi egaux: les lignes GH, GE, qui ſont de part & d'autre du diametre, ſont egales entre-elles. Et il eſt euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA, tombant de coſté ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a eſté monſtré cy deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du poinct G à la circonference ne ſe peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui ſoient egales entr'elles. Parquoy ſi au diametre d'vn cercle on prend quelconque poinct qui ne ſoit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

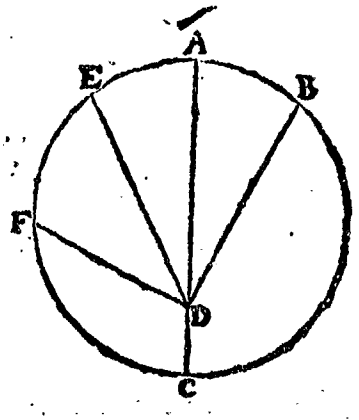
SCHOLIE.

Iaçoit qu'Euclide ait ſeulement demonſtré que des lignes droictes tirees de meſme part du diametre, la plus proche de celle tiree par le centre eſt plus grande que la plus eſloignee, toutesfois cela eſt auſſi vray, ſi elles ſont tirees de diuerſe part: comme ſi la ligne droicte GD eſt plus proche de GA que la ligne droicte GH; icelle GD ſera plus grande que GH: car ſi de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH ſeront egales, attendu qu'elles ſont egalement diſtantes de GA, & le

poinct E tombera entre B & D, puis que GD a eſté poſee plus proche de G A que G H. Mais par ceſte prop. GD eſt plus grande que GE: donc la meſme GD ſera auſſi plus grande que GH. Quelques interpretes veulent conuertir cette 7. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si on prend vn poinct dedans le cercle, & d'iceluy poinct tombent des lignes droictes à la circonference, entre leſquelles ſoient la plus grande & la plus petite qui puiſſent eſtre menees de ce poinct-là à ladite circonference: mais des reſtantes, les vnes ſoient inegales, & les autres egales: la plus grande paſſera par le centre du cercle, & la plus petite ſera le reſte du diametre: mais des autres les plus grandes ſeront les plus proches du centre, & les egales en ſeront egalement diſtantes.

Au cercle ABC ſoit pris le poinct D, duquel tombent en la circonference tant qu'on voudra de lig. droictes D A, D B, D C, D E, D F, deſquelles D A ſoit la plus grande qui puiſſe eſtre tiree d'iceluy poinct à ladite circonference, & D C la moindre: mais des autres, D E ſoit plus grande que D F, & egale à D B. Ie dis premierement que D A paſſe par le centre du cercle: Car ſi elle n'y paſſe, eſtant tiree quelque ligne droicte de D par ledit centre, elle ſera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. prop. 3. Ce qui eſt abſurde, puis que D A eſt poſee la plus grande. Donc D A paſſe par le centre.



En ſecond lieu, ie dis que D C eſt le reſte du diametre, c'eſt à dire qu'elle eſt directement à D A: Car autrement icelle D A eſtant prolongee directement, ſon prolongement ſera autre que D C, & la plus petite ligne qui puiſſe tomber de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Ce qui ne peut eſtre, puis que D C a eſté poſee la plus petite: donc D C eſt l'autre partie du diametre.

Tiercement, ie dis que D E eſt plus proche de D A que D F. Car elle n'y pourroit pas eſtre egalement diſtante, attendu que par la ſuſdite prop. elles ſeroient egales, & elles ont eſté poſees inegales. Mais D E ne peut pas auſſi eſtre plus eſloignee de la meſme D A que D F: car elles ſeroient plus petites qu'icelle D F, par la meſme propoſition, & elle a eſté poſee plus grande.

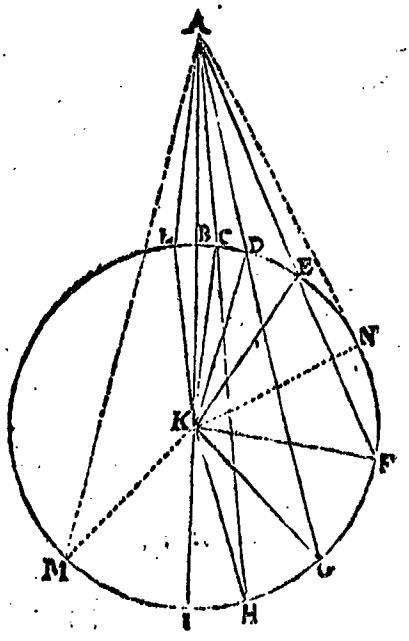
En dernier lieu, ie dis que D B, D E ſont egalement diſtantes de D A: Car ſi l'vne en eſtoit plus proche elle ſeroit plus grande que l'autre par la meſme 7. prop. & elles ont eſté poſees egales.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy poinct ſoient menees quelques lignes droictes dans iceluy cercle, deſquelles l'vne paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande

de toutes celles qui ſeront menees en la circonference concaue. Quant aux autres, touſiours la plus proche de celle qui paſſe par le centre eſt plus grande que la plus eſloignee. Mais de celles qui tombent à la circonference conuexe, la plus petite eſt celle qui eſt compriſe entre le poinct & le diametre: Quant aux autres, la plus eſloignee de la plus petite eſt plus grande que celle qui en eſt plus proche: Et d'iceluy poinct ne peuuent tomber à la circonference que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite.

Du poinct A hors le cercle BCDE, le centre duquel eſt K, ſoient menees les lignes droictes AF, AG, AH & AI couppans ledit cercle, deſquelles lignes AI paſſe par le centre K, & les autres comment que ce ſoit. Ie dis premierement que AI qui paſſe par le centre, eſt la plus grande de toutes icelles lignes tirees à la circonference concaue: puis apres, que AH qui eſt la plus proche d'icelle AI eſt plus grande que AG, qui en eſt plus eſloignee: Et pour meſme raiſon AG, plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB compriſe entre le poinct A & la circonference conuexe, eſt la plus petite ligne de toutes celles qui ſont hors le cercle: puis apres, que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, eſt moindre que AD, qui en eſt plus eſloignee: Et par meſme raiſon, icelle AD moindre que AE. Finalement, ie dis que de A, on peut ſeulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.



Car du centre K eſtans menees aux poincts C, D, E, F, G & H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG & KH; les deux coſtez AK, KH, du triangle AKH, ſont plus grands que la ligne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH ſont egales aux lignes AK, KI, c'eſt à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI ſera donc auſſi plus grande que AH. Pour la meſme raiſon AI ſera plus grande que AG, & auſſi que AF. Parquoy la ligne AI eſt la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les coſtez AK & KH du triangle AKH ſont egaux aux coſtez AK, KG du triangle AKG, chacun au ſien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la baſe AH ſera plus grande que

la baſe AG, par la 24. prop. 1. Par meſme raiſon AH ſera plus grande que AF; item AG plus grande que la meſme AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK eſt moindre que les deux AC, CK; ſi on oſte les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par ſemblable raiſon AB ſera plus petite que AD, & auſſi que AE. Parquoy la ligne AB eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menees de A à la circonference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitez du coſté AK, icelles AC, CK ſeront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. deſquelles ſi on oſte les egales CK, DK, reſtera encore AC moindre que AD. Par meſme raiſon on prouuera que AC eſt moindre que AE: Item AD moindre que la meſme AE: Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, eſt moindre que la plus eſloignee.

Finablement, ſoit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, tirant KL iuſques à ce qu'elle rencontre la periphere en L, & ſoit menee la ligne AL. D'autant que les coſtez AK, KC du triangle AKC, ſont egaux aux coſtez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL auſſi egaux, les lignes droictes AC, AL, de part & d'autre de la moindre AB, ſeront egales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puiſſe eſtre egale à icelles, il eſt euident; car ſi on en mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle ſoit plus proche ou plus eſloignée de AB; & parce qui a eſté demonſtré cy-deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont ſeulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy ſi on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon de A ne peuuent tomber en la circonference concaue que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus grande AI. Car ayant faict l'angle AKM egal à l'angle AKG, & mené AM, les triangles AKM, AKG auront les baſes AG, AM egales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonference concaue d'autre ligne egale à icelle AG, AM, attendu qu'elle ſeroit plus proche ou plus eſloignee de AI, & par conſequent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainſi qu'il appert par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus.

Il appert auſſi que quand l'vne des lignes tombantes de A, touche le cercle, comme AN, qu'icelle touchante eſt plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonference concaue: Car eſtant tiree du centre à l'attouchement la ligne droicte KN, les deux coſtez AK, KF du triangle AKF, ſeront egaux aux deux coſtez AK, KN du triangle AKN, chacun au ſien, & l'angle AKF eſt plus grand que l'angle AKN, & par la 24. pr. 1. la baſe AF ſera plus grande que la baſe AN: Et par meſme raiſon toute autre ligne tombante en la circonference concaue ſera plus grande qu'icelle AN.

Mais la meſme ligne touchante AN ſera la plus grande de toutes les autres li-

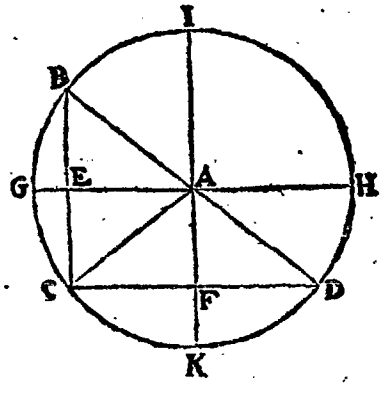
gnes qui tombent de A en la circonference conuexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux costez AE, EK sont moindres que les deux costez AN, NK, si on en oste les lignes egales KE, KN, restera AE moindre que AN; & ainsi des autres.

Au reste ce qu'Euclide a demonstré en cette 8. prop. aduenir aux lignes menees d'vne mesme part de la plus grande ou plus petite, aduiendra encore, les lignes estans menees de diuerses parts, c'est à dire, que si AH est plus proche de AI que AM: icelle AH sera aussi plus grande que ladite AM, iaçoit qu'elles ne soient toutes deux d'vne mesme part: & si AD est plus esloignee de AB que AL, elle sera aussi plus grande qu'icelle AL. Ce qu'on peut demonstrer procedant, ainsi qu'au precedent scholie pour les lignes tirees de diuerse part.

THEOR. 8. PROP. IX.

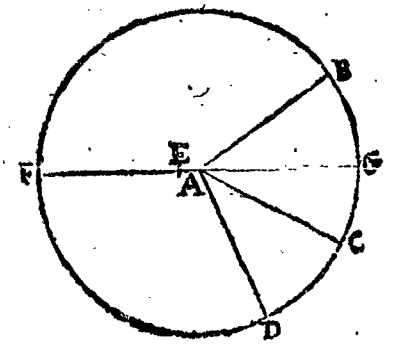
Si on prend quelque poinct au dedans d'vn cercle, & d'iceluy poinct tombent à la circonference plus de deux lignes droictes egales, le poinct pris est le centre du cercle.

Soit pris le poinct A au cercle B C D, & d'iceluy poinct tombent à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC, AD. Ie dis que le poinct pris A, est le centre du cercle.



Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes droictes BC & CD, & apres les auoir couppees en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, soient menees les deux lignes droictes EA, FA, & prolongees de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au poinct E seront egaux, & partant droicts, & par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre du cercle sera en la ligne droicte GAH, puis qu'elle diuise la ligne droicte BC en deux egalement, & à angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant poinct d'autre poinct commun. Parquoy si on prend quelque poinct dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Autrement. Si le poinct A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au poinct E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG, est pris le poinct A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droictes AD, AC; icelle AD qui est plus proche de AF tiree par le centre E, sera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles



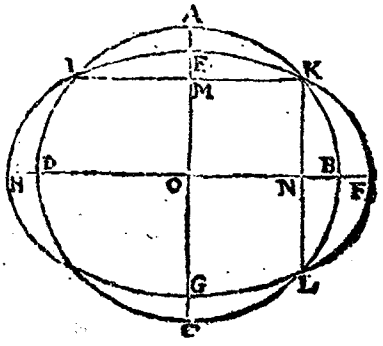
AB, AC

AB, AC ont esté posees egales. La mesme absurdité s'ensuiura tousiours si on pose le centre estre à vn autre poinct que A: parquoy iceluy poinct A sera le centre du cercle ABC. Ce qu'il falloit prouuer.

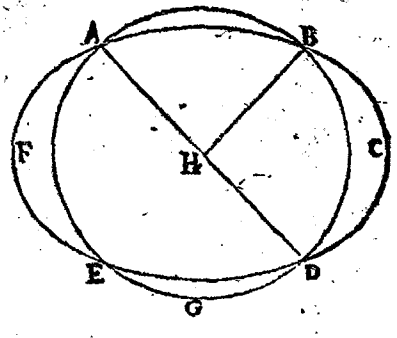
THEOR. 9. PROP. X.

Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se couppans aux trois poincts I, K & L, s'il est possible. Item soient menees les deux lignes droictes IK & KL, lesquelles soient couppees en deux egalement aux poincts M & N par la 10. prop. 1. & soient menees les lignes droictes MC, NH à droicts angles sur IK & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce liure que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au poinct de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. prop. de ce liure. Donc les cercles ABCD & EFGH ne se pouuoient pas couppe en plus de deux poincts: Ce qu'il falloit demonstrer.



Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se couppent, s'il est possible, en plus de deux poincts c'est à sçauoir en A, B, D: & soit trouué le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menees les lignes droictes HA, HB, HD, lesquelles seront egales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le poinct H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes egales, iceluy poinct H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecouppans ont mesme centre. Ce qui est absurde.

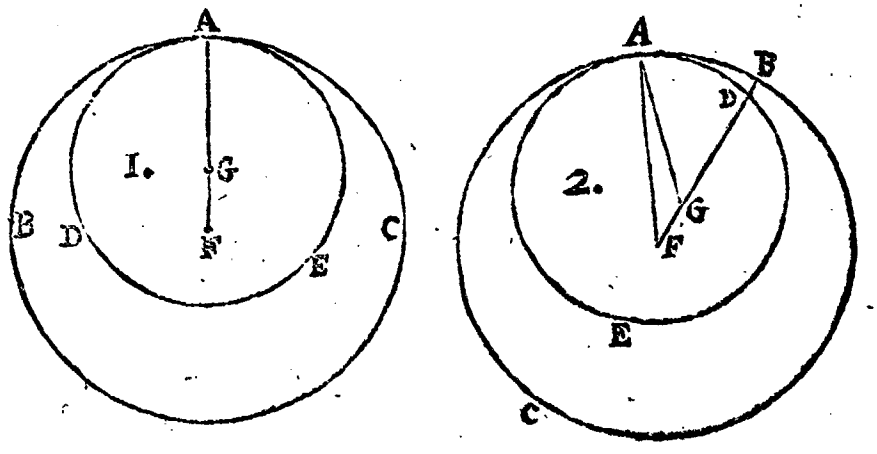


THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'vn l'autre au dedans, on conjoinct iceux centres par vne ligne droicte; icelle ligne estant prolongee tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans interieurement au

poinct A, & par la 1. pr. 3. ſoit trouué le centre du cercle ABC, lequel ſoit F; puis que par la 6. prop. 3 deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuuent auoir vn meſme centre, F ne ſera pas le centre du cercle ADE: Soit donc auſſi trouué ſon centre, qui ſoit G. Ie dis que la ligne droicte menee du centre F au centre G, & prolongee de ce coſté-là iuſques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au poinct de l'attouchement A, comme à la premiere figure. Car autrement il faudra qu'elle tombe à quelque autre poinct de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G ſont au dedans du cercle ABC, ladite ligne FG

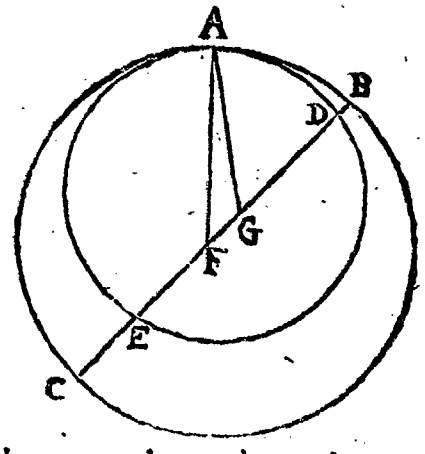


eſtant continuee, elle ira neceſſairement rencontrer la circonference d'iceluy cercle: & ſi quelqu'vn dit que ce n'eſt pas au poinct d'attouchement, ſoit, s'il eſt poſſible, à quelconque autre poinct, comme B en la 2. figure; tellement que la ligne FGB couppe la circonference du moindre cercle ADE au poinct D. D'autant donc que les centres F & G, & le poinct d'attouchement A ne ſont pas en vne ligne droicte, ſi dudit poinct A on mene des lignes droictes aux deux centres F & G, elles feront vn triangle auec la ligne FG, qui eſt la diſtance d'vn centre à l'autre, lequel triangle ſoit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux coſtez AG, FG dudict triangle AFG, ſont plus grands que l'autre coſté FA; & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, (pource que F eſt le centre du cercle ABC) auſſi les lignes AG, GF ſeront plus grandes que FB: oſtant donc FG commune, reſtera GA, plus grande que GB. Et partant, puis que GA eſt egale à GD; (car G eſt le centre du cercle ADE) GD ſera auſſi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte conioignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produicte, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy ſi deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

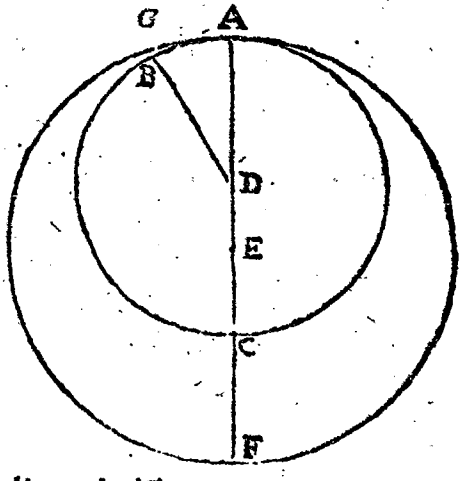
SCHOLIE.

Candalle, Errard & quelques autres Interprettes demonſtrent ceſte 11. prop. ainſi qu'il enſuit. Soient deux circonferences ABC & ADE ſe touchans interieuremen

au poinct A, & de la plus grande ABC, le centre ſoit F, duquel au poinct d'attouchement A ſoit menee la ligne droicte AF: Ie dis que le centre de la plus petite circonference ADE eſt en icelle ligne AF. Autrement, qu'il ſoit hors d'icelle, s'il eſt poßible, comme au poinct G, & ſoit conioinct FG, & prolongé de la part de G iuſques à ce qu'il couppe les deux circonferences aux poincts D & B, puis ſoit menee GA. D'autant que par la 20. prop. 1. les deux coſtez AG, FG du triangle AFG ſont plus grands que l'autre coſté FA, & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, puis que F eſt le centre du cercle ABC; auſſi AG, FG ſeront plus grandes que FB. Oſtant donc FG commune, reſtera GA plus grande que GB: mais GA eſt egale à GD (car G a eſté poſé centre du cercle ADE.) Donc auſſi GD ſera plus grande que GB, la partie que le tout; ce qui eſt abſurde. Parquoy le centre de l'autre circonference ADE ne ſera pas hors la ligne FA: & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE ſeront en ladite ligne FA. Donc la ligne conioignant iceux centres & prolongee tombera au poinct d'attouchement A.



Encore autrement ſelon Pelletier & Billingſley. Soient deux cercles ABC, AFG s'entretouchans au dedans en A, & par la 1. pr. 3. ſoit trouué le centre du cercle ABC, qui ſoit D, & auſſi le centre de AFG, lequel ſoit E: Ie dis que la ligne droicte menee du centre E à D & prolongee iuſques à la circonference du plus grand cercle tombera au poinct de l'attouchement A. Car autrement elle tombera de part ou d'autre d'iceluy attouchement A; qu'elle tombe donc, s'il eſt poßible, à vn autre poinct, comme G: teüement que FEDG ſoit diametre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & ſoit tiree DA. D'autant qu'au diametre FEDG, le poinct D eſt autre que le centre E, la ligne droicte DA ſera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB eſt egale à DA par la def. du cercle: donc DB ſera auſſi plus grande que DG, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Parquoy la ligne ED prolongee vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy poinct d'attouchement A.

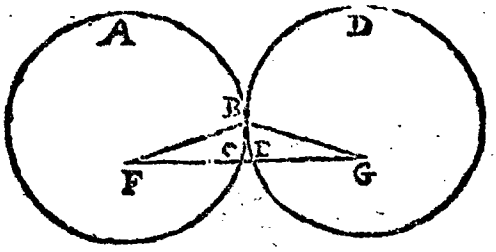


THEOR. 11. PROP. XII.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, paſſera par l'attouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE ſe touchans l'vn l'autre au dehors au

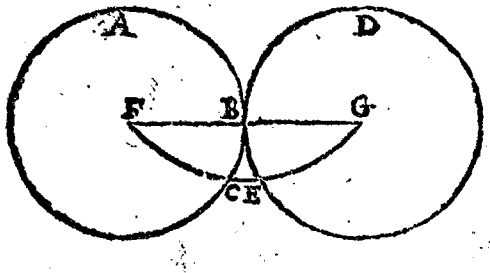
poinct B, desquels les centres soient F & G. Ie dis que si d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, qu'icelle passera par le poinct d'attouchement B.



Autrement, il s'ensuiura absurdité : car si icelle ligne ne passe par le poinct d'attouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçauoir aux poincts C & E, où elle couppe les deux circonferences, & du poinct d'attouchement B soient menees les deux lignes droictes FB, GB, lesquelles par la 20. prop. 1. seront plus grandes que FG, & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC, estant egale à FB, & GE à GB, que les deux lignes FC & GE, seront plus grandes que FG, la partie que le tout. La ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera donc par l'attouchement B. Parquoy si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

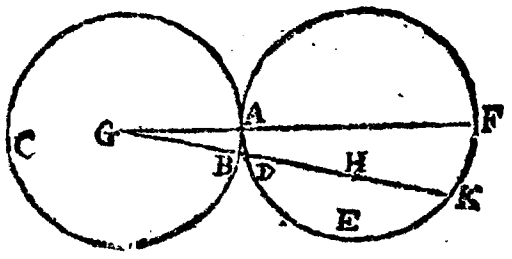
SCHOLIE.

D'autant qu'en cette demonstration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vrayes places, & que cela pourroit peut estre causer quelque doubte, Oronce & Schubelius en ont adiousté vne autre où les centres retiennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles A B C, D B E s'entretouchent au dehors en B, & d'iceux les centres soient F & G : Ie dis que la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre passera par le poinct d'attouchement B, c'est à dire que si on mene à iceluy poinct B les lignes droictes F B, G B, elles feront vne seule ligne droicte F B G. Car autrement elles feront vn angle à iceluy poinct B, & de F à G on pourra mener vne ligne droicte, laquelle soit (s'il est possible) F C E G, qui couppe les circonferences en C & E. Donc icelle ligne droicte F C E G constituera vn triangle auec les deux lignes F B, G B, puis qu'on a posé qu'elles s'inclinent & font angle au poinct B : & par la 20 p. 1. icelles F B, G B sont plus grandes que F C E G : Mais par la def. du cercle F C est egale à F B, & G E à G B : donc F C & G E seront aussi plus grandes que la mesme F C E G, la partie que le tout : (car icelle F C E G outre F C, G E contient encore la ligne droicte C E,) Ce qui est absurde.



Pelletier, & apres luy Billingsley demonstrent encore cette 12. pr. ainsi. Soient les deux cercles A B C & D E F qui s'entretouchent par dehors au poinct A; & que G soit le centre du cercle A B C, duquel soit tiree par l'attouchement des cercles, la ligne droicte G A iusques à ce qu'elle rencontre la circonference D E F au poinct F : Ie dis que le centre du cercle A D E est en icelle ligne droicte G A F. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au poinct H, & du centre G à iceluy centre H soit tiree la ligne droicte G H K iusques à ce qu'elle ren-

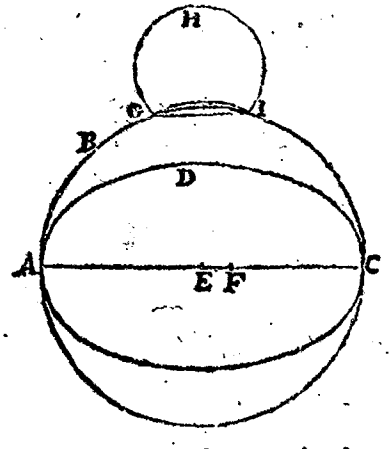
contre la circonferenee en K, couppant la periphere ABC en B, & la circonference ADE en D. D'autant que du poinct G, qui eſt hors le cercle ADE, ſont tirees à iceluy cercle les deux lignes droictes GK, GF, deſquelles GK paſſe par le centre H, par la 8. pr. 3. la partie exterieure GD ſera moindre que GA partie exterieure de GF. Mais AG eſt egale à GB par la def. du cercle: donc auſſi GD ſera moindre que GB, le tout que la partie: ce qui eſt abſurde. Donc le centre du cercle ADE ne ſera pas hors la ligne GAF, & partant les deux centres des cercles ABC, & ADE ſeront en icelle ligne GF; parquoy la ligne conioignant iceux centres paſſera par l'attouchement des cercles.



THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC ſe touchans interieurement aux deux poincts A & C, s'il eſt poſſible: & d'autant qu'ils ne peuuent auoir vn meſme centre par la 6. pr. de ce liure, ſoient les deux centres diuers E & F, par leſquels eſtant tiree la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és poincts d'attouchement A & C par la 11. pr. de ce meſme liure: & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes EA & EC ſoient egales. Item FA & FC. Mais FA eſt plus grande que EA Partant FC ſera auſſi plus grande que EC, la partie que le tout: ce qui eſt impoſſible. Donc les deux cercles ne ſe toucheront point en deux poincts au dedans.

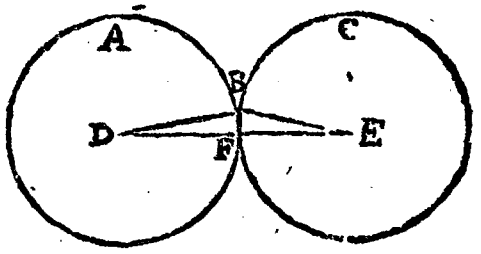


Pareillement, il eſt impoſſible qu'ils ſe touchent exterieurement à plus d'vn poinct: car ſi le cercle GHI pouuoit toucher en dehors le cercle ABC en deux poincts, comme G & I, il faudroit que la ligne droicte GI menee par leſdits deux poincts, tombaſt dedans l'vn & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui eſt impoſſible: car icelle ligne droicte GI tombant dedans le cercle ABC, elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI, puis qu'iceluy eſt tout dehors ABC. Parquoy les cercles ne ſe touchent point à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Cette ſeconde partie eſt encore demonſtree par pluſieurs Interprettes ainſi. Que les

deux cercles A B & C B, dont les centres ſont D & E, s'entretouchent par dehors au poinct F: Ie dis qu'ils ne ſe peuuent toucher à vn autre poinct. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droicte D E, elle paſſera par ledit attouchement F par la precedente prop. & ſi les cercles ſe touchoient encore à vn autre poinct, comme B, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre paſſeroit auſſi par iceluy attouchement B; & par ainſi les deux lignes droictes D F E, D B E enclorroient vne ſuperficie, ce qui eſt impoſsible.



Clauius demonſtre en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si au demy diametre d'vn cercle produict, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy poinct extreme du ſemy-diametre, & tombera tout dehors le meſme cercle.

Soit le cercle A B C, (voyez la derniere figure de la page 123.) duquel le centre eſt D, & au demy diametre A D prolongé, ſoit prins quelconque poinct comme E, duquel & de l'interualle E A ſoit décrit le cercle A F G, lequel ie dis toucher le cercle A B C au ſeul poinct A. Car ou le poinct E eſt dans le cercle A B C, ou dehors. S'il eſt dedans: d'autant que A E eſt plus grand que A D, c'eſt à dire que D C, & à plus forte raiſon que E C: la ligne E F qui eſt egale à E A ſera auſſi plus grande que E C: & partant le poinct F eſt hors le cercle A B C; & le cercle A F G hors le meſme cercle pres du poinct F. Iceluy poinct F tombera beaucoup dauantage hors le cercle A B C, ſi E eſt hors le meſme cercle A B C. Si donc le cercle A F G ne tombe tout dehors le cercle A B C, tellement qu'il le touche au ſeul poinct A, que le cercle A F G couppe ou touche le cercle A B C, en vn autre poinct B, ſi faire ſe peut, & ſoit tiree la ligne D B. Veu donc qu'au diametre du cercle A F G eſt pris le poinct D, outre le centre E, la ligne D A ſera la plus petite de toutes les lignes droictes tombantes de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Donc D A eſt moindre que D B, ce qui eſt abſurde; car D A, D B tombant du centre D en la circonference d'vn meſme cercle A B C, ſont egales. Donc le cercle A F G ne couppe ou touche le cercle A B C en vn autre poinct que A, mais tombe tout dehors iceluy: ce qui eſtoit propoſé.

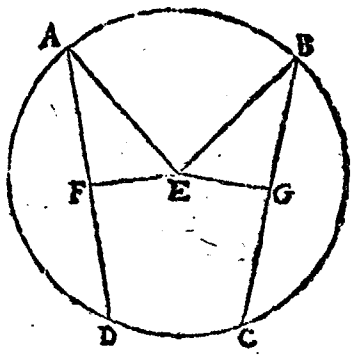
Que ſi au ſemy-diametre non-produit, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du ſemy-diametre touchera pareillement le premier cercle au ſuſdit poinct extreme du demy-diametre, & tombera tout dedans le meſme cercle. Comme ſi au ſemy-diametre A E, du cercle A F G, on prend le poinct D, duquel & de l'interualle D A, on deſcriue le cercle A B C, iceluy tombera totalement dedans A F G, & le touchera au ſeul poinct A. Car puis qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le cercle A F G tombe tout dehors le cercle A B C, pareillement tout ceſtuy-cy tombera dedans celuy-là, tellement qu'ils s'entretouchent au ſeul poinct A: & par ainſi appert ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droictes egales, ſont egalement diſtantes du centre; & les egalement diſtantes du centre ſont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droictes egales AD & BC. Ie dis qu'elles ſeront egalement diſtantes du centre E.

Qu'ainſi ne ſoit, par la 12. prop. 1. du centre E ſoient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes droictes AD, BC: puis ſoient tirees les deux lignes AE & BE. Or les deux lignes droictes AD & BC, eſtans couppées en angles droicts par les perpendiculaires EF & EG, elles ſeront auſſi couppees en deux egalement par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD, BC ſont poſees egales, la moitié AF ſera egale à la moitié BG. Pareillement AE eſtant egale à BE par la def. du cercle; le quarré de AE ſera egal au quarré de BE. Mais iceluy quarré de AE eſt egal aux deux quarrez de AF, FE, par la 47. p. 1. & le quarré de BE eſt egal aux deux quarrez de BG, GE. Donc les deux quarrez de AF, FE ſeront egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG ſont egales, le quarré de AF eſt egal au quarré de BG, & par conſequent le quarré de FE, eſt egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE ſera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC ſeront egalement diſtantes du centre E.



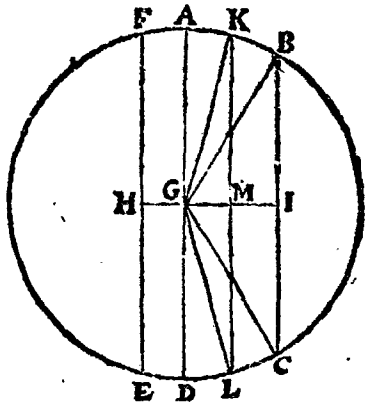
Quant à la ſeconde partie. Ie dis que ſi AD, BC ſont egalement diſtantes du centre E, qu'elles ſeront egales entr'elles: car ayant conſtruit, comme deſſus, les perpendiculaires EF & EG ſeront egales par la 4. def. de ce liu. & coupperont AD, BC en deux egalement par la 3 pr. de ce meſme liu. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-deſſus, AF ſe trouuera egale à BG, & par conſequent auſſi leurs doubles AD & BC ſeront egales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne eſt le diametre: quant aux autres touſiours la plus proche du centre eſt plus grande que la plus eſloignee.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre eſt G ſoit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus eſloignee. Ie dis que de toutes ces lignes AD eſt la plus grande, & que FE eſt plus graude que BC.

Car ſoient tirees du centre G les lignes droictes G H, G I perpendiculaires aux lignes droictes FE, BC: & pource que BC eſt plus eſloignee du centre que FE; la perpendiculaire GI ſera plus grande que GH, par la 4. def. de ce liure Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M ſoit menee KML perpendiculaire à GI, & ſoient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH ſont egales, les lignes droictes KL, FE ſeront egalement diſtantes du centre par la 4. def. de ce liure, & partant egales entr'elles par la prop. precedente.



Derechef, puis que GK, GL, ſont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL ſont egales au diametre AD; iceluy diametre A D ſera auſſi plus grand que KL ou FE. Par meſme raiſon on demonſtrera que A D eſt plus grande que toutes les autres lignes.

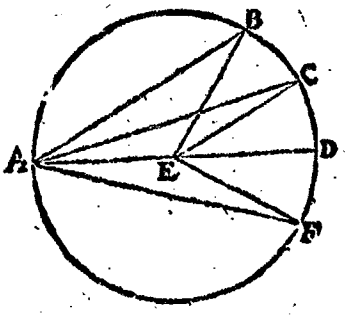
Item, d'autant qu'aux triangles GKL & G B C, les coſtez GK, GL, GB, GC ſont egaux par la definition du cercle, & l'angle GKL eſt plus grand que l'angle BGC, par la 24. prop. 1. la baſe K L, ou ſon egale F E, ſera plus grande que la baſe BC, & ainſi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne eſt le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre icy le Theoreme ſuiuant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend vn poinct, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droicte au cercle, l'vne deſquelles paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande de toutes: mais des autres les plus proches de celle là qui paſſe par le centre ſeront plus grandes que les plus eſloignees: & n'y en peut auoir que deux egales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle A B C D, ſoit pris le poinct A, & d'iceluy ſoient menees pluſieurs lignes droictes A B, A C, A D, deſquelles A D paſſe par le centre E: ie dis que A D eſt la plus grande de toutes, & A C eſtre plus grande que A B, qui eſt plus eſloignee d'icelle A D. Car eſtans menees les lignes B E, C E; au triangle A E C les deux coſtez A E, E C ſeront plus grands que le coſté A C par la 20. pr. 1. Mais icelles lignes A E, E C ſont egales aux lignes droictes A E, E D, c'eſt à dire à la ligne droicte A D. Donc icelle A D ſera plus grande que A C: & par meſme raiſon elle ſera auſſi plus grande que A B, & ainſi des autres.



En apres, d'autant qu'au triangle A E C les deux coſtez A E, E C ſont egaux aux deux coſtez A E, E B du triangle A E B, chacun au ſien, & tout l'angle A E C plus grand que l'angle A E B, la baſe A C ſera plus grande que la baſe A B par la

24. prop.

14. prop. 1. Et par meſme raiſon A C ſera plus grande que toute autre ligne plus éloignee du centre E.

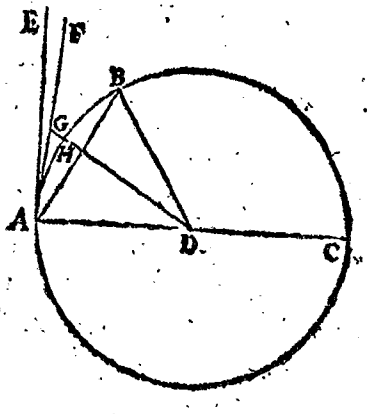
En troiſieſme lieu: ie dis que du poinct A on ne peut mener au cercle que deux lignes droictes egales entr'elles de part & d'autre de la plus grande A D. Car ayant fait l'angle A E F égal à l'angle A E C, & ioinct A F, les deux coſtez A E, E C ſeront egaux aux deux coſtez A F, E F, & les angles A E C, A E F, contenus d'iceux coſtez, auſſi egaux, & par la 4. prop. 1. les baſes A C, A F ſont egales: & il eſt euident que du meſme poinct A on ne peut tirer dans le cercle vne autre ligne, qui ne s'approche ou eſloigné de A D; & partant plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles A C, A F. Donc du poinct A ne ſe peuuent tirer dans le cercle que deux lignes droictes egales entr'elles.

Que ſi de A B, A F, tirees de diuerſes parts du diametre A D, on dit que A F eſt plus proche d'iceluy diametre A D; on demonſtrera, comme au ſcholie de la 7. prop. de ce liure, que ladite A F eſt plus grande que A B.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'vn cercle, on leue vne ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle: & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reſte plus petit.

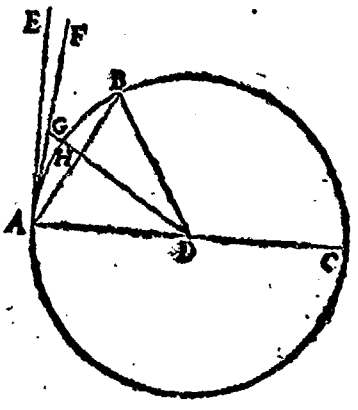
Du cercle A B C, ſoit le centre D, & le diametre A C, ſur l'extremité duquel A, ſoit leuee la ligne perpendiculaire A E, par la 11. prop. 1. Ie dis premierement qu'icelle ligne A E tombe hors le cercle.



Car ſi elle tomboit dans iceluy, ainſi que A B, eſtant tiree D B, les deux angles D A B, D B A, ſeront egaux par la 5. prop. 1. Mais D A B eſt droict par la conſtruction: donc D B A ſera auſſi droict: ce qui eſt abſurde, puis que par la 17. prop. 1. deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la meſme raiſon elle ne tombera pas auſſi en la circonference, mais dehors, comme eſt A E.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire A E, & la circonference A B, vne autre ligne droicte. Car s'il eſt poſſible que quelque ligne droicte y tombe, comme A F, de D ſoit menee ſur icelle la perpendiculaire D G, couppant la circonference en H, laquelle tombera neceſſairement de la part de l'angle aigu D A F par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc que au triangle D A G, les deux angles D A G, D G A, ſont moindres que deux droicts par la 17. prop. 1. & par la conſtruction D G A eſt droict,

l'angle DAG ſera moindre qu'vn droict, & partant la ligne DA, ou ſon egale DH, ſera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.



Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diametre AC, & de la circonference AB, eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reſte BAE contenu de la ligne droicte AE, & de la circonference AB, eſt plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE eſt angle droict diuiſé par la ſeule circonference AB, & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droicte AE, ne peut tomber vne autre ligne droicte; l'angle BAE ne peut eſtre diuiſé par aucune ligne droicte, & par ainſi ne ſera diminué par aucune ligne droicte, ny par conſequent l'angle BAC ne ſera augmenté par aucune ligne droicte. Si donc à l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COLLAIRE.

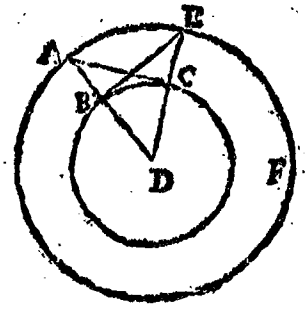
Par ces choſes eſt manifeſte qu'vne ligne droicte tiree perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn ſeul poinct. Car il a eſté demonſtré qu'elle tombe hors le cercle: & partant elle le touche ſeulement au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il eſtoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circonference du cercle, laquelle touchaſt le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD, & ſur icelle ſeroit éleuee la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a eſté demonſtré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC, dont le centre eſt D.

Soit menee la ligne AD couppant le cercle BC en B: puis du centre D, & interualle DA, ſoit deſcrit le cercle AEF: Et apres auoir leué au bout du demy diametre BD la perpendiculaire BE par la 11. p. 1. laquelle couppe la circonference AEF en E, ſoit menee la ligne ED couppant le cercle BC au poinct C, & du poinct donné A, à iceluy poinct C, ſoit menee la ligne AC: ie dis qu'elle touche le cercle donné BC au poinct C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux coſtez egaux, & l'angle D commun, la baſe AC ſera egale à la baſe EB, & l'angle droict ACD egal à

l'angle EBD, qui ſera auſſi droict. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au ſeul poinct C. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte AC, qui touche le cercle donné au poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

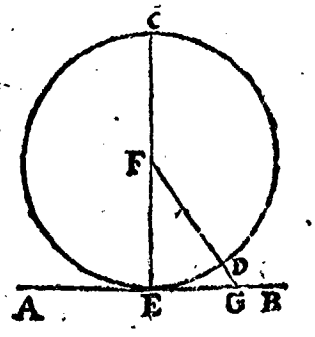
SCHOLIE.

La pratique de cette prop. eſt aiſée à entendre par la conſtruction d'icelle : mais nous auons enſeigné en noſtre Geometrie pratique, Prob. 20. vne autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 31. prop. de ce liure.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cercle: & du centre à l'attouchement on mene vne ligne droicte, elle ſera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct E, & d'iceluy poinct d'attouchement ſoit menée la ligne droicte EC paſſant par le centre F. Ie dis qu'elle ſera perpendiculaire à AB.



Car ſi elle ne l'eſt, ſoit menee FG perpendiculaire à AB, couppant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE ſont moindres que deux droicts, par la 17. prop. 1. & FGE eſt droict par la conſtruction FEG ſera moindre qu'vn droict, & par la 19. p. 1. la ligne FE, ou FD ſon egale, ſera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc FE eſt perpendiculaire à AB. Parquoy ſi vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

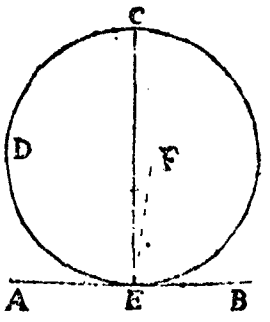
Clauius demonſtre encore cette prop. ainſi. Si EC n'eſt perpendiculaire à AB, l'vn des angles qu'elle faict au poinct E ſera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu; & veu qu'il eſt plus grand que l'angle du demy cercle CED, l'angle du demy cercle ſera plus petit que quelque angle rectiligne aigu: ce qui eſt contre la 16. pr. 3. & partant abſurde.

THEOR. 17 PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au poinct de l'attouchement eſt leuee vne perpendiculaire; en icelle ſera le centre du cercle.

Soit la ligne droicte AB, touchant le cercle CDE au poinct E: & d'iceluy ſoit leuee EC perpendiculaire à AB. Ie dis que le centre du cercle ſera dans icelle ligne perpendiculaire EC.

Autrement, il ſera dehors icelle ligne; ſoit donc au poinct F, s'il eſt poſſible, & d'iceluy poinct ſoit menee la ligne droicte EF au poinct de l'attouchement E; icelle ligne EF ſera auſſi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui eſt impoſſible: car les deux angles AEC, AEF ſeroient droicts & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'eſtoit pas hors la ligne EC, ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

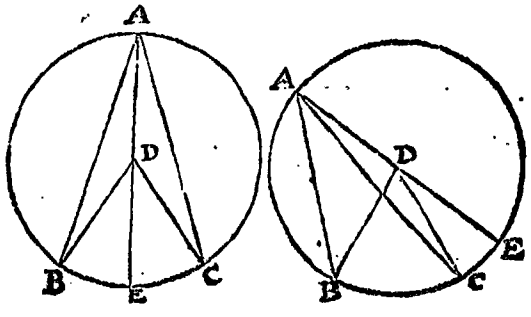


THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne meſme circonference pour baſe.

Au cercle ABC, duquel le centre eſt D, ſoient conſtituez les deux angles BAC & BDC, ſçauoir BAC en la circonference, & BDC au centre, ayant pour baſe vne meſme circonference BC. Ie dis que l'angle BDC ſera double de l'angle BAC.

Car premierement, ſi les lignes droictes AB, AC encloſent les lignes DB, DC, comme en la premiere figure; eſtant menee par le centre D la ligne droicte ADE, & les lignes DA, DB & DC, eſtans egales, les deux triangles ADB & ADC ſeront Iſoſceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles egaux ſur les baſes AB & AC. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. eſt egal aux deux angles interieurs DAB & DBA, qui ſont egaux: partant il ſera double du ſeul DAB: par meſme diſcours EDC ſe trouuera auſſi double de DAC, & par conſequent les deux enſemble BDC ſeront doubles des deux enſemble BAC.



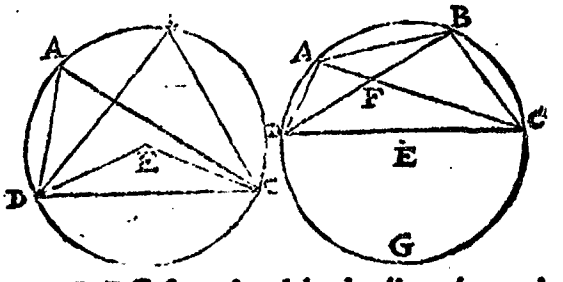
Que ſi l'angle de la circonference BAC eſt comme en la ſeconde figure, il s'enſuiura touſiours le meſme, ſçauoir que l'angle BDC ſera double de l'angle BAC.

Car apres auoir mené par le centre D la ligne ADE, par la 32. pr. 1. l'angle exterieur BDE ſera egal aux deux oppoſez interieurs ABD, DAB, & double du ſeul DAB, le triangle eſtant Iſoſcele: par meſme diſcours CDE ſera double de CAD, & par la 2. com. ſent. ſi de BDE double de BAE on oſte CDE, double de CAE, le demeurant BDC ſera double du demeurant BAC. Parquoy au cercle, l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui ſont en vne meſme portion, ſont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, eſt ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle A B C D, le centre duquel eſt E, vne plus grande portion D A B C, en laquelle ſoient les angles D A C & D B C. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car ſi du centre E on meine les deux lignes E D & E C, l'angle du centre D E C ſera double de l'angle en la circonference D A C par la prop. prec. & par la meſme prop. il ſera auſſi double de l'autre angle D B C. Mais les choſes qui ſont moitié d'vne meſme, ſont egales entr'elles: Donc auſſi les angles A & B ſeront egaux entr'eux.

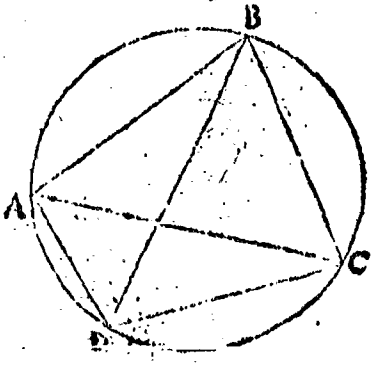
Soit maintenant vne portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Ie dis que les deux angles D A C, D B C, eſtans en la meſme portion D A B C ſont egaux.

Car ſi on meine la ligne droicte A B, il ſe ſera vne portion B G A, plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonſtré cy deſſus, les deux angles A D B & B C A, qui ſont en vne meſme portion A G B, ſeront egaux: pareillement aux deux triangles D A F & C B F, les angles oppoſez au poinct F ſont egaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a eſté demonſtré à la 32. pr. 1. le troiſieſme angle D A F ſera egal au troiſieſme angle C B F. Donc au cercle, les angles qui ſont, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre coſtez inſcrites au cercle, ont les angles oppoſez egaux à deux angles droicts.

Soit le cercle A B C D, auquel ſoit inſcrite la figure de quatre coſtez A B C D. Ie dis que les angles oppoſés A B C, A D C; item B A D, B C D, ſont egaux à deux droicts. Car ſi on meine les deux diagonales A C & B D, les deux angles A C D & A B D, eſtans en vne meſme portion A B C D, ſeront egaux par la pr. prec. Pareillement les deux angles D B C & C A D, eſtans en vne meſme portion D A B C, ſeront egaux; donc les deux angles ſous le poinct B, ſeront egaux aux deux D A C & D C A, leſquels auec les deux du poinct D, ſont egaux à deux droicts par la 32. pr. 1. partant auſſi les deux ſoubs le poinct B auec les



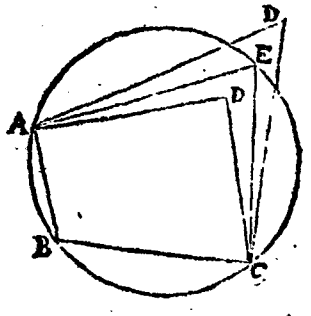
deux ſoubs le poinct D: c'eſt à dire le total A B C, auec le total A D C, ſeront egaux à deux droicts. Nous demonſtrerons en la meſme maniere que les deux angles B A D, B C D, ſont egaux à deux droicts. Car derechef les deux angles A B D, A C D, ſont egaux. Item les deux B C A, B D A; & partant tout l'angle B C D ſera egal aux deux A B D, A D B, leſquels auec B A D ſont egaux à deux droicts par la 32. p. 1 Donc auſſi les deux B C D, B A D, ſeront egaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre coſtez inſcriptes au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La conuerſe de cette 22. prop. peut eſtre demonſtree ainſi qu'il enſuit.

Si deux angles oppoſez d'vn quadrilatere ſont egaux à deux droicts, le cercle deſcrit par trois angles d'iceluy paſſera auſſi par le quatrieſme angle.

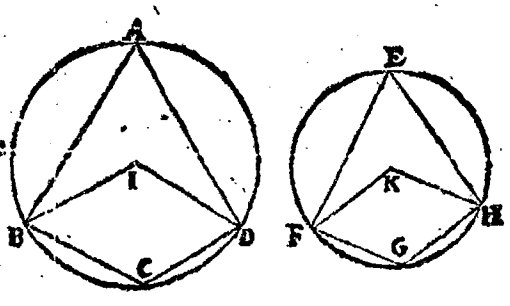
Au quadrilatere A B C D, les deux angles oppoſez B & D ſoient egaux à deux droicts, & par les trois angles A, B, C, ſoit deſcrit vn cercle: Ie dis qu'il paſſera auſſi par le 4. angle D. Car s'il n'y paſſe, il paſſera ou au deçà de D, ou au delà. Soient donc tirees les deux lignes droictes A E, C E, en telle ſorte que ne couppant les lignes droictes C D, A D, elles conſtituent au cercle vn quadrilatere A B C E. Donc par la 22. pr. 3. les deux angles oppoſez B, E ſont egaux à deux droicts: Mais par l'hypotheſe les deux angles B & D, ſont auſſi egaux à deux droicts; & partant les deux angles B & E ſeront egaux aux deux B & D. Parquoy en oſtant l'angle commun B, reſteront les angles D & E egaux: Ce qui eſt abſurde, car eſtant tiree la ligne droicte C A, l'angle D ſera plus grand que l'angle E par la 21. pr. 1. ou au contraire l'angle E ſera plus grand que l'angle D. Le cercle paſſera donc par le poinct D.



Nous demonſtrerons encore icy quatre theoremes non ſeulement vtils aux choſes Geometriques, mais auſſi neceſſaires aux Aſtronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'appuyent ſur arcs ſemblables ſont egaux entr'eux, ſoit qu'ils ſoient conſtituez aux centres ou aux circonferences: & au contraire, les arcs auſquels s'appuyent angles egaux conſtituez aux centres ou aux circonferences, ſont ſemblables.

Aux cercles A B C D, E F G H, deſquels les centres I & K, ſoient premierement les arcs ſemblables B C D, F G H, auſquels inſiſtent & s'appuyent les angles I & K aux centres; & les angles A & E aux circonferences. Ie dis que tant ces deux-là, que ces deux-cy ſont egaux entr'eux. Car eſtans conſtituez en iceux arcs les angles C, G, qui par la 10. d. 3. ſeront egaux: & par la 22. pr. 3. tant les deux angles C, A, que les deux G, E, ſont egaux à deux droicts. Oſtant donc les egaux C, G, les reſtans A, E ſeront auſſi egaux: Mais d'iceux ſont doubles les angles I, K, par la 20. prop. 3. & par conſequent ils ſont auſſi egaux. Ce qui eſtoit propoſé.

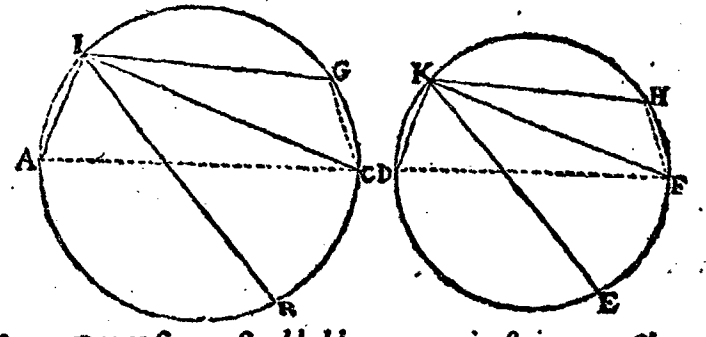


Secondement, ſoient egaux tant les angles I, K, que A, E, leſquels s'appuyent ſur les

arcs BCD, FGH : Ie dis qu'iceux arcs BCD, FGH ſont ſemblables. Car A & E ſont egaux, & par la 22. prop. 3. tant les deux angles A & C, que les deux E & G ſont egaux à deux droicts, les deux autres C & G ſeront auſſi egaux ; & partant les arcs BCD, FGH, auſquels inſiſtent les angles A, E aux circonferences, ſeront ſemblables par la 10. d. 3. Mais ſi les angles I & K aux centres ſont egaux, leurs moitiez A & E, ſeront auſſi egales. Parquoy comme deſſus, les arcs BCD, FGH ſont ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. Si aux demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, l'on adiouſte des ſegmens ſemblables ; les totals ſegmens ſeront auſſi ſemblables : & ſi des cercles, demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, on oſte des ſegmens ſemblables ; les ſegmens reſtans ſeront auſſi ſemblables.

Aux cercles ABC, DEF, ſoient les ſegmens ou arcs ſemblables ABC, DEF qui ſoient demy cercles ou non, & a iceux ſoient adiouſtez les arcs ſemblables CG, FH. Ie dis que tout l'arc ABG eſt ſemblable à tout l'arc DEH. Car eſtans pris aux arcs reſtans les deux poincts I, K, comme on voudra, ſoient menees les lignes droictes AI, CI, GI : DK, FK, HK. D'autant que les arcs ABC, DEF ſont ſemblables, les angles AIC, DKF, ſeront egaux par le prec. Theor. Et par meſme raiſon les angles CIG, FKH ſeront auſſi egaux, à cauſe des arcs ſemblables CG, FH. Donc tout l'angle AIG ſera egal à tout l'angle DKH : & par le meſme theor. prec. les arcs ABG, DEH ſeront ſemblables : ce qui eſtoit propoſé.



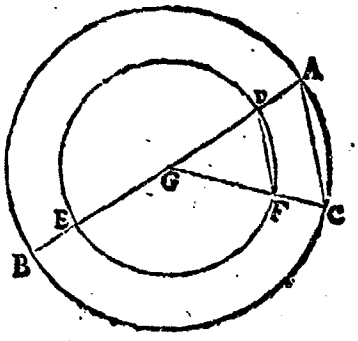
Maintenant, que des ſegmens ou arcs ſemblables ABC, DEF, ſoient retranchez les arcs ſemblables AB, DE. Ie dis que les arcs reſtans BC, EF, ſont auſſi ſemblables. Car eſtans pris derechef les deux poincts I, K, aux peripheres reſtantes des arcs donnez, ſoient menees les lignes droictes AI, BI, CI : DK, EK, FK. Donc puis que tout l'arc ABC eſt ſemblable à tout l'arc DEF, tout l'angle AIC ſera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par meſme raiſon l'angle retranché AIB ſera egal à l'angle retranché DKE, à cauſe des arcs ſemblables AB, DE : donc auſſi l'angle reſtant BIC ſera egal à l'angle reſtant EKF ; & conſequemment les arcs BC, EF, ſeront ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Que ſi des cercles entiers on oſte les ſegmens ſemblables IAC, KDF, les ſegmens reſtans CGI, FHK ſeront auſſi ſemblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux ſegmens les poincts A, G, D, H, ſoient menees les lignes droictes IA, CA, IG, CG : KD, FD, KH, FH. D'autant que les ſegmens IAC, KDF ſont ſemblables, les angles IAC, KDF ſeront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. 3. tant les deux angles oppoſez A, G, que les deux D, H, ſont egaux à deux droicts ; en oſtant les deux angles egaux A & D, les deux reſtans G & H ſeront auſſi egaux, & partant les ſegmens IGC, KHF ſeront ſemblables par la meſme def. Ce qui eſtoit propoſé.

3. Si deux ou pluſieurs cercles ſont deſcris d'vn meſme centre, & d'iceluy ſoient menees deux ou dauantage de lignes droictes, qui couppent les circon-

ferences ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

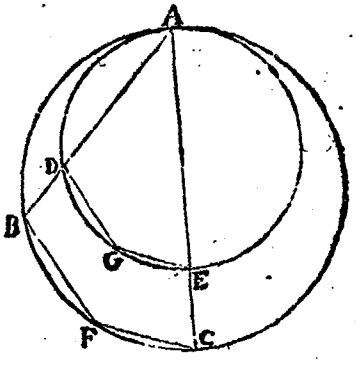
Soient deux cercles ABC, DEF, descrits d'vn mesme centre G, duquel soient menees les deux lignes droictes GB, GC, qui couppent les circonferences en B, C, & E, F : Ie dis que les arcs EF, BC, sont semblables. Car estant prolongee la ligne BG iusques en A, & tirées les lignes droictes AC, DF, l'angle G, constitué au centre sera double de chacun des angles A, D, en la circonference par la 20. pr. 3. Donc par le 1. de ces theor. les arcs BC, EF, sur lesquels ils s'appuient seront semblables. Ce qui estoit proposé.



Autrement. *D'autant que sur les arcs EF, BC s'appuient angles egaux au centre; ou plustost vn seul & mesme angle BGC; iceux arcs EF, BC seront semblables par le theor. susdit.*

4. Si deux ou dauantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du poinct d'attouchement soient tirees deux ou dauantage de lignes droictes qui couppent les cercles; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes seront semblables ; comme aussi les arcs compris entre le poinct d'attouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC, ADE s'entretouchent en dedans au poinct A, duquel soient menees les deux lignes droictes AB, AC, qui couppent les cercles en B, C, & D, E : Ie dis que tant les arcs BC, DE, que AB, AD : & ACB, AED sont semblables. Car ayant pris les deux poincts F, G, & tiré les lignes droictes, BF, CF, DG, EG ; les deux angles DAE, DGE, seront egaux aux deux angles BAC, BFC, attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy sont egaux à deux droicts par la 22. pr. 3. & partant l'angle commun BAC estant osté, les deux autres angles DGE, BFC demeureront egaux : & par la 10. def. 3. les arcs DE, BC seront semblables. Et d'autant que si on conçoit estre tiree la ligne droicte AC par le centre du cercle, elle tombera en l'attouchement A par la 11. pr. 3. & en la mesme maniere que dessus les arcs DE, BC seront semblables, lesquels estans ostez des demy cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs AD, AB, qui ostez des circonferences entieres, resteront encores les arcs AED, ACB semblables, comme nous auons demonstré au 2. theor. Ce qui estoit proposé.



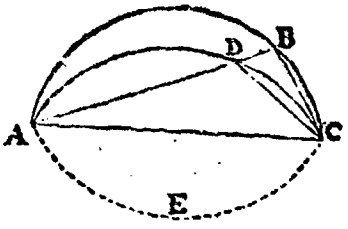
THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC & ADC, sur la la ligne droicte AC, & de mesme costé. Il est euident qu'elles s'entrecoupperont seulement és poincts A & C, puis que par la

10. pr. de

10. pr. ce liure vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts ; & partant la circonference d'vne portion ſera toute de hors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droicte A B couppant les circonferences en D & B, & tirees les deux lignes droictes B C & D C ; par la definition des ſemblables portions, les deux angles A B C & A D C ſeront egaux, ce qui eſt abſurde: car par la 16. prop. 1. l'angle exterieur A D C doit eſtre plus grand que l'oppoſe interieur B. Donc les deux portions A B C & A D C, eſtans ſemblables & inegales, ne ſe pouuoient mettre ſur vne meſme ligne droicte A C, & de meſme part. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

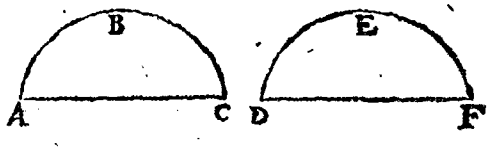
Encore qu'en ceſte 23. prop. & demonſtration d'icelle les portions de cercles ſoient conſtituees de meſme part, ſi eſt-ce toutesfois que la prop. ſera auſsi veritable, ſi leſdites portions ſont poſees de diuerſe part; comme ſont les portions ABC, AEC. Car ſi on conçoit que l'vne d'icelles portions, cõme AEC, ſoit meüe à l'entour de la ligne droicte AC, & vienne à eſtre de meſme part que ABC, il aduiendra touſiours la meſme abſurdité que deſſus, attendu qu'vne portion ne conuiendra point à l'autre, à cauſe de leur inegalité.

Dauantage, il eſt euident, que ce qui eſt dit icy de deux portions conſtituees ſur vne meſme ligne droicte, ſe doit auſsi entendre de celles conſtituees ſur lignes droictes egales: car l'vne d'icelles lignes eſtant ſuperpoſee à l'autre, elle luy conuiendra, & partant les deux portions ſeront lors poſees ſur vne meſme ligne droicte, ainſi que deſſus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles eſtans conſtituees ſur lignes droictes egales, ſont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles ſemblables A B C & D E F conſtituees ſur lignes droictes egales A C, & D F. Ie dis qu'icelles portions ſont egales entr'elles.



Autrement, ſi elles eſtoient inegales, il s'enſuiuroit que deux portions ſemblables & inegales, pourroient eſtre poſees ſur lignes droictes egales, ou bien ſur vne meſme, contre la prop. precedente: donc les deux portions A B C & D E F conſtituees ſur lignes droictes egales, ſeront egales ; Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

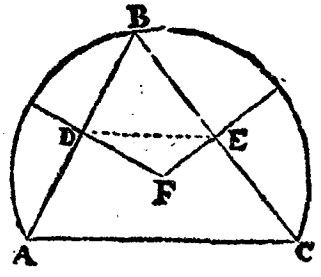
Il eſt aiſé de demonſtrer la conuerſe tant de cette prop. que de la precedente, c'eſt à

ſçauoir que les egaux ſegmens de cercles conſtituez ſur lignes droictes egales, ou ſur vne meſme, ſont ſemblables. Car à cauſe de l'egalité deſdits ſegmens, ou portions de cercles, l'vne conuiendra à l'autre: & partant tous les angles conſtituez en icelles ſont egaux: Parquoy icelles portions ſeront ſemblables. Que ſi quelqu'vn dit que leſdites portions ne conuiennent entr'elles, il faudroit ou que l'vne tombaſt toute hors de l'autre, & elles ne ſeroient egales entr'elles, contre l'hypotheſe; ou bien que la circonference de l'vne couppaſt la circonference de l'autre, & par ainſi vn cercle en couperoit vn autre à plus de deux poincts, contre la 10. prop. 3.

PROB. 3. PROP. XXV.

La portion d'vn cercle eſtant donnee, deſcrire le cercle duquel elle eſt portion.

Soit vne portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.

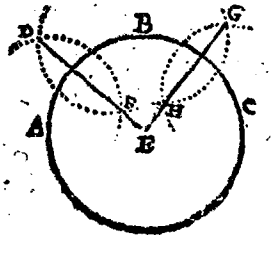


En la circonference d'icelle portion ſoient pris comme on voudra les trois poincts A, B, C, & apres auoir mené les deux lignes droictes A B & B C, & icelles couppees en deux egalement en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux poincts ſoient leuees par la 11. prop. 1. les perpendiculaires D F, & E F, ſe rencontrans au poinct F: (or elles ſe doiuent rencontrer, pource que ſi on menoit vne ligne droicte de D à E, comme D E, ſeroient faicts deux angles E D F, D E F, moindres que deux droicts.) Ie dis que le poinct F eſt le centre cherché.

Car par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre ſera en la ligne D F: Il ſera auſſi en E F: ce ſera donc au poinct F, qui leur eſt commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le ſegment donné A B C eſt portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'eſt differente à celle de la premiere, c'eſt à ſçauoir qu'ayant pris en la circonferente les trois poincts A, B, C, il faut des poincts A & B, deſcrire d'vn meſme internalle deux arcs qui s'entrecouppent en D, F, & par iceux mener vne ligne droicte D F E: en apres, des poincts B & C, deſcrire encore d'vn meſme internalle deux autres arcs qui s'entrecouppent en G & H, par leſquels ſoit menee vne ligne droicte G H E, qui couppe la precedente D F en E, qui ſera le centre requis.



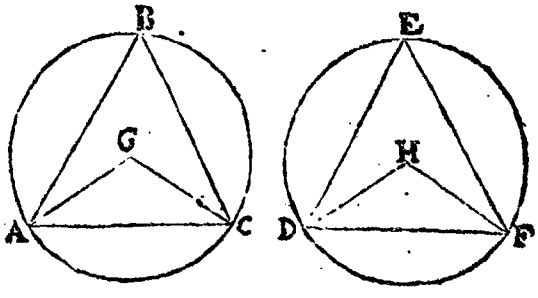
THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circon-

ferences egales, ſoit qu'ils s'appuyent eſtans conſtituez aux centres, ou aux circonferences.

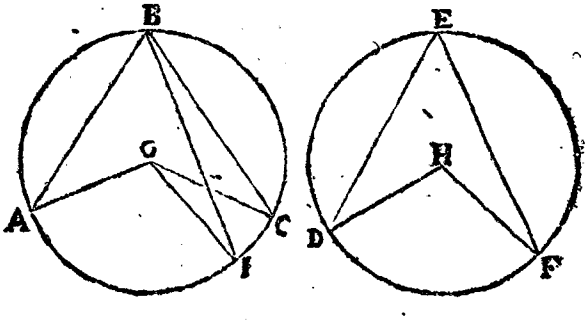
Soient les cercles egaux A B C & D E F, deſquels les centres ſont G & H, & à iceux ſoient conſtituez les angles egaux G, H: Item les angles B, E conſtituez aux circonferences, ſoient auſſi egaux. Ie dis que les circonferences A C & D F, ſur leſquelles iceux angles s'appuyent, ſont egales.

Car d'autant que les cercles ſont egaux, les lignes tirees du centre à la circonference ſeront egales par la 1. def. de ce liure. Parquoy ayant tiré les deux lignes droictes A C, D F, les deux triangles A G C & D H F, auront deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle G egal à l'angle H: & par la 4. prop. 1. la baſe A C ſera egale à la baſe D F. Pareillement l'angle B eſtant egal à l'angle E, la portion A B C ſera ſemblable à la portion D E F, par la 10. def. de ce liu. & par la 24. prop. elles ſeront egales; & qui de cercles egaux oſte portions egales, ſçauoir A B C & D E F, le demeurant A C ſera egal au demeurant D F: ainſi les angles egaux s'appuyeront deſſus circonferences egales A C, D F. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Que ſi les ſuſdits angles eſtoient inegaux, le plus grand s'appuyeroit ſur vn plus grand arc que le moindre: Car aux cercles egaux ABC, DEF, ſoit l'angle AGC au centre G, plus grand que l'angle DHF au centre H. Item l'angle ABC en la circonference, plus grand que l'angle DEF en la circonference. Ie dis que l'arc AC eſt plus grand que l'arc DF. Car ayant fait l'angle AGI egal à l'angle DHF, & l'angle ABI egal à l'angle DEF; par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, les arcs AI, DF ſeront egaux; & partant AC ſera plus grand que DF.



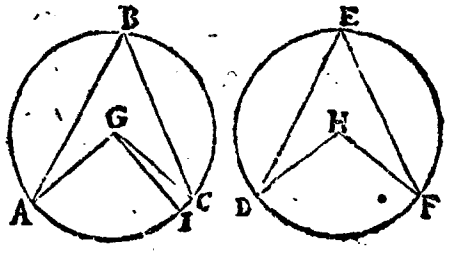
Or ce qu'Euclide dit des cercles egaux en ceſte propoſition, & aux trois prochaines ſuiuantes, ſe doit auſſi entendre d'vn meſme cercle; c'eſt à dire qu'en vn meſme cercle, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, &c. Car touſiours la meſme demonſtration qui ſe fera en deux ou pluſieurs cercles egaux, aura auſſi lieu en vn meſme cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ilss'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre : ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHF, seront egaux.

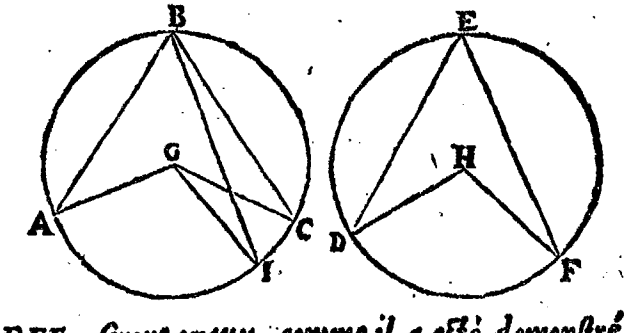
Autrement, l'vn d'iceux angles sera plus grand que l'autre: Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, & par la 23. pr. 1. sur AG soit fait l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales; ce qui est contre nostre hypothese; car nous auons posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales, contre la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal: ce qui estoit proposé.



Or l'egalité des angles du centre estant prouuee, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. proposition de ce liure. Donc aux cercles egaux les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si les arcs estoient inegaux, l'angle insistant sur le plus grand arc seroit plus grand que celuy du moindre. Comme en la figure du scholie precedent, soit l'arc AC plus grand que l'arc DF : Ie dis que l'angle AGC est plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC, plus grand que l'angle DEF. Car ayant faict l'arc AI egal à l'arc DF, & tiré les lignes droictes GI, BI; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront egaux, comme il a esté demonstré cy dessus : & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

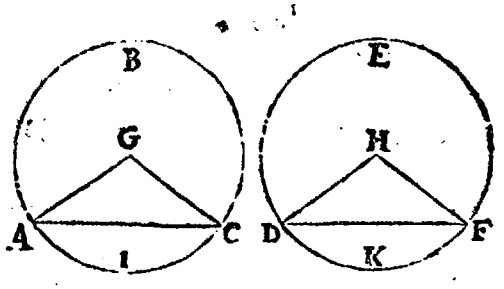


THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

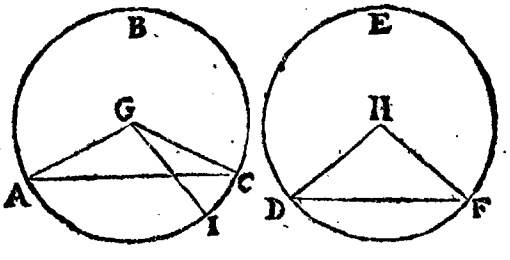
Soient deux cercles egaux A B C & D E F, deſquels les centres ſont G & H, & dans ces cercles ſoient deux lignes droictes egales AC & DF: Ie dis que les circonferences qu'elles couppent, ſont egales, ſçauoir la petite A I C à la petite D K F, & la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne ſoit ainſi; des centres G & H, ſoient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui ſeront egales par la 1. def. de ce liure, eſtans les cercles egaux; & la ligne droicte A C eſtant egale à la ligne droicte D F, les deux triangles A G C & D H F, auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien: & par la 8. pr. 1. l'angle G ſera egal à l'angle H, & par la 26. p. de ce liu. ils s'appuyeront deſſus circonferences egales AIC, DKF; & qui de cercles egaux oſte icelles circonferences egales, reſteront les circonferences ABC, DEF, auſſi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Que ſi les lignes droictes eſtoient inegales, la plus grande prendroit aux ſegmens mineurs vne plus grande circonference que la moindre: mais vne moindre aux ſegmens maieurs. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoit la ligne droicte AC, plus grande que la ligne droicte DF: Ie dis que la circonference AC moindre que le demy cercle, eſt plus grande que la circonference DF: & que la circonference ABC eſt moindre que la periphere DEF. Car eſtans tirees les lignes droictes AG, GC, DH & HF: les coſtez AG, GC du triangle AGC, ſeront egaux aux coſtez DH, HF du triangle DHF: & la baſe AC eſt poſee plus grande que la baſe DF: Donc l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy ſoit faict l'angle AGI egal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. p. 3. l'arc AI ſera egal à l'arc DF, & partant la circonference AIC ſera plus grande que la circonference DF, & conſequemment le reſte ABC ſera moindre que le reſte DEF.

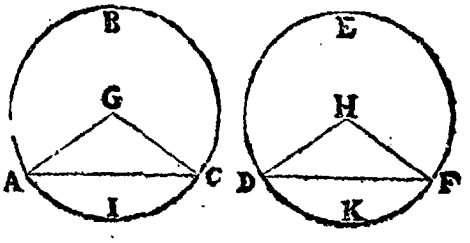


THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, souſtendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC & DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences ABC, DEF egales : item les circonferences AIC, DKF auſſi egales & ſouſtenduës des lignes droictes A C & D F. Ie dis qu'icelles lignes ſouſtendantes ſont egales.

Qu'ainſi ne ſoit ; des centres G & H ſoient menees les lignes droictes G A, G C, H D, H F Or d'autant que l'on poſe les circonferences A I C, D K F egales, les angles G & H qui s'appuyent deſſus icelles circonferences, ſeront egaux par la 27. pro. de ce liure : pareillement les coſtez G A & G C, eſtans egaux aux coſtez H D & H F par la 1. d. 3. la baſe A C ſera egale à la baſe D F par la 4. propoſ. 1. Donc aux cercles egaux les circonferences, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



SCHOLIE.

Mais ſi les circonferences eſtoient inegales, la plus grande ſeroit ſouſtendue d'vne plus grande ligne que la moindre, leſdites circonferences eſtans moindres que le demy cercle : Car ſi elles eſtoient plus grandes, la moindre d'icelles circonf. ſeroit ſouſtendue d'vne plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences AC, DF, chacune moindre que le demy cercle, & ſoit AC plus grande que D F, & partant ABC moindre que DEF : Ie dis que la ligne droicte AC eſt plus grande que la ligne droicte DF. Car eſtans tirees les lignes droictes AG, GC, DH, & HF, l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce liure ; & puis que les coſtez AG, GC, du triangle AGC ſont egaux aux coſtez DH, HF du triangle DHF, par la 24. prop. 1. la baſe AC ſera plus grande que la baſe DF.

Clauius, apres Commandin, demonſtre en ce lieu les quatre Theoremes ſuiuants.

1. Les cercles, deſquels les lignes droictes egales retranchent ſemblables circonferences, ſont egaux.

Soient deux cercles ABC, DEF, *deſquels les lignes droictes egales* A C, D F, *couppent ſemblables circonferences* A B C, D E F : *Ie dis qu'iceux cercles ſont egaux. Car ſi les ſegmens* ABC, DEF *ſont ſemblables, les ſegmens reſtans* AIC, DKF, *ſeront auſſi ſemblables, cõme nous auons demonſtré au Scholie de la 22. prop. de ce liure.* Derechef, *pour ce que ſur les lignes droittes egales* A C, D F, *ſont conſtituez les ſemblables ſegmens* A B C, D E F, *ils ſeront egaux par la 24. p. 3. Par meſme raiſon ſeront auſſi egaux les ſemblables ſegmens* AIC, DKF. *Donc les cercles entiers* A B C, D E F, *ſeront egaux : Ce qui eſtoit propoſé.*

2. Des cercles inegaux, les lignes droictes egales couppent circonferences diſſemblables.

En la meſme figure precedente les lignes droictes AC, DF *ſoient poſees egales, & les cercles* ABC, DEF, *inegaux. Ie dis que les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Car ſi elles eſtoient ſemblables, les cercles ſeroient egaux, comme nous auons demonſtré cy-deſſus, contre l'hypotheſe. Donc les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Par meſme raiſon les circonferences* AIC, DKF, *ſeront auſſi diſſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

3. Les lignes droictes, qui prennent circonferences ſemblables de cercles inegaux, ſont inegales.

En la meſme figure ſoient poſez les cercles inegaux, & les circonferences ABC, DEF *ſemblables: Ie dis que les lignes droictes* AC, DF *ſont inegales. Car ſi elles eſtoient egales, les cercles ſeroient egaux par le* 1. *Theor. cy-deſſus, contre l'hypoth. icelles lignes droictes* AC, DF, *ſont donc inegales.*

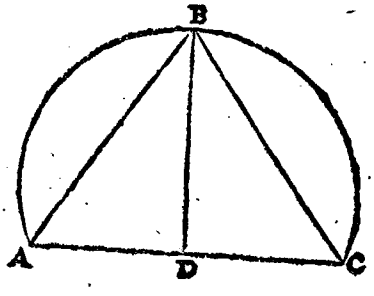
4. Les lignes droictes, qui de quelconques cercles prennent circonferences ſemblables & inegales, ſont inegales.

En la meſme figure, ſoient poſées les circonferences ABC, DEF *ſemblables & inegales. Ie dis que les lignes droictes* AC, DF *ſont inegales. Car les cercles ſont ou egaux, ou inegaux: Soient premierement egaux. Si donc les lignes droictes* AC, DF, *ſont dictes egales, par la* 28. *prop.* 3. *les circonferences* ABC, DEF, *ſeront egales: ce qui eſt contre l'hypoth. Icelles lignes droictes* AC, DF, *ne ſont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droictes* AC, DF, *eſtans les circonferences* ABC, DEF, *ſemblables, ſeront inegales, comme il a eſté demonſtré au precedent Theor. En la meſme maniere nous demonſtrerons les lignes droictes* AC, DF *eſtre inegales, ſi les circonferences* AIC, DKF, *ſont poſees ſemblables & inegales.*

PROB. 4. PROP. XXX.

Coupper vne circonference donnée en deux egalement.

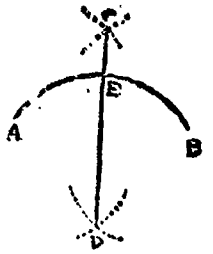
Soit la circonference donnée ABC, laquelle il faut couper en deux egalement.



Soit menee la ligne droicte AC, laquelle ſoit couppee en deux egalement au poinct D, duquel poinct ſoit eſleuee la perpendiculaire DB par la 11. prop. 1. qui rencontre la circonference en B. Ie dis que la circonference ABC eſt couppee en deux également en B.

Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menees les lignes droictes AB & BC. D'autant que les deux coſtez AD & DB du triangle ADB, ſont egaux aux deux coſtez CD & DB du triangle CDB, chacun au ſien, & les deux angles au poinct D egaux: par la 4. p. 1. la baſe AB ſera egale à la baſe BC, & par la 28. prop. de ce liure les circonferences AB & BC ſeront egales. Nous auons donc couppé la circonference donnee en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

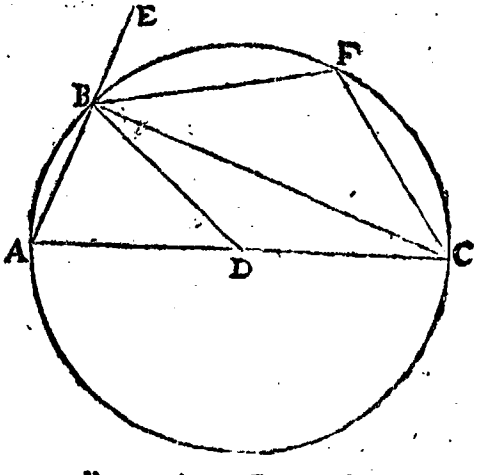


La practique de ceſte propoſition eſt fort aiſee, car il n'y a qu'à deſcrire deux arcs de cercles de chaque extremité de la circonferenee donnée A & B, qui s'entrecouppent és poincts C & D, deſquels poincts eſtant menee vne ligne droicte CD, elle couppera la circonference donnée A B en deux egalement au poinct E.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui eſt au demy cercle eſt droict: & celuy qui eſt en la plus grande portion, eſt plus petit qu'vn droict; mais celuy qui eſt en la plus petite, eſt plus grand qu'vn droict. Et d'auantage, l'angle de la plus grande portion, eſt plus grand qu'vn droict: mais l'angle de la plus petite portion eſt moindre qu'vn droict.

Au cercle ABC, duquel D eſt le centre, & AC le diametre, ſoit conſtitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC; & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC: mais en la moindre portion BFC, l'angle C F B. Ie dis en premier lieu que l'angle A B C au demy cercle, eſt droict.



Car apres auoir mené la ligne BD, & continué AB iuſques en E: il eſt euident que les triangles ABD & CBD ſont Iſoſceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles ſur la baſe égaux, ſçauoir B A D à ABD, & CBD à BCD: & partant les deux enſemble A B D, C B D, ſeront egaux aux deux enſemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE eſt egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au poinct B, faiſant le ſeul ABC, ſeront auſſi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE, ſeront deux droicts.

Ie dis en ſecond lieu, que l'angle BAC, qui eſt en la plus grande portion C A B, eſt plus petit qu'vn droict: ce qui eſt aiſé à prouuer par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC, l'angle ABC, eſtant droict, les deux autres enſemble ne vaudront qu'vn droict: & partant le ſeul angle B A C eſt plus petit qu'vn angle droict, & ainſi des autres.

Ie dis tiercement, que l'angle BFC, qui eſt en la petite portion CFB, eſt plus grand qu'vn droict: car par la 22. p. de ce liure la figure de quatre coſtez A B F C inſcrite au cercle, a les deux angles oppoſez A & F, egaux à deux droicts.

droicts. Mais nous auons prouué A eſtre plus petit qu'vn droict, par conſequent F ſera plus grand.

Ie dis en quatrieſme lieu, que l'angle de la plus grande portion, ſçauoir CBA, compris de la ligne droicte BC, & de la periphere BAC, eſt plus grand qu'vn angle droict: ce qui eſt euident; car l'angle droict rectiligne ABC n'eſt que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finalement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droicte BC & de la circonference BFC, c'eſt à dire l'angle mixte CBF eſt moindre qu'vn droict, car iceluy n'eſt que partie de l'angle droict CBE. Donc au cercle, l'angle qui eſt au demy cercle eſt droict, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ce que deſſus, eſt manifeſte qu'vn angle d'vn triangle eſtant egal aux deux autres, eſt droict.

SCHOLIE.

La conuerſe de cette prop. eſt manifeſtement vraye, c'eſt à ſçauoir, que

Le ſegment de cercle, auquel eſt conſtitué vnangle droict, eſt demy cercle; & celuy auquel eſt vn angle aigu, eſt ſegment maieur: mais celuy auquel eſt vn angle obtus, eſt ſegment mineur: Et le ſegment duquel l'angle eſt plus grand qu'vn droict eſt plus grand que le demy cercle; mais celuy duquel l'angle eſt moindre que le droict, eſt ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

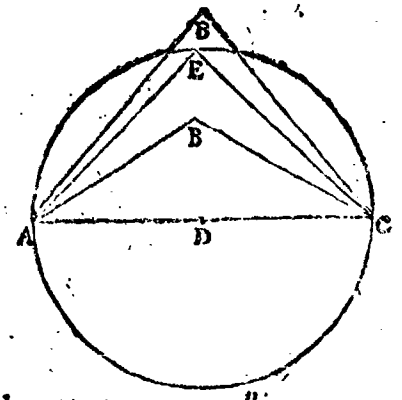
Car l'angle eſtant droict, ſi le ſegment n'eſt pas vn demy cercle, il ſera ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu; ou moindre, & ainſi l'angle ſera obtus: contre l'hypotheſe. Derechef, l'angle eſtant aigu, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droict: ou moindre que le demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera obtus: Ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Finalement, l'angle eſtant obtus, ſi le ſegment n'eſt moindre que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droict; ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu: Ce qui eſt ſemblablement contre l'hypotheſe. Dauantage, quand l'angle du ſegment eſt plus grand qu'vn droict, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle, & ainſi l'angle d'iceluy ſera moindre qu'vn droict, contre la poſition. Et quand l'angle du ſegment eſt moindre qu'vn droict, ſi le ſegment n'eſt pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il ſera plus grand, & par ainſi l'angle d'iceluy ſera pareillement plus grand que le droict: Ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Clauius demonſtre en ce lieu le theoreme ſuiuant.

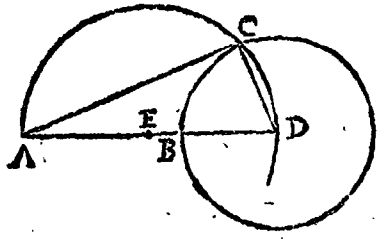
Si le coſté oppoſé a l'angle droict d'vn triangle rectangle eſt couppé en deux egalement, & du poinct de la ſection eſt deſcrit vn cercle de l'interualle de la moitié d'iceluy coſté; iceluy cercle paſſera par l'angle droict du triangle.

Au triangle rectangle ABC, le coſté AC oppoſé à l'angle droict B, ſoit couppé en deux egalement au poinct D, duquel & de l'interualle DA, ou DC, ſoit deſcrit le cercle AEC, lequel ie dis paſſer par B. Car s'il paſſoit au deſſus de B, ou au deſſoubs, eſtans

tirees les lignes droictes AE, CE, tellement qu'elles ne couppent les lignes droictes AB, BC, ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle AEC au demy cercle ſera droict par la 31. p. 3. & conſequemment les angles B & E ſeront egaux, eſtans droicts: ce qui eſt abſurde, veu que l'angle E par la 21. prop. 1. eſt neceſſairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B. Le cercle AEC paſſera donc par le poinct de l'angle droict B. Ce qui eſtoit propoſé.



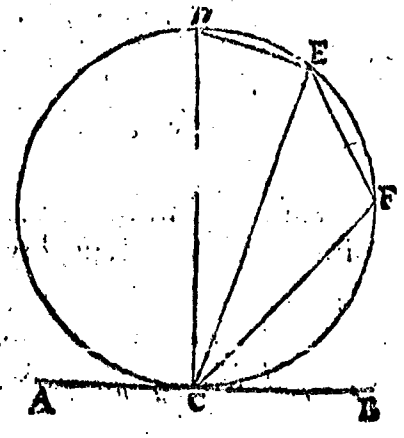
Or de la demonſtration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons vn facile moyen pour d'vn poinct donné hors vn cercle mener vne, ou deux lignes droictes qui touchent iceluy cercle, ce qui ſe fait ainſi. Soit donné le poinct A hors du cercle BC, le centre duquel eſt D: & il faut mener de A vne ligne droicte, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne AD, ſoit couppee icelle en deux egalement en E par la 10. p. 1. & de E comme centre, & de l'interualle EA ſoit deſcrit vn cercle ACD qui couppe le donné en C, auquel poinct C ſoit menee la ligne droicte AC, & icelle touchera le cercle donné en C. Car eſtant tiree la ligne droicte CD, l'angle ACD au demy cercle ſera droict par ladite 31. pr. 3. & partant la ligne droicte AC, touchera le cercle BC en C par le Cor. de la 16. p. 3. Et ſi du meſme poinct A, on vouloit encore tirer vne autre ligne qui touche ſemblablement ledit cercle BC, il n'y auroit qu'à deſcrire le cercle entier ACD, & il couppperoit encore la circonference BC à vn autre poinct au deſſoubs de AD, &c.



THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine vne autre ligne droicte coupant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante ſont egaux à ceux qui ſont aux ſegmens alternes du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct C, & d'iceluy poinct ſoit menee la ligne droicte CE, couppant le cercle en deux portions CDE, CFE. Ie dis que l'angle ECB, eſt egal à tout angle qui peut eſtre fait en la portion alterne CDE, & que l'angle ECA eſt auſſi egal à tout angle qui peut eſtre fait en la portion alrerne CFE.



Qu'il ne ſoit ainſi, apres auoir mené par le centre le diametre CD, ſoient menees les lignes droictes DE, EF, FC. Maintenant par la prop. precedente l'angle DEC dans le demy cercle eſt droict, & par la 32. p. 1. les deux autres D &

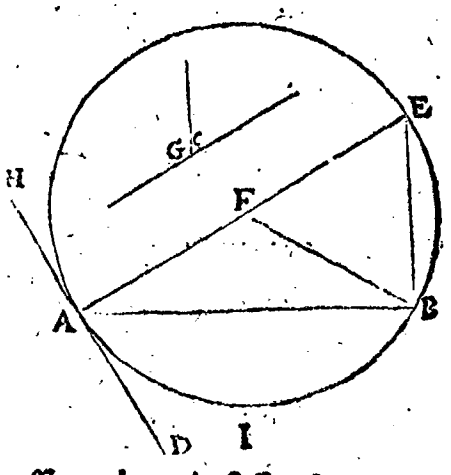
ECD ſont egaux à vn droict, c'eſt à dire à DCB, lequel eſt droict par la 18. prop. de ce liure, deſquels ſi on oſte l'angle commun ECD, le demeurant ECB ſera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre coſtez inſcrite au cercle CFED, aura les angles oppoſez F & D, egaux à deux droicts: c'eſt à dire aux deux ECA, ECB, deſquels ſi on oſte choſes egales, c'eſt à ſçauoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA ſeront egaux.

Que ſi la ligne couppant le cercle eſtoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui ſe feroient tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle, ſeroient droicts par la prop. prec. & partant appert ce qui eſt propoſé. Si donc quelque ligne droicte touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Deſſus vne ligne droicte donnée, deſcrire vne portion de cercle capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C: il faut ſur icelle ligne deſcrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.



Soit conſtruit ſur icelle ligne AB. & à l'extremité A, l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. prop. 1. & au poinct A ſoit leuee AE perpendiculaire à AD; puis ſur la ligne AB, & au poinct B, ſoit faict l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF iuſques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au poinct F: donc par la 6. p. 1. les coſtez FA, FB, ſeront egaux: Partant le cercle deſcrit du centre F & de l'interuale FA, paſſera auſſi par le poinct B; & apres auoir mené la ligne droicte BE, ie dis que l'angle E, qui eſt en la portion AEB eſt egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droicte AE paſſe par le centre F, & qu'à icelle AE, la ligne DA eſt perpendiculaire; par le Corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A. Par quoy par la preced. prop. l'angle BAD, qui par la conſtruction eſt egal à l'angle C, ſera egal à l'angle E, deſcrit dans la portion alterne AEB; par conſequent iceluy angle E ſera egal à l'angle C: Nous auons donc deſcrit vne portion de cercle ſur la ligne donnee AB, capable d'vn angle egal à vn angle donné C.

Que ſi l'angle donné euſt eſté obtus, comme G, il euſt fallu conſtruire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme deſſus, pour deſcrire le cercle AEBI, & par la prop. precedente la portion mineure AIB euſt compris vn angle egal à l'angle donné G.

Que ſi l'angle donné euſt eſté droict, il n'euſt fallu que deſcrire vn demy

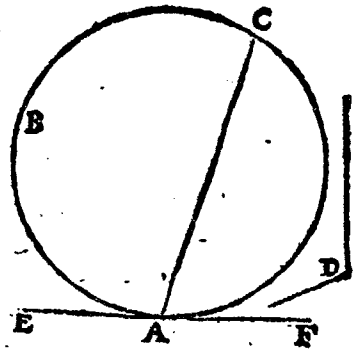
cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle faict au demy cercle est droict par la 31. p. 3. Or nous auons donc construit sur la ligne donnée AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 6. PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne portion capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC; duquel il faut oster vne portion capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

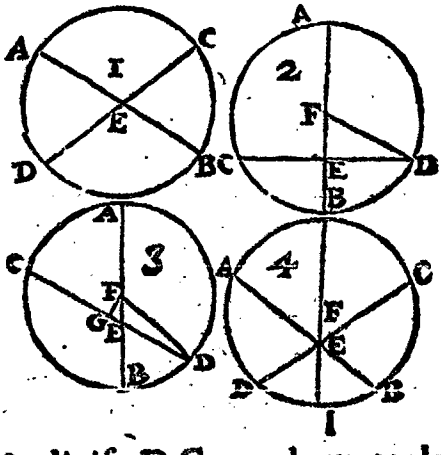
Soit menee la ligne droicte EF touchant le cercle en A: puis par la 23. prop. 1. soit faict sur icelle ligne, & au poinct A, l'angle rectilgne FAC egal au donné D, faisant que la ligne droicte AC couppe le cercle en deux portions. Ie dis que tout angle qui sera fait en la portion alterne ABC sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. pr. de ce liure, lequel est egal à D par la construction. Nous auons donc du cercle donné ABC couppé vne portion &c. Ce qu'il falloit faire.



THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle, deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre; le rectangle contenu des deux parties de l'vne, est egal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entrecoupans en E. Ie dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est egal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.



Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & diuise DC en deux egalement, comme en la seconde figure, elle la diuisera aussi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD, il est euident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est couppee en deux egalement au poinct F,

& en deux inegalement en E) & pa la 47. prop. 1. le quarré de FD eſtant egal aux deux quarrez de FE & ED, en oſtant le quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, ſe trouuera egal au quarré de ED, c'eſt à dire au rectangle de CE & ED, puis que CD eſt couppee en deux egalement en E.

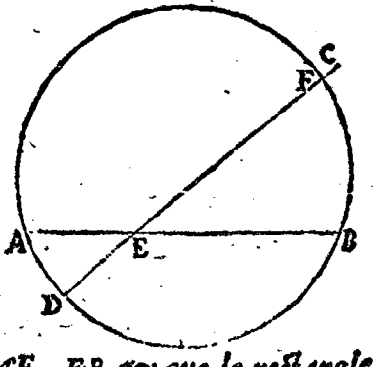
Que ſi la ligne AB paſſant par le centre F (comme en la troiſieſme figure) diuiſe inegalement CD, ne paſſant point par le centre, il s'enſuiura la meſme choſe. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD: pourautant que AB eſt couppee en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, auec le quarré de EF, ſera egal au quarré de FB, ou de ſon egale FD par la 5. prop 2. Mais le quarré de FE eſt egal aux deux de FG & GE par la 47 pr. 1. Pareillement le quarré de FD, eſt egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. 1. Dohc auſſi le rectangle de AE & EB, auec les deux quarrez de FG & G E, ſera egal aux deux quarrez de FG & GD: & partant en oſtant le quarré commun de FG, le demeurant quarré de GD, ſera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le meſme quarré de GD eſt auſſi egal au rectangle de CE & ED, auec le quarré de GE; par la 5. prop. 2. puis que CD eſt couppee en deux egalement en G, par la perpend. FG & en deux inegalement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED auec le quarré de GE ſera egal au rectangle de AE & EB auec le quarré de GE: en oſtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, ſe trouuera egal au rectangle de CE & ED.

Que ſi ny l'vne ny l'autre des deux lignes ne paſſe par le centre F, (comme en la 4. figure) il s'enſuiura le meſme: car ſi on meine le diametre HI, paſſant par le poinct commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, ſera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-deſſus a eſté dit; & par meſme raiſon il ſera auſſi egal au rectangle de AE & EB; & par la 1. com. ſent. les deux rectangles de AE, EB; item de CE, ED, ſeront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons cette 35. prop. ainſi.

Si deux lignes droictes s'entrecouppent, tellement que le rectangle compris des ſegmens de l'vne ſoit egal au rectangle contenu ſous les ſegmens de l'autre, le cercle deſcrit par trois des poincts extremes d'icelles lignes quels qu'ils ſoient, paſſera auſſi par le 4. poinct.



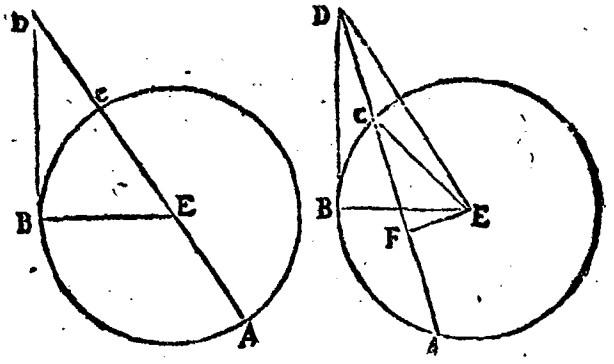
Que les lignes droictes AB, CD s'entrecouppent en E, & que le rectangle compris ſous AE, EB ſoit egal au rectangle compris des parties CE, ED. Ie dis que les quatre poincts A, D, B, C, tombent en la circonference d'vn cercle, c'eſt à dire qu'eſtant deſcrit vn cercle paſſant par les trois poincts A, D, B, il paſſera neceſſairement par l'autre poinct C. Car s'il n'y paſſe, il paſſera, ou au delà de C, ou au deçà, comme par le poinct F. D'autant que par la 35. prop. 3. le rectangle compris ſous FE, ED eſt egal au rectangle compris de AE, EB, & que le rectangle contenu ſous CE, ED eſt auſſi poſé egal au meſme rectangle de AE, EB; les rectan-

gles compris sous CE, ED, & sous FE, ED, seront egaux, la partie au tout : ce qui est absurde. Par mesme raison le cercle ne passera pas au delà du poinct C. Donc le cercle descrit par les trois poincts A, D, B, passera par le quatriesme poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la couppante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, duquel soit menee la ligne DA, coupant le cercle en C, & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Ie dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD, prise entre le poinct donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.



Premierement que la ligne AD, passe par le cente E, comme en la premiere figure, & d'iceluy centre E au poinct d'attouchement B, soit menee la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce liure sera perpendiculaire à icelle touchante BD: & pourautant que la ligne AC est couppee en deux egalement au poinct E, & à icelle est adiousteé directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD auec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de ED par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrer en ceste sorte : du centre E soient menees les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle couppera AC en deux egalement par la 3. prop. de ce liure. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, auec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on adiouste le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, auec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend

quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par ces choſes eſt manifeſte, que ſi d'vn poinct pris hors le cercle, ſont tirees pluſieurs lignes droictes, coupant le cercle ; les rectangles compris ſous chacune d'icelles & ſa partie exterieure, ſeront egaux entr'eux : pource que chacun de ces rectangles-là, ſera egal au quarré de la ligne touchante.

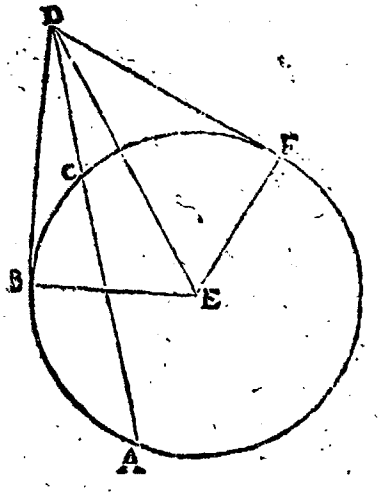
Appert auſſi que deux lignes droictes tirees d'vn meſme poinct, & touchant le cercle, ſont egales entr'elles : puis que le quarré de chacune d'icelles ſera egal au rectangle de la ligne tiree du meſme poinct, & couppant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

Eſt auſſi euident que d'vn meſme poinct pris hors le cercle, peuuent eſtre ſeulement tirees deux lignes droictes qui touchent le cercle : Car il faudroit qu'elles fuſſent toutes egales entr'elles : & partant du poinct D pourroient eſtre menees plus de deux lignes droictes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. prop. de ce troiſieſme liure.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne deſquelles couppe le cercle, & l'autre l'atteint : Si le rectangle compris de toute la couppante, & de la partie priſe entre le poinct & la circonference conuexe, eſt egal au quarré de celle qui atteint ; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC ſoit pris le poinct D, & d'iceluy ſoit menee la ligne droicte DA qui couppe le cercle au poinct C, & la ligne DB qui atteint le cercle au poinct B : & ſoit le rectangle de la toute AD & de la partie CD, egal au quarré de DB. Ie dis que DB touche le cercle en B.



Car du poinct D, eſtant menee la ligne DF touchant le cercle au poinct F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la propoſition precedente, le quarré de DF ſera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypotheſe le quarré de DB, eſt auſſi egal à iceluy rectangle : & partant les quarrez, & les lignes DF & BD, ſeront egales. Item EF & EB, ſont auſſi egales par la def. du cercle, & ED à ſoy-meſme : ainſi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien, les angles B & F, ſeront egaux par la 8. p. 1. & F eſtant droict par la 18. prop. de ce liure, auſſi B ſera droict ; & par le Cor. de la 16. prop 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy ſi dehors le cercle on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin du troiſieſme Element.

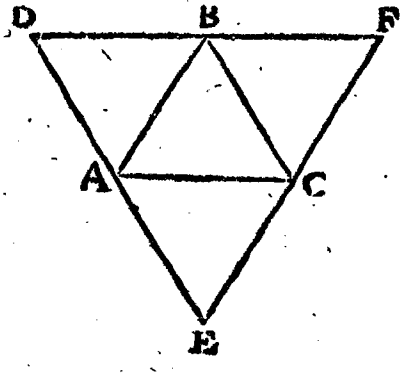
ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

VNe figure rectiligne ſe dict eſtre inſcrite en vne figure rectiligne, lors qu'vn chacun des angles de la figure inſcrite, touche vn chacun coſté de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

2. Semblablement auſſi vne figure ſe dict eſtre circonſcrite à vne figure, quand vn chacun coſté de la circonſcrite touche vn chacun angle de l'inſcrite.

Ainſi le triangle ABC, duquel chaque angle touche vn chacun coſté du triangle DEF eſt dit eſtre inſcrit en iceluy triangle DEF. Et au contraire, à cauſe que chaque coſté d'iceluy triangle DEF touche chaque angle du triangle ABC, il eſt dit eſtre circonſcrit à iceluy triangle ABC.

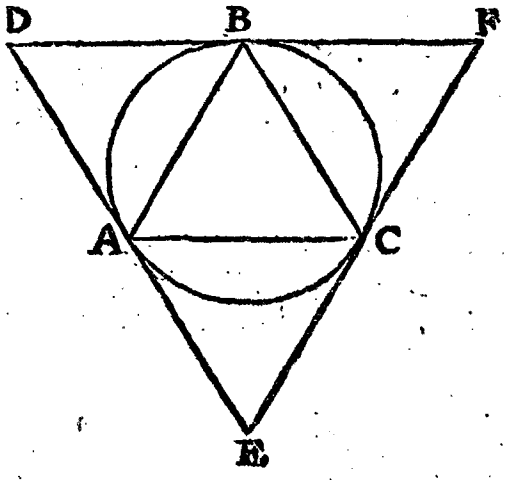


Il faut entendre le meſme des inſcriptions & circonſcriptions des autres figures rectilignes: & iaçoit qu'elles ſoient proprement dites eſtre inſcrites, ou circonſcrites quand le nombre des coſtés de l'inſcrite eſt egal au nombre des coſtez de la circonſcrite, & le nombre des angles auſſi egal: ſi eſt-ce toutesfois qu'il n'eſt pas du tout neceſſaire, veu que pluſieurs Geometres ont enſeigné à inſcrire vn quarré, vn pentagone, &c. dedans vn triangle, &c.

3. Mais vne figure rectiligne ſe dit eſtre inſcrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inſcrite, touche la circonference du cercle.

4. Et vne figure rectiligne ſe dit eſtre circonſcrite au cercle, quand vn chacun des coſtez de la figure circonſcrite, touche la circonference du cercle.

Ainſi le triangle ABC ſera dit eſtre inſcrit au cercle ABC, à cauſe que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF ſera dit eſtre circonſcrit au cercle ABC, pource que chaque coſté d'iceluy triangle DEF touche la circonference dudit cercle ez poincts ABC.



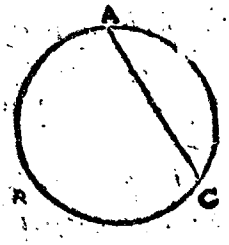
5. Semblablement auſſi le cercle ſe dit eſtre inſcrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inſcrit.

6. Mais le cercle ſe dit eſtre circonſcrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC eſt dit eſtre inſcrit au triangle DEF, à cauſe qu'il touche chaque coſté d'iceluy triangle és poincts A, B, C: mais le meſme cercle ABC eſt dit eſtre circonſcrit au triangle ABC, pour ce qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.

7. Vne ligne droicte ſe dit eſtre accommodee au cercle, quand les extremitez d'icelle ſont en la circonference du cercle.

Ainſi la ligne droicte AC ſera dicte eſtre accommodee au cercle ABC, à cauſe que les extremitez d'icelle ligne AC ſont en la circonference dudit cercle.



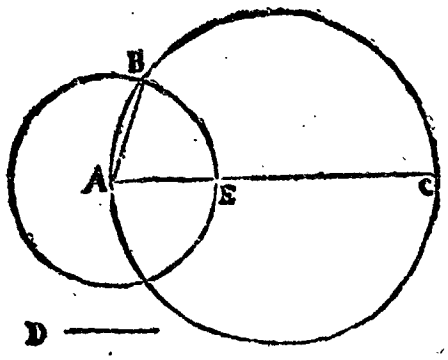
PROBL. 1. PROP. 1.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à

vne ligne droicte donnee, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnee D, qui n'eſt pas plus grande que le diametre d'iceluy cercle.

Soit mené le diametre AC, & ſi la ligne donnee eſt egale à iceluy diametre, on aura accommodé au cercle ABC la ligne AC egale à la donnee D. Mais ſi D eſt moindre que le diametre AC, d'iceluy ſoit retranchee la partie AE egale à ladite ligne D. En apres du centre A, & de l'interuale AE ſoit deſcrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & ſoit menee la ligne droicte AB: icelle ſera accommodee au cercle, & egale à D.



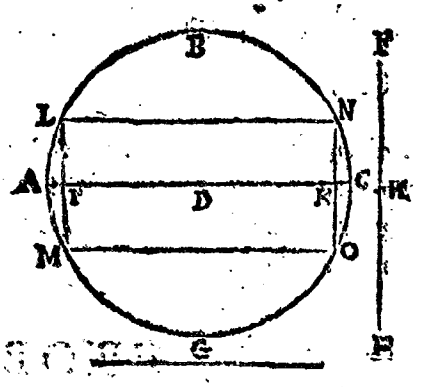
Car les extremitez d'icelle AB ſont en la circonference du cercle ABC, eſtant menee de l'extremité du diametre A au poinct de l'interſection B. Mais par la def. du cercle les lignes droictes AB & AE ſont egales, & par la conſtruction, icelle AE eſt egale à D: donc par la 1. com. ſent. AB & D ſeront egales entr'elles. Nous auons donc accommodé au cercle donné vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Commandin adiouſte en cet endroit le probl. ſuiuant

En vn cercle donné accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, qui ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle, & parallele à vne autre ligne droicte donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre eſt D, auquel il faut accommoder vne ligne droicte egale à vne donnee EF, qui n'eſt pas plus grande que le diametre du cercle, & laquelle ſoit parallele à la ligne droicte donnee G. Par le centre D ſoit tiré le diametre ADC parallele à la ligne donnee G. Que ſi EF eſt egale au diametre AC, ſera fait ce qui eſtoit requis: Mais ſi elle n'eſt egale à iceluy diametre, ſoit icelle couppee en deux egalement au poinct H, & ſoit priſe DI egale à EH, & DK egale à HF, afin que la toute IK ſoit egale à la toute EF: puis par les poinctes I, K, ſoient tirees à angles droicts LM, NO, & ſoit ioinct MO: Icelle MO accommodee au cercle ſera egale à EF, & parallele à G. Car puis que LM, NO, ſont egalement diſtantes du centre D, elles ſeront egales entr'elles par la 14. p. 3. & par la 3 prop. 3. elles ſeront couppees en deux egalement en I & K, eſtans couppees à angles droicts par le diametre AC; & partant IM, KO ſont egales entr'elles; & pource qu'elles

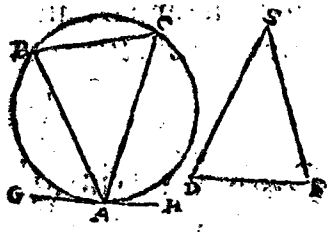


ſont auſſi paralleles par la 28. p. 1. ſemblablement IK, MO ſeront egales & paralleles par la 33. p. 1. Parquoy veu que IK eſt egale à EF & parallele à G, auſſi MO ſera egale à icelle EF, & parallele à G par la 30. p. 1. Par meſme raiſon, ſi on tire LN, elle ſera egale à EF, & parallele à G. Donc au cercle ABC, eſt accommodee la ligne droicte MO, ou LN, egale à EF & parallele à G. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné, inſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inſcrire vn triangle equiangle au donné DSF.



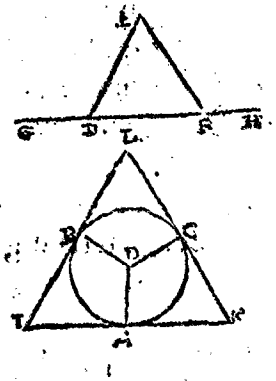
Soit menee la ligne droicte GH, qui touche le cercle au poinct A, auquel poinct ſoient faicts les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, iuſques à ce qu'elles rencontrent la circonference en B & C: puis ſoit menee BC. Ie dis que le triangle inſcrit ABC eſt equiangle au donné DSF.

Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le couppe en deux portions, l'angle C en la portion BCA ſera egal à l'angle de l'attouchement GAB, & par conſequent à l'angle D ſon egal par la 32. p. 3. & par la meſme raiſon, la ligne AC couppant le cercle, l'angle B ſera auſſi egal à l'angle E, & par la 32. p. 1. le troiſieſme angle A ſera auſſi egal à l'angle S: & par conſequent les triangles DSF, BAC ſeront equiangles. Au cercle donné nous auons donc deſcrit vn triangle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

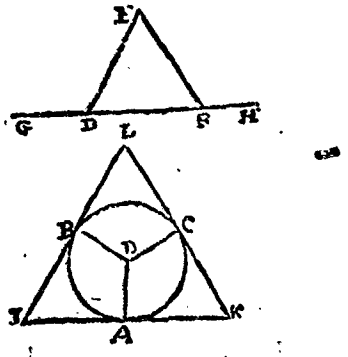
Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.



Soit prolongé le coſté DF de part & d'autre iuſques en G & H, & du centre D ſoit menee comme on voudra la ligne DA, ſur laquelle & au poinct D, ſoient conſtruits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, ſoient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, leſquelles toucheront le cercle és poincts A, B, C, par le Coroll. de la 16. p. 3. & icelles ſe rencontrans aux trois poincts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis eſtre le triangle demandé.

Car il appert deſia qu'il eſt circonſcrit au cercle; puis que tous les coſtez

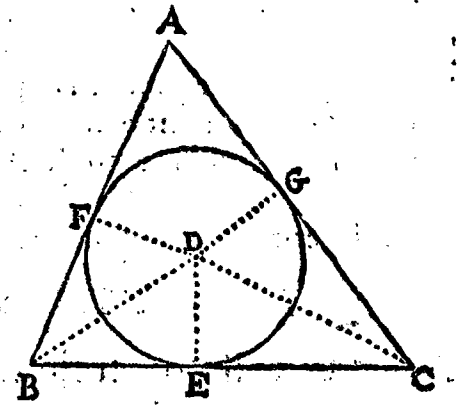
d'iceluy le touchent és poincts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts comme nous auons demonstré à la 32. p. 1.) le trapeze A D B I aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. pr. 1. & par la construction ADB est egal à GDE: donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisiesme L sera egal au troisiesme E: ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF: Parquoy nous auons fait ce qui estoit requis.



PROB. 4. PROP. IV.

Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn cercle. Par la 9. pr. 1. les deux angles B & C soient couppez en deux egalement par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au poinct D: Item d'iceluy poinct de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & du centre D, & interualle DE soit descrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné A B C.



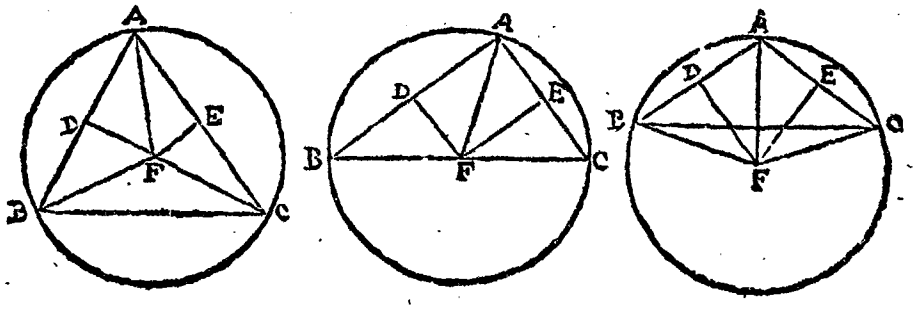
Car d'autant que l'angle DEB est droict, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillement droict, & le total B estant couppé en deux egalement, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egale à DE, & par la 1. com. sent. les trois lignes D E, DF, DG, seront egales entr'elles: ainsi le cercle EFG descrit de l'interualle DE, le sera aussi de l'interualle des deux autres: & partant il passera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Cor. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement les deux costez AB & AC aux poincts D & E par la 10. p. 1. & par la 11. pr. 1. d'iceux poincts D & E, soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au poinct F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle: & apres auoir mené les trois



lignes FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les costez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au poinct D egaux pour estre droicts: donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi egales: & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales entr'elles: & partant le cercle descrit de F, & de l'interuale FA, passera aussi par les poincts B & C. Nous auons donc descrit vn cercle à l'entour du triangle donné ABC: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus: car ils sont tous en vne grande portion de cercle: mais s'il tombe en l'vn des costez, l'angle opposé à iceluy sera droict, attendu qu'il sera au demy cercle: si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est euident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy: mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict: & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

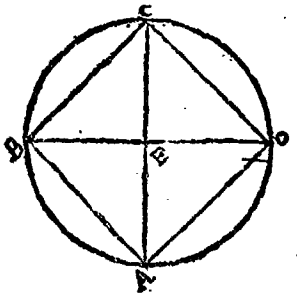
On peut aussi colliger de ce Probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droicte: car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel il faudra descrire vn cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Cecy se practique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie practique, Probl. 21.

PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres A C & B D se couppans au centre E en angles droicts, & soient menees les quatre lignes droictes AB, BC, DC & DA. Ie dis que le quadrilatere A B C D est vn quarré inscrit au cercle donné.



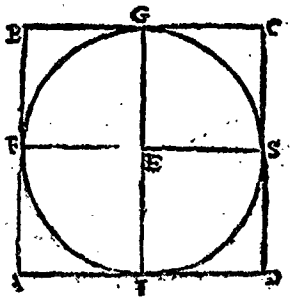
Car d'autant que les quatre angles au poinct E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs ausquels ils insistent seront egaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droictes qui soustendent iceux arcs seront aussi egales par la 29. p. 3 donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront egaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droicts, chcun d'iceux estant au demy cercle: donc le quadrilatere ABCD est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'vn cercle donné descrire vn quarré.

Soit le cercle donné FGSI à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres FS & GI se coupans à angles droicts au centre E, & par la 31. p. 1. des poincts G & I, soient menees les deux lig. B C, AD paralleles au diametre FS: Item par les poincts F & S; soient aussi menees les deux lignes AB, D C paralleles à G I: & icelles quatre lignes paralleles se rencontrans aux poincts A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est euident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre costez seront egaux, chacun d'iceux estant egal à l'vn des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34. prop. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinct E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du poinct E estant droict, aussi chacun des quatre A, B, C, D, sera droict; & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'vn cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, (en la fig. prec.) dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement les quatre costez du quarré aux poincts F, G, S, I ; & apres auoir mené les deux lignes F S & G I s'entrecouppans au poinct E, d'iceluy poinct E, & de l'interualle EF, soit descrit vn cercle FGSI, lequel sera le demandé.

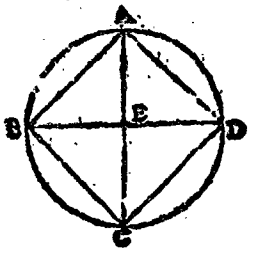
Car d'autant que AD, BC sont egales & paralleles, leurs moitiez AI, BG seront aussi egales & paralleles, & par la 33. prop. 1. A B sera egale & parallele à IG. Semblablement C D sera egale & parallele à la mesme I G: & par mesmes raisons on demonstrera que AD, B C sont egales & paralleles à FS. Donc le quarré donné sera aussi diuisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez esgaux: ainsi AF & IE seront egaux; Item FE & AI; FB & EG; ID & ES: mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egales entr'elles; partant E F, E G, E S, E I, seront aussi egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du poinct E, & de l'interuale de l'vne d'icelles, comme EF, passera aussi par les poincts G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auons donc descrit vn cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il failloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient menees les deux diagonales A C & B D, s'entrecoupans au poinct E: puis du centre E, & de l'interuale EA, soit descrit le cerle ADCB. Ie dis qu'il sera le demandé, c'est a dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné ABCD.

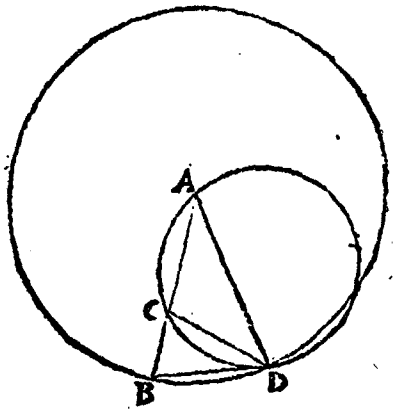


Car le costé A B estant egal au costé AD, le triangle BAD sera Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB, sur la base BD seront egaux, & chacun demy droict par la 32. prop. 1. estant l'angle BAD droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstrerons que tous les autres angles des poincts A, B, C, D, seront aussi demy droicts: & partant egaux entr'eux: ainsi au triangle AED les deux angles E AD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droictes E A, ED, aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours E D sera egale à EC, & EC à EB; comme aussi E B à E A: & partant les quatre lignes droictes E A, ED, EC & EB, seront egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du centre E, & de l'interualle de l'vne d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné A B C D. Nous auons donc d'escrit vn cercle à l'entour d'vn quarré donné: ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Isoscelle, ayant vn chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit priſe quelconque ligne droicte AB, laquelle par la 11.p. 2. ſoit couppée en C, en ſorte que le rectangle compris de AB, BC, ſoit egal au quarré de AC: puis du centre A, & de l'interualle AB ſoit deſcrit vn cercle, dans lequel ſoit accommodee la ligne droicte BD egale à AC: & apres ſoit menée la ligne AD. Ie dis que ABD eſt vn triangle Iſoſcelle ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainſi qu'il eſtoit requis.



Car en premier lieu, il appert aſſez qu'iceluy triangle ABD eſt Iſoſcelle, puis que les deux coſtez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD: & apres auoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, ſoit deſcrit le cercle ACD par la 5 p. 4. D'autant que par la conſtruction le rectangle de AB & BC eſt egal au quarré de CA, ou de ſon egale DB; par la 37. pr. 3. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB ſera egal à l'angle A, qui eſt au ſegment alterne CAD: & ſi à iceux angles on adiouſte le commun ADC, les touts ſeront egaux; ſçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, eſt auſſi egal aux deux oppoſez interieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il ſera auſſi egal à l'angle ADB, ou à ABD, qui luy eſt egal par la 5. p. 1. puis que le triangle eſt Iſoſcele: & par la 6. p. 1. le triangle DCB ſera auſſi Iſoſcele, & le coſté CD egal à DB: partant auſſi egal à CA; & le triangle DCA eſtant Iſoſcele, il aura les deux angles ſur la baſe AD egaux par la 5. prop. 1. & l'angle exterieur DCB (qui eſt egal à tous les deux) ſera double du ſeul A; auſſi ſera ſon egal B, & partant auſſi ſon autre egal ADB. Nous auons donc conſtruict le triangle Iſoſcele ABD, ayant chacun des angles de deſſus la baſe BD double du troiſieſme: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle ABD, ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à cinq cinquieſmes de deux droicts: Il eſt euident que l'angle A eſt la cinquieſme partie de deux droicts, & chacun des autres B & D, les deux cinquieſmes parties: item A eſtre les deux quints d'vn droict; & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à dix quints d'vn droict.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit conſtruire vn triangle Iſoſcele, ayant vn chacun des angles de deſſus la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnee, nous l'auons enſeigné (apres Pappus & Clauius) en noſtre Geometrie practique Prob. 37. & Scholie du 126.

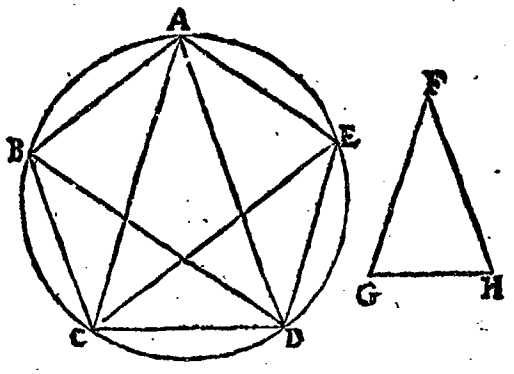
PROBL.

PROBL. II. PROP. XI.

Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Soit par la prec. prop. construit le triangle FGH Isoscelle, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F: puis au cercle donné soit inscrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH par la 2. p. 4. Et ayant couppé les angles ACD, ADC en deux egalement par les lignes droictes CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droictes CB, BA, AE, ED. Ie dis que le pentagone ABCDE inscrit au cercle donné, est equiangle & quilateral.



Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la base GH, double du troisiesme F; le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiéme A, lesquels estans couppez en deux egalement par les lignes droictes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE seront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour basses: mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB, BC, CD, DE & EA, estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi est-il manifeste par la 27. prop. 3. qu'il est equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy est soustenu de circonferences egales, sçauoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLARE.

De cecy il s'ensuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquiesmes parties de deux droicts, ou bien les 6 quints d'vn droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27. prop. 3, & CAD est le quint de deux droicts, ou les deux quints d'vn droict; le total BAE, qui est composé de ces trois, sera les trois quints de deux angles droicts, ou bien les six quints d'vn droict.

SCHOLIE.

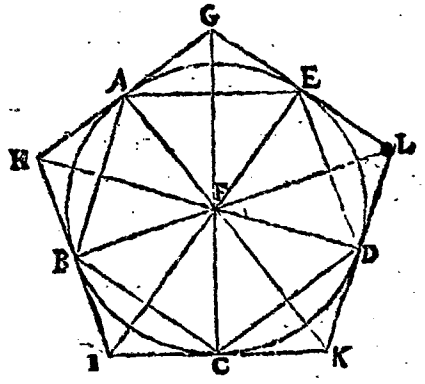
Clauius enseigne en ce lieu-cy deux manieres pour descrire vn pentagone equilateral, & equiangle sur vne ligne droicte donnee & terminee, la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie practique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 12. PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn Pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn pentagone equileteral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit descrit le pentagone ABCDE par la prec. prop. & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menees sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop. 1. se rencontrans aux cinq poincts G, H, I, K, L: (elles se doiuent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droicts, estans parties des angles droicts GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droictes AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Ie dis que GHIKL est le pentagone demandé.



Car il est euidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droictes GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és poincts A, B, C, D, E: En apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. prop. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarrez de FA, FE sont egaux (estans descrits sur lignes egales) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux; & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux: & partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bases) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouueront egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez egaux; & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

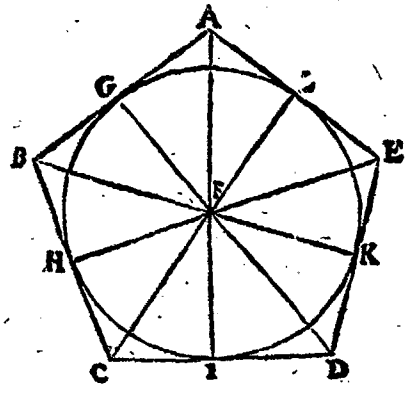
Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monstré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçauoir est, les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres:

donc les deux angles ſous le poinct G, ſeront egaux aux deux angles ſous le poinct H, & ainſi des autres: partant le pentagone ſera equiangle & equilateral. Nous auons donc deſcrit à l'entour d'vn cercle donné vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone donné equiangle, & equilateral, deſcrire vn cercle.

Soit donné vn pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inſcrire vn cercle.



Par la 9. prop. 1. ſoient couppez en deux egalement deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF ſe rencontrans au poinct F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy poinct F ſoient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires ſur les coſtez du pentagone; puis du centre F, & interuale FG ſoit deſcrit le cercle GHIKL. Ie dis qu'il eſt inſcrit au pentagone donné.

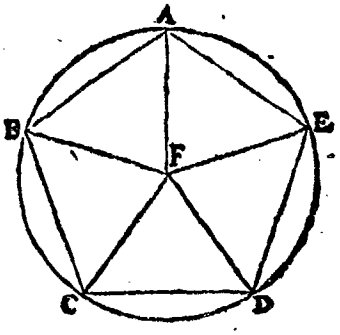
Car ayant mené les lignes droictes FC, FD & FE: dautant que les deux coſtez AB, BF, du triangle ABF ſont egaux aux deux coſtez CB, BF du triangle BFC, chacun au ſien, & les angles ABF, CBF, contenus d'iceux coſtez, egaux par la conſtruction; les baſes AF, CF ſeront egales, & les angles BAF, BCF auſſi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C ſont poſez egaux, & que par la conſtruction l'angle BAF eſt moitié de BAE; l'angle BCF ſera auſſi moytié de BCD, & conſequemment iceluy BCD, eſt diuiſé en deux egalement par la ligne FC. Par meſme raiſon nous monſtrerons que les deux autres angles du pentagone D & E, ſont diuiſés en deux egalement par les lignes FD & FE. Maintenant puiſque par la conſtruction les deux angles ſoubs le poinct A ſont egaux, ayant eſté le total coupé en deux egalement, & que l'angle droict G eſt egal à l'angle droict L, & le coſté FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres coſtez ſeront egaux, ſçauoir AG à AL, & FG à FL: par meſme diſcours FH, FI, FK, ſe trouueront egales: & partant le cercle deſcrit de F & interualle FG, paſſe par les poincts G, H, I, K, L, eſquels il touche les coſtez du pentagone propoſé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle GHIKL eſt donc inſcrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

A l'entour d'vn pentagone donné, lequel eſt equiangle, & equilateral, deſcrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut deſcrire vn cercle.

Soient couppez les deux angles A & B en deux egalement par la 9.p.1. auec les lignes droictes AF & BF se rencontrans au poinct F, & d'iceluy poinct F, & interuale de l'vne d'icelles deux lignes, soit descrit le cercle ABCDE. Ie dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.



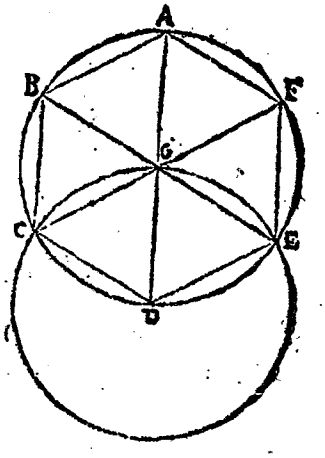
Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous demonstrerons comme au precedent Probl. qu'elles coupperont en deux egalement les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est couppé en deux egalement, au triangle AFB les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6.prop.1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux: par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, & ainsi des autres couppantes; & par la 1. com· sent. il est euident qu'icelles cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE seront egales entr'elles, & partant que le cercle descrit de l'interuale de l'vne d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous auons descrit vn cercle à l'entour d'vn pentag. equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G; dans lequel cercle il faut inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & interuale DG, soit descrit le cercle GCE couppant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menées les deux lignes CGF, EGB: finalement soient menées les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EF, FA; & on aura descrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que ie dis estre equilateral, & equiangle.



Car il est euident (demonstrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG constructs sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts; & puis que par la 15. p. 1. les deux angles CGE, EGF sont egaux à deux droicts, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droicts: donc tous les angles du poinct G seront egaux entr'eux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux: partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront, egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral: mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux

deux du poinct B, & ainsi des autres. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle; car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

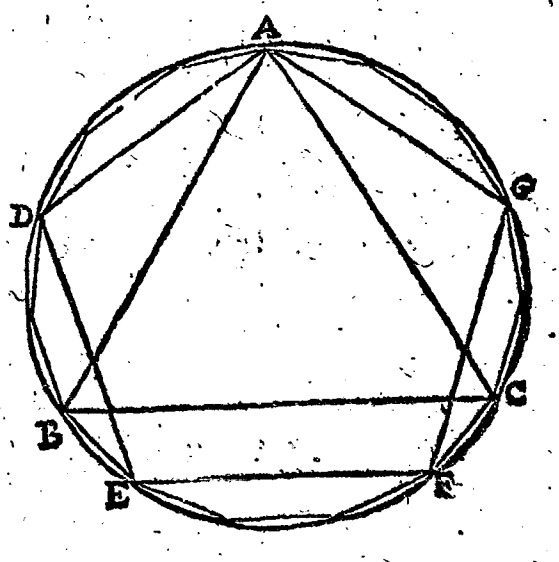
PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement descrit dans iceluy cercle le triangle equilateral ABC par la 2. p. de ce liure; les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisee en trois egalement par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en icelny cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce liure, ayant l'vn des angles au poinct A. Ie dis qu'ayant mené la ligne droicte BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de toute la circonference; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droicte AD, costé du pentagone, soustient l'arc AD, cinquiesme partie de la circonference: partant doit contenir trois costez du quindecagone: & consequemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq: donc l'arc BE sera la quinziesme partie de toute la circonference: & partant la ligne droicte BE sera le costé du quindecagone, & si par la 1. p. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelle BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, chacun d'iceux angles estant composé de 13 arcs egaux. Nous auons donc au cercle donné descrit vn quindecagone, &c. Ce qu'il falloit faire.



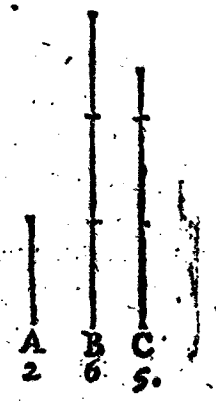
Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui le touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & dauantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suiuant la mesme methode practiquee au pentagone.

Fin du quatriesme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

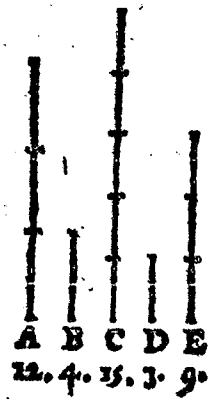
DEFINITIONS.

1. Partie, eſt vne grandeur tiree d'vne autre plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.



C'eſt à dire que lors qu'vne grandeur en meſure vne autre plus grande, elle eſt dicte partie d'icelle: Comme A qui eſt contenu 3 fois en B, eſt dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux ſortes de partie: car il y en a vne qui meſure ſon tout; comme A, lequel repeté 3 fois conſtitue ſon tout B: & l'autre ſorte ne meſure pas ſon tout: mais priſe ie ne ſçay combien de fois excede iceluy, ou deffaut au meſme, comme A lequel eſtant pris 3 fois excede C, mais eſtant pris ſeulement 2 fois, il eſt excedé par le meſme C: Or la premiere eſt dicte partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de ceſte là ſeulement parle icy Euclide, puis que ceſte-cy ne meſure ſon tout, & auſſi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

2. Multiplice, eſt vne grandeur plus grande qu'vne autre plus petite, quand la plus grande eſt meſuree de la plus petite.



C'eſt à dire que ſi la grandeur A eſt meſuree par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle eſt dicte multiplice de B: Ainſi auſſi la grandeur C, qui eſt meſuree 5. fois par D, eſt dicte multiplice d'icelle D.

Or quand deux petites grandeurs en meſurent egalement deux autres plus grandes, c'eſt à dire, qu'vne moindre eſt contenue autant de fois en vne plus grande, qu'vne autre moindre en vne autre plus grande, ces deux plus grandes là ſont dictes equimultiplices d'icelles moindres: comme les grandeurs A & E ſont dictes equimultiplices de B & D, pource que tout ainſi que A contient trois fois B, ainſi auſſi E contient trois fois D. Et le meſme ſe doit entendre, ſi pluſieurs moindres grandeurs en meſurent egalement pluſieurs grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparees l'vne à l'autre ſelon la quantité.

C'eſt à dire que quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaiſon eſt appellée raiſon, & par quelqu'vns proportion : Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raiſon d'vne ligne à vne ſuperficie; ou d'vn nombre à vne ligne, puis que ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne, ne ſont pas quantitez de meſme genre. Semblablement ſi on confere vne ligne auec vne ligne ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt blanche, & l'autre noire; ou bien que l'vne eſt chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'vne & l'autre ſoient de meſme genre, ceſte comparaiſon n'eſt pas dicte raiſon, pource qu'elle n'eſt pas faicte ſelon la quantité.

Or iaçoit que la raiſon ſe trouue proprement és ſeules quantitez, ſi eſt-ce toutesfois que toutes autres choſes, qui en quelque maniere prement la nature de la quantité, comme ſont les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuemens, les pois, & les puiſſances, ſont auſſi dictes auoir raiſon, ſi leur habitude eſt conſideree ſelon la quantité, comme quand nous diſons vn temps eſtre plus grand qu'vn autre temps, ou moindre; ou deux temps eſtre egaux, &c. telle habitude ſera dite raiſon, pource qu'alors les temps ſont conſiderez ainſi que certaines quantitez.

En toute raiſon ceſte quantité-là, qui eſt referee à vne autre, eſt dicte par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raiſon; & celle-là à laquelle elle eſt referee, eſt dicte conſequent d'icelle raiſon : Comme en la raiſon de A à B; A eſt dict antecedant de la raiſon, & B conſequent : Que ſi au contraire B eſt comparé à A; B ſera appellé antecedant, & A conſequent.

A——
B——

Or ceſte raiſon definie par Euclide, eſt diuiſee en raiſon rationelle, & irrationelle.

La rationelle, eſt celle qui ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon d'vne ligne de 10 pieds à vne autre de 5 pieds, laquelle eſt exhibee par ces nombres 10 & 5. Mais l'irrationelle, eſt ceſte raiſon-là qui ne ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon du diametre d'vn quarré au coſté d'iceluy, laquelle ne ſe peut trouuer ny exprimer en nombre : comme eſt demonſtré par Euclide, en la derniere prop. du 10. liure.

Autres diſent que la raiſon ou proportion rationelle, eſt celle qui a les deux quantitez commenſurables, c'eſt à dire, qui ont vne commune partie aliquote, ou bien qui ſont meſurees par vne meſme commune meſure : comme la raiſon d'vne ligne de 20 pieds à vne autre de 8 pieds : car vne ligne de 4 pieds ou de 2, eſt partie aliquote de l'vne & l'autre de ces deux-là, & par conſequent meſure icelles. Mais la raiſon ou proportion irrationelle, eſt celle (diſent-ils) qui a les deux quantitez incommenſurables, c'eſt à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou deſquelles on ne peut trouuer aucune commune meſure. Comme la raiſon du coſté d'vn quarré à ſa diagonalle, & de pluſieurs autres lignes dont eſt traicté au 10. liure.

Ceſte raiſon ſe diuiſe auſſi en raiſon d'egalité, & d'inegalité : La raiſon d'egalité, eſt quand deux quantitez egales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 10; vne ligne de 12 pieds à vne autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raiſon d'i-

negalité, eſt quand deux quantitez inegales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 4 eſt raiſon d'inegalité; telle eſt auſſi celle de 5 à 9; celle d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 15 pieds, &c.

Ceſte raiſon d'inegalité, eſt ſubdiuiſee en raiſon d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raiſon d'inegalité maieure, eſt quand la plus grande quantité eſt comparee à la moindre: comme la raiſon de 8 à 5, eſt dicte raiſon d'inegalité maieure: item la raiſon d'vne ligne de 10 pieds à vne de 4, &c. Mais la raiſon d'inegalité mineure, eſt quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raiſon de 7 pieds à 9, s'appelle raiſon de moindre inegaleté: item celle d'vne ligne de 9 pieds à vne autre de 12 pieds, &c.

La raiſon rationelle d'inegalité maieure, eſt diuiſee en cinq genres, ſçauoir raiſon multiple, ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiple ſuperparticuliere, & multiple ſuperpartiente: les trois premieres deſquelles ſont ſimples, & les deux dernieres compoſees d'icelles premieres.

La raiſon multiple, eſt quand l'antecedant d'icelle contient le conſequent pluſieurs fois precisément: & ceſte raiſon contient ſous ſoy diuerſes eſpeces. Car ſi l'antecedant contient le conſequent deux fois precisement, elle eſt ditte double: ſi trois fois, triple: ſi 4, quadruple: ſi dix, decuple, &c. Comme la raiſon de 20 à 4 eſt dicte quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le conſequent 4, cinq fois, & la raiſon d'vne ligne de 18 pieds à vne autre de 3 pieds, eſt dicte ſextuple, d'autant que 18 contient 3 ſix fois, & ainſi des autres.

La raiſon ſuperparticuliere, eſt quand l'antecedant contient le conſequent vne fois, & en outre vne partie aliquote d'icelluy conſequent: & ceſte raiſon a diuerſes eſpeces. Car ſi ceſte partie aliquote eſt moitié d'icelluy conſequent, eſt conſtituee vne raiſon ſeſquialtere, comme la raiſon de 3 à 2, en laquelle l'antecedant 3, contient le conſequent 2, vne fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelluy; ſi elle eſt tierce partie, ſeſquitierce: ſi vne quarte partie, ſeſquiquarte: ſi vne cinquieſme partie, ſeſquiquinte, &c. commençant touſiours le nom de ladite raiſon par ſeſqui, *& ſe terminant par le denominateur de la partie aliquote.*

La raiſon ſuperpartiente, eſt quand l'antecedant contient le conſequent vne fois, & en outre plus d'vne partie aliquote d'icelluy: & a auſſi ceſte raiſon pluſieurs eſpeces. Car ſi l'antecedant contient le conſequent vne fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelluy, eſt conſtituee vne raiſon ſuperbipartiente tierces, comme la raiſon de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, vne fois & $\frac{2}{3}$ d'icelluy: ſi $\frac{3}{4}$, ſera conſtituée vne raiſon ſupertripartiente quarte, comme la raiſon d'vne ligne de 63 pieds à vne de 36, & ainſi des autres; le nom d'icelles commençant touſiours par ſuper, *& prenant à ſon milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'icelluy.*

La raiſon multiple ſuperparticuliere, eſt quand l'antecedant contient le conſequent pluſieurs fois, & encore vne partie aliquote d'icelluy: ceſte-cy eſt compoſee de la premiere & de la deuxieſme: & tout ainſi que chacune d'icelles contient pluſieurs eſpeces, auſſi fait celle-cy. Car ſi l'antecedant contient le conſequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelluy, ceſte raiſon ſera appellee double ſeſquialtere, comme la raiſon de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2, deux fois & $\frac{1}{2}$ d'icelluy: ſi $\frac{1}{3}$, comme d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 3 pieds, ceſte raiſon s'appellera double ſeſquitierce: & la raiſon de 29 à 7 s'appellera quadruple ſeſquiſeptuple, d'autant qu'en 29, 7 eſt contenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'icelluy, & ainſi des autres.

La raiſon multiple ſuperpartiente, eſt quand l'antecedant contient le conſequent pluſieurs fois, & pluſieurs parties aliquotes d'iceluy: ceſte raiſon eſt compoſee de la premiere & troiſieſme; & tout ainſi que chacune d'icelles contient ſous ſoy pluſieurs eſpeces, auſſi faict ceſte-cy: comme ſi l'antecedant contient le conſequent, 2 fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, ceſte raiſon ſera appellee double ſuperbipartiente tierce, comme eſt la raiſon de 8 à 3: mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'icelluy, elle s'appellera triple ſuperpartiente quarte, comme eſt la raiſon de 15 à 4: s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{6}{7}$ d'icelluy, elle ſera dicte quadruple ſuperſextupartiente ſeptuple, comme eſt la raiſon de 34 à 7, & ainſi des autres.

Or tout ce qui a eſté dit cy-deſſus des cinq eſpeces de raiſon rationelle d'inegalité maieure, ſe doit auſſi entendre des cinq eſpeces de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut touſiours apposer ceſte ſyllabe sub, *diſant ſubmultiple au lieu de multiple, ſubſuperparticuliere, au lieu de ſuperparticulier, & ainſi des autres.*

Et pource que les denominateurs des raiſons rationelles cy-deſſus expoſees ſont aſſez vtiles, nous enſeignerons icy par quels nombres elles ſe denomment. Nous appellons denominateur d'vne raiſon, le nombre qui exprime diſtinctement & apertement la quantité de la grandeur antecedante au reſpect de la conſequente: comme le dominateur de la raiſon quintuple eſt 5, pource que ce nombre là monſtre que la grandeur ou quantité antecedante contient 5 fois la conſequente. Semblablement le denominateur de la raiſon ſeſquiquarte eſt 1 $\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre ſignifie que la quantité antecedante contient la conſequente vne fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: Item le denominateur de la raiſon ſubtriple, eſt $\frac{1}{3}$, car il demonſtre que l'antecedant eſt la tierce partie du conſequent: & ainſi des autres. C'eſt pourquoy, comme i'eſtime, Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raiſon la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous auons dit, combien vne grandeur eſt au reſpect d'vne autre auec laquelle elle eſt conferee, ainſi qu'il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, eſt le nombre entier, contenant autant d'vnitez, que l'antecedant de la raiſon contient de fois le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon double, eſt 2, de la ſextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt touſiours l'vnité: mais le denominateur eſt le nombre denommant la raiſon multiple correſpondante. Comme le denominateur de la raiſon ſubdouble eſt $\frac{1}{2}$: de la ſubſextuple $\frac{1}{6}$: de la ſubcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il eſt donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon multiple ou ſubmultiple, puis que la prolation monſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt euident par les exemples propoſez cy-deſſus.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere eſt l'vnité auec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon ſeſquialtere, eſt 1 $\frac{1}{2}$: de la ſeſquitierce $\frac{1}{3}$; &c. Il n'eſt donc pas difficile de trouuer le denominateur d'vne raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation d'icelle raiſon exprime le denominateur par ſa partie aliquote, comme il appert par les exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperparticuliere eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur ſeulemen

d'vne vnité. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquialtere, eſt $\frac{2}{3}$: & celuy de la ſubſeſquitierce, eſt $\frac{3}{4}$ &c. Donc le denominateur de telle raiſon ſera aiſément trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquiquinte eſt $\frac{5}{6}$: & celuy de la raiſon ſubſeſquiſeptieſme eſt $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raiſon ſubſeſquinceſieſme, eſt $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperpartiente, eſt vne vnité auec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le conſequant. Comme le denominateur de la raiſon ſupertripartiente quarte, eſt $1\frac{3}{4}$: celuy de la raiſon ſuperquadripartiente quintes, eſt $1\frac{4}{5}$; & ainſi des autres. Or les denominateurs de telles raiſons ſont faciles à trouuer, pource que la prolation meſme de la raiſon exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il appert és exemples cy-deſſus. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperpartiente, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez, que la quantité conſequente contient de parties aliquotes par deſſus l'antecedante. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quarte eſt $\frac{4}{7}$: celuy de ſubſuperquadripartiente quinte, eſt $\frac{5}{6}$ &c. On trouuera donc le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raiſon propoſee, auquel ſi on adiouſte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quinte eſt $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de ceſte fraction eſt le nombre denommant les quintes, ſçauoir 5, auquel eſt adiouſté le nombre 3, des trois parties, à fin de faire 8, denominateur de la fraction : mais le denominateur de la raiſon ſubſuperquadripartiente neufieſme eſt $\frac{9}{13}$: & ainſi des autres.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple propoſee auec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la conſequente. Comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptieſme eſt $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raiſon quadruple ſeſquiquinte, eſt $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raiſon eſt aiſé à exhiber, pource que la prolation de la raiſon exprime diſtinctement tant le denominateur de la multiple raiſon, que la partie aliquote, comme il ſe voit ez exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperparticuliere eſt vne fraction dont le numerateur eſt le nombre denommant les parties aliquotes contenues en la raiſon. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquiquarte, eſt $\frac{4}{13}$: de ſubquintuple ſeſquiſneufieme, $\frac{9}{46}$, &c. On trouuera le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, ſi on adiouſte 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il eſt manifeſte par les exemples cy-deſſus.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperpartiente, eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple obtenuë en icelle, auec les parties aliquotes que la quantité antecedante doit contenir de la conſequente. Comme le denominateur de la raiſon triple ſuperbipartiente tierces, eſt $3\frac{2}{3}$: de quadruple ſupertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il eſt facile de trouuer le denominateur de telles raiſons, pource que la prolation exprime diſtinctement, tant le denominateur de la raiſon multiple, que les parties aliquotes,

comme appert és exemples cy-dessus: & le denominateur d'vne raison submultiple superpartiente, est vne fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{17}$: de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{13}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produict adiousté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert ès exemples posez cy dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est tousiours l'vnité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'vne contient l'autre vne fois precisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

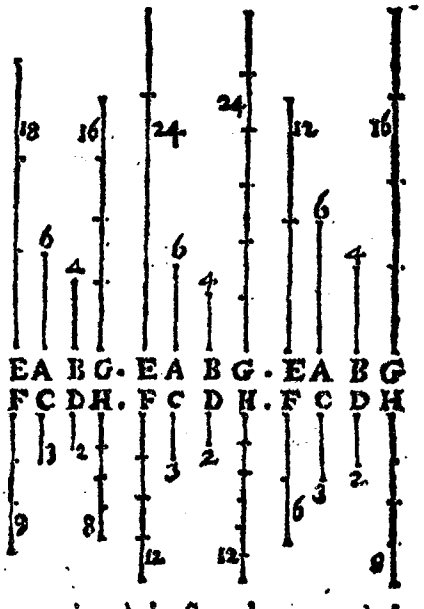
Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dicte raison, ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dicte proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dicte proportion. Et c'est ce que les Grecs appellent analogie, *& quelques Latins* proportionalité: *Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils appellent* Medietez, *sont la proportion Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique: Mais Euclide ne traicte icy que de la Geometrique, laquelle est ou continue, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se faict nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedant & consequent, sçauoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit, que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrette ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entremoyenne est prinse seulement vne fois, tellement qu'il se faict interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedant ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.*

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre, lesquelles estans multipliees se peuuent exceder l'vne l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste-cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dictes auoir raison, sçauoir est, que l'vne ou l'autre d'icelles estant multipliee, elles s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le coste d'vn quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent vn triangle Isoscelle, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'vn

cercle & le diametre d'iceluy, il y a raiſon (laquelle toutesfois n'eſt encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'eſt à dire pris 4 fois, excede la circonference : car toute la circonference, comme il eſt demonſtré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'vne ſeptieſme partie d'iceluy diametre. Mais il s'enſuit de ceſte def. qu'vne ligne finie n'aura raiſon à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes ſoient de meſme genre de quantité : car en quelque ſorte que ſoit multipliée la ligne finie elle ne pourra ſurpaſſer l'infinie. S'enſuit auſsi qu'il n'y a point de raiſon entre vn angle rectiligne, & vn angle contingent. Car il appert de la 16. pr. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais exceder vn angle rectiligne.

6. Les grandeurs ſont dites eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, quand les equimultiplices de la premiere & troiſiéme, aux equemultiplices de la ſeconde & quatriéme, en quelque multiplication que ce ſoit, deffaillent enſemble, ſont egaux, ou excedent, vn chacun à vn chacun, prenant ceux là qui s'entre reſpondent.

Ayant eſté dit par Euclide, que eſt que raiſon, & quelles grandeurs ſont dites auoir raiſon l'vne à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour eſtre en meſme raiſon, ſçauoir eſt, que les equemultiplices de la premiere & troiſieſme grandeur excedent, ſoient egaux ou defaillent aux equemultiplices de la deuxieſ. & quatrieſme en quelque multiplication que ſoient pris iceux equemultiplices, comme appert en ces quatre quãtitez A, B, C, D, ou les equemultiplices de A & C, premiere & 3e, ſont E & F, & les equemultiplices de B & D, 2e & 4e quantitez ſont G & H : tellement qu'il ſe voit qu'ayant multiplié A & C, par vn meſme nombre ; & B, D, par quelconque meſme nombre, ſi le multiplice E excede le multiplice G qui luy correſpond, auſsi le multiplice F excede le multiplice H ; s'il eſt egal, l'autre ſera auſsi egal ; s'il defaut auſsi ſera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiplices : & partant il y a meſme raiſon de A premiere quantité à B ſeconde, que de C troiſieſme à D quatrieſme.

Par la conuerſe de ceſte def. s'il y a telle raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuit que les equimultiplices de la premiere & troiſieſme excedent, ſont egaux, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme, engendrees de quelque multipliplication que ce ſoit.

Et auſsi s'il n'y a meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quatrieſme, il s'enſuiura que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme n'excederont, ne

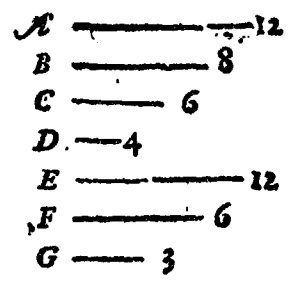
ſeront egaux, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme produictes de quelque multiplication que ce ſoit.

Or ce qui eſt dit icy de quatre grandeurs ſe doit auſſi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, a fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui ſont en meſme raiſon ſont appellees proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, icelles grandeurs ſont dites proportionnelles.

Et les grandeurs E, F, G, leſquelles ſont en proportion continue, ſont auſſi dites continuellement proportionnelles.



8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la ſeconde, & le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, lors il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare icy quelle condition doiuent auoir 4 grandeurs, à fin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la 4e, diſant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3e, & les equemultiplices de la deuxieſme & 4e, ſi la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2e mais la multiplice de la 3e n'excede la multiplice de la 4e il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la 3e à la 4e, comme il appert en l'exemple icy poſé, auquel ſont prinſes E & F, doubles de A & C, premiere & 3e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxieſme & 4e grandeurs: & pource que E multiplice de A premiere eſt plus grand que G multiple de B 2e, & F multiplice de C 3e n'eſt pas plus grand que H multiplice de D 4e, la raiſon de A premiere grandeur à B 2e, eſt dicte plus grande que la raiſon de C 3e à D 4.

Or afin que quatre grandeurs ſoient dictes eſtre en meſme raiſon, il eſt neceſſaire que les equemultiplices d'icelles, pris ſelon quelconques multiplications, excedent, ſoient egaux, ou defaillent, comme il a eſté expoſé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2e, que la 3e à la 4e: c'eſt aſſez que des equemultiplices pris ſelon quelque multiplication, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la deuxieſme: & le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, encore que ſelon pluſieurs autres multiplications ces equemultiplices ne ſoient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonſtration qu'il

y a plus grande raiſon d'vne grandeur à vne autre, que d'vne troiſieſme à vne quatrieſme. Il ſuffira de demonſtrer que ſelon quelque multiplication, le multiplice de la premiere grandeur excedant celuy de la ſeconde, le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme.

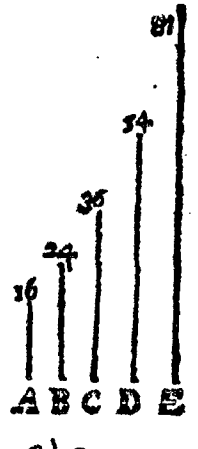
Et conuertiſſant cette 8. def. s'il y a plus grande raiſon de la premiere grandeur à la deuxieſme, que de la troiſieſme à la quatrieſme, le multiplice de la premiere excedant celuy de la deuxieſme, il ſe peut faire quelque multiplication par laquelle le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme.

Que ſi au contraire d'icelle def. le multiplice de la premiere grandeur ne ſurmonte celuy de la deuxieſme, & le multiplice de la tierce excede celuy de la quarte, la premiere grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la deuxieſme que la tiere à la quarte. La conuerſe a auſſi lieu.

9. Proportion ne peut eſtre conſtituée ſur moins de trois termes.

Puis qu'il a eſté dit en la 3. def. que raiſon eſt l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. eſt vne ſimilitude de deux ou pluſieurs raiſons : il s'enſuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en vne proportion, ſi elle eſt proportion continue, mais il en faut quatre au moins, ſi elle eſt proportion diſcrette.

10. Quand trois grandeurs ſont proportionnelles, la premiere eſt dicte auoir à la troiſieſme la raiſon doublee de la premiere à la ſeconde : mais s'il y en a quatre, la premiere eſt dicte eſtre à la quatrieſme, en raiſon triplee de la premiere à la ſeconde : & touſiours d'vn meſme ordre vne plus, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

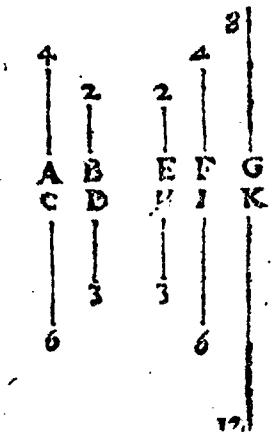


Comme ſi les grandeurs A, B, C, D, E, ſont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A eſt dicte auoir à la 3e quantité C, la raiſon doublee de celle de A à la 2e B, pource qu'entre A & C ſont deux raiſons, qui ſont egales à la raiſon de A à B, ſçauoir eſt la raiſon de A à B, & celle de B à C, tellement que la raiſon de A à C, prend par ce moyen la raiſon doublee de A à B, c'eſt à dire poſee deux fois d'ordre. Mais la raiſon de la premiere grandeur A à la 4e D, eſt dicte triplee de celle de A à B, pource qu'entre A & D ſe trouuent trois raiſons, leſquelles ſont egales à celle de A à B; c'eſt à ſçauoir la raiſon de A à B, celle de B à C, & celle de C à D : & partant la raiſon de A à D encloſt par ce moyen la raiſon triplee de A à B, c'eſt à dire poſee trois fois d'ordre. Et ainſi pareillement la raiſon de A à E, eſt dicte quadruplee de la raiſon de A à B; pource qu'entre A & E ſont encloſes 4 raiſons, qui ſont egales à celle de A à B, &c.

11. Les grandeurs ſont dictes homologues, ou de ſemblables

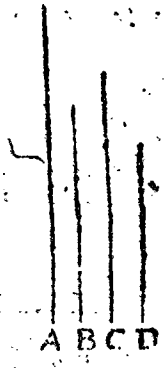
raiſons, les antecedans aux antecedans, & les conſequens aux conſequens.

C'eſt à dire que ſi pluſieurs quantitez ſont proportionnelles, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chaſque raiſon, ſeront dictes homologues, ou de ſemblable raiſon, comme auſſi les quantités conſequentes B & D. Ainſi pareillement, ſi les quãtitez E, F, G, ſont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E & H, ſeront dicts homologues, ou de ſemblable raiſon: comme auſſi le terme F ſera dict homologue au terme I: & auſſi G à K: ainſi les coſtez des figures eſtans comparez entr'eux, on entend quels coſtez doiuent eſtre antecedans des raiſons, & quels conſequens.



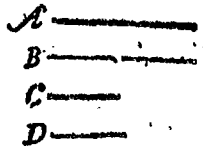
12. Raiſon alterne, eſt prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le conſequent au conſequent.

Euclide explique en ceſte def. & és ſuiuantes, aucuns moyens d'argumenter és proportions, deſquels l'vſage eſt fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raiſon alterne ou permutee, eſt quand de quatre grandeurs proportionnelles propoſees, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; on vient à conclurre qu'il y a meſme raiſon de l'antecedant A à l'antecedant C, que du conſequent B au conſequent D: & ceſte maniere d'argumenter (laquelle eſt demonſtree à la 16. p. de ce liu.) ſe couche ordinairement ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: Donc en permutant comme A ſera à C, ainſi B à D. Et eſt à noter qu'en ceſte maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doiuent eſtre de meſme genre.



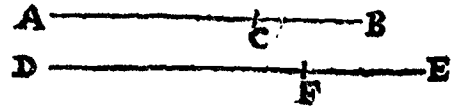
13. Raiſon inuerſe ou tranſpoſee, eſt lors qu'on prend le conſequent comme antecedant pour le comparer à l'antecedant, comme ſi c'eſtoit le conſequent.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, nous infererons par raiſon inuerſe, comme B eſt à A, ainſi D eſt à C, c'eſt à dire les conſequens aux antecedans. En cette ſorte d'argumenter les autheurs parlent preſques touſiours ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: donc en changeant, ou au contraire, B ſera à A, comme D à C. Cette maniere d'argumenter ſera demonſtrée au Corrolaire de la 4. propoſition de ce liure.



14. Compoſition de raiſon, eſt lors qu'on prend l'antecedant auec le conſequent, comme vne ſeule choſe, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB eſt à CB, comme la toute DE à FE; c'eſt à dire que la compoſee de l'antecedant AC & du conſequent CB, eſt au meſme conſequent CB, comme la compoſee de l'antecedant DF, & du conſequent FE, eſt à iceluy conſequent FE; cette maniere d'argumenter ſera dicte compoſition de raiſon, & ſe prononce ainſi; comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE: donc en compoſant AB ſera à CB, comme DE à FE: laquelle ſorte d'argumenter ſera demonſtrée en la 18. pr. de ce liure.

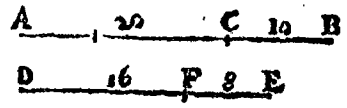


A ce moyen d'argumenter, par la compoſition de raiſon, en peuuent eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre dict compoſition conuerſe de raiſon: ſçauoir quand on prend l'antecedant & le conſequent comme vn ſeul, pour le comparer à l'antecedant. Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB compoſee de l'antecedant & du conſequent, eſt à l'antecedant AC, ainſi DE compoſee de l'antecedant & du conſequent eſt à l'antecedant DF: laquelle façon d'argumenter nous demonſtrerons eſtre vallable ſur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut eſtre dit compoſition contraire de raiſon; c'eſt à ſçauoir quand l'antecedant eſt comparé à l'antecedant & conſequent comme vn ſeul. Comme ſi AC eſt à CB, ainſi que DF à FE, & nous inferons par compoſition contraire de raiſon: donc comme AC antecedant ſera à la toute AB, compoſee de l'antecedant, & du conſequent, ainſi DF antecedant ſera à la toute DE, compoſee de l'antecedant & du conſequent. Nous demonſtrerons ſur la 18. p. de ce liure que cette forme d'argumenter eſt vallable.

15. Diuiſion de raiſon, eſt lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, pour le comparer à iceluy meſme conſequent.

Comme ſi on dit qu'il y a telle raiſon de AB à CB, que de DE à FE: donc auſſi AC, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, ſera à CB conſequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le conſequent, ſera à FE conſequent. Or les autheurs concluent ordinairement auec cette raiſon ainſi: comme AB eſt à CB, ainſi DE eſt à FE: donc en deuiſant AC ſera auſſi à CB, comme DF à FE. Ce qui ſera demonſtré en la 17. p. de ce liure.



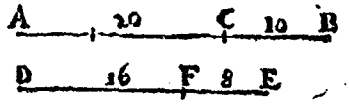
A ce moyen d'argumenter en peuuent auſſi eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre appellé diuiſion conuerſe de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand le conſequent eſt comparé à l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: Comme ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, & nous inferons: donc auſſi par diuiſion conuerſe de raiſon, comme CB conſequent ſera à AC, excez par lequel l'antecedant ſurmonte le conſequent, ainſi FE conſequent ſera à DF, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: laquelle maniere d'argumenter nous demonſtrerons pouuoir eſtre ſur la 17. pr. 5. Il eſt manifeſte qu'en l'vne & l'autre d'icelles argumentations par diuiſion de raiſon, l'antecedant doit eſtre plus grand que le conſequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conferé à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB, comme DF à DE: Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB, excez, par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à EF, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonstrerons sur la 17. prop. de ce liure.

Il est euident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuersion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

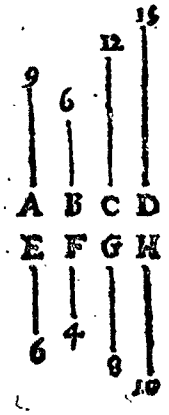
Comme si on dit, que comme AB est à CB, ainsi DE à FE: & on vient à conclurre, que AB antecedant sera aussi à AC, excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecedant sera à DF, excez par lequel l'antecedant excede le consequent, cela sera dit conuersion de raison. En ceste sorte d'argumenter les autheurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: Donc par conuersion de raison AB sera à AC, comme DE à DF: laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au Cor. de la 19. pr. de ce liure.



17. Raison egale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'vn costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement, c'est lors qu'on prend les extremes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y-a d'vn costé quatre quantitez, A, B, C, D: & autant d'vn autre E, F, G, H, lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B, comme E à F; & B à C, comme F à G; & C à D, comme G à H: si on infere que comme A est à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H, premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumenter est dicte raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçauoir est quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre: & quand l'ordre est peruerty: Euclide explique és deux def. suiuantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.



18. Proportion ordonnée, eſt quand l'antecedant eſt au conſequent, comme l'antecedant eſt au conſequent: & que le conſequent eſt à quelque autre, comme le conſequent eſt auſſi à quelque autre.

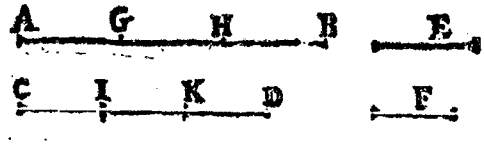
Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auons poſé A eſtre à B, comme E à F; & B à C, comme F à G, & C à D, comme G à H: Car ainſi les termes des 4 premieres quantitez ſont pris d'vn meſme ordre, que ceux des 4 dernieres; & partant ceſte proportion eſt dicte ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raiſon d'egalité, la proportion d'ordre eſtant obſeruee, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublée, eſt quand trois grandeurs eſtans d'vn coſté, & autant d'vn autre, la premiere eſt à la ſeconde, comme la cinquieſme à la ſixieſme, & comme la ſeconde à la troiſieſme, ainſi la quatrieſme à la cinquieſme.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que E eſt à F; & comme B eſt à C, ainſi D à E: ceſte proportion ſera dicte troublee ou perturbée, d'autant qu'vn meſme ordre n'eſt pas gardé en la comparaiſon des premieres grandeurs entr'elles, qu'és ſecondes auſſi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere eſt comparée à la ſeconde, & ceſte-cy à la 3e: mais és ſecondes quantitez la 2e eſt comparée à la 3e, & la premiere à la ſeconde. Or que le moyen d'argumenter par raiſon egale, la proportion troublée eſtant gardée, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 23. p. de ce liure.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la ſienne; comme l'vne ſera multiplice de l'vne, ainſi les toutes ſeront multiplices des toutes.



Soient tant de grandeurs qu'on voudra AB & CD, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs E & F. Ie dis que les grandeurs AB & CD enſemble, ſeront autant multiplices de E & F enſemble, comme AB l'eſt de E, ou CD de F.

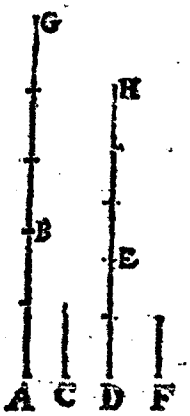
Car puiſque AB eſt multiplice de E; E meſurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la meſure donc trois fois, & ſoit icelle

AB couppee en trois parties egales, AG, GH, HB, chacune deſquelles ſera egale à E. Le meſme ſe peut dire de la grandeur CD, laquelle on coupera auſſi en trois parties egales, CI, IK, KD, eſtant chacune d'icelles egale à F: mais qui a choſes egales, ſçauoir à AG & E, adiouſte choſes egales, ſçauoir CI & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront egales aux toutes E & F enſemble. Par meſme raiſon GH & IK enſemble, ſeront egales à icelles E & F enſemble: pareillement HB & KD, aux meſmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales à E; & en CD d'egales à F: autant y en a-il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont egales à E & F priſes enſemble: Parquoy les deux AB & CD enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule AB eſt triple de la ſeule E, ou la ſeule CD de la ſeule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, & la cinquieſme autant multiplice de la ſeconde, que la ſixieſme de la quarte; la compoſee de la premiere & cinquieſme, ſera autant multiplice de la ſeconde, comme la compoſee de la troiſieſme & ſixieſme, le ſera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la ſeconde C, comme la 3e DE l'eſt de la 4e F: & ſoit la 5e BG autant multiplice de la 2e C, comme la 6e EH de la 4e F: Ie dis que AG compoſee de la premiere & cinquieſme AB & BG, ſera autant multiplice de la 2e C, comme DH compoſee de la tierce & ſixieſme DE & EH, le ſera de la quarte F.



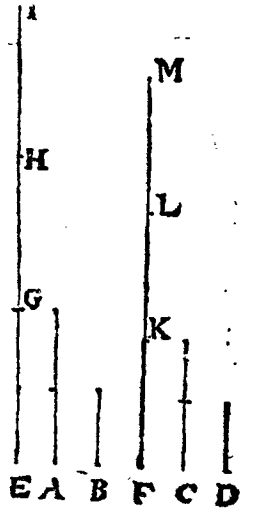
Car puis que AB eſt autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par meſme raiſon, il y aura auſſi en BG autant de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG compoſee de la premiere & cinquieſme eſt autant multiplice de la ſeconde C, comme DH compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de la quarte F. Parquoy ſi la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme

la tierce de la quarte ; & on prend des equimultiplices de la premiere, & troiſieſme : auſſi le multiplice de la premiere ſera autant multiplice de la ſeconde, que le multiplice de la tierce le ſera de la quarte.

Soit A autant multiplice de B, comme C l'eſt de D ; & de la premiere & tierce A, C, ſoient pris les equemultiplices E & F. Ie dis que E ſera autant multiple de B 2e, que F de D 4e.



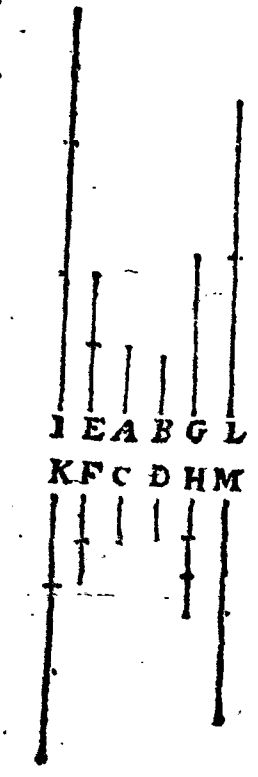
Car puis que E eſt autant multiplice de A, que F l'eſt de C : E contiendra autant de parties egales à A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuiſee en EG, GH & HI, chacune egale à A : Item F diuiſee en FK, KL & LM, chacune egale à C : & d'autant que EG & FK ſont egales à A & C, leſquelles ſont equemultiplices de B & D par l'hypotheſe, auſſi EG & FK ſeront equemultiplices des meſmes B & D. Par meſme raiſon GH & KL : item HI & LM, ſeront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que EG premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FK tierce l'eſt de D quarte. Item GH cinquieſme autant multiplice de la meſme ſeconde B, que KL ſixieſme de la quatrieſme D ; auſſi EH compoſee de la premiere & cinquieſme ſera autant multiplice de la ſeconde B, que FL compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FL tierce l'eſt de D quarte, & HI cinquieſme eſt auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que LM ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D : EI compoſee de la premiere & cinquieſme ſera auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que FM compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de D quatrieſme par la 2. p. de ce liure. Si donc la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, en meſme raiſon que la tierce à la quarte : auſſi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront meſme raiſon aux equemultiplices de la ſeconde & quarte, en quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entrereſpondent.

Soit A à B en meſme raiſon que C à D, & ſoient priſes E & F equemulti-

plices de A premiere & C tierce: Item G & H equemultiplices de B seconde & D quarte, selon quelque multiplication que ce soit. Ie dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.



Car si on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere, est autant multiplice de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prinses equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce liure I & K, serõt equemultiplices de A & C, seconde & quarte. Par mesme raison I. & M, seront aussi equimultiplices de B & D: & puis que A est à B comme C à D: & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont esté demonstrees I & K equemultiplices; mais de B & D seconde & quarte, autres equemultiplices L & M: par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si I deffaut, est egal, ou plus grand que L, aussi K deffaudra, sera egal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux equemultiplices. Et pour autant que I & K, sont equemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H: par la mesme 6. def. il y aura mesme raison de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste la preuue de la raison inuerse, qu'Euclide a expliquee en la 13. def. de ce liure, sçauoir est que si 4 grandeurs sont proportionelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté demonstré que si I defaut, est egal ou plus grand que L, aussi K defaudra, sera egal, ou plus grand que M, selon quelconques multiplices. Il appert aussi que si L defaut, est egal, ou plus grand que I, aussi M defaudra, sera egal, ou plus grand que K, selon quelconques multiplications: Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

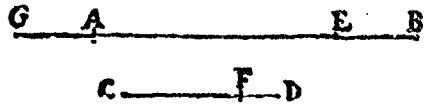
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur est autant multiplice d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee: aussi le reste sera autant multiplice du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF. Ie dis que le reste EB sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD.

Car A G estant faicte autant multiplice de FD comme AE l'est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD: d'autant que AE, AG sont

equemultiplices de CF, FD : par la 1. pr. de ce liure, la toute GE, ſera autant multiplice de la toute CD, comme AE de CF ; Mais auſſi AB, eſt autant multiplice de CD comme AE de CF : donc GE, AB, ſont equemultiplices de CD, & partant egales entr'elles par la 6. com. ſent. Parquoy en oſtant ce qui eſt commun, ſçauoir AE, demeureront egales GA, EB; & partant ſeront equemultiplices de FD puis que GA a eſté poſée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB l'eſt de CD : donc auſſi le reſte EB ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD. Parquoy ſi vne grandeur eſt autant multiplice d'vne grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

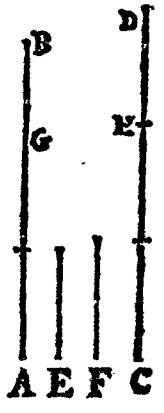


THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des equemultiplices : ou les reſtes ſeront egaux aux meſmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchees AG, CH auſſi equemultiplices des meſmes grandeurs E, F. Ie dis que les reſtes GB, HD, ſeront ou egaux aux meſmes E, F, ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, ſont equemultiplices de E & F ; en AB il y aura autant de grandeurs egales à E, comme en CD de grandeurs egales à F. Pareillement d'autant que la retranchee AG eſt autant multiplice de E, que la retranchee CH l'eſt de F ; AG contiendra autant de grandeurs egales à E, que CH de grandeurs egales à F, par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales multitudes de grandeurs AB & CD, on oſte egales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes reſtantes GB & HD ſeront egales : c'eſt à dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F ; ou bien ſi GB eſt egale à E, auſſi HD ſera egale à F : & par ainſi iceux reſtes GB, HD ſeront egales à E & F, chacune à la ſienne, ou bien ſeront equemultiplices d'icelles. Parquoy ſi deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

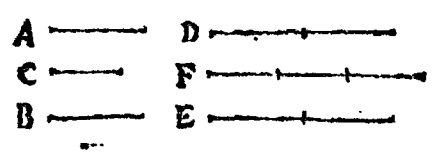


THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales, ont meſme raiſon à vne meſme grandeur ; & ceſte cy aura meſme raiſon aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle ſoit C. Ie

dis que A & B ont meſme raiſon l'vne que l'autre à C, & que C aura meſme raiſon à A qu'à B.



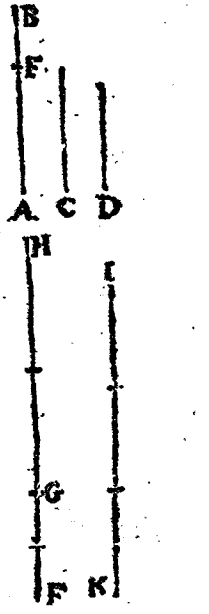
Qu'il ne ſoit ainſi ; ſoient pris D & E equemultiplices de A premiere, & B tierce, ſoit auſſi pris F quelconque multiplice de C, ſeconde & quarte : donc puis que D eſt autant multiplice de A, que E eſt multiplice de B ; & que A & B ſont poſees egales : auſſi D & E ſeront egales par la 6. com. ſent. Si donc D eſt plus grande, egale, ou plus petite que F, auſſi E ſera plus grande, egale, ou plus petite que la meſme F, & par la ſuſdite 6. def. de ce liure, il y aura telle raiſon de A à C, comme de B à la meſme C.

Quant à l'autre partie, elle ſe prouue tout de meſme par la ſuſdite def. en prenant les meſmes equemultiplices, & monſtrant l'excez, &c, ou bien plus facilement par la raiſon inuerſe. Car puis qu'il a eſté demonſtré que A eſt à C comme B à C, en changeant C ſera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce liure. Donc les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme, &c Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon à vne meſme grandeur, que la plus petite : & vne meſme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande, & vne troiſieſme quelle qu'elle ſoit D. Ie dis que AB a plus grande raiſon à la troiſieſme D, que non pas C : item, que D a plus grande raiſon à C, qu'à AB.



Qu'il ne ſoit ainſi : ſoit entendue AB premiere grandeur, D ſeconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB eſt plus grande que C, ſoit retranchee AE egale à icelle C, & ſoient pris des equemultiplices, à ſçauoir FG de BE, & GH de EA, en ſorte que chacune d'icelles FG & GH ſoit plus grande que D : & puis que les deux FG, GH, ſont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce liure, la toute HF ſera autant multiple de la toute AB, comme HG de AE, ou de C ſon egale : Maintenant ſoit priſe IK auſſi multiplice de D, en ſorte qu'elle ſoit plus petite que HF, mais plus grande que HG : (ce qui eſt facile, puis que D eſt plus petite que ny FG, ny GH : ſi bien qu'il faut ſeulement adiouſter tant de fois la grandeur D, iuſques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que HF, GH ſont equemultiplices de AB premiere, & C troiſieſme, ſi IK eſt priſe pour l'equemultiplice, tant de D ſeconde, que D quatrieſme, il eſt euident que HF multiplice de AB premiere, eſtant plus grande que IK multiplice de D ſeconde, HG

multiplice de C tierce, n'eſt pas plus grande que IK multiplice de D quarte: & partant par la huictieſme def. de ce liure, il y aura plus grande raiſon de AB à D, que de C à la meſme D.

Quant à la ſeconde partie: d'autant que IK multiplice de la premiere D, (car il faut maintenant poſer D premiere & troiſieſme, C ſeconde, & AB quatrieſme) eſt plus grande que HG multiplice de la ſeconde C; & IK multiplice de la troiſieſme D, eſt moindre que FH multiplice de AB quatrieſme: Il y aura plus grande raiſon de D à C, que de D à AB, par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles: & celles-là auſſi ſont egales, auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles ayent meſme raiſon l'vne que l'autre à la troiſieſme C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.

Car ſi elles n'eſtoient egales, il faudroit que l'vne ou l'autre fuſt plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raiſon a C, que la plus petite: ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc A & B ne ſont pas inegales, mais egales.

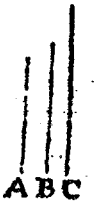
Soient maintenant A & B, à chacune deſquelles C ait vne meſme raiſon. Ie dis qu'icelles A & B ſont auſſi egales entr'elles: car autrement il faudroit que l'vne fuſt plus petite que l'autre: & par la meſme 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raiſon qu'à la plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe: A & B ne ſont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont meſme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande: & celle là à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raiſon de A à C ſoit plus grande que de B à la meſme C. Ie dis que A ſera plus grande que B.

Autrement, ſi A n'eſtoit plus grande que B, elle ſeroit egale, ou plus petite, ce qui eſt impoſſible: car ſi elles eſtoient egales, elles auroient meſme raiſon l'vne que l'autre à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui ſeroit contre l'hypotheſe; ſi auſſi elle eſtoit plus petite, elle auroit plus petite raiſon à C



que

que non pas B, par la 8. prop. de ce meſme liure, ce qui eſt pareillement contre l'hypotheſe. Donc A ne ſera pas moindre ny egale à B : & par conſequent ſera plus grande.

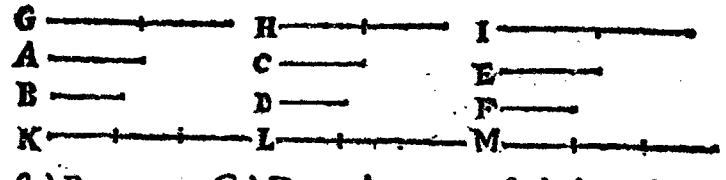
Maintenant que C aye plus grande raiſon à B, que non pas à A : Ie dis que B ſera plus petite que A. Autrement ſi B n'eſtoit moindre que A, elle ſeroit egale, ou plus grande, ce qui eſt impoſſible : car ſi A & B eſtoient egales, C auroit meſme raiſon à l'vne qu'à l'autre par la ſuſdite 7. prop. de ce liure : ce qui eſt contre noſtre hypotheſe : ſi auſſi elle eſtoit plus grande, C auroit plus grande raiſon à A qu'à B par la ſuſdite 8. pr. ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Donc B ſera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raiſons qui ſont de meſme à vne autre, ſont auſſi de meſme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainſi E à F : Ie dis que comme A eſt à B, ainſi E ſera à F.

Qu'il ne ſoit ainſi : de toutes les antecedantes A, C, E, ſoient priſes quelconques equemultiplices, G, H, I. Pareillement, des conſequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. D'autant que A eſt à B comme C à D, par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, ſi G multiplice de A, eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B : auſſi H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D. Item, puis que comme C eſt à D, ainſi E eſt à F, ſi H multiplice de C eſt egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D, auſſi I multiplice de E, ſera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F : Parquoy ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi I multiplice de E tierce, ſera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplice de F quarte; & par la ſuſdite 6 def. comme A ſera à B, ainſi E ſera à F. Parquoy les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Clauius demonſtre en ſuitte de ce, que les raiſons qui ſont de meſme à d'autres, ſont auſſi de meſme entr'elles : Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, & que E ſoit à F, comme A à B; & G à H, comme C à D; Auſſi comme E ſera à F, ainſi G ſera à H. Car d'autant que les raiſons de E à F, & de C à D ſont de meſme à la raiſon de A à B, par la 11. p. 5. comme E ſera à F, ainſi C à D. Derechef, pour ce que les raiſons de E à F, & de G à H ſont de meſme à la raiſon de C à D : auſſi par la meſme 11. prop. 5. comme E ſera à F, ainſi G ſera à H.

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
9.	6.	12.	8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, de C à D & de E à F ſont de meſme entr'elles; & que comme A eſt à B, ainſi G ſoit à H; & comme C à D, ainſi I à K &; comme E eſt à F, ainſi L ſoit à M: auſſi les raiſons de G à H, de I à K, & de L à M ſont de meſme entr'elles: Car ſuiuant ce que nous auons demonſtré cy-deſſus de quatre raiſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K, pour ce que ces raiſons ſont ſemblables aux raiſons de A à B, & de C à D. Et en la meſme maniere, cõme I ſera à K, ainſi L ſera à M, d'autant qu'icelles raiſons ſont de meſme aux raiſons de C à D, & de E à F, leſquelles ſont ſemblables. Item, comme G ſera à H, ainſi L à M; puis que ces raiſons ſont de meſme que les raiſons de A à B, & de E à F, qui ſont poſées egales: Le meſme ſeroit encores demonſtré s'il y auoit dauantage de raiſons.

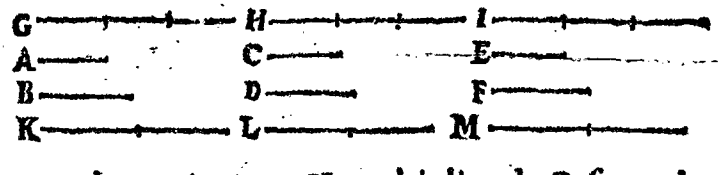
A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	8.	18.	12.	30.	20.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles: comme l'vne des antecedantes ſera à ſa conſequente, ainſi toutes les antecedantes ſeront à toutes les conſequentes.

Soient ſix grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, ſçauoir que A ſoit à B, comme C eſt à D, & E à F: Ie dis que comme l'vne des antecedantes eſt à ſa conſequente; ſçauoir eſt A à B, ainſi toutes les antecedantes enſemble A, C, E, ſeront à toutes les conſequentes enſemble B, D, F.

Car eſtans priſes des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item des conſequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M; toutes les trois multiplices G, H, I enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs A, C, E enſemble, comme la ſeule G eſt multiplice de la ſeule A, par la premiere prop. de ce liure. Auſſi par la meſme raiſon toutes les trois multiplices K, L, M enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs B, D, F enſemble, comme K ſera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F ſont proportionnelles, ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi H multiplice de C troiſieſme, ſera plus grande, egale, ou plus petite que L, multiplice de D quatrieſme, par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, & ainſi des deux autres: Partant ſi G eſt plus grande, egale, ou plus petite que K, le compoſé des trois G, H, I, ſera auſſi plus grand, egal, ou plus petit que le compoſé des trois K, L, M. Donc par la meſme 6. def. comme A ſera à B, ainſi les trois A, C, E enſemble, ſeront aux trois B, D, F enſemble. Parquoy ſi tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde comme la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquieſme à la ſixieſme: auſſi la premiere aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit A premiere à B ſeconde, *(en la prec. fig.)* comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raiſon de C tierce à D quarte, que de E cinquieſme à F ſixieſme. Ie dis qu'il y aura auſſi plus grande raiſon de A premiere à B ſeconde, que de E cinquieſme à F ſixieſme.

Car eſtans priſes des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & des conſequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M: D'autant que A eſt à B, comme C à D, ſi G multiplice de A eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, auſſi par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raiſon de C premiere à D ſeconde, que de E tierce à F quatrieſme, ſi H multiplice de C, eſt plus grande que L multiplice de D, il n'eſt pas neceſſaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce liure conuertie: donc auſſi ſi G excede K, neceſſairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raiſon de A à B, que de E à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quatte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

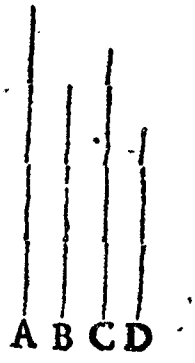
Que ſi la tierce C a moindre raiſon à la quarte D, que la cinquieſme E à la ſixieſme F: auſſi la premiere A aura moindre raiſon à la ſeconde B, que la cinquieſme E à la ſixieſme F. Car ſi la raiſon de C à D eſt moindre que celle de E à F, c'eſt à dire, que la raiſon de E premiere à F ſeconde eſtant plus grande que celle de C tierce à D quarte, ſi I excede M, il n'eſt pas neceſſaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou eſt egale à icelle par la 8. def. de ce liu. conuertie. Mais ſi H defaut, ou eſt egale à L, auſſi G defaudra, ou ſera egale à K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a poſé C 1. eſtre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy ſi I excede M, neceſſairement G n'excedera pas K: & partant par la ſuſdicte 8. def. il y aura plus grande raiſon de E à F, que de A à B, c'eſt à dire que la raiſon de A à B ſera moindre que de E à F: ce qui eſtoit propoſé.

En la meſme maniere ſera demonſtré, que s'il y a plus grande raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquiéme à la ſixiéme; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquiéme à la ſixiéme.

Que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte, & la tierce à moindre raiſon à la quatriéme que la cinquiéme à la ſixiéme: auſſi la premiere aura beaucoup moindre raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

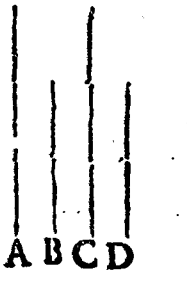
THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere ſoit plus grande que la tierce: auſſi la ſeconde ſera plus grande que la quarte: & ſi egale, egale: ſi plus petite, plus petite.

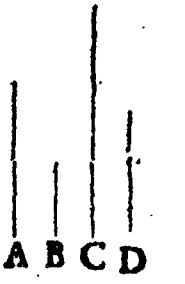


Soit A à B, comme C eſt à D, & que A premiere ſoit plus grande, egale, ou plus petite que C troiſieſme; Ie dis que B ſeconde ſera auſſi plus grande, egale, ou plus petite que D quatrieſme.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raiſon de A à B, que de C à la meſme B, par la 8. prop. de ce liure, & par conſequent plus grande raiſon de C à D, que de C à B, eſtant icelle la meſme raiſon que de A à B, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera plus grande que D.



Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce meſme liure A ſera à B, comme C à B: & puis que les raiſons de C à D, & C à B, ſont les meſmes que de A à B, les raiſons de C à D & de C à B, ſeront de meſme entr'elles, par la 11. pr. de ce liure, & partant par la 9. pr. B & D ſeront egales.



Finalement ſoit A moindre que C, & par la ſuſdite 8. prop. il y aura plus grande raiſon de C à D, que de A à D; & par conſequent plus grande raiſon de A à B, que de A à D, puis qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera moindre que D. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que ſi la ſeconde eſt plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: auſſi la premiere ſera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puis que A eſt à B comme C à D, en changeant B ſera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce liure. Donc ſi B eſt plus grande, ou egale, ou moindre que D, auſſi A ſera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la ſuſdite 14. prop.

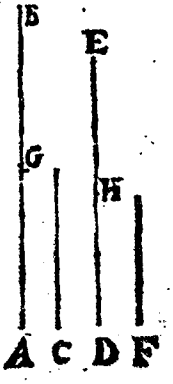
Or Euclide n'a pas demonſtré que ſi la premiere eſt plus grande, egale, ou plus petite que la ſeconde: auſſi la tierce ſera plus grande, egale, ou moindre que la

quarte ; pource que cela eſt euident à cauſe de la ſimilitude des raiſons. Ce que nous pourrions neantmoins demonſtrer apres Commandin : mais d'autant que ſa demonſtration ne compete qu'aux grandeurs de meſme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monſtre, encore que les grandeurs ſoient de diuers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs ſont entr'elles, comme ſont leurs equemultiplices entr'elles, eſtans priſes comme elles s'entre-reſpondent.

Soit AB autãt multiplice de C comme DE eſt multiplice de F. Ie dis que AB ſera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE ſont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en AB autant de parties egales à C, comme DE contient de parties egales à F: ſoit donc diuiſee AB és parties AG, GB egales à C, & DE és parties DH, HD egales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de AB, ſera à vne chacune partie de DE, comme C eſt à F ; & par la 12. prop. toutes les antecedentes AB, ſeront à toutes les conſequentes DE, comme AG l'vne des antecedantes, eſt à DH ſa conſequente, c'eſt à dire comme C à F, puis que c'eſt la meſme raiſon. Parquoy les grandeurs ſont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

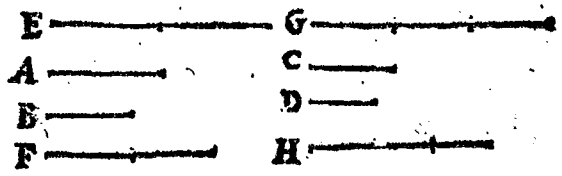


THEOR. 16 PROP. XVI.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtãs permutees.

Soit A à B, comme C à D. Ie dis qu'en permutant A ſera à C, comme B eſt à D.

Car ſi on prend E & F equemultiplices de A & B; item G & H equemultiplices de C & D; E ſera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & parconſequent E eſtant à F, & C à D, en meſme raiſon que A à B, elles ſont de meſme entr'elles par la 11. prop. de ce liure. Derechef puis que les raiſons de E à F, & G à H ſont les meſmes que de C à D, elles ſeront auſſi de meſme entr'elles par la ſuſdite 11. prop. c'eſt à dire, que comme E premiere eſt à F ſeconde, ainſi ſera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce meſme liure ſi, E premiere eſt plus grande, egale, ou moindre que G tierce, auſſi F ſeconde ſera plus grande, egale, ou moindre que H quatrieſme, en quelconque multiplication que ſoient priſes les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquieſme liure A ſera à C, comme B à D: (puiſque



E & F ſont equemultiplices de A premiere, & B troiſieſme; & G & H equemultiplices de C ſeconde & D quattieſme, & celles-là defaillent, ſont egales, ou excedent celles cy, &c.) Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

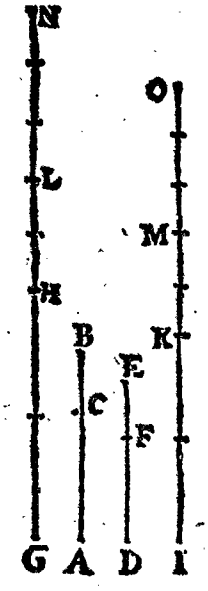
Or la demonſtration de ceſte propoſition a ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi les deux A & B eſtoient d'vn genre, & les deux C & D d'vn autre: auſſi les equemultiplices E & F ſeroient d'vn genre, c'eſt à ſçauoir duquel ſont A & B, & les equemultiplices G & H d'vn autre genre, c'eſt à ſçauoir de celuy duquel ſont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E eſtre plus grande, egale, ou moindre que G: & partant rien ne ſe concluroit par la 6. def. de ce liure. La raiſon permutée a donc ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont d'vn meſme genre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs compoſees ſont proportionnelles; icelles eſtans diuiſees, ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs compoſees AB, CB, & DE, FE, proportionnelles, c'eſt à dire, que AB ſoit à CB, comme DE à FE. Ie dis que les meſmes grandeurs eſtans diuiſees ſont auſſi proportionelles, c'eſt à dire que comme AC eſt à CB, ainſi DF eſt à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE ſoient priſes les equemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce liure GL ſera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'eſt à dire comme IK de DF. Mais icelle IK eſt autant multiplice de DF, que IM de DE par la meſme 1. prop. donc GL, IM ſont equemultiplices de AB, DE. Derechef ſoient priſes LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere eſt autant multiplice de CB ſeconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquieſme autant multiplice de CB ſeconde, que MO ſixieſme de la quarte FE, par la 2. p. de ce liure, HN ſera autant multiplice de CB ſeconde, que KO de FE quatrieme. Et puis que AB eſt à CB, comme DE à FE: & ont eſté priſes GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. conuertie ſi GL multiplice de AB premiere excede, eſt egale, ou moindre que HN multiplice de CB ſeconde, auſſi IM, multiplice de DE tierce, excedera, ſera egale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: oſtant donc les choſes communes HL, KM, ſi GH excede LN, auſſi IK excedera MO; & ſi egale, egale; & ſi moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK ſont equimultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB ſeconde & FE quarte, & il a eſté demonſtré (en quelconque multiplication qu'ayent eſté priſes icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la



premiere & troiſieſme excedent, ſont egales, ou moindres, que les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, par la ſuſdite 6. def. de ce cinquieſme liure AC ſera à CB, comme DF à FE: ce qui eſtoit propoſé. Si donc les grandeurs compoſees ſont proportionnelles. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ce moyen là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerſe de la raiſon diuiſee: c'eſt à dire que ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, auſſi CB ſera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainſi DE à FE, en diuiſant par la 17. p. 5. comme AC ſera à CB, ainſi DE à FE: & en changeant, comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF: ce qui eſtoit propoſé.

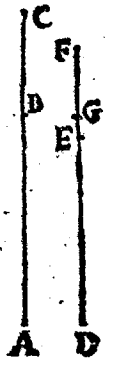
Par meſme maniere, ſera demonſtré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la meſme 15. def. nous auons appellé contraire diuiſion de raiſon: c'eſt à dire que ſi AC eſt à AB, comme DF à DE: auſſi AC ſera à CB, ainſi que DF à FE. Car puis que AC eſt à AB, comme DF à DE: en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF: donc en diuiſant par la 17. p. 5. comme CB à AC: ainſi FE à DF: & en changeant derechef, comme AC à CB, ainſi DF à FE: ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diuiſees ſont proportionnelles; icelles eſtans compoſees ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuiſees AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Ie dis qu'en compoſant, AC eſt à CB, comme DF à EF.

Car ſi comme AC eſt à BC, ainſi DF n'eſt pas à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en meſme raiſon que AC à BC, s'il eſt poſſible: & en diuiſant par la precedente propoſition, DG ſera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainſi DE eſt à EF: donc auſſi comme DG ſera à GF, ainſi DE ſera à EF par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere eſt plus grande que DE troiſieſme: donc par la 14. propoſition de ce meſme liure GF ſeconde, ſera auſſi plus grande que EF quatrieſme, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, meſme raiſon que de AC à BC.



Par meſme diſcours on demonſtrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Donc comme AC eſt à BC, ainſi DF eſt à EF, puiſque DF ne peut eſtre à vne grandeur moindre, ou plus grande que EF, en meſme raiſon que AC à BC. Parquoy ſi les grandeurs diuiſées ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter és proportions, leſquels

nous auons descrits en la 14. def. de ce liure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EF. Ie dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. p. cy dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouuer.

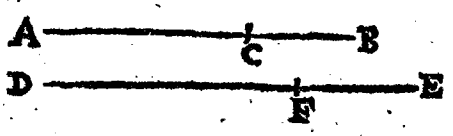
Quant à l'autre moyen que nous auons appellé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à BC, ainsi DE à EF : Ie dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la mesme prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui estoit proposé à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Ie dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi en permutant par la 16. prop. de ce liure AB sera à AC, comme DE à DF; & par la 17. prop. de ce mesme liure, en diuisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: parquoy en per mutant derechef par la susdicte 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est à dire comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont esté posees en mesme raison. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SOCHLIE.

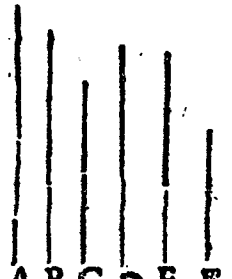
Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter és proportions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis par conuersion de raison, AB estre aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en diuisant par la 17. prop. de ce liure, comme AC à CB, ainsi DF à FE : donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF : & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme liure, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : ce qui estoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, estans prise

prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme; aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme; & si egale, egale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A premiere soit plus grande que C troisiesme. Ie dis que D 4e sera aussi plus grande que F 6e.



Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquiesme liure. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puis que B est à C, comme E à F, en changeant comme C sera à B, ainsi F à E.) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est egale à C; ie dis aussi que D sera egale à F. Car puis que A est egale à C, par la 7. p. de ce liure, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E: & par la 11. pr. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E: & partant D & F seront egales par la 9. prop. de ce mesme liure.

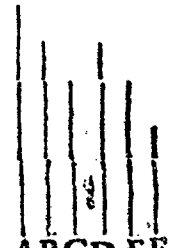
En troisiesme lieu, si A est moindre que C, ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E: il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquiesme liure. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme; aussi la quatriesme sera

plus grande que la ſixieſme; & ſi egale, egale; ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquelles priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublée, ſçauoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Ie dis que comme A ſera egale, plus grande, ou plus petite que C, auſſi D ſera egale, plus grande, ou plus petite que F.



Car ſi A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce liure. Mais comme A à B, ainſi E à F; il y aura donc plus grande raiſon de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquieſme liure. Et d'autant que comme B eſt à C, ainſi D eſt à E, en changeant comme C ſera à B, ainſi E à D. Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D ſera plus grande que F.

On peut prouuer comme en la precedente, ſi A eſt egale, ou plus petite que C; auſſi D eſtre egale, ou moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles eſtans priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon; icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & ſoit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale comme A eſt à C, ainſi D à F.

Car eſtans priſes G, H equemultiplices de A, D: Item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M, equemultiplices de C, F: puiſque A eſt à B, comme D à E, auſſi G multiplice de A premiere ſera à I multiplice de B deuxieſme, comme H multiplice de D troiſieſme à K multiplice de E quatrieſme par la 4. p. de ce cinquieſme liure. Par meſme raiſon I ſera à L, comme K à M. Veu donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, par la 20. pr. 5. ſi G excede L, auſſi H excedera M; & ſi egale, egale; & ſi plus petite, plus petite: & partant puis que G, H, equemultiplices de A & D defaillent, ſont egales, ou excedent L, M, equemultiplices quelcon-

ques de C & F, par la 6. def. A ſera à C, comme D à F : ce qu'il falloit prouuer.

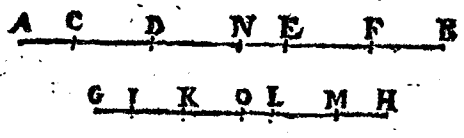
Maintenant ſoient plus de trois grandeurs, tellement que C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis que A eſt encore à N comme D à O. Car puiſque nous venons de demonſtrer que A eſt à C, comme D à F; & on a poſé C eſtre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, leſquelles ſont priſes de deux en deux en meſme raiſon. Donc comme il a eſté demonſtré és trois grandeurs cy deſſus, A ſera derechef à N, comme D à O. En la meſme maniere ſera demonſtré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Le docte Steuin en la 19. def. de ſes Probl. Geomet. explique vne ſorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut eſtre reduicte en vn tel theoreme que le ſuiuant.

S'il y-a deux grandeurs, deſquelles chacune ſoit couppée en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles : la compoſée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, ſera à la compoſée des parties reſtantes, en meſme raiſon que la compoſée, d'autant de parties de la derniere grandeur, ſera à la compoſée des parties reſtantes d'icelle. Et ſi quelconque partie de l'vne eſt couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correſpondante à ceſte partie-là, eſt auſſi couppée en deux autres parties proportionnelles à ces deux-là : les totales grandeurs ſeront auſſi couppées proportionnellement.

Soit vne grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & vne autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, ſçauoir és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles là de AB. Ie dis que AD compoſée des deux parties AC, CD, eſt à DB compoſée des trois parties reſtantes, comme GK compoſée des deux parties GI, IK, eſt à KH compoſée des trois autres parties reſtantes. Car puis que comme AC eſt à CD, ainſi GI eſt à IK, en compoſant par la 18. p. de ce liure AD ſera à CD, comme GK à IK.



Mais comme CD à DE, ainſi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce meſme liure, en raiſon egale, comme AD ſera à DE, ainſi GK ſera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF eſt à FE, comme HM à ML, auſſi en compoſant BE ſera à FE, comme HL à ML. Mais FE eſt à ED, comme ML à LK : donc en raiſon egale, BE ſera à ED comme HL à LK; & en compoſant, BD ſera à ED, comme HK à IK; & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a eſté demonſtré que AD eſt à DE, comme GK à KL, & DE eſt à DB, comme KL à KH, par la ſuſdicte 22. prop. 5. en raiſon egale comme AD ſera à DB, ainſi GK ſera à KH.

Nous demonſtrerons en la meſme maniere, que comme AC eſt à CB, ainſi GI eſt à IH. Car derechef en changeant, compoſant, & par egalité de raiſon, comme BC ſera à DC, ainſi HI à KI : & en changeant, comme CD ſera à CB, ainſi IK ſera à IH.

Veu donc que comme AC eſt à CD, ainſi GI eſt à IK, & comme CD à CB, ainſi IK à IH: en raiſon egale, comme AC ſera à CB, ainſi GI ſera à IH.

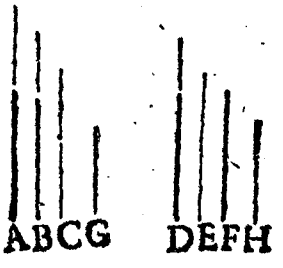
Par meſme raiſon, comme AF ſera à FB, ainſi GM ſera à MH: Car derechef en compoſant, & par egalité de raiſon, comme AF ſera à EF, ainſi GM ſera à LM, par les ſuſdictes 18, & 21. prop. de ce liure. Mais auſſi comme EF eſt à FB, ainſi LM à MH: Donc en raiſon egale, comme AF eſt à FB, ainſi GM eſt à HM, & ainſi des autres: appert donc ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant ſoit couppée, (comme pour exemple) la troiſieſme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & auſſi la troiſieſme KL en deux parties KO, OL proportionnelles à celle-là. Ie dis que comme AN à NB, ainſi GO à OH. Car en changeant, comme EN ſera à ND, ainſi LO à OK: & en compoſant par la 18. prop. 5. comme ED ſera à DN, ainſi LK à KO. Parquoy puis que comme CD eſt à DE; ainſi IK à KL: & comme DE à DN, ainſi KL à KO: par la 22. prop. 5. en raiſon egale, comme CD ſera à DN, ainſi IK à KO: donc les parties AC, CD, DN, ſont proportionnelles aux parties GI, IK, KO. Derechef, pource qu'en changeant, comme FE eſt à ED, ainſi ML à LK: & en compoſant, comme DE à NE, ainſi KL à OL, en raiſon egale, comme FE ſera à EN, ainſi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainſi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB, ſont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a eſté demonſtré en la premiere partie, AN ſera à NB comme GO à OH: appert donc ce qui eſtoit propoſé en ſecond lieu.

A ce Theoreme nous en ioindrons deux autres, le premier deſquels eſt tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles priſes de deux en deux, ſoient en meſme raiſon: toutes les grandeurs d'vn ordre, ſeront à laquelle on voudra d'icelles en meſme raiſon, que toutes les grandeurs de l'autre ordre ſeront à la correſpondante.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F: ie dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C enſemble, ſeront a laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la derniere C, ainſi toutes les grandeurs D, E, F enſemble, ſeront à la derniere F. Car puiſque comme A eſt à B, ainſi D à E, en compoſant A, B ſont à B, comme D, E, à E. Mais B eſt à C, comme E à F: donc en raiſon egale A, B, ſeront à C, comme D, E à F: & en compoſant A, B, C, ſeront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouuer.



Que s'il y auoit dauantage de grandeurs, la demonſtration ne ſeroit diſſemblable à celle-cy deſſus: car il n'y auroit qu'à repeter la compoſition & egalité de raiſon autant de fois qu'il ſeroit de beſoin: Comme par exemple, ſoient encore G & H, tellement que C ſoit à G, comme F à H. D'autant que A, B eſt à C, comme D, E eſt à F, & C à G, comme F à H: en raiſon egale A, B, ſont à G, comme D, E à H: & en compoſant A, B, G, ſont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C eſt à G, ainſi F à H, en chan-

geant, comme G ſera à C, ainſi H à F: donc en raiſon egale, comme A, B, G ſont à C, ainſi D, E, H à F; & en compoſant comme toutes les grandeurs A, B, G, C enſemble, ſeront à la ſeule C, ainſi toutes les grandeurs D, E, H, F enſemble, ſeront à la ſeule F.

Mais ſi on vouloit prouuer, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, ſont à la derniere G, ainſi les quatres autres D, E, F, H, ſont à la derniere H, il ſeroit bien plus bref: Car puisque nous auons demonſtré, que comme A, B, C, ſont à C, ainſi D, E, F à F, & que comme C eſt à G, ainſi F eſt à H en raiſon egale, comme A, B, C ſeront à G, ainſi D, E, F à H: donc en compoſant, toutes les grandeurs A, B, C, G, ſeront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H ſeront à H.

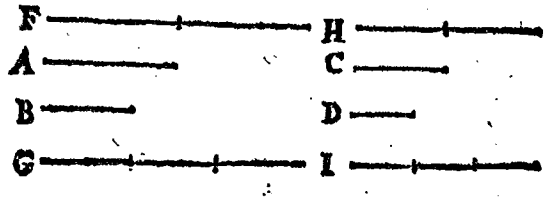
En la meſme ſorte on demonſtrera, que toutes leſdites grandeurs A, B, C, G ſeront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, ſeront à D, n'y ayant autre difference, ſinon qu'il faut prendre au contraire de ce que deſſus.

Et de ce eſt manifeſte, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, eſt à ſa correſpondante du ſecond ordre, ainſi toutes les grandeurs du premier ordre ſeront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le ſecond Theoreme eſt demonſtré par Clauius au Scholie de cette 22. prop. & eſt tel.

Si la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troiſieſme auront auſſi vne meſme raiſon à la ſeconde & quatrieſme. Item les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, auront vne meſme raiſon à la premiere & troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & quatrieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la premiere & troiſieſme. Item la premiere & troiſieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme.

Soit A à B, comme C à D, & ſoient F, H, equemultiplices de A, C: item G, I equemultiplices de B, D. Ie dis que F eſt à B, comme H à D: item que G eſt à A, comme I à C. Et au contraire que B eſt à F, comme D à H: item A à G, comme C à I. Car puis que F eſt autant multiplice de A, que H l'eſt de C, comme F eſt à A, ainſi H à C, & par l'hypotheſe A eſt à B, comme C à D; donc en raiſon egale par la 22. pr. 5. comme F ſera à B, ainſi H ſera à D. Derechef, pource que G eſt à B, comme I à D, & comme B à A, ainſi D à C: (car puis que A eſt à B comme C à D par l'hypotheſe, en changeant comme B à A, ainſi D à C) en raiſon egale, comme G ſera à A, ainſi I à C par la ſuſdicte 22. prop. 5.



Maintenant pource que B eſt à A, comme D à C par raiſon inuerſe: & comme A à F, ainſi C à H: en raiſon egale, comme B ſera à F, ainſi D à H. Derechef, puis que A eſt à B, comme C à D: & comme B eſt à G, ainſi D à I; en raiſon egale, comme A ſera à G, ainſi C à I, par ladicte 22. pr. 5. Ce qui eſtoit propoſé.

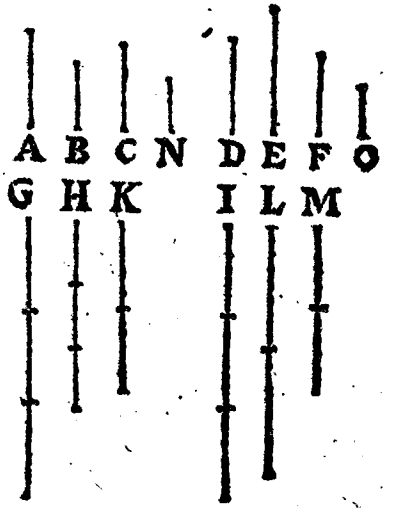
Par cecy eſt manifeſte vn moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident ſouuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres: ſçauoir eſt comme A à B, ainſi C eſt à D: donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de

A eſt à B, ainſi auſſi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C eſt à D : Item comme A eſt à B, ainſi C à D: donc comme A eſt au double, triple, ou quadruple, &c. de B, ſçauoir à G ; ainſi auſſi C ſera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D, ſçauoir à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee : icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & ſoient priſes de deux en deux en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublee, ſçauoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.



Car eſtans priſes G, H, I, equemultiplices de A, B, D : item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par la 15. p. de ce liure comme A ſera à B, ainſi G à H, puis que G, H, ſont equemultiplices d'icelles A, B, Mais comme A eſt à B, ainſi eſt E à F : donc par la 11. p. 5. comme G eſt à H, ainſi E eſt à F. Mais comme E eſt à F, ainſi auſſi L eſt à M, par la ſuſdite 15. pr. 5. pource que L, M, ſont equemultiplices d'icelles E, F : donc auſſi comme G eſt à H, ainſi L eſt à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B eſt à C, ainſi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplice de la premiere B, ſera à K multiplice de la ſeconde C, ainſi I multiplice de la troiſieſme D, ſera à L multiplice de la quatrieſme E : donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & la proportion d'icelles ſans ordre, puis qu'il a eſté demonſtré, que comme G eſt à H, ainſi L eſt à M, & comme H eſt à K, ainſi I à L ; & partant par la 21. p. 5. ſi G eſt plus grande, egale, ou moindre que K, auſſi I ſera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A ſera à C, ainſi ſera D à F. Parquoy ſi trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

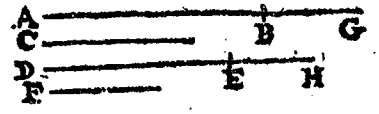
Que s'il y auoit plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublee, ſçauoir eſt que comme A eſt à B, ainſi F ſoit à O, & comme B eſt à C, ainſi E ſoit à F, & comme C à N, ainſi D à E. Ie dis que A ſera à N, comme D à O. D'autant qu'il a eſté demonſtré en trois grandeurs que comme A eſt à C, ainſi F eſt à O ; & que par l'hypotheſe comme C eſt à N, ainſi D eſt à E, il y aura trois grandeurs d'vn coſté A, C, N, & trois d'vn autre D, E, O, leſquelles priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee. Donc dere-

chef en raiſon egale demonſtree en trois grandeurs A ſera à N, comme D à O. Le meſme ſera auſſi demonſtré en cinq grandeurs par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi ſemblablement de dauantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, & la cinquieſme à la ſeconde, comme la ſixieſme à la quatrieſme; la compoſée de la premiere & cinquieſme, ſera à la ſeconde, comme la compoſée de la troiſieſme & ſixieſme, ſera à la quatrieſme.

Soit la premiere AB à la ſeconde C, comme la troiſieſme DE eſt à la quatrieſme F; & la cinquieſme B G à la deuxieſme C, comme la ſixieſme EH à la quatrieſme F. Ie dis que la toute AG, ſera à C, comme la toute DH à F.



Car puiſque comm BG à C, ainſi EH à F, auſſi en changeant, comme C ſera à B G, ainſi F à E H. Veu donc que A B eſt à C, comme D E à F, & C à BG, comme F à EH, en raiſon egale, A B ſera à B G, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en compoſant, comme la toute AG ſera à BG, ainſi la toute DH ſera à EH, par la 18. pr. d'iceluy 5. liure: & derechef puis que A G eſt à B G, comme D H à E H, & BG à C, comme EH à F, en raiſon egale, AG ſera à C, comme DH à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Preſque en la meſme maniere ſera demonſtré en tout genre de proportion, ce qui a eſté demonſtré à la 6. pr. de ce 5. liure, tant ſeulement aux grandeurs multiplices, ſçauoir eſt,

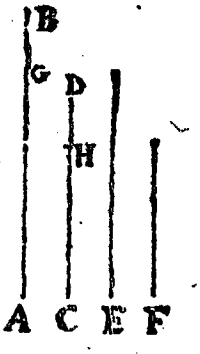
Si deux grandeurs ont meſme proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchees ayent meſme proportion à icelles; les reſtantes auront auſſi meſme proportion à icelles.

Que AG & DH ayent meſme proportion à C & F, c'eſt à dire que comme AG eſt à C, ainſi DH ſoit à F. Item les retranchez AB & DE ayent meſme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB eſt à C, ainſi DE ſoit auſſi à F: Ie dis que les reſtantes BG, EH ont meſme proportion à icelles C, F, c'eſt a dire que comme BG eſt à C, ainſi EH eſt à F. Car d'autant que comme AB eſt à C, ainſi DE eſt à F, par raiſon inuerſe, comme C à AB, ainſi F à DE: donc puis que A G eſt à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à D E, en raiſon egale AG ſera à AB, comme DH à DE: & en diuiſant comme BG ſera à AB, ainſi DH à DE. Et derechef, puis que BG eſt à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raiſon egale BG ſera à C, comme EH à F. Ce qui eſt propoſé.

THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, ſont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, deſquelles AB ſoit la plus grande & F la plus petite. Ie dis que AB & F enſemble, ſont plus grandes que les deux autres CD & E enſemble.



Car ſi de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retranche CH egale à E: AG ſera à CH, comme E à F, c'eſt à dire comme AB à CD. Et puiſque la toute AB eſt à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce liure, comme la toute AB ſera à la toute CD, ainſi le reſte GB ſera au reſte HD: Parquoy iceluy reſte GB ſera plus grand que le reſte HD, comme la toute AB eſt plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E ſont egales, ſi on adiouſte à icelles, les grandeurs egales F & CH, c'eſt à ſçauoir, F à icelle AG, & CH à E; viendront AG & F enſemble, egales à E & CH enſemble. Et adiouſtant à ces choſes egales, les inegales GB, & HD, ſeront faictes AB & F enſemble plus grandes que GE & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que HD. Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il failloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement que ſi la grandeur antecedante d'vne raiſon, eſt la plus grande de toutes celles de la propotion, que la conſequente de l'autre raiſon, ſera la plus petite de toutes, comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi E à F; & que AB premiere eſt plus grande que E tierce, par la 14. p. 5. CD ſeconde ſera auſſi plus grande que F quatrieſme.

Semblablement, pource que AB eſt plus grande que CD, auſſi E ſera plus grande que F a cauſe de la ſimilitude des raiſons, comme nous auons dit au Scholie de la meſme 14. prop. Que ſi au contraire la grandeur antecedante d'vne raiſon eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi on dit que F eſt à E, comme CD à AB.

Commandin adiouſte en ce lieu, le theoreme ſuiuant.

Si trois grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite d'icelles, ſeront plus grandes que le double de l'autre.

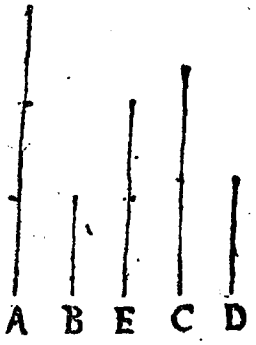
Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C, tellement que comme A eſt à B, ainſi B à C, & ſoit A la plus grande, & D la plus petite: Ie dis que A & D enſemble, ſont plus grandes que le double de B. Car ayant pris D egale à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & partant A & C enſemble, ſeront plus grandes que B & D enſemble par la 25. prop. 5. c'eſt adire que le double de B. Ce qui eſt propoſé.

Euclide finit icy ſon 5. liure des Elemens; mais d'autant que Campanus, Commandin

Commandin & Clauius y adiouſtent quelques autres propoſitions, dont les bons Autheurs s'aident fort ſouuent, & les citent, comme ſi elles eſtoient d'Euclide, nous les adiouſterons auſſi icy.

THEOR. 26. PROP. XXVI.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: en changeant, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatrieſme à la tierce.



Que A ait plus grande raiſon à B que C à D: Ie dis que la raiſon de B à A eſt moindre que la raiſon de D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C eſt à D. Donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que celle de E à B; & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que E; & partant B aura moindre raiſon à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeãt D à C. Donc auſſi la raiſon de B à A eſt moindre que celle de D à C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons preſque en la meſme maniere que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en changeant, la ſeconde aura plus grande raiſon à la premiere, que la quarte à la tierce.

Que A ait moindre raiſon à B, que C à D: Ie dis qu'en changeant B a plus grande raiſon à A, que D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D: & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que celle de E à B, parce que nous auons demonſtré au Scholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: & par la 8. prop. 5. la raiſon de B à A ſera plus grande que de B à E. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeant D à C: Donc auſſi la raiſon de B à A ſera plus grande que de D à C.

Autrement. *Dautant que la raiſon de A à B, eſt moindre que de C à D: la raiſon de C à D ſera plus grande que celle de A à B: donc en changeant par la 26. prop. 5. la raiſon de D à C, ſera moindre que de B à A: & partant il y aura plus grande raiſon de B à A que de D à C. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXVII.

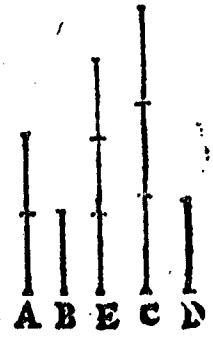
Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte; auſſi en permutant la premiere aura plus grande raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Que A ait plus grande raiſon à B que C à D. Ie dis qu'en permutant A aura plus grande raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D: & la raiſon de A à B ſera auſſi plus grande que de E à B: & partant A ſera plus grande que E par la 10 prop. 5. donc la raiſon de A à C ſera plus grande que de E à C par la 8. prop. 5. Mais pour ce qu'en changeant comme E eſt à C, ainſi B eſt à D. (car E eſt poſée à B, comme C à D,) il y aura auſſi plus grande raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en permutant la premiere aura moindre raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Car ſoit la raiſon de A à B moindre que de C à D: Ie dis qu'en permutant A aura moindre raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D, & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que de E à B: & par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: parquoy la raiſon de A à C ſera moindre que de E à la meſme C par la 8. prop. 5. Et puis que E eſt poſée eſtre à B, comme C à D: en permutant comme E à C, ainſi B a D. Donc auſſi la raiſon de A à C ſera moindre que de B à D. Ce qui eſt propoſé.

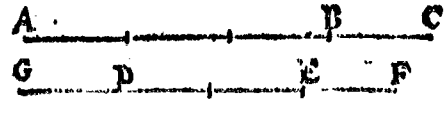


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de A à B, que de C à D, il y aura plus grande raiſon de C à D que de A à B: donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura auſſi plus grande raiſon de C à A que de D à B: & par la 26. prop. 5. en raiſon inuerſe, il y aura moindre raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.*

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte: la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce & de la quarte à la quarte.

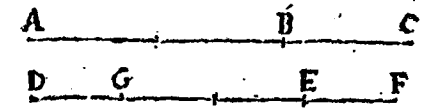
Que AB premiere ait plus grande raiſon à BC ſeconde, que DE tierce à EF quarte: Ie dis qu'en compoſant AC aura plus grande raiſon à BC, que DF à EF. Car ſoit entendu comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE ſoit à EF; & il y aura auſſi plus grande raiſon de



GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE sera plus grande que DE. Donc puis que comme AB est à BC, ainsi GE est à EF: en composant comme AC sera à BC, ainsi GF sera à EF: Mais il y a plus grande raison de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF est plus grande que DF) Donc aussi AC aura plus grande raison à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si AB a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en composant AC aura moindre raison à BC que DF à EF. Car derechef si cõme AB est à BC, ainsi quelque autre GE est à EF: Icelle GE sera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en composant AC sera à BC, comme GF, à EF. Mais GF a moindre raison à EF que DF à EF par la 8. pr. 5. attendu que GF est moindre que DF: donc aussi AC aura moindre raison à CB, que DF à EF.

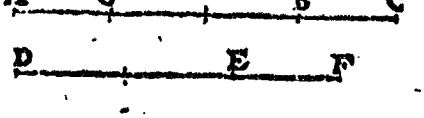


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raison de AB à BC, que de DE à EF, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AB à BC; & par la 28. p. 5. en composant il y aura aussi plus grande raison de DF à EF, que de AC à BC: & partant il y aura moindre raison de AC à BC, que de DF à EF.*

THEOR. 29. PROP. XXIX.

Si la composee de la premiere & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composee de la tierce & quarte à la quatriesme: Aussi en diuisant, la premiere aura plus grande raison à la deuxiesme, que la troisiesme à la quatriesme.

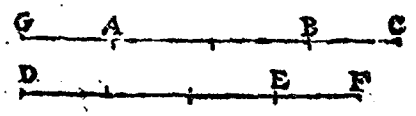
Que AC ait à BC plus grande raison que DF à EF: Ie dis qu'en diuisant AB, aura aussi à BC plus grande raison que DE à EF. Car soit entendu que comme DF est à EF, ainsi quelque autre GC soit à CB; & il y aura aussi plus grande raison de AC à BC que de GC à BC: & partant AC sera plus grande que GC par la 10. p. 5. Ostant donc BC commun, restera AB plus grande que GB: & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raison de AB à BC, que de GB à BC. Mais en diuisant par la 17. p. 5. comme GB est à BC, ainsi DE est à EF: (car on a posé GC estre à BC, comme DF à EF.) Donc aussi la raison de AB à BC sera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Que si AC a moindre raison à BC que DF à EF, aussi en diuisant AB aura

moindre raiſon à BC que DE à EF. Car ſi on entend GC eſtre à EC, comme DF à EF, la raiſon de AC à BC ſera pareillement moindre que celle de GC à BC: & par la 10. p. 5. AC ſera moindre que GC. Oſtant donc BC commune, reſtera AB moindre que GB; & par la 8. pr. 5. la raiſon de AB à BC ſera moindre que de GB à BC: Mais puis que GC eſt à BC comme DF à EF, en diuiſant GB ſera à BC comme DE à EF: Il y aura donc auſſi moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF.

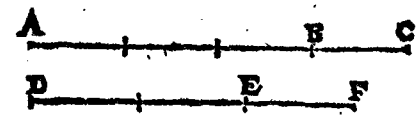


Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF, que de AC à BC: donc auſſi en diuiſant, il y aura plus grande raiſon de DE à EF, que de AB à BC par la 29. p. 5. & partant la raiſon de AB à BC ſera moindre que de DE à EF.*

THEOR. 30. PROP. XXX.

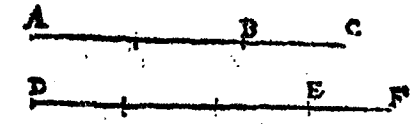
Si la compoſee de la premiere & ſeconde a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſee de la tierce & quarte à la quarte: par conuerſion de raiſon, la premiere & ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

Que AC ait plus grande raiſon à BC que DF à EF: Ie dis par conuerſion de raiſon, que AC a moindre raiſon à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raiſon à BC que DF à EF, en diuiſant AB aura plus grande raiſon à BC que DE à EF par la 29. p. 5. Donc par raiſon inuerſe, il y aura moindre raiſon de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en compoſant, il y aura auſſi moindre raiſon de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui eſtoit à demonſtrer.



SCHOLIE.

Semblablement ſi AC a moindre raiſon à CB que DF à EF, auſſi par conuerſion de raiſon AC aura plus grande raiſon à AB que DF à DE. Car puis qu'il y a moindre raiſon de AC à BC que de DF à EF, par la 29. p. 5. en diuiſant il y aura moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF, & en changeant par la 26. p. 5. il y aura pareillement moindre raiſon de BC à AB, que de EF à DE: donc en compoſant par la 28. p. 5. il y aura plus grande raiſon de AC à AB que de DF à DE.

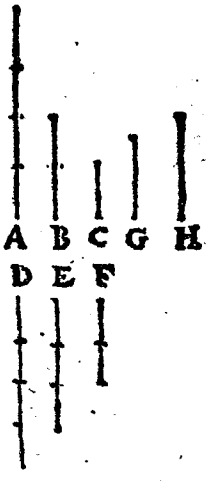


Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que celle de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF que de AC à BC: donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de DF à DE, que de AC à AB, c'eſt à dire qu'il y aura plus grande raiſon de AC à AB, que de DF à DE.*

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde, & auſſi plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: En raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E: Item, la raiſon de B à C ſoit auſſi plus grande que de E à F: Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura plus grande raiſon de A à C que de D à F.



Car ſoit entendu G eſtre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raiſon de B à C, que de G à C: Donc par la 10. p. 5. B ſera plus grande que G; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raiſon de A à G, que de A à B: Mais la raiſon de A à B eſt poſee plus grãde que de D à E: Il y aura donc beaucoup plus grande raiſon de A à G, que de D à E. Soit derechef poſée H eſtre à G, comme D à E: Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: & partant A aura plus grande raiſon à C, que H à la meſme C, par la 8. p. 5. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F, (pource que comme D eſt à E, ainſi H à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons en la meſme maniere, que ſi la raiſon de Æ à B eſt la meſme que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F: ou au contraire, ſi la raiſon de Æ à B eſt plus grande que de D à E, & celle de B à C la meſme que de E à F: en raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de Æ à C, que de D à F: car ſoit premierement Æ à B, comme D à E, mais la raiſon de B à C plus grande que de E à F. Soit poſée G à C comme E à F; & la raiſon de B à C ſera plus grande que de G à C, & conſequemment B plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy il y aura plus grande raiſon de Æ à G que de Æ à B. Mais Æ eſt poſee à B, comme D à E. Donc auſſi la raiſon de Æ à G ſera plus grande que de D à E. Soit poſée derechef H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de Æ à G que de H à G; & par la 10. p. 5. Æ ſera plus grande que H: Parquoy la raiſon de Æ à

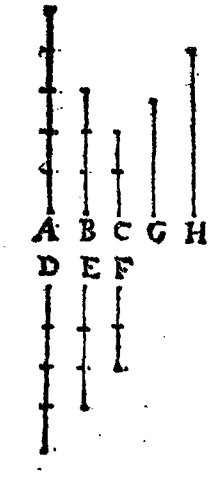
C ſera plus grande que de H à C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F: (attendu que comme D à E, ainſi H à G, & comme E à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Maintenant la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E, mais B ſoit à C, comme E à F. Soit poſée G à C, comme E à F; & B ſera auſſi à C, comme G à C: & par la 9. p. 5. B ſera egale à G. Parquoy A ſera à G, comme A à B par la 7. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt poſée plus grande que de D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit derechef poſée H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & partant A ſera plus grande que H par la 10. p. 5. & il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à C. Mais comme H eſt à C, ainſi en raiſon egale D eſt à F: (car comme D à E, ainſi H à G; & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc pareillement plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Nous demonſtrerons ſemblablement que ſi A a moindre raiſon à B, que D à E; & B à C moindre raiſon que E à F: auſſi en raiſon egale A aura moindre raiſon à C, que D à F. Et le meſme aduiendra encore, ſi A eſtant à B comme D à E, la raiſon de B à C eſt moindre que de E à F: Ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſtant moindre que de D à E, B eſt à C comme E à F: Car il eſt manifeſte que la demonſtration ſera touſiours la meſme que deſſus.

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la ſeconde: En raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.



Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & que A ait plus grande raiſon à B, que E à F, & B à C que D à E: Ie dis qu'en raiſon egalle, A aura plus grande raiſon à C, que D à F.

Car ſoit entendu que G eſt à C, comme D à E; & il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de G à C: parquoy B ſera plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy la raiſon de A à G ſera plus grande que de A à B, par la 8. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt plus grande que de E à F: il y aura donc encore beaucoup plus grande raiſon de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H eſtre à G, cõme E eſt à F, & il y aura auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G. &

par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: parquoy il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à la meſme C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F: (car comme D eſt à E, ainſi G eſt à C, & comme E eſt à F, ainſi H à G.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

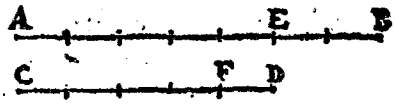
On demonſtrera ſemblablement, que ſi A a meſme raiſon à B que E à F, & B à C plus grande que D à E: Ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de E a F, mais celle de B à C la meſme que de D à E; en raiſon egale, la raiſon de A à C ſera plus grande que de D à F.

Par meſme raiſon on demonſtrera auſſi, que ſi les raiſons des premieres grandeurs ſont moindres; auſſi la raiſon des extremes ſera moindre; c'eſt à dire, que ſi A a moindre raiſon à B que E à F, & B à C que D à E: auſſi A aura moindre raiſon à C, que D à F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF: Ie dis que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD.



Car d'autant qu'il y a plus grande raiſon de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de AB à AE, que de CD a CF par la 27. p. 5. & par conuerſion de raiſon il y aura moindre raiſon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. p. 5. Donc en permutant, il y aura auſſi moindre raiſon de AB à CD, que de EB à FD par la 27. p. 5. c'eſt à dire, que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB, à la toute CD. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

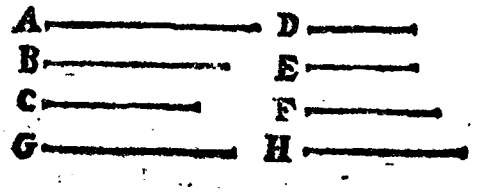
Que ſi la toute AB a moindre raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF: auſſi le reſte EB aura moindre raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD, comme il appert par la demonſtration cy-deſſus.

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'vn coſté, & autant d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſecon-

de à la ſeconde; & ceſte cy ſoit auſſi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainſi de ſuitte: Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que toutes les premieres, la premiere oſtée, à toutes les dernieres, la premiere auſſi oſtée; mais moindre raiſon que la premiere des premieres à la premiere des dernieres; & finalement auſſi plus grande raiſon que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F; & la raiſon de A à D ſoit plus grande que celle de B à E, & celle-cy plus grande que celle de C à F: Ie dis que A, B, C enſemble, ont plus grande raiſon à D, E, F enſemble, que B, C enſemble à E, F enſemble: mais moindre que A à D, & auſſi plus grande que C à F.



Car puis qu'il y a plus grande raiſon de A à D que de B à E, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de A à B que de D à E par la 27. p. 5. Donc en compoſant A & B enſemble, auront plus grande raiſon à B, que D & E enſemble à E par la 28. p. 5. Et en permutant derechef, A & B enſemble, auront plus grande raiſon à D & E enſemble que B à E. Et puis que la toute A, B, à plus grande raiſon à la toute D, E, que la retranchée B à la retranchée E, la reſtante A aura auſſi plus grande raiſon à la reſtante D, que la toute A, B, à la toute D, E, par la prec. prop. Par meſme raiſon, il y aura plus grande raiſon de B à E, que de la toute B, C, à la toute E, F. Il y aura donc encore bien plus grande raiſon de A à D, que de la toute B, C à la toute E, F. Donc en permutant, il y aura plus grande raiſon de A à B, C enſemble, que de D à E, F enſemble par la 27. p. 5. Et en compoſant, il y aura plus grande raiſon de A, B, C à B, C, que de D, E, F à E, F, par la 28. p. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raiſon des toutes A, B, C enſemble, aux toutes D, E, F enſemble, que de B, C à E, F: ce qui eſt premierement propoſé.

Et puis qu'il y a plus grande raiſon de la toute A, B, C à la toute D, E, F, que de la retranchee B, C à la retranchee E, F, il y aura auſſi plus grande raiſon de la reſtante A à la reſtante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, par la prop. prec. Ce qui eſt ſecondement proposé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raiſon de B à E, que de C à F: en permutant il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de E à F par la 27. prop. 5. Et en compoſant, la toute B, C aura plus grande raiſon à C, que la toute E, F, à F par la 28. p. 5. Donc en permutant derechef, il y aura plus grande raiſon de B, C à E, F, que de C à F. Mais il a eſté demonſtré que

A, B, C,

A,B,C ensemble ont plus grande raison à D,E,F, ensemble, que B,C, à E,F: Il y aura donc encore bien plus grande raison des toutes A,B,C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C à la derniere F. Ce qui est tiercement proposé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, auec la mesme hypothese, c'est à dire, que la raison de C tierce à F tierce soit plus grande, que de G quarte à H quatriesme: Ie dis que la mesme chose s'ensuit. Car comme il a desia esté demonstré en trois grandeurs, il y la plus grande raison de B à E que de B,C,G ensemble à E, F, H ensemble. Donc il y aura encore plus grande raison de A à D, que de B,C,G,à E,F, H. Et en permutant il y aura plus grande raison de A à B,C,G que de D à E, F, H. Parquoy en composant il y aura aussi plus grande raison de A, B, C, G à B,C,G, que de D, E, F, H à E,F,H: & en permutant il y aura plus grande raison de A, B, C, G à D,E,F, H, que de B,C,G à E,F,H,. Ce qui est premierement proposé.

Et veu qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C, G, à la toute D,E,F,H, que de la retranchee B, C, G, à la retranchee E,F, H, la restante A aura plus grande raison à la restante D, que la toute A,B,C,G, à la toute D,E,F,H. Ce qui est secondement proposé.

Mais comme il a esté demonstré en trois grandeurs, B,C,G ont plus grande raison à E,F,H, que G à H: & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H que B, C, G, à E,F,H: Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A,B,C,G à D, E, F, H, que de la derniere G à la derniere H: ce qui est tiercement proposé.

En la mesme maniere on conclurra le mesme en 5 grandeurs par 4: & en 6 par 5, &c. tout ainsi qu'il est demonstré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & c. Ce qu'il falloit demonstrer.

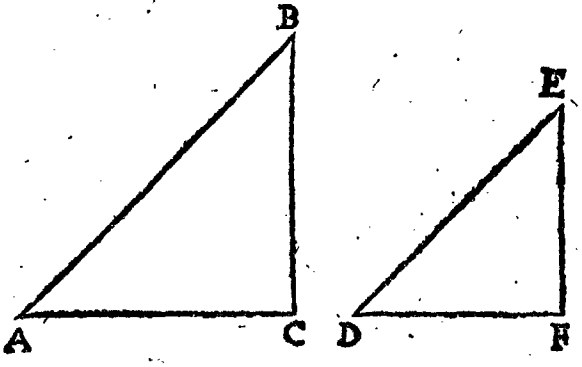
Fin du cinquiesme liure.

ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

EMBLABLES figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au ſien, & les coſtez qui contiennent les angles egaux, proportionnaux.

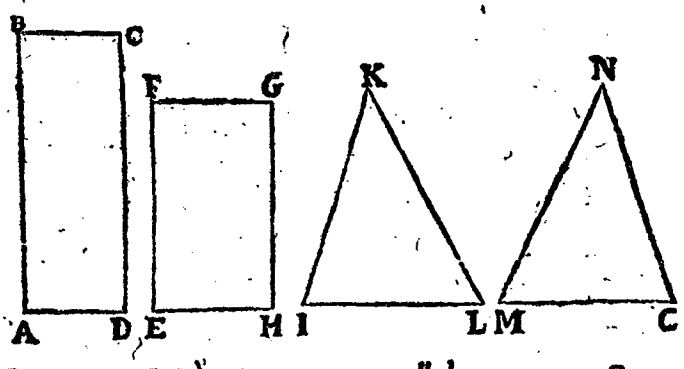
C'eſt à dire, que toutes figures rectilignes ſont dittes ſemblables, ſi eſtans equiangles elles ont les coſtez d'alentour leurs angles egaux proportionnaux: comme les deux triangles ABC, DEF, ſeront dits ſemblables, ſi l'angle A eſtant egal à l'angle D, l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; les coſtez qui ſont & conſtituent iceux angles egaux, ſont proportionnaux; c'eſt à ſçauoir, que comme AB eſt à AC, ainſi DE ſoit à DF, & comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF, & comme AC eſt à BC, ainſi DF ſoit à EF.



Que ſi l'vne ou l'autre des deux conditions ſuſdites manque, c'eſt à dire, que chacun des angles de l'vne des figures eſtant egal à chacun des angles de l'autre, ſi les coſtez d'alentour leurs angles egaux ne ſont proportionnaux; ou au contraire: telles figures ne ſeront dittes ſemblables, comme ſont le quarré, & le quarré long: car ces deux figures ont bien les angles egaux, ſçauoir droicts: mais les coſtez de l'vne ne ſont pas en meſme raiſon que les coſtez de l'autre: car ceux du quarré ſont en raiſon d'egalité, & ceux d'alentour l'angle droict du quarré long, ſont en raiſon d'inegalité, puis que l'vn eſt plus grand que l'autre. D'où eſt manifeſte, que toutes figures rectilignes equiangles & equilaterales, leſquelles ont les angles & les coſtez egaux en nombre, ſont ſemblables, combien qu'elles ſoient inegales.

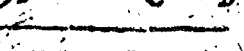
2. Les figures ſont reciproques, quand les termes antecedans & conſequens des raiſons, ſont en l'vne & en l'autre figure.

C'eſt à dire, que s'il y a deux figures ſemblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux ſoient en l'vne des figures, & le ſecond & troiſieſme terme en l'autre; icelles figures ſeront dictes reciproques. Comme ſi aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH, les coſtez AB, BC, ſont proportionnaux aux coſtez EF, FG; tellement qu'il y ait meſme raiſon de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB ſoit à FG comme EF à BC: Iceux parallelogrammes ſeront dicts figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux eſt le terme antecedant de l'vne des raiſons, & le conſequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, ſeront auſſi dicts reciproques, ſi IK eſt à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.



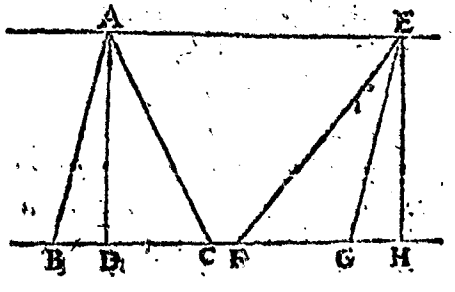
3. Vne ligne droicte eſt dicte eſtre diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, quand la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

Quand quelque ligne droicte, comme AB, eſt couppee inegalement en C, de telle ſorte que la toute AB, ſoit au plus grand ſegment AC, comme iceluy plus grand ſegment AC, eſt au moindre ſegment BC: ceſte ligne AB ſera dicte eſtre couppee en C ſelon la moyenne & extreme raiſon. Or comme cela ſe fait, Euclide l'enſeignera en la 30. p. de ce liure, combien que ſous autres paroles il l'ait deſia enſeigné à la 11. p. 2.



4. La hauteur d'vne chacune figure, eſt la perpendiculaire tirée du ſommet à la baſe.

Si de A ſommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la baſe BC, icelle perpendiculaire ſera la hauteur d'iceluy triangle ABC; tellement que ledict triangle ſera dict auoir autant de hauteur qu'eſt icelle perpendiculaire AD: ſemblablement la perpendiculaire EH tiree de E, ſommet du triangle EFG, ſur la baſe FG, prolongee de la part de G, ſera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy ſi les perpendiculaires de deux figures menees des ſommets d'icelles ſur leurs baſes (ſoit qu'icelles baſes ſoient prolongees, ou non) ſoit



egales; icelles figures seront dittes auoir mesme hauteur. Or telles perpendiculaires seront egles, quand les bases des figures & leurs sommets seront constituez en mesmes paralleles: Comme sont les perpendiculaires AD, EH, des triangles ABC, FEG, constituez entre mesmes paralleles. Car puis que les deux angles ADH, EHD, interieurs, & de mesme part, sont droicts, les lignes AD, EH, seront paralleles par la 28. p. 1. Mais AE, DH, sont aussi paralleles, puis que les triangles ABC, EFG, sont posez estre constituez entre mesmes paralleles: Donc le quadrilatere ADHE, sera parallelogramme, & partant les costez opposez AD, EH, seront egaux par la 34. prop. 1. Ce qui estoit à prouuer.

5. Vne raison est dicte estre composee de raisons, quand les quantitez des raisons multipliées entr'elles font quelque raison.

C'est à dire, que quand les quantités de deux ou plusieurs raisons multipliées entr'elles, produisent quelque quantité de raison: icelle raison est dicte estre composee de celles-là. Or la quantité d'vne raison est le denominateur d'icelle, comme nous auons ia dit sur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raison triple est 3: mais de la subtriple c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison double se dit estre composee de la sesquialtere, & de la sesquitierce, pource que les quantitez ou denominateurs d'icelles, sçauoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, estans multipliés entr'eux produisent 2, denominateur ou quantité de la raison double.

Derechef, la mesme raison double sera dicte estre composee de la double sesquialtere, & de la subsesquiquarte: car les quantitez ou denominateurs de ces deux raisons, estans multipliez entr'eux, produisent encore 2, denominateur de la mesme raison double. Pareillement la raison trigecuple se dit estre composee des raisons double, triple & quintuple; d'autant que les denominateurs d'icelles raisons, sçauoir est 2, 3, & 5, estans multipliez entr'eux produisent 30, denominateur d'icelle raison trigecuple. Parquoy estans posees tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extremes sera composee des raisons entre-moyennes, pource que le denominateur ou quantité de la raison de la premiere grandeur a la derniere, est produite & procreée par les denominateurs des raisons entre-moyennes multipliés entr'eux: comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double; & C à D en raison superbipartiente tierce: la raison des extremes AD, qui est quintuple, est composee des trois raisons susdites. Car il est euident que multipliant le denominateur de la raison de A à B, par celuy de B à C, sçauoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3: & partant A est à C en raison triple, & multipliant le denominateur d'icelle, sçauoir est 3 par le denominateur de la raison de C à D, qui est $1\frac{1}{3}$ prouiennent 5; & partant A qui est à D en raison quintuple, est produite & composee des raisons entremoyennes.

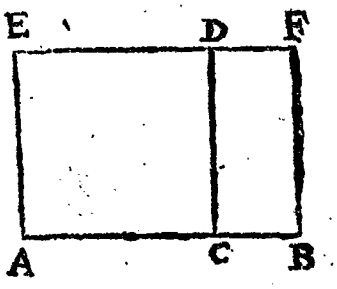
A. B. C. D.
30. 20. 10. 6.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27, 28 & 29 prop. de ce liure, que plusieurs du 10. adiouſtent icy ceſte def.

6. Vn parallelogramme estant appliqué selon quelque ligne droicte donnee, est dict defaillir d'vn parallelogramme,

lors qu'il n'occuppe pas toute ladicte ligne: mais il eſt dit exceder, quand il en occuppe vne plus grande; en ſorte toutesfois qu'iceluy parallelogramme defaillant, ou excedant ait deux angles communs auec le parallelogramme appliqué ſur toute la ligne propoſee; & la difference de ces deux parallelogrammes eſt dicte defaut, ou excez.

Soit vne ligne droicte AB ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme ACDE, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB, ains laiſſe CB; & ſoit acheué le parallelogramme ABFE tirant BF parallele à CD iuſques à ce qu'elle rencontre ED prolongee en F. Or le parallelogramme AD appliqué ſelon la ligne droicte AB, ayant les deux angles A, E communs auec le parallelogramme AF, appliqué & deſcrit ſur toute ladite ligne AB, eſt dict defaillir du parallelogramme CF; & iceluy parallelogramme CF ſera appellé le defaut.

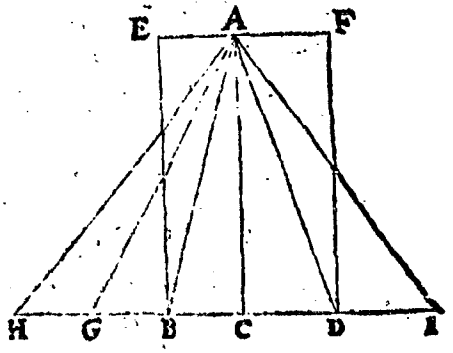


Derechef, ſoit vne ligne droicte AC, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme AF, ayant le coſté AB plus grand que la ligne propoſee AC, & ſoit tiree CD parallele à BF. Donc le parallelogramme AF appliqué ſelon la ligne droicte AC, & qui auec le parallelogramme AD deſcrit ſur toute ladicte ligne AC a les deux angles A, E communs, ſera dit exceder AD du parallelogramme CF, tellement qu'iceluy CF eſt dit l'excez.

THEOR. 1. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrammes de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux triangles ABC & ACD de meſme hauteur, ſur les baſes BC & CD: ſoient auſſi deux parallelogrammes CE, CF de meſme hauteur, les baſes deſquels ſoient les meſmes BC, CD. Ie dis premierement que le triangle ABC, eſt au triangle ACD, comme la baſe BC, eſt à la baſe CD: c'eſt à ſçauoir que ſi on poſe pour premiere grandeur la baſe BC, pour ſeconde la baſe CD, pour troiſieſme le triangle ABC, & pour quatrieſme le triangle ACD; les equemultiplices de la premiere & troiſieſme ſeront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, ainſi que le requiert la 6. definition du 5. liure.



Qu'il ne ſoit ainſi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres auoir

pris d'vn coſté BG & GH, chacune egale à BC: item de l'autre coſté, DI egale à CD, ſoient menees les lignes droictes AG, AH, AI. Donc par la 38. pr. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, eſtans ſur baſes egales & entre meſmes paralleles, ſeront egaux: auſſi par les meſmes raiſons les deux triangles ACD & ADI ſeront egaux; ainſi il eſt euident qu'autant de fois que la baſe HC contiendra la baſe BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la baſe CI contiendra la baſe CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy ſi la baſe CH, eſt egale à la baſe CI, le triangle ACH ſera auſſi egal au triangle ACI, par la 38. p. 1. Mais ſi la baſe eſt plus grande, conſequemment le triangle ſera plus grand; ſi plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la baſe BC ſera à la baſe CD, ainſi le triangle ABC ſera au triangle ACD: ce qui eſtoit à demonſtrer pour la premiere partie.

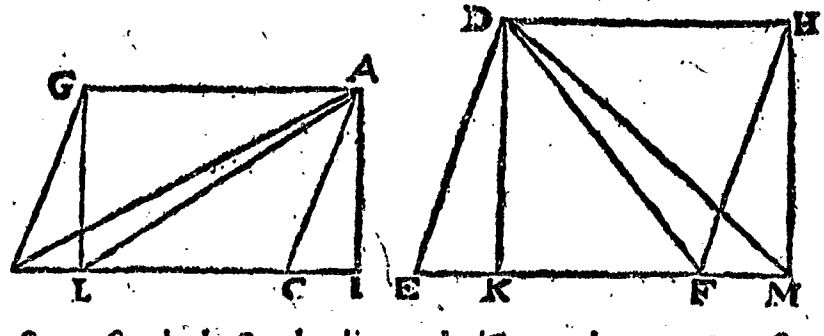
Quant à la ſeconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le meſme ſe peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes ſont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. prop. 1 & par la 15. pr. 5. ce qui eſt prouué d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de meſme hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Commandin adiouſte en ce lieu ceſt autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, deſquels les baſes ſont egales, ou vne meſme, ſont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les baſes BC, EF egales: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI eſt à la hauteur DK. Car ſi on prend les lignes IL, KM egales aux baſes BC, EF, & on tire les lignes LA, MD, le triangle ALI ſera egal au triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils ſont ſur baſes egales LI, BC, & entre meſmes paralleles AG, IB: Par meſme raiſon le triangle DKM ſera egal au triangle DEF. Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC ſera à DEF, ainſi ALI ſera à DKM. Mais par la 1. p. 6. comme ALI eſt à DKM, ainſi AI à DK. (car ſi AI, DK ſont poſees les baſes, les lignes droictes egales LI, KM ſeront les hauteurs.) Donc auſſi ABC ſera à DEF, comme AI à DK.



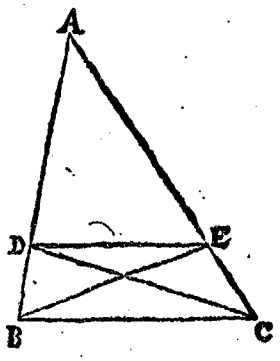
Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC eſt à DEF, ainſi le parallelogr. AGBC au parallelogramme DEFH: (car iceux parallelogrammes ſont doubles des triangles par la 41. p. 1.) auſſi AGBC ſera à DEFH, comme AI à DK. Le meſme s'enſuiura ſi les triangles, & les parallelogrammes ont vne meſme baſe.

THEOR. 2. PROP. II.

Si on meine vne ligne droicte parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, laquelle couppe les deux autres coſtés ; elle les couppera proportionnellement : & ſi deux coſtés d'vn triangle ſont couppez proportionnellement, la ligne couppante ſera parallele à l'autre coſté.

Soit le triangle ABC, dans lequel ſoit menee la ligne droicte DE parallele au coſté BC, couppant les deux autres coſtez AB & AC aux poincts D & E. Ie dis que les coſtez AB, AC ſont couppez proportionnellement aux poincts D & E, c'eſt à dire que AD ſera à DB, comme AE eſt a EC.

Car eſtans menees les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront meſme raiſon l'vn comme l'autre au troiſieſme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, eſtans de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme la baſe BD à la baſe DA : & par la meſme propoſition, le triangle CDE, eſtant de meſme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils ſeront auſſi l'vn à l'autre, comme CE eſt à EA : & partant par la 11. p. 5. BD ſera à DA, comme CE à EA : (puiſque ces deux raiſons ſont les meſmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au meſme triangle DEA.) Ce qui eſtoit propoſé.



Pour la ſeconde partie : ie dis que ſi DB eſt à DA, comme CE à EA, la ligne couppante DE ſera parallele au coſté BC.

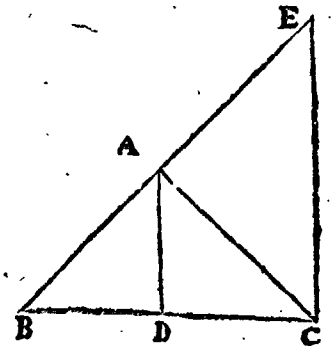
Car les triangles DEB & DEA, ſeront par la 1. p. 6. l'vn à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, ſeront auſſi l'vn à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB ſera au triangle DEA, comme le triangle CDE eſt au meſme triangle DEA : & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC ſeront egaux, leſquels eſtans ſur meſme baſe DE, par la 39. p. 1. ils ſeront entre meſmes paralleles : & partant DE ſera parallele à BC. Parquoy ſi l'on meine vne ligne parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement par vne ligne droicte, laquelle couppe auſſi la baſe ; les ſegmens de la baſe ſeront l'vn à l'autre comme les autres coſtez du triangle : Et ſi les ſegmens de la baſe ſont l'vn à l'autre comme les autres coſtez du triangle ; la ligne droicte

tiree du ſommet à la ſection de la baſe, couppe l'angle en deux egalement.

Au triangle ABC, ſoit l'angle BAC couppé en deux egalement par la ligne AD, laquelle couppe auſſi la baſe BC au poinct D : ie dis premierement, que BD eſt à DC, comme AB à AC.



Qu'il ne ſoit ainſi: apres auoir du poinct C mené CE parallele à DA, ſoit continué BA directement iuſques à ce qu'il rencontre CE en E; (Or BA, CE ſe rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE ſont moindres que deux droicts, eſtans egaux aux deux B & BDA, qui ſont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE ſont paralleles, l'angle CAD ſera egal à ſon alterne ACE par la 29. p. 1. Et ſi l'exterieur DAB ſera egal à l'oppoſé interieur AEC. Mais BAD, CAD eſtans egaux par l'hypotheſe, auſſi par les com. ſent. AEC, ACE ſeront egaux : & partant par la 6. p. 1. les coſtez AE & AC ſeront egaux. Mais par la precedente prop. BA eſt à AE, comme BD à DC; (eſtant AD parallele à CE) & par conſequent BA ſera auſſi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la ſeconde partie : ie dis que ſi BA eſt à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB ſera couppé en deux egalement par la ligne droicte AD.

Car apres auoir conſtruit comme deſſus, BA ſera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA ſera à AE, comme le meſme BA eſt à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC ſeront egaux; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, ſeront auſſi egaux; & par la 29. p. 1. ils ſont egaux, l'vn à DAB, & l'autre à DAC, leſquels par ce moyen ſeront auſſi egaux; ce qui eſtoit propoſé. Parquoy ſi l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

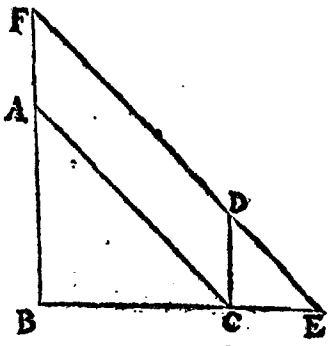
THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles equiangles, les coſtez qui ſont au long des angles egaux, ſont proportionnaux; & les coſtez qui ſouſtiennent les angles egaux, ſont de meſme raiſon.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles : c'eſt à dire, que l'angle ABC ſoit egal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troiſieſme au troiſieſme. Ie dis que comme AB eſt à BC, ainſi DC à CE; & comme BC à CA, ainſi CE à ED; & finablement comme AB à AC, ainſi DC à DE. Car ainſi les coſtez d'alentour les angles egaux, ſont les proportionnaux, & les coſtez homologues, ou de meſme raiſon, ſont ceux-là qui ſouſtiennent les angles egaux, c'eſt à dire, que tous les antecedans, & ſemblablement les conſequens regardent les angles egaux.

Soient

Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE soit egal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal à l'angle ACB, aussi les angles B & E seront moindres que deux droicts: & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennent en F. Il est euident que l'angle exterieur ECD, estant par l'hypothese egal à son oppose interieur CBA; DC sera parallele à FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB estant egal à son oppose interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez opposez egaux. Mais AC estant parallele à EF, par la 2. p. 6. AB sera à AF, ou CD son egale, comme BC à CE; & en permutant par la 16. p. 5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD estant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son egale, sera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.



Veu donc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison egale AB sera à AC, comme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

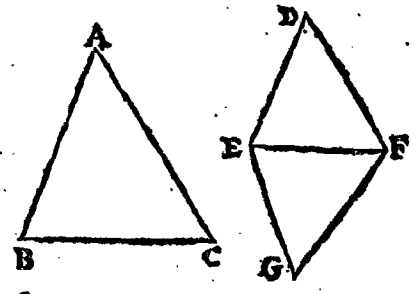
De cecy resulte, que si vne ligne droicte parallele a vn costé d'vn triangle, couppe les deux autres costez d'iceluy, elle ostera vn triangle semblable au tout. Comme au triangle BFE estant menée la ligne droicte AC parallele au costé FE, qui couppe les deux autres costez en A & C: Ie dis que le triangle ABC retranché par icelle ligne AC, est semblable au triangle BFE. Car d'autant que par la 29. p. 1. l'angle externe BAC est egal à l'interne de mesme costé F, & que l'angle B est commun a tous les deux triangles BAC, BFE, ils seront equiangles par le Corol. de la 32. p. 1. Parquoy, comme il a esté demonstré cy-dessus, ils ont les costez autour des angles egaux proportionnaux: & partant selon la 1. def. 6. iceux triangles BAC & BEF seront semblables.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, soubs lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA, comme EF à FD, & encore AB à AC comme DE à DF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir l'angle A estre egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.

Qu'il ne ſoit ainſi : ſur la ligne EF, & aux deux poincts E & F ſoient conſtruits deux angles, ſçauoir FEG egal à l'angle B, & EFG egal à l'angle C, tirant les lignes EG, & FG iuſques à ce qu'elles ſe rencontrent en G : Et par la 32. p. 1. le troiſieſme angle G ſera egal au troiſieſme angle A. Parquoy les triangles ABC, GEF ſont equiangles : & par la 4. prop. 6. comme AB eſt à BC, ainſi GE à EF. Mais comme AB eſt à BC, ainſi auſſi a eſté poſé DE à EF : Donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainſi DE à la meſme EF : & partant par la 9. p. 5. GE, DE ſeront egales. Et d'autant que par la propoſition precedente, comme BC eſt à CA, ainſi EF eſt à FG ; & par l'hypotheſe comme BC eſt à CA, ainſi EF eſt à FD : par la 11. p. 5. comme EF ſera à FG, ainſi la meſme EF ſera à FD : & par la 9. p. 5. FG, FD ſeront egales. Veu donc que les coſtez EG, FG du triangle GEF, ſont egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & la baſe EF commune aux deux triangles, les angles G & D ſeront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE ſeront auſſi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au ſien. Parquoy l'angle G eſtant egal à l'angle A, auſſi l'angle D ſera egal au meſme angle A ; & ainſi l'angle DEF ſera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainſi qu'il eſtoit propoſé. Si donc deux triangles ont les coſtez proportiõnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux ; ils ſeront equiangles, & auront les angles egaux ſous leſquels les coſtez de meſme raiſon ſont ſubtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainſi DE ſoit à EF. Ie dis que les triangles ſont equiangles, ſçauoir que l'angle A eſt egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainſi les angles egaux ſont ſubtendus des coſtez homologues.

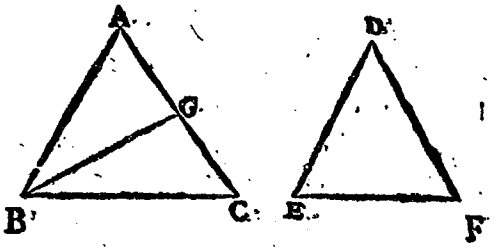
Qu'il ne ſoit ainſi ; ſur la ligne EF ſoit conſtruit, comme en la propoſit. & fig. precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC : & par la 4. p. 6. GE ſera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils ſont en la meſme raiſon) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne meſme raiſon à EF) ſeront egaux ; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux coſtez egaux à deux coſtez, ſçauoir GE, EF, à DE, EF, chacun au ſien, & les deux angles au poinct E, egaux (car ils ſont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la baſe egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien : & partant iceux triangles ſeront equiangles. Mais l'vn d'iceux triangles, ſçauoir GEF, eſt equiangle au triangle ABC par la conſtruction. Donc l'autre triangle DEF ſera auſſi equiangle au meſme trian-

gle ABC. Parquoy ſi deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long d'vn autre angle, proportionnaux, eſtans les troiſieſmes angles de meſme eſpece : Iceux triangles ſeront equiangles, & auront les angles egaux, au long deſquels les coſtez ſeront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, deſquels les deux angles A & D ſoient egaux, & les coſtez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux coſtez DE, EF d'alentour l'angle E, c'eſt à dire que comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF : mais les autres angles C & F ſoient de meſme eſpece, c'eſt à dire aigus, droicts, ou obtus : & ſoient premierement aigus. Ie dis que les triangles ſont equiangles, ſçauoir eſt, que les angles ABC & E, à l'entour deſquels ſont les coſtez proportionnaux, & les angles C & F, ſont egaux.



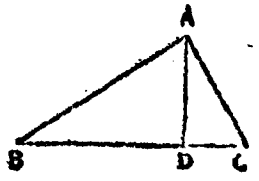
Car ſi l'angle B eſt egal à l'angle E, il appert par la precedente prop. que les triangles ſeront equiangles. Mais ſi leſdits angles ne ſont egaux, ſoit B plus grand que E, & ſoit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. Donc le troiſieſme angle AGB, ſera egal au troiſieſme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG & DEF ſeront equiangles ; & par la 4. p. 6. comme AB ſera à BG, ainſi DE à EF. Mais par l'hypotheſe, comme AB eſt à BC, ainſi DE à EF : donc par la 11. p. 5. comme AB ſera à BG, ainſi le meſme AB ſera à BC ; & partant par la 9. p. 5. BG, & BC ſeront egaux, & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC ſur la baſe CG ſerõt egaux, & tous deux aigus, & par conſequent l'angle BGA ſera plus grand qu'vn droict, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB ſont egaux à deux droicts : Mais l'angle AGB a eſté demonſtré egal à l'angle F : donc F ſeroit auſſi plus grãd qu'vn droict, & on l'a poſé auſſi moindre : ce qui eſt abſurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne ſoit aigu; & comme deſſus l'angle C ſera egal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne ſera auſſi aigu, & les deux C & BGC ne ſeront moindres que deux droicts, mais egaux, ou plus grands que deux droicts : ce qui eſt abſurde : car par la 17. p. 1. ils ſont moindres que deux droicts. Les angles ABC & E ne ſont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troiſieſme C ſera auſſi egal au troiſieſme F : ce qui eſt propoſé. Si donc deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle rectangle on tire vne per-

pendiculaire ſur labaſe ; elle couppera iceluy triangle en deux autres triangles ſemblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droict A, duquel ſoit menée à la baſe BC la perpendiculaire AD. Ie dis que les triangles ABD & ADC, auſquels eſt diuiſé iceluy triangle ABC par la perpendicul. AD, ſont ſemblables entr'eux, & au total ABC.



Qu'ainſi ne ſoit : d'autant que AD eſt perpendiculaire, l'angle BDA eſt droict, & egal à l'angle droict BAC, du triangle total ABC, & l'angle B eſt commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. p. 1. le troiſieſme angle BAD, ſera egal au troiſieſme ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC, ſeront equiangles ; & par la 4. p. 6. ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux, c'eſt à dire, que comme CB ſera à AB, ainſi AB à BD ; & comme BA à AC, ainſi BD à DA ; & comme BC à CA, ainſi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce liure les triangles ABC, ABD ſeront ſemblables.

Par meſme diſcours, on prouuera que les deux triangles ABC & ADC, ſont auſſi equiangles, & ſemblables : car l'angle C eſtant commun à tous les deux triangles, & l'angle droict BAC egal à l'angle droict ADC, le troiſieſme angle CAD ſera egal au troiſieſme angle B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC ſera à CA, ainſi CA à CD : & comme CA à AB, ainſi CD à DA, & comme CB à BA, ainſi CA à AD.

On demonſtrera en la meſme maniere, les triangles ADB, ADC eſtre ſemblables entr'eux, puiſque les angles au poinct D ſont droicts, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont eſté de monſtrez egaux : & partant par la 4. p. 6. comme BD ſera à DA, ainſi DA à DC : & comme DA à AB, ainſi DC à CA : & comme AB à BD, ainſi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'vn triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'vn triangle rectangle à la baſe, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens de la baſe : & chacun des coſtez comprenant l'angle droict, eſtre auſſi moyen proportionnel entre toute la baſe, & le ſegment qui le touche.

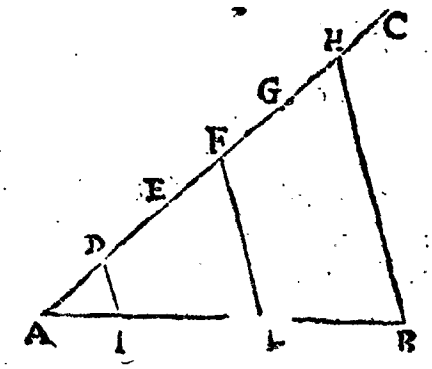
Car il a eſté demonſtré, que comme BD eſt à DA, ainſi DA eſt à DC : & partant DA eſt moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB eſt à BA, ainſi BA à BD : & par ainſi BA eſt moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC eſt à CA, ainſi CA à CD : & partant CA eſt moyenne proportionnelle entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnée, oſter vne partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oſter la cinquieſme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du poinct A ſoit menée la ligne droicte AC interminement, faiſant quelconque angle auec AB, comme BAC, & en icelle AC, ſoient priſes à l'aduanture autant de parties egales que denotte la partie qu'on veut oſter, comme en l'exemple propoſé, il faut prendre cinq parties egales AD, DE, EF, FG, GH: & apres auoir conjoinct les poincts B & H par la ligne BH, du poinct D ſoit menée DI, parallele à HB: Ie dis que AI eſt la cinquieſme partie requiſe de AB.



Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI eſt parallele au coſté HB, par la 2. p. 6. comme HD ſera à DA, ainſi BI à IA: & en compoſant par la 18. p. 5. comme HA ſera à DA, ainſi BA à IA: mais par la conſtruction HA eſt quintuple de AD: donc auſſi BA ſera quintuple de AI: & partant AI ſera la cinquieſme partie de la ligne droicte AB, laquelle auoit eſté demandée. Donc d'vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

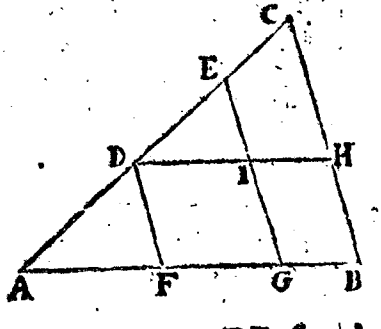
Que ſi de AB il falloit coupper pluſieurs parties, comme pour exemple les trois cinquieſmes, il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, qu'eſtant tirée la ligne FL parallele à HB, le ſegment AL ſera les trois cinquieſmes de AB, tout ainſi que AF eſt les trois cinquieſmes de AH. Et pour promptement practiquer cecy, il faut deſcrire du centre F, & de l'interualle HB vn arc au deſſous de la ligne donnée AB, mais de B & de l'interualle FH, d'eſcrire vn autre arc qui coupe le precedent, puis tirer vne ligne droicte de la ſection d'iceux arcs à F, & icelle coupera la partie requiſe AL.

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper vne ligne droicte donnée non couppée, ſemblablement à vne autre ligne droicte donnée & couppée.

Soient données les lignes droictes AB, AC, deſquelles AC eſt couppée en D & E: & il faut coupper AB en parties ſemblables & proportionnelles à celles de AC.

Soient accommodees icelles lignes données en ſorte qu'elles facent quelconque angle BAC; & apres auoir mené BC, des poincts D & E, ſoient menees DF, EG, paralleles à icelle BC, par la 31. p. 1. Ie dis que la ligne AB eſt ſemblablement couppée en F & G, comme la ligne AC eſt couppée en D & E. Car par la 2. p. 6. comme AD eſt à DE, ainſi AF à FG. Que ſi on tire DH parallele à AB couppãt EG en I. Derechef, par la ſuſdicte 2. p. 6. comme DE ſera à EC, ainſi DI à IH, c'eſt à dire, ainſi FG à GB, pource que par la 34. p. 1. FG eſt



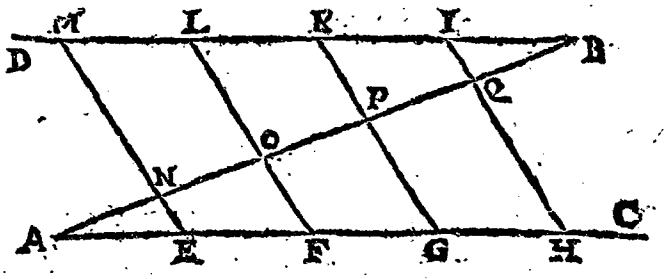
egale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC: & partant AB est couppée semblablement à AC, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy deux Probl. fort vtiles, & necessaires aux choses geometriques.

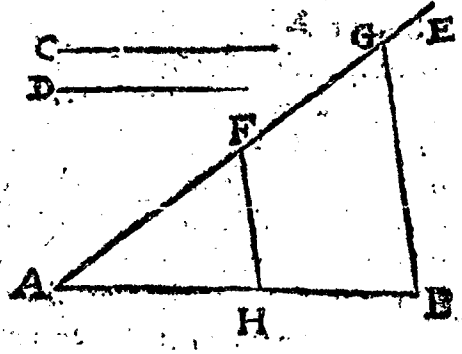
1. Estant donnée vne ligne droicte, la coupper en tant de parties egales qu'on voudra.

Soit la ligne donnée AB, qu'il faut coupper en cinq parties egales. De l'extremité A, soit menée la ligne AC, tant qu'il sera de besoin, faisant quelconque angle auec AB; puis de l'extremité B, soit menée BD parallele à AC, & d'icelle AC soient couppées quatre parties egales AE, EF, FG & GH, qui est vne partie moins que le nombre des parties esquelles il faut coupper la ligne donnée; en apres, du poinct B en BD, soient aussi prises les quatre parties BI, IK, KL, & LM egales a celles de la ligne AC; puis estans menées les lignes EM, FL, GK, & HI, elles couppperont la ligne donnée AB en cinq parties egales. Car puis que par la cõstruction les lignes EF, ML, sont egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. ME, LF, seront aussi paralleles entr'elles: Et par mesme raison LF, KG, HI, seront pareillement paralleles. Veu donc que AH est couppée en quatre parties egales, AQ le sera aussi. Par mesme raison BN sera encore diuisée en quatre parties egales, parce que BM a esté couppée en autant de parties egales. Parquoy veu que tant AN que BQ sont egales à chasque partie NO, OP, PQ; toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ, & QB, seront egales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.



2. Coupper vne ligne droicte donnée en deux parties, qui soient entr'elles selon vne raison donnée.

Soit la ligne droicte donnée AB, qu'il faut coupper en deux parties, qui ayent telle raison entr'elles que C à D: Du poinct A, soit menée AE faisant quelconque angle auec AB; & d'icelle AE, soit couppée AF egale à C, & puis FG egale à D: en apres soit menée BG, & du poinct F tirée FH parallele à icelle BG, laquelle couppe AB en H: & icelle AB sera couppée à iceluy poinct H, selon la raison de C à D, puis que par la 2. prop. de ce liure, AH est à HB, comme AF à FG, qui sont egales à C & D. Ce qu'il falloit faire.

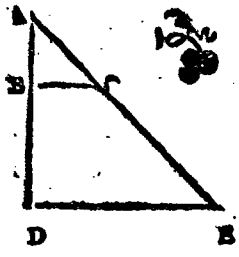


PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, en trouuer vne troiſieſme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC, auſquelles il en faut trouuer vne troiſieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé AB interminement, ſoit faicte BD egale à AC, & mené CB; puis du poinct D, ſoit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Ie dis que CE eſt la troiſieſme proportionnelle requiſe, c'eſt à dire que comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droicte BC eſt parallele au coſté DE, par la 2. p. 6. comme AB ſera à BD, ainſi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB eſt à BD, ainſi la meſme AB eſt à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troiſieſme proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

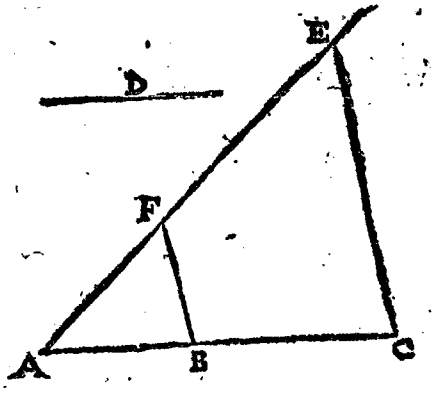


PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes donnees, en trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient les trois lignes droictes données AB, BC, & D, auſquelles il en faut trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées les deux premieres AB, BC, ſelon vne ligne droicte AC; & ayant tiré de A vne ligne droicte interminée AE, faiſant auec la premiere AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, ſoit couppée AF egale à D, & menée BF: en apres, de C, ſoit menée CE parallele à icelle BF, rencontrant AE en E. Ie dis que FE eſt la quatrieſme proportionnelle requiſe. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF eſt parallele à CE, par la 2. p. 6. comme AB eſt à BC, ainſi AF, où D ſon egale eſt à FE. Nous auons donc trouué vne quatrieſme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

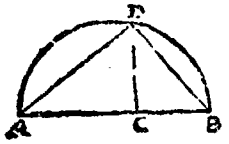


PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, disposées en vne ligne droicte AB, sur laquelle soit descrit vn demy cercle ADB : & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D : Ie dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car estans menées les deux lignes droictes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, sera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

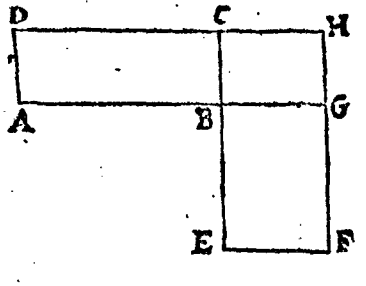
SCHOLIE.

De cecy est euident qu'vne ligne droicte tirée perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'vn cercle, iusques à la circonference d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car dequelconque poinct pris au diametre AB, estant leuée vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne prop. entre les deux segmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal à vn angle ; les costez au long des angles egaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : Ie dis que les costez qui sont autour d'iceux angles egaux, sont reciproques : c'est à dire, que AB est à BG, comme EB à BC.



Car les parallelogrammes AC, BF, estans disposez de telle façon que les deux costez AB & BG, facent vne ligne droicte AG ; les deux costez EB, BC, feront aussi vne ligne droicte EC, à cause des angles egaux ABC, EBG, comme il est euident par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soient prolongez DC, FG, iusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogramme BH, par la 7. p. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelog. BH, est par la 1. p. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, est comme celle de EB à BC :

à BC: & partant par la 11. p. 5. comme AB à BG, ainsi EB à BC. Ce qui estoit proposé.

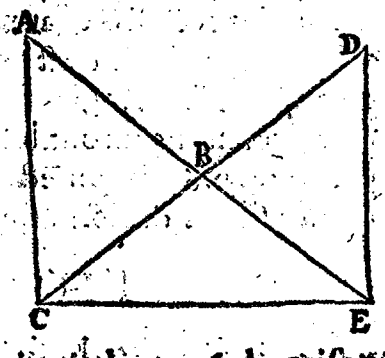
Pour la seconde partie; si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient egaux: Ie dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi egaux.

Car ayant fait la mesme construction que deuant, on prouuera par la 1. p. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la base AB à la base BG: pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raisons des bases sont posees semblables: donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG, au troisiesme BH seront semblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils seront egaux. Parquoy des parallelogrammes egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux triangles egaux ABC, & DBE, ayans les angles au poinct B egaux: Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques: c'est à dire, que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.



Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & facent vne seule ligne droicte AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi vne ligne droicte CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBE sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC au triangle BEC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE: pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle EGB, comme DB est à BC: & partant par la 11. p. 5. AB sera à BE, comme DB à BC. Ce qui a esté proposé.

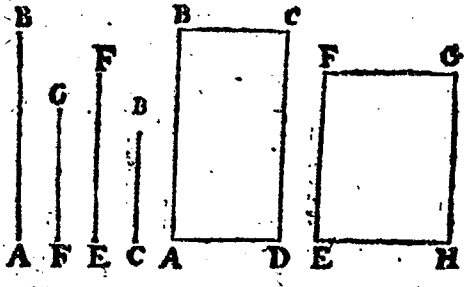
Pour la seconde partie: soient les costez d'alentour les angles egaux au poinct B, reciproques, c'est à scauoir, que comme AB est à BE, ainsi DB à BC. Ie dis que les triangles ABC, DBE, sont egaux. Car ayant fait la mesme construction que cy-dessus, par la 1. p. 6. comme AB sera à BE, ainsi le triangle ACB au triangle BCE, & comme DB à BC, ainsi le triangle BED au mesme triangle BEC: mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables: donc aussi les raisons des triangles ACB, BED, au troisiesme CBE seront semblables par la 11. p. 5. & partant ils seront egaux par la 9. p. 5. Donc

les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes droictes sont proportionnelles; le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes: & si le rectangle compris des extremes, est egal au rectangle compris des moyennes; les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, FG, EF, BC, scauoir est que AB soit à FG, comme EF à BC, & soit le rectangle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EFGH compris sous les moyennes EF, FG. Ie dis qu'iceux rectangles AC, EG, sont egaux.



Car puis que les angles droits B & F sont egaux, & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC; les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

Quant à la seconde partie: soient les rectangles AC, EG egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles: c'est à dire, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, scauoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux, reciproques par la 14. p. 6. scauoir est, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

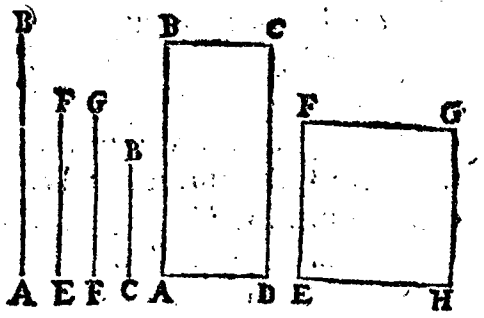
THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droictes proportionnelles AB, EF, BC, & soit le rectangle ABCD compris soubs les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Ie dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.

Car estant prise FG egale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris soubs les moyennes EF, FG, à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle

AC compris des deux extremes AB, BC, eſt egal au rectangle des moyennes EF, FG, c'eſt à dire au quarré EG. Ce qui eſtoit propoſé.



Pour la ſeconde partie; le rectangle AC ſoit egal au quarré EG: Ie dis que comme AB eſt à EF, ainſi EF à BC. Car puis que les rectangles AC, EG ſont egaux, par la 16. pr. 6. comme AB ſera à FE, ainſi FG à BC: mais par la 7. pr. 5. comme FG eſt à BC, ainſi EF, egale à icelle FG, eſt à la meſme BC: & partant comme AB eſt à EF, ainſi EF eſt à BC. Si donc trois lignes droictes ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit de monſtrer.

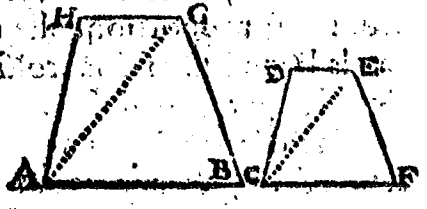
COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la derniere partie de ce Theoreme, qu'vne ligne droicte eſt moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent vn rectangle egal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC eſt egal au quarré de EF, il a eſté demonſtré, que comme AB à EF, ainſi EF à BC; & partant EF eſt moyenne prop. entre AB & BC.

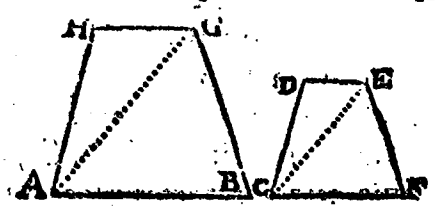
PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſee à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vne figure ſemblable, & ſemblablement poſee à la figure rectiligne donnee CDEF. De quelque angle que ce ſoit de la figure donnee ſoient menees des lignes droictes à chacun des angles oppoſez, afin de diuiſer icelle figure en triangles; comme icy de l'angle C, ſoit menee à l'angle oppoſé E, la ligne droicte CE, laquelle diuiſe la figure donnee en deux triangles CEF, CDE: en apres par la 23. p. 1. ſoit deſcrit ſur la ligne AB, & aux poincts extremes A & B, les deux angles BAG & ABG, egaux, ſçauoir l'vn à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. il eſt euident par la 32. p. 1. que le troiſieſme AGB ſera egal au troiſieſme CEF, & les triangles CEF, AGB ſeront equiangles, & auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement ſur la ligne AG, & aux deux poincts A & G, ſoient deſcrits les deux angles GAH & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au ſien: auſſi par la 32. p. 1. le troiſieſme H ſera egal au troiſieſme D, & les triangles CDE & AHG ſeront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux: ainſi l'angle D eſtant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de G



aux deux de A, & les deux de E aux deux de G: les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles: & pourautant qu'elles sont composées de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG: item comme CF est à CE, ainsi AB à AG; & comme CE à CD, ainsi AG a AH: & en raison egale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH; par ainsi les costez au long des angles egaux F, B, & FCD, BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites. Nous auons donc faict ce qui estoit requis.



SCHOLIE.

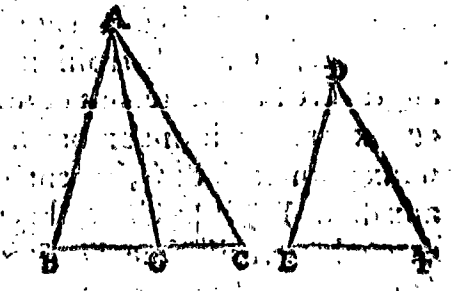
Il est euident par ce que nous auons dit sur la 32. p. 1. que si la figure donnee auoit plus de quatre costez, elle seroit diuisee en plus de deux triangles: & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis apres proceder de triangle en triangle iusques à la fin, deriuant touſiours sur & aux extremitez de la derniere ligne deux angles egaux aux deux de dessus la diagonalle correspondante, ainsi qu'il a esté fait icy sur AG, homologue & correspondante à la diagonale CE.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF, ayans les angles B & E egaux: item C & F; mais cõme AB est à BC ainsi DE à EF, &c. Ie dis qu'ils seront l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison AB & DE, ou AC & DF, ou BC & EF, c'est à dire que si à deux quelconques de ces costez de mesme raison, comme par exemple BC & EF, on trouue la troisiesme proportionnelle BG, le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisiesme proportionnelle BG: car celle est la raison doublee par la 10. def. 5.

Car estant tiree la ligne AG: d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF, en permutant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG, par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF, auront les costez au long des angles egaux B & E, reciproques: & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront egaux entr'eux: & partant comme le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le mesme triangle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC à la ba-



ſe BG par la 1. p. 6. Donc comme le triangle ABC eſt au triangle DEF, ainſi eſt BC à BG. Mais BC, EF, BG, eſtans continuellement proportionnelles, BC eſt à BG en raiſon doublee de BC à EF par la 10. def. 5. donc auſſi le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon doublee du coſté BC au coſté EF. Donc les triangles ſemblables &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

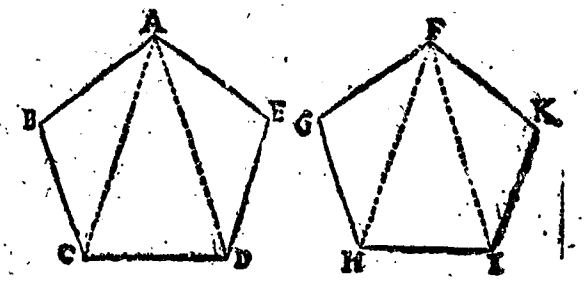
De cecy eſt manifeſté, qu'eſtans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le triangle deſcrit ſur la premiere ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement poſé ſur la ſeconde. Car il a eſté demonſtré, que comme BC 1. eſt à BG 3. ainſi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14 PROP. XX.

Les polygones ſemblables peuuent eſtre diuiſez en nombre egal de triangles ſemblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout : & les polygones ſont l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.

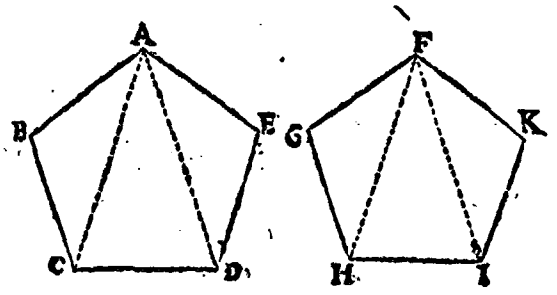
Soient deux polygones ſemblables ABCDE, & FGHIK, ayans les angles A, F, egaux, item B, G, &c. Ie dis premierement qu'iceux polygones peuuent eſtre diuiſez en nombre egal de triangles ſemblables.

Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il eſt euident que l'vne des figures eſt diuiſee en autant de triangles que l'autre. Et d'autant que l'angle B eſt poſé egal à l'angle G, & que comme BA eſt à BC, ainſi GF à GH: par la 6. pr. de ce liure, les triangles ABC & FGH ſeront equiangles, & par la 4. pr. de ce meſme liure, ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux, & par conſequent ils ſeront ſemblables: par meſme diſcours, les triangles AED & FKI, ſeront auſſi ſemblables. Pareillement par ce qui a eſté dit cy deſſus AC eſt à CB, comme FH à HG: mais BC eſt à CD comme GH à HI: car ce ſont coſtez de figures ſemblables: donc en raiſon egale par la 22. p. 5. AC ſera à CD, comme FH à HI; & d'autant que les angles BCD, GHI ſont egaux, & les angles BCA, GHF auſſi egaux; ceux-cy eſtans oſtez de ceux-là, les reſtans ACD, FHI, ſeront pareillement egaux: & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD, & FHI, ſeront equiangles, & par conſequent ſemblables.



Ie dis ſecondement, qu'iceux triangles ſont proportionnaux à leur tout: c'eſt à dire, que chaſque triangle de l'vn des polygones a telle raiſon à ſon triangle correſpondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'vne des figures ſont ſemblables aux trois triangles de l'autre, chacun au ſien, & que par la prop. pre-

ced. ils ſont l'vn à l'autre, en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon: les triangles ABC & FGH, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH: auſſi en la meſme raiſon doublée ſeront les triangles ACD, FHI: & le troiſieſme AED eſtant au troiſieſme FKI en raiſon doublée de AD à FI, qui eſt la meſme que de AC à FH, eſtans coſtez de triangles ſemblables: auſſi les triangles ACD, FKI, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, ſeront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'vn des triangles de l'vn d'iceux, ſera à ſon reſpondant de l'autre.



Ie dis tiercement, que le polygone eſt au polygone en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon, comme CD & HI: car puiſque toute la figure ABCDE, eſt à toute la figure FGHIK, comme l'vn des triangles de l'vne, ſcauoir ACD, eſt à l'vn des triangles de l'autre, ſcauoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. p. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des meſmes coſtez CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

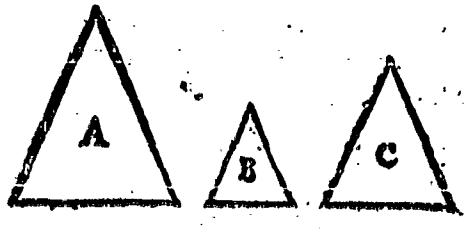
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte, qu'eſtans trois lignes droittes proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi le polygone deſcrit ſur la premiere ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde; puis qu'il a eſté demonſtré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon, c'eſt. à dire, comme le coſté du premier a vne troiſieſme proportionnelle auſdits coſtez de meſme raiſon.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à vne meſme figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne B, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la meſme B: ie dis que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.

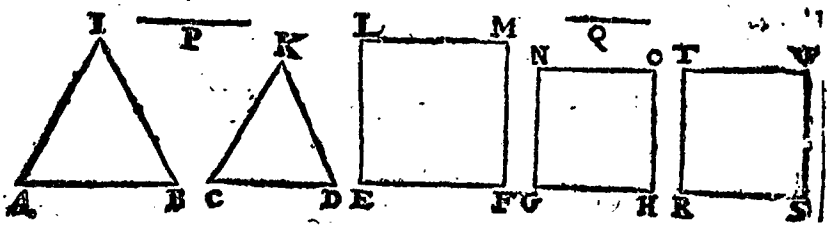


Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles egaux aux angles de B, & les coſtez d'autour iceux angles egaux, proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi egaux aux angles de C; & par la 11. prop. 5. les coſtez au long des angles egaux ſeront proportionnaux: & par la 1. def. 6. A & C ſeront ſemblables: donc les figures rectilignes ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droictes ſont proportionnelles; les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront auſſi proportionnelles: & ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportionnelles, icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, CD, EF, GH: & ſur AB, CD, ſoient conſtituees deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK ſemblables, & ſemblablement deſcrites: item ſur EF & GH deux autres quelconques figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites EFML, GHON. Ie dis premierement que ces quatre figures rectilignes ſont proportionnelles, c'eſt à dire, que comme ABI eſt à CDK, ainſi EFML eſt à GHON.



Qu'il ne ſoit ainſi: aux deux lignes AB & CD, ſoit trouuée P troiſieſme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF & GH, ſoit trouuée Q auſſi troiſieſme proportionnelle: & d'autant que AB eſt à CD, comme EF eſt à GH: Item CD à P, comme GH à Q: en raiſon egale AB ſera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB eſt à P, ainſi le rectiligne ABI eſt au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF eſt à Q, ainſi le rectiligne EM eſt au rectiligne GO. Donc comme ABI eſt à CDK, ainſi EM eſt à GO par la 11. p. 5.

Ie dis pour la ſeconde partie, que ſi icelles figures ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſont proportionnelles, que les lignes ſur leſquelles elles ſont deſcrites, ſeront auſſi proportionnelles, c'eſt à ſcauoir, que comme AB eſt à CD, ainſi EF eſt à GH.

Car ayant trouué RS quatrieſme proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. p. 6. ſur icelle RS ſoit deſcrit le rectiligne RV ſemblable, & ſemblablement poſé au rectiligne EM par la 18. p. 6. & partant auſſi ſemblable au rectiligne GO par la prop. prec. & d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi EF eſt à RS, par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, comme le rectiligne ABI ſera au rectiligne CDK, ainſi le rectiligne EM ſera au rectiligne RV. Mais comme ABI eſt à CDK, ainſi auſſi a eſté poſé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM ſera à RV, ainſi EM ſera à GO; & partant par la 9. p. 5. les rectilignes RV, GO ſeront egaux: leſquels eſtans ſemblables, & ſemblablement deſcrits, conſiſtent neceſſairement (comme nous demonſtrerons incontinent) ſur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7. p. 5. comme EF ſera à RS, ainſi EF ſera à GH, Mais par l'hypotheſe EF eſt

à RS, comme AB à CD: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV: & GH ayant esté posée plus grande que RS, par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV: & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cestuy cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

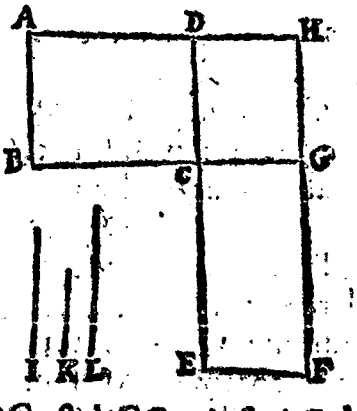
Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles: donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy-dessus demonstré. Veu donc que le rectiligne qui sera descrit sur la seconde ligne, sera egal à celuy descrit sur la troisiesme; est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en la raison composee de celles de leurs costez.

Soient deux parallelogrãmes equiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG egaux: Ie dis que la raison du parallelogr. AC au parallelogramme CF est composee de celles de leurs costez, scauoir est composée de la raison qui est de BC à CG, & de celle qui est de DC à CE.

Car soient disposez les deux parallelogrammes l'vn contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne facent qu'vne seule ligne droicte, & alors DC & CE feront aussi vne ligne droicte, puis que les angles BCD, ECG sont egaux, comme il est euident par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. Soient prolongez les costez AD, FG, qui se rencontrant en H, facent le parallelogramme DCGH; puis soit prise quelconque ligne droicte I; & aux trois BC, CG & I, soit trouuée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC, CE & K, la 4. prop. L. Veu donc que par la 1. p. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothese: pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K, par la 11. p. 5. Mais par mesme raison DG est à CF, comme K à L, (attendu que comme DG à CF, ainsi DC à CE, par la



par la 1. p. 6. qui eſt la meſme raiſon que de K à L.) Donc en raiſon egale, comme AC ſera à CF, ainſi I ſera à L par la 22. p. 5. Mais la raiſon de I à L eſt compoſee de la raiſon de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce liure. Donc auſſi d'icelles raiſons eſt compoſee la raiſon du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes equiangles ſont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

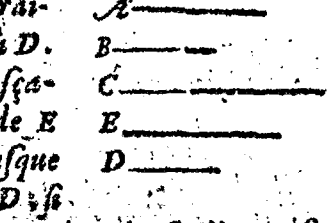
SCHOLIE.

Le meſme ſera encore demonſtré plus briefuement, ainſi qu'il enſuit. Les parallelogrammes AC, CF eſtans diſpoſez comme auparauant, AC ſera à CH, comme BC à CG; & CH à EG comme DC à EC par la 1. p. 6. Mais la raiſon de AC à EG, eſt compoſee des raiſons entre-moyennes, ſçauoir de AC à CH, & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la meſme raiſon de AC à EG ſera auſſi compoſee des raiſons de BC à CG, & de DC à CE, qui ſont egales à icelles entre-moyennes. Ce qui eſt propoſé.

Or il eſt facile de colliger des choſes cy-deſſus dittes & demonſtrees par Euclide en cette 23. p. comment on compoſe en lignes, ou en nombres vne raiſon de deux ou de dauantage de raiſons. Car des raiſons de BC à CG, & de DC à CE, a eſté compoſée la raiſon de I à L en lignes: mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut compoſer vne raiſon de trois autres propoſees; ayant trouué celle compoſee de deux, d'icelle & de la troiſieſme nous en compoſerons vne autre en la meſme maniere, laquelle ſera compoſee de trois: & ainſi conſequemment des autres.

Cette 23. prop. eſt auſſi veritable en nombres, comme le demonſtre Euclide au 8. l. p. 5. C'eſt pourquoy nous enſeignerons icy comme il faut trouuer la raiſon du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raiſons de leurs coſtez, eſtans cognues en nombres. Comme par exemple, ſi la raiſon de BC à CG eſt la meſme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la meſme que de 3 à 5, nous trouuerons la raiſon d'iceux parallelogrammes ainſi. Ayant poſé la premiere raiſon eſtre 5 à 2, ſoit fait que comme 3 eſt à 5, (qui eſt la derniere raiſon) ainſi 2 ſoit à vn autre nombre, qui ſera trouué eſtre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, leſquels auront entr'eux les deux raiſons propoſees, & conſequemment en delaiſſant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raiſon compoſee d'icelles: & telle ſera la raiſon du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers ſera 15 à 10, ou 3 à 2, qui eſt raiſon ſeſquialtere.

On peut auſſi en la meſme maniere que deſſus oſter vne raiſon d'vne autre raiſon plus grande: comme par exemple, ſoit la raiſon de A à B, qu'il faut oſter d'vne plus grande raiſon C à D. ſoit fait que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à quelque autre, ſçauoir E, qui ſoit poſée moyenne entre C & D: & la raiſon de E à D ſera la raiſon reſtante de la ſouſtraction requiſe. Car puiſque la raiſon de C à D eſt compoſee de celle de C à E, & de E à D; ſi on en oſte celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy eſt egale, reſtera la ſuſdite raiſon de E à D.



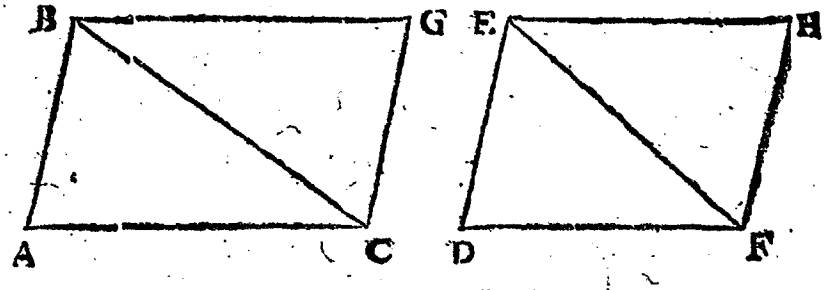
Qu'il faille encore oſter la raiſon de 4 à 3, de celle de 6 à 2, ſoit fait que comme 4 eſt à 3, ainſi 6 ſoit à vn autre nombre, ſçauoir $4\frac{1}{2}$: & la raiſon de $4\frac{1}{2}$ à 2, ſera le reſte requis. Car il eſt euident que la raiſon de 6 à 2, eſt compoſee de celles de 6 à $4\frac{1}{2}$, & de $4\frac{1}{2}$ à 2: & partant en oſtant de ces deux raiſons celle de 6 à $4\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3,

qui luy eſt égale, reſtera la ſuſdite raiſon de $4\frac{1}{2}$ à 2, qui eſt double ſeſquiquarte.

Commandin demonſtre en ce lieu les trois Theor. ſuiuans.

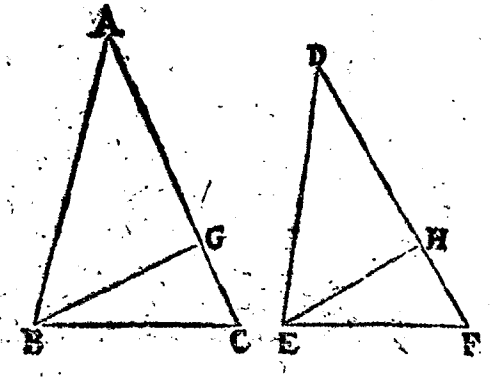
1. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en raiſon compoſee des coſtez, qui comprennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon compoſee des coſtez comprenans les angles egaux B & E. Car ayant acheué les parallelogrãmes AG, DH, ils ſeront equiangles; & partant par la 23. p. 6. la raiſon d'iceux ſera compoſee de celle de leurs coſtez: Veu donc que les triangles ABC, DEF, deſquels ils ſont moitiez par la 34. p. 1. ſont en la meſme raiſon qu'iceux par la 15. p. 5. auſſi iceux triangles ſeront l'vn à l'autre en icelle raiſon compoſee des coſtez.



2. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont l'vn à l'autre, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez, qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Car eſtans tirees ſur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH; les triangles ABG, DEH, ſeront equiangles, comme appert par le Corol. de la 32. p. 1. Donc par la 4. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que poſant GB, BA, baſes, la hauteur d'iceux rectangles ſera vne meſme, ſçauoir AC. Semblablement comme HE à ED ainſi eſt le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de AB, AC, comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF; & en permutant le rectangle de BG, AC ſera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de EH, DF, ainſi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. p. 5. pource que ces triangles ſont moitiez d'iceux rectangles, par la 41. p. 1. (Car ils ont meſmes baſes qu'iceux AC, DF, & meſmes hauteurs BG, EH: & partant entre meſmes paralleles) donc auſſi le triangle ABC ſera au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Ce qui eſtoit propoſé.

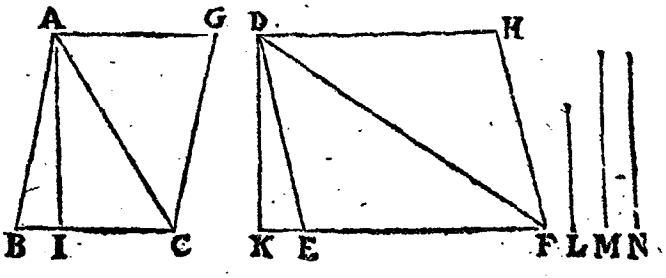


COROLLAIRE.

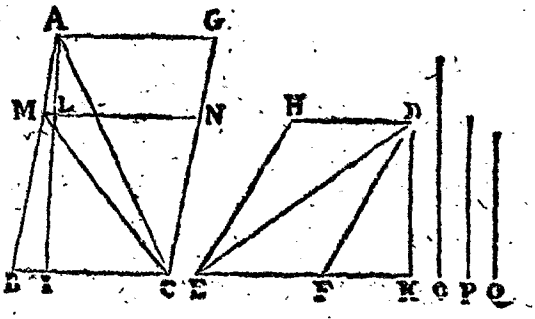
De cecy reſulte que les parallelogrammes equiangles ſont auſſi entr'eux, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez des angles egaux, puis qu'ils ſont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, ſont entr'eux en la raiſon compoſée de la raiſon des baſes, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes BG, EH; & les hauteurs d'iceux ſoient AI, DK. Ie dis que la raiſon tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, eſt compoſée de la raiſon de la baſe BC à la baſe EF, & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK. Car premierement ſoient les hauteurs egales, mais les baſes, ou auſſi egales, ou inegales: & ſoit faict comme BC à EF, ainſi L à M: & comme AI à DK, ainſi M à N, leſquelles ſeront egales, puis que AI, DK, ſont poſees egales: & partant par la 7. p. 5. L ſera à N, comme L à M, c'eſt à dire comme BC à EF. Mais par la 1. p. 6. comme BC eſt à EF, ainſi eſt le triangle ABC au triangle DEF; & le parallelogramme BG au parallelogramme EH: Donc par la 11. p. 5. comme L ſera à N, ainſi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raiſon de L à N eſt compoſee de la raiſon de L à M, c'eſt à dire de la raiſon de BC à EF, & de la raiſon de M à N, c'eſt à dire de AI à DK: donc la la raiſon du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme EH, eſt auſſi compoſee des meſmes raiſons.



Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande: mais les baſes BC, EF, egales, ou auſſi inegales. Soit fait que comme AI eſt à DK, ainſi O à P; & comme BC à EF, ainſi P à Q: puis ayant couppé IL egale à DK, par L, ſoit tiree MN parallele à BC, & iointe CM. D'autant que le triangle ABC eſt au triangle MBC, & le parallelogramme BG au parallelogramme BN, comme la hauteur AI a la hauteur IL ou DK qui luy eſt egale, c'eſt à dire comme O à P, par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle MBC eſt au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainſi eſt la baſe BC à la baſe EF. (pource qu'ils ſont de meſme hauteur) c'eſt à dire ainſi P à Q; en raiſon egale ABC ſera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raiſon de O à Q eſt compoſee de la raiſon de O à P, c'eſt à dire de AI à DK, & de la raſon de P à Q, c'eſt à dire de la baſe BC à la baſe EF: la raiſon du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, ſera compoſee des meſmes raiſons. Ce qui eſtoit propoſé.

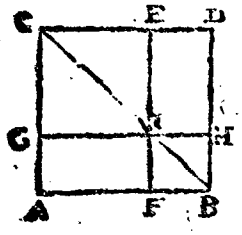


On peut demonſtrer en la meſme maniere, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, eſt au triangle ABC, & le parallelogramme FH au parallelogramme BG en la raiſon compoſee de celle de la baſe EF à la baſe BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faiſant que comme EF à BC ainſi Q à P; & puis comme DK à AI, ainſi P à O; & tout le reſte comme deſſus. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, ſont ſemblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & à l'entour d'iceluy diametre ſoient les deux parallelogrammes GE & FH, ayans les angles B & C communs auec le total: Ie dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH ſont ſemblables entr'eux, & au total ABDC.



Car d'autant que les lignes AB & GH ſont paralleles, ſur leſquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. p. 1. l'angle externe CIG ſera egal à l'interne IBF, & l'externe CGI à l'interne A, auquel eſt auſſi egal l'externe IFB, attendu que BA tombe ſur les deux paralleles EF & CA. Parquoy les trois triangles CAB, CGI & IFB ayans chacun deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, les troiſieſmes angles ſeront auſſi egaux, & conſequemment iceux triangles ſeront equiangles entr'eux. Et par meſme raiſon les trois autres triangles CDB, CEI & IHB, qui par la 34. pr. 1. ſont egaux aux trois precedents ſeront auſſi equiangles entr'eux: Donc les parallelogr. compoſez d'iceux triangles, ſçauoir AD, GE & FH, ſeront pareillement equiangles entr'eux. Dauantage, puis que le triangle CAB eſt equiangle au triangle CGI, & le triangle CDB au triangle CEI, par la 4. pr. 6. comme CA ſera à AB, ainſi CG à GI: & par ainſi les coſtez d'autour les angles egaux A & G, ſont proportionnaux. Derechef, comme AB eſt à BC, ainſi GI eſt à IC, & comme CB eſt à BD, ainſi CI eſt à IE. Donc en raiſon egale, comme AB ſera à BD, ainſi GI ſera à IE: & partant les coſtez d'alentour les angles egaux ABD, GIE ſont proportionnaux. On prouuera en la meſme maniere que les coſtez d'al'entour les autres angles egaux d'iceux parallelogrammes AD & GE ſont auſſi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6. le parallelogramme GE ſera ſemblable au parallelogramme total AD. Et par meſmes raiſons, le parallelogramme FH ſe prouuera auſſi ſemblable au meſme parallelogramme AD. Donc par la 21. p. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH ſeront ſemblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

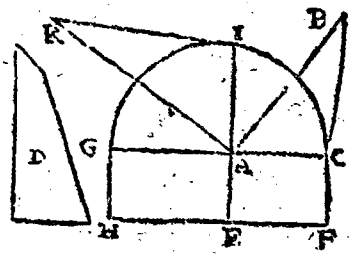
PROB. 7. PROP. XXV.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne figure re-

ctiligne donnee, & egale à vne autre proposee.

Soient deux figures rectilignes A B C & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC (qui est l'vn des costez du rectiligne ABC, auquel on en doit faire vn semblable) soit faict le rectangle ACFE egal à ladite figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit le rectangle GE egal à la figure donnee D, le tout par les 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posee à la figure ACB, par la 18. p. 6. Ie dis qu'icelle figure AKI sera aussi egale à la figure donnee D.

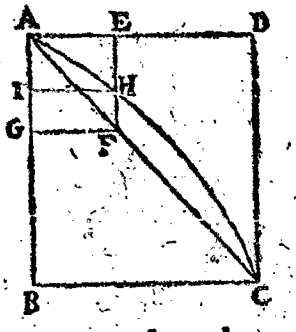


Car par la construction le rectangle GE est egal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. pr. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Mais les deux figures semblables ABC & AKI sont l'vne à l'autre en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. p. 6. attendu qu'icelles figures sont descrites sur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB estant egal à AF : aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D : & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable, & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous auons donc descrit vne figure rectiligne semblable à vne autre donnee, & egale à vne proposee. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'vn parallelogramme on oste vn parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun auec le tout ; l'osté sera auec le tout à l'entour d'vn mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogramme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun auec iceluy : Ie dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'vn mesme diametre, c'est à dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC.



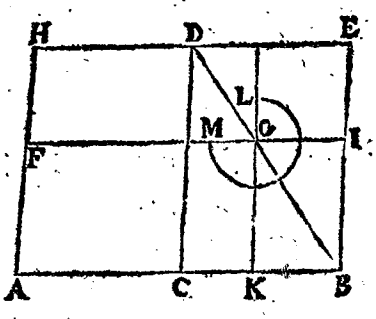
Autrement, soit (s'il est possible) vn autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG : ains couppe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à AE, par la 31. prop 1. donc le parallelogramme IE estant à l'entour d'vn mesme diametre auec le total DB

ſera ſemblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total, GE eſt auſſi ſemblable par l'hypotheſe: & partant par la 21. p. 6. les parallelogrammes GE & IE ſeront ſemblables entr'eux: & par le 1. def. 6. AE ſera à EF comme AE à EH: mais AE eſtant egal à ſoy meſme, il faudroit auſſi par la 14. prop. 5. que EF 2e fuſt egale à EH 4e, c'eſt à ſçauoir le tout à la partie, ce qui eſt abſurde: donc le parallelogramme total BD, & le retranché GE, eſtoient conſtituez à l'entour d'vn meſme diametre: car il aduiendra touſiours la meſme abſurdité, ſi on dit que le diametre de BD couppe à quelconque autre poinct, ſoit le coſté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'vn parallelogramme on oſte vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, & defaillans de parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſez à vn autre deſcrit ſur la moitié de la meſme ligne; le plus grand eſt celuy-là qui eſt deſcrit ſur l'autre moitié de la ligne, & ſemblable au defaut.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement en C, & ſur CB moitié d'icelle, ſoit conſtitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diametre eſt BD: Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD conſtitué ſur la moitié AC, ſera appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & ſemblable à iceluy defaut CE. Ie dis que de tous les parallelogrammes qui peuuent eſtre appliquez ſelon icelle ligne AB, & defaillans d'vne figure ſemblable & ſemblablement poſée à CE, le plus grand eſt AD, qui eſt deſcrit ſur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.



Car eſtant pris au diametre BD quelconque poinct G, & tirees par iceluy poinct les lignes droictes FGI, KG, paralleles aux lignes droictes AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué ſelon la ligne AB, ſera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. eſt ſemblable & ſemblablement poſé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, ſont egaux, ſi on leur adiouſte KI commun; auſſi CI, KE ſeront egaux. Mais CI, CF, eſtans ſur baſes egales, ſont pareillement egaux par la 36. prop. 1. donc auſſi CF, KE ſeront egaux, & leur adiouſtant CG commun, le parallelogramme AG ſera egal au gnomon LM. Parquoy puis que CE eſt plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) auſſi AD qui eſt egal à CE, par la 36. prop. 1. ſera plus grand que le parallelogram-

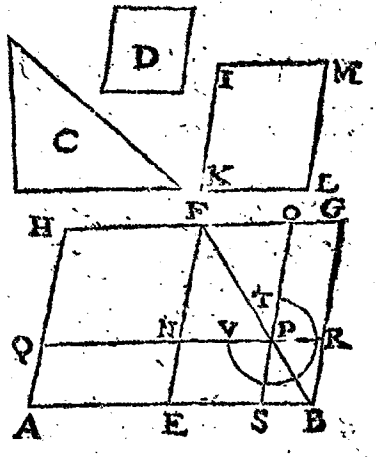
me AG, du meſme parallelogramme DG. Et en la meſme maniere ſera demonſtré que AD eſt plus grand que tous autres parallelogrammes, qui ſeront appliquez ſelon la meſme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſees à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 8. PROP. XXVIII.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnee ne ſoit plus grande que le parallelogramme, qui eſtant appliqué à la moitié de la ligne donnee, eſt ſemblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnee C, defaillant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux egalement en E, ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable & ſemblablement poſé à iceluy D, par la 18. pr. 6. & ſoit accomply le parallelogramme AHGB.



Maintenant, ſi AF eſt egal à C, on a ce que l'on demande: car il eſt appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui eſt fait ſemblable à D. Mais ſi C eſt plus petit que AF, (car par l'hypotheſe il ne peut eſtre plus grand) il ſera auſſi plus petit que EG egal à iceluy AF: ſoit donc trouué l'excez de EG par deſſus C, (ceſte egalité ou inegalité, & excez ſera cogneu par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. ſoit reduit en parallelogramme IKLM, ſemblable & ſemblablement poſé à EG: & veu que EG eſt plus grand que KM, il eſt euident que les coſtez EF, FG, ſeront auſſi plus grands que les coſtez homologues KI, IM: parquoy d'iceux EF, FG ſoient couppez FN, FO, egaux à iceux KI, IM, à fin qu'eſtant accomply le parallelogramme NFOP, il ſoit egal à KM, & ſemblable & ſemblablement poſé au meſme KM; & partant auſſi à EG: & par conſequent qu'eſtant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, ſoient autour d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué de part & d'autre les coſtez NP, OP, tant qu'il ſera de beſoin, ſera conſtitué le parallelogramme AP, lequel ie dis eſtre le parallelogramme demandé.

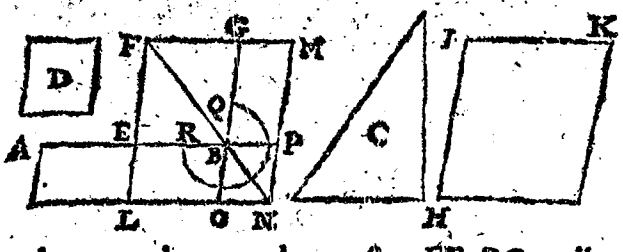
Car il eſt appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. p. 6. eſt ſemblable à EG, partant auſſi à D. Item puis que IL eſt l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez eſt egal NO: Il eſt euident que le gnomon TV ſera egal à la figure C. Mais il eſt auſſi egal à AP, comme il a eſté prouué à la precedente: donc auſſi AP ſera egal à C: Mais il eſt appliqué à la ligne donnée AB, & defaillant du parallelogramme SR ſemblable au donné D. Nous auons donc à vne ligne droicte donnée appliqué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

A vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, excedant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excedant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB ſoit couppée en deux egalement au poinct E, & ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable, & ſemblablement poſé à D par la 18. p. 6. En apres, ſoit deſcrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & ſemblable, & ſemblablement poſé à EG par la 25. p. 6. & partant à cauſe de la ſimilitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI ſera à IK, ainſi EF ſera à FG; & par conſequent HK eſtant plus grand que EG, auſſi les coſtez HI, IK ſeront plus grands que les coſtez EF, FG: eſtans donc prolongez les coſtez FE, FG, tellement que FL, FM, ſoient egales aux lignes IH, IK, & acheué le parallelogramme LFMN, il ſera ſemblable, & ſemblablement poſé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. les parallelogrammes LM, & EG ſeront conſtituez à l'entour d'vn meſme diametre, lequel ſoit FN. Maintenant eſtant prolongez AB & GB iuſques en P & O; & acheué le parallelogramme LA: le parallelogramme AN ſera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Mais ie dis auſſi qu'iceluy parallelogramme AN eſt egal au rectiligne C; car puiſque par la 36. p. 1. AL, EO ſont egaux, & par la 43. p. 1. EO eſt egal au complement BM, auſſi AL ſera egal à iceluy BM: leur adiouſtant donc LP commun; le parallelogr. AN ſera egal au gnomon QR, lequel eſt egal au rectiligne C: (car puiſque HK, c'eſt à dire LM, eſt egal aux rectilignes C & EG enſemble: ſi on oſte EG commun, reſteront egaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc auſſi le parallelogramme AN ſera egal au rectiligne C. A la ligne droicte AB, nous auons donc appliqué le parallelogramme AN



egal

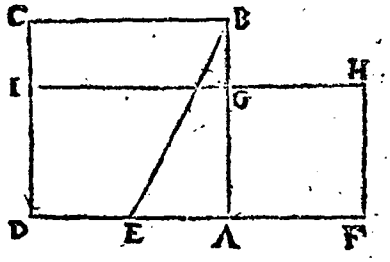
egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à vn autre donné D : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

Coupper vne ligne droicte donnée & terminée, ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte donnée AB, laquelle il faut coupper ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Ayant deſcrit ſur icelle ligne AB, le quarré AC, au coſté DA ſoit appliqué par la 29. p. 6. le rectangle DH egal à iceluy quarré AC, excedant du parallelogramme AH, ſemblable à iceluy AC; & la ligne AB ſera couppée en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon.



Car premierement l'exceds AH ſera quarré, puis qu'il eſt ſemblable au quarré AC; & d'autant que DH eſt fait egal à AC, ſi d'iceux on oſte le parallelogramme commun AI, reſteront egaux les parallelogrammes CG & AH, leſquels ont auſſi les angles au poinct G egaux. Donc par la 14. p. 6. les coſtez d'alentour iceux angles ſeront reciproques; tellement que comme IG eſt à GH, ainſi AG eſt à GB. Mais par la 34. p. 1. IG eſt egale à BC, c'eſt à dire à AB; & GH à AG : Donc comme AB ſera à AG, ainſi AG ſera à GB. Et puiſque AB 1. eſt plus grande que AG 3. par la 14. p. 5. AG 2. eſt auſſi plus grande que GB 4. Veu donc que la toute AB eſt au plus grand ſegment AG, comme iceluy plus grand ſegment AG eſt au plus petit GB; icelle AB eſt couppée en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB ſoit couppée en G, par la 11. p. 2. en ſorte que le quarré de la partie AG ſoit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Ie dis que AB ſera couppée ſelon la moyenne & extréme raiſon au poinct G.

Car puis que le quarré de AG eſt egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, ſeront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'eſt à dire que la toute AB ſera au plus grand ſegment AG, comme iceluy ſegment AG eſt au plus petit ſegment GB; & par la 3. d. 6. AB eſt couppée en G, ſelon la moyenne & extréme raiſon. Ce qu'il falloit faire.

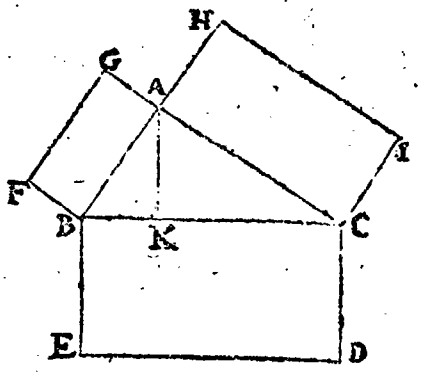
THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure deſcrite ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux autres figures qui luy ſont ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur les deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droict, & ſur le co-

ſté BC, qui ſouſtient iceluy angle, ſoit deſcrite quelconque figure rectiligne BD, & ſur les deux autres coſtez AB, AC, ſoient conſtituees les deux figures AF, AI ſemblables, & ſemblablement poſees à BD: Ie dis qu'icelle figure BD eſt egale aux deux autres AF, AI.

Car ſi du poinct A, on meine ſur BC la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles ſemblables entr'eux, & au total; & par ainſi les trois triangles BAK, ABC, CAK, ſeront ſemblables entr'eux, & par la 19. p. 6. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA. Mais par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI, eſtans ſemblables, & ſemblablement poſees, elles ſeront auſſi l'vne à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA, qui ſont les meſmes coſtez des triangles: donc par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, ſeront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'eſt à dire, que comme le triangle BAK eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AF eſt au rectiligne BD, & comme le triangle CAK eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AI eſt au rectiligne BD: Donc par la 24. p. 5. comme le compoſé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, ſera au triangle ABC, 2. grandeur, ainſi le compoſé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, ſera au rectiligne BD, 4. grandeur: mais le triangle BAC, eſt egal aux deux autres ABK, ACK: donc la figure BD ſera auſſi egale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



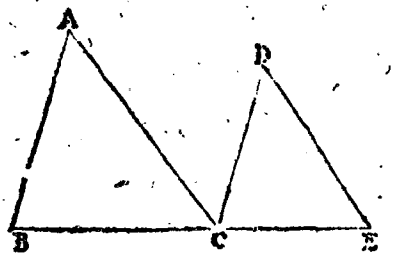
Autrement. D'autant que par la 20. p. 6. les figures ſemblables ſont en raiſon doublee de leurs coſtez homologues, comme le quarré de AB 1. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AF 3. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur: Mais auſſi comme le quarré de AC 5. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AI 6. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. p. 5. le compoſé de la 1. & 5. grandeur, ſçauoir le quarré de AB auec celuy de AC, ſera à la 2. grandeur BC, comme le compoſé de la 3. & 6. grandeur, ſçauoir la figure AF auec la figure AI, ſera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. p. 1. les deux quarrez de AB, AC, ſont egaux au ſeul quarré de BC; donc auſſi les deux figures AF, AI enſemble, ſeront egales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux coſtez proportionnaux à deux coſtez, ſont diſpoſez ſelon vn angle, tellement que les coſtez de meſme raiſon ſoient parallels; les deux autres coſtez ſe rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les coſtez BA & AC pro-

portionnaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: Ie dis que les deux autres costez BC & CE se rencontreront directement.

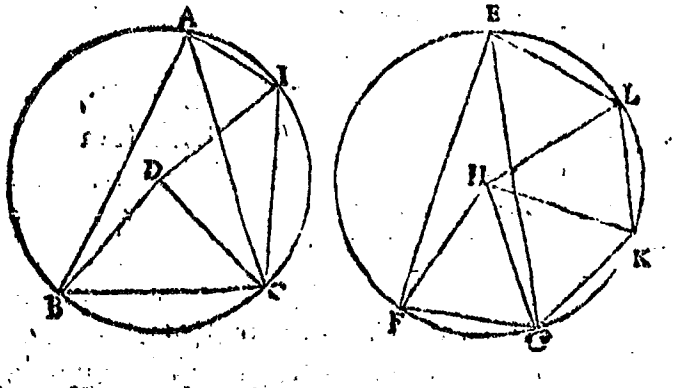


Car puisque BA & CD sont paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. :. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD: parquoy l'angle D sera egal à l'angle A. Mais par l'hypothese les costez qui constituent iceux angles egaux, sont proportionnaux: donc par la 6. p. 6. les deux triangles ABC, DCE, seront equiangles; & auront les angles B & DCE egaux: leur adiouſtant donc les egaux A & ACD, les deux B & A ensemble, seront egaux aux deux DCE, & ACD ensemble; c'est à dire au seul angle ACE: parquoy adiouſtant derechef à ces angles egaux, le commun ACB; les deux angles ACE, ACB, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droicts par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC & CE se rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux costez proportionnaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

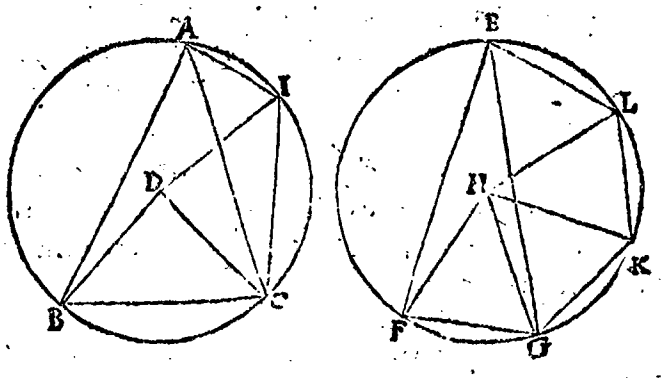
Aux cercles egaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux, comme les circonferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.

Soient deux cercles egaux ABC & EFG, desquels les centres sont D & H; & soient les deux angles BDC, FHG aux centres; mais les deux BAC, FEG, aux circonferences. Ie dis premierement, que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.



Car ayant mené les deux lignes droictes BC, FG, soient accommodees aux cercles des lignes droictes, sçauoir CI egale à BC; & GK, KL chacune egale à FG: puis soient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droictes BC & CI sont egales, les arcs BC & CI seront aussi egaux par la 28. p. 3. & partant les angles BDC & CDI, seront egaux par la 27. p. 3. Pour mesmes raisons, tant les trois arcs FG, GK & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL sont egaux en-

tr'eux : donc l'arc FGKL eſt autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL eſt multiplice de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle BDI, eſt multiplice de l'angle BDC, puiſque les angles BDI, FHL ſont diuiſez chacun en autant de parties egales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils s'appuient : partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit : donc puiſque BCI, BDI, ſont equemultiplices de BC, BDC, premiere & troiſieſme grandeur ; & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2e & 4e grandeur ; par la 6. d. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.



Et d'autant que par la 15. p. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG ; (car ceux-là ſont doubles de ceux cy par la 20 p. 3.) il eſt euident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC eſt auſſi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG. Ce qu'on peut encore demonſtrer par les meſmes raiſons, & argumens employez pour les angles du centre, ſi on tire les lignes droictes IA, KL, LE, &c.

Secondement, Ie dis que le ſecteur BDC eſt au ſecteur FHG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG. Car (demeurant la meſme conſtruction que deſſus) il eſt manifeſte que les cordes BC & CI eſtans egales, & leurs arcs auſſi egaux, les angles BAC, & CAI ſeront pareillement egaux par la 27. p. 3. & conſequemment que les ſegmens ſur leſquels ils inſiſtent & s'appuient, ſont ſemblables & egaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, ſont auſſi egaux par la 4. p. 1. leur adiouſtant donc les deux ſegmens egaux, les deux ſecteurs BDC, CDI ſeront egaux : Parquoy l'arc BCI ſera autant multiplice de l'arc BC, que le ſecteur BDI le ſera du ſecteur BDC : & par meſme diſcours, l'arc FGKL ſera monſtré autant multiplice de l'arc FG, que le ſecteur FHL l'eſt du ſecteur FHG. Partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI ſera egal au ſecteur FHL ; & ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, auec les deux ſecteurs BDC, FHG, ſont quatre grandeurs, de la 1. & 3e deſquelles BCI, BDI, ſont equimultiplices, mais de la 2e & 4e ſont auſſi equimultiplices FGKL, FHL. Et puis que nous auons prouué que ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI eſt egal au ſecteur FHL ; & ſi plus grand, plus grand ; & ſi moindre, moindre : par la 6. def. 5. comme l'arc BC ſera à l'arc FG, ainſi le ſecteur BDC, ſera au ſecteur FHG. Parquoy aux cercles egaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy il s'enſuit que comme le ſecteur eſt au ſecteur, ainſi l'angle eſt à l'angle. Car l'vne & l'autre raiſon eſt la meſme que de l'arc à l'arc ; & partant par la 11. *p.* 5. *ils ſeront auſſi entr'eux en la meſme raiſon.*

Il eſt auſſi euident que comme vn angle au centre, eſt à quatre angles droicts, ainſi eſt l'arc ſouſtendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire, que comme quatre angles droicts ſont à vn angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre eſt à l'angle droict au centre, ainſi l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſouſtient l'angle droict par la 33. *p.* 6. *Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droict, c'eſt à ſçauoir à quatre angles droicts, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, c'eſt a dire à toute la circonference, par les choſes demonſtrées à la fin du Scholie de la* 22. *p.* 5. *Puis apres, d'autant qu'vn angle au centre eſt à quatre angles droicts, comme l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt à toute la circonference ; auſſi en permutant, comme quatre angles droicts ſeront à vn angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle au centre : Ce qui a eſté propoſé.*

Fin du ſixieſme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

1. L'VNITE, eſt ſelon laquelle vne chacune des choſes qui ſont, eſt appellee vne.

Euclide ayant traicté és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçauoir eſt de celle-là qui conſidere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traicte des ſolides, il explique en ce ſeptieſme liure & és deux ſuiuants, les proprietez & affections des nombres, pour puis apres traicter au 10. liure des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour auoir entiere & parfaicte cognoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide commenceant donc ſelon ſa couſtume par les principes, il definit premierement que c'eſt que l'vnité, & dit que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme vne: & ſelon ceſte vnité nous auons de couſtume de dire vne pierre, vn animal, vn cerps, &c. Mais eſt à noter que tout ainſi qu'en la Geometrie le poinct n'a aucune partie eſtãt indiuiſible, auſſi és nombres l'vnité ne reçoit aucune diuiſion, mais eſt indiuiſible ſelon noſtre autheur, lequel n'a eſgard en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers: mais nous y ioindrons auſſi quelque choſe des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enſeignees en noſtre Arithmetique practique, ne ſont moins veritables & certaines, que ſi elles eſtoient reſtraintes ſeulement aux nombres entiers dont traicte icy Euclide.

2. Nombre, eſt vne multitude compoſee de pluſieurs vnitez.

C'eſt à dire qu'eſtans aſſemblees pluſieurs vnitez enſemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre: dont s'enſuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'vnitez qui le conſtituent: de ſorte que l'vnité eſt la partie de chaque nombre deſnommée par le meſme nombre duquel elle eſt partie: comme le nombre 4 compoſé de quatre vnitez, ſe diuiſe en autant de parties, ſçauoir eſt en quatre vnitez, chacune deſquelles eſt dicte quatrieſme partie du nombre 4. Ainſi auſſi le nombre 20 compoſé de vingt vni-

tez ſe diuiſe en autant de parties, chacune deſquelles eſt dicte vingtieſme partie d'iceluy nombre 20, &c. D'où reſulte que tous les nombres ſont commenſurables entr'eux, puis qu'ils ſont tous meſurez par une meſme & commune meſure, ſçauoir par l'vnité, comme il eſt dit: ce qui ne peut pas conuenir à toutes les grandeurs, puis que pluſieurs d'icelles n'ont point de commune meſure, mais ſont incommenſurables, comme il ſera demonſtré au 10. liure.

3 Vn nombre eſt partie d'vn autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit meſure le plus grand.

C'eſt à dire, que lors qu'vn nombre en meſure ou diuiſe exactement vn plus grand, ſans qu'il reſte rien, il eſt dit partie d'iceluy: comme 4 eſt dit partie de 12, d'autant qu'iceluy nombre 12 eſt diuiſé exactement par 4 ſans qu'il reſte rien: ſemblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 & 9, eſt partie du nombre 18, puis que chacun le meſure ou diuiſe exactement. Or toute partie, cõme nous auons dit à la 1. def. 5. eſt appellee aliquote, & prend ſon nom du nombre par lequel elle en meſure vn autre; tellement que 2 eſt dit partie aliquote de 4; & ſe nomme $\frac{1}{2}$; pource que 2 meſure 4 par 2: & cinq eſt dit partie aliquote de 15, c'eſt à ſçauoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 meſure 15 par 3: ainſi 4 qui meſure 28 par 7, eſt dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais vn nombre eſt dit parties d'vn autre plus grand, lors que le plus petit ne meſure pas le plus grand.

C'eſt à dire que lors qu'vn petit nombre n'en meſure pas vn plus grand, il n'eſt pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 eſt dict parties de 9: car il ne le meſure pas preciſément, mais eſt deux parties d'iceluy, ſçauoir eſt $\frac{2}{3}$: ainſi 12 eſt parties de 16, ſçauoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui meſure l'vn & l'autre nombre, eſt 3 fois en 12, & 4 fois en 16: auſſi 15 eſt parties de 24, ſçauoir eſt $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui eſt commune meſure, eſt 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 eſt parties de 7, ſçauoir eſt $\frac{5}{7}$: & 4 eſt parties de 9, ſçauoir eſt $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais vn grand nombre eſt dit multiple d'vn petit, lors que le petit meſure le grand.

Tout ainſi que tout petit nombre n'eſt pas dict partie d'vn plus grand, ains ſeulement de celuy là qu'il meſure preciſement; ainſi auſſi tout grand nombre n'eſt pas dit multiple, ou le pluſieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais ſeulement de ceux-là qui le peuuent preciſément meſurer: tellement que de deux nombres inegaux, ſi le petit meſure preciſément le grand, ce moindre eſt dict partie du grand, mais celuy-cy eſt auſſi dict multiple de ceſtuy-là: Ainſi 4 eſt bien dict partie de 12, mais auſſi iceluy 12 eſt dict multiple de 4. Pareillement 30 eſt dict multiple tant de 5 que de 6, qui ſont parties d'iceluy, puis que l'vn & l'autre le meſure.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, ſont appellez nombres pairs, pource que cha-

cun d'iceux peut eſtre diuiſé en deux egalement, c'eſt à dire en deux parties egales, car leurs moitiez ſont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

7. Mais l'impair, eſt celuy qui ne peut eſtre diuiſé en deux egalement: ou bien celuy qui eſt different du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, ſont nommez impairs, pource qu'ils ne peuuent eſtre diuiſez en deux egalement: Ou bien d'autant qu'ils ſont differens de l'vnité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50. &c.

8. Nombre pairement pair, eſt celuy qu'vn nombre pair meſure par vn nombre pair.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre pair en meſure vn autre par vn nombre qui ſoit auſſi pair, le nombre meſuré ſera dit pairement pair: comme 32, lequel 8 meſure par 4, eſt dict nombre pairement pair: Semblablement 24 ſera dit nombre pairement pair, pource que 6 nombre pair le meſure par 4 nombre pair, &c.

9. Et pairement impair, eſt celuy qu'vn nombre impair meſure par vn nombre pair.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre pair en meſure vn autre par vn nombre impair, le meſuré ſera dit pairement impair: comme 42 eſt dit nombre pairement impair, pource que 6, nombre pair le meſure par 7, nombre impair. Semblablement 24 ſera dit nombre pairement impair, d'autant que 3, nombre impair le meſure par 8, nombre pair. Et eſt à noter, qu'il y a pluſieurs nombres qui ſont pairement pair, & pairement impair, comme 12, 24, 48, 96, &c. Et que ce ſoit l'intention d'Euclide, les 32, 33, & 34. prop. 9. le monſtrent aſſez.

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre impair par vn nombre impair.

Comme 15, lequel eſt meſuré de 5 par 3, eſt dict nombre impairement impair: & tels ſont auſſi les nombres ſuiuans, 9, 21, 25, 27, 33, 35, &c.

11. Nombre premier, eſt celuy qui eſt meſuré par la ſeule vnité.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre n'eſt meſuré par aucun autre nombre, mais ſeulement par ſoy-meſme, & l'vnité, il eſt nombre premier, & tels ſont tous ceux-cy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. Car chacun d'iceux n'eſt meſuré par aucun autre nombre, mais par la ſeule vnité.

12. Nombres premiers entr'eux, ſont ceux-là qui n'ont autre commune meſure que l'vnité.

C'eſt à dire, que ſi deux ou dauantage de nombres n'ont autre commune meſure

que

que l'vnité, ils ſeront dits premiers entr'eux, iaçoit que chacun d'iceux puiſſe eſtre meſuré par quelque nombre outre l'vnité. Comme ces deux nombres 15 & 8, ſont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y-a que l'vnité qui les puiſſe meſurer tous deux: car encore que le premier ſoit meſuré par 5 & 3; & le dernier par 4 & 2, ſi eſt-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut meſurer l'vn & l'autre des propoſez, ains la ſeule vnité eſt leur commune meſure.

13. Nombre compoſé, eſt celuy qui eſt meſuré par quelque autre nombre.

Comme 15 eſt appellé nombre compoſé, pource qu'il eſt meſuré par 5 & 3: Auſſi 27 eſt nombre compoſé, d'autant qu'il eſt meſuré par 9 & 3. &c.

14. Mais les nombres compoſez entr'eux, ſont ceux-là qui ont autre commune meſure que l'vnité.

C'eſt à dire, que ſi deux ou dauantage de nombres ſont meſurez par quelque nombre outre l'vnité, comme par leur commune meſure, ils ſeront dicts nombres compoſez entr'eux: ainſi les nombres 9 & 15 ſont compoſez entr'eux; d'autant que 3 meſure l'vn & l'autre d'iceux, comme leur commune meſure. Auſſi 7, 21, & 28, ſont compoſez entr'eux, pource que le premier d'iceux meſure ſoy-meſme, & les deux autres.

15. Vn nombre eſt dict multiplier vn nombre, lors qu'il en eſt procreé vn autre, qui eſt autant de fois compoſé de celuy qui eſt multiplié qu'il y-a d'vnitez au multiplia nt.

Comme 4 ſera dit multiplier 6, ſi iceluy nombre 6 eſt prins ou compoſé quatre fois, c'eſt à ſçauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez au multipliant 4: & le nombre procreé, qu'on appelle vulgairement produict, *ſera 24. Auſſi le nombre 6 ſera dit multiplier le nombre 4, ſi nous prenons iceluy nombre 4, ſix fois, c'eſt aſſauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez en 6 nombre multipliant; & en ſera procreé le meſme nombre 24. Ainſi vn nombre ſera dit eſtre procreé ou produict de deux nombres, quand il ſera produict en multipliant l'vn d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 ſera dit eſtre le produict de ces deux nombres 4 & 9, pource qu'il eſt procreé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9, ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.*

Or de ce que deſſus il s'enſuit que le nombre produict de la multiplication d'vn nombre par vn autre, a meſme raiſon auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'vnité. Car puis que ſelon la def. d'Euclide, pour auoir le produict de deux nombres il faut prendre autant de fois l'vn d'iceux, qu'il y-a d'vnités en l'autre, iceluy produict contiendra autant de fois l'vn ou l'autre des nombres multiplians qu'il y-a d'vnitez en l'autre: & partant il y aura meſme raiſon du nombre produict à l'vn ou l'autre des multiplians, que de l'autre multipliant à l'vnité: parquoy la multiplication d'vn nombre en vn autre peut eſtre definie ainſi:

La multiplication d'vn nombre par vn autre, eſt l'indention d'vn nombre

qui ait meſme raiſon auquel on voudra des nombres multiplians, que l'autre à l'vnité.

Ainſi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, eſt produict le nombre 35, lequel eſt à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A ceſte definition Clauius adiouste la ſuiuante.

Vn nombre eſt dict diuiſer vn nombre, quand on en prend vn autre, qui contient autant d'vnitez que le nombre diuiſant eſt contenu de fois au nombre diuiſé.

Comme le nombre 6 ſera dit diuiſer le nombre 24, ſi on prend le nombre 4; qui monſtre par ſes quatre vnitez, que le nombre 6 eſt contenu 4 fois au nombre diuiſé 24. Auſſi le nombre 4 ſera dit diuiſer le meſme nombre 24, ſi on prend le nombre 6, lequel denotte par ſes ſix vnitez, que le nombre diuiſant eſt contenu ſix fois au diuiſé 24.

De cecy il aduient que le nombre prouenant de la diuiſion, lequel on appelle vulgairement quotient, *a meſme raiſon à l'vnité, que le nombre diuiſé au diuiſeur. Car puis que, comme nous auons dit en la def. le quotient doit monſtrer & indiquer par ſes vnitez, combien de fois le nombre diuiſeur eſt contenu au diuiſé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'vnité, que le nombre diuiſé contient le diuiſeur; & partant il y aura meſme raiſon du quotient à l'vnité, que du nombre diuiſé au diuiſeur. Parquoy la diuiſion d'vn nombre par vn autre ſe peut auſſi definir ainſi:*

La diuiſion d'vn nombre par vn nombre, eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité, que le nombre diuiſé au diuiſant.

Ainſi appert que de la diuiſion du nombre 24 par ſix, eſt prouenu le nombre 4, lequel eſt à 1, comme 24 à 6. Item de la diuiſion du meſme nombre 24, par 4, eſt produict le nombre 6, qui eſt à 1, comme 24 à 4.

De cecy il aduient qu'eſtant diuiſé vn nombre par vn nombre, le nombre diuiſé ſera procreé de la multiplication du nombre trouué, c'eſt à dire du quotient, par le nombre diuiſeur. Car ayant diuiſé le nombre A par B, le quotient ſoit C. Ie dis que le nombre A ſera produict de la multiplication du nombre C par le nombre B. D'autant que par la def. de la multiplication le nombre procreé de C multiplié par B, eſt à B, comme C à l'vnité D; & que par la def. de la diuiſion A eſt auſſi à B, comme C à l'vnité D; il eſt manifeſte que le nombre procreé par la multiplication de C en B eſt le nombre A, veu que tant iceluy nombre procreé, que le diuiſé A, a meſme raiſon à B, que C à l'vnité D.

A.	B.	C.	D.
48.	8.	6.	1.

Or ce que nous auons dict cy-deſſus touchant la multiplication & diuiſion des nombres entiers, conuient auſſi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ ſera dit multiplier le nombre 20, ſi le nombre 20 eſt pris autant de fois qu'il y a d'vnitez en $\frac{1}{2}$, & ſera procreé le nombre 10: car d'autant que l'vnité eſt ſeulement par ſa moitié en $\frac{1}{2}$, il faut auſſi prendre le nombre 20 par ſa moitié, qui eſt 10. Semblablement le nombre 20, ſera dit multiplier $\frac{1}{20}$, ſi $\frac{1}{20}$ eſt pris vingt fois, c'eſt à ſçauoir autant de fois que l'vnité eſt en 20; & le produict ſera le meſme nombre 10. Item, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſeront dits s'entremultiplier, ſi on prend la troiſieſme partie de $\frac{1}{2}$, tout ainſi que $\frac{1}{3}$ contient ſeulement la troiſieſme partie de l'vnité: ou bien ſi on prend la

moitié de $\frac{1}{3}$, parce que $\frac{1}{12}$ contient ſeulement la moitié de l'vnité: & par ainſi le produict ſera $\frac{1}{6}$; car c'eſt la troiſieſme partie du nombre $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{3}{6}$, & la moitié du nombre $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ ſera dit diuiſer le nombre 10, ſi on prend le nombre 20, qui monſtre que le nombre diuiſant $\frac{1}{2}$ eſt contenu vingt fois au nombre diuiſé 10; tellement qu'il y ait la meſme raiſon du nombre procreé 20 à 1, que du nombre diuiſé 10 au diuiſant $\frac{1}{2}$. Ainſi auſſi $\frac{1}{2}$ ſera dit diuiſer $\frac{1}{6}$, ſi on prend le nombre $\frac{1}{3}$, lequel monſtre que le nombre diuiſant $\frac{1}{12}$ n'eſt pas tout contenu au diuiſé $\frac{1}{6}$, ains ſeulement la troiſieſme partie d'iceluy: car puis que le nombre $\frac{1}{2}$ eſt le meſme que $\frac{3}{6}$, il eſt euident que la troiſieſme partie d'iceluy, c'eſt à ſçauoir $\frac{1}{6}$, eſt contenu en $\frac{1}{6}$. Or comme il faut faire & prattiquer non ſeulement la multiplication & diuiſion en nombres rompus, mais auſſi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique, nous l'auons enſeigné en noſtre Pratique d'Arithmetique, & à la fin de ce 7. liure d'Euclide nous en ferons les demonſtrations.

16. Lors que deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé plan; & les nombres multiplians ſont dicts coſtez d'iceluy plan.

C'eſt à dire que tout nombre produict de la mutuelle multiplication de deux nombres eſt appellé nombre plan: d'autant que chaque vnité de l'vn d'iceux nombres eſtant poſée & eſtendue d'ordre autant de fois qu'il y-a d'vnité en l'autre nombre, eſt repreſenté vn parallelogramme rectangle, duquel les coſtez ſont les deux nombres ſe multiplians, comme il a eſté dict au 2. liure. Ainſi le nombre 20 produict de 5 par 4 eſt dict nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 ſont dicts coſtez d'iceluy plan.

17. Mais quand trois nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé ſolide, & les multiplians ſont dicts coſtez d'iceluy.

Comme ſi on multiplie 6 par 5, & leur produict 30 par 4, ſera procreé le nombre 120; lequel s'appellera nombre ſolide, & les trois nombres multiplians 6, 5 & 4, ſeront dicts coſtez d'iceluy ſolide.

18. Nombre quarré, eſt celuy qui eſt egalement egal: ou bien c'eſt le produict de deux nombres egaux.

Comme le nombre plan 16 eſt appellé quarré, pource qu'il eſt procreé de la multiplication de 4 par 4, & conſequemment egal de tous coſtez. Ainſi auſſi 49, produict de la multiplication de 7 par 7, ſera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, eſt celuy qui eſt egalement egal egalement: ou bien c'eſt le produict de trois nombres egaux.

Comme ſi le nombre 4 eſt multiplié par 4, & puis leur produict 16 encore

par 4, ſera procreé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres ſont proportionnaux, quand le premier eſt autant multiple, ou meſme partie, ou meſmes parties du ſecond, comme le troiſieſme du quatrieſme.

C'eſt à dire, que quand vn nombre eſt meſme partie, ou meſmes parties d'vn nombre, qu'vn autre d'vn autre, iceux quatre nombres ſont dits proportionnaux. Ainſi pource que le nombre A eſt meſme partie du nombre B, que le nombre C du nombre D, c'eſt à ſçauoir la moitié, iceux quatre nombres A, B, C, D, ſont proportionnaux. Auſſi les quatre nombres E, F, G, H ſont proportionnaux, puis que E eſt meſmes partie de F, que G de H, c'eſt à ſçauoir deux troiſieſmes parties. Item les quatre nombres I, K, L, M, ſont auſſi proportionnaux, d'autant que comme I eſt quadruple de K, auſſi L eſt quadruple de M; ou bien pource que M eſt telle partie de L que K de I: Car il eſt euident que ſi le premier nombre I eſt autant multiple du ſecond K, que le troiſieſme I, l'eſt du quatrieſme M: en prenant les meſmes nombres par ordre contraire, M ſera telle partie de L, que K de I, c'eſt à ſçauoir le quart. Parquoy on peut aſſeurément conclurre que quatre nombres ſont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers eſt meſme partie, ou meſmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers eſt de l'autre, moyennant qu'ils ſoient pris d'vn meſme ordre, c'eſt à dire que ſi le moindre nombre des deux premiers eſt antecedant, le moindre des deux derniers ſoit auſſi antecedant; & ſi conſequent, conſequent. Et c'eſt à mon aduis ainſi qu'il faut entendre ceſte 20. def. pour la rendre vniuerſelle, car autrement on ne pourroit pas conclurre par icelle la proportionnalité de pluſieurs nombres, comme par exemple de ces quatre N, O, P, Q, veu que les prenant ſelon l'ordre qu'ils ſont poſez, le premier N n'eſt pas multiple du ſecond O, ny auſſi partie ou parties, puis qu'il eſt plus grand qu'iceluy; & neantmoins ils ſont proportionnaux, veu que le moindre des deux premiers, c'eſt aſſauoir O, contient autant de parties de l'autre N, que le moindre des deux autres, qui eſt Q, en contient de l'autre P, c'eſt aſſauoir quatre cinquieſmes parties. Semblablement ces quatre autres nombres R, S, T, V, ſont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T, que S en contient de R; ou bien à cauſe que S eſt meſmes parties de R, que V de T, c'eſt à ſçauoir les trois quarts.

A	B	C	D
5.	10.	4.	8.

E	F	G	H
6.	9.	4.	6.

I	K	L	M
20.	5.	8.	2.

N	O	P	Q
15.	12.	25.	20.

R	S	T	V
36.	27.	24.	18.

Clauius eſtimant que ceſte def. a eſté corrompue, pour la reſtituer y a adiouſté ces mots: Ou bien quand le premier contient egalement le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre vne meſme partie, ou meſmes parties d'iceluy. *Mais ie n'eſtime pas que cette addition y ſoit neceſſaire, puis que le moindre nombre de chaque raiſon eſtant conferé à l'autre ladite def. conuient à toutes ſortes de proportions: & que ce ſoit l'intention d'Euclide, il appert aſſez par les demonſtrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. liure.*

Or Euclide deſinit ſeulement icy les nombres proportionnaux, qui ont vne meſ-

me raiſon d'inegalité: Car de la raiſon d'egalité, il eſt euident que le premier nombre eſtant egal au ſecond, auſſi le troiſieſme doit eſtre egal au quatrieſme, afin qu'ils ſoient dits proportionnaux.

De ceſte 20. def. reſulte appertement, que les nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme nombre; & au contraire qu'vn meſme nombre a auſſi meſme raiſon à des egaux: Ce qui a eſté demonſtré en toutes grandeurs à la 7. p. 5. Il en reſulte encore que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme nombre, ou auſquels vn meſme nombre a meſme raiſon, ſont egaux entr'eux. Ce qui a auſſi eſté demonſtré en toutes ſortes de grandeurs en la 9. p. 5.

De ceſte meſme def. on collige auſſi que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raiſon à vn meſme nombre, que le plus petit; & au contraire qu'vn meſme nombre a plus grande raiſon à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celuy qui a plus grande raiſon à vn meſme, eſt le plus grand: & celuy auquel vn meſme nombre a plus grande raiſon, eſt le plus petit: Toutes leſquelles choſes ſont claires, & euidentes, ſi ceſte def. eſt bien entenduë. Cecy a auſſi eſté demonſtré és grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

Or cette definition, & tout ce que nous auons dit cy-deſſus, conuient auſſi aux nombres rompus: Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ſont proportionnaux, attendu que le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir double; ainſi qu'il appert en reduiſant les deux premiers en meſme denomination, ſçauoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{6}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, ſont proportionnaux, puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir la moitié, &c.

21. Les nombres ſemblables plans, ou ſolides, ſont ceux qui ont les coſtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, ſont nombres plans ſemblables, pource que 6 & 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proportionnaux à 3 & 2, coſtez de celuy-cy: ainſi auſſi 192 & 24, ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8, 6, 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proport. à 4, 3, 2, coſtez de celuy-cy. Et eſt à noter que ces nombres plans, & ſolides ſemblables peuuent bien eſtre auſſi compris ſous des coſtez non proportionnaux; mais toutesfois nous ne les conſiderons icy qu'entant qu'ils ſont contenus ſous leurs coſtez proportionnaux.

22. Nombre parfaict, eſt celuy qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

Comme 6 eſt dict nombre parfaict, pource que les parties aliquotes d'iceluy, ſçauoir 1, 2, 3, priſes enſemble, luy ſont egales. Ainſi auſſi 28, duquel les parties aliquotes, ſçauoir eſt 1, 2, 4, 7, 14, eſtans priſes enſemble, luy ſont egales; ſera dict nombre parfaict: & tels ſont auſſi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'vn nombre priſes enſemble, ſont plus grandes qu'iceluy, il eſt dict abondant; & quand elles ſont moindres, il eſt appellé diminué.

A ces definitions d'Euclide, Clauius en adiouſte quelques autres, touchant les

raiſons & proportions des nombres, comme de la raiſon egale, de l'alterne, de l'inuerſe, & autres dont eſt traicté en general au 5. liure: Mais pource que nous les auons tellement expliquees en ce lieu-là, qu'on les peut entendre & adapter, non ſeulement aux lignes, ſuperficies & ſolides, mais auſſi aux nombres, & en general à toutes ſortes de grandeurs & quantitez ſoient continues ou diſcrettes; ie n'eſtime pas qu'il ſoit beſoin de les repeter icy, c'eſt pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OV DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre tant qu'on voudra d'egaux ou multiples.

2. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre vn plus grand.

Combien que ſelon noſtre Autheur le nombre ne puiſſe eſtre diminué infiniment, ains ſeulement iuſques à l'vnité qu'il fait indiuiſible, ſi eſt-ce toutesfois qu'il peut eſtre augmenté infiniment par la continue addition de l'vnité: Parquoy eſtant propoſé quelconque nombre, on en peut trouuer vn plus grand, c'eſt aſſauoir celuy qui eſt produict de l'addition d'vne ou de pluſieurs vnitez au nombre donné.

AXIOMES OV COMMVNES SENTENCES.

1. LEs nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Et ceux deſquels vn meſme nombre eſt equemultiplice, ou deſquels les equemultiplices ſont egaux, ſont auſſi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui ſont vne meſme partie, ou meſmes parties de nombres egaux, ou d'vn meſme, ſont egaux entr'eux.

4. Et ceux deſquels vn meſme nombre, ou nombres egaux, ſont meſme partie, ou meſmes parties: ſont auſſi egaux entr'eux.

5. L'vnité meſure tout nombre par les vnitez qui ſont en iceluy, c'eſt à dire par le meſme nombre.

6. Tout nombre meſure ſoy-meſme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produict quelqu'vn, le multipliant meſurera le produict par le mul-

tiplié: mais le multiplié mesurera le mesme produict par le multipliant.

8. Si vn nombre mesure vn nombre; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produict celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou dauantage, mesure aussi le composé d'iceux.

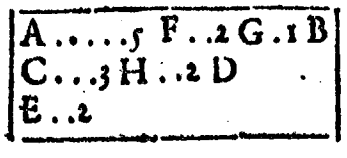
11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le plus petit reste ne mesure iamais le precedant iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB & CD, tels que si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand; le plus petit reste ne mesure iamais le precedant, iusques à ce qu'on paruienne à l'vnité: Ie dis qu'iceux nombres AB & CD, seront premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils ont pour commune mesure la seule vnité.



Autrement, s'ils ne sont premiers, il seront composez, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux: ainsi CD plus petit nombre estant soustraict de AB, soit le reste FB plus petit que CD: item FB estant soustraict de CD, soit le reste HD plus petit que FB: Pareillement HD estant soustraict de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son egal AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent son egal FG: mais il mesure aussi le tout FB;

E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie? ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuuent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement: & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12 def. de ce liure. Si donc de deux nombres inegaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la proposition suiuante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustraict touſiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra pas iusques à l'vnité.

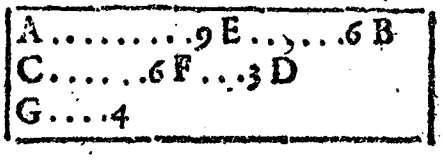
Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en 12 prop. cy-dessus: & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognoistrons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car estant faicte la soustraction, comme dit est, si on paruient iusques à l'vnité, lesdicts nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on n'y paruient pas, ils seront composez.

PROBL. 1. PROP. 11.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux; trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux AB & CD, desquels CD soit le moindre: il faut trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.



Soit soustraict le plus petit nombre CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose, comme EB, iceluy soit osté de CD, tellement qu'il reste encor FD; & ainsi soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que FD mesurant EB, il ne reste rien. Ie dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouuerons ainsi. D'autant que FD mesure EB, & EB mesure CF, par la 11. com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy mesme, il mesurera le tout CD, composé des deux CF, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure AE: donc FD mesurera aussi AE: Et puis qu'il mesure aussi EB; il mesurera le tout AB composé d'iceux AE, EB. Par ainsi FD mesure tous les deux nombres AB & CD.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible)

eſt poſſible) vne autre plus grande, comme G. Veu donc que G meſure CD, il meſurera auſſi AE; & meſurant le tout AB, par la 12. com. ſent. il meſurera auſſi le reſte EB; & par conſequent il meſurera CF. Mais il meſure auſſi le tout CD; il meſurera donc auſſi le reſte FD, ſcauoir le plus grand nombre le plus petit: cequi eſt impoſſible. Donc vn plus grand nombre que FD ne meſure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD eſt leur plus grande commune meſure.

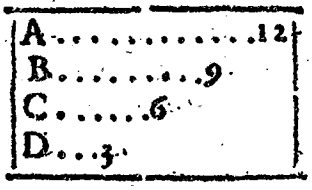
Que ſi le moindre nombre CD meſuroit le plus grand AB; il eſt manifeſte qu'il ſeroit la plus grande commune meſure, attendu qu'il meſure ſoy-meſme, ainſi qu'il appert icy. Nous auons donc trouué la plus grande commune meſure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

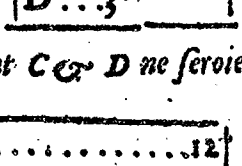
De cecy eſt euident que qui meſure deux nombres, il meſure auſſi leur plus grande commune meſure, puis qu'il a eſté demonſtré que ſi G meſure AB, & CD, il meſurera auſſi FD leur plus grande commune meſure.

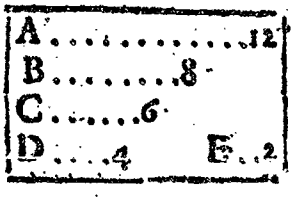
SCHOLIE.

Par les choſes cy-deſſus dictes, nous cognoiſtrons facilement ſi trois ou dauantage de nombres propoſez ſont premiers entr'eux, ou non. Car ſoient donnez les trois nombres A, B, C. Premierement donc ſoit veu par ce qui eſt dict à la 1. prop. ſi les deux nombres A & B ſont premiers entr'eux, ou non: Que s'ils ſont premiers, il eſt euident que les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux. Mais ſi A & B eſtoient compoſez entr'eux, ſoit trouuée par la 2. prop. leur plus grande commmune meſure D; que ſi elle meſure auſſi le nombre C, il eſt manifeſte que les trois nombres A, B, C, ſont compoſez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune meſure.



Que ſi D plus grande commune meſure de A & B, ne meſure C; C & D ſeront premiers entr'eux, ou non: s'ils ſont premiers, les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux, mais premiers: Car s'ils eſtoient compoſez, ils auroient vne commune meſure, laquelle meſureroit auſſi le nombre D plus grande commune meſure de A & B, par le Corol. de ceſte prop. & partant C & D ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Mais ſi C & D ne ſont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, ſeront compoſez entr'eux. Car eſtant trouuee par la 2. p. 7. E la plus grande commune meſure de C & D; iceluy nombre E meſurera auſſi A & B par la 11. com. ſent. puis que D les meſure. Parquoy vn que le meſme E meſure auſſi C; il meſurera les trois A, B, C: & partant iceux ſeront compoſez entr'eux. Ce qui eſtoit propoſé.





En la meſme maniere ſera examiné & cognieu ſi plus de trois nombres ſont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra eſpreuuer premierement trois; ſi cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres propoſez.

PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux; trouuer leur plus grande commune mesure.

A.....12	D....4.
B.....8	E..2
C.....6	F...3

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A,B,C; desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit trouué par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: car si vn plus grand nombre que D mesuroit A,B,C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, scauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Cor. de la 2. prop. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure de C & D. Il est euident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A,B,C, d'autant qu'elle mesure C & D; lequel D mesure B & A. Ie dis dauantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, scauoir F, s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le mesme Corol. de la 2. prop. & par la mesme raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, scauoir le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres donnez A, B, C; & partant iceluy nombre E sera leur plus grande commune mesure. Parquoy nous auons troué la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy il est manifeste qu'vn nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

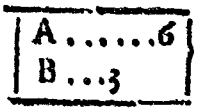
SCHOLIE.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure; C'est à dire, que s'il y-a quatre nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune mesure de trois: si 5, de quatre: si 6, de cinq, &c. puis acheuer, comme il a esté dict de trois nombres donnez. Et aura aussi lieu le Corol. precedent; tellement que le nombre qui en mesure quatre, mesurera aussi leur plus grande commune mesure, &c.

THOR. 2. PROP. IV.

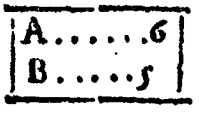
Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inegaux, desquels A soit le plus grand. Ie dis que le plus petit B, est ou partie ou parties du plus grand A.

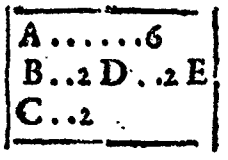


Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie par la 3. def. de ce liure : s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombres premiers, ou composez.

Premierement qu'ils soient premiers : d'autant que chaque vnité de B est partie de A, il est euident que B est parties de A, assauoir autant de parties qu'il y-a d'vnitez en B.



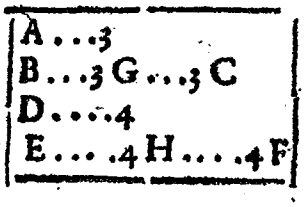
Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouuée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit diuisé B, en parties BD, DE, chacune egale à C. Veu donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A ; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, assauoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Ie dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.



Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF ; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc diuisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC ; EF se diuisera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF : & d'autant que BG est egal à A, & EH à D, si à choses egales A & BG, on adiouste choses egales, D & EH ; A & D ensemble, seront egaux à BG & EH ensemble : semblablement A & D ensemble, seront egaux à GC & HF ensemble, & ainsi de suitte, s'il y auoit dauantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble : Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Le meſme eſt auſſi veritable en nombres rompus, ainſi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A eſt telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF: & partant ſera demonſtré comme deſſus A, D, enſemble eſtre la meſme partie de BC, EF enſemble que A de BC: ſçauoir eſt, ſi BC, EF ſont diuiſez és parties BG, GC; EH, HF, egales à iceux nombres A & D, &c.

Or ceſte 5. prop. peut eſtre transferée à tant de nombres qu'on voudra ainſi:

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient meſme partie d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant; auſſi les touts ſeront meſme partie des touts, que l'vn ſera de l'vn ſon correſpondant.

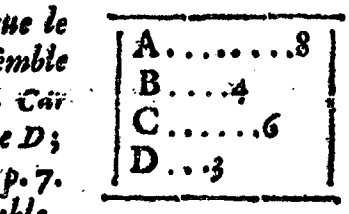
Soient les nombres A, B, C, vne meſme partie des nombres DE, FG, HI, chacun de ſon correſpondant: Ie dis que tous les nombres A, B, C, enſemble ſont la meſme partie de tous les nombres DE, FG, HI enſemble, que A de DE. Car eſtans diuiſez les nombres DE, FG, HI en parties egales à iceux A, B, C; il y aura en DE autant de parties egales à A qu'en FG d'egales à B, & qu'en HI d'egales à C. Veu donc que A & DK, ſont egaux, ſi on leur adiouſte les egaux B & FI; A, B enſemble ſeront egaux à DK, FL enſemble; & ſi à iceux on adiouſte encores les egaux C & HM; auſſi A, B, C enſemble, ſeront egaux à DK, FL, HM, enſemble. Par meſme raiſon A, B, C enſemble ſeront egaux à KE, LG, MI enſemble; & ainſi de ſuitte, s'il y auoit dauantage de parties en DE, FG, HI: donc l'aggregé des nombres A, B, C ſera autant de fois egal à l'aggregé des parties des nombres DE, FG, HI, que A ſera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C enſemble, ſeront la meſme partie de DE, FG, HI enſemble, que A de DE.

Or cecy conuient auſſi aux nombres rompus, ſoit qu'ils le ſoient tous, ſoit qu'auec iceux il y ait auſſi quelque nombre entier, voire meſme l'vnité, ainſi qu'en ceſte autre figure. Car il eſt euident que ceſte diuerſité de nombres ne peut apporter aucun changement en la demonſtration cy-deſſus.

Commandin a demonſtré en ce lieu le theoreme ſuiuant.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre qu'vn autre l'eſt d'vn autre; l'vn & l'autre enſemble ſera autant multiple de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'eſt du nombre D: Ie dis que A & C enſemble ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Car puis que A eſt multiple de B, & C autant multiple de D; B ſera telle partie de A, que D de C: & par la 5. p. p. 7. B & D enſemble ſera telle partie de A & C enſemble, que A de B: partant A & C enſemble ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Ce qu'il falloit demonſtrer.



Ce qui eſt icy demonſtré de deux nombres, ſe doit auſſi entendre de dauantage, tellement que la prop. ſe peut rendre vniuerſelle diſant ainſi:

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant; les touts ſeront autant multiple des touts, que l'vn ſera multiple de l'vn, ſon correſpondant.

Ce qui correſpond à ce qui a eſté demonſtré en toutes ſortes de grandeurs à la 1. p. 5. Et neantmoins nous le demonſtrerons encor ainſi. Soient trois nombres A, B, C, equemultiplices de trois autres D, E, F, chacun de ſon correſpondant: Ie dis que les touts A, B, C, enſemble, ſont autant multiples des touts D, E, F enſemble, que A eſt multiple de D. Car puis que A eſt autant multiple de D, que B de E, & C de F: au contraire D ſera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choſes cy-deſſus demonſtrees, D, E, F enſemble, ſeront telle partie de A, B, C enſemble, que D de A: & par le contraire les toutes A, B, C enſemble, ſeront autant multiples des toutes D, E, F enſemble, que A de D. Et n'importe que les nombres propoſez ſoient nombres entiers, ou nombres rompus car il eſt euident que la demonſtration des vns eſt la meſme que des autres.

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart: le premier & tiers enſemble, ſeront telles parties du ſecond & quart enſemble, que le premier du ſecond.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, deſquels le premier AB contient autant de parties du ſecond C, que le troiſieſme DE en contient du quatrieſme F. Ie dis que AB & DE enſemble, contiennent autant de parties de C & F enſemble, que AB de C.

A...3	G...3	B
C.....9		
D...4	H....4	E
F.....12		

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; eſtans AB & DE diuiſez en AG, GB; & DH, HE, ſelon qu'ils ſont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. preced. AG & DH enſemble ſera telle partie de C & F enſemble, que AG de C. Item GB & HE enſemble, ſera telle partie de C & F enſemble, que GB de C; & ainſi de ſuite, s'il y auoit dauantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE enſemble, ſeront telles parties de C & F enſemble, que AB de C. Donc ſi de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte meſme prop. auec ſa demonſtration a auſſi lieu en nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

Mais ceſte 6. prop. peut auſſi eſtre eſtendue à tant de nombres qu'on voudra, ſoient entiers, ou rompus, ainſi qu'il enſuit.

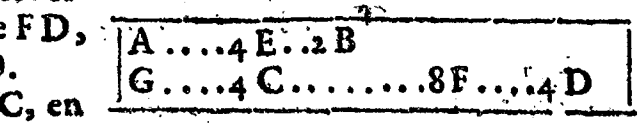
S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient meſmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'vn chacun; auſſi les touts ſeront meſmes parties des touts, que l'vn de l'vn ſon correſpondant.

Car c'eſt la meſme demonſtration que deſſus; obſeruant ſeulement qu'au lieu de la 5. prop. il ſe faut ſeruir icy de l'vniuerſelle demonſtree au Scholie d'icelle 5. prop.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi telle partie du reſte, comme le tout eſt du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE eſt du retranché CF. Ie dis que le reſte EB, ſera telle partie du reſte FD, que le tout AB eſt du tout CD.



Car eſtant pris le nombre GC, en ſorte que telle partie qu'eſt le retranché AE du retranché CF, telle partie le reſte EB ſoit d'iceluy GC; par la 5. pr. les deux nombres AE & EB enſemble ſeront telle partie des nombres GC & CF enſemble, qu'eſt AE de CF, c'eſt à dire qu'eſt le tout AB du tout CD: & partant puis que le nombre AB eſt telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD ſeront egaux entr'eux par la 4. com. ſent. en oſtant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD ſeront egaux: & partant le reſte EB ſera telle partie du reſte FD, que de GC: c'eſt à dire que le tout AB du tout CD puis que EB a eſté poſé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypotheſe eſt la meſme que AB de CD. Si donc vn nombre eſt telle partie d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte prop. auec ſa demonſtration conuient auſſi aux nombres rompus: Et encore le theoreme ſuiuant, lequel Commandin demonſtre en ceſt endroict.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn autre nombre que le retranché du retranché; auſſi le reſte ſera autant multiple du reſte, que le tout du tout.

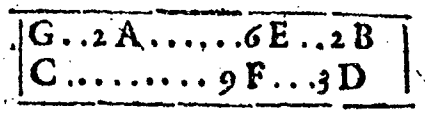
Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis auſſi que le reſte EB eſt autant multiple du reſte FD, que le tout AB l'eſt du tout CD. Car puis que AB, AE ſont equemultiplices de CD, CF, par le contraire le tout CD ſera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par

la ſuſdite prop. 7. auſſi le reſte FD, ſera telle partie du reſte EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB ſera autant multiple de FD, que le tout AB eſt multiple du tout CD. Ce qui eſtoit propoſé à demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: auſſi le reſte contiendra telles parties du reſte, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis que le reſte EB contiendra telles parties du reſte FD, que le total AB, du total CD.



Car ſi on poſe GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE enſemble, ſeront telles parties des deux CF, FD enſemble, (c'eſt à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'vn que l'autre, ils ſeront egaux: parquoy en oſtant le nombre commun AE, reſteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD: Donc auſſi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy ſi vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

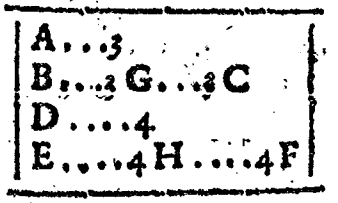
SCHOLIE.

Que ſi aux nombres entiers cy-deſſus appoſez l'on ſubſtitue des nombres rompus, tu demonſtreras en la meſme maniere ceſte 8. prop. eſtre auſſi veritable en fractions; & ſemblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier ſera telle, ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, deſquels A ſoit telle partie de BC, que D eſt de EF. Ie dis qu'en permutant, A ſera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC ſoient plus petits que D & EF, chacun au ſien; car ainſi ſe doit entendre ceſte propoſition.



Qu'ainſi ne ſoit: d'autant que par l'hypotheſe, A eſt telle partie de BC comme D de EF: BC contiendra autant de parties egales à A que EF en contient d'egales à D: ſoit donc diuiſé le nombre BC és parties BG, GC,

chacune egale à A ; & le nombre E F és parties E H, H F chacune egale à D. Et puis que A eſt poſé moindre que D, par la 4. prop. de ce liure, A eſt partie ou parties de D, & ainſi conſequemment des autres, ſçauoir BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG eſt egale à GC, & EH à HF ; B G ſera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC enſemble, c'eſt à dire BC, ſera telle ou telles parties de E H, HF enſemble, ſçauoir EF, que B G de E H, c'eſt à dire que A de D. Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart ; auſſi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, deſquels AB contienne telle parties de C, que DE de F. Ie dis qu'en permutant, AB ſera telle ou telles parties de DE, que C eſt de F, moyennant que AB & C ſoient plus petits que DE & F, chacun au ſien, car ceſte prop. auſſi bien que la precedente ſe doit ainſi entendre.

A . . 2	G . . 2 B
C . . . . . 6 .	
D 5	H . . . . . 5 E
F . . . . . 15 .	

Car AB eſtant diuiſé en AG, GB parties de C ; & DE en DH, HE parties de F ; AB ſera diuiſé en autant de parties que DE, & tant AG que GB ſera telle partie de C, que DH & HE de F : donc en permutant par la 9. prop. de ce liure, AG ſera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F : & partant AG ſera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. A G, GB enſemble, ſçauoir eſt le premier nombre AB, ſera auſſi telle partie, ou parties de DH, HE enſemble, c'eſt à dire du troiſieſme nombre DE, que AG de DH, c'eſt à dire que le ſecond nombre C du quart F : Parquoy ſi de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9 PROP. XI.

Si le tout eſt au tout, comme le retranché au retranché ; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD, comme le retranché AE au retranché CF : ie dis que le reſte EB eſt au reſte FD, comme le tout AB au tout CD.

A 4	E . . 2 B
C 6	F . . . 3 D

Car puis que AB eſt à CD, comme AE à CF ; AB eſtant plus petit nombre que CD, il ſera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. prop. le reſte EB ſera telle ou telles parties du reſte FD, que le tout du tout :

du tout: & partant par la 20. def. le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'en ceſte demonſtration Euclide poſe le nombre AB plus petit que le nombre CD, ſi eſt-ce toutesfois qu'elle auroit auſſi lieu, ſi AB eſtoit plus grand que CD. Car ou iceluy nombre CD meſureroit AB, ou il ne le meſureroit pas. Que CD meſure donc premierement AB; & d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, par la 20. def. AB, AE, ſeront equemultiplices de CD, CF, c'eſt à dire que CD ſera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reſte FD ſera auſſi meſme partie du reſte EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, ſeront equemultiplices d'icelles CD, FD: & par la 20. def. conuertie, comme le tout AB ſera au tout CD, ainſi le reſte EB ſera au reſte FD.

A.....8E.....6B
C....4F..3D

Maintenant que CD ne meſure pas AB: derechef puis que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, telles parties que CD eſt de AB, telles parties CF eſt auſſi de AE par la ſuſdite 20. def. & par la 8. prop. le reſte FD ſera meſme parties du reſte EB, que le tout CD du tout AB: donc par la meſme def. conuertie, le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB ſera au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....6E...3B
C....4F..2D

THEOR. 10. PROP. XII.

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux; comme l'vn des antecedans ſera à ſon conſequent, ainſi tous les antecedans ſeront à tous les conſequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux A, B; C, D; E, F; c'eſt à ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D, & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A, C, E enſemble, ſeront à tous les conſequens B, D, F enſemble, comme A, l'vn des antecedans, eſt à B ſon conſequent.

A.....6 C....4 E..2
B.....9 D.....6 F...3

Car puis que les ſuſdits nombres ſont proportionnaux, & A, C, E, ſont moindres que B, D, E; par la 20. def. A ſera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce meſme liure A & C enſemble ſeront telle, ou telles parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C enſemble comme vn ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D enſemble, comme vn ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes prop. A, C enſemble auec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble auec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. conuertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront meſme raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que

A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'vn des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Euclide n'ayant demonſtré ceſte prop. qu'en quatre nombres, nous auons delaiſſé ſa demonſtration pour prendre celle-cy, qu'on peut eſtendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en ceſte demonſtration nous ayons poſé, comme il a faict les nombres antecedens moindres que les conſequens, ſi eſt-ce toutesfois qu'eſtans plus grands la demonſtration n'en ſera differente, ſinon en ce qu'il faudra, comme au ſcholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiples des conſequens; & puis apres iceux conſequens meſmes parties deſdicts antecedans, &c.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si quatre nombres ſont proportionnaux: auſſi en permutant ils ſeront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis qu'en permutant, il y aura telle raiſon de A à C, que de B à D.

A	6
B	9
C	8
D	12

Car puis que comme A eſt à B, ainſi C à D, par la 20. def. A eſtant plus petit que B, & C que D; A ſera telle ou telles parties de B, que C eſt de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A ſera telle ou telles parties de C, que B eſt de D, & par la ſuſdite 20. def. conuertie, il y aura meſme raiſon de A à C que de B à D. Parquoy ſi quatre nombres ſont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte demonſtration d'Euclide a ſeulement lieu, quand les nombres antecedans ſont moindres que les conſequens, & que A eſt moindre que C: mais s'ils ſont plus grands, & que A ſoit plus grand que B, & moindre que C, la demonſtration s'en fera ainſi. D'autant que comme A eſt à B ainſi C eſt à D, par la 20. def. B ſera meſme partie, ou meſmes parties de A, que D de C: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B ſera meſme partie ou parties de D, que A de C: & par la ſuſdite 20. def. A ſera à C, comme B à D.

A	4
B	3
C	8
D	6

Que ſi A eſt plus grand que B, & que C; on argumentera ainſi. D'autant que comme A eſt à B ainſi C eſt à D, par la 20. def. D ſera meſme partie ou parties de C que B de A: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. C ſera telle partie, ou telles parties de A, que D de B; & partant par la meſme def. A ſera à C, comme B à D.

A	9
B	6
C	3
D	2

Finalement ſi A eſt moindre que B, & plus grand que C, on dira ainſi: d'autant que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D, par la 20. def. 7. C eſt meſme partie ou parties de D, que A de B: donc en changeant par la 9. ou 10. p. 7. C ſera meſme partie, ou parties de A, que D de B; & par la ſuſdicte 20. def. conuertie, A ſera à C, comme B à D.

A	4
B	8
C	2
D	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'vn coſté, & autant d'vn autre, qui ſoient prins de deux en deux, & en meſme raiſon; iceux en raiſon egale, ſeront auſſi en meſme raiſon.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F; & qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura telle raiſon de A à C, que de D à F.

A	9	D	6
B	6	E	4
C	3	F	2

Car puis que comme A eſt à B, ainſi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A ſera à D, ainſi B à E; ſemblablement auſſi puis que comme B eſt à C, ainſi E à F, en permutant comme B ſera à E, ainſi C à F. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à F (car puis que A eſt à D, & C à F, en meſme raiſon que B à E, auſſi A ſera à D en la meſme raiſon que C à F, comme ſera incontinent demonſtré) & partant en permutant, comme A ſera à C, ainſi D ſera à F: ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Or que A eſtant à D, & C à F, en meſme raiſon que B à E, ils ſoient de meſme raiſon entr'eux, nous le demonſtrerons ainſi. D'autant que comme A eſt à D, ainſi B à E; E plus petit ſera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainſi C à F; F moindre ſera telle, ou telles parties de C, que E de B: Parquoy F ſera telle ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def. conuertie, comme A ſera à D, ainſi C ſera à F. Donc les raiſons des nombres qui ſont de meſme à vne, ſont auſſi de meſme entr'elles. Ce qui a eſté demonſtré en toutes grandeurs au 5. liure prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité meſure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers meſure vn quart; auſſi en permutant le ſecond meſurera le quart autant de fois que l'vnité meſure le tiers.

Soit l'vnité A, qui meſure BC autant de fois que D meſure EF: Ie dis

qu'en permutant BC mesurera EF autant de fois que A mesure D.

Car ayant diuisé BC selon les vnitez BG, GH, HC; il y aura en EF autant de parties egales à D, lesquelles soient EI, IK, KF; & partant BG sera mesme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF: donc par la 20. def. BG est à EI, comme GH à IK, & HC à KF: & partant par la 12. prop. tous les antecedans BC seront à tous les consequents EF, comme BG à EI, ou leurs egaux A à D: & par la susdite 20. def. conuertie BC sera mesme partie de EF que A de D; & par consequent BC mesure EF autant de fois que A mesure D. Parquoy si l'vnité mesure quelque nombre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

A . 1
B . 1 G . 1 H . 1 C
D . . 2
E . . 2 I . . 2 K . . 2 F

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, leurs produicts seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B; & que A multipliant B produise C; & B multipliant A produise D. Ie dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produict C; B sera autant de fois en C, que l'vnité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'vnité mesure A, & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'vnité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. def. & par consequent mesurera D autant de fois que l'vnité mesure B: mais nous auons prouué que A mesureroit aussi C autant de fois que l'vnité mesure B: donc A mesure C & D egalement, & partant par la 1. com. sent. C & D seront egaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

vnité.	
A . . . 3	B 4
C 12	
D 12	

SCHOLIE.

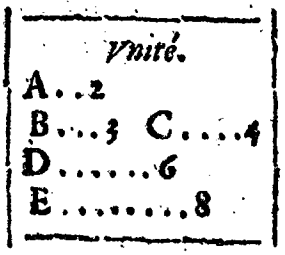
On demonstrera ceste prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produict C; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'vnité: & en permutant C sera à A comme B à l'vnité. Mais par la mesme def. comme B est à l'vnité, ainsi aussi D est à A, pource que B multipliant A a produict D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au mesme A, par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont egaux entr'eux.

vnité.	
A $\frac{1}{3}$	B $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{7}$	C $\frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre en multiplie deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

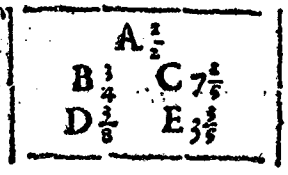
Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C faſſe D & E: Ie dis que les deux produicts D & E ſont entr'eux, comme B à C.



Car par la 15. def. B multiplié par A eſt autant de fois contenu en ſon produict D, que l'vnité en A; & C dans ſon produict E, comme la meſme vnité en A: & partant B meſurera autant de fois D, que C meſure E. Donc B ſera telle partie de D, que C de E: & par la 20. def. B ſera à D, comme C à E; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B ſera à C, ainſi D ſera à E: Si donc vn nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Cette prop. a auſſi lieu en nombres rompus; & ſe demonſtre ainſi. D'autant que A multipliant B & C, produict D & E, par la def. de la multiplication il y aura telle raiſon tant de D à B, que de E à C, comme de A à l'vnité, & partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D ſera à B, ainſi E à C: donc en permutant comme D ſera à E, ainſi B à C.

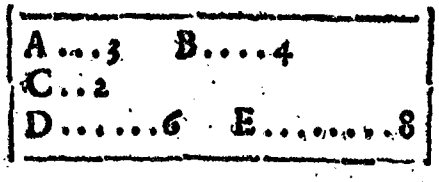


THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient vn autre, les produicts ſeront entr'eux, en meſme raiſon que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produiſent D & E. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E.

Car puis que A multipliant C produict D, auſſi C multipliant A produict le meſme D par la 16. prop. Semblablement, puis que B multipliant C produict E, auſſi C multipliant B produira le meſme E: veu donc qu'vn meſme nombre C multipliant A & B, produict D & E, comme A eſt à B, ainſi D eſt à E par la prop. prec. Parquoy ſi deux nombres en multiplient vn autre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



SCHOLIE.

Veu que la demonſtration tant de ceſte prop. que des deux ſuiuantes, eſt la meſme en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arreſterons dauantage; mais dirons icy que Clauius a accommodé (apres Campanus) tant ceſte prop. que la precedente, à tant de nombres qu'on voudra; en ceſte ſorte,

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produicts ſeront entr'eux en meſmes raiſons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou eſtant multiplié par iceux, ſoient produicts les nombres E, F, G. Ie dis que E, F, G, ſont entr'eux comme les nombres multipliez ou multiplians B, C, D; c'eſt à dire que comme B eſt à C, ainſi E à F; & comme C à D, ainſi F à G. Car puis que E, F ſont produicts de A multipliant B, C; ou de B, C, multipliez par A, comme B ſera à C, ainſi E ſera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F, G, ſont produicts de A en C, D, ou de C, D par A, auſſi comme C ſera à D, ainſi F ſera à G, & ainſi des autres. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

A...3
B..2 C...3 D....4
E.....6 F.....9 G.....12

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, ſera egal au produict du ſecond par le tiers: Et ſi le produict du premier multiplié par le quart, eſt egal au produict du ſecond par le tiers; iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B: C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Ie dis que E & F ſont egaux.

A.....6 B....4
C....3 D..2
E.....12
F.....12
G.....18

Qu'ainſi ne ſoit: Soit multiplié A par C, & le produict ſoit G: d'autant que A multiplié par C & D, produict G & E, il y aura telle raiſon de G à E, que de C à D, par la prop. prec. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raiſon de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui ſont en meſme raiſon que A & B. Parquoy G eſtant à E, & G à F en meſme raiſon que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G ſera à E, ainſi G ſera à F; parquoy C aura meſme raiſon à E qu'à F; & partant E & F ſeront nombres egaux, ainſi que nous auons dit ſur la 20. def.

Pour la ſeconde partie, ſoit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié par C: Ie dis que A eſt à B comme C eſt à D.

Car ſi G eſt produict de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront meſme raiſon à G, comme nous auons dit en la ſuitte de la 20. def. Mais il y a telle raiſon de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raiſon de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. p. A ſera à B, comme C à D: ſi donc quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Clauius adiouſte icy cet autre Theoreme, la demonſtration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier a plus grande raiſon au ſecond, que le troiſieſme au quatrieſme; le produict du premier multiplié par le quatrieſme ſera plus grand que le produict du ſecond multiplié par le troiſieſme; & ſi le nombre produict du premier & quatrieſme eſt plus grand, que celuy du ſecond & troiſieſme; il y aura plus grande raiſon du premier au ſecond que du troiſieſme au quatrieſme.

A.....7	E.....6
B....4	
C.....9	
D.....6	

Soient quatre nombres A, B, C, D, & qu'il y ait premierement plus grande raiſon du premier A au ſecond B, que du troiſieſme C au quatrieſme D: Ie dis que le nombre procreé de A en D eſt plus grand que celuy fait de B en C. Car ſi on poſe que E ſoit à B, comme C à D; il y aura auſſi plus grande raiſon de A à B, que de E à B; & partant A ſera plus grand que E, comme nous auons annotté ſur la 10. def. 7. Parquoy il ſe fera vn plus grand nombre de A en D, que de E par le meſme D. Mais par la 19. prop. 7. le produict de E en D eſt egal à celuy de B en C: donc auſſi le nombre procreé de A en D ſera plus grand que celuy fait de B en C. Ce qu'il falloit prouuer.

A....5	E.....6
B....4	
C...3	
D..2	

Maintenant que le nombre procreé de A en D, ſoit plus grand, que celuy faict de B en C: Ie dis qu'il y a plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Car ſi on entend que le nombre E en D faſſe le meſme nombre, que de B en C; le produict de A en D ſera auſſi plus grand que celuy de E par le meſme D: & partant A ſera plus grand que E. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à B, que de E au meſme B. Mais par la 19. prop. 7. comme E eſt à B, ainſi C eſt à D: donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

Que s'il y auoit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme, le nombre faict du premier multiplié par le quatrieſme ſeroit moindre, que celuy faict du ſecond par le troiſieſme: Et ſi le nombre procreé du premier multiplié par le quatrieſme eſtoit moindre, que celuy fait du ſecond par le troiſieſme; il y auroit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme. La demonſtration n'eſt differente à la precedente, ſinon en ce qu'il faut changer plus grand *en* moindre.

A ce Theoreme nous en adiouſterons vn autre fort vtil, qui eſt tel.

Si trois ou dauantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le produict ſera touſiours le meſme, en quelque facon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A, B, C, & le produict de A multiplié par B ſoit D, le

quel multiplié par C produise E: Mais changeant d'ordre le produict de B par C soit F, & iceluy multiplié par A produise G: Changeant derechef d'ordre, le produict de A en C soit H, qui multiplié par B face I. Ie dis que les trois produicts E, G, I, sont vn mesme nombre. Car puis que B multipliant A & C produict D, F, par la 17. prop. 7. comme A est à C, ainsi D à F, & par la 19. prop. 7. le produict de A en F, qui est G, sera egal au produict de C en D, qui est E. Item puisque C multipliant A & B, produict H & F, comme A est à B, ainsi H à F; & partant le produict de A en F, qui est G, sera egal au produict de B en H, qui est I. Par ainsi les deux nombres E & I estans egaux au nombre G, tous les trois E, G, I, sont egaux entr'eux, c'est à dire vn mesme nombre: Ce qu'il falloit prouuer.

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D, & multipliant A par B, & le produict par C, soit faict E, qui multiplié par D produise F: Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C, & le produict par B, soit faict G, qui multiplié par A, face H: Ie dis que F & H sont vn mesme nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D, sera tousiours produict le mesme nombre. Car puis que multipliant d'vn costé les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'vn autre costé les trois D, C, B, aussi entr'eux sont produicts les deux E & G, soient multipliez B & C entr'eux, & le produict soit I. Or par ce qui a esté demonstré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B, & le produict par C, se fera aussi multipliant B par C, & le produict (sçauoir I) par A. Par mesme discours, on prouuera que G seroit produict multipliant D par I. Voyez donc que I multipliant A & D, produict E & G, comme A est à D, ainsi E est à G, par la 17. prop. 7. & partant le produict des extremes A & G sera le mesme que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H sont vn mesme nombre. Et par semblable discours on prouuera tousiours le mesme: Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'vn costé, & trois d'vn autre, il se rencontrera que de trois pris d'vn costé, & d'autre, il y en aura tousiours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la mesme demonstration aura tousiours lieu.

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.	I 12.	G 60.	
F 120.		H 120.	

Que si l'on propose cinq nombres, on en prendra quatre d'vn costé, & quatre d'vn autre, & s'en trouuera tousiours trois qui seront commun d'vn costé & d'autre: tellement que s'aydant de ce qui a esté demonstré en trois, & en quatre nombres, en accomplira la demonstration en la mesme sorte. Et si on propose six nombres, l'on se seruira de ce qui aura esté demonstré en cinq, & ainsi tousiours en augmentant de nombre en nombre, si on en propose dauantage. Ce que le docte Bachet a aussi demonstré en ses Problemes plaisans; & est veritable en toutes sortes de nombres soient entiers ou fractions.

THEOR.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres ſont proportionnaux, le produict des extremes eſt egal au produict du milieu: & ſi le produict des extremes eſt egal à celuy du milieu, iceux trois nombres ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi B à C: Ie dis que le produict de A 1, multiplié par C, 3e, eſt egal au produict du moyen B multiplié par ſoy-meſme.

A.....9
B.....6
D.....6
C....4

Car eſtant pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & par la prec. prop. le produict de A par C, ſera egal au produict de B par D, c'eſt à dire, de B par ſoy-meſmes.

Pour la ſeconde partie; ſoit le produict de A, 1. multiplié par C, 3e, egal au produict de B moyen multiplié par ſoy-meſme: Ie dis que les nombres A, B, C, ſont proportionnaux.

Car derechef eſtant pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & par la prop. prec. le produict de A par C ſera egal au produict de B par D, c'eſt à dire de B par ſoy-meſme, puis que D luy eſt egal: partant les trois nombres A, B, C, ſont proportionnaux. Si donc trois nombres ſont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raiſon du premier nombre au ſecond, que du ſecond au troiſieſme; le nombre procreé du premier multiplié par le troiſieſme ſera plus grand, que celuy faict du ſecond multiplié par ſoy-meſme: & ſi le nombre faict du premier multiplié par le troiſieſme eſt plus grand que du ſecond en ſoy-meſme, il y aura plus grande raiſon du premier au ſecond, que du ſecond au troiſieſme. Item s'il y a moindre raiſon du premier au ſecond, que du ſecond au troiſieſme, le produict du premier par le troiſieſme ſera moindre que le produict du ſecond par ſoy-meſme: & ſi vn moindre nombre eſt faict du premier multiplié par le troiſieſme, que du ſecond en ſoy; il y aura moindre raiſon du premier nombre au deuxieſme, que du deuxieſme au troiſieſme: Ce qui ſera

A.....8	A....4
B.....6	B.....6
D.....6	D.....6
C....5	C.....7

euident par ce qui eſt demonſtré au ſcholie precedent, ayant poſé le nombre D egal au ſecond nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres: Car alors il y aura plus grand

de raiſon du premier au deuxieſme, que du troiſieſme au quatrieſme, ou moindre, &c. comme il appert aux exemples cy appoſés, ſoit que les nombres ſoient entiers ou rompus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux, meſurent egalement les nombres qui ont la meſme raiſon, ſçauoir le plus grand, le plus grand & le plus petit.

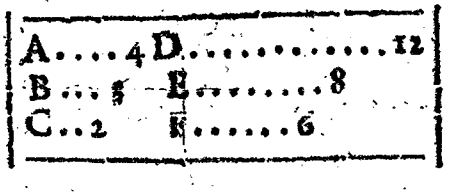
Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raiſon, & deux autres nombres plus grands C & D en meſme raiſon qu'iceux A & B, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C à D: Ie dis que A & B meſurent egalement C & D, c'eſt à dire que A meſure C autant de fois que B meſure D.

Car puis que iceux A, B, C, D, ſont proportionnaux, en permutant par la 13. prop. A ſera à C comme B à D; & puis que A & B ſont plus petits que C & D, par la 20. def. ils ſeront meſme partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuuent eſtre parties: car il eſt euident qu'ils ne ſeroient les plus petits nombres de leur raiſon; contre l'hypotheſe. Donc A eſt meſme partie de C, que B de D: & partant A meſure C, autant de fois que B meſure D: parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne meſme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y-a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, la proportion eſtant troublée, en raiſon egale, ils ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, & leur proportion troublée, ſçauoir que A ſoit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.



Car puis que A eſt à B, comme E à F le produict de A multiplié par F, ſera egal au produict de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B eſt à C, comme D à E; le meſme produict de B multiplié par E, ſera egal au produict de C multiplié par D, par la meſme prop. & partant le produict de A par F, ſera egal au produict de C par D, & par la ſuſdite 19. prop. il y aura

meſme raiſon de A à C que de D à F: Parquoy s'il y a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Il eſt euident que ceſte demonſtration conuient auſsi aux nombres rompus. Et d'autant que de ſix moyens d'argumenter és proportions, leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonſtré au 5. liure, il en demonſtre en celuy-cy ſeulement deux en nombres; il ne ſera hors de propos de demonſtrer auſsi en nombres les quatre autres moyens, comme ont faict pluſieurs Interpretes.

1. Si quatre nombres ſont proportionnaux; par raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſsi proportionnaux.

A	6	C	3
B	4	D	2

Soit A à B comme C à D. Ie dis qu'en changeant comme B à A, ainſi D à C. Car puis que comme A à B, ainſi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A ſera à C, ainſi B à D. Derechef puis que B eſt à D comme A à C, par la meſme prop. B ſera à A comme D à C. Ce qui eſtoit propoſé.

2. Si les nombres compoſez ſont proportionnaux; iceux diuiſez ſeront auſsi proportionnaux.

A	6	C	3	B	
D	4	F	2	E	

Soit AB à CB comme DE à EF. Ie dis qu'auſsi en diuiſant, comme AC à CB, ainſi DF à FE. Car puis que comme AB à CB, ainſi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AE au tout DE, ainſi le retranché CB au retranché FE: & partant par la 11. p. comme le tout AB eſt au tout DE, ainſi le reſte AC ſera au reſte DF: c'eſt à dire AC à DF comme CB à FE: donc en permutant comme AC ſera à CB, ainſi DF ſera à FE. Ce qui eſtoit propoſé.

Par la meſme maniere nous demonſtrerons comme au liure 5. la diuiſion conuerſe, & contraire de raiſon. Car ſoit premierement comme AB à CB, ainſi DE à FE; Ie dis que, par diuiſion conuerſe de raiſon, comme CB à AC, ainſi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainſi DE à FE; en diuiſant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE: & en changeant, comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainſi DF à DE. Ie dis par diuiſion contraire de raiſon, que comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE. Car puis que comme AC à AB, ainſi DF à DE: en changeant comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF. Donc en diuiſant comme CB à AC, ainſi FE à DF: & en changeant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Ce qui eſtoit propoſé.

3. Si les nombres diuiſez ſont proportionnaux; iceux compoſez ſeront auſsi proportionnaux.

A	6	B	3	C	
D	4	E	2	F	

Soit AB à BC, comme DE à EF. Ie dis qu'en compoſant comme AC eſt à BC, ainſi DF à EF. Car puis que comme AB à BC, ainſi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainſi BC à EF, & partant par la 12. prop. comme AB, BC enſemble, à DE, EF, enſemble, c'eſt à dire

le tout AC au tout DF, comme BC à EF: & en permutant par la . prop. comme AC à BC, ainsi DF à EF. Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous demonstrerons icy comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis par composition conuerse de raison, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car veu que AB est à BC, comme DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE: & en composant comme AC sera à AB, ainsi DF sera à DE.

Maintenant soit derechef AB à BC, comme DE à EF. Ie dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF: car puis que comme AB à BC, ainsi DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE. Donc en composant, comme AC à AB, ainsi DF à DE, & en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF.

4. Si les nombres composez sont propotionnaux; ils le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis que par conuersion de raison, comme AB est a AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC au reste DF. Donc en permutant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Ce qui estoit proposé.

A.....6	C...3 B
D.....4	F..2 E

A ces quatre theoremes nous adiousterons les quatre suiuans.

5. S'il y-a tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre lesquels prins de deux en deux soient en mesme raison; comme tous les nombres du premier ordre ensemble se ront à l'vn d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'vn costé, & quatre d'vn autre E, F, G, H, & que A soit à B, comme E à F; & B à C comme F à G; & C à D comme G à H: Ie dis que comme tous les nombres A, B, C, D, ensemble, seront au dernier D, ainsi tous les nombres E, F, G, H, ensemble seront au dernier H. Car d'autant que comme A, est à B, ainsi E est à F; en composant comme A, B, ensemble seront à B, ainsi E, F ensemble seront à F. Mais comme B est à C, ainsi F à G: donc en raison egale, comme AB, ensemble sont à C. ainsi E, F ensemble sont à G; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C, ainsi E, F, G, ensemble seront à G. Mais comme C à D, ainsi G à H: donc en raison egale comme A, B, C ensemble seront à L, ainsi E, F, G ensemble seront

A...3	B....4	C..2	D.....5	
E.....6	F.....8	G....4	H.....10	

à H: Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble seront à H. Ce qu'il falloit prouuer.

D'où est manifeste que comme l'vn des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble sont à H; en permutant A, B, C, D ensemble sont sont à E, F, G, H ensemble, comme D à H.

6. Si le premier à mesme raison au second, que le troisiesme au quatriesme, & que le cinquiesme ayt aussi mesme raison au second, que le sixiesme au quatriesme: le composé du premier & cinquiesme aura mesme raison au second, que le composé du troisiesme & sixiesme au quatriesme.

Soit A B premier à C deuxiesme, comme D E troisiesme à F quatriesme. Item soit B G cinquiesme à C deuxiesme, comme E H sixiesme à F quatriesme. Ie dis que A G, composé du premier & du cinquiesme est à C deuxiesme comme D E composé du troisiesme & sixiesme est à F quatriesme. Car puis que comme B G est à C, ainsi E H à F, en changeant comme C sera à B G, ainsi F à E H. Veu donc que comme A B à C, ainsi D E à F, & comme C à B G, ainsi F à E H; en raison egale, comme A B est a B G, ainsi D E est à E H: & en composant, comme A G à B G, ainsi D H à E H, partant puis que derechef comme A G à B G, ainsi D H à E H, & comme B G à C, ainsi E H à F; en raison egale, comme A G sera à C, ainsi D H à F. Ce qui est proposé.

A.....6 B..2 6	D.....9 E...3 H
C....4	F.....6

7. Si le premier a mesme raison au second, que le troisiesme au quatriesme; & que le premier ayt aussi la mesme au cinquiesme, que le troisiesme au sixiesme; aussi le premier aura mesme raison au composé du second & cinquiesme que le troisiesme au composé du quatriesme & sixiesme.

Soit le tout A B à C, comme le tout D E à F: Item le retranché A G soit à C, comme le retranché D H à F; Ie dis que le reste G B est à C, comme le reste H E à F. Car puis que comme A G à C ainsi D H à F, en changeant comme C sera à A G ainsi F à D H. Veu donc que comme A B à C, ainsi D E à F, & comme C à A G, ainsi F à D H; en raison egale; comme A B à A G, ainsi D E à D H. Parquoy en diuisant comme G B à A G, ainsi H E à D H. Mais puis que derechef, comme G B à A G, ainsi H E à D H, & comme A G à C, ainsi D H à F; en raison egale, comme G B sera à C ainsi H E sera à F: ce qui est proposé.

A.....6 G..2 B	D.....9 H...3 E
C....4	F.....6

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont vne mesme raison à deux nombres: aussi les restes auront mesme raison aux mesmes nombres.

oit A premier à B C deuxiesme, comme D troisiesme à E F quatriesme: & comme A premier C G cinquiesme, ainsi D troisiesme à F H sixiesme. Ie dis que cõme A premier est à

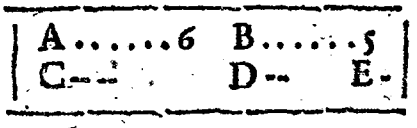
BG, composé du deuxiesme & cinquiesme, ainsi D, troisiesme à EH composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à BC, ainsi D à EF, en changeant comme BC sera à A, ainsi EF à D. D'autant donc que comme BC à A, ainsi EF à D, & comme A à CG, ainsi D à FH; en raison egale, comme BC à CG, ainsi EF à FH: & en composant comme BG à CG, ainsi EH à FH; & en changeant comme CG à BG, ainsi FH à EH. Veu donc que comme A à CG, ainsi D à FH, & comme CG à BG, ainsi FH à EH; en raison egale, comme A sera à BG, ainsi D à EH. Ce qui est proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D plus petits en la mesme raison; & par la 21. prop. ils mesureront A & B, l'vn comme l'autre: qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure des nombres A & B, ainsi ils ne seroient pas premiers entr'eux, mais composez, contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entre'eux, &c. Ce qui falloit prouuer.

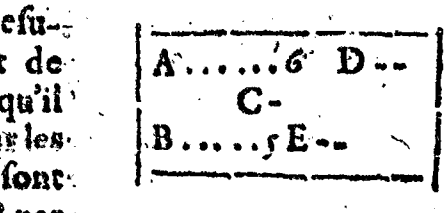


THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison: Ie dis qu'ils sont premiers entr'eux.

Autrement; s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux, s'il est possible, sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D, & B par les vnitez qui sont en E; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E: & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moin-



dres: ainſi A & B ne ſeront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon: ce qui eſt contre noſtre hypotheſe: A & B ſont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, celuy qui en meſurera l'vn ſera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'vn ou l'autre deſquels, ſçauoir A, ſoit meſuré par le nombre C. Ie dis que C eſt premier à l'autre B.

A.....6 B.....5
C...3 D-

Autrement, ſi B & C ne ſont premiers entr'eux, que D les meſure tous deux, s'il eſt poſſible. Veu donc que D meſure C, & C meſure A, par la 11. com. ſent. D meſurera auſſi A: mais il meſure pareillement B. Donc A & B ne ſont premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. C eſt donc premier à B. Si quelque nombre meſure B, on prouuera en la meſme maniere qu'il ſera premier à l'autre A. Parquoy ſi deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres ſont premiers à quelque autre; le produit des deux ſera auſſi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produiſe D. Ie dis que D eſt auſſi premier à C.

A..2 B..3 C.....5
D.....6 E..2 F..3

Autrement, ſi D & C ne ſont premiers entr'eux qu'ils ſoient compoſez, & que E les meſure tous deux, ſçauoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. ſent. comme fait auſſi A par B: Parquoy A, E, F, B, ſeront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C ſont premiers entr'eux, E meſurant C ſera premier à A par la prop. precedente; & par la 23. prop. A & E eſtans premiers, ils ſeront les plus petits de leur raiſon; & partant ils meſureront egalement F & B, qui ſont en la meſme raiſon, ſçauoir A meſurera F, & E meſurera B par la 21. prop. Mais il meſure auſſi C: donc B & C ne ſeroient pas premiers, contre l'hypotheſe. Parquoy D ſera premier à C. Si donc deux nombres ſont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le produict de l'vn d'iceux multiplié par ſoy, eſt premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'vn ou l'autre d'iceux, ſçauoir A, multiplié par ſoy produiſe C. Ie dis que B & C ſont premiers entr'eux.

A....3	B....4
C.....9	D...3

Car ſi on prend D, egal à A, B ſera auſſi premier à D. Ainſi A & D eſtans premiers à B par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'eſt à dire par ſoy-meſme, produira C premier au meſme B. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres; (l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre) leurs produicts ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E ſoit le produict de A multiplié par B, & F produict de C multiplié par D: Ie dis que E, & F ſont premiers entr'eux.

A..2	B....4
C...3	D.....5
E.....8	F.....15

Car A & B eſtans premiers à C, leur produict E ſera auſſi premier au meſme C par la 26. prop. Par le meſme diſcours E ſera auſſi premier à D; ainſi C & D eſtans premiers à E, leur produict F ſera auſſi premier à E par la meſme 26. prop. Si donc deux nombres ſont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux ſont multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront premiers entr'eux: Et ſi iceux produicts ſont encore multipliez par les nombres propoſez au commencement; leurs produicts ſeront encores premiers entr'eux: & cecy aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C, mais B multiplié auſſi par ſoy produiſe D. Ie dis que C & D, ſeront premiers entr'eux. Item ſi A multipliant C produict E, & B multi-

pliant

pliant D produict F. Ie dis que E & F seront aussi premiers entr'eux.

Car par la 27. pr. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier au restant B : par

A..2	B...3
C....4	D.....9
E.....8	F.....27
G 16	H 81.

mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef, puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B ; & D à A : Mais il a esté demonstré que C est aussi premier à D : parquoy l'vn & l'autre nombre, A, C, sera premier à l'vn & à l'autre nombre B, D ; & partant par la 28. prop. E produict de A en C, sera premier à F, produict de B par D.

Que si encore A multipliant E produict G ; & B multipliant F produict H : G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par mesme raison F sera aussi premier à A : Ainsi les deux nombres A, E, seront premiers aux deux B, F, sçauoir l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre ; & partant par la 28. prop. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le composé d'iceux sera premier à chacun d'eux : & si le composé de deux nombres est premier à quelqu'vn d'iceux, ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C ; Ie dis que le composé des deux A C, sera premier à chacun d'iceux AB, B C.

Car si A C, A B ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible : si donc D mesure le tout AC, & la partie AB ; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sent. Ainsi AB & BC ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Parquoy AC sera premier à AB : on demonstrera par la mesme maniere que AC est aussi premier à BC.

A ...3 B .... 4 C
D —

Secondement, si le tout AC est premier à AB ou à BC. Ie dis qu'iceux AB & B C seront premiers entr'eux. Autrement, que D les mesure s'ils ne sont premiers ; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent. Ainsi A C ne seroit premier à A B, & BC, ce qui est contre l'hypothese. A B & B C sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cecy, que ſi vn nombre compoſé de deux, eſt premier à l'vn d'iceux, il ſera auſſi premier à l'autre. Car ſi A C eſt premier à A B; A B, B C ſeront premiers entr'eux par la ſeconde partie de ceſte prop. Donc auſſi A C ſera premiere à B C par la premiere partie de la meſme prop. ce qui a eſté propoſé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, eſt premier à tout autre nombre qu'il ne meſure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne meſure le nombre B: Ie dis que A & B ſont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le ſont, ils auront vne commune meſure autre que l'vnité; laquelle ſoit C, s'il eſt poſsible. Or C ne peut eſtre egal à A puis que nous auons poſé que A ne meſure pas B: & par ainſi A eſtant meſuré par quelque autre nombre, il ne ſeroit premier contre l'hypotheſe. Parquoy A & B ſont premiers entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....5 B.....8
C—

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produict, il meſurera auſſi l'vn d'iceux nombres poſez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication deſquels ſoit produict C, & que D nombre premier meſure iceluy C. Ie dis qu'il meſurera auſſi l'vn ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les meſure tous deux.

Autrement, s'il ne meſure l'vn ny l'autre, qu'il meſure C par le nombre E: Si donc D ne meſure A, par la prop. prec. il ſera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils ſeront les plus petits de leur raiſon. Mais d'autant que D multiplié par E faict C, auſſi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A ſera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D meſureront egalement E & B, c'eſt à dire que A meſurera E, & D meſurera B. En la meſme maniere ſera demonſtré que ſi D ne meſure pas B, qu'il meſurera A. Si donc deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Ie dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. def. & soit de B, lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop. est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et pource qu'vn nombre ne se diminue infiniement, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera; & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit trouuer.

A.....8
B....4
C..2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A: Ie dis qu'iceluy est ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la prec. prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....5
A.....6

PROBL. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits nombres de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C: & il faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

Lesdicts nombres A, B, C sont ou nombres premiers, ou nombres composez: s'ils sont premiers entr'eux, on a ce que lon cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composez, soit trouué D plus grande commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. p. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Ie

dis que E, F & G ſont les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A, B, & C.

Car il eſt euident qu'iceux E, F, G ſont és meſmes raiſons que A, B, C, d'autant que D meſurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, ſeront produicts A, B, C, par la 9. com. ſent. & par ce que nous auons demonſtré à la 18. prop. E, F, G, auront la meſme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demonſtrera ainſi. S'ils ne ſont tels, ſoient H, I, K, les plus petits nombres ayans meſme proportion qu'iceux A, B, C: ils les meſureront donc egalement par la 21. pr. & ſoit par le nombre L; ce qu'eſtant, par la 9. com. ſent. L multipliant H, I, K, ſeront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A; & L multipliant H, faict le meſme A; par la 19. prop. il y aura telle raiſon de D à L, que de H à E: mais H eſt moindre que E; donc D ſera auſſi moindre que L: & puis que H, I, K meſurent A, B, C par L; L meſurera auſſi iceux A, B, C par la 8. com. ſent. & ainſi D ne ſera pas la plus grande commune meſure d'iceux A, B, C: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui ſoient en meſme raiſon, que les propoſez A, B, C. Parquoy eſtans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

A.....6	B....4	C.....8	
	D..2		
E...3	F..2	G....4	
H-	I-	K-	L-

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune meſure de quelconques nombres, meſure iceux par les nombres qui ſont les plus petits de tous ceux qui ſont en la meſme raiſon qu'iceux propoſez.

SCHOLIE.

Par ces choſes appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la meſme raiſon, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme ſi on propoſe les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouuerons les deux moindres en la meſme raiſon, ſi par ce prob. nous prenons E & F en la meſme raiſon des deux A & B, c'eſt à ſçauoir ces nombres-là, par leſquels D plus grande commune meſure d'iceux A & B, meſure iceux. Car par le corol. cy deſſus, E & F ſeront les plus petits de tous ceux qui ſont en la meſme raiſon que A à B, c'eſt à dire en la raiſon des continuellement proportionaux A, B, C.

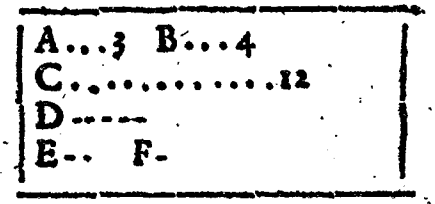
Or il aduient quelquesfois qu'vn des nombres E, F, G, trouuez par cette 35. pr. p. eſt l'vnité, c'eſt à ſçauoir quand D, plus grande commune meſure des nombres propoſez A, B, C, eſt egal à l'vn diceux: & alors les nombres trouuez E, F, G ſont les plus petits en la continuation de leur proportion, puis qu'il ne ſe peut donner vn nombre moindre que l'vnité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

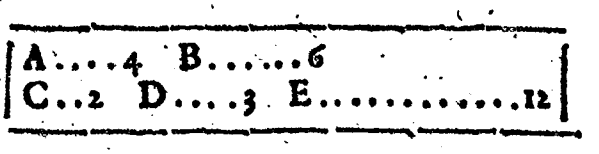
Trouuer le plus petit nombre que peuuent meſurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouuer le plus petit nombre meſuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez meſure le plus grand, il eſt euident qu'iceluy plus grand ſera le nombre que nous cherchons : que ſi l'vn ne meſure l'autre, ou A & B ſeront premiers entr'eux, ou non ; ſi premiers, ſoit multiplié A par B, & le produict ſoit C. Ie dis que C eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Car par la 7. com. ſent. il eſt euident que C ſera meſuré par l'vn & par l'autre, & s'il n'eſt le moindre nombre meſuré par iceux A, B, en ſoit vn autre plus petit D, s'il eſt poſſible, lequel A meſure ſelon le nombre E, & B ſelon le nombre F. Ce qu'eſtant, D ſera produict tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. ſent. & partant par la 19. pr. A ſera à B comme F à E. Item A & B, eſtans premiers, ils ſeront les plus petits de leur raiſon par la 23. prop. & A meſurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raiſon de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous auons monſtré que A meſuroit F : donc C meſurera auſſi D, ſçauoir le plus grand meſurera le plus petit, ce qui eſt impoſſible. C eſtoit donc le moindre nombre que A & B peuuent meſurer.



Soient maintenant les deux nombres A & B compoſez, & par la prec. prop. ſoient trouuez C & D les plus petits nombres de la meſme raiſon, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, ſoient proportionnaux : Quoy poſé par la 19. prop. le produict de A multiplié par D, ſera egal au produict de B multiplié par C : iceluy produict ſoit E. Donc E ſera meſuré par B, & par A : & par le meſme diſcours de la precedente demonſtration, on monſtrera qu'il eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Nous auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

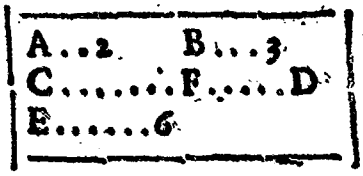
De cecy il s'enſuit, que ſi deux nombres multiplient les plus petits de leur raiſon ſçauoir le plus grand, le plus petit, & le plus petit le plus grand; le produict ſera le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car C & D eſtans poſez les plus petits en la raiſon de A à B, il a eſté prouué que E produict de A plus petit multiplié

par D, plus grand; & de B plus grand par C plus petit, eſt le plus petit nombre meſuré par A. & B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres meſurent vn autre nombre, le plus petit qu'ils meſurent, meſurera auſſi cet autre nombre.

Soient deux nombres A, & B, qui en meſurent vn autre C D, & que le plus petit nombre qu'ils meſurent ſoit E. Ie dis que E meſurera auſſi CD.



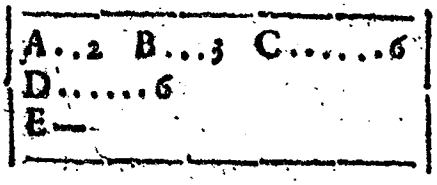
Autrement, ſi E ne meſure CD; apres auoir oſté E de C D, tant de fois que l'on pourra, il reſtera vn nombre moindre que E: qu'il laiſſe donc FD plus petit que E, s'il eſt poſſible: A & B meſurans E, ils meſureront auſſi CF par la 11. com. ſent. Mais ils meſurent le tout CD par la 12. com. ſent. ils meſureront donc auſſi le reſte F D plus petit que E, ce qui eſt impoſſible, eſtant le plus petit qu'ils meſurent. Parquoy E meſurera C D: Si donc deux nombres meſurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent meſurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent meſurer.

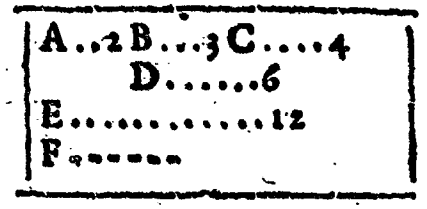
Soit trouué D plus petit nombre que peuuent meſurer A & B, par la 36. p. Or C meſure auſſi D, ou il ne le meſurera pas: s'il le meſure; Ie dis qu'il eſt auſſi le plus petit qu'iceux A, B, C, peuuent meſurer: car s'il ne l'eſt, en ſoit quelque autre plus petit E, s'il eſt poſſible, lequel tous les trois A, B, C meſurent. D'autant que A & B meſurent E moindre que D, iceluy D, ne ſera le moindre que A & B meſurent; ce qui eſt contre l'hypotheſe. D eſt donc le moindre nombre que peuuent meſurer les nombres propoſez A, B, C.



Que ſi D n'eſt auſſi meſuré par C: par la meſme 36. pr. ſoit trouué E plus petit nombre meſuré par C & D: Ie dis que E ſera le plus petit nombre meſuré par A, B, C.

Car premierement E eſt meſuré par A, B, C: d'autant que C & D le meſurent; & A & B meſurant D, par la 11. com. ſent. ils meſureront auſſi E meſuré

par D. Que ſi on dit que E n'eſt le plus petit nombre meſuré par A,B,C, ſoit F plus petit, s'il eſt poſſible: donc A & B meſurant F, D le plus petit meſuré par eux, meſurera auſſi F par la prec. prop. Mais C meſure auſſi F; (car A,B & C le meſurent) donc C & D meſureront F. Et par la meſme prop. E plus petit meſuré par C & D, meſurera auſſi F; le plus grand vn plus petit; ce qui eſt impoſſible. Donc E eſtoit le plus petit nombre meſuré par A, B, C. Eſtant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuuent meſurer; Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi trois nombres en meſurent quelque autre; le plus petit qu'ils meſureront, meſurera auſſi cet autre. Car il a eſté demonſtré que A,B, C, meſurant F; auſſi E le plus petit nombre meſuré par A,B,C, meſure le meſme nombre F.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon eſtans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car ſi 4. nombres ſont donnez, il faudra trouuer le moindre que trois meſurent: ſi 5, il faudra trouuer le plus petit que 4 meſurent, &c. procedant au reſte tout ainſi qu'il a eſté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre meſure vn autre nombre; le meſuré aura vne partie denommee par le meſurant.

Soit le nombre A, lequel meſure le nombre B. Ie dis qu'iceluy B contiendra vne partie denommee par A.

Qu'ainſi ne ſoit; que A meſure B ſelon C, c'eſt à dire, autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. prop. C meſurera B autant de fois que l'vnité meſure A; & C ſera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité eſt vne partie de A, denommee par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. def. de ce 7. liure: donc auſſi C ſera vne partie de B denommee par A. Si donc vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle ſoit, le nombre nommant ceſte partie le meſurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommee par le nombre C. Ie dis que C meſure A.

Car puis que B eſt partie denommee par C; & l'vnité eſt vne partie de C, denommée par le meſme C; comme l'vnité meſure C, ainſi B meſure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'vnité meſurera B, ainſi C meſurera A. Parquoy ſi vn nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....	12
B...3	C....4

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre, qui ayt les parties donnees.

Soient les parties donnees A,B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D,E,F, denommez par icelles parties A,B,C; & par la 38. prop. ſoit trouué G, le plus petit nombre que peuuent meſurer D,E,F: Ie dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

A *deuxieſme*	D	2
B *tiers*	E	3
C *quart.*	F	4
G.....		12
H-----		

Car puis que D, E, F meſurent G; par la 39. prop. G aura les parties denommees par D, E, F, c'eſt à dire les parties A, B, C. Ie dis auſſi que G eſt le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'eſt, ſoit H plus petit, s'il eſt poſſible, ayant icelles parties. Et H ſera meſuré par les nombres D, E, F denommees par les parties A, B, C, par la precedente propoſition: & partant puis que H eſt moindre que G; iceluy nombre G ne ſera pas le plus petit que peuuent meſurer les nombres D, E, F, contre l'hypotheſe. Donc G eſt le moindre nombre, ayant les parties donnees A,B,C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties donnees: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. liure les prop. & demonſtrations qui conuiennent & ont lieu auſſi bien aux nombres rompus qu'aux entiers; ſi eſt-ce neantmoins que pour donner vne entiere & parfaitte intelligence des regles & preceptes enſeigne en noſtre Practique d'Arithmetique touchant les fractions, nous auons eſtimé eſtre beſoin d'adiouſter icy les prop. ſuiuantes.

DEMONSTRATIONS DES FRACTIONS, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont vn meſme denominateur, & que l'vnité ſoit le numerateur de l'vne d'icelles fractions; elles auront meſme raiſon entr'elles que les numerateurs.

Soient

Soient deux fractions AB, CB, ayans vn meſme denominateur B, & le numerateur C ſoit l'vnité: Ie dis que le nombre rompu AB eſt au nombre rompu CB, comme le numerateur A eſt au numerateur C. Car veu que la fraction AB ſe diuiſe en autant de fractions egales à la fraction CB qu'il y a d'vnitez en A, chacune d'icelles fractions ayant le numerateur C, & le denominateur B; autant de fois que l'vnité C eſt contenue en A, autant de fois la fraction CB eſt contenüe en la fraction AB: parquoy l'vnité C eſt meſme partie du nombre A, que la fraction CB de la fraction AB; & partant par la 20. def. 7. comme l'vnité C eſt à A, ainſi la fraction CB eſt à la fraction AB; & en changeant, le numerateur A ſera au numerateur C, comme la fraction AB ſera à la fraction CB. Ce qui eſtoit à prouuer.

A 5	C 1
B 8	B 8

2. Le numerateur de quelconque fraction a meſme raiſon au denominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle prouient.

Soit quelconque fraction AB: Ie dis que le numerateur A eſt au denominateur B comme la fraction AB eſt à ſon entier. Soit pris vne fraction CB dont le numerateur C eſt l'vnité, & le denominateur eſt le meſme B; mais ſoit vne autre fraction DB, de laquelle le numerateur D ſoit egal au meſme denominateur B, afin qu'icelle fraction DB ſoit egale à l'entier de la fraction AB. D'autant que par la prop. prec. comme A eſt à C, ainſi la fraction AB eſt à la fraction CB: & comme C eſt à D, ainſi la fraction CB eſt à la fraction DB; en raiſon egale, comme A ſera à D, c'eſt à dire le numerateur A au denominateur B, (car B eſt egal à D) ainſi la fraction AB ſera à la fraction DB, c'eſt à dire à l'entier: ce qui a eſté propoſé.

A 5	C 1	D 8
B 8	B 8	B 8

3. Les fractions qui ont vn meſme denominateur ſont entr'elles en meſme raiſon que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB, CB, ayans vn meſme denominateur B: Ie dis que la fraction AB eſt à la fraction CB, comme le numerateur A eſt au numerateur C. Car puis que par la prop. prec. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier, & que comme B eſt à C, ainſi l'entier eſt à la fraction CB; (car par la meſme prop. prec. comme C à B, ainſi la fraction CB à ſon entier, & en changeant comme B à C, ainſi l'entier à la fraction CB) en raiſon egale, comme le numerateur A ſera au numerateur C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

A 7	C 5
B 11	B 11

S'il y auoit plus de deux fractions, on prouueroit en la meſme maniere que la ſeconde ſeroit à la troiſieſme, comme le numerateur au numerateur; & puis apres la troiſieſme à la quatrieſme, & ainſi conſecutiuement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les denominateurs de toutes les autres, les nombres produits ſeront entr'eux, en meſme proportion que les fractions.

Nous diſons le numerateur d'vne fraction eſtre multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur eſt multiplié par le denominateur de l'vne des autres fractions, & puis ce-

core le produit par le denominateur de l'vne des reſtantes, & ainſi continuellement iuſt qu'il y aura de fraction: & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit eſt touſiours le meſme, comme nous auons demonſtré au Scholie de la 19. p. 7.

Soient premierement deux fractions AB, CD, & de A en D ſoit faict E, mais de C en B ſoit faict F: Ie dis que le produit E eſt au produit F, comme la fraction AB, eſt à la fraction CD. Qu'ainſi ne ſoit; de B en D ſoit fait G: donc puis que D multipliant A & B, a faict E & G, par la 17. p. 7. comme A ſera à B, ainſi E ſera à G: Mais par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier. Donc auſſi comme la fraction AB ſera à ſon entier, ainſi E ſera à G. Derechef, pour ce que B multipliant D & C a faict G & F, par la meſme 17. p. 7. comme D ſera à C, ainſi G ſera à F. Mais comme D eſt à C, ainſi l'entier eſt à la fraction CD: (car puis que par la 2. prop. comme C à D, ainſi la fraction CD à ſon entier, en changeant comme D à C, ainſi l'entier à la fraction CD.) Donc comme G ſera à F, ainſi l'entier ſera à la fraction CD. Parquoy la fraction AB, l'entier, & la fraction CD ſeront en meſme proportion que les trois produits E, G, F. Donc en raiſon egale comme E ſera à F, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CD. Ce qui a eſté propoſé.

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

Soient maintenant les trois fractions AB, CD, HI, & que de A en D ſoit faict E, & de E en I ſoit produit L: mais que de C en B ſoit faict F, & de F en I, vienne M: finablement que de B en D ſoit faict G, & de G en H vienne N: ie dis que les trois produits L, M, N ſont entr'eux en meſme proportion que les fractions propoſées AB, CD, HI. Car puis que I multipliant E & F faict L & M, par la 17. p. 7. comme E eſt à F, ainſi eſt le produit L au produit M: par la demonſtration prece. comme E eſt à F, ainſi la fraction AB eſt à la fraction CD. Donc le produit L eſt au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Derechef puis que B multipliant C & D a faict F & G, comme C à D, ainſi F à G: Mais auſſi I multipliant F & G a fait M & K. Donc iceux produits M & K ſeront entr'eux comme F à G, c'eſt à dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainſi la fraction CD à ſon entier: Donc auſſi comme la fraction CD ſera à l'entier, ainſi ſera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N; partant comme I à H, ainſi K à N. Mais il appert par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, que comme I eſt à H, ainſi eſt l'entier à la fraction HI. Donc comme l'entier ſera à la fraction HI, ainſi K ſera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, ſeront en meſme proportion que les produits M, K & N: donc en raiſon egale, comme la fraction CD ſera à la fraction HI, ainſi le produit M ſera au produit N. Mais nous auons deſia demonſtré cy deſſus, que comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi eſt le produit L au produit M: donc les trois produits L, M, N ſeront entr'eux en meſme proportion que les trois fractions AB, CD, HI. Ce qu'il falloit prouuer.

L40	M45	
E8	F9	N24
A2	C3	H2
B3	D4	I5
G12	K60	

Que s'il y a quatre fractions, on demonſtrera en la meſme ſorte que comme la troiſieſme ſera à la quatrieſme, ainſi le produit correſpondant à cette là ſera au produit correſpondant à ceſte-cy; & ainſi continuellement de fraction en fraction, repetant touſiours la demonſtration cy-deſſus.

Or il appert de ceſte demonſtration que ſi les ſuſdicts produicts eſtoient egaux, les fractions ſeroient auſſi egales: & au contraire que les fractions eſtans egales, leſdicts produicts ſeront pareillement egaux: Mais qu'eſtans inegales, le produict de la plus grande ſera le plus grand, & de la moindre, le moindre, & ainſi des autres.

5. L'entier a meſme raiſon à la ſomme de deux ou dauantage de fractions, que le nombre produict des denominateurs multipliez entr'eux à la ſomme des produicts du numerateur de chaque fraction multiplié par les denominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB, CD, EF, & que de B en D & F ſoit procreé K; & de A en D & F ſoit faict G; mais de C par B & F ſoit produict H; & de E par B & D ſoit faict I: Ie dis que l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, comme le produit K eſt à la ſomme des produits G, H, I. Car puiſque par la prop. prec. les fractions AB, CD, EF, ſont entr'elles comme les produits G, H, I, par le 5. theor. du Scholie de la 22. p. 7. comme la ſomme d'icelles fractions AB, CD, EF eſt à la fraction EF, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt au produit I. Mais comme la fraction EF eſt à l'entier, ainſi I eſt à K: (car par la 2. prop. comme la fraction EF eſt à l'entier, ainſi E eſt à F, & par la 18. p. 7. comme E à F, ainſi I à K, pour ce que E, F multipliant le produit de B en D ont faict I & K.) Donc en raiſon egale comme la ſomme des fractions AB, CD, EF eſt à l'entier, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt à K: & au contraire, comme l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, ainſi K eſt à la ſomme des produits G, H, I. Ce qu'il falloit demonſtrer.

G 16	H 12	I 18
A 2	C 1	E 3
B 3	D 2	F 4
	K 24	

6. Si deux fractions ont vn meſme numerateur, comme la premiere fraction ſera à la ſeconde, ainſi le denominateur de la ſeconde ſera au denominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB, AC, ayans vn meſme numerateur A: Ie dis que la fraction AB eſt à la fraction AC, comme le denominateur C eſt au denominateur B. Car de A en C ſoit fait D, & de A en B ſoit produict E. Or puis que A multipliant C & B, fait D & E, par la 17. p. 7. comme C ſera à B, ainſi D ſera à E. Mais par la 4. prop. comme D eſt à E, ainſi la fraction AB eſt à la fraction AC: Donc auſſi la fraction AB ſera à la fraction AC, comme C ſera à B. Ce qu'il falloit prouuer.

D 10	E 6
A 2	A 2
B 5	C 5

7. Les fractions deſquelles les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs ſont egales entr'elles: Et des fractions egales, les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs: Mais des inegales, celles dont le numerateur a plus grande raiſon au denominateur, eſt la plus grande: Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au denominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au denominateur B, que du numerateur C au denominateur D: Ie dis qu'icelles fractions

AB, CD, ſont eſgales. Car ayant faict E de A en D, & F de B en C; comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi E à F, par la 4. prop. Mais puis que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; par la 19. p. 7. les deux produits E & F ſeront eſgaux: donc auſſi la fraction AB ſera eſgale à la fraction CD. Ce qu'il falloit prouuer.

E12	F12
A2	C4
B3	D6

Soient maintenant deux fractions eſgales AB, CD: Ie dis que comme A eſt à B, ainſi C à D: Car comme à la prec. demonſt. ayant fait E de A en D, & F de B en C, comme AB ſera à CD, ainſi E à F. Mais AB eſt eſgale à CD: donc auſſi E ſera eſgal à F; & par la 19. p. 7. comme A ſera à B, ainſi C ſera à D: Ce qu'il falloit demonſtrer.

En troiſieſme lieu, qu'il y ait plus grande raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis que la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C, par la 4. prop. comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi E à F. Mais par le Scholie de la 19. p. 7. le nombre E eſt plus grand que le nombre F: donc auſſi la fraction AB ſera plus grande que la fraction CD. Ce qu'il falloit prouuer.

E14	F9
A2	C3
B3	D7

Finablement, que la fraction AB ſoit plus grande que la fraction CD: Ie dis que la raiſon de A à B eſt plus grande que celle de C à D. Car comme deſſus la fraction AB ſera à la fraction CD, comme E à F. Mais par l'hypotheſe la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD: donc auſſi E ſera plus grand que F. Et puis que E eſt le produit de A en D, & F celuy de B en C, par le Scholie de la 19. p. 7. il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

8. Les fractions dont les numerateurs ſont en meſme raiſon que les denominateurs, ſont eſgales entr'elles. Et des fractions eſgales, les numerateurs ont meſme raiſon entr'eux, que les denominateurs. Mais des fractions inegales, celle dont le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur, eſt la plus grande; & de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au numerateur C, que du denominateur B au denominateur D: Ie dis qu'icelles fractions AB, CD, ſont eſgales. Car en raiſon permutee A ſera à B, comme C à D; & partant par la prop. prec. les fractions ſont eſgales. Ce qu'il falloit prouuer.

A2	C4
B3	D6

Mais ſoient les fractions AB, CD, eſgales: Ie dis que comme A eſt à C, ainſi B eſt à D. Car par la prop. prec. comme A ſera à B, ainſi C ſera à D; & en permutant, comme A ſera à C, ainſi B ſera à D. Ce qui eſtoit à prouuer.

Maintenant, qu'il y ait plus grande raiſon de A à C, que de B à D: Ie dis que la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD. Car en permutant il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D; & par la prec. prop. la fraction AB, ſera plus grande que la fraction CD: ce qu'il falloit prouuer.

A5	C2
B6	D3

En dernier lieu, soit la fraction AB plus grande que la fraction CD : Ie dis qu'il y a plus grande raison de A à C que de B à D. Car par la prec. prop. il y aura plus grande raison de A à B, que de C à D ; & partant en permutant, la raison de A à C sera plus grande que de B à D. Ce qu'il falloit prouuer.

9. Reduire les fractions de diuerſes denominations a autant d'autres fractions de meſme denomination, qui leur ſoient egales, chacune à la ſienne.

Soient premierement les deux fractions AB, CD, ayans diuers denominateurs B, D : & il faut les reduire à deux autres fractions qui leurs ſoient eſgales, & d'vne meſme denomination. Soit fait E de A en D ; & F de B en C ; mais G de B en D : Ie dis que les fractions EG, FG, qui ont vn meſme denominateur G, ſont eſgales aux fractions AB, CD, chacune à la ſienne, c'eſt à dire que EG eſt eſgale à AB, & FG à CD. Car d'autant que A & B multipliant D, ont faict E & G ; par la 18. p. 7. comme A à B, ainſi E à G ; & par la 7. prop. les fractions EG, AB ſont eſgales. Par meſme raiſon on prouuera que la fraction FG eſt eſgale à la fraction CD.

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

Maintenant, ſoient trois fractions de diuerſes denominations AB, CD, EF, leſquelles il faut reduire à trois autres d'vne meſme denomination, qui leur ſoient eſgales, chacune à la ſienne. Tout ainſi que deſſus ſoit faict G de A en D, & H de B en C ; mais I de B en D : puis apres ſoit faict K de G en F ; L de H en F ; M de I en E ; & N de I en F. Ie dis que les trois fractions KN, LN, & MN, qui ont vn meſme denominateur N, ſont eſgales aux trois fractions AB, CD, EF, chacune à la ſienne. Car premierement, il appert par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, que GI eſt eſgale à AB, & HI à CD : Mais puis que F multipliant G, HI, a produit K, L, N, par le ſcholie de la 18. p. 7. iceux produits ſont entr'eux en meſme proportion, que G, H, I. Parquoy KN ſera auſſi eſgale à AB, & LN à CD. ſemblablement, pource que I multipliant E & F, fait M & N, comme E eſt à F, ainſi M à N, & par la 7. prop. la fraction MN ſera eſgale à la fraction EF. Par ainſi nous auons trouué les trois fractions KN, LN & MN, qui ont vn meſme denominateur N, & ſont eſgales aux trois propoſees AB, CD, EF, chacune à la ſienne. Ce qu'il falloit faire.

K12	L16	
G3	H4	M18
A1	C2	E3
B2	D3	F4
16	N24	

Que ſ'il y auoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme deſſus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le denominateur de la quatrieſme fraction, & leur denominateur commun tant par le numerateur que denominateur d'icelle quatrieſme fraction : & ainſi on auroit quatre fractions d'vne meſme denomination eſgales aux propoſees. Bref, il appert aſſez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diuerſes denominations à reduire à vne meſme denomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les denominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les denominateurs entr'eux, ſera procreé le denominateur commun : & ce ex-

quelconque ordre & façon qu'on faſſe leſdites multiplications, puis que par le 2. Theor. & 1 ſcholie de la 19. p. 7. lors que trois ou dauantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le produict eſt touſiours vn meſme, en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce ſoit à vne fraction dont le denominateur eſt donné.

Premierement l'entier ſoit l'vnité A; qu'il faut reduire à vne fraction dont le denominateur eſt B. Soit pris le numerateur C egal au denominateur B: Ie dis que la fraction CB eſt egale à l'vnité A; Car par la 2. prop. comme C eſt à B, ainſi la fraction CB eſt à l'entier A: Mais C eſt egal à B; donc auſſi la fraction CB eſt egale à l'entier A, c'eſt à dire à l'vnité.

	C_4
A_1	B_4

Maintenant que l'entier ſoit le nombre A, lequel il faut reduire à la fraction dont le denominateur eſt B. De A en B ſoit faict le numerateur C: Ie dis que la fraction CB eſt egale au nombre entier A. Soit poſee l'vnité D au deſſous de A, afin que la fraction AD ſoit egale à autant d'vnitez qu'il y en a au nombre A. Or d'autant que de la multiplication de A en B eſt faict C, par la 15. d. 7. le nombre B ſera auſſi autant de fois en C, qu'il y a d'vnitez en A. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à B. Parquoy des fractions AD, CB les numerateurs A & C, ont vne meſme raiſon aux denominateurs D & B: partant elles ſeront egales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD eſt egale à l'entier A, à cauſe que le denominateur D eſt l'vnité. Donc auſſi la fraction CB ſera égale au meſme entier A. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

A_5	C_{35}
D_1	B_7

11. Doubler & medier vne fraction donnee.

Premierement qu'il faille doubler la fraction AB. Soit doublé le numerateur A, afin que ſoit faict le numerateur C demeurant le meſme denominateur B: Ou bien lors que le denominateur B eſt pair en ſoit pris la moitié, afin d'auoir le denominateur D, demeurant le meſme numerateur A. Ie dis que chaque fraction CB, AD, eſt double de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, CB, ont vn meſme denominateur B, par la 3. prop. comme le numerateur C ſera au numerateur A, ainſi la fraction CB ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction C eſt double de A: donc auſſi la fraction CB ſera double de la fraction AB.

A_5	C_{10}	A_5
B_{12}	B_{12}	D_6

Derechef, pource que les fractions AB, AD, ont vn meſme numerateur A, par la 6. prop. comme le denominateur B ſera au denominateur D, ainſi la fraction AD ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt double d'iceluy D: donc auſſi la fraction AD ſera double de la fraction AB.

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB. Soit doublé le denominateur B, afin qu'il en vienne le denominateur C, demeurant le meſme numerateur A: Ou bien quant le numerateur A eſt pair, en ſoit pris la moitié, qui ſoit D, auec le meſme denominateur B. Ie dis que chaque fraction AC, DB eſt

A_8	A_8	D_4
B_9	C_{18}	B_9

moitié de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, AC ont vn meſme numerateur par la 6. prop. comme B ſera à C, ainſi la fraction AC ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt la moitié de C: Donc auſſi la fraction AC ſera moitié de la fraction AB.

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont vn meſme denominateur, par la 8. prop. comme D ſera à A, ainſi la fraction DB ſera à la fraction AB. Veu donc que par la conſtruction D eſt moitié de A, auſſi la fraction DB ſera moitié de la fraction AB. Nous auons donc doublé, & pris la moitié de la fraction donnee AB. Ce qu'il falloit faire.

En la meſme maniere vne fraction donnee ſera triplee, quadruplee, &c. ſi on triple, quadruple, &c. le numerateur demeurant le meſme denominateur: ou bien ſi on prend (quand il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du denominateur, demeurant le meſme numerateur. Pareillement on aura le tiers, le quart, &c. D'vne fraction donnee, ſi on triple, quadruple, &c. le denominateur, demeurant le meſme numerateur: Ou bien ſi on prend (lors qu'il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du numerateur, le meſme denominateur demeurant: Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere que deſſus.

12. La fraction de fraction eſt égale à la fraction ſimple, de laquelle le numerateur eſt procreé de la multiplication des numerateurs entr'eux, & le denominateur eſt produict des denominateurs auſſi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB vne fraction de la fraction CD, la valeur de laquelle au reſpect de l'vnité, ou du nombre entier E, ſoit exprimee par F; mais de A en C ſoit fait G, & de B en D ſoit produit H: Ie dis que la fraction de fraction donnee eſt eſgale à la ſimple fraction GH, au reſpect de l'entier E. Car ſoit encore faict I de B en C; & par la 2. pr. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier, c'eſt à ſçauoir à la fraction CD, de laquelle l'entier eſt E. Mais par la 18. p. 7. comme A eſt à B ainſi G à I, pour ce que A, B, multiplians C, produiſent iceux G, I: donc auſſi comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi ſera G à I. Derechef, pour ce que par la 2. prop. comme C eſt à D, ainſi la fraction CD eſt à ſon entier E, & que par la 17. p. 7. comme C à D, ainſi I à H: auſſi la fraction CD ſera à ſon entier E, comme I à H. Veu donc que comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi G eſt à I; & comme la fraction CD eſt à ſon entier E, ainſi eſt I à H; en raiſon eſgale comme AB fraction de la fraction CD eſt à l'entier E, ainſi G eſt à H: Mais nous auons poſé qu'à icelle fraction de fraction ſoit eſgale la ſimple fraction F: donc auſſi la fraction F ſera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. prop. comme G eſt à H, ainſi la fraction GH eſt au meſme entier E: Donc les fractions ſimples F & GH ſeront eſgales; & partant puis que la fraction F eſt eſgale à la fraction de fraction donnee, auſſi la fraction GH ſera eſgale à la fraction AB au reſpect de la fraction CD, duquel l'entier eſt E. Ce qu'il falloit prouuer

G 6	I 9		
A 2 / B 3	C 3 / D 5	E 1 / E 10	F 2/5
H 15			

Soit maintenant AB fraction de CD, qui eſt auſſi fraction de la fraction EF; & ſoit faict G de A en C; & K de B en D: Item I de G en E; & K de H en F: Ie

dis que la fraction IK est esgale à la fraction de fraction donnee. Ce qui est manifeste, veu que par la demonstration prec. la fract. GH est esgale à AB, fraction de la fraction CD; tellement qu'icelle GH est fraction de la fraction EF, à laquelle est aussi esgale la fraction IK, par la mesme demonstration.

G10		I30
A5	C2	E3
B6	D3	F4
	H18	

Que s'il y auoit dauantage de fractions, c'est à dire que EF fust encore fraction d'vne autre fraction, le produict de I, K, par ceste autre fraction, donneroit pareillement la fraction simple esgale à la fraction de fraction donnee; & ainsi continuellement s'il y auoit dauantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnee vne fraction de tant de fractions qu'on voudra, on la reduira en vne simple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous les dominateurs entr'eux.

13. Reduire vne fraction donnée à minimes termes.

Soit vne fraction AB, qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B, seront premiers entr'eux, ou non; s'ils sont premiers, la fraction AB ne pourra estre reduitte à plus petite denomination. Car soit reduitte, s'il est possible, à moindres termes C, D, tellement que la fraction CD soit egale à la fraction AB. D'autant que par la 7. prop. comme A est à B, ainsi C à D, & que les nombres C, D, sont moindres que les nombres A, B; iceux A, B, ne seront les moindres termes de ceste raison: Mais par la 23. p. 7. ils sont aussi les plus petits, veu qu'ils sont premiers entr'eux: Ce qui est absurde.

A7	C.
B8	D.

Maintenant que A, B, ne soient premiers entr'eux: & par la 2. p. 7. la plus grande mesure d'iceux soit C, qui mesure A par D; & B par E: Ie dis que la fraction DE est egale à la fraction AB, & constituee aux plus petits termes qu'elle puisse estre. Car puis que C mesure A & B par D & E; par la 7. com. sent. 7. Iceux A, B, seront produits de C en D, E; & par la 19. p. 7. comme A sera à B, ainsi D à E, & partant par la 7. pr. les fractions AB, DE, seront esgales. En apres, pour ce que C, plus grande mesure des nombres A, B, les mesure par D, E; par le corol. de la 35. p. 7. iceux D, E, seront les plus petits nombres de tous ceux qui ont mesme raison que A à B. Nous auons donc reduit la fraction donnee AB en sa plus petite denomination DE: Ce qu'il falloit faire.

A6	D2
B9	E3
	C3

14. Estant donnee vne fraction, la reduire (si faire se peut) à vne autre esgale de denomination donnee.

Soit donnee la fraction AB, qu'il faut reduire à vne autre esgale, de laquelle le denominateur soit C. De A en C, soit faict D, lequel B mesure par E: Ie dis que la fraction EC, qui a le denominateur donné C est esgale à la fraction donnée AB. Car puis que B mesure D par E, par le 9. ax. 7. D sera faict de B en E: Mais il a aussi esté faict de A en C. Donc par la 19. prop. 7. comme A sera à B, ainsi E sera à C; & par la 7. prop. les fractions AB, EC seront esgales.

A2	E6
B3	C9
	D18

Que

Que ſi B ne meſure D procreé de A en C, la fraction donnee ne ſe pourra reduire à la denomination donnee C. Car ſoit reduitte, s'il eſt poſſible, à la fraction EC. Donc puiſque les fractions AB, EC ſont eſgales, comme A ſera à B, ainſi E ſera à C par la 7. prop. & partant par la 19. p. 7. le nombre produit de B en E ſera eſgal à celuy faict de A en C, c'eſt à ſçauoir D. Donc par le 7. ax. 7. B meſurera D par E: Ce qui eſt abſurde, puis qu'on a poſé que B ne meſure D.

A 2	E ·
B 5	C 7
D 14	

Or la reduction de fraction, qui en l'Arithmetique pratique, eſt vulgairement appellee Eualuation, *deſpend de cette prop. veu qu'eualuer vne fraction n'eſt autre choſe, que trouuer vne fraction eſgale à la donnee, qui ait pour denominateur le nombre & valeur de l'entier propoſé. Comme par exemple, quand on veut eualuer les $\frac{2}{5}$ d'vne liure, ce n'eſt autre choſe que trouuer vne autre fraction egale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour denominateur le nombre 20, qui eſt la valeur de la liure: & ſuiuant ce qui eſt icy demonſtré, ſi ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numerateur de la fraction donnee, on diuiſe le produict 40 par le denominateur 5, viendra 8 pour le numerateur de ladite fraction cherchee, c'eſt à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ ſera egale à la donnee $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut auſsi dire 8 ſols, puis que l'entier auquel ſe referoit la fraction donnee vaut 20 ſols.*

A 2	E 8	
B 5	C 20	
	D 40	

15. Quand vn nombre eſt diuiſé par vn autre plus grand, le quotient eſt vne fraction de laquelle le nombre à diuiſer eſt numerateur, & le diuiſeur denominateur.

Soit le nombre A, qu'il faut diuiſer par vn plus grand nombre B: Ie dis que le quotient eſt la fraction AB, de laquelle le nombre à diuiſer A, eſt numerateur, & le diuiſeur B denominateur. Car d'autant que par la 7. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt à dire a l'vnité par la def. de la diuiſion (La diuiſion d'vn nombre par vn nombre eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité que le nombre diuidande au diuiſeur) la fraction AB ſera quotient du nombre A diuiſé par le nombre B. Ce qu'il falloit prouuer.

A 5	B 7	A 5 / B 7

16. Adiouſter pluſieurs fractions en vne ſomme.

Qu'il faille premierement adiouſter enſemble deux fractions AB, CB d'vne meſme denomination. Soient adiouſtez enſemble les numerateurs A, C, la ſomme deſquels ſoit D, au deſſous de laquelle ſoit poſé le meſme denominateur B: Ie dis que la fraction DB, eſt la ſomme de l'addition des fractions AB, CB. Car d'autant que les fractions ont vn meſme denominateur, par la 3. prop. comme A ſera à C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB; & en compoſant, comme A, C, enſemble à C, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction CB. Mais par la meſme 3. prop. comme C à D, ainſi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raiſon eſgale, comme AC, enſemble à D, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction DB. Veu donc que par la conſtruction A, C, enſemble ſont eſ-

A 2	C 3	D 5
B 7	B 7	B 7

gales à D ; auſsi les fractions AB, CB enſemble, ſeront eſgales à la fraction DB.

Soient maintenant trois fractions de diuerſes denominations AB, CD, EF, leſquelles il faut adiouſter enſemble. Les fractions propoſees ſoient reduittes à autant d'autres fractions de meſme denomination GK, HK, IK, par la 9. prop. puis ſoient adiouſtez enſemble les numerateurs G, H, I, dont la ſomme ſoit L, à laquelle ſoit ſuppoſé le denominateur commun K, & la fraction LK, ſera la ſomme des trois fractions propoſees. Car d'autant que par la 3. prop. les numerateurs G, H, I, ſont en meſme proportion que les fractions GK, HK, IK, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I enſemble, ſeront à I, comme les trois fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à la fraction EF. Mais par la 3. prop. comme I eſt à L, ainſi auſsi la fraction EF eſt à la fraction LK. Donc en raiſon eſgale, comme les trois nombres G, H, I enſemble ſeront à L ainſi les trois fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à LK. Mais par la conſtruction le nombre L eſt eſgal aux trois G, H, I: Donc auſsi la fraction LK ſera eſgale aux trois propoſees AB, CD, EF. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

G 12	H 16	I 18	
A 1	C 2	E 3	L 46
B 2	D 3	F 4	K 24
	K 24		

Or ayant reduict les fractions propoſees à vne meſme denomination, & adiouſté enſemble les numerateurs trouuez, puis à la ſomme L, ſuppoſé le denominateur commun K; on prouuera encore que la fraction LK eſt eſgale aux propoſees en ceſte ſorte. D'autant que par la 5. prop. comme l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, ainſi le denominateur commun K eſt à la ſomme des produits G, H, I, c'eſt à dire L; en changeant, comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera à l'entier, ainſi L ſera à K. Mais par la 2. prop. comme L eſt à K, ainſi auſsi la fraction LK eſt au meſme entier. Donc comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, eſt à l'entier, ainſi la fraction LK eſt au meſme entier: & partant la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera eſgale à la fraction LK. Ce qui eſtoit propoſé.

Que ſi les fractions propoſees à adiouſter ne ſe referoient à l'vnité, ains à quelque nombre entier, la ſomme d'icelles ſe rapporteroit au meſme nombre. Par exemple, s'il falloit adiouſter $\frac{1}{3}$ du nombre 60 auec les $\frac{2}{5}$ du meſme nombre, la ſomme d'icelles fractions ſeroit $\frac{11}{15}$ qui ſe refereroient auſsi au meſme nombre 60; tellement que ce ſeroit 76: car les $\frac{1}{3}$ de 60 ſont 40; & les $\frac{2}{5}$ ſont 36; leſquels deux nombres adiouſtez enſemble, font le ſuſdit nombre 76.

17. Oſter vne petite fraction d'vne plus grande.

De la fraction AB, qu'il en faille oſter vne moindre fraction CB, laquelle eſt de meſme denomination. Soit oſté le numerateur C du numerateur A, & au deſſous du reſté D, ſoit poſé le meſme denominateur B: Ie dis que la fraction DB eſt ce qui reſte apres auoir ſouſtraict la fraction CB de la fraction AB. Car puiſque C oſté de A, reſte D; A eſt compoſé de C & D: donc la fraction AB, de laquelle le numerateur A eſt l'aggregé des numerateurs C, D, eſt la ſomme des deux fractions CB, DB, comme il a eſté demonſtré en la prec. prop. Parquoy ayant oſté la fraction CB de la fraction AB, reſtera la fraction DB.

A 3	C 1	D 2
B 4	B 4	B 4

Mais ſi de AB, il faut oſter vne moindre fraction CD, qui a vn autre denominateur que AB: par la 9. prop. icelles fractions AB, CD, ſoient reduittes à deux autres d'vne meſme denomination EG, FG: puis ſoit oſté le numerateur F du numerateur E, & reſte H, au deſſous duquel ſoit appoſé le denominateur commun G: Ie dis qu'apres auoir oſté la fraction CD de la plus grande fraction AB, reſte la fraction HG, ainſi qu'il appert par la demonſtration cy deſſus. Ce qu'on peuſt encore demonſtrer ainſi, d'autant que D multipliant A, B faict E, G, par la 17. p. 7. comme A ſera à B, ainſi E ſera à G. Mais par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier. Donc auſſi comme E à G, ainſi la fraction AB eſt à l'entier. Derechef, pour ce que B multipliant C, D, faict F, G, comme C ſera D, ainſi F à G. Mais auſſi comme C à D, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Donc comme F à G, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Veu donc que comme F premiere eſt à G deuxieſme, ainſi la fraction CD troiſieſme eſt à l'entier quatrieſme, & que par la 2. prop, comme H cinquieſme eſt au meſme G deuxieſme, ainſi la fraction HG ſixieſme eſt au meſme entier quatrieſme par le 6. Theor. du Schol. de la 22. p. 7. comme F, H, premiere & cinquieſme enſemble ſera à G deuxieſme, ainſi les fractions CD, HG, troiſieſme & ſixieſme enſemble, ſera à l'entier quatrieſme. Mais comme E, H, enſemble ſont à G, ainſi E eſgal à iceux F, H (Car F oſté de E reſté H) eſt au meſme nombre G. Dont auſſi comme E ſera à G, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront à l'entier. Mais il a eſté demonſtré que comme E à G, ainſi la fraction AB à l'entier. Donc auſſi comme la fraction AB ſera à l'entier, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront au meſme entier: Et partant les fractions CD, HG enſemble ſeront eſgalles à la fraction AB. Parquoy ayant oſté la fraction CD de la fraction AB, le reſte ſera la fraction HG. Ce qu'il falloit faire.

E 15	F 8	
A 3 / B 4	C 2 / D 5	H 7 / G 20
G 20		

Or ſi les fractions propoſees ne ſe referoient à l'vnité, ains à quelque nombre entier, le reſte ſe refereroit auſſi au meſme nombre. Par exemple, s'il falloit ſouſtraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du meſme nombre, le reſte $\frac{7}{20}$ ſe refereroit au meſme nombre 40: & partant ce ſeroit 14: car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, ſont 16, & les $\frac{3}{4}$ ſont 30.

18. Multiplier vne fraction par vne fraction.

Soit vne fraction AB, qu'il faut multiplier par la fraction CD: de la multiplication des numerateurs A, C, entr'eux ſoit faict E, au deſſous duquel ſoit poſé F produit des denominateurs B, D, multipliez entr'eux: Ie dis que la fraction EF eſt le produit des fractions AB, CD, multipliees entr'elles. Car ſoit faict G de E en D; & H de C en F: Et par la 4. prop. comme la fraction EE ſera à la fraction CD, ainſi G à H. Mais pour ce que C multipliant A, F, faict E, H, par la 17. p. 7. comme A ſera à F, ainſi E à H; & en permutant, comme A ſera à E, ainſi F ſera à H. Derechef, pour ce que D multipliant E, B faict G, F, par la 17. p. 7. comme E ſera à B ainſi G à F. Parquoy les trois

H 45	G 30	
A 2 / B 3	C 3 / D 5	E 6 / F 15

nombres A, E, B ſont proportionnels aux trois G, F, H en proportion troublee: donc en raiſon eſgale, comme A ſera à B, ainſi G à H. Mais nous auons demonſtré que comme G eſt à H, ainſi la fraction EF eſt à la fraction CD; & par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt à dire à 1. Donc auſſi comme la fraction EF eſt à la fraction CD, ainſi la fraction AB eſt à 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'vn nombre en vn nombre eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vn des multiplians que l'autre à l'vnité) la fraction EF eſt produicte de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD: parquoy nous auons faict ce qui eſtoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne ſe rapportent pas à l'vnité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produict de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier propoſé, ainſi qu'en l'addition & ſouſtraction; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné: Car veu que la comparaiſon ſe doit faire entre choſes ſemblables, & que de la multiplication de deux nombres eſt produit vn nombre plan: il faudra referer le nombre produict de la multiplication auec le plan du nombre entier propoſé, c'eſt à dire auec ſon quarré, ſi toutes les deux fractions ſe referent à vn meſme nombre entier, pour ce qu'iceluy nombre (ſuiuant ce que nous auons dit à la 14. prop.) leur eſt comme denominateur, & par conſequent il le faut multiplier par ſoy meſme afin d'auoir le denominateur du produit deſdites fractions. Mais ſi les fractions ſe referoient à diuers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan faict des nombres entiers propoſez. Ainſi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ *d'vne liure, c'eſt à dire les* $\frac{2}{5}$ *de 20 ſols, par* $\frac{1}{2}$ *du meſme nombre 20, le produit eſt ceſte fraction* $\frac{2}{10}$, *laquelle il ne faut pas rapporter au nombre entier propoſé 20, mais à ſon quarré 400; tellement que ce produit* $\frac{2}{10}$ *eſt 80, & il ne ſeroit que 4, ſi on le referoit ſeulement au nombre propoſé 20. Ce qui eſt apparent, car par la 14. prop. les* $\frac{2}{5}$ *du nombre 20. ſont 8 &* $\frac{1}{2}$ *du meſme nombre 20, eſt 10; & de 8 en 10, eſt faict 80, qui eſt* $\frac{2}{10}$ *du nombre 400, quarré du nombre 20 entier propoſé. Nous dirons donc que* $\frac{2}{5}$ *d'vne liure multipliez par* $\frac{1}{2}$ *liure, ne produiſent pas* $\frac{2}{10}$ *d'vne liure, qui ſont ſeulement 4 ſols, mais produiſent* $\frac{2}{10}$ *de 400, qui ſont 80 ſ. ou 4 liures. Mais lors qu'on multiplie les* $\frac{2}{3}$ *du nombre entier 20, par les* $\frac{3}{4}$ *du nombre entier 24, le produit eſt* $\frac{6}{20}$, *ou* $\frac{3}{10}$ *du nombre 480, c'eſt à dire 144: Car par la 14 prop. les* $\frac{2}{3}$ *du nombre entier 20 ſont 8, ou* $\frac{8}{10}$; *& les* $\frac{3}{4}$ *de 24 ſont 18, ou* $\frac{18}{24}$, *qui multipliez comme dit eſt cy-deſſus, produiſent 144, ou la fraction* $\frac{144}{480}$: *tellement que les* $\frac{6}{20}$ *trouuez ne ſe doiuent referer à l'vn ny à l'autre entier propoſé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.*

19 Diuiſer vne fraction par vne fraction.

Soit la fraction AB, qu'il faut diuiſer par la fraction CD: & premierement que les nombres de ceſte-cy C, D, meſurent les nombres de celle-là AB, par E, F; tellement que A eſtant diuiſé par C le quotient ſoit E, & ayant diuiſé B par D, le quotient ſoit F: Ie dis que la fraction EF, eſt le quotient de la fraction AB diuiſee par la fraction CD. Car d'autant que C meſure A par E, & D meſure B par F par le 9. ax. 7. A eſt procreé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, eſt produicte de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD: & partant par

A 5	C 5	E 1
B 12	D 6	F 2
A 4	C 2	E 2
B 9	D 9	F 1
A 9	C 3	E 3
B 10	D 5	F 2

la def. de la multiplication, comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi la fraction EF ſera à l'vnité. Parquoy puis que comme AB, fraction diuiſee, eſt à CD, fraction diuiſante, ainſi la fraction EF eſt à l'vnité, par la def. de la diuiſion, la fraction EF ſera le quotient de la diuiſion de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne meſurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions propoſees AB, CD, ſoient reduittes à deux autres eſgales de meſme denomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, ſoit faict à part la fraction EF. Ie dis qu'icelle fraction EF eſt le quotient de la fraction AB diuiſee par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG eſt à la fraction FG, comme le numerateur E eſt au numerateur F; & par la 2. prop. comme E eſt à F, ainſi la fraction EF eſt à ſon entier, c'eſt à dire à l'vnité. Donc auſſi comme la fraction EF eſt à l'vnité, ainſi la fraction EG eſt à la fraction FG, c'eſt à dire la fraction AB à la fraction CD, puis qu'elles leurs ſont eſgales par la conſtruction; & partant par la def. de la diuiſion, la fraction EF ſera le quotient de la fraction AB diuiſee par la fraction CD. Ce qui eſtoit propoſé.

E12	F10		E8	F9	
A4	C2	E12	A2	C3	E8
B5	D3	F10	B3	D4	F9
	G15			G12	

Or il appert aſſez que ceſte demonſtration a lieu en toutes fractions, ſoit que les nombres de la fraction diuiſante meſurent ou non les nombres de la fraction à diuiſer; & auſſi que le denominateur commun G n'entre point au quotient de la diuiſion, ains ſeulement les deux numerateurs E, F; c'eſt pourquoy en la practique d'Arithmet. il ſuffit de multiplier le numerateur de la fraction à diuiſer par le denominateur de la fraction diuiſante, pour auoir le numerateur du quotient; mais le numerateur de la fraction diuiſante par le denominateur de la fraction à diuiſer pour auoir le denominateur d'iceluy quotient.

Il eſt auſſi manifeſte que ſi les nombres de la fraction diuiſante ſont changez de lieu à autre, que la diuiſion ſe fera comme la multiplication, c'eſt à ſçauoir en multipliant les numerateurs entr'eux, & puis apres les denominateurs. Comme par exemple, voulant diuiſer $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de ceſte fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par leſquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'eſt à ſçauoir 5 par 3; & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ diuiſez par $\frac{2}{3}$.

Fin du ſeptieſme Element.

ELEMENT HVICTIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extremes soient premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrémes A & C, soient premiers entr'eux: Ie dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

A....4	D—
B.....6	E——
C.....9	F———

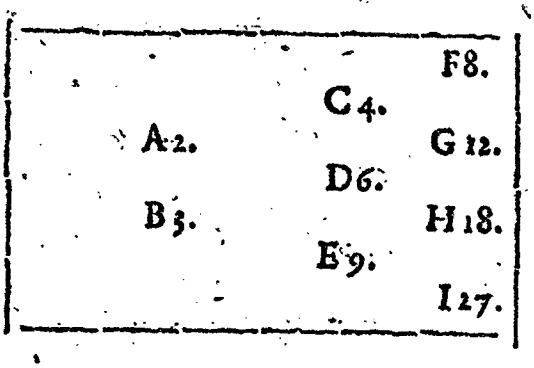
Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la mesme raison, s'il est possible. Par ainsi il y a d'vn costé les trois nombres A, B, C, & d'vn autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux sont en mesme raison: Donc en raison egale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement D & F; ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les plus petits en la mesme raison. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement

proportionnaux, les plus petits en vne raiſon donnee.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon: il faut premierement trouuer trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon donnee de A à B.



Que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C; A par B produiſe D; & B par ſoy produiſe E: Ie dis premierement que C, D, E, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produict C & D; comme A ſera à B, ainſi C ſera à D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produict D & E, comme A ſera à B, ainſi D ſera à E: Parquoy C, D, E, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Ie dis auſſi qu'ils ſont les plus petits d'icelle raiſon donnee. Car d'autant que A & B ſont les plus petits de leur raiſon, par la 24. p. 7. ils ſont premiers entr'eux, & par la 29. p. 7. C & E ſeront auſſi premiers entr'eux: & par la precedente prop. les trois nombres C, D, E, ſeront les plus petits en la raiſon donnee de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouuer quatre. Que A multipliant les trois trouuez C, D, E, produiſe F, G, H; & B multipliant le dernier E faſſe I: Ie dis que les quatres nombres F, G, H, I, ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a faict F, G, H; iceux ſont en la meſme raiſon que C, D, E, c'eſt à dire en la raiſon de A à B. Derechef, puis que A & B multipliant E ont faict H & I, par la 18. p. 7. comme A ſera à B, ainſi H ſera à I: & partant F, G, H, I, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon donnee de A à B. Dauantage, puis que A & B eſtans les plus petits de leur raiſon, ſont premiers entr'eux par la 24. p. 7. auſſi les extremes F & I ſeront premiers entr'eux par la 29. p. 7. attendu que A & B multipliez par eux meſme, ont produict C & E, & iceux multipliez par les meſmes A & B, ont produict les extremes F & I. Donc par la prop. prec. les quatres nombres F, G, H, I, ſeront les plus petits de leur raiſon. Et en ceſte façon on en trouuera tant que l'on voudra. Nous auons donc trouué des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il reſulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, eſtans les plus petits de leur raiſon; les extremes ſeront quarrez: s'il y en a quatre, qu'iceux extremes ſeront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C & E, ont eſté produits de

A & B multipliez par eux-mesmes; & des quatre F, G, H, I, les extrémes F & I, ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il resulte encore que les extrémes des nombres continuellement proportionnaux trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstré par les 24. & 29. p. 7. que les extremes C, E; & F, I, sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : les extrémes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison : Ie dis que les extrémes A & D, sont premiers entr'eux.

Car soient trouuuez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G : ils seront premiers entr'eux par la 23. p. 7. & comme il a esté enseigné en la preced. soient trouuez des nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois H, I, K; puis apres les quatre L, M, N, O; & ainsi consecutiuement vn plus, iusques à ce que on en ait autant qu'il y en aura de proposez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront esgaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extrémes L & O, sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. les extremes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

PROBL. 2. PROP. IV.

Estans donnees tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux selon les raisons donnees.

Soient donnees les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes

termes d'icelles : il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui ſont ſelon les raiſons donnees.

Soit trouué par la 36. p. 7. le plus petit nombre qui ſoit meſuré par B, & par C ; lequel ſoit F : en apres, ſoit trouué G, autant de fois meſuré par A, que F par B : Pareillement H autant de fois meſuré par D que F par C. Ie dis que les trois nombres G, F, H ſont continuellement proportionnaux, les plus petits qui ſoient ſelon les raiſons données.

A 2.		
	G 8. L—	
B 3.		
	F 12. M——	
C 4.		
	H 15. N——	
D 5.		

Car d'autant que A meſure autant de fois G, que B meſure F ; & par conſequent A & B multiplians vn meſme nombre (ſçauoir celuy par lequel ils meſurent G & F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G eſt à F, en meſme raiſon que A à B. Et par meſme diſcours F ſera à H, comme C à D : Donc G, F, H, ſont continuellement proportionnaux, ſelon les raiſons donnees. Mais ils ſont auſſi les plus petits, ſelon icelles raiſons données : car ſ'il n'eſt ainſi, en ſoient trouuez de plus petits L, M, N, ſ'il eſt poſſible, & qui reſpondent aux raiſons donnees, comme les trois G, F, H. Or veu que A & B ſont les plus petits en leur raiſon, par la 21. p. 7. ils meſureront également L & M, iceux eſtans en la meſme raiſon, c'eſt à ſçauoir le conſequent B, le conſequent M : Par meſme diſcours C & D meſureront egalement M & N, ſçauoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C meſurans M ; par la 37. p. 7. F, qui eſt le plus petit nombre qu'ils meſurent, meſurera auſſi M, ſçauoir eſt, le plus grand, le plus petit : ce qui eſt impoſſible. Partant les nombres G, F, H, eſtoient les plus petits ſelon les raiſons donnees.

Maintenant ſoient donnees trois raiſons aux plus petits termes A à B ; C à D, & F à G, ſelon leſquelles il faut trouuer quatre nombres tels que requiert la propoſition.

Soient trouuez les trois nombres I, H, K, comme deſſus : ce faict, ou F meſurera K, ou non. S'il le meſuroit, il faudroit prendre L autant de fois meſuré par G, que K par F : & par la precedente demonſtration, il eſt euident qu'on auroit ſatisfaict. Que ſi F ne meſure K, ſoit trouué O le plus petit nombre meſuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G meſure autant de fois P, que F meſure O. Item que comme K meſure O, ainſi H meſure N ; & I meſure M. Ie dis que M, N, O, P ſont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

A 2.		
	I 8.	M 16.
B 3.		
	H 12.	N 24.
C 4.		
	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L—	P 35.
G 7.		

Car puiſque I, H, K meſurent également M, N, O, comme dit eſt cy deſſus, I ſera à H ainſi que M à N, & comme H ſera à K, ainſi N à O. Mais il y a meſme raiſon de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pource que A & B meſurent egalement iceux I & H ; & C, D, egalement H & K.

Donc comme A à B, ainſi M à N; & comme C à D, ainſi N à O; auſſi comme F à G ainſi O à P, à cauſe que F, G meſurent egalement O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, ſont donc continuellement proportionnaux és raiſons donnees. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demonſtrera en la meſme façon qu'on a faict cy deſſus de trois nombres.

Or en la meſme maniere ſera procedé ſi 4, ou dauantage de raiſons ſont donnees aux plus petits termes. Parquoy eſtans données tant de raiſons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en la raiſon compoſee de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A & B, les coſtez de A, ſoient C & D; & les coſtez de B, ſoient E & F. Ie dis que le plan A eſt au plan B, en la raiſon compoſée de C à E, & de D à F.

	C 3.
A 12.	
	D. 4.
G 8.	
	E 2.
B 18.	
	F 9.

Qu'il ne ſoit ainſi. Que D multiplié par E produiſe G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui ſeront en meſme raiſon que C à E, par la 17. p. 7. Et par meſme diſcours E multipliant D & F, produira G & B, qui ſeront auſſi en meſme raiſon que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B ſont continuellement proportionnaux és raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Mais par la 5. d. 6. la raiſon de A à B eſt compoſee de A à G, & de G à B. Donc la raiſon du nombre plan A au nombre plan B, ſera compoſee de la raiſon des coſtez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans ſont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne meſure le ſecond, auſſi pas vn autre ne meſurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne meſure B 2e. Ie dis que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
F 4. G 6. H 9.

Car premierement, comme A ne meſure B, ainſi B ne meſurera C; ny C ne meſurera D; ny D, E, d'autant qu'ils ſont en meſme raiſon: par ainſi aucun d'iceux nombres ne meſure ſon prochain ſuiuant. Ie dis auſſi qu'en paſſant qu'elqu'vn, les extremes ne ſe pour-

rons mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouué trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison egale A sera à C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'vnité, autrement il mesureroit G, veu que l'vnité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce liure F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'vnité; iceluy F ne mesurera pas H: Mais nous auons demonstré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par mesme discours on prouuera que B ne mesurera D; ny C, ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on demonstrera en la mesme maniere que A ne mesurera le quatriesme D; ny B vn quatriesme E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Ie dis qu'il mesurera aussi le second B.

A 3. B 9. C 12. D 24.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas vn autre ne mesureroit pas vn autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionn. &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux: & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Ie dis qu'entre E & F se trouueront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

Car ayant trouué par la 2. p. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison esgale, com-

me A ſera à B, ou E à F (car c'eſt la meſme raiſon) ainſi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K ſont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & les plus petits nombres de leur raiſon par la 23. prop. 7. & par la 21. p. 7. ils meſureront eſgalement E & F. Donc autant de fois que G & K meſureront E & F; qu'autant de fois H & I meſurent d'autres nombres L & M: tellement que les nombres G, H, I, K, meſurent eſgalement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. ſent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils meſurent E, L, M, F, produiſent iceux E, L, M, F; leſquels ſeront entr'eux comme G, H, I, K, ainſi que nous auons demonſtré à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K, ſont continuellement proportionnaux: donc auſſi E, L, M, F, ſeront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, eſt eſgale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy ſi entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceſte demonſtration appert non ſeulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais auſſi que la proportion des nombres E, L, M, F, eſt la meſme que des nombres A, C, D, B. Car il a eſté demonſtré que la proportion de E, L, M, F, eſt la meſme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux ſont par la conſtruction en la meſme proportion que A, C, D, B: donc auſſi E, L, M, F, ſont en meſme proportion que A, C, D, B.

Il appert auſſi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ne peut tomber vn nombre moyen proportionnel. Car puis que la raiſon double, és moindres nombres, eſt trouuee entre le binaire & l'vnité; mais la ſuperparticuliere, entre les nombres differens ſeulement de l'vnité; & la ſuperbipartiente, entre les nombres, deſquels la difference eſt le binaire: ſi entre deux nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce Theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la ſeule vnité, ou du binaire; c'eſt à ſçauoir entre les plus petits nombres qui ont la meſme raiſon que ceux là; ce qui eſt impoſſible. Car il eſt tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre deux nombres differens ſeulement de l'vnité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens ſeulement du binaire, tombe ſeulement vn nombre, qui differe à l'vn & l'autre de l'vnité: lequel nous demonſtrerons ne pouuoir eſtre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres A B & C D, differens du binaire, entre leſquels tombe le nombre E F moindre que A B de l'vnité, mais plus grand que C D, auſſi de l'vnité. Ie dis que E F n'eſt moyen prop. entre A B, C D. Car ſi on dit que comme A B à E F, ainſi E F à C D: eſtant oſté de A B, le nombre A G eſgal à E F, afin qu'il reſte l'vnité G B; & de E F, le nombre E H eſgal à C D, afin qu'il reſte auſſi l'vnité H F; pareillement comme A B ſera à E F, ainſi le retranché A G ſera au retranché E H. Donc auſſi le reſte G B ſera au reſte H F; c'eſt à dire

A .....6 G B	A .. G. B
E .....5 H F.	E. H. F
C .....5 D	C. D

l'vnité à l'vnité, comme le tout AB au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui eſt abſurde; dont EF n'eſt pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raiſon triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit auſſi vn entre entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui eſt impoſſible, comme nous venons de demonſtrer.

Par meſme raiſon, ne peut auſſi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raiſon. Car s'il y en tomboit vn, il en tomberoit auſſi vn (par ce Theor.) entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple: ce qui ne ſe peut faire. Car s'il eſt poſſible qu'entre le quinaire AB & l'vnité C, tombe vn moyen prop. D binaire, ou ternaire; tellement que AB ſoit à D, comme D à C: en changeant C ſera à D comme D à AB. Et pour ce que l'vnité C meſure D, auſſi D meſurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D meſure pareillement le ſenaire AE: donc D meſurera le tout AE, & le retranché AB; & partant par la 11. com. ſent. auſſi D meſurera le reſte BE vnité. Ce qui eſt abſurde. La meſme abſurdité aduiendra touſiours, ſi on dit qu'vn nombre quartenaire ſoit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'vnité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5, & 1. & par conſequent entre quelconques nombres de raiſon quintuple.

A	L	E
D	D	
C.		

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre leſquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres cotinuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 8	C 12.	D 18.	B 27.
	vnité.		
	E 1.	F 3.	
G 4	H 6.	I 9.	
K 8.	L 12.	M 18.	N 27.

Car ayant poſé l'vnité, ſoient pris E & F, les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. ſoient trouuez les trois plus petits en la meſme raiſon G, H, I: puis les quatre K, L, M, N; & ainſi conſequemment iuſques à ce que la multitude des pris ſoit eſgale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrémes A, B, ſont premiers entre eux, par la 1. p 8. A, C, D, B, ſeront les plus petits en la raiſon de E à F: Mais leurs eſgaux en multitude K, L, M, N, ſont auſſi les plus petits en la meſme raiſon par la conſtruction. Donc K, L, M, N, ſont eſgaux à iceux A, C, D, B,

chacun au ſien, comme K à A, & N à B. Et pour ce que (comme il appert par la demonſtration de la 2. p. 8.) E multipliant ſoy-meſme a produict G; & multipliant G a faict K, par la 7. com. ſent. E meſurera G par E; & G iceluy K par le meſme E: mais par la 5. com. ſent. l'vnité meſure iceluy E par E. Donc l'vnité meſurera egalement E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'vnité ſera meſme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G, K, ſont continuellement proportionnaux. Par meſme diſcours l'vnité & les trois nombres F, I, N, ſeront auſſi prouuez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité, eſt eſgale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il ſenſuiura qu'entre l'vnité & le nombre K ou A, qui luy eſt eſgal; & auſſi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy ſi deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres propoſez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres propoſez A & B, & qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Ie dis qu'il en tombera auſſi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8. I 12. K 18. B 27.
E 4. H 6. G 9.
D 2. F 3.
C 1.

Car ſi on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouuer les trois nombres H, I, K, c'eſt à ſçauoir que H ſoit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puis que comme C à D, ainſi D à E, & E à A; & que par la 5. com. ſent. C vnité meſure D, par les vnitez qui ſont en D; auſſi D meſurera E, par les vnitez qui ſont en D; & E meſurera A, par les meſmes vnitez de D; ainſi il eſt euident que D multiplié par ſoy-meſme produict E, & E multiplié par D, a produict A. Par meſme diſcours ſe prouuera que F multiplié par ſoy-meſme, a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant, puis que D multiplié par ſoy-meſme, & par F a produict E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy meſme, a produict H & G; auſſi H ſera à G comme D à F: parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront continuellement proportionnaux. Dauantage D multipliant E & H, produict A & I; & partant comme E ſera à H, ainſi A ſera à I, par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H, produiſent I & K; I ſera à K, comme D à F. par la 18. prop. 7. Par meſme diſcours

K ſera à B, comme H à G, eſtans les produicts de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux; & partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'eſt à ſçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel: & le quarré eſt au quarré en raiſon doublee du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera vn moyen proportionnel: & que le quarré A eſt au quarré B en la raiſon doublee du coſté C au coſté D.

A 4.	E 6.	B 9.
	C 2. D 3.	

Car le nombre C muliplié par D, produiſe E: Et puis que C eſt le coſté de A; iceluy C multiplié par ſoy-meſme produit A; & par D faict E: donc comme C à D, ainſi A à E par la 17 p. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant ſoy-meſme fait le quarré B, par la 17. prop. 7. comme C à D, ainſi E à B. Partant E eſt moyen proportionnel entre A & B.

Pour la ſeconde partie: puis que A, E, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 3. en raiſon doublee de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui eſt la meſme raiſon que de C à D, ainſi qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux: & le cube eſt au cube en raiſon triplee du coſté au coſté.

Soient deux nombres cubes A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux: & que la raiſon du cube A au cube B, eſt la raiſon triplee du coſté C au coſté D.

A 27.	H 36.	I 48.	B 64.
	E 9.	G 12.	F 16.
	C 3.	D 4.	

Qu'il ne ſoit ainſi. Que C ſe multipliant ſoy-meſme produiſe E; & D par ſoy produiſe F; mais C & D l'vn par

l'autre produiſe G : & iceluy G multiplié par l'vn & l'autre C & D, produiſe H & I. Or puis que C multipliant C & D a faict E & G ; comme C ſera à D, ainſi E à G par la 17. p. 7. Item puis que D multiplant C & D a faict G & F ; auſſi G ſera à F comme C à D : Partant E, G, F, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D. Derechef, pour ce que C multiplant E fait le cube A, & multiplant G a faict H, par la meſme prop. A ſera à H, comme E à G, c'eſt à dire, comme C à D. Item puis que D multipliant G a faict I, & multipliant F eſt produit le cube B ; par la 17. p. 7. I ſera à B, comme G à F, c'eſt à dire comme C à D. Mais par la 18. p. 7. H eſt auſſi à I, comme C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont faict H & I : donc A, H, I, B ſeront continuellement proprtionnaux ſelon la raiſon de C à D. Partant H & I, ſeront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt manifeſte, car d'autant que A, H, I, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 4^e^ en raiſon triplee de A 1. à H 2^e^ par la 10. deff. 5. Mais comme A eſt à H, ainſi C eſt à D. Donc le cube A eſt au cube B en raiſon triplee du coſté C au coſté D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, iceux eſtans multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & ſi chacun multiplie encores ſon produict, les derniers produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, leſquels multipliez chacun par ſoy-meſme, produiſent D, E, F ; & que les meſmes A, B C, multiplians chacun ſon produict facent G, H, I, & ainſi continuellement. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, ſont cõtinuellement proportionnaux.

	A 2.	B 4.	C 8.		
D 4.	N 8.	E 16.	O 32.	F 64.	
G 8.	P 16.	Q 32.	H 64.	R 128.	S 256. I 512.

Qu'il ne ſoit ainſi, que N ſoit le produict de A multiplié par B : & O celuy de B par C. Pareillement que A multipliant N, E face P & Q : mais B multipliant O, F produiſe R, S. Donc par la 17. p. 7. A multipliant ſoy-meſme, & B, les produicts D & N ſeront en la meſme raiſon de A à B : & par meſme diſcours B multipliant A & ſoy meſme, les produicts N & E ſeront auſſi en la meſme raiſon de A à B, & ainſi des autres : Partant D, N, E, O, F, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B :

par

par ainſi D, N, E; & E, O, F, ſont continuellement proportionnaux en vne meſme raiſon; & partant en raiſon eſgale, comme D ſera à E, ainſi E à F: parquoy D, E, F, ſeront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a faict G, P, Q; par ce que nous auons demonſtré à la 18. prop. 7. G, P, Q ſeront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'eſt à dire comme A à B. Item pource que A & B multiplians E ont produit Q & H, auſſi par la 18. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi Q à H. Donc G, P, Q, H, ſont proportionnaux en la raiſon de A à B. Par meſme diſcours H, R, S, I, ſeront prouuez proportionnaux en la meſme raiſon de A à B: & partant en raiſon eſgale, comme G ſera à H, ainſi H à I: parquoy G, H, I ſeront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vn nombre quarré meſure vn nombre quarré; auſſi le coſté meſurera le coſté: que ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le quarré meſurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui meſure le nombre quarré B; & d'iceux quarrez les coſtez ſoient C & D. Ie dis en premier lieu que le coſté C meſurera auſſi le coſté D.

A 4. E 12. B 36.
C 2. D 6.

Car ayant multiplié C par D, il eſt euident par la demonſtration de la 11. prop. 8. que le produict E eſt moyen proport. entre A & B, en la raiſon de C à D: mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A meſure le dernier B: donc par la 7. prop. 8. il meſurera auſſi le ſecond E. Parquoy puis que comme A à E, ainſi C à D: auſſi le coſté C meſurera le coſté D.

Ie dis en ſecond lieu, que ſi le coſté C meſure le coſté D, auſſi le quarré A meſurera le quarré B. Car comme deſſus A, E & B ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D: Et puiſque C meſure D, auſſi A meſurera E; & E meſurera B, & par conſequent A meſurera auſſi B, car qui meſure le meſureur, meſure auſſi le meſuré, par la 11. com. ſent. Parquoy ſi vn nombre quarré meſure vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube meſure vn nombre cube: auſsi le coſté meſurera le coſté: & ſi le coſté meſure le coſté; auſsi le cube meſurera le cube.

Soit vn nombre cube A, qui meſure vn autre nombre cube B, & d'iceux

cubes les costez soient C & D. Ie dis premierement que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque costé C, D multipliant soy-mesme face E, F, mais se multipliant l'vn l'autre facent G, & multipliant derechef G, produisent H, I. Il est éuident par la demonstr. de la 12. p. 8. que tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A, 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2e. par la 7. prop. 8. Mais A estant à H, comme C à D, aussi le costé C mesurera le costé D.

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

Secondement, que le costé C mesure le costé D: Ie dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a esté dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D: Parquoy le costé C mesurant le costé D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, desquels les costez sont C & D; mais que le quarré A ne mesure le quarré B: Ie dis premierement que le costé C ne mesurera pas le costé D.

Car par la 14. prop. de ce liure, si ledit costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese. Secondement, que le costé C ne mesure pas le costé D: Ie dis que le quarré A ne mesurera pas aussi le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure vn nombre cube, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les costez sont C & D; & que A

ne mesure B: Ie dis que le costé C ne mesure pas aussi le costé D: & dauantage que si le costé C ne mesure pas le costé D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube, ce qui est contre l'hypothese. Et pour le second: Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesureroit le costé, par la susdite 15. p. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si vn nombre cube ne mesure vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plan en raison doublée des costez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs costez soient C D, & E, F. Ie dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn moyen proportionnel; & que A est à B en raison doublee de C à E, ou de D à F, costez de mesme raison.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9. F 3.

Car puis que les plans A & B, sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F; & si A sera le produict de C par D: Item B le produict de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G; par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produict A & G: A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produict G & B: partant iceux G & B seront l'vn à l'autre comme D à F: ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

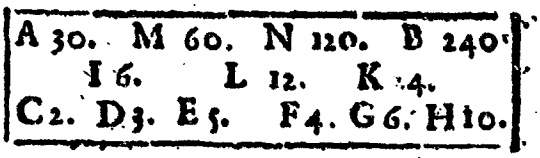
Quant à la seconde partie, elle est euidente: car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E: par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la mesme raison que de C à E, ou de D à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux; & le solide est au solide en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B; & de A les costez soient

C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H. Ie dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F, ou de D à G, ou E à H, costez de mesme raison.



Car I soit le produict de C multiplié par D: K le produict de F par G: L le produict de F par D, & finalement M & N, soient les produicts de L par E & H.

Maintenant puis que par la 21. def. 7. les costez C, D, E, sont proportionnaux aux costez F, G, H: en permutant, ils seront aussi proportionnaux. c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produict I & L, par la 17. p. 7. I sera à L comme C à F, c'est à dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produict I & K, parquoy I sera à K comme D à G: & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produict de la multiplication des trois nombres C, D, E: & I, le produict de C par D: aussi A sera le produict de I par E: Item le solide B estant produict de la multiplication des trois nombres F, G, H: & K le produict de F en G: aussi B sera le produict de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produict A & M en la raison de I à L: & semblablement que L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L: aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F: & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

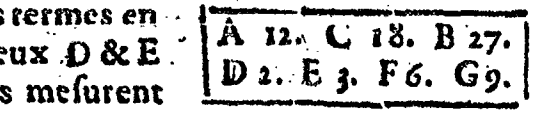
Pour la seconde partie, elle est euidente: car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont esté prouuez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M: Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H: donc A sera à B en raison triplee de C à F, ou D à G, ou E à H, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe vn moyen proportionnel C. Ie dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B: par la 21. p. 7. iceux D & E mesureront egalement A & C; qu'ils les mesurent par F: Ils mesureront aussi egalement C & B, qui sont en la mesme raison: qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D



& E, ſera produict A & C par la 9. com. ſent. Item G multipliant les meſmes D & E, ſeront produicts C & B. Veu donc que E multipliant F & G a faict C & B; comme C ſera à B, ainſi F à G par la 17. p. 7. Mais comme C eſt à B, ainſi eſtoit D à E. Donc comme D ſera à E, ainſi F ſera à G; & en permutant comme D ſera à F, ainſi E à G. Et puis que F multipliant D a faict A, iceluy A ſera vn plan duquel les coſtez ſont D, F. Item pour ce que G multipliant E a faict B; B ſera le plan duquel E & G ſont les coſtez. Mais ces coſtez ont eſté demonſtrez proportionnaux, c'eſt à dire D eſtre à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux ſeront nombres ſolides ſemblables.

Soient deux nombres A & B, entre leſquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Ie dis que A & B ſont nombres ſolides ſemblables.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient trouuez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la preced. prop. E & G ſeront plans ſemblables: Soient leurs coſtez H, I; & K, L, leſquels ſeront proportionnaux par la 21. def. 7. & puiſque E, F, G ſont les plus petits en la raiſon de A, C, D, ils les meſureront eſgalement par la 21. prop. 7. ſoit ſelon le nombre M: c'eſt à dire que E, F, G, eſtans multipliez par M produiſent A, C, D. Item par le meſme diſcours E, F, G, meſureront eſgalement les trois nombres C, D, B, chacun le ſien: ſoit ſelon le nombre N, c'eſt à dire, que N multipliant E, F, G, produiſe C, D, B. Il eſt donc euident, que A & B ſont nombres ſolides, deſquels les coſtez ſont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produiſent C & D, par la 18. p. 7. M ſera à N en la raiſon de C à D, & C eſt à D en meſme raiſon que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E & F a produict iceux C & D; mais auſſi E eſt à F en la meſme raiſon que H à K, ou I à L. Donc auſſi H ſera à K, ou I à L, comme M à N; & en permutant, H ſera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les coſtez H, I, M ſont proportionnaux aux coſtez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B ſeront nombres ſolides ſemblables; Parquoy ſi entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 2. I 2. M 4. K 3. L 3. N 6

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit quarré; le troiſieſme ſera auſſi quarré.

Soient trois nombres continuellent proportionnaux A, B, C, deſquels le premier A ſoit quarré: Ie dis que le troiſieſme C eſt auſſi quarré.

A 4. B 6. C 9.

Car puiſque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils ſeront plans ſemblables; & partant l'vn d'iceux eſtant quarré, auſſi ſera l'autre. Si donc trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quart ſera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier deſquels A ſoit cube: Ie dis que le quatrieſme D eſt auſſi cube.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Car puiſque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce liure, iceux A & D ſeront ſolides ſemblables: mais l'vn eſt cube, & partant auſſi ſera l'autre. Parquoy ſi quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux ſoit quarré, auſſi ſera l'autre.

Soient deux nombres A & B, leſquels ſoient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & ſoit A quarré. Ie dis que B eſt auſſi quarré.

A 16. F. 24. B 36. C 4. E 6. D 9.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, & par la 18. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, ſçauoir eſt E; il en tombera auſſi vn entre A & B par la 8. prop. 8. & ſoit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, ſont continuellement proportionnaux, & le premier A eſt quarré; auſſi par la 22. prop. 8. le troiſieſme B ſera quarré. Parquoy ſi

quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il appert des choſes cy-deſſus dites, que la raiſon de quelque nombre quarré que ce ſoit à quelconque nombre non quarré, ne peut eſtre exhibee en deux nombres quarrez: Car ſi elle y eſtoit exhibee, par la 24. propoſit. 8. les deux premiers nombres ayans la meſme raiſon que les quarrez de la raiſon exhibee ſeroient auſſi quarrez, puis que l'vn eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde: car l'vn eſt poſé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raiſon double, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. & c. ſeroient quarrez; d'autant que 4 eſtant quarré, par la 24. propoſi. 8. auſſi 8 ſeroit quarré: donc auſſi 16 & 32. & c. Ce qui eſt abſurde. Car entre 4 & 8; & entre 8 & 16; & entre 16 & 32, & c. tomberoit vn moyen proportionnel, s'ils eſtoient quarrez, par la 11. prop. 8. & nous auons demonſtré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raiſon double.

Semblablement les nombres en raiſon quintuple, ne ſont auſſi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y eſtoient, par la 11. propoſit 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel: donc auſſi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui eſt impoſſible, comme nous auons demonſtré au ſcholie de la meſme propoſition.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'vn d'iceux ſoit cube, auſſi ſera l'autre.

Que A ſoit à B, comme le cube C au cube D, & que A ſoit cube: Ie dis que B eſt auſſi cube.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce liure, leſquels ſoient E & F: Mais par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B ſont continuellement proportionnaux, & que le premier A eſt cube, auſſi ſera le quatrieſme B par la 23. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres ſont l'vn à l'autre, & c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 8. G 12. H 18. B 27.
C 64. E 96. F 144. D 216.

COROLLAIRE.

Il appert auſſi des choſes cy-deſſus, que la raiſon de quelque nombre cube que ce ſoit à quelconque nombre non cube, ne ſe peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans ſemblables, ſont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B. Ie dis que A ſera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & ſoit C: ſi donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon continuë de A, C, B, les extremes D & F ſeront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raiſon egale A eſt à B, comme D à F, il eſt manifeſte que A eſt à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'eſt à ſçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 20. C 30. B 45.
D 4. E 6. F 9.

SCHOLIE.

Clauius à demonſtré apres Commandin la conuerſe de ceſte prop. c'eſt à ſçauoir:

Que les nombres qui ſont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, ſont plans ſemblables.

Car les nombres A & B eſtans entr'eux, comme les quarrez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre iceux quarrez: & auſſi vn entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B ſont plans ſemblables.

Et par cecy eſt manifeſte que les nombres plans qui ne ſont ſemblables, ne ſont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres ſolides ſemblables, ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres ſolides ſemblables A, B. Ie dis que A ſera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & ſoient iceux C & D. Que ſi on prend les plus petits termes de la raiſon de A à C, & qu'en la raiſon d'iceux on trouue, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extremes E & H ſeront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raiſon egale comme E à H, ainſi A à B: Parquoy les nombres ſolides ſemblables ſont l'vn à l'autre, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 8. F 12. G 18. H 27.

SCHO-

SCHOLIE.

Clauius demonstre aussi apres Commandin la conuerse de ceste proposition sçauoir est:

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. p. 8. il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H; il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est euident par toutes les choses cy-dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18 prop. 8. vn moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté demonstré au Scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront pas aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il est certain que deux nombres moyens proport. ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuuent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuuent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy mesme & l'vnité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les costez sont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy-mesme, & deux vnitez: & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuuent estre proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuuent estre plans, ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18 ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extrémes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seroient premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrémes n'en ayans point: Parquoy il est euident par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extrémes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy-mesme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez; Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il eſt facile de trouuer deux nombres plans, ou ſolides non ſemblables. Car ſi on prend deux nombres ayans raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre ſoit quarré, ou cube; il eſt euident par ce que deſſus, qu'ils ſeront plans, ou ſolides diſſemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, deſquels l'vn ſoit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20; ils ne ſont plans ſemblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils ſeroient comme quarré à quarré: & 16 eſtant quarré, par la 24. p. 8. 20 ſeroit auſſi quarré, contre l'hypotheſe. Par meſme raiſon, ſi de deux nombres, l'vn eſt cube, & l'autre ne l'eſt pas; comme 27 & 40; ils ne ſont pas ſolides ſemblables. Car s'ils l'eſtoient, par la 27. p. 8. ils ſeroient comme cube à cube: & 27 eſtant cube, par la 25. p. 8. 40 ſeroit auſſi cube, contre l'hypotheſe.

Fin du huictieſme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Ie dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-meſme produict D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Mais A & B eſtans plans ſemblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. p. 8. Il en tombera donc auſſi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſſi quarré par la 22. p. 8. Parquoy ſi deux nombres plans ſemblables &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A 4.	B 9.
D 16.	E 24. C 36.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn nombre quarré, iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui ſe multiplians l'vn l'autre, produiſent C quarré. Ie dis que A & B ſont plans ſemblables.

Car que A ſe multipliant ſoy-meſme produiſe D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrez D & C tombe vn moyen pro.

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

portionnel : il en tombera donc auſſi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. pr 8. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube ſe multiplie ſoy-meſme, le produict ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel ſe multipliant ſoy-meſme produiſe B. Ie dis que B eſt nombre cube.

Car ſoit C coſté du cube A : & de C multiplié en ſoy, ſoit produict D ; il eſt manifeſte que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant ſoy-meſme a faict D, par la 7. com. ſent. C meſurera D par C. Mais par la 5. com. ſent. l'vnité meſure auſſi C par C. L'vnité ſera donc meſme partie de C, que C de D ; & partant comme l'vnité eſt à C, ainſi C à D par la 20. d. 7. Derechef puiſque C multipliant D a faict A, par la 7. com. ſent. D meſurera A par C. Mais auſſi C meſure D par C. Donc C eſt meſme partie de D, que D de A ; & partant comme C à D, ainſi D à A ; mais comme C à D, ainſi eſtoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainſi C à D, & D à A : ainſi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A meſure B par A ; (car B a eſté faict de A multiplié en ſoy) & que l'vnité meſure auſſi A par A ; l'vnité ſera meſme partie de A, que A de B : partant comme l'vnité ſera à A, ainſi A ſera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D ; par la 8. p. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux E & F. Et veu que les 4 nombres A, E, F, B ſont continuellement proportionnaux, & que A premier eſt cube, auſſi B quatrieſme ſera cube par la 23. prop. 8. Parquoy ſi vn nombre cube, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A 8.	
E 16.	D 4.
F 32.	C 2.
B 64.	*Vnité.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produiſe C. Ie dis que C eſt auſſi nombre cube.

Car ſi on prend D, produict de A multiplié par ſoy-meſme, il ſera cube par la prop. precedente : & pource que A multipliant B & ſoy-meſme, a produict C & D ; il y aura telle raiſon de D à C, que de A à B, par la 17. p. 7. Et par la 12. p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B : il en tombera donc auſſi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D eſtant cube,

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

par la 23. pr. 8. C ſera auſſi cube. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube, le multiplié ſera auſſi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produiſe le nombre cube C. Ie dis que B multiplié eſt auſſi nombre cube.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

Car ſi on prend D, produict de A multiplié par ſoy-meſme, il ſera cube par la 3. p. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a faict D & C, par la 17. p. 7. A ſera à B comme D à C, & par la 8. p. 8. entre A & B ſe trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. A eſtant cube, B multiplié ſera auſſi nombre cube. Parquoy, ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme produict vn nombre cube; iceluy nombre ſera auſſi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par ſoy-meſme produiſe le nombre cube B. Ie dis que A eſt auſſi nombre cube.

A 8.	B 64.	C 512.

Car ſi on prend C produict de A multiplié par B, il ſera cube par la definition du nombre cube; & par la 5. p. 9. A ſera auſſi cube. Si donc vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7 PROP. VII.

Vn nombre compoſé eſtant multiplié par quelque autre nombre le produict ſera ſolide.

Soit le nombre compoſé A, lequel eſtant multiplié par quelque nombre B produiſe C. Ie dis que C eſt nombre ſolide.

A 6.	B 5.	C 30.
D 2.	E 3.	

Car puiſque A eſt compoſé, quelque nombre outre l'vnité le meſurera par la 3. d. 7. Que D meſure donc A par E. Ce qu'eſtant poſé, D multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. ſent. Et puiſque B multipliant A a produict C, iceluy C ſera procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; partant par la 17. p. 7. il ſera nombre ſolide, duquel les coſtez ſont D, E, B. Parquoy vn nombre compoſé, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troiſieſme depuis l'vnité ſera quarré, & tous les autres qui en laiſſeront vn: Mais le quatrieſme ſera cube, & tous les ſuyuans qui en laiſſeront deux: & le ſeptieſme ſera cube & quarré enſemble, & tous les ſuiuans qui en laiſſeront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Ie dis que le troiſieſme B ſera quarré, enſemble tous les autres qui en laiſſeront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres, que le quatrieſme C eſt cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laiſſent deux, comme F & I: Pareillement que le ſeptieſme nombre F eſt cube & quarré enſemble, comme auſſi tous les autres qui pourroient ſuiure en laiſſant touſiours cinq nombres.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

Pour la premiere partie: puis que les nombres ſont continuellement proportionnaux, comme l'vnité meſure A ſelon les vnitez qui ſont en A, par la 5. com. ſent. ainſi chacun meſurera ſon ſuiuant ſelon les vnitez de A: partant B troiſieſme, qui ſera en ce faiſant le produict de A multiplié par ſoy, ſera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, ſont continuellement proportionnaux, & B eſt quarré, auſſi D ſera quarré. Par meſme diſcours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D eſt quarré, auſſi F ſera quarré; & ainſi de tous les autres nombres qui en laiſſent vn.

Pour la ſeconde partie: puis que A multiplié par ſoy produict B; & B par A produict C; Il eſt euident par les definitions du 7. que C ſera cube, & par la 23. p. 8. C, D, E, F, eſtans continuellement proportionnaux, F ſera auſſi cube: par meſme raiſon, eſtans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F eſt cube, auſsi I ſera cube; & ainſi de tous les autres nombres, en laiſſant deux, ſi dauantage y en auoit.

Pour la troiſieſme partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a eſté prouué quarré & cube; iceluy ſera cube & quarré enſemble: Et il en ſera ainſi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra conti-

nuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez : & s'il est cube, aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, Ie dis premierement que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Car puis qu'iceux nombres A, B, C, D, E, F, sont continuellement proportionnaux depuis l'vnité, par la prec. prop. le troisiesme nombre B sera nombre quarré, comme aussi tous les autres qui en laissent vn, sçauoir D & F. Mais pour ce que A, B, C, sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. p. 8. C sera aussi quarré : & par la mesme raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C estant quarré, aussi le sera le troisiesme E : partant tous les nombre A, B, C, D, E, F sont quarrez : Et ainsi de tous autres.

Ie dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes ; Car d'autant que A, B, C, D, E, F sont continuellement proport. depuis l'vnité, C quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçauoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouuerons ainsi. D'autant

Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

que par l'hypothese l'vnité est à A, comme A à B; l'vnité mesurera A, & iceluy A le nombre B également. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure A par le mesme A : donc A mesurera aussi B par le mesme A : & par la 9. com. sent. A multiplié en soy produira B, lequel A estant cube, B sera aussi cube par la 3. p. 9. Mais tous les autres nombres suiuans sont en la raison de A à B, & par tant par la 23. p. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré : aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube, aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le qua-

trieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A,B,C,D,E,F; & premierement que A qui ſuit l'vnité, ne ſoit nombre quarré. Ie dis que pas vn autre ne ſera quarré, ſinon le troiſieſme B, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent vn, ſçauoir D & F.

vnité,	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F ſont quarrez: Et ſi quelqu'vn veut dire qu'il y en à auſsi d'autres, comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fuſt auſſi nombre quarré, (eſtans C, B, A, continuellemant proportionnaux & C quarré) ce qui eſt contre l'hypotheſe. Par meſme raiſons on demonſtrera qu'aucun autre ne peut eſtre quarré, ſinon les ſuſdits.

Maintenant, que A proche de l'vnité ne ſoit nombre cube: Ie dis qu'aucun autre ne ſera cube, ſinon C quatrieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſeront deux, comme F, &c.

Car par la 8. p. 9. C & F ſont cubes: Et ſi quelqu'vn veut dire que D ſoit auſsi cube; d'autant que D, C, B, A ſont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. p. 8. que A fut pareillement cube; ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc D n'eſt pas cube. Par meſme raiſons on demonſtrera qu'aucun autre, outre les ſuſdits, ne peut eſtre cube. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'll falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit meſurera le plus grand ſelon quelqu'vn de ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A, ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Ie dis que le plus petit nombre B meſurera le plus grand F par quelqu'vn des nombres C, D, E.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.

Car d'autant que A, B, C, D, E ſont en meſme raiſon que B, C, D, E, F, en raiſon eſgale, l'vnité A ſera à E, comme B eſt à F. Et par la 20. def. du 7. l'vnité meſurera E; & le nombre B le nombre F, egalement. Mais par la 5. com. ſent. l'vnité A meſure E par E: donc auſsi B meſurera F par E. Le meſme peut on dire des autres. Par quoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHO-

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est autant esloigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand: & ce d'autant qu'il y doit auoir une mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est à dire par soy-mesme, &c. Pour ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres: & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par soy-mesme, en produict vn autre, qui entre les proportionnaux est autant esloigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouiendra sera autant esloigné du grand que le moindre de l'vnité: Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure; sera produict celuy-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant esloigné de C, qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, sera le mesme F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celuy qui est proche de l'vnité.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Ie dis que tout les nombres premiers qui se trouueront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront nombres premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D: D & F seront donc aussi premiers par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E: partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E: ce qui est contre l'hypothese: Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy d'apres l'vnité ſoit premier: Le plus grand ne ſera meſuré par aucun autre nombre, ſinon par ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui ſuit l'vnité ſoit premier. Ie dis que le plus grand nombre E ne ſera meſuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

A 1.	B 3.	C 9.	D 27.	E 81.
	K --	I --	H --	G --

Autrement, s'il eſt poſſible, que quelque autre nombre, comme G, meſure E: Or G ſera premier ou compoſé: s'il eſt premier, & meſurant E extreme, par la prec. prop. il meſurera auſſi B, premier proche de l'vnité: ce qui eſt abſurde. Donc G n'eſt premier, mais compoſé, & meſuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut eſtre autre que B: d'autant qu'il meſurera E, par la 11. com. ſent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il meſuraſt auſſi B nombre premier: ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui meſure G. Que maintenant B meſure G par H: & puis que par les choſes dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produict E & G, par la 17. p. 7. comme E ſera à G, ainſi D à H: mais G meſure E: donc auſſi H meſurera D. On prouuera comme deſſus qu'il ne peut eſtre premier ny meſuré par vn autre nombre premier que B: Car ſi H eſtoit premier, meſurant D, il meſureroit auſſi B: ce qui ne ſe peut faire, ayant eſté poſé premier. Que ſi H eſt compoſé, celuy nombre premier qui le meſurera ſera B, ou ſi c'eſt vn autre, c'eſt autre meſurera auſſi D, & celuy qui meſure D, c'eſt à ſçauoir B, par la 11. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui meſure H: & poſant que ce ſoit par le nombre I. On prouuera auſſi comme deſſus, que comme H meſure D, ainſi I meſure C, & que I ne peut eſtre nombre premier, ny meſuré par aucun autre nombre premier ſinon B. Donc que I meſure C par le nombre K: par meſmes raiſons, comme I meſure C, ainſi K meſurera B nombre premier: il faut donc qu'à tout le moins il luy ſoit egal, ce qui eſt impoſsible: d'autant que B eſt moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C eſt produict de K multiplié par I, & qu'il eſt auſſi le produict de B multiplié par ſoy-meſme. Partant aucun nombre ne meſurera E, ſinon B, C, D, qui le meſurent, par la 11. p. 9. Parquoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez

par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F: donc par la 9. com. sent. E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B, C, D; & par la 32. p. 7. iceux B, C, D, mesureront l'vn des deux E, F: Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas vn d'iceux; ils mesureront donc F, qui est plus petit que A: ce qui est absurde; puis que A est posé le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.	B.	C.	D.
30.	2.	3.	5.
E---		F--	

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy en nombres (apres Commandinus & Clauius) les 10 *premiers theoremes, qui sont demonstrez en lignes au second liure.*

1. S'il y a deux nombres, l'vn ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, A B & C, desquels A B est diuisé en A D, D E, E B, & soit faict F de C en A B: Item G H de C en A D, & H I, de C en D E, & I K de C en E B: Ie dis que F est egal aux nombres G H, H I, I K, c'est à dire à tout le nombre G K composé d'iceux. Car puisque C multipliant A B, a produict F: A B mesurera F par C, c'est à dire que A B sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison A B sera la partie de G H; & D E de H I; & E B de I K, denommée par C, sçauoir est, la mesme que A B de F. Mais il est euident par la 5. prop. 7. que A B est la mesme partie de G K, que A D de G H, parquoy aussi A B sera mesme partie de G K, que A B de F: & partant par la 4. com. sent. F & G K seront egaux entr'eux. Ce qui estoit proposé.

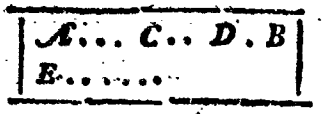
A	D.	E.	B	C.
F				12.
G	H.	I.	K.	

2. Si vn nombre est couppé en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre A B soit diuisé en A C, C B. Ie dis que les nombres qui seront produicts du total A B, les parties A C, C B seront ensemble egaux au quarré de A B. Car estant pris le nombre D egal à A B, par le 1. theo. le nombre faict de D, c'est à dire de A B, en A B, sçauoir est le quarré d'iceluy A B, sera egal aux nombres qui seront produicts de D, c'est à dire de A B, en A C, & en C B; ce qui estoit proposé.

A	C.	B
D		

Le meſme ſera demonſtré, ſi A B eſt couppé en plus de deux parties, comme on peut veoir par la ſeconde figure icy appoſée. Car par la meſme raiſon, le nombre faict de E, c'eſt à dire de A B, en A B, c'eſt à ſçauoir le quarré de A B, ſera egal aux nombres, qui ſeront produicts de E, c'eſt à dire de A B, en chaſque partie A C, C D & D B.

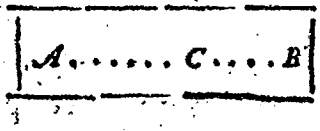


3. Si vn nombre eſt couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'vne des parties, eſt egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement priſe.

Soit le nombre A B diuiſé en A C, C B. Ie dis que le nombre plan produict de A B en la partie A C, eſt egal à celuy faict des parties A C, C B, & au quarré d'icelle partie A C. Car eſtant pris le nombre D egal à la ſuſdicte partie A C; par le 1. theor. le nombre faict de D, c'eſt à dire de A C, en A B; ou (qui eſt le meſme) de A B en A C, ſera egal aux nombres faicts de D, c'eſt à dire de A C, en C B, & de D; c'eſt à dire de A C, en A C, ſçauoir eſt le quarré de A C. Ce qui eſtoit propoſé.

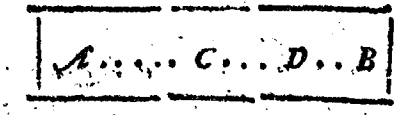
4. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré faict du tout eſt egal aux deux quarrez faicts des deux parties, & à deux fois le nombre plan contenu d'icelles paties.

Soit le nombre A B diuiſé en A C, C B. Ie dis que le nombre quarré faict de A B, eſt egal aux quarrez des parties A C, C B, auec deux fois le nombre plan faict de A C en C B. Car par le 2. theor. le nombre quarré de A B, eſt egal aux nombres faicts de A B en A C, & en C B. Mais par le 3. theor. le nombre faict de A B en A C, eſt egal au nombre produict de A C en C B, & au quarré d'iceluy A C: Item le nombre produict de A B en C B, eſt par meſme raiſon egal au nombre produict de A C en C B, & au quarré de C B. Donc le nombre quarré faict de A B, eſt pareillement egal aux nombres quarrez des parties A C, C B, & à deux fois le nombre faict de A C en C B. Ce qui eſtoit propoſé.



5. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, auec le quarré du nombre qui eſt entre les deux ſections, eſt egal au quarré faict de la moictié du nombre total.

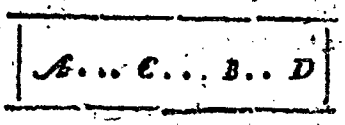
Soit le nombre A B, couppé en deux parties egales A C, C B, & en deux inegales A D, D B. Ie dis que le nombre plan compris des parties inegales A D, D B, auec le quarré du nombre C D, eſt egal au quarré du nombre B C. Car puis que par le theor. preced. le nombre quarré de C B, eſt egal aux quarrez des parties C D, D B, auec deux fois le nombre faict de C D, D B; & par le 3. theor. le nombre plan compris de C D, D B, enſemble auec le quarré de D B, eſt egal au nombre produict de C B en D B, ſera faict que ſi ce nombre faict de C B, en D B, eſt pris pour le quarré de D B, auec le nombre faict de C D, en D B, auſſi le nombre quarré de C B, eſt egal à l'autre quarré de C D, enſemble



à l'autre nombre faict de C D en D B, & au nombre produict de C B, c'eſt à dire de A C en D B: & partant par le 1. theor. le nombre faict du total A D en D B, eſt egal aux nombres produicts de C D en D B, & de A C en D B. Donc le quarré de C B, ſera egal au quarré de C D, & au nombre faict de A D en D B. Ce qui eſtoit propoſé.

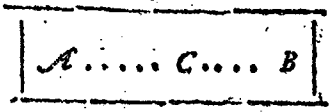
6. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & à iceluy eſt adiouſté quelque autre nombre; le nombre qui eſt fait du tout auec l'adiouſté en l'adiouſté, auec le quarré de la moitié du nombre, eſt egal au quarré du nombre compoſé de la moitié & de l'adiouſté.

Soit le nombre A B couppé en deux parties egales A C, C B, & à iceluy ſoit adiouſté le nombre B D. Ie dis que le nombre faict du tout A B & de l'adiouſté B D comme vn ſeul, ſçauoir eſt de A D en l'adiouſté B D, auec le quarré de la moitié C B, eſt egal au quarré faict de la moitié C B & adiouſté B D comme vn ſeul, c'eſt à dire au quarré de C D. Car puis que par le 4. theor. le quarré de C D eſt egal aux quarrez des parties C B, B D, auec deux fois le nombre plan compris de C B, B D, c'eſt à dire aux quarrez des parties C B, B D, & aux nombres contenus de C B, B D, & de A C, B D: Mais par le premier theor. le nombre faict de A D en B D, eſt egal aux nombres contenus ſous C B, B D, & ſous A C, B D, & ſous A D, B D, c'eſt à dire au quarré de B D. Donc prenant le nombre faict de A D en D B, pour le quarré de la partie B D, auec les nombres faicts de C B en B D, & de A C en B D, le quarré de C D ſera egal à l'autre quarré de C B, enſemble auec le nombre faict de A D en B D: c'eſt à dire que le nombre faict de A D en B D, auec le quarré de C B, eſt egal au quarré de C D: ce qui eſtoit propoſé.



7. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré du tout auec le quarré de l'vne des parties, eſt egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, enſemble auec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre A B couppé és parties A C, C B. Ie dis que le quarré de A B, auec celuy de la partie C B, eſt egal à deux fois le nombre faict de A B en C B, enſemble auec le quarré de l'autre partie A C. Car puiſque par le 4. theor. le quarré de A B eſt egal aux quarrez des parties A C, C B, & a deux fois le nombre faict d'icelles A C, C B; ſi on adiouſte le commun quarré de C B, les quarrez de A B, C B, ſeront enſemble egaux aux quarrez de A C, C B, C B, auec deux fois le nombre produict de A C en C B: mais par le 3. theor. le nombre faict de A C en C B auec le quarré de C B, eſt egal au nombre produict de A B en C B; & partant le double de l'vn eſt egal au double de l'autre. Donc ſi pour le double du nombre faict de A C en C B, & quarré de C B, on prend le double du nombre produict de A B en C B, les quarrez des nombres A B, C B ſeront enſemble egaux à deux fois le nombre de A B en C B, auec le quarre de l'autre partie A C. Ce qui eſtoit propoſé.



8. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré du nombre compoſé du tout & de la partie premierement priſe.

Soit le nombre A B couppé és parties A C, C B. Ie dis que le nombre faict de A B en la partie C B, enſemble auec le quarré de l'autre partie A C, eſt egal au quarré du

nombre composé de A B & de la partie C B. Car estant adiousté le nombre B D egal à C B, par le 4. theor. le quarré du tout A D est egal aux quarrez des nombres A B, B D, ensemble auec le nombre double de A B en B D, c'est à dire aux quarrez des nombres A B, C B, ensemble auec deux fois le nombre de A B en C B: Mais par le 7. theor. les quarrez de A B, C B, sont egaux à deux fois le nombre contenu de A B, C B, auec le quarré de A C: donc si pour les quarrez de A B, C B, on prend le nombre double de A B en C B, & le quarré de A C; le quarré faict de A D est egal à 4 fois le nombre faict de A B en C B, ensemble auec le quarré de l'autre partie A C: ce qui estoit proposé.

9. Si vn nombre est couppé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarrez faicts des parties inegales, sont doubles des quarrez faicts de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre A B diuisé es parties egales A C, C B, & ès inegales A D, D B. Ie dis que les quarrez des parties inegales A D, D B, sont doubles des quarrez de la moitié A C, & du nombre entre-moyen C D. Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre A D est egal aux quarrez des nombres A C, C D, ensemble auec deux fois le nombre faict de A C en C D; si on adiouste le commun quarré de D B, les quarrez des parties A D, D B, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de A C en C D, c'est à dire de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, c'est à dire de A C, & C D, sont egaux au quarré de D B, & à deux fois le nombre de C B en C D. Donc si pour le quarré de D B, & deux fois le nombre faict de C B en C D, on prend les quarrez de A C, C D, les quarrez de A D, D B seront egaux au double des quarrez des parties A C, C D; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

10. Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy on adiouste quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre A B diuisé en deux parties egales A C, C B, & à iceluy soit adiousté le nombre B D. Ie dis que le quarré du nombre A D composé du tout A B, & de l'adiousté B D, & le quarré d'iceluy nombre adiousté B D, sont ensemble doubles des quarrez faicts de la moitié A C, & de C D, composé de la moitié C B & de l'adiousté B D. Car puisque par le 4. theor. le quarré de A D est egal aux quarrez de A C, C D, & a deux fois le nombre produict de A C, c'est à dire de C B, en C D; si on adiouste le commun quarré du nombre B D, les quarrez des nombres A D, B D, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, ou A C, & C D sont egaux au quarré de B D, & a deux fois le nombre fait de C B en C D. Donc si pour le quarré de B D, & deux fois iceluy nombre produict de C B en C D, on prend les quarrez des nombres C B, C D, c'est à dire des nombres A C, C D: les quarrez

des nombres AD, BD ſeront egaux à deux fois les quarrez des nombres AC, CD: & partant ceux-là ſont doubles de ceux-cy: ce qui eſtoit propoſé.

Or voila quant aux 10. *premieres prop. du* 2. *l. mais la* 11^e. *ne ſe peut accommoder aux nombres, c'eſt à dire qu'on ne peut pas* diuiſer vn nombre propoſé, en telle ſorte que le nombre plan faict du tout & de l'vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie.

Car, s'il eſt poſſible, ſoit diuiſé AB en AC, CB, en ſorte que le nombre plan faict du tout AB, & de la partie CB, ſoit egal au quarré de l'autre partie AC. Donc quatre fois le nombre de AB en CB, ſera quadruple du quarré de AC: & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy AB en CB, auec le quarré de AC, ſera quintuple d'iceluy quarré de AC. Mais quatre fois le nombre plan de AB en CB, auec le quarré de AC, eſt quarré, veu que par le 8. *theor. il eſt egal au nombre quarré, qui eſt faict du nombre compoſé de AB & de CB. Donc deux nombres quarrez (ſçauoir celuy qui eſt faict de AB en CB quatre fois auec le quarré de AC; & le quarré de AC) ont meſme raiſon, que* 5 *à* 1, *ou* 25 *à* 5. *Ce qui eſt abſurde, ainſi qu'il appert du corol. de la* 24. *p.* 8. *Le nombre AB ne peut donc pas eſtre diuiſé, en ſorte que le nombre plan faict du tout en vne des parties ſoit egal au quarré de l'autre partie. Ce qui eſtoit propoſé.*

A ——— C ——— B

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux: le compoſé de deux tels que l'on voudra d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon: Ie dis que le compoſé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B, eſt premier à l'autre C; & le compoſé de B, C, premier à A; & de A, C, premier à B.

A 9. B 12. C 16.
D 3. E 4.

Car ſi on prend D & E les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon par le Scholie de la 35. prop. 7. il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré à la 2. prop. 8. que A & C ſont les quarrez de D & E, & que B eſt le produict de D multiplié par E: & par le 3. Theor. du Scholie precedent le compoſé de D, E, multiplié par D, produira vn nombre eſgal au compoſé de A & B. Mais D & E eſtans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. auſſi leur compoſé ſera premier à E, par la 30. prop. 7. & partant auſſi à ſon quarré C, par la 27. prop. 7. Et par meſme raiſon D ſera premier à C; & par la 26. prop. 7. le produict du compoſé de D & E multiplié par D, ſera auſſi premier à C. Mais nous auons monſtré que ce produict eſt eſgal au nombre compoſé de A & B. Donc auſſi le compoſé de A & B ſera premier à C.

En apres, puiſque comme deſſus le compoſé des deux nombres D, E eſt premier à chacun d'iceux; par la 26. prop. 7. le produit du compoſé de D, E, multiplié par E ſera premier à D. Mais par le ſuſdict Theor. iceluy produit eſt eſgal à C faict de E en ſoy, & au nombre B faict de D en E. Donc le nombre compoſé de ces deux B & C ſera auſſi premier à D; & partant auſſi à A par la 27. propoſition 7.

Finablement D & E eſtans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au compoſé de deux par la 30. prop. 7. leur produict B ſera premier au compoſé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produict de D, E comme vn ſeul nombre, multiplié par ſoy, ſera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produict de D E comme vn ſeul nombre multiplié en ſoy, eſt eſgal à A & C & deux fois B enſemble: donc A & C auec deux fois B, ſont premiers à B. Or en oſtant les deux fois B; il eſt manifeſte que le reſte compoſé de A & C, ſera premier à B. Car autrement ils ſeroient compoſez, & leur commune meſure meſureroit auſſi deux fois B; & par conſequent auſſi le compoſé de A & C & deux fois B, qui ne ſeroit en ce faiſant premier à B, contre ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus. Donc le compoſé de A & C eſt premier à B. Parquoy ſi trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le ſecond à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi B n'eſt pas à quelque autre, c'eſt à dire qu'à A & B, on ne peut trouuer vn troiſieſme proportionnel,

A 3. B 5. C--

Autrement, ſ'il eſt poſſible, ſoit que comme A eſt à B, ainſi B ſoit à vn autre, ſçauoir C. Par la 23. prop. 7. A & B eſtans premiers, ils ſeront les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon, & par 21. prop. 7. A meſurera B, & B meſurera C. Mais auſſi A meſure ſoy-meſme; donc A meſure iceux A & B. Ainſi A & B ne ſeroient premiers, contre l'hypotheſe. Donc il n'eſt pas comme A à B, ainſi B à C. Par meſme raiſon, il ne ſera pas comme B à A, ainſi A à quelque autre. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ce qui eſt dict & demonſtré tant en cette 16. prop. qu'aux trois ſuiuantes, ſe doit entendre des nombres entiers: car ſi on les vouloit eſtendre aux fractions, il eſt certain & manifeſte qu'à deux nombres quels qu'ils ſoient, on peut trouuer vn troiſieſme proportionnel; puis que le quarré du ſecond nombre eſtant diuiſé par le premier, en eſt produict vn troiſieſme proportionnel. Comme aux deux nombres premiers 3 & 5, ſi le quarré du ſecond nombre 5, ſçauoir 25 eſt diuiſé par le premier 3, prouiendra 8 $\frac{1}{3}$ pour le troiſieſme proportionnel, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, deſquels les extrémes ſoient premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, deſquels les extremes A & C ſoient premiers entr'eux. Ie dis qu'il ne ſe peut faire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D ---

Car ſ'il eſt poſſible, comme A eſt à B, ainſi ſoit C à D. En permutant comme A ſera à C, ainſi B à D: & par la 23. prop. 7. A & C eſtans premiers, ils ſeront les plus petits en leur raiſon: & par la 21. p. 7. ils meſureront egalement B & D; ſçauoir eſt A iceluy B; & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainſi B à C; & A meſure B, auſſi B meſurera C: & par la 11. comm. ſent. A meſurera auſſi C; & iceuy A meſurant ſoy-meſme, il meſurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui eſt abſurde. A n'eſt donc pas à B, comme C à D. Par meſmes raiſons, il ne ſera pas comme C à B, ainſi A à quelque autre. Parquoy ſi tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres eſtans donnez, conſiderer ſi on pourra trouuer vn troiſieſme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B: Il faut conſiderer ſi à iceux on peut trouuer vn troiſieſme nombre proportionnel.

A 4.	B 6.	D 9.	C 16.
A 6.	B 7.	D ---	C 49.

La ſolution de ceſte propoſition eſt aiſee: Car il n'y a qu'à conſiderer ſi C, produict du ſecond nombre B multiplié par ſoy-meſme, peut eſtre meſuré, c'eſt à dire diuiſé par le premier A: car ſ'il peut eſtre meſuré ou diuiſé, comme en la premiere formule, il eſt euident par la 20. prop. 7. que le quotient D ſera troiſieſme nombre proportionnel; ſinon, on n'en trouuera point, puis que par la ſuſdite 20. prop. 7. trois nombres eſtans prop. le produict des extremes doit eſtre eſgal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Eſtans donnez trois nombres, conſiderer ſi on pourra trouuer vn quatrieſme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut conſiderer ſi à iceux on peut trouuer vn quatrieſme proportionnel.

A 3. B 6. C 5. E 10. D 30.

La ſolution de ceſte prop. eſt auſſi aiſée. Car il faut ſeulement conſiderer ſi D, qui eſt le produict des ſecond & troiſieſme nombres B & C, peut eſtre meſuré par le premier A: s'il peut eſtre meſuré ou diuiſé, il eſt euident par la 19. prop. 7. que le quotient E ſera quatrieſme proport. ſinon, on n'en trouuera point, puis que par la ſuſdicte 19. prop. 7. quatre nombres eſtans proport. le produict du ſecond & troiſieſme doit eſtre eſgal au produict du premier & quatrieſme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propoſe, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A..2 B...3 C.....5 D---------- 30 E.F G-----

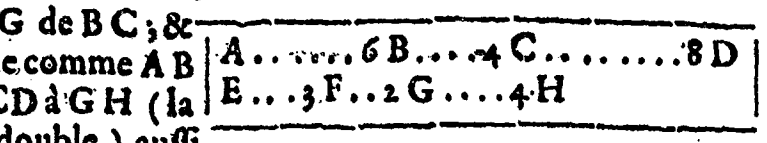
Car ſi on trouue le nombre D E, le plus petit de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à icelúy D E on adiouſte l'vnité E F, le tout D F ſera premier ou non: S'il eſt premier, on a vn nombre premier autre que pas vn des propoſez: Mais ſi D F n'eſt premier, il ſera meſuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc meſuré par G; il eſt éuident que G ne peut pas eſtre vn des trois A, B, C: car s'il eſtoit quelqu'vn d'iceux, il meſureroit comme eux D E. Donc G meſurant le tout D F, & le retranché D E, par la 12. comm. ſent. il meſureroit auſſi le reſte D F, ſçauoir vn nombre l'vnité: Ce qui eſt abſurde. Donc G eſt autre nombre premier que pas vn des propoſez. Et en ceſte façon on en peut trouuer infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propoſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra ſont adiouſtez; le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD: Ie dis que tout le compoſé AD, eſt pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié, iceux AB, BC, CD, auront chacun moitié: Soit donc E F moitié de A B; & F G de B C; & G H de C D. D'autant que comme A B à E F, ainsi B C à F G; & C D à G H (la raiſon eſtant touſiours double) auſſi par la 12. p. 7. comme A B ſera à E F, ainſi A D à E H. Mais A B eſt double d'iceluy E F: Donc auſſi A D ſera double de E H; & partant iceluy nombre A D ayant moitié eſt pair par la ſuſd. 6. def. Parquoy ſi tant de nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit pair; le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra, deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair: Ie dis que le tout AE eſt pair.

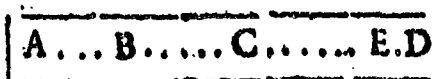
Car d'autant que AB, BC, CD, DE, ſont impairs, par la 7. def. 7. chacun ſera different du nombre pair de l'vnité: & partant ſi de chacun d'iceux l'on retranche l'vnité on les rendra tous pairs, & par la 21. propoſit. 9. le compoſé d'iceux ſera pair: Et d'autant que leur multitude eſt en nombre pair, les vnitez retranchees ſeront auſſi vn nombre pair, lequel adiouſté auec tout le reſte, qui eſt deſia nombre pair, le tout AE ſera pareillement pair par la ſuſdite 21. prop. 9. Parquoy ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit impair, le tout ſera impair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que lon voudra, la multitude deſquels comme AB, BC, CD ſoit impair: Ie dis que le tout AD eſt impair.

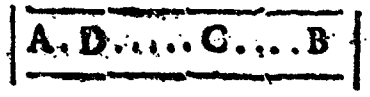
Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'vnité, ayant retranché l'vnité E D du nombre impair CD, le reſte C E ſera pair. Mais par la prec. prop. A C compoſé des impairs AB, BC, pairs en multitude, eſt pair: Donc auſſi A E compoſé des pairs AC, CE, ſera pair: Et partant ſi a iceluy AE, lon adiouſte l'vnité E D, le tout AD ſera impair, puis que par la ſuſd. def. le nombre impair differe du pair de l'vnité. Parquoy ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'vn nombre pair, on oſte vn nombre pair, le reſte ſera pair.

Soit vn nombre pair AB, duquel ſoit retranché vn nombre pair CB: Ie dis que le reſte AC eſt auſſi pair.

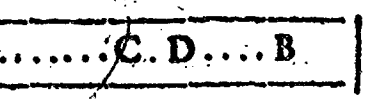


Ce qui eſt euident: Car ſ'il n'eſtoit pair, en oſtant l'vnité AD on le rendroit pair: Et le retranché auec iceluy, ſçauoir D B, ſeroit auſſi vn nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adiouſtant l'vnité oſtee A D, le tout A B ſeroit impair; ce qui eſt abſurde; puis qu'il a eſté poſé pair. Si donc d'vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oſte vn nombre impair, le reſte ſera impair.

Du nombre pair AB, ſoit retranché le nombre impair CB: Ie dis que le reſte AC eſt impair.

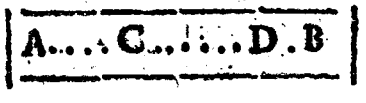


Car ayant retranché l'vnité CD du nombre impair CB, le reſte D B ſera pair. Et d'autant que le tout A B eſt poſé pair, par la preced. le reſte A D ſera auſſi pair. Et partant ſi on en oſte l'vnité CD, le reſte AC ſera impair. Si donc d'vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre impair, le reſte ſera pair.

Soit vn nombre impair AB, duquel ſoit retranché vn nombre impair CB: Ie dis que le reſte AC eſt pair.



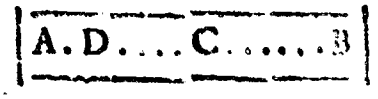
Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'vnité DB, les nombres reſtans A D, CD, ſeront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, eſt retranché le nombre pair CD; par la 24. p. 9. le reſte AC ſera pair. Parquoy ſi d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre pair, le reſte ſera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché vn nombre pair CB: Ie dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'vnité AD, le reste DB sera pair; duquel estant retranché le pair CB, par la 24. p. 9. le reste DC sera aussi pair: & partant l'vnité AD y estant adiousstee, AC sera impair. Parquoy si d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

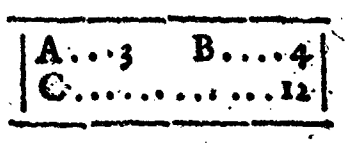


THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

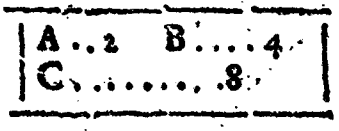
Soit vn nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, fasse C: Ie dis qu'iceluy produict C est pair.

Car d'autant que C est produict de A en B; iceluy produict C sera composé d'autant de nombres esgaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Mais B est pair; & partant C sera composé d'autant de nombres pairs esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A: & par la 21. p. 9. C sera pair. Parquoy si vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

On demonstrera en la mesme maniere, que si vn nombre pair multiplie vn nombre pair, le produit sera aussi pair. Car derechef C sera composé d'autant de nombres pairs esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A, &c.



COROLLAIRE.

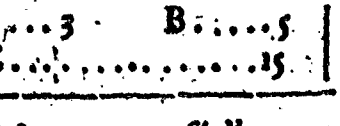
De ce que dessus, il s'ensuit qu'vn nombre pair multiplié par soy-mesme produira vn nombre pair; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B esgaux.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair; le produit sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, fasse C: Ie dis qu'iceluy produit C est impair.

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A: Et partant puis que tant A que B est nombre impair, leurdit produit C sera composé d'autant de



nombres impairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez au nombre impair A: parquoy la multitude d'iceux ſera impair, & par la 23. p. 9. ledit produict C ſera nombre impair. Si donc vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte qu'vn nombre impair multiplié par ſoy-meſme produict vn nombre impair.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre en cet endroit (apres Campanus) les deux theoremes ſuiuans.

1. Vn nombre impair meſurant vn nombre pair, il le meſure par vn nombre pair.

A...3	C...2
B.....6	

Soit le nombre impair A, lequel meſure le nombre pair B par C. Ie dis que C eſt pair. Car s'il eſt impair; B produict de A impair multiplié par C impair, ſera impair, par la 29. p. 9. ce qui eſt abſurde: car il a eſté poſé pair. Donc C eſt pair.

2. Vn nombre impair meſurant vn nombre impair, il le meſure par vn nombre impair.

A...3	C.....5
B.....15	

Soit le nombre impair A, qui meſure le nombre impair B par C. Ie dis que C eſt impair. Car s'il eſt pair; B faict de A impair par C pair, ſera pair par la 28. p. 9. ce qui eſt contre l'hypotheſe; donc C eſt impair.

A ces deux theor. nous adiouſterons le ſuiuant.

Tout nombre qui meſure vn nombre impair, eſt auſſi impair.

A.....	15
B.....5	C...3

Soit le nombre impair A, lequel B meſure par C. Ie dis que B eſt impair. Car C eſtant multiplié par B produira A par la 9. com. ſent. & ſi B n'eſt impair, mais pair, le produict A ſera pair par la 28. p. 9. ce qui eſt abſurde, puis qu'il a eſté poſé impair. Donc B qui meſure A impair, n'eſt pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair meſure vn nombre pair, il meſurera auſſi ſa moitié.

Soit le nombre impair A, qui meſure le nombre pair B. Ie dis qu'il meſurera auſſi ſa moitié C.

Car puis que A meſure B, ſoit par le nombre D: iceluy D ſera pair, comme nous auons demonſtré au Schol. prec. theor. 1. & partant il ſe pourra diuiſer en deux egalement par la 6. def. du 7. E ſoit donc la moitié de D. Parquoy comme D ſera à ſa moitié E, ainſi B ſera à ſa moitié C: & en permutant, comme D ſera à B, ainſi E ſera à C. Mais A meſurant B par D, auſſi D meſurera B par A par la 8. com. ſent. & partant D ſera la partie de B denommée par A: donc auſſi

A...3	D...4	E..2
B.....		12
C.....		6

E ſera la partie de C denommée par le meſme A : & partant A meſurera C, par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair meſure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair eſt premier à quelque nombre, il ſera auſſi premier à ſon double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double ſoit C. Ie dis que A eſt auſſi premier à C. Car ſi A & C ne ſont premiers entre-eux, quelque nombre les meſurera, & ſoit D, lequel ſera impair, comme nous auons demonſtré au Scholie de la 29. p. 9. Et puis qu'il meſure le nombre pair C (car C eſt pair puis qu'il a moitié B) il meſurera auſſi ſa moitié B par la pr. prec. Mais il meſure auſſi A. Donc D meſure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc point de nombre qui meſure A & C ; & partant ils ſeront premiers entr'eux. Si donc vn nombre impair & premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A...3 B....4
C.....8 D--

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui ſuiuent le binaire en progreſſion double, ſont ſeulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raiſon double. Ie dis que B, C, D, E ſont tant ſeulement pairement pairs.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit priſe l'vnité, & puiſque depuis l'vnité, A, B, C, D, E, ſont continuellement prop. le plus petit meſurera le plus grand ſelon quelqu'vn de ceux qui ſont entre les proportionnaux par la 11. p. 9. leſquels eſtans tous pairs, il eſt euident par les def. du 7. que B, C, D, E, ſeront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient ſuiure en la meſme progreſſion. Mais d'autant que A prochain de l'vnité eſt nombre premier, à ſçauoir binaire, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne meſurera aucun de tous ceux qui ſont en la progreſſion, ſinon ceux de la meſme progreſſion, leſquels eſtans tous pairs, vn nombre pair meſurera chacun d'iceux par vn nombre pair ; & partant iceux nombres ſeront ſeulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui ſuiuent le binaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre eſt impair, iceluy nombre ſera ſeulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B eſt impair: Ie dis que A eſt ſeulement pairement impair.

Car puiſque B impair eſt moitié de A, il le meſurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A ſera pairement impair. Mais qu'il ſoit ſeulement pairement impair, on le prouuera ainſi. S'il eſtoit pairement pair, vn nombre pair, comme D, le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt fait de D en E: mais le meſme A eſt auſſi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produict de C par B, eſtant egal au produict de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E: Il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B impair: ce qui eſt impoſſible. Donc A n'eſt pairement pair: & partant il eſt ſeulement pairement impair. Parquoy ſi la moitié d'vn nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Le nombre pair A, ne ſoit de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ſoit pair: Ie dis que A eſt pairement pair, & pairement impair.

Qu'il ſoit pairement pair, il eſt euident. Car d'autant que ſa moitié eſt pair, le binaire, qui eſt pair, le meſurera par icelle moitié; & par la 9. def. 7. il ſera pairement pair.

Or il eſt auſſi pairement impair: car puis que iceluy nombre A n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diuiſe touſiours en deux egalement on viendra en fin à vn nombre impair auparauant que paruenir iuſques au binaire, lequel nombre impair meſurera A par vn nombre pair: Car ſi c'eſtoit par vn impair, attendu que par la 29. p. 9. vn nombre impair multipliant vn nombre impair produit vn nombre impair, A ſeroit impair: ce qui eſt abſurde, eſtant poſé pair. Veu donc qu'vn nombre impair meſure A par vn nombre pair, & qu'vn nombre pair le meſure auſſi par vn nombre pair; iceluy nombre A ſera pairement pair, & pairement impair. Parquoy ſi nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que l'on retranche du ſecond, & du dernier,

nier, vn nombre egal au premier; comme le reſte du ſecond ſera au premier, ainſi le reſte du dernier ſera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que du ſecond B l'on retranche F G egal au premier A: Et du dernier D l'on retranche K L auſſi egal à A: Ie dis que comme le reſte B F ſera à A, ainſi l'autre reſte D K ſera à tous les trois precedens A, B, C, enſemble.

A..... 8	
B....4	F.....8 G
C.....	18
D 9 H 6 I 4 K 8 L	

Car ſi de D L on retranche L I egal à B G, il eſt euident que K I ſera egal à B F, (eſtant K L egal à F G) & ſi on retranche L H egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, ſont continuellement proportionnaux, auſſi ſeront leurs egaux D L, H L, I L, K L: & en diuiſant, D H ſera à H L, comme H I à I L, ou I K à K L; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans D H, H I, I K, (c'eſt à dire D K) ſeront à tous les conſequents H L, I L, K L, (c'eſt à dire A, B, C,) comme l'vn des antecedans I K, eſt à l'vn des conſequens K L, ou leurs egaux B F à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, iuſques à ce que le tout compoſé ſoit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raiſon double, la ſomme deſquels & de l'vnité ſoit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D faſſe F G: Ie dis que le produict F G eſt nombre parfaict.

Vnité.	
A..2	
B....4	
C.....8	
D.....	16
E31	
H31	M31 I
K124	
L248	
F31	N465 G
O..	P..

Car ayant pris H I double de E; K double de H I; & L double de K, & ainſi de ſuitte tant qu'il y aura de nombres propoſez: iceux nombres E, H I, K, L, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A, B, C, D; & partant en raiſon egale, A ſera à D comme E à L; & par la 19. p. 7. le produict de A multiplié par L, ſera egal au produict de D par E, ſçauoir F G: mais A eſtant binaire, F G ſera double de L: ainſi E, H I, K, L, F G, ſeront continuellement proportionnaux en raiſon double. Maintenant de H I ſecond ſoit retranché H M egal à E premier; &

de F G dernier, ſoit retranché F N, auſſi egal à E premier: par la prec. prop. comme M I eſt egal à E, (d'autant que HI eſtoit double de E) ainſi N G ſera egal à E, HI, K L enſemble. Mais FN egal à E, eſt auſſi egal à l'vnité & à A, B, C, D enſemble. Et par conſequent FG ſera egal à l'vnité & à A, B, C, D, E, HI K, L, enſemble: & puis que F G a eſté faict de E multiplié par D, par la 7. com. ſent. D meſurera FG; & partant par la 11. com. ſent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9, meſurent D, meſureront le meſme F G. Derechef puis que L meſure F G; auſſi par la 11. com. ſent. les nombres E, HI, K, leſquels par la 11. prop. 9. meſurent L à cauſe de la raiſon double: meſureront le meſme F G: ainſi l'vnité & tous les nombres, A, B, C, D, E, HI, K, L meſurent iceluy F G, lequel ne peut eſtre meſuré par aucun autre nombre que ceux cy, comme nous monſtrerons incontinent: & partant par la 22. def. du 7. il ſera nombre parfaict, eſtant egal à toutes ſes parties aliquotes.

Que ſi on penſe que F G puiſſe eſtre meſuré par quelque autre nombre que les ſuſdits; que O le meſure, s'il eſt poſſible, ſelon P: donc O multipliant P produira F G par la 9. com. ſent. Mais le meſme F G eſt auſſi produict de E en D. Donc vn meſme nombre eſt faict de E premier par D 4e, & de P ſecond en O 5e; & partant comme E à P, ainſi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, ſont continuellement proportionnaux depuis l'vnité, & que A proche de l'vnité eſt premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C meſurera le dernier D: & O eſt poſé n'eſtre le meſme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne meſurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainſi eſtoit E à P: Donc auſſi E ne meſurera P: & puis que E eſt premier par la 31. p. 7. E & P ſeront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raiſon par la 23. p. 7: & par la 21. p. 7. E meſurera O, comme P meſurera D. Mais nul autre que A, B, C meſure iceluy D. Donc P ſera le meſme que l'vn d'iceux A, B, C. Soit donc le meſme que B: & d'autant que B, C, D, & E, HI, K, ſont continuellement proportionnaux en raiſon double, par raiſon egale comme B ſera à D, ainſi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produict de B par K, ſera egal au produict de D en E. Mais le produict de D en E eſt egal à celuy de P en O. Donc vn meſme nombre ſera faict de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P ſera à B, ainſi K à O. Mais P eſtoit le meſme que B: Donc auſſi K ſera le meſme que O: Ce qui eſt abſurde, car O a eſté poſé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui meſurent F G, & lequel ils compoſent. Iceluy eſt donc nombre parfaict. Parquoy ſi depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il appert de ce theor. que pour trouuer des nombres parfaicts, & leurs parties aliquottes, il faut poſer d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'vnité, puis adiouſter tous ces nombres la enſemble, & ſi la ſomme d'iceux eſt nombre premier, icelle eſtant multipliée par le dernier nombre, le produict ſera nombre parfaict. Mais ſi la ſuſdicte ſomme n'eſt nombre premier, il faudra pourſuiure la poſ-

tion des nombres doubles iuſques a ce que ladicte ſomme de tous les nombres poſez vienne a eſtre nombre premier, laquelle eſtant, comme dict eſt cy-deſſus, multipliee par le dernier des nombres doubles ſera procreé vn nombre parfaict. Et ſi on prend autant de nombres continuellement doubles du ſuſdict nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura poſé depuis l'vnité, (icelle excluſe) tous ces nombres auec ladicte vnité, ſeront les parties aliquottes que peut auoir le nombre parfaict trouué. Ce qui eſt euident par la demonſtration de cette prop. & neantmoins nous ioindrons encore icy quelques exemples. Ayant poſé 1 & 2, leur ſomme 3 eſt nombre premier, lequel eſtant multiplié par 2, produict 6, nombre parfaict, duquel les parties aliquottes ſont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, ſont enſemble 7, nombre premier: parquoy iceluy eſtant multiplié par le dernier nombre 4, le produict 28 eſt nombre parfaict, & les parties aliquottes d'iceluy ſont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la ſomme de ces nombres 1, 2, 4, 8, ſçauoir 15, n'eſt pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la ſomme 31, eſt vn nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produict le nombre parfaict 496, duquel les parties aliquottes ſont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neufieſme Element.

ADVERTISSEMENT.

D'Autant que les doctes Commandin, Steuin, & Dibuadius, ont eſtimé que le 10. liure d'Euclide, ſeroit rendu beaucoup plus clair & intelligible, y ioignant les nombres, ie les ay adiouſtez aux endroits plus difficiles & obſcurs, me ſeruant quelquefois du trauail des ſuſdicts autheurs. Et de plus, voyant que chacun n'entend pas les operations des nombres radicaux & ſourds, leſquelles neantmoins ſont neceſſaires pour l'intelligence de ces applications de nombres, i'ay adiouſté icy vn ſommaire & abbregé de l'Algebre, auquel ſont enſeignés non ſeulement les Algorithmes, & autres operations de nombres radicaux & ſourds, mais auſſi toutes les autres reigles & operations Algebraiques. Si quelqu'vn en deſire voir les demonſtrations, il les trouuera au ſecond traicté de noſtre Collection Mathematique.

SOMMAIRE DE L'ALGEBRE.

Que c'eſt qu'Algebre, qui en eſt l'inuenteur, de quelles figures & caracteres on ſe ſert en icelle, & leur ſignification.

CHAPITRE I.

ALGEBRE eſt vne Arithmetique de nombres figurez: ou bien parlant plus intelligiblement, c'eſt vne ſcience par laquelle on peut rendre manifeſte & cogneuë en nombre vne quantité incogneuë.

Quant à l'inuenteur de cette ſcience, il eſt incertain: car les vns l'attribuent à Gebet Arabe; les autres à vn Mahomet fils de Moyſe Arabe: & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle ſcience, outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a pluſieurs autres figures & caracteres, dont on ſe ſert en ceſte ſcience, leſquels ſont figurez, & nommez diuerſement par les autheurs qui ont eſcrit d'icelle ſcience: mais entre ceſte diuerſité de caracteres, nous auons choiſi les ſuiuans, les iugeant plus propres & aiſez à repreſenter ce qu'ils ſignifient qu'aucuns autres.

N. ℞. *q*. *c*. *qq*. *ß*. *qc*. *bß*. *qqq*. *cc*. *qß*. *cß*. *qqc*. *dß*. *qbß*. &c.

Le premier caractere N, a l'appellation du nombre abſolu & ſimple: tellement que le nombre auquel ledit caractere ſera apposé, eſt abſolu & ſimple: comme 4 N, ne ſignifie autre choſe que 4 vnitez ſimples; toutesfois ce caractere N defaut le plus ſouuent aux nombres ſimples; c'eſt pourquoy les nombres auſquels eſt apposé ledit caractere N, ou bien auſquels il n'y a aucun ſigne, doiuent eſtre pris pour ſimples & abſolus.

Le ſecond caractere ℞, s'appelle racine; tellement que le nombre auquel eſt apposé ledit caractere, ſera denommé par racine, comme 7 ℞, ſignifient 7 racines.

Le troiſieſme caractere *q*, repreſente quarré; tellement que 5 *q*, ſignifient cinq quarrez.

Le quatrieſme caractere *c*, ſignifie cube; comme 7 *c*, ſignifient ſept cubes.

Le cinquieſme caractere *qq*, ſignifient quarré de quarré, comme 8 *qq*, s'appellent huict quarrez de quarré.

Le ſixieſme *ß*, denotte ſurſolide; tellement que 4 *ß*, ſignifient quatre ſurſolides.

Le ſeptieſme caractere *qc*, denotte quarré de cube, comme 7 *qc*, ſignifient ſept quarrez de cube.

Le huictieſme *bß*, s'appelle ſecond ſurſolide; tellement que 4 *bß*, ſignifient quatre ſecond ſurſolide.

Le neufieſme caractere *qqq*, denotte quarré quarré de quarré: comme 3 *qqq*, ſignifient trois quarrés de quarré de quarré.

Le dixieſme *cc*, ſignifie cube de cube; tellement que 8 *cc*, ſignifient huict cubes de cube. Et ainſi faut-il entendre des autres caracteres en l'ordre cy deſſus, tous leſquels ſont appellez ſignes ou caracteres coſſiques.

Il y a encore ce caractere $\sqrt{}$, par lequel ſont nottez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou ſourds, dont ſera parlé cy apres: comme auſſi de quelques autres ſignes ou caracteres.

Des nombres coſſiques, ou denommez.

CHAP. II.

LEs nombres vſitez en l'Algebre ſont de trois genres: Ceux du premier, ſont nommez nombres coſſiques, ou denommez: ceux du ſecond, ſont appellez nombres radicaux, ou irrationnaux: & les troiſieſmes ſont nommez nombres radicaux coſſiques. Quant aux nombres coſſiques, ou denommez, ce ſont tous nombres de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'vnité: pour l'intelligence deſquels doiuent eſtre diligemment conſiderées les deux progreſſions ſuiuantes, au milieu deſquelles ſont poſez les caracteres coſſiques cy-deſſus declarez.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
N.	$\mathcal{R}$.	*q*.	*c*.	*qq*.	*ß*.	*qc*.	*bß*.	*qqq*.	*cc*.	*qß*.	*cß*.	*qqc*.	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	&c.

Le premier ordre eſt la progreſſion naturelle des nombres commençant à 0, leſquels s'appellent expoſans, tant des ſignes coſſiques deſcrits au deſſous, que des termes de la progreſſion Geometrique commençant à l'vnité: tellement que le premier terme de ladite progreſſion naturelle, qui eſt 0, au-deſſous duquel eſt N & 1, eſt expoſant du nombre ſimple & abſolu: Le ſecond terme 1, au deſſous duquel eſt $\mathcal{R}$ & 2, monſtre le ſecond terme de la progreſſion Geometrique, eſtre la premiere denomination és nombres coſſiques, & s'appelle racine: Le tiers terme 2, expoſe que le tiers nombre de la progreſſion Geometr. eſt la ſeconde denomination, & s'appelle quarré: ainſi pareillement 6, demonſtre la ſixieſme denomination eſtre le nombre quarré de cube, & ainſi des autres.

Puis apres, les meſmes nombres expoſans de la progreſſion naturelle des nombres, enſeignent combien il y a de raiſons entre chacun nombre de la progr. Geometr. & l'vnité, comme 1, qui eſt au-deſſus de $\mathcal{R}$ & 2, ſignifie qu'entre 2, ou bien la racine de la progr. Geometr. & l'vnité, il y a la ſeule raiſon de 2 à 1: & 2, qui eſt au deſſus de *q* & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré & l'vnité, doiuent eſtre 2 raiſons, comme 4 à 2, & 2 à 1: de meſme 3, qui eſt au deſſus de *c* & 8, monſtre qu'entre le cube, ou 8 & l'vnité, ſont les trois raiſons 8 à 4, 4 à 2, & 2 à 1, & ainſi des autres.

D'auantage, chaſque deux nombres expoſans multipliez entr'eux, produiſent l'expoſant du caractere coſſique qui ſera compoſé des caracteres deſdits

deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 fait 6, exposant du caractere *qc*. qui est composé de *q* & de *c*. De mesme, 4 estant multiplié par 3 fait 12, exposant du caractere *qqc*, qui est composé de *qq*, & de *c*; & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera (s'il est nombre entier) l'exposant du caractere cossique qui restera, si du caractere du nombre exposant diuisé, est osté le caractere du nombre exposant par lequel est faicte la diuision: comme si 6, exposant du caractere *qc*, est diuisé par 2, exposant du caractere *q*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, qui restera, si du caractere *qc*, exposant de 6, est osté le caractere *q* de l'exposant 2. De mesme, si 12, nombre exposant du caractere *qqc*, est diuisé par 4, exposant du caractere *qq*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, lequel restera, si de *qqc*, est osté *qq*; & ainsi des autres.

Derechef, ceste figure 2, qui est posee sur 4 & *q* enseigne que le quarré, ou bien la 2e. denomination est produite de la multiplication de la racine deux fois posee: car si la racine 2 est posee deux fois, en ceste maniere 2, 2, & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procreé le quarré 4: en la mesme maniere ceste figure 3, qui est posee sur 8 & *c*, signifie que le cube, ou bien la 3e. denomination est produicte de la racine, trois fois posee & multipliee: Car si la racine 2 est posee trois fois, comme icy 2. 2. 2. & soit faict la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict d'iceux par 2, viendra le cube 8; & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que c'est qu'vn nombre second sursolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié; comme 128, est engendré de la multiplic. de ceste racine 2, posee sept fois en ceste maniere 2.2.2.2.2.2.2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié; comme 16 est procreé de la multiplication de la racine 2, quatre fois posee ainsi 2.2.2.2. & ainsi des autres. Mais touſiours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dit racine du nombre produict, comme 2 estant posé six fois en ceste maniere 2.2. 2. 2. 2. 2. & multiplié, faict ce nombre 64, qui est *qc*. partant 2 est dit racine quarree cubique de ce nombre 64; & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produicts les nombres de la progression Geometrique, posez par la multiplication de la racine, comme est cy-dessus dit, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes cossiques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sursolide 1024, est procreé de la racine dix fois posee en ceste maniere 2.2.2.2. 2.2.2.2.2.2. ainsi que monstre son exposant 10: toutesfois pource que son signe cossique *qß* est composé de ces deux signes cossiques *q* & *ß*, les exposans desquels sont 2 & 5, si la mesme racine 2 est deux fois posee en ceste maniere 2, 2, à cause de 2 exposant du signe *q*, & puis soit multipliee, afin que 4 soit produit, & ce produict cinq fois posé en ceste maniere 4.4.4.4.4. (à cause de 5, exposant du signe *ß*,) soit multiplié, sera procreé le mesme nombre 1024.

Par la meſme maniere, ſi la racine 2 eſt poſee cinq fois, à cauſe du ſigne ß, & pareillement multiphée, & le nombre 32 produict, ſoit poſé deux fois, à cauſe du ſigne q, ſera encore procreé le meſme nombre : Car la racine ainſi poſee 2,2,2,2,2, & puis multipliee faict 32 : mais ce nombre cy 32 poſé deux fois ainſi 32, 32, & multiplié procree 1024. Le meſme doit eſtre dit des autres dont, les ſignes coſſiques ſont compoſez de pluſieurs ſignes coſſiques.

Pareillement és ſuperieures progreſſions, eſt bien conſiderable que l'addition des nombres de la progreſſion Arithmetique reſpond à la multiplication des nombres de la progreſſion Geometrique, & la ſubſtraction à la diuiſion. Car pour exemple, ainſi que 2 & 5. (qui ſont expoſans de 4 & ß.) adiouſtez enſemble font 7, ainſi auſſi leurs correſpondans 4 & 32, eſtans multipliez entre eux produiſent 128, c'eſt à dire bß, l'expoſant duquel eſt 7. Item ainſi que 3 & 9. adiouſtez enſemble font 12, ainſi auſſi c & cc, c'eſt à ſçauoir 8 & 512, les expoſans deſquels ſont 3 & 9, multipliez entr'eux produiſent 4096, c'eſt à dire ggc, duquel l'expoſant eſt 12 : & ainſi des autres.

Derechef tout ainſi qu'en ſouſtrayant 5 de 7 reſte 2, ainſi en diuiſant bß, c'eſt à ſçauoir 128, duquel 7 eſt expoſant, par ß, c'eſt à dire par 32, duquel l'expoſant eſt 5, prouient 4, c'eſt à ſçauoir q, duquel l'expoſant eſt 2 : Semblablement, ainſi qu'en ſouſtrayant 3 de 12 reſtent 9, ainſi auſſi en diuiſant ggc, c'eſt à dire 4096, duquel l'expoſant eſt 12. par c ; c'eſt à dire par 8, duquel l'expoſant eſt 3, prouient c ; c'eſt à ſçauoir 512, duquel l'expoſant eſt 9, & ainſi des autres.

Or ce qui a eſté dit iuſques à preſent de la progreſſion Geometrique en raiſon double qui commence à l'vnité, le meſme doit eſtre entendu en quelqu'autre progreſſion Geometrique que ce ſoit, le commencement de laquelle eſt l'vnité.

Reſte à monſtrer par quelle raiſon tous les nombres propoſez de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'vnité, doiuent eſtre denommez, ou (ce qui eſt le meſme) quels ſignes coſſiques doiuent eſtre attribuez & inſcrits auſdits nombres : ce que nous monſtrerons facilement, ſi premierement nous denommons les nombres, deſquels les expoſans ſont nombres premiers ; de laquelle ſorte ſont les ſuiuans, auec leurs caracteres coſſiques.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. &c.
q. c. ß. bß. eß. dß. eß. fß. gß. hß. iß. kß. lß. mß. nß. oß. pß. &c.

Or les lettres de l'alphabet apoſees aux caracteres de ß ſont au lieu de chiffres, comme bß ſignifie 2ß ; eß, eß, dß, 4ß, &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confuſion.

Sçachant donc ainſi que deſſus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres coſſiques, deſquels les expoſans ne ſont nombres premiers, ains compoſez, en reſoluant l'expoſant du nombre compoſé, dont la denomination & caractere eſt deſiree en ſes parties aliquottes incompoſees, leſquelles eſtans multipliees par ordre entr'elles, conſtituent & produiſent iceluy : ce que vous ferez en ceſte maniere.

Diuiſez premierement le nombre compoſé donné par le moindre nombre premier, par lequel il ſe peut diuiſer, ſemblablement le quotient, ſ'il eſt nombre compoſé; & derechef ſoit diuiſé ce quotient par le moindre nombre, & ainſi conſequemment ſoit faicte continuellement la diuiſion, iuſques à ce que le quotient ſoit nombre premier, c'eſt à ſçauoir n'ayant aucune partie aliquotte; & tous les diuiſeurs, enſemble le dernier quotient, ſeront parties aliquottes incompoſees, leſquelles eſtans multipliees par ordres entr'elles produiront le nombre compoſé donné, & les caracteres de toutes leſdictes parties aliquottes ioincts enſemble, feront le caractere dudit nombre compoſé donné. Comme pour exemple, ſi vous voulez trouuer le charactere de ce nombre compoſé 24, vous diuiſerez iceluy par 2, qui eſt le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiſerez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiſerez encore derechef par 2, & viendra 3, au quotient, qui eſt nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incompoſees de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3, dont les caracteres ſont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre compoſé 24 ſera *qqqc.* Et c'eſt expoſant 30 (duquel les parties incompoſees ſont 2, 3, 5,) ſera ce ſigne *qcſs*, & ainſi des autres.

On ſera encore la meſme choſe, prenant deux quelconques nombres qui multipliés entr'eux, produiſent le nombre expoſant propoſé: Car les ſignes coſſiques d'iceux, compoſent le ſigne coſſique dudit nombre expoſant propoſé. Comme 3 & 4, deſquels les ſignes coſſiques ſont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produiſent 12, dont le ſigne coſſique ſera *qqc.*

Or le contraire de ce que deſſus, ſe fera rendant à chaſque caractere incompoſé ſon expoſant; puis multipliant iceux expoſans enſemble. Comme pour exemple, ſi nous voulons auoir l'expoſant de *qqc.* nous rendrons à chaſque caractere ſon expoſant particulier, c'eſt à ſçauoir, 2, 2, 3, leſquels multipliez enſemble font 12, qui ſera l'expoſant dudit ſigne coſſiques *qqc.* & ainſi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres coſſiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres coſſiques eſt facile, les choſes cy-deuant dictes eſtans bien entendues: Car quand ils ſont poſez ſeuls, comme 5 ℞, ou 8 *q.* ou 20 *c.* &c. ils s'expriment ainſi, 5 racines, ou 8 quarrez, ou 10 cubes, &c; mais quand ils ſont propoſez conioincts entr'eux par ce ſigne + au milieu, ou par celuy-cy —; comme 5 ℞ + 8 *q*; ou 8 *q* — 5 ℞; ou 20 *c* + 8 *q* — 5; leſquels deux ſignes + & — ont leur ſignification contraire: car ceſtuy-cy +, eſt dict ſigne d'adiouſter, & ſignifie plus; mais celuy-cy —, eſt appellé ſigne de ſouſtraire, & denote moins; & les nombres auſquels eſt interpoſé le ſigne +, ſont dits compoſez: mais ceux auſquels interuient le ſigne —, ſont nommez diminuez: & finablement ceux auſquels l'vn & l'autre ſigne eſt interpoſé, ſont appellez mixtes: iaçoit que tous pourroient eſtre dits compoſez.

Partant

Partant donc ce composé 5ℛ+8q. s'exprime 5 racines plus 8 quarrez; mais ce diminué 8q—5ℛ; 8 quarrez moins 5 racines: & ce mixte-cy 20c+8q—5. 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 vnitez; car comme il a esté dit, le nombre qui n'a point de caractere cossique apres soy, signifie vn nombre absolu composé d'vnitez.

Or ces signes + & — sont tousiours referez aux nombres qui les suiuent, & le nombre qui precede n'est à l'vn n'y à l'autre desdits signes. Or le sens des nombres composez, diminuez, ou mixtes est facile: car quand nous disons 5ℛ+8q, nous entendons 5 racines ensemble auec 8 quarrez, c'est à dire 42 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4: ainsi aussi quand nous disons 8q—5ℛ, nous entendons que de 8 quarrez, sont ostez 5 racines; c'est à dire que le nombre proposé est 22 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4; & le mesme faut il dire des autres.

De l'addition, & soustraction des nombres cossiques.

CHAP. IV.

QVand il faut adiouster vn nombre cossique à vn nombre cossique d'autre denomination ou caractere, l'addition se fait mettant ce signe + au milieu, & vient vn nombre composé: comme ces deux nombres 6ℛ & 8, adioustez ensemble font 6ℛ + 8: de mesme 6ℛ & 8c, font 6ℛ + 8c. &c.

Mais quand il faut adiouster vn nombre cossique à vn autre nombre cossique de mesme appellation ou caractere, les nombres se doiuent adiouster, & à la somme apposer le mesme caractere cossique: comme ces nombres 4q & 9q adioustez ensemble, font 13q, de mesme 5ℛ & 4ℛ, font 9ℛ, &c.

Par mesme raison, quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn nombre cossique d'autre denomination, la soustraction se fait mettant ce signe — au milieu, & fait vn nombre diminué: comme pour exemple, ce nombre 6ℛ osté de 8q, reste 8q—6ℛ; de mesme 12 de 6ℛ, restent 6ℛ—12. &c.

Mais quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn autre nombre cossique de mesme caractere, on doit soustraire le nombre du nombre, & au reste apposer le mesme caractere: comme 4ℛ de 9ℛ, restent 5ℛ: & 9c de 20c, restent 11c.

Mais quand il faut adiouster des nombres cossiques composez, diminuez, & mixtes, ou oster l'vn de l'autre, il les faut poser l'vn au dessous de l'autre, tellement que les nombres de mesme appellation se respondent entr'eux. Que si en l'vn ou l'autre d'iceux n'est trouué vn nombre respondant à quelqu'vn, au lieu de la figure sera posé o auec le signe +, & estans ainsi constituez, seront adioustez les nombres de mesme appellation, ou ostez l'vn de l'autre, & les sommes, ou nombres restez, souscrits en leurs propres lieux, auec les mesmes signes + ou —, qui seront trouuez és nombres adioustez, ou soustraits.

Exemples de l'addition.

℞.	N.
6	+ 8.
7	+ 10.
13	+ 18.

q.	℞.	N.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.
10	+ 17	— 13.

c.	N.	q.
7	+ 8	— 3
4	+ 11	— 5
11	+ 19	— 8

c.	q.	℞.	N.
4	+ 11.	+ 0	— 6.
3	+ 0	+ 8	— 4.
7	+ 11	+ 8	— 10.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4.
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0.
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4.

Exemples de la ſouſtraction.

c.	q.	℞.	N.
7	+ 11	+ 8	— 10.
3	+ 0	+ 8	— 4.
4	+ 11	+ 0	— 6.

c.	N.	q.
11	+ 19	— 8.
4	+ 11	— 5.
7	+ 8	— 3.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4.
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0.

q.	℞.	N.
10	+ 17	— 13.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.

Quand il reſte + 0, ou — 0, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple, où il reſte $4c+11q+0℞-6N$, ſera ſeulement $4c+11q-6$.

Que ſi en l'addition ou ſouſtraction, l'vn des nombres auoit le ſigne +, & l'autre —, il faudroit changer d'eſpece : c'eſt à dire qu'en l'addition, il faut ſouſtraire le moindre du plus grand, & au nombre reſtant donner le ſigne du plus grand nombre duquel a eſté faicte la ſouſtraction.

Exemples.

q.	℞.
5	+ 8.
2	— 10.
3	— 2.

qq.	ß.	qq.	c.	℞.	N.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.

Mais s'il falloit adiouſter ces deux nombres $12c+6q-8℞+7$, & $12℞-5c-3q-9$, il les faudroit poſer comme enſuit.

c.	q.	R.	N.
+12	+6	−8	+7.
−5	−3	+12	−9.
7	+3	+4	−2.

Mais en la ſouſtraction, il faut adiouſter les nombres enſemble, & donner à la ſomme le ſigne du nombre ſuperieur, duquel doit eſtre faite la ſouſtraction.

Exemples.

q.	R.
8	−2.
6	+8.
2	−10.

qc.	ſ.	qq.	c.	R.	N.
14	+5	−3	−11	−4	+8.
7	+0	+8	+0	+4	+8.
7	+5	−11	−11	−0	+0.

Que s'il aduenoit qu'aux deux nombres de la ſouſtraction fuſſent meſme ſigne, & que le nombre à ſouſtraire fuſt plus grand que celuy duquel il faut ſouſtraire, il faudroit oſter le moindre nombre du plus grand, & au reſte donner le ſigne contraire, comme il appert és exemples ſuiuans.

q.	R.
6	+8.
2	+10.
4	−2.

q.	R.	N.
9	+4	−5.
4	+7	−8.
5	−3	+3.

c	q.	N.
6	+5	+5.
7	−9	+10.
−1	+4	−7.

Et d'autant que le ſigne − n'eſt pas bien diſpoſé au premier nombre, le reſte du dernier exemple doit eſtre poſé ainſi $4q - 1c - 7$.

Or tous les preceptes de l'addition & ſouſtraction enſeignez cy deſſus, au regard des ſignes + & −, peuuent eſtre retenus en memoire par les deux reigles ſuiuantes.

1 *A meſmes ſignes on doit poſer le meſme ſigne, ſinon en la ſouſtraction, quand les nombres ſont poſez à rebours: car alors le ſuperieur eſt ſouſtraict de l'inferieur, & de + eſt fait −: mais de − eſt fait +.*

2 *Les ſignes diuers changent l'eſpece de l'operation: & en l'addition eſt poſé le ſigne du plus grand nombre: mais en la ſouſtraction eſt poſé le ſigne du nombre ſuperieur.*

Quant à la preuue de l'addition & ſouſtraction, elle ſe fait en deux manieres: Pour la premiere, l'addition preuue la ſouſtraction, & la ſouſtraction l'addition, tout ainſi qu'on fait és nombres abſolus.

Exemples de la preuue des trois dernieres additions & ſouſtractions.

$q.$	$\mathfrak{R}.$
8	— 2.
2	— 10.
6	+ 8.

$qc.$	$\beta.$	$qq.$	$c.$	$\mathfrak{R}.$	N.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.

$c.$	$q.$	$\mathfrak{R}.$	N.
7	+ 3	+ 4	— 2.
— 5	— 3	+ 12	— 9.
12	+ 6	— 8	+ 7.

Preuue de la ſouſtraction.

$c.$	$\mathfrak{R}.$
4	— 2.
2	+ 10.
6	+ 8.

$q.$	$\mathfrak{R}.$	N.
5	— 3	+ 3.
4	+ 7	— 8.
9	+ 4	— 5.

$c.$	$q.$	N.
— 1	+ 4	— 7.
+ 7	— 9	+ 10.
6	— 5	+ 3.

Pour faire autrement ladite preuue, il faut conſtruire vne table auec quelques progreſſions Geometriques, commençant à l'vnité, comme il appert cy-deſſous.

N	$\mathfrak{R}$	$q.$	$c.$	$qq.$	$\beta.$	$qc.$	$bß.$	$qqq.$	$cc.$
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

Par apres, il faut reſoudre les nombres coſſiques à adiouſter ſelon aucunes d'icelle progreſſions en nombres abſolus, puis les adiouſter enſemble, ou ſouſtraire l'vn de l'autre, ſelon les ſignes + ou —, & puis apres ſoient ſemblablement reſouls les nombres coſſiques de la ſomme recueillie; & ſi l'addition a eſté bien faite, leſdits nombres reſouls de la ſomme recueillie ſeront égaux aux nombres reſouls propoſez à adiouſter; comme pour exemple, nous auons trouué cy deuant que $6q+8\mathfrak{R}$ adiouſtez auec $2q-10\mathfrak{R}$ font $8q-2\mathfrak{R}$: pour en faire donc la preuue, nous reſoudrons en nombres abſolus les deux nombres à adiouſter, ſçauoir eſt $6q+8\mathfrak{R}$, & $2q-10\mathfrak{R}$; & prenant la reſolution en la progreſſion dont la racine eſt 2, $6q$ font 24, & $8\mathfrak{R}$ font 16, leſquels 24 & 16 ioincts enſemble, à cauſe du ſigne + font 40: de meſme $2q$ font 8, qui adiouſtez à 40 (car le ſigne + eſt touſiours entendu eſtre au nombre qui n'a nul ſigne appoſé) font 48, & $10\mathfrak{R}$ font 20, qui ſouſtraits de 48, à cauſe du ſigne —, reſte pour la ſomme de l'addition 28: & reſoluant $8q-2\mathfrak{R}$, qui eſt la ſomme recueillie de l'addition, viendront auſſi 28: & partant l'addition a eſté bien faite.

Quant à la preuue de la ſouſtraction, elle ſe faict en la meſme maniere : car les nombres coſſiques d'icelle eſtans reduits en nombres abſolus, & les nombres à ſouſtraire eſtans adiouſtez aux reſtans, doiuent eſtre eſgaux aux nombres dont la ſouſtraction a eſté faite : comme pour exemple, nous auons cy-deuant trouué que $7c-9q+10$ N, ſouſtraits de $6c-5q+3$ N, laiſſent $4q-1c-7$ N : donc $7c-9q+10$ N, reſouls en nombres abſolus ſelon la progreſſion dont la racine eſt 3, font 118; & $4q-1c-7$, font 2, qui adiouſtez à 118, font 120; & $6c-5q+3$ N font auſſi 120 : & partant la ſouſtraction a eſté bien faite.

De la multiplication & diuiſion des nombres coſſiques.

CHAP. V.

QVand vn nombre coſſique eſt multiplié, ou diuiſé par vn nombre abſolu, le produict a meſme denomination coſſique ; comme pour exemple 4 ℞. ou 8 q eſtans multipliez par 3, prouiennent 12 ℞, ou 24 q, &c. Item 12 q, ou 24 ℞ eſtans diuiſez par 4, viennent 3 q, ou 6 ℞.

Mais quand le nombre coſſique eſt multiplié, ou diuiſé par vn nombre coſſique, le produict eſt d'autre denomination, ſçauoir eſt de celle qui ſe faict des expoſans ioincts enſemble, quant à la multiplication : comme pour exemple 4 ℞ multipliez par 7 ℞ font 28 q, car l'vnité qui eſt expoſant de ce caractere coſſique ℞, eſtant adiouſtee à l'vnité, faict 2, expoſant de ce caractere q. Pareillement 4 ℞ multipliez par 5 q font 20 c ; car 1 eſt expoſant de ℞, & 2 de q, leſquels adiouſtez enſemble, ſont 3 expoſans de c. Et quant à la diuiſion, le quotient à la denomination du nombre reſtant, l'expoſant du diuiſeur eſtant oſté de l'expoſant du diuiſé : Comme pour exemple, 36 qc, diuiſé par 4 qq, le quotient eſt 9 q : car 4 expoſant de qq eſtant oſté de 6 expoſant de qc, reſte 2 expoſant de q; ainſi auſſi 18 qq eſtans diuiſez par 3 c, vient 6 ℞; & 8 q par 8 q, vient 1 N, &c.

Quand le nombre coſſique compoſé, ou diminué, eſt multiplié ou diuiſé par vn nombre abſolu ou coſſique, tant ſimple que compoſé ou diminué, outre ce qui eſt dit cy deſſus, il faut ſur tout auoir eſgard aux ſignes + & — : Car quand les nombres ſe multiplians ou diuiſans ont vn meſme ſigne, il faut apposer au produict le ſigne + : mais quand l'vn d'iceux eſt +, & l'autre —, il faut donner au produict le ſigne — : ce qui eſt aiſé à retenir en memoire par la regle ſuiuante.

Aux ſignes ſemblables faut poſer + ; mais aux diſſemblables faut poſer —.

Exemples de la multiplication.

$7q-4$ ℞.	$7q+4$ ℞	$7q-4$ ℞.
9.	9 N.	9 ℞.
$63q-36$ ℞.	$63q+36$ ℞.	$63c-36q$.

$$\begin{array}{r} 8q+9. \\ 8q+9. \\ \hline 72q+81. \\ 64qq+72q \\ \hline 64qq+144q+81. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q-9. \\ 8q-9. \\ \hline -72q+81. \\ 64qq-72q \\ \hline 64qq-144q+81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6q+8\mathcal{R}-6N. \\ 2q-4N. \\ \hline -24q-32\mathcal{R}+24N. \\ 12qq+16c-12q. \\ \hline 12qq+16c-36q-32\mathcal{R}+24N \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9q+8N-3\mathcal{R}. \\ 7c-4qq-8q. \\ \hline -72qq-64q+24c. \\ -36qc-32qq+12\beta. \\ 63\beta+56c-21qq. \\ \hline -36qc+75\beta-125qq+80c-64q. \end{array}$$

Et d'autant que comme il a desia esté dit, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit de ce dernier exemple, ainsi qu'il ensuit.
$75\beta-36qc-125qq+80c-64q.$

exemples de la diuision.

Diuiser $\chi\ \phi\ \mathcal{R} + \mathcal{Z}\ \mathcal{H}$ par $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}$ [$9\mathcal{R}+6.$

Item $\mathcal{H}\ \mathcal{H}c+\chi\ \phi q+\mathcal{Z}\ \eta\mathcal{R}$ par $\vartheta\mathcal{R}$ $\vartheta\mathcal{R}$ $\vartheta\mathcal{R}$ [$5q+4\mathcal{R}+3N.$

Item $\mathcal{H}5c+\chi\ \overset{4}{\phi}q-\mathcal{Z}\ \overset{3}{\eta}\mathcal{R}$ par $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ [$5\frac{5}{8}q+4\frac{1}{2}\mathcal{R}-3\frac{3}{8}N.$

diuiser encore $\chi\ \phi q-\mathcal{H}\phi-\mathcal{H}8\mathcal{R}+\mathcal{Z}\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}\mathcal{R}-\chi N.$ $\mathcal{H}\mathcal{R}-\chi N.$ [$6\mathcal{R}-8N.$

Item $\mathcal{Z}\mathcal{Z}qq+\mathcal{Z}\beta c-\chi\ \phi q-\chi\mathcal{Z}\mathcal{R}+\mathcal{Z}\mathcal{H}N$ par $\mathcal{Z}q+\phi\mathcal{R}-\mathcal{H}N$ $\mathcal{Z}q+\phi\mathcal{R}-\mathcal{H}N.$ $\mathcal{Z}q+\phi\mathcal{R}-\mathcal{H}N.$ [$6q+8\mathcal{R}-6N$

Diuiser encore $\mathcal{Z}\ o+oq+\phi\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ par $\mathcal{Z}\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ [$1q-1\mathcal{R}+1.$

Et conuient notter qu'en toutes diuiſions des nombres coſsiques, les denominations doiuent eſtre continuees d'ordre: & partant quand il y a quelque denomination de manque, il faut poſer o au lieu d'icelle, comme il appert és deux precedentes exemples; la derniere deſquelles i'ay faict en ceſte maniere Premierement i'ay poſé le diuiſeur 1 ℘ + 1 au deſſous du diuidande 1 c + 0 q, & trouue que 1 ℘ eſt en 1 c; 1 q que ie poſe au quotient, & multiplie ledit 1 q par mon diuiſeur, & vient; 1 c + 1 q, que i'oſte de 1 c + 0 q, & reſte de tout le nombre à diuiſer — 1 q + 0 ℘ + 1: puis apres i'aduance mon diuiſeur ſoubs — 1 q + 0 ℘, & trouue qu'il y eſt — 1 ℘, que ie poſe au quotient, & multiplie ladite 1 ℘ par ledit diuiſeur, & vient — 1 q — 1 ℘, que ie ſouſtraits de — 1 q + 0 ℘; & reſte de tout le nombre à diuiſer 1 ℘ + 1, ſous lequel ie poſe le diuiſeur, & trouue qu'il y eſt 1 N preciſément.

Or quand le diuiſeur eſt nombre compoſé ou diminué, & qu'il ne peut diuiſer preciſément, alors il faut ſeulement interpoſer vne ligne entre-deux, ainſi qu'és fractions, comme és deux exemples ſuiuans.

8 ß diuiſez par 2 q + 4 N. 8 q — 9 ℘ diuiſez par 4 ℘ + 3 N.

Les quotiens ſont

$$\frac{8ß}{2q+4N.} \qquad \frac{8q-9℘.}{4℘+3N.}$$

Il faut faire en la meſme maniere, quand vn nombre coſſique, ſimple ou compoſé doit eſtre diuiſé par vn nombre coſſique ſimple de plus grande denomination: comme 8 q diuiſez par 2 q conſtituent ceſte fraction $\frac{8q}{2q.}$ De meſme 9 q + 4 eſtans diuiſez par 3 c, font $\frac{9q+4}{3c.}$ &c.

Reſte à enſeigner à faire la preuue de la multiplication & diuiſion, laquelle ſe faict en deux manieres. Premierement la diuiſion preuue la multiplication; & la diuiſion ſe preuue par la multiplication, tout ainſi qu'en l'Arithmetique vulgaire.

L'autre ſorte de preuue ſe faict par la reſolution des nombres coſſiques, ſelon quelque racine des progreſſions Geomerriques contenuës au chapitre precedent. Car les nombres coſſiques reſous, eſtans multipliez entr'eux, doiuent produire vn meſme nombre que le produict des nombres coſſiques auſſi reſoult ſelon la meſme racine: & le nombre coſſique qu'il faut diuiſer reſoult, doit produire autant diuiſé par le diuiſeur reſoult, que le quotient auſſi reſoult. Comme pour exemple, nous auons trouué cy-deuant que 6 q + 8 ℘ — 6 N multipliez par 2 q — 4 N, produiſent 12 qq + 16 c — 36 q — 32 ℘ + 24 N. Pour donc en faire la preuue, nous reſoudrons les deux nombres coſſiques en nombres abſolus, & viendront (ſelon la progreſsion dont 2 eſt racine) 34, & 4, qui multipliez entr'eux produiſent 136: mais la reſolution du produict 12 qq + 16 c — 36 q — 32 ℘ + 24 N, eſt auſsi 136: & partant la multiplication a eſté bien faicte. Nous auons auſsi trouué que 1 c + 1, diuiſez par 1 ℘ + 1, Le quotient eſt 1 q — 1 ℘ + 1, lequel quotient donne, par la reſolution de la progreſsion, dont la racine eſt 2: mais les deux nombres coſsiques

reſolus par la meſme progreſsion, ſont 9 & 3; & 3 diuiſant 9, le quotient eſt auſsi 3: & partant la diuiſion a eſté bien faite.

Des fractions des nombres coſsiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions coſsiques, les operations ſont preſque ſemblables qu'és fractions vulgaires: il n'y a qu'à adiouſter ce qui concerne les caracteres coſsiques, & les ſignes + & —. Et premierement quant à la numeration, ceſte fraction $\frac{3}{8\mathcal{R}}$ ſignifie 3 vnitez eſtre diuiſees par $8\mathcal{R}$; & $\frac{7q}{9}$ denote 7 quarrez eſtre diuiſez par 9 vnitez: Item $\frac{999+8q}{6c}$ ſignifie que ce nombre $999+8q$, eſt diuiſé par $6c$, &c.

Quant à l'abbreuiation elle ſe faict en deux manieres: Car ou les nombres ſeront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, ſans toucher aux caracteres coſsiques; ou bien ſeront auſsi abbreuiez leſdits caracteres coſsiques: comme ceſte fraction $\frac{15}{5\mathcal{R}}$, quant aux nombres, elle ſera reduicte à ceſte-cy $\frac{3}{1\mathcal{R}}$: car la plus grande commune meſure des nombres d'icelle fraction eſt 5. Semblablement ceſte autre fraction $\frac{9q+16}{81}$ ſera reduite à ceſte-cy $\frac{1q+4}{9}$ pour ce que la plus grande commune meſure eſt 9: Item $\frac{35\mathcal{R}+28}{7q+14}$ ſera reduite à $\frac{5\mathcal{R}+4}{1q+2}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{\mathcal{R}+3q}$ ſera reduite à $\frac{6q-3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}+1q}$, &c.

Et quant à l'abbreuiation des caracteres coſsiques, elle eſt faite ſouſtrayant l'expoſant du moindre caractere, des expoſans des autres caracteres: car ſi aux nombres reſtans ſont appoſez les propres caracteres, l'abbreuiation ſera acheuee, quant aux caracteres. Comme ceſte fraction $\frac{8q}{2qc}$, quant aux caracteres, ſera reduitte en celle-cy $\frac{8}{2qq}$; car l'expoſant du moindre caractere q, eſt 2, qui oſté de 6, expoſant de l'autre caractere qc, reſte le nombre abſolu 8 au numerateur, & 4 pour l'expoſant du denominateur, qui partant ſera qq: puis apres quant aux nombres, elle ſera reduitte à ceſte-cy $\frac{4}{1qq}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{6\mathcal{R}+3q}$ quant aux nombres & caracteres, ſera reduitte à $\frac{6\mathcal{R}-3}{2+1\mathcal{R}}$, &c.

Quant à la reduction des fractions coſsiques à vn meſme denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux, tout ainſi qu'és fractions vulgaires: comme ces fractions $\frac{1\mathcal{R}}{4q}$ & $\frac{4c}{5qc}$ eſtans reduictes en meſme denomination, ſeront $\frac{1.5bb}{20.qqq}$ & $\frac{16b}{20qqq}$, &c.

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fraction à meſme denomination; il faudra ſuppoſer l'vnité eſtre denominateur du nombre entier, & pourſuiure ainſi que deſſus. Comme 6 & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$, ſeront poſez ainſi $\frac{6}{1}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$; puis eſtans reduictes comme deſſus, elles ſeront $\frac{42q}{7q}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$: Item $\frac{3q}{1}$ & $\frac{4c}{3q}$ ſeront reduittes à $\frac{15qq}{3q}$ & $\frac{4c}{3q}$, &c.

Mais ſi aux entiers eſt ioincte quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction; ce qui ſe fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction, & adiouſtant au produict le numerateur. Com-

meſi

me ſi nous voulons reduire $4q + \frac{2R}{1c}$ & $\frac{1q}{1f}$ à vne meſme denomination, nous multiplierons premierement $4q$ par $1c$, afin que nous ayons ces deux fractions $\frac{4fc + 2R}{1c}$ & $\frac{1q}{1f}$, leſquelles nous reduirons à ces deux-cy $\frac{4qfc + 2qc}{1qqq}$ & $\frac{3f}{1qqq}$; & ainſi des autres.

Quant aux autres quatre operations des fractions coſſiques, ſçauoir eſt, addition, ſouſtraction, multiplication & diuiſion, elles ne different à celles que nous auons enſeignees és fractions de noſtre Arithmetique, ſinon à raiſon des caracteres coſſiques, & des ſignes + & —. Parquoy nous mettrons ſeulement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Adiouſtant $\frac{3R}{5q}$ auec $\frac{7qc}{5q}$, viendront $\frac{3R + 7qc}{5q}$: car pource que les denominateurs ſont ſemblables, il n'y-a qu'à adiouſter les numerateurs entr'eux, & à la ſomme d'iceux ſouſcrire le meſme denominateur. Item ſi on adiouſte $\frac{3R}{2N}$ auec $\frac{4q}{3c}$ viendront pour leur ſomme $\frac{9qq + 8q}{6c}$, c'eſt à dire $\frac{9q + 8}{6R}$: Item $\frac{48}{7q}$ adiouſtez auec $\frac{48}{12R - 3q}$ font $\frac{192q + 576R}{84c - 21qq}$, qui eſtans reduicts tant au regard des nombres que des ſignes, font $\frac{64R + 192}{28q - 7c}$. Item $\frac{9R + 2q}{36c}$ adiouſtez auec $\frac{21qq - 8q}{36c}$ font $\frac{21qq - 6q + 9R}{36c}$, qui reduicts comme deſſus font $\frac{7c - 2q + 3}{12q}$: Item $\frac{5q - 3R}{7c - 2}$ adiouſtez auec $\frac{3c + 1}{2qq + 4R}$ font $\frac{31qc - 6fc + 11c - 12q - 2}{14fc + 24qq - 8R}$.

Exemples de la ſouſtraction.

Oſtant $\frac{3N}{2q}$ de $\frac{5c}{2q}$, reſteront $\frac{5c - 3}{2q}$: car d'autant que les denominateurs ſont ſemblables, il n'y-a qu'à ſouſtraire le numerateur 3 du numerateur $5c$, & au reſte $5c - 3$, appoſer le meſme denominateur: mais ſi on oſte $\frac{3R}{2N}$ de $\frac{9qq + 8q}{6c}$ reſteront $\frac{16q}{12c}$, c'eſt à dire $\frac{4N}{3R}$: Item $\frac{1}{2q}$ de $\frac{3R}{4N}$, reſteront $\frac{6c - 4}{8q}$: Item $\frac{2R - 3}{4N}$ de $\frac{4}{2R + 3}$, reſteront $\frac{25 - 4q}{8R + 12}$: Item $\frac{9q + 8R}{2c - 6N}$ de $\frac{12c + 16q + 8}{2c - 6N}$, reſteront $\frac{12c + 7q}{2c - 6N}$.

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4R}$ par $\frac{2}{2R}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$ par $\frac{1R}{4}$, vient $\frac{1R}{8q}$: Item $\frac{1R}{4q}$ par $\frac{1q}{2c}$, viendront $\frac{1c}{8f}$: Item $\frac{2R}{3}$ par $1R - 5$, viendront $\frac{2q - 10R}{3}$: Item $\frac{3R + 2}{4q - 1R}$ par $\frac{2R - 4}{1q + 3}$ viendront $\frac{6q - 8R - 8}{4qq - 1c + 12q - 3R}$: Item $\frac{7q + 8R}{5c - 12}$ par $\frac{4R}{5q} - 8N$, viendront $\frac{32q - 280qq - 29c}{25f - 55q}$.

Exemples de la diuiſion.

Diuiſant $\frac{3}{8q}$ par $\frac{1}{2R}$, viendront $\frac{6R}{8q}$, ou $\frac{3}{4R}$: Item $\frac{1R}{8q}$ par $\frac{1}{4R}$, viendront $\frac{4q}{8q}$, ou $\frac{1}{2}$: Item, $\frac{1c}{8f}$ par $\frac{3R}{4q}$, viendront $\frac{12f}{24c}$, ou $\frac{1}{2R}$: Item $\frac{2q - 10R}{3}$ par $\frac{2R}{3}$, viendront $1R - 5$: Item $\frac{6q - 8R - 8}{4qq - 1c + 12q - 3R}$ par $\frac{2R - 4}{1q + 3}$, viendront $\frac{3R + 2}{8q - 12}$.

Quant à la preuue de ces quatres operations, elle se fait en la mesme maniere que celle des entiers.

De la reigle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposée quelque question, soit posé pour le nombre incogneu 1℞, (*on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux, ou trois, ou dauantage pour la commodité de la question proposée*) *laquelle soit examinée selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduite, s'il en est besoin; puis apres, par le nombre du plus grand caractere cossique soit diuisé l'autre nombre de l'equation: Car ou le quotient sera le nombre qui estoit cherché, sçauoir est la valeur de la racine posée au commencement, ou bien quelque racine du quotient rendra cogneu le nombre cherché. Or le diuiseur demonstrera par son caractere cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.*

Or il appert que ceste reigle a quatre parties, dont la premiere est l'inuention d'vne Equation; la seconde, la reduction de l'Equation trouuee; la troisiesme, la diuision d'vn nombre de l'Equation par le nombre du plus grand caractere cossique; & la derniere, l'extraction de quelque racine du quotient de ladite diuision. Mais de ces quatres parties il y en a seulement deux du tout neceſſaires: sçauoir est la premiere & troisiesme: & quant aux deux autres, il n'en est pas touſiours besoin. Et auant que de traicter particulierement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouuer vn nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Ie pose le nombre incogneu estre 1℞; c'est à dire que ie pose 1 ℞ estre egale au nombre incogneu que nous cherchons. I'examine donc 1℞ selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sçauoir est $\frac{1}{3}$ ℞, & $\frac{1}{4}$ ℞, qui font ensemble $\frac{7}{12}$ ℞ que i'oste de 1℞, & restent $\frac{5}{12}$ ℞. Maintenant ie ratiocine ainsi: puisque 1℞ est posee esgale à tout le nombre incogneu; $\frac{1}{3}$ ℞ sera esgal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ ℞ esgal au quart du mesme; & puisque la tierce & quarte partie du nombre total estant souſtraicte, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, c'est à dire $\frac{7}{12}$ ℞ estans ostez de 1℞, le nombre restant $\frac{5}{12}$ ℞ estre egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ostees choses egales, les restes sont egaux. Est donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}$ ℞, & ce nombre 10: car equation n'est autre chose qu'vne egalité de valeur entre deux quantitez, ou choses diuersement denommees: & voila quant à la premiere partie de la regle cy-dessus. Et pour le regard de la seconde partie, qui est la reduction, il n'en est besoin en l'equation de nostre exemple: mais nous monſtrerons cy-apres, quand & comment l'equation se doit reduire. Et pour le regard de la diuision qui est la troisiesme partie de la reigle; en nostre equation trouuee entre $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 N, le plus grand caractere cossique est ℞ (c'est à dire que ℞ a plus grand exposant que N) parquoy ie diuise ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reste du caractere ℞, & vient au quotient 24, qui est le

nombre cherché. Parquoy la quatrieſme partie de la reigle d'Algebre n'a lieu en noſtre exemple : mais quand, & quelle racine du quotient manifeſtera le nombre incogneu, il ſera enſeigné cy-apres. Maintenant ſi du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, ſçauoir eſt 8 : puis $\frac{1}{4}$, ſçauoir eſt 6: icelles deux parties ſont enſemble 14, qui oſtez des 24, reſte le nombre 10, ainſi qu'il eſtoit requis en la propoſition.

De la reduction d'equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligence de la reduction des equations, eſt à noter, que ſi on adiouſte ou ſouſtraict choſes egales de chaſque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diuiſe par vn meſme nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Comme pour exemple, s'il y-a equation entre 12ℛ, & 72; oſtant 4ℛ de chaſque terme, reſtera encore equation entre 8ℛ, & 72—4ℛ: car puis que 12ℛ ſont egales à 72, 1ℛ ſera egale à 6, & partant 8ℛ ſeront egales à 48, & 4ℛ à 24, qui oſtez de 72, reſtera auſſi 48. Item ſi à chaſque terme de l'equation d'entre 8ℛ, & 72—4ℛ, on adiouſte 10, viendra equation entre 8ℛ + 10, & 82—4ℛ. Car il eſt manifeſte que chaſque terme vaut 58. Item s'il y-a equation entre 3ℛ + 12, & 72—7ℛ; multipliant chaſque terme par 2, viendra auſſi equation entre 6ℛ + 24, & 144—14ℛ: car l'vn & l'aure terme faict 60. Ainſi auſſi ſi nous diuiſons par 6 chaſque terme de ceſte derniere equation, ſera produict equation entre 1ℛ + 4, & 24 — $2\frac{2}{3}$ℛ: car l'vn & l'autre terme fait 10.

Maintenant quand en la ſolution de quelque queſtion on eſt paruenu à l'equation ; ſi le plus grand caractere coſſique, par le nombre duquel (ſelon la reigle d'Algebre) on doibt diuiſer l'autre terme de l'equation n'eſt poſé ſeul en l'vn & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'eſtant ſeul en l'vn il ne le ſoit en l'autre, alors la diuiſion ne ſe peut faire. Comme pour exemple, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ + 12, & 78—2ℛ, la diuiſion ne ſe peut faire, pource qu'en chaſque terme eſt trouué ce caractere ℛ, & ceſtuy-cy N : Semblablement ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ—12, & 42: tu vois que la diuiſion ne ſe peut auſſi faire par 9 nombre du plus grand caractere coſſique ℛ, pource que 9ℛ ne ſont pas poſees ſeules, ains 9ℛ—12.

Ainſi auſſi, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ, & 72—3ℛ: Item entre 19—3ℛ, & 108 : Item entre 19—4ℛ, & 8ℛ : Item entre 108 + 8ℛ, & 29—12ℛ + 60, &c. il eſt manifeſte qu'en toutes ces equations la diuiſion ne ſe peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenant ſemblables equations, elles doiuent eſtre reduittes en autres, eſquelles le plus grand caractere coſſique ſoit ſeul en vn terme de l'equation, & ne ſoit repeté en l'autre, & eſquelles auſſi aucun caractere coſſique ne ſoit poſé deux fois. Or ceſte reduction ſe fera ainſi qu'il enſuit.

Si vne particule de l'equation a le ſigne —, il la faut tranſpoſer, c'eſt à dire adiouſter à l'autre terme : comme ſi vne equation eſt trouuee entre 9ℛ

—12, & 42, nous adiousterons 12 à chaque terme, & nous aurons l'equation entre 9ℛ, & 54 : Item vne equatiou eſtant trouuee entre 9ℛ & 72—3ℛ ; adiouſtant 3ℛ à chaſque terme, nous aurons l'equation entre 12 ℛ, & 72 : Item vne equation eſtant trouuee entre 2 q—3 ℛ, & 104; adiouſtant 3 ℛ à chaſque terme, l'equation ſera entre 2 q, & 3 ℛ + 104 : Item vne equation eſtant entre 5 q—40, & 10ℛ ; adiouſtant 40, nous aurons vne equation entre 5q. & 10ℛ + 40. Mais quand vne particule a le ſigne +, il la faut ſouſtraire : comme ſi l'equation eſt trouuée entre 11ℛ + 12, & 78, nous ſouſtrairons + 12, & reſtera l'equation entre 11ℛ, & 66 : Item l'equation eſtant trouuee entre 3 ℛ + 6, & 24 ; oſtant + 6, reſtera l'equation entre 1ℛ, & 18 : Item ſi vne equation eſt trouuee entre 5q + 20, & 100, nous oſterons + 20, & reſtera l'equation entre 5q & 80 : Item vne equation eſtant entre 3q + 2ℛ, & 56 ; oſtant + 2ℛ, l'equation reſtera entre 3q, & 56—2ℛ. Que ſi l'vn & l'autre ſigne + & — ſont en vne equation, il faut adiouſter la particule du ſigne —, mais ſouſtraire celle du ſigne + : comme ſi vne equation eſt trouuee entre 9ℛ + 12, & 78—2 ℛ, nous adiouſterons premierement — 2ℛ, & l'equation ſera entre 11ℛ + 12, & 78 : puis ſouſtrayant d'icelle + 12, reſtera l'equation entre 11ℛ, & 66 : Item ſi vne equation eſt entre 5q—3ℛ, & 3q + 20, nous adiouſterons 3ℛ, & l'equation ſera entre 5q, & 3q + 3ℛ + 20 : & oſtant de ceſte cy 3q, reſtera l'equation entre 2q, & 3ℛ + 20 : Item ſi vne equation eſt trouuee entre 108 + 8ℛ, & 2q—12 ℛ + 60 : nous adiouſterons premierement 12ℛ, & l'equation viendra entre 108 + 20ℛ, & 2q—60 : & d'icelle eſtans oſtez 60, reſtera l'equation entre 2q, & 20 ℛ + 48. Que s'il aduient quelque equation, comme entre 6 ℛ—10, & 10 ℛ—34, en laquelle les nombres 10, & 34 ont meſme ſigne —, il faut oſter 10 de chaſque terme, & reſtera l'equation entre 6 ℛ, & 10 ℛ—24 : & d'autant qu'en icelle les nombres 6 ℛ & 10 ℛ ont auſſi vn meſme ſigne +, il faut oſter le moindre nombre 6 ℛ du plus grand 10 ℛ, & reſtera l'equation entre 0 ℛ, & 4 ℛ — 24 : & adiouſtant 24 à chaſque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24, & 4ℛ. Soit derechef equation entre 54 + 4ℛ, & 1q—6ℛ + 30 : Premierement pource que + 4ℛ, & —6ℛ ont ſignes diuers, il faut adiouſter 4 ℛ à 6 ℛ, & viendront —10ℛ, & ſera equation entre 54, & 1q—10ℛ + 30 : puis apres, d'autant que 54 & 30 ont vn meſme ſigne, il faut ſouſtraire 30 de 54, & reſtera equation entre 24, & 1q—10ℛ : Tiercement ie tranſpoſe —10ℛ, afin que l'equation ſoit entre 1q, & 10ℛ + 24 : & ainſi des autres.

Quant à la reduction des equations qui ſont trouuees en fractions, elle ſe faict la reduiſant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme ſi vne equation eſt trouuee entre $\frac{3ℛ+12}{5}$ & $\frac{20q-198ℛ}{3ℛ}$: multipliant ces fractions en croix, ſçauoir eſt le numerateur de la premiere par le denominateur de la ſeconde, mais le numerateur de la deuxieſme par le denominateur de la premiere, ſera faict equation entre 9q + 36 ℛ & 180q—990ℛ, c'eſt à dire entre 1ℛ + 4, & 20ℛ—110, qui eſtant reduite, comme dict eſt cy-deſſus, l'equation ſera entre 19 ℛ, & 114 : Item vne equation eſtant trouuee entre $\frac{4ℛ+18}{1ℛ}$, & $\frac{12ℛ-58}{2}$: eſtant reduite par la multiplication en croix, viendra equation entre 8 ℛ + 36, & 12q—58ℛ, qui reduite par tranſpoſition ſera entre 66ℛ + 36, & 12q.

Que si vne equation est trouuée entre vne fraction, & quelque autre chose: comme entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & vn escu, ou vn degré, ou vne heure, ou vne minute, &c. Il faut poser vne vnité pour ceste chose, ainsi $\frac{1}{1}$, afin que l'equation soit entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & $\frac{1}{1}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 5, & $4+1\mathcal{R}$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres cossiques irrationaux, & vn nombre absolu, nous l'enseignerons à la fin du chapitre 22.

S'il se rencontre aussi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abbreuier les caracteres cossiques: Comme pour exemple, l'equation d'entre $2q$, & $12\mathcal{R}$ sera reduite à l'equation d'entre $2\mathcal{R}$ & 12: Item l'equation d'entre $1qc$, & $1\beta+2qq$ sera reduite à l'equation d'entre $1q$, & $1\mathcal{R}+2$, &c. Mais ceste reduction n'est du tout neceſſaire deuant l'extraction des racines des nombres cossiques simples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diuision que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction estant faite, la regle d'Algebre dit que par le nombre du plus grand caractere cossique (laissant iceluy caractere) on diuise l'autre nombre de l'equation: comme si l'equation est trouuée entre $7\mathcal{R}$ & 42; diuisant 42 par 7, nombre du caractere cossique $\mathcal{R}$, viendra au quotient 6, qui sera la valeur d'vne racine: Item vne equation estant trouuée entre $12q$, & $66\mathcal{R}+36$: diuisant $66\mathcal{R}+36$ par 12, le quotient donnera $5\frac{1}{2}\mathcal{R}+3$, pour la valeur d'vn quarré: Item si vne equation est entre $\frac{3}{5}q$, & $6\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$, nous diuiserons $6\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{5}$, & le quotient donnera $18\mathcal{R}+40$, pour la valeur d'vn quarré: Item vne equation estant entre $3qc$, & $9c+120$, nous diuiserons $9c+120$ par 3, & le quotient donnera $3c+40$ pour la valeur d'vn quarré de cube, &c.

De l'extraction des racines dont est faict mention en la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant fait la reduction des caracteres cossiques, si le plus grand caractere cossique est $\mathcal{R}$, le quotient de la diuision mentionnée cy-dessus manifestera le nombre que vaut vne seule racine, comme il a esté dit au chapitre precedent: ou bien toutes & quantesfois qu'vn nombre cossique de grande denomination sera égal à vn nombre cossique de la prochaine moindre denomination; estant diuisé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'vne seule racine, encore que l'abreuiation des caracteres ne soit faite. Comme si $5s$ sont égaux à $30qq$; 30 estans diuisez par 5, le quotient 6 sera la valeur d'vne seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, estant seul d'vne part

de l'equation, eſt plus grand que racine, & de l'autre part ſoit vn nombre abſolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractere ſignifie: comme ſi le caractere eſt q, il faudra extraire la racine quarree; ſi c, la cubique; ſi qq, la quarree de quarree, &c. laquelle ſera la valleur d'vne ſeule racine. Comme pour exemple, Si vne equation eſt entre $5q$, & 720; ayant fait la diuiſion, il faudra cercher la racine quarree du quotient 144: Item ſi $10c$ ſont egaux à 270, il faudra ayant fait la diuiſion extraire la racine cubique du quotient 27: Semblablement ſi $8qq$ ſont egaux à 128, il faudra trouuer la racine quarree de quarré du quotient. Et afin qu'on ſçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres coſſiques non collateraux ſont egaux entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre n'eſt nombre abſolu, il faut abbreuier les caracteres, afin que l'equation ſe face entre N, & nombre coſſique; comme ſi vne equation eſt entre $10qc$ & $80q$, ſoit reduitte icelle à l'equation d'entre 10., & 80: la diuiſion eſtant donc faicte, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8, & ainſi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres abſolus eſt ſuffiſamment enſeignee en noſtre Practique d'Arithmetique; c'eſt pourquoy nous enſeignerons ſeulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres coſſiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'vn nombre coſſique ſimple ſoit priſe la racine d'iceluy nombre, delaiſſant le caractere, l'expoſant duquel ſoit diuiſé par l'expoſant du caractere qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'expoſant du caractere, par lequel ſera denommée la racine cherchee. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $144q$; ayant pris la racine quarree d'iceluy nombre 144, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'expoſant de ce caractere q, par l'expoſant du caractere q, ſçauoir eſt 2 par 2, & viendra 1, qui eſt expoſant du caractere ℞: 12 ℞ eſt donc racine quarree du nombre $144q$. Car ſi ce nombre 12 ℞ eſt multiplié en ſoy, ſera produict le nombre propoſé $144q$.

Derechef, qu'il faille trouuer la racine quarrée de $144qc$; ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'epoſant de ce caractere qc, ſçauoir eſt 6, par l'expoſant de racine quarree, qui eſt 2, & viendra 3, expoſant du caractere c: donc $12c$ eſt racine quarree du nombre $144qc$. Ainſi auſſi la racine cubique de ce nombre $64c$, ſera 4 ℞. Car la racine cubique du nombre 64 eſt 4, & l'expoſant du caractere cube, ſçauoir eſt 3, eſtant diuiſé par 3, produict l'vnité expoſant de ℞. Item la racine quarree de ce nombre $25qq$, ſera $5q$. Et la racine quarree de quarree de ce nombre $16qqq$, ſera $2q$. Semblablement la racine ſurſolide de ce nombre $32qß$, ſera $2qc$. Mais la racine quarree de quarree de ce nombre $81qq$, ſera 3℞, &c.

Que ſi vn nombre n'a la racine cherchee, ou que par la diuiſion des expoſans ne ſoit pas produict vn nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſiree. Comme par exemple, ce nombre $16c$, n'a pas de racine quarree ou cubique, car encore que le nombre 16 ait racine quarree, ſçauoir 4, ſi eſt-ce neantmoins qu'icelle racine ne ſe peut prendre à cauſe que diuiſant 3, expoſant du caractere c, par 2 expoſant de la racine quarree, prouient $1\frac{1}{2}$, qui ne correſpond à aucun caractere coſſique. Derechef, encore

que diuisant 3, exposant de ce caractere c, par 3, exposant de la racine cubique, prouienne 1, exposant de ce caractere ℛ, toutesfois icelle racine cubique ne se peut prendre, parce que le nombre 16 n'est nombre cube, &c.

Quant à l'extraction des racines de nombres cossiques composez & diminuez, il est à notter qu'on n'a point encore trouué (au moins que ie sçache) de maniere certaine & vniuerselle pour ce faire, sinon que les exposans des trois nombres cossiques de l'equation ayent vn mesme excez entr'eux, c'est à dire qu'ils soient en proportion Arithmetique; & telles sont les equations suiuantes.

9.	6ℛ+72.	les exposans sont 2. 1. 0.
1q.	72—6ℛ.	les exposans sont 2. 0. 1.
1q.	14ℛ—48.	les exposans sont 2. 1. 0.
1qq.	18q+648.	les exposans sont 4. 2. 0.
1qq.	725—4q.	les exposans sont 4. 0. 2.
1qq.	433q—41616.	les exposans sont 4. 2. 0.
1qc.	200c+3456.	les exposans sont 6. 3. 0.
1qc.	5120—16c.	les exposans sont 6. 0. 3.
1qc.	80cc—156751.	les exposans sont 6. 3. 0.
1qqq.	2000qq+18507688ℛ.	les exposans sont 8. 4. 0.
1qqq.	21465170l—209q.	les exposans sont 8. 0. 4.
1qqq.	2000qq—78461119.	les exposans sont 8. 4. 0.
1qß.	80ß+39609.	les exposans sont 10. 5. 0.
1qß.	7424—200ß.	les exposans sont 10. 0. 5.
1qß.	2000ß—999424.	les exposans sont 10. 5. 0.
&c.		

Quand les exposans gardant la progression Arithmetique sont tous plus grands que 0, il les faut abbreuier par la soustraction du moindre nombre exposant; comme les suiuantes équations.

1cß.	725bß—4cc	les exposans sont 11. 7. 9.
1cß.	200qqq+1456ß.	les exposans sont 11. 8. 5.
1qß.	200qc+143369.	les exposans sont 10. 6. 2.

Seront reduittes à celles-cy.

1qq.	725—4q	les exposans sont 4. 0. 2.
1qc.	200c+3456.	les exposans sont 6. 3. 0.
1qqq.	200qq+14336.	les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoistre quelle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree des nombres cossiques, dont les exposans sont 2, 1, 0, ou bien 2, 0, 1, vous ferez ainsi qu'il ensuit.

Premierement, prenez la moitié du nombre des racines, puis au quarré d'icelle moitié, adioustez-y le nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: & finalement à la racine quarrée de ce produict, adioustez la moitié du nombre des racines, si

elles ont le signe +, ou l'ostez si elles ont le signe —: & ce qui viendra donnera l'estimation & valeur d'vne seule racine quarrée.

Comme pour exemple, vne équation estant trouuée entre 1ℓ, & 72 — 6ℓ2; la diuision estant faite de 72 — 6ℓ2, par 1, comme veut la regle d'Algebre, vient le mesme nombre pour la valeur d'vn quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prends la moitié du nombre des racines, sçauoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, sçauoir est à 9, i'adiouste le nombre absolu 72, à cause du signe +, & viennent 81; dont ie prend la racine quarrée, qui est 9; & d'icelle i'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchée.

Soit derechef vne équation trouuée entre 1ℓ, & 6ℓ2 + 72: & il faut trouuer la racine quarrée de ce nombre 6ℓ2 + 72. Ie prends premierement la moitié du nombre des racines, sçauoir est 3: puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, i'adiouste 72, à cause du signe +, & sont 81, dont la racine quarrée est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitié du nombre des racines, & font 12, qui est la valeur d'vne racine.

Soit encore vne équation entre 1ℓ, & 18 ℓ2 — 72: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre 18ℓ2 — 72. Ie prends donc la moitié des racines, sçauoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié, qui est 81, ie soustrais 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarée est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +, & font 12 pour la valeur d'vne racine.

Mais il est à notter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'vne grande & l'autre petite; la grande est trouuée comme dit est cy dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarrée du reste de la soustraction est ostée de la moitié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarrée du reste 9, est ostée de 9, moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique 18ℓ2 — 72. Et faut noter que l'vne & l'autre racine n'est pas touſiours propre à la solution d'vn probleme, ains seulement l'vne ou l'autre: c'est pourquoy aduenant tels nombres, si l'examen fait par l'vne d'icelles racines ne respond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine quarrée de tels nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair; ou rompu, laquelle extraction se fait ainsi:

Au quarré du nombre des racines, adiouſtez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: puis à la racine quarrée de ce produict adiouſtez ou soustrayez le nombre des racines, selon qu'il sera notté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarrée, parquoy la moitié sera la valeur d'vne seule racine.

Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique 72 — 6ℓ2: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, i'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarrée est 18, de laquelle i'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12 pour la valeur de deux racines, & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nombres cossiques, qui constituent

ſtituent équation, ayans les expoſans conſtituez en telle progreſsion Arithmetique que ceux-cy, 4, 2, 0: ou 4, 0, 2: ou 6, 3, 0: ou 6, 0, 3: ou 8, 4, 0: ou 8, 0, 4: ou 10, 5, 0: ou 10, 0, 5, &c. eſquels le plus grand caractère eſt touſiours compoſé de *q*, & d'vn autre caractere coſsique: il faut premierement extraire la racine quarrée, à cauſe du caractere *q*, ſelon qu'il eſt enſeigné cy-deſſus, accommodant au nombre qui eſt affecté au caractere coſsique, en ceſte partie là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dit du nombre des racines, comme ſi l'équation eſtoit entre trois nombres coſsiques affectez aux caracteres *q*. ℞. & N. puis apres de cette racine quarrée trouuée, ſoit qu'elle ſoit rationelle ou irrationelle, il en faut tirer vne autre racine, ſelon l'autre partie du plus grand caractere coſsique, ce caractere *q* eſtant oſté. Comme pour exemple, ſi vne équation eſt trouuée entre 1*qq*, & 18*q*—648: Il faudra extraire la racine quarrée de ce nombre 18*q*—648, à cauſe de la premiere partie du ſigne coſsique *q*, tout ainſi que ſi l'equation eſtoit trouuée entre 1*q*, & 18℞—648, laquelle racine quarrée ſera 36: & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarrée qui ſera 6: parquoy 6 ſera la racine du nombre coſsique propoſé.

En la meſme maniere, ſi vne equation eſt entre 1*qc*, & 5120—16*c*: il faudra prendre la racine quarrée du nombre 5120—16*c*, & de ceſte-cy prendre la racine cubique. Ainſi auſſi, ſi l'équation eſt entre 1*qqq*, & 20000*qq*—7846119, il faudra premierement prendre la racine quarrée: & puis apres de ceſte-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainſi des autres.

Or afin de tant plus faciliter l'intelligence des regles & preceptes iuſques icy enſeignez, nous leur adioindrons les 12 queſtions ſuiuantes.

1. *Trouuer deux nombres, deſquels la difference ſoit donnée, & en raiſon donnée.*

Quil faille trouuer deux nombres dont la difference ſoit 20, & leur raiſon quintuple. Soit poſé le moindre nombre eſtre 1℞. Donc le plus grand ſera 5℞, ſçauoir eſt le quintuple d'iceluy: l'excez d'iceux eſt 4℞. Il y a donc équation entre 4℞ & 20: & diuiſant 20 par 4, viendra 5 pour 1℞. Parquoy le moindre nombre requis ſera 5, & le plus grand 25, qui eſt quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raiſon donnée, deſquels les quarrez enſemble faſſent vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en raiſon ſeſquitierce, deſquels les quarrez faſſent 4329. Soient poſez les nombres cherchez eſtre 9℞, 12℞, 16℞, qui ſont en proportion ſeſquitierce. Les quarrez d'iceux, ſçauoir 81*q*, 144*q*, 256*q*, font enſemble 481*q*, egaux à 4329. Diuiſant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1*q*, & par conſequent 1℞ ſera 3. Donc le premier nombre poſé 9℞, ſera 27: le ſecond 36, & le tiers 48, deſquels les quarrez 729, 1296, 2304 font enſemble 4329.

3. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, & qui multipliez entr'eux facent vn nombre ayant raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer deux nombres en raiſon ſeſquialtere, tels que leur produict ſoit dodecuple de la ſomme d'iceux. Soient poſez les deux nombres eſtre 2℞, & 3℞, qui eſt raiſon ſeſquialtere. Eſtans multipliez entr'eux ils

ſont 6q, & leur ſomme eſt 5ℛ. Afin donc que 6q ayent raiſon dodecuple à 5ℛ, l'equation ſera entre 6q & 60ℛ. Diuiſant donc 60 par 6, viendront 10 pour la valeur de 1ℛ, pource que les denominations coſſiques q. & ℛ. ſont collaterales. Veu donc que le premier nombre a eſté poſé 2ℛ, & le ſecond 3ℛ, celuy-là ſera 20, & ceſtuy cy 30: & iceux multipliez entr'eux font 600, qui eſt dodecuple de 50, ſomme d'iceux.

4. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, produiſe vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon ſeſquiquinte, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, faſſe le nombre 4860. Poſons que les nombres cherchez ſoient 5ℛ & 6ℛ, leſquels ſont en raiſon ſeſquiquinte. Or le moindre 5ℛ eſtant multiplié par le quarré du plus grand, ſçauoir eſt par 36q, faict 180c, qui partant ſont egaux au nombre donné 4860. Diuiſant donc 4860 par 180, viendront 27 pour 1c, & prenant la racine cubique dudict nombre 27, à cauſe du caractere c, icelle racine ſera 3. Parquoy le moindre nombre que nous auons poſé eſtre 5ℛ ſera 15: & le plus grand 6ℛ, ſera 18: Or le quarré d'iceluy, qui eſt 324, eſtant multiplié par le moindre nombre 15, produict le nombre quarré 4860.

5. *Eſtans donnez deux nombres inegaux, en trouuer deux autres en raiſon donnée, tels que le plus grand oſté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les reſtes ſoient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 & 60: & il en faut trouuer deux autres, en raiſon ſeptuple, & que le plus grand oſté de 100, & le moindre de 60, les reſtes ſoient egaux.

Soient poſez pour les nombres en raiſon ſeptuple 1ℛ & 7ℛ. Les nombres egaux reſtans ſeront 100—7ℛ, & 60—1ℛ. Adiouſtant donc 7ℛ à chacun, l'equation ſera entre 100, & 60+6ℛ: & oſtant 60 de chacun, elle ſera entre 40, & 6ℛ. Et diuiſant 40 par 6, viendra pour 1ℛ, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand ſeptupule de ceſtuy-cy ſera $46\frac{2}{3}$. Et oſtant celuy là de 60, & celuy-cy de 100, les nombres reſtans ſeront egaux, ſçauoir $53\frac{1}{3}$.

6. *Eſtant donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel eſtant adiouſté l'vn des donnez, & ſouſtraict l'autre, la ſomme ſoit au reſte en raiſon donnée.*

Les nombres donnez ſoient 100 & 20: & il faut premierement trouuer vn nombre auquel ſi on adiouſte 100, & du meſme on oſte 20, la ſomme ſoit triple du reſte. Soit poſé ce nombre là eſtre 1ℛ; la ſomme ſera 1ℛ+100, & le reſte 1ℛ—20. Afin donc que ceſte ſomme-là ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1ℛ+100, & 3ℛ—60. Et adiouſtant à chacun 60, elle ſera entre 1ℛ+160, & 3ℛ: & oſtant 1ℛ, icelle equation ſera entre 160 & 2ℛ. Diuiſant donc 160 par 2, ſera trouué 80 pour 1ℛ, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on adiouſte 100, on aura 180: mais ſi on en oſte 20, reſteront 60: & 180 eſt à 60 en raiſon triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel ſi on adiouſte 20, & du meſme on ſouſtraict 100, ceſte ſomme-là ſoit triple de ce reſte-cy. Soit poſé ce nombre-là eſtre 1ℛ, & ſera fait la ſomme 1ℛ+20, & reſtera 1ℛ—100. Afin donc que ceſte ſomme ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1ℛ+20,

& 3ℛ—300. Et adiouſtant 300 à chacun, elle ſera entre 1ℛ+320. & 3ℛ: & oſtant 1ℛ de chacun, l'equation ſera entre 320, & 2ℛ. Diuiſant donc 320 par 2 viendra 60 pour 1ℛ, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on adiouſte 20, on aura 180, & ſi on en oſte 100, reſteront 60: & iceux deux nombres 180 &, 60 ſont entr'eux en raiſon triple.

7. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, & que le quarré du plus grand ſoit au moindre auſſi en raiſon donnée.*

Que les nombres cherchez ayent raiſon triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raiſon ſextuple. Soit poſé le moindre 1ℛ, & le plus grand 3ℛ. Le quarré du plus grand, ſçauoir 9q, doit auoir raiſon ſextuple au moindre 1ℛ: Donc l'equation ſera entre 9q, & 6ℛ. Et diuiſant 6 par 9, viendra $\frac{2}{3}$ pour 1ℛ. pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Les nombres cherchez ſont donc $\frac{2}{3}$ & 2, ayans raiſon triple, & le quarré du plus grand, ſçauoir 4, eſt en raiſon ſextuple au moindre, ſçauoir à $\frac{2}{3}$.

8. *Eſtant donné vn nombre compoſé de deux quarrez, le diuiſer en deux autres quarrez.*

Soit le nombre donné 34, compoſé des deux quarrez 9 & 25, qu'il faut diuiſer en deux autres quarrez. Les coſtez des quarrez donnez ſont 3 & 5: ſoit poſé le coſté du premier quarré cherché eſtre 1ℛ+3, ſçauoir vne racine plus que le coſté du premier quarré donné: mais le coſté du ſecond quarré cherché, ſoit poſé quelconque nombre de racines moindre que le coſté du ſecond quarré donne, ſçauoir 2ℛ—5. Les quarrez d'iceux coſtez ſeront 1q+6ℛ+9, & 4q—20ℛ+25, qui adiouſtez enſemble, font 5q+34—14ℛ, egal au nombre donné 34: adiouſtant donc 14ℛ à chacun, l'equation ſera entre 5q+34, & 14ℛ+34. & oſtant 34 de chacun, reſtera l'equation entre 5q, & 14ℛ. Diuiſant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour 1ℛ, pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Donc le coſté du premier quarré, lequel nous auons poſé eſtre 1ℛ+3 ſera $\frac{29}{5}$: & le coſté du ſecond quarré, lequel a eſté poſé de 2ℛ—5, ſera $\frac{28}{5}$—5, c'eſt à dire $\frac{3}{5}$. Les quarrez d'iceux coſtez trouuez ſont $\frac{841}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui ſont enſemble $\frac{850}{25}$, c'eſt à dire 34 nombre donné.

9. *Eſtans donnez deux nombres, en trouuer vn autre, qui adiouſté à l'vn d'iceux, & la ſomme multipliée par iceluy trouué, produiſe le quarré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouuer vn autre, qui adiouſté au premier 10, faſſe vn nombre, qui multiplié par iceluy adiouſté, produiſe le quarré de l'autre nombre 12, ſçauoir 144. Soit poſé le nombre cherché 1ℛ, l'adiouſtant à 10, viendra 1ℛ+10, qui multiplié par 1ℛ, fait 1q+10ℛ, lequel doit eſtre egal à 144. Oſtant donc 10ℛ de chacun, l'equation ſera entre 1q, & 144—10ℛ, laquelle ſe reſoudra ainſi: La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel adiouſtant 144, vient 169, dont la racine quarrée eſt 13, de laquelle ſoit oſtée la ſuſdite moitié 5, à cauſe du ſigne —, & reſtera la valeur de 1ℛ, ſçauoir 8, nombre cherché. Car iceluy eſtant adiouſté à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produict eſt 144, quarré de l'autre nombre 12.

10. *Trouuer vn nombre, duquel le cube ioint auec vn nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy.*

Soit donné vn nombre 702; & il en faut trouuer vn autre, duquel le cube eſtant adiouſté à iceluy nombre dõné, faſſe le quarré de cube d'iceluy nombre trouué. Poſons que le nombre cherché ſoit 1ℛ; le cube d'iceluy ſera donc 1*c*, & le quarré de cube 1*qc*; qui partant ſera egal à 1*c*+702. Parquoy il faut prendre la racine cenſicubique de ce nombre compoſé 1*c*+702, en cette ſorte. La moitié du nombre affecté au caractere *c*, eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$, qui eſtant adiouſté au nombre 702, à cauſe du ſigne —, vient $702\frac{1}{4}$, dont la racine quarré eſt $\frac{53}{2}$, a laquel ſoit adiouſtée la ſuſdite moitié du nombre affecté au caractere *c*, & viendront $\frac{54}{2}$, ceſt à dire 27: qui ſera la racine quarrée dudit nombre 1*c*+702, priſe a cauſe du caractere *q*, qui eſt ioint au plus grand caractere coſſique *qc*. Maintenant de cette racine quarré 27, ſoit priſe la cubique à cauſe de l'autre caractere *c*, & icelle ſera 3: qui eſt le nombre requis: Car le cube d'iceluy, ſçauoir 27 eſtant adiouſté au nombre donné 702, fait 729, qui eſt le quarré de cube dudict nombre 3.

11 *Trouuer deux nombres tels que le nombre produict de la multiplication d'iceux, eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit eſgal à vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres, tels que leur produict eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit 30. Soit poſé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, ſçauoir eſt 20, & ſoit poſé le plus grand eſtre 20 + 1ℛ, afin que la difference d'iceux ſoit 1ℛ: de 20 en 20 + 1ℛ, ſera faict le nombre 400+20ℛ, lequel diuiſé par 1ℛ difference d'iceux, le quotient eſt $\frac{400+20ℛ}{1ℛ}$, eſgal au nombre propoſé 30. Ceſte equation ſera reduitte par la multiplication en croix, à l'egalité d'entre 30ℛ, & 400+20ℛ, oſtant donc 20ℛ de chacun, l'equation ſera entre 10ℛ & 400: & 400 eſtans diuiſez par 10, viendront 40 pour la valeur de 1ℛ, difference des nombres cherchez. Veu donc que le moindre eſt 20, le plus grand ſera 60, c'eſt à ſçauoir 20 + 1ℛ: Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diuiſez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient eſt 30.

12. *Diuiſer vn nombre donné en deux parties, telles que la plus grande, diuiſée par la moindre, & la moindre par la plus grande, la ſomme des quotiens ſoit donnée.*

Qu'il faille donc diuiſer le nombre 10, en deux telles parties que chacunes d'icelles diuiſée par l'autre, les deux quotiens faſſent enſemble $4\frac{1}{4}$. Poſons que l'vne des parties ſoit 1ℛ: donc l'autre ſera 10—1ℛ: ceſte-cy eſtant diuiſée par celle-là, le quotient ſera $\frac{10-1ℛ}{1ℛ}$; & celle-là diuiſée par ceſte-cy, le quotient eſt $\frac{1ℛ}{10-1ℛ}$. La ſomme de ces deux quotiens ſera donc $\frac{29+100-20ℛ}{10ℛ-1q}$ qui doit eſtre egale à $4\frac{1}{4}$: laquelle equation ſera reduitte par multiplication croiſée à cette autre 8*q*+400—80ℛ, & 170ℛ—17*q*; tellement qu'adiouſtant de part & d'autre 17*q*, & 80ℛ; l'equation viendra entre 25*q*+400, & 250ℛ; mais oſtant 400, l'equation demeurera entre 25*q*, & 250ℛ—400; & chaque nombre eſtant diuiſé par le nõbre 25 affecté au caractere *q*, l'egalité ſera entre 1*q* & 10ℛ—16; Parquoy la racine quarree en ſera priſe ainſi. La moitié du nombre des racines eſt 5, & le quarré 25, duquel oſtant le nombre 16, à cauſe du ſigne—, reſteront 9, dont la racine quarree eſt 3, à laquelle ſoit adiouſtee la ſuſdite

moitié des racines, ſçauoir 5, & viendront 8, pour la valleur de 1ℛ, qui eſt la plus grande partie cherchee, & partant l'autre ſera 2. Ce qui eſt euident; car chaque partie diuiſant l'autre, les deux quotients ſont 4 & $\frac{1}{4}$, qui ſont enſemble le nombre donné $4\frac{1}{4}$.

Or és 12 queſtions cy-deſſus expliquees les nombres ſont abſtraicts de la matiere, mais à la fin de ce traicté nous en joindrons quelques autres ou les nombres ſeront ioincts & appliquez aux choſes materielles.

Des ſecondes racines.

CHAPITRE XI.

D'Autant qu'en pluſieurs operations ſont cherchez deux, ou trois, ou dauantage de nombres ſoubs vne proportion incertaine, il eſt neceſſaire pour euiter confuſion, qu'ayant poſé 1ℛ pour le premier nombre, on ne poſe derechef 1ℛ pour le ſecond, & encore 1ℛ pour le 3e. C'eſt pourquoy on a excogité les ſecondes racines, leſquelles ſont nommees & figurees diuerſement par les Autheurs: mais ſuiuant Stifel, Pellerier & Clauius, nous retiendrons le nom de ſecondes racines, & les notterons ainſi: 1A, ſignifie 1ℛ ſeconde; 1B, denotte 1ℛ tierce; 1C, ſignifie 1ℛ quarte, &c. Et quand vn nombre a deux ſignes, il faut entendre que le nombre auec le premier ſigne a eſté multiplié par l'vnité du ſigne poſterieur: Comme 1ℛA, ſignifie 1ℛ multipliée par 1A; & 3ℛA, ſignifie 3ℛ multipliees par 1A: ainſi 1*q*A*q*, monſtre que 1*q* a eſté multiplié en 1A*q*, &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, auſſi bien que les premieres racines. Et premierement quant à l'addition, elle eſt aiſee: car ſi elles ſont de meſme genre, il faut ſeulement adiouſter les nombres entr'eux, & au produict appoſer le meſme caractere d'icelles racines. Comme 3A, & 4A, font enſemble 7A: Item 5B, & 3B, font 8B. Mais quand icelles racines ne ſont de meſme genre, l'addition ſe fait par le ſigne +: comme 3A, & 4B, font 3A + 4B: Item 3ℛ, & 4A, font 3ℛ + 4A.

La ſouſtraction eſt auſſi aiſée: Car quand les racines ſont de meſme genre il n'y a qu'à ſouſtraire vn nombre de l'autre, & appoſer au reſte le meſme caractere. Comme 3A oſtez de 5A, reſtent 2A: Item 2B oſtez de 5B, reſtent 3B. Mais quand icelles ſont de genres differens, la ſouſtraction ſe fait par le ſigne —: comme 3A oſtez de 4B, reſtent 4B — 3A.

Pour le regard de la multiplication, elle ſe fait ainſi: Si vn nombre de racine premiere, doit eſtre multiplié par vn nombre de racine ſeconde, ayant ſeulement la lettre A ou B, &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & appoſer au produict les meſmes ſignes. Comme 2ℛ multipliees par 2A, font 4ℛA, c'eſt à dire 4ℛ multipliees par 1A: Item 2A par 2ℛ, font 4Aℛ; c'eſt à dire 4A multipliez par 1ℛ: Item 3*q* multipliez par 4B, font 12*q*B; c'eſt à dire 12*q* multipliez par 1B.

Mais quand vn nombre abſolu eſt multiplié auec vn nombre de ſeconde racine, il faut appoſer au produict le ſigne de la ſeconde racine.

Comme 6 multipliant 4B, le produict eſt 24B; Item 5C multipliant 7, le produict eſt 35C.

Que ſi vn nombre de ſeconde racine doit eſtre multiplié par vn nombre de ſeconde racine de meſme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict appoſer la meſme lettre auec le caractere *q*. Comme 3A multipliez par 4A, feront 12A*q*.

Quand vn nombre de ſeconde racine eſt multiplié en ſoy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut appoſer au produict la meſme lettre auec le caractere *q*, ou *c*, &c. Comme 2A multipliez en ſoy quarrément, le produict eſt 4℣A*q*; mais cubiquement eſt produict 8A*c*: Item 2℣A par 2℣A, font 4*q*A*q*; c'eſt à dire 4*q* de premiere racine multipliez par 1*q* de ſeconde racine.

Mais quand vn nombre de ſeconde racine eſt multiplié en vn autre de la meſme racine ſeconde, qui a auſſi vn caractere coſſique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le ſigne coſſique ℣. Comme 1A multiplié par 1A*q*, le produict eſt 1A*c*: Item 3B par 4B*c*, font 12B*qq*.

Que ſi vn nombre coſſique ſimple ſans lettre de ſeconde racine doit eſtre multiplié auec vn nombre marqué de lettre & ſigne coſſique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict appoſer les meſmes ſignes. Comme 2*c* multipliez par 4A*q*, feront 8*c*A*q*; c'eſt à dire 8*c* multipliez en 1A*q*: Item 1*c* multiplié par 1℣A*q*, fait 1*qq*A*q*; c'eſt à dire 1*qq* multiplié par 1A*q*: Autant fait auſſi 1*q*A multiplié en ſoy: Car 1*q* multiplié en ſoy fait 1*qq*; & 1A en ſoy fait 1A*q*.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de ſeconde racine vn ſigne coſſique, eſt multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de ſeconde racine vn ſigne coſſique, le produict doibt auoir outre la lettre, ou les lettres de ſeconde racine, le caractere coſſique que donnent les expoſans des caracteres. Comme 2A*q*, en 5A*c*, produiſent 10A*ß*: Item 3A*q* multipliez par 4B*c*, feront 12AB*ß*.

Mais ſi vn nõbre ayant vn caractere coſſique apres la lettre de ſeconde racine, eſt multiplié par vn nombre, qui apres le caractere coſſique a auſſi la lettre de ſeconde racine, il faut appoſer au produict le dernier caractere coſſique, ſuiuy par la lettre de ſeconde racine, puis auſſi du caractere coſſique produict du premier caractere coſſique multiplié par la lettre de ſeconde racine, comme ſi elle auoit ce ſigne ℣. Comme 1A*c* multiplié par 1*q*A, fera 1*q*A*qq*, qui ſera auſſi produict de 1℣A*q* multipliee en ſoy: Item 3A*q* multipliez par 4*c*A, feront 12*c*A*c*, c'eſt à dire 12*c* multipliez par 1A*c*.

Quant à la diuiſion des ſecondes racines: ſoit fait premierement reduction des ſignes coſſiques par la ſouſtraction des ſignes ſemblables. Comme pour diuiſer 8*c*A*q* par 4A*q*: Ie ſouſtrais les ſignes ſemblables A*q*, & reſtent 8*c*, & 4: puis ie diuiſe 8*c* par 4, & viennent 2*c*, pour le quotient de 8*c*A*q* diuiſez par 4A*q*: ainſi 8*c*A*q* diuiſez par 4*c*, le quotient eſt 2A*q*.

Mais diuiſant vn nombre ℣ par vn nombre de ſecondes racines, le quotient ſera nombre rompu. Comme 2℣ diuiſees par 4A, le quotient eſt $\frac{1℣}{2A}$

Quant à l'extraction des secondes racines il faut tirer la racine du nombre, s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractere cossique. Comme la racine quarree du nombre 25 Aq, est 5A : Item la racine cubique du nombre 27 Ac, est 3A ; & la racine quarree du nombre 16 Dqq, est 2D.

Mais si le nombre n'a telle racine, ou que le caractere ne soit de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire : il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractere, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre 3Aq, est γc 3Aq. Item la racine quarree du nombre 4Ac, est γ 4Ac.

Quant à la preuue des operations de cet Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'és premieres racines ; sçauoir est, que l'addition & soustraction se prouueront l'vne l'autre : comme aussi la multiplication & diuision ; ou bien plus intelligiblement par les progressions Geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 356, prenant celle de la raison double pour les premieres racines : mais celles de la raison triple pour les secondes racines : tellement que 1℞ vale 2 : mais 1A, 3 ; 1q, 4 ; 1Aq, 9 ; 1Ac, 27 ; 1℞A, 6 ; 1℞Aq, 18, &c.

Or comme au chapitre precedent nous auons adiousté plusieurs questions pour faciliter par leur solution l'intelligence des regles & preceptes auparauant enseignés, aussi en adiousterons-nous icy quelques vnes appartenans aux secondes racines, afin de faire voir par leur solution le moyen de se seruir & mettre en pratique les choses enseignees en ce chapitre.

1. *Diuiser vn nombre donné en trois parties, telles que les deux moindres soient ensemble egales à l'autre, & les deux plus grandes quintuples de la moindre.*

Qu'il faille donc diuiser le nombre 24, en trois parties, telles que les deux moindres ensemble fassent la plus grande, mais les deux plus grandes soient ensemble quintuple de la moindre. Posons que la moindre partie soit 1℞, & la moyenne 1A : donc la plus grande sera 1℞ + 1A, & partant la somme de ces deux-cy sera 1℞ + 2A, qui doit estre quintuple de la moindre partie ; parquoy 1℞ + 2A seront egales à 5℞ : ostons de part & d'autre 1℞, & resteront 2A egales à 4℞, & consequemment 2℞ egales à 1A. Donc la moyenne partie sera double de la plus petite qui a esté posee 1℞ ; & la plus grande triple. Parquoy il n'y a qu'à couppet le nombre donné 24, selon cette proportion 1, 2, 3, quoy faisant la plus grande partie sera 12, la moyenne 8, & la plus petite 4.

2. *Il y a trois nombres, tels que les deux derniers adiousteż auec 100, le produict est double du premier nombre : mais le premier & dernier adiousteż auec le mesme nombre 100, sont triples du second : & le premier & deuxiesme aussi auec 100 sont quadruple du troisiesme : à sçauoir quels sont ces trois nombres-là ?*

Posons 1℞ pour le premier nombre, & 1A pour les deux autres ensemble. Or puis que les deux derniers auec 100 doiuent estre doubles du premier, il y aura equation entre 1℞ & 1A + 100 ; & ostant 100 de part & d'autre restera 1A egal à 2℞ — 100 : partant la somme du second & troisiesme nombre, qui

faiſoit 1A ſera 2R—100; & ſi on y adiouſte le premier nombre, ſçauoir 1R, la ſomme de tous les trois nombres ſera 3R—100. Maintenant poſons 1B pour le ſecond nombre: donc le premier & troiſieſme feront 3R—100—1B, puis que tous les trois faiſoient enſemble 3R—100. Et puis que la ſomme du premier & troiſieſme auec 100 fait le triple du ſecond, il y aura equation entre 3R—1B, & 3B: adiouſtons 1B de part & d'autre, & l'equation viendra entre 3R & 4B: donc auſſi entre $\frac{3}{4}$R, & 1B. Parquoy le ſecond nombre que nous auons poſé eſtre 1B, ſera $\frac{3}{4}$R. Finalement pour le troiſieſme nombre ſoit poſé 1C: Donc puis que tous les trois font enſemble 3R—100, la ſomme des deux premiers ſera 3R—100—1C, qui auec 100, doibt faire le quadruple du troiſieſme. Il y aura donc equation entre 4C, & 3R—1C: Adiouſtons 1C de part & d'autre, & viendront 3R egales à 5C; partant auſſi $\frac{3}{5}$R à 1C. Parquoy le troiſieſme nombre ſera $\frac{3}{5}$R. Et puis que le premier nombre eſt 1R, le ſecond $\frac{3}{4}$R, & le troiſieſme $\frac{3}{5}$R, la ſomme de tous les trois ſera $\frac{47}{20}$R: Mais nous auons trouué cy-deſſus qu'ils faiſoient auſſi 3R—100. Il y a donc equation entre 3R—100, & $\frac{47}{20}$R: Adioutant 100 de part & d'autre; nous aurons 3R egalés à $\frac{47}{20}$R+100: oſtons-en $\frac{47}{20}$R, & reſteront $\frac{13}{20}$R egales à 100. Diuiſant donc 100 par $\frac{13}{20}$, viendront $153\frac{11}{13}$, pour la valleur de 1R, qui eſt le premier nombre, mais le ſecond ſera $115\frac{5}{13}$, & le troiſieſme $92\frac{4}{13}$.

3. *Il y-a deux nombres, dont la ſomme des quarrez eſt* 208, *& multipliez entr'eux leur produict eſt les* $\frac{4}{9}$ *du plus grand quarré; à ſçauoir quels ſont ces deux nombres-là?*

Poſons que le plus grand nombre ſoit 1R, & le moindre 1A: leurs quarrez ſeront 1q, & 1Aq, qui doiuent faire enſemble 208; & partant 1q ſera 208—1Aq; & 1Aq ſera 208—1q. Mais les deux nombres 1R & 1A multipliez entr'eux font 1RA, qui eſt egal à $\frac{4}{9}$q, c'eſt à dire à $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré, qui eſt 1q. Si donc il y-a equation entre 1RA & $\frac{4}{9}$q, il y-aura auſſi equation entre les quarrez d'iceux nombres, c'eſt à ſçauoir entre 1qAq, & $\frac{16}{36}$qq, laquelle equation ſera reduite par multiplication en croix à 36qAq, & 16qq, & par depreſſion du ſigne q de la premiere racine, l'equation viendra entre 36Aq, & 16q: & par regle de trois ſi 16q, vallent 36Aq, 1q vaudra $\frac{36Aq}{16}$, (pource qu'il faut laiſſer le ſigne q des premier & troiſieſme termes de la regle.) Et d'autant que cy deſſus 1Aq eſtoit egal à 208—1q, il y aura aura auſſi equation entre 1Aq, & 208—$\frac{36Aq}{16}$, puis que 1q eſt egal à $\frac{36Aq}{16}$: Adiouſtons donc à chacun $\frac{36Aq}{16}$, & l'equation viendra entre 1Aq+$\frac{36Aq}{16}$ & 208. Or veu que 1Aq fait $\frac{25}{16}$Aq, ladite equation ſera entre $\frac{52Aq}{16}$ & 208. Parquoy diuiſant 208 par $\frac{52}{16}$, viendront 64, pour la valleur de 1Aq, la racine duquel nombre 64, qui eſt 8, ſera le moindre nombre cherché, lequel nous auõs poſé eſtre 1A; & pource que le quarré du plus grand eſtoit 208—1Aq, ſi de 208, on oſte la valeur de 1Aq, ſçauoir 64, reſteront 144, pour le quarré d'iceluy plus grand nombre, qui par conſequent ſera 12.

4. *Il y-a deux nombres, la ſomme deſquels eſtant oſtee de la ſomme de leurs quarrez, reſtent* 8, *mais adiouſtee au nombre produict de leur multiplication faict* 11. *A ſçauoir quels ſont ces deux nombres-là.*

Poſons que le moindre nombre ſoit 1R, & le plus grand 1A: mais pour la

ſomme

ſomme d'iceux nombres poſons 1B. Or puis que la ſomme des deux nombres cherchez eſtant oſtee de la ſomme de leurs quarrez, reſtent 8, iceux quarrez ſeront 8+1B. (Car ſi d'iceux on oſte 1B, reſteront 8.) Mais le quarré de 1℞, qui eſt le moindre nombre, eſt 1q: donc le quarré de 1A, qui eſt l'autre nombre ſera 8+1B—1q. Et d'autant que la ſomme deſdits nombres cherchez, c'eſt à ſçauoir 1B, eſtant adiouſtee au produict de leur multiplication fait 11; iceluy produict ſera 11—1B. Et pource que 1B eſt couppé en deux parties, ſçauoir 1℞ & 1A, le quarré de 1B, c'eſt à dire 1Bq, ſera egal aux deux quarrez de 1℞, & 1A, ſçauoir 8+1B, auec deux fois le produict d'iceux, ſçauoir 22—2B. Parquoy il y-aura equation entre 1Bq, & 30—1B. Or la racine de ce nombre 30—1B, ſe trouuera tout ainſi que de 30—1℞; car 1B tient icy lieu de ℞: & partant nous adiouſterons le quarré des racines, ſçauoir 1, au quadruple du nombre 30, ſçauoir 120, & viendront 121, dont la racine quarree eſt 11, de laquelle oſtons 1, à cauſe du ſigne—, & reſteront 10, dont la moitié 5, eſt la valleur de 1B, c'eſt à dire la ſomme des deux nombres cherchez: & partant la ſomme de leurs quarrez que nous auons trouué eſtre 8+1B ſera 13. Il faut donc maintenant diuiſer 5 en deux telles parties que la ſomme de leurs quarrez faſſe 13; ce que nous ferons ainſi qu'il enſuit.

Poſons que l'vn des nombres ſoit 1℞: donc l'autre ſera 5—1℞, & leurs quarrez ſeront 1q, & 1q+25—10℞, tellement que leur ſomme, qui eſt 2q+25—10℞ ſera egale à 13. Adiouſtons 10℞ de part & d'autre, & l'equation viendra entre 2q+25, & 13+10℞; oſtons en 25, & l'equation reſtera entre 2q, & 10℞—12, & conſequemment entre 1q, & 5℞—6. Parquoy de 25, quarré des racines, oſtons 24 quadruple du nombre 6, & reſtera 1, dont la racine quarree eſt 1, à laquelle ſoit adiouſté 5, nombre des racines, à cauſe de leur ſigne +, & viendront 6, dont la moitié 3 eſt la valleur de 1℞, qui eſt l'vn des nombres cherchez, & partant l'autre ſera 2.

Or i'eſtime que ces quatre queſtions auec celles que nous adiouſterons encore à la fin de ce liure ſuffiront pour l'intelligence des ſecondes racines; c'eſt pourquoy nous viendrons maintenant à traitter

Des nombres irrationnaux, ou ſourds.

CHAP. XII.

NOmbres irrationnaux ou ſourds, ſont les racines des nombres, leſquelles ne ſe peuuent exprimer par nombres; tellement que pour expliquer telles racines on ſe ſert de ces ſignes $\sqrt{}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{\sqrt{}}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{qc}$, &c. Comme la racine quarrée de 5, eſt dicte ſourde ou irationnelle, pource qu'on ne peut trouuer aucun nombre qui multiplié en ſoy produiſe 5: tellement que ceſte racine quarrée de 5, ſera marquée ainſi $\sqrt{}5$: ou ainſi $\sqrt{q}5$. Item la racine cubique de 7, ſera marquee ainſi $\sqrt{c}7$. Item la racine quarree de quarree de 12, ainſi $\sqrt{\sqrt{}}12$, ou ainſi $\sqrt{qq}12$; & ainſi des autres.

Eſt toutes-fois à noter que tout nombre qui a le ſigne $\sqrt{}$ n'eſt pas pourtant irrationel; car quelquesfois pour la commodité de l'operation, au lieu de

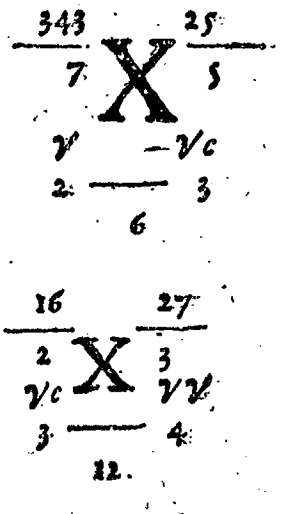
tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes : car les vnes sont simples : comme γq de quelque nombre non quarré : γc de quelque nombre non cube, &c. & ces racines simples sont aussi appelées par quelqu'vns nõbres mediaux. Les autres racines sourdes sont composées par l'interposition des signes + & —: & icelles sont appellees par aucuns multinomies radicales; & par d'autres, nombres irrationnaux composez, ou diminuez; composez, quand les nombres sont liez par le signe +, comme $\gamma 7 + \gamma 10$: mais diminuez, quand les nombres sont liez par le signe —, comme $\gamma 5 - \gamma 13$, ou $\gamma 10 - \gamma c 7$.

De la reduction des simples racines sourdes, à vne mesme denomination.

CHAP. XIII.

AFin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diuiser entr'elles, il est necessaire qu'elles soient reduites en vne mesme denomination, si elles sont diuerses, la quelle reduction se fait presque en la mesme maniere que la reduction des fractions de diuerses denominations à vne mesme: Car ayant posé les signes radicaux, chacun sous leur nombre, il faut multiplier vn chacun nombre en soy, selon le signe radical de l'autre: puis apres multiplier les exposans des signes entr'eux, afin d'auoir l'exposant du signe commun. Comme pour exemple, soient les deux racines $\gamma 7$, & $\gamma c 5$, qu'il faut reduire en racines de mesme espece. Ayant posé ces deux racines ainsi qu'il appert icy, ie multiplie 7 cubiquement à cause du signe c, & viennent 343. au lieu de 7; puis ie multiplie 5 quarrément à cause du signe γ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5: & finalement ie multiplie les exposans des signes γ & γc entr'eux : sçauoir est 2 par 3, & viennent 6, qui est exposant du caractere qc : tellement que $\gamma 7$, & $\gamma c 5$ seront reduites à $\gamma qc 343$, & $\gamma qc 25$. Ainsi aussi $\gamma c 2$, & $\gamma\gamma 3$ estans reduites à mesme espece ou denomination, seront $\gamma 16 qqc$, & $\gamma 27 qqc$, comme il appert en ceste figure.



Il y a quelques abbreuiations en ceste operation, comme quand il faut reduire vn nombre absolu, & vn radical en mesme espece: car alors il n'y a qu'à multiplier en soy quarrément ou cubiquement, &c. le nombre absolu, & au produict apposer le signe radical de la racine. Comme 6, & $\gamma 5$; estans reduits à mesme espece feront $\gamma 36$, & $\gamma 5$. Item 2 & $\gamma c 4$, feront $\gamma c 8$, & $\gamma c 4$.

Item voulant reduire ces deux racines $\gamma c 8$, & $\gamma\gamma 25$. Ie prends, de 8 la ra-

cine cubique 2 : puis apres la racine quarree de 25, qui eſt 5, à laquelle i'appoſe le ſigne radical reſtant γ, ainſi $\gamma 5$. I'ay donc maintenant pour les deux racines propoſees vn nombre abſolu 2, & vn nombre radical $\gamma 5$, qui reduits comme dit eſt cy-deſſus, ſont $\gamma 4$ & $\gamma 5$.

Item, voulant reduire ces deux racines $\gamma c 2$ & $\gamma qc 6$ en meſme eſpece, ie multiplie 2 en ſoy quarrément, à cauſe du ſigne q, qui eſt en l'autre racine, outre le ſigne c, & fait 4, auquel i'appoſe le ſigne q, & ſera faite la reduction à $\gamma qc 4$, & $\gamma qc 6$.

Item, voulant reduire $\gamma\gamma 19$, & $\gamma 3$ en meſme denomination, ie multiplie le nombre de la moindre denomination, ſçauoir eſt 3, en ſoy quarrément, à cauſe du ſigne γ, qui eſt en la plus grande denomination, outre γ, & viennent $\gamma\gamma 19$, & $\gamma\gamma 9$ pour la reduction en meſme eſpece des deux racines propoſees. Ainſi $\gamma qc 8$, & $\gamma 9$ ſeront reduites à $\gamma qc 8$, & $\gamma qc 729$, multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en ſoy cubiquement, à cauſe du caractere c, qui outre q, eſt en la plus grande denomination.

Or auparauant que venir à l'Algorithme d'icelles racines ſourdes, il eſt neceſſaire que nous enſeignions le probleme ſuiuant.

Cognoiſtre ſi deux racines ſourdes ſont commenſurables ou incommenſurables, & quelle raiſon elles ont entr'elles.

Soit diuiſé le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, (icelles eſtans reduites en meſme eſpece, ſi elles n'y ſont) & ſi au quotient vient vn nombre qui ayt la racine denotée par le ſigne radical d'icelles racines propoſées, elles ſeront commenſurables entr'elles, autrement non: & auront telle raiſon l'vne à l'autre, que le quotient à l'vnité: ou ſi le quotient eſt vne fraction, elles ſeront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\gamma 12$ & $\gamma 3$, ſont cõmenſurables entr'elles: Car 12 eſtans diuiſez par 3, le quotient eſt 4, dont la racine quarree eſt 2, & ſeront l'vne à l'autre comme 2 à 1. Item $\gamma 320$ & $\gamma c 135$ ſont commenſurables; car 320 eſtans diuiſez par 135, le quotient eſt $2\frac{10}{27}$, ou $\gamma c \frac{64}{27}$, c'eſt à dire $\frac{4}{3}$: & leur raiſon eſt comme 4 à 3. Item $\gamma qc 64$ & $\gamma c 27$ ſont commenſurables, & leur raiſon eſt comme 3 à 2: car icelles eſtans reduites en meſme eſpece, ſeront $\gamma qc 64$ & $\gamma qc 729$, & la diuiſion faite, le quotient ſera $\gamma qc 11\frac{15}{64}$, ou $\gamma qc \frac{209}{64}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$.

Mais $\gamma 5$ & $\gamma 30$ ſont incommenſurables: car 30 eſtans diuiſez par 5, le quotient eſt 6, qui eſt nombre irrationel, pource qu'il n'a pas de racine quarree; toutesfois ils ont meſme raiſon que $\gamma 6$ à 1. Item $\gamma c 32$ & $\gamma c 24$, ſeront auſſi incommenſurables: car diuiſant 32 par 24, le quotient ſera $1\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, qui n'a point de racine cube; & toutesfois ils ſeront entr'eux comme $\gamma c 4$ à $\gamma c 3$, ou comme $\gamma c \frac{4}{3}$ à 1.

De la multiplication & diuiſion des ſimples racines ſourdes.

CHAPITRE XIV.

COmbien que l'addition & ſouſtraction precedent ordinairement la multiplication & la diuiſion, ſi eſt-ce toutesfois qu'aux racines ſourdes, on

commence par la multiplication & diuiſion, à cauſe que l'addition & ſouſtraction ne ſe peuuent paracheuer ſans la multiplication. Quand donc deux racines de meſme genre doiuent eſtre multipliées, ou diuiſées entr'elles, il faut multiplier, ou diuiſer les nombres entr'eux, & appoſer au nombre produict le meſme ſigne radical. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{7}$ par $\sqrt{10}$, ie multiplie 7 par 10, & viennent 70, auſquels i'appoſe le ſigne radical, & ſont $\sqrt{70}$. Ainſi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produict $\sqrt{36}$, c'eſt à dire 6. Ainſi $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ par $\sqrt{8}$, le produict eſt $\sqrt{18}$. Ainſi $\sqrt{c3}$ par $\sqrt{c7}$, viennent $\sqrt{c21}$. Ainſi $\sqrt{\sqrt{4}}$, par $\sqrt{\sqrt{8}}$, viennent $\sqrt{\sqrt{32}}$. Mais pour diuiſer $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$, ie diuiſe 70 par 10, & viennent 7, auſquels i'appoſe le ſigne radical, & ſont $\sqrt{7}$. Ainſi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, le quotient ſera $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$, ou $1\frac{1}{2}$. Ainſi $\sqrt{c21}$ par $\sqrt{c3}$, le quotient ſera $\sqrt{c7}$.

Mais quand les deux racines propoſées ſont de differente eſpece, il les faut reduire à vne meſme, puis apres faire la multiplication, ou diuiſion comme deſſus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4, ie reduits le nombre abſolu 4, & ſont $\sqrt{16}$, puis ie les multiplie comme deſſus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainſi $\sqrt{5}$ multipliee par $\sqrt{c10}$, le produict ſera $\sqrt{qc12500}$. Ainſi auſſi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{11}}}$, produict $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{11}}}$, ou $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{c}}}$. Mais diuiſant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient ſera $\sqrt{3}$. Ainſi $\sqrt{qc12500}$, diuiſee par $\sqrt{c10}$, le quotient ſera $\sqrt{5}$.

Mais ſi quelque racine doit eſtre multipliee en ſoy quarrément, ou cubiquement, &c. ſelon le ſigne radical qui luy ſera appoſé, il faut ſeulemẽt prẽdre le meſme nombre pour le produict, delaiſſant le ſigne radical. Comme $\sqrt{3}$ eſtant multipliee quarrément, produira 3: & $\sqrt{c5}$ multipliee en ſoy cubiquement, ſera 5.

Et s'il falloit multiplier quelque racine en ſoy ſelon l'exigence d'vn autre ſigne radical, il faudroit multiplier le nombre en ſoy ſelon que le requerroit cet autre ſigne radical, & appoſer au produict le ſigne radical du nombre multiplié. Ainſi de $\sqrt{6}$ multipliee en ſoy cubiquement eſt faict $\sqrt{216}$; d'où aduient que la racine cubique de ce produit ſera $\sqrt{6}$. Item de $\sqrt{c8}$ multipliee en ſoy quarrément eſt faict $\sqrt{c64}$, c'eſt à dire 4; d'où aduient que la racine quarree de ce nombre $\sqrt{c64}$, eſt $\sqrt{c8}$, c'eſt à dire 2. Semblablement de $\sqrt{qc6}$ en ſoy quarrément eſt faict $\sqrt{qc36}$, c'eſt à dire $\sqrt{c6}$. &c.

De l'addition des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XV.

PRemierement ſi deux ou pluſieurs racines egales doiuent eſtre adiouſtees enſembles, il n'y a qu'à les multiplier par 2, ou par 3, ou par 4, &c. ſelon le nombre d'icelles racines à adiouſter: comme par exemple, voulant adiouſter $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$, ie double $\sqrt{6}$, & ſont $\sqrt{24}$, pour la ſomme d'icelles deux racines. Item $\sqrt{c6}$, $\sqrt{c6}$ & $\sqrt{c6}$, ſont enſemble $\sqrt{c162}$, car $\sqrt{c6}$, triplee, c'eſt à dire multipliee par 3, qui ſont $\sqrt{c27}$, faict ledit nombre $\sqrt{c162}$. Semblablement $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$, adiouſtées enſemble ſont $\sqrt{80}$, car le quarré de 4, eſt 16, qui multipliant 5, ſont 80. &c.

Mais quand deux racines inegales doiuent estre adiouſtees enſemble, icelles ſoient premierement reduittes à meſme eſpece, ſi elles n'y ſont; puis ſoit aduiſé, ſi elles ſont commenſurables ou incommenſurables: Que ſi leſdites racines ſont commenſurables, ayant diuiſé la plus grande par la moindre, ſoit adiouſtée vne vnité au quotient rationel, & la ſomme eſtant multipliée par la moindre racine, ſera donnee la ſomme de l'addition des deux racines propoſees. Comme pour exemple, ſoient propoſees adiouſter $\gamma 18$ & $\gamma 8$: diuiſant la plus grande par la moindre, le quotient eſt $\gamma 2\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$, & adiouſtant 1, c'eſt $\frac{5}{2}$, qui multipliez par $\gamma 8$, le produict eſt $\gamma 50$, pour la ſomme des deux racines propoſees. Ainſi $\gamma 12$ adiouſtee à $\gamma 3$, la ſomme eſt $\gamma 27$: Item $\gamma c320$, adiouſtee à $\gamma c135$, fait la ſomme $\gamma c1715$: Item $\gamma 4$ adiouſtee à $\gamma c8$, fait 4: Item $\gamma\frac{1}{2}$ adiouſtee à $\gamma\frac{1}{8}$, fait $\gamma\frac{49}{128}$.

Que ſi les racines propoſees ſont incommenſurables, il faut ſeulement interpoſer entre-deux le ſigne +; comme $\gamma 6$ adiouſtee à $\gamma 11$, fait $\gamma 6 + \gamma 11$.

Or il y a encore pluſieurs autres manieres d'adiouſter les racines commenſurables, deſquelles la ſuiuante me ſemble ayſée. Ayant trouué la raiſon des racines propoſees, ſoit poſé au premier terme d'vne reigle de trois, l'vn des nombres d'icelle raiſon; au ſecond terme, la ſomme d'iceux nombres de la raiſon; & au troiſieſme, la racine correſpondante au terme de la raiſon, poſé au premier terme; & faiſant la reigle comme il appartient, le quatrieſme nombre qui viendra ſera la ſomme des racines propoſees. Comme au premier exemple cy-deſſus, la raiſon des racines a eſté trouuee comme 3 à 2; poſant donc 3 ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au ſecond, & $\gamma 18$, ou $\gamma 8$ au troiſieſme, le quatrieſme ſera $\gamma 50$; & ſe fait la reigle de trois, ainſi qu'il appert cy-deſſous.

si 3 donnent 5, que donneront $\gamma 18$ *? ou bien ſi 2 donnent 5, combien* $\gamma 8$ *?*

$\gamma 9$. $\gamma 25$. 25 90 36 450 $\gamma 4$ $\gamma 25$ 8 200

$\mathcal{Z}\phi\phi[\gamma 50$.

$\mathcal{H}\mathcal{H}$

$\mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}\phi[\gamma 50$, *ſomme des racines* $\gamma 18$ *&* $\gamma 8$ *propoſees à adiouſter.*

$\mathcal{H}\mathcal{H}$.

De la ſouſtraction des ſimples racines ſourd.

CHAP. XVI.

SI les racines ſont incommenſurables, il n'y a qu'à interpoſer le ſigne —. Comme $\gamma 3$ oſtee de $\gamma 10$, reſtera $\gamma 10 - \gamma 3$. Item $\gamma c20$, oſtee de $\gamma c50$, reſtera $\gamma c50 - \gamma c20$.

Mais quand les racines ſont commenſurables, ayant diuiſé la plus grande par la moindre, ſoit oſté du quotient rationnel vne vnité; puis le reſte ſoit multiplié par la moindre racine, & le produict ſera le reſte deſiré. Comme pour exemple, qu'il faille ſouſtraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Ie diuiſe donc 50 par 8, le quotient eſt $6\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée eſt $\frac{1}{2}$, de laquelle i'oſte vn entier, & reſte $\frac{1}{2}$, que ie multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reſte deſiré. Item, qui de $\sqrt{27}$ oſte $\sqrt{3}$, reſte $\sqrt{12}$. Semblablement qui de $\sqrt{c1715}$ oſte $\sqrt{c320}$, reſte $\sqrt{c135}$. Ainſi auſſi qui de $\sqrt{\frac{49}{18}}$ oſte $\sqrt{\frac{1}{2}}$, reſte $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Ceſte operation ſe fait auſſi par la regle de trois, mettant au premier & troiſieſme terme les nombres ſpecifiez au chapitre precedent; mais au deuxieſme la difference des termes de la raiſon, comme il appert cy-deſſous.

ſi 5 donnent 3, combien donneront $\sqrt{50}$ *? ou ſi 2 donnent 3, combien donneront* $\sqrt{8}$?

$\sqrt{25}$. $\sqrt{9}$. 9 $\sqrt{4}$. $\sqrt{9}$. 9

450 72

4
20
450 [$\sqrt{18}$
288
2

3
72 [$\sqrt{18}$ reſte; $\sqrt{8}$ eſtant oſté de $\sqrt{50}$.
44

De l'addition des nombres irrationaux compoſez, & diminuez.

CHAP. XVII.

POur adiouſter nombres irrationnaux compoſez & diminuez, il les faut diſpoſer l'vn au deſſous de l'autre; puis adiouſter chaques racines ſimples, comme il a eſté dit en l'Algorithme precedent, obſeruant les reigles de + & —, que nous auons enſeignez au chapitre 4; c'eſt à ſçauoir *qu'aux ſignes ſemblables, il faut adiouſter ſans changer le ſigne; mais qu'aux diſſemblables, il faut ſouſtraire, & poſer le ſigne du plus grand nombre.*

Or d'autant qu'il ne ſe fait rien en ceſte operation, qui n'ait deſia eſté enſeigné cy-deuant, la choſe ſera aſſez manifeſte par exemples ſans dauantage de diſcours.

$6+\sqrt{18}$.	$\sqrt{27}+\sqrt{8}$.	$\sqrt{162}-2$.	$\sqrt{50}+3$.
$4+\sqrt{8}$.	$\sqrt{12}+\sqrt{2}$.	$\sqrt{200}-3$.	$\sqrt{32}-5$.
$10+\sqrt{50}$.	$\sqrt{75}+\sqrt{18}$.	$\sqrt{722}-5$.	$\sqrt{162}-2$.

$\sqrt{50}-3$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50}+6$.
$\sqrt{32}+5$.	$\sqrt{242}-12$.	$24-\sqrt{242}$.
$\sqrt{162}+2$.	$\sqrt{72}-4$.	$30+\sqrt{72}$.

$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}$.	$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}$.
$\sqrt{c64}-\sqrt{\sqrt{80}}$.	$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}$.
$10-\sqrt{\sqrt{3125}}$.	$7-\sqrt{1}$.

Et eſt à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre compoſé ſe rencontrans totalement egales aux deux particules d'vn nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'vn d'iceux nombres. Comme pour adiouſter $15+\sqrt{8}$ à $15-\sqrt{8}$: le double ſeulement 15 & font 30 pour la ſomme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adiouſtez à $\sqrt{20}-6$ font $\sqrt{80}$, & ce d'autant que les dernieres particules ſe deſtruiſent l'vne l'autre, à cauſe des ſignes + & —.

De la ſouſtraction des nombres irrationaux compoſez & diminuez.

CHAP. XVIII.

POur ſouſtraire tels nombres, il les faut diſpoſer l'vn au deſſus de l'autre puis ſouſtraire chaſques racines comme il a eſté dit au chap. 16. obſeruant les regles des ſignes + & — enſeignees au chap. 4. ſçauoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables, il faut ſouſtraire (ſi faire ſe peut) ſans changer le ſigne : mais ſi on ne peut ſouſtraire, il faudra oſter le ſuperieur de l'inferieur, & changer le ſigne. Mais aux ſignes diſſemblables, il faut adiouſter, & apposer le ſigne ſuperieur.*

Ceſte operation peut eſtre facilement entendue par les exemples ſuiuans, ſans autres preceptes.

$\sqrt{50}-5$	$\sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}$	$\sqrt{50}+2.$	$\sqrt{50}-2.$
$\sqrt{8}-2$	$\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}$	$\sqrt{18}+4.$	$\sqrt{18}-4.$
$\sqrt{18}-3$	$\sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}$	$\sqrt{8}-2.$	$\sqrt{8}+2.$

$\sqrt{162}+2.$	$\sqrt{162}-2.$	$\sqrt{72}-4.$	$30-\sqrt{72}.$	$\sqrt{0}+16.$
$\sqrt{50}-3.$	$\sqrt{50}+3.$	$8-\sqrt{50}.$	$\sqrt{50}+6.$	$\sqrt{320}-8.$
$\sqrt{32}+5.$	$\sqrt{512}-5.$	$\sqrt{242}-12.$	$24-\sqrt{242}$	$24-\sqrt{320}.$

$\sqrt{\sqrt{2401}}-\sqrt{cc}.$	$\sqrt{cc1000}+\sqrt{\sqrt{3125}}.$	$\sqrt{180}+0$
$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{cc27}.$	$\sqrt{cc216}-\sqrt{\sqrt{405}}.$	$\sqrt{320}-8$
$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{cc8}.$	$4+\sqrt{\sqrt{20480}}.$	$8-\sqrt{20}$

Et eſt à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre compoſé ſe rencontrans du tout egales à deux particules d'vn nombre diminué, il faut ſeulement doubler la derniere particule de l'vn des nombres. Comme pour ſouſtraire $\sqrt{12}-5$, de $\sqrt{12}+5$; ie double la derniere particule 5, & vient le nombre 10, pour reſte de la ſouſtraction. Ainſi $10-\sqrt{4}$, oſtez de $10+\sqrt{4}$, reſteront $\sqrt{16}$, c'eſt à dire 4: Item $\sqrt{12}-\sqrt{5}$ oſtee de $\sqrt{12}+\sqrt{5}$, reſtent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que + deſtruit +; mais + & — ſe doiuent adiouſter.

De la multiplication des nombres irrationaux compoſez & diminuez.

CHAP. XIX.

POur faire ceſte operation, & auſſi la ſuiuante, il faut retenir la regle de + & — enſeignee au chap. 5. ſçauoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables faut poſer +,*

mais aux dissemblables —. Ayant donc posé l'vn des deux nombres au dessous de l'autre, soit faicte la multiplication comme és nombres absolus, obseruant toutesfois ce que nous auons dit au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap 15. de l'addition & soustraction des mesmes racines. Ce qui sera enseigné és exemples descrits cy-dessous. Comme en l'exemple suiuant, —$\mathcal{V}45$ en —$\mathcal{V}20$, fait +$\mathcal{V}900$, c'est à dire +30, & —$\mathcal{V}45$ par +6, c'est à dire en +$\mathcal{V}36$, fait —$\mathcal{V}1620$, & —$\mathcal{V}20$ par +8, c'est à dire par +$\mathcal{V}64$, fait —$\mathcal{V}1280$. Et finalement +8 en +6, fait +48 : Et partant tout le nombre produict sera 48 —$\mathcal{V}1280$—$\mathcal{V}1620$ +30 ; qui reduit par addition de +48 à 30 ; & de —$\mathcal{V}1280$ à —$\mathcal{V}1620$: sera 78—$\mathcal{V}5780$.

Multiplicande 6—$\mathcal{V}20$.
Multiplicateur 8—$\mathcal{V}45$.

Pr. 48.—$\mathcal{V}1280$—$\mathcal{V}1620$+30
qui par reduction sera 78—$\mathcal{V}5780$.

En cet autre exemple, ie multiplie —$\mathcal{VV}648$ par —$\mathcal{VV}162$, & vient +$\mathcal{VV}104976$, c'est à dire +18 : & +$\mathcal{VV}288$ par —$\mathcal{VV}162$, fait —$\mathcal{VV}46656$, c'est à dire —$\mathcal{V}2160$: & —$\mathcal{VV}648$ par +$\mathcal{V}128$, fait —$\mathcal{VV}82944$, c'est à dire —$\mathcal{V}288$: & finalement +$\mathcal{VV}288$ par +$\mathcal{VV}128$ fait +$\mathcal{V}C36864$, c'est à dire +$\mathcal{V}192$; & partant tout le nombre produict de la multiplication sera $\mathcal{V}192$ —$\mathcal{V}288$—$\mathcal{V}216$ +18, ou bien 18+$\mathcal{V}192$—$\mathcal{V}288$—$\mathcal{V}216$.

Multiplicande $\mathcal{VV}288$ —$\mathcal{VV}648$.
Multiplicateur $\mathcal{VV}128$—$\mathcal{VV}162$.

Produict $\mathcal{V}192$—$\mathcal{V}288$—$\mathcal{V}216$+18
ou 18+$\mathcal{V}192$—$\mathcal{V}288$—$\mathcal{V}216$.

En ce troisiesme exemple nous reduirons premierement $\mathcal{V}\beta 6$, & $\mathcal{V}3$ en vne mesme denomination, c'est à sçauoir à $\mathcal{V}q\beta 36$, & $\mathcal{V}q\beta 243$, & ces deux nombres multipliez entr'eux, le produict est +$\mathcal{V}q\beta 8748$: puis apres nous reduirons $\mathcal{V}c7$, & $\mathcal{V}3$ à $qc49$, & $\mathcal{V}qc27$ de mesme espece, & ces deux-cy estans multipliez entr'eux, le produict est $\mathcal{V}qc1323$.

Multiplicande $\mathcal{V}c7$+$\mathcal{V}\beta 6$.
Multiplicateur $\mathcal{V}3$.

Produict $\mathcal{V}qc1323$+$\mathcal{V}q\beta 8748$.

Au premier de ces deux exemples est multiplié vn nombre composé en soy, dont le produit est 49+$\mathcal{V}245$+$\mathcal{V}245$ +5, c'est à dire 54 +$\mathcal{V}980$, pource que 49 & +5, font 54, & $\mathcal{V}245$ auec $\mathcal{V}245$, c'est à dire le double de $\mathcal{V}245$, faict $\mathcal{V}980$. Mais au 2e. exemple est multiplié vn nombre diminué en soy, dont le produit est 49—$\mathcal{V}245$—$\mathcal{V}245$+5, c'est à dire 54—$\mathcal{V}980$. Or pour briefuement faire telle multiplication, c'est à dire multiplier vn nombre composé de racines quarrees en soy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouster ensemble les quarrez des particules, puis à ceste somme adiouster le double du produit d'vne particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-dessus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'vne particule

$$\begin{array}{r} 7+\mathcal{V}5 \\ 7+\mathcal{V}5 \\ \hline 49+\mathcal{V}245+\mathcal{V}245+5, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7-\mathcal{V}5, \\ 7-\mathcal{V}5. \\ \hline 49-\mathcal{V}245-\mathcal{V}245+5. \end{array}$$

cule en l'autre. Comme és deux exemples cy-deſſus, les quarrez des particules ſont 54, & le produit d'vne particule en l'autre eſt $\sqrt{}245$, ou $-\sqrt{}245$, dont le double eſt $\sqrt{}980$, ou $-\sqrt{}980$. Tout le produict eſt donc $54+\sqrt{}980$, ou $54-\sqrt{}980$.

Mais multipliant vn nombre compoſé ou diminué de racines quarrees, comme $6+\sqrt{}8$ par ſon reſpondant contraire, c'eſt à dire par $6-\sqrt{}8$, viendra au produit vn ſimple nombre 28, comme il appert en l'operation. Car $+\sqrt{}288$ runne $-\sqrt{}288$; & partant reſte $36-8$, qui ſont 28. Ce produit ſera encore trouué plus facilement & promptement: car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{}8$, eſtant oſté de 36, quarré de la premiere particule 6, reſtera le meſme produit 28.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{}8. \\ 6-\sqrt{}8. \\ \hline 36+\sqrt{}288-\sqrt{}288-8. \end{array}$$

Ainſi auſſi $\sqrt{}10+\sqrt{}2$ eſtant multiplié par ſon reſpondant contraire $\sqrt{}10-\sqrt{}2$, le produit ſera $10+\sqrt{}20-\sqrt{}20-2$, c'eſt à dire 8: lequel nombre 8 eſt auſſi produit en oſtant 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

$$\begin{array}{r} \sqrt{}10+\sqrt{}2 \\ \sqrt{}10-\sqrt{}2 \\ \hline 10+\sqrt{}20-\sqrt{}20-2 \end{array}$$

Et ſi le nombre de la derniere particule eſt le plus grand, ſera produit vn nombre diminué, comme appert en cet exemple, où eſt multiplié $2+\sqrt{}16$ par ſon reſpondant contraire $2-\sqrt{}16$, & eſt produict $4-16$.

$$\begin{array}{r} 2+\sqrt{}16 \\ 2-\sqrt{}16 \\ \hline 4-16 \end{array}$$

Mais ſi on multiplie $\sqrt{}3+\sqrt{}2+1$, par ſon reſpondant $\sqrt{}3+\sqrt{}2-1$, où tu vois que le ſigne $+$ de la derniere particule eſt changé en $-$, le produit ſera $4+\sqrt{}24$: lequel produit eſtant derechef multiplié par ſon reſpondant contraire $-4+\sqrt{}24$, viendra vn ſimple nombre 8. Ce dernier produict ſera encore trouué plus facilement & promptement comme enſuit. Soient multipliees les deux premieres particules $\sqrt{}3$ & $\sqrt{}2$ entr'elles, & viendra $\sqrt{}6$, qui doublee ſera $\sqrt{}24$; puis de la ſomme des deux nombres d'icelles particules, ſçauoir eſt 5, ſoit oſté le nombre de la derniere particule, & reſtera 4, dont le quarré 16 ſoit oſté du nombre 24, & reſteront 8 comme deſſus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{}3+\sqrt{}2+1. \\ \sqrt{}3+\sqrt{}2-1. \\ \hline -\sqrt{}3-\sqrt{}2-1 \\ +\sqrt{}6+2+\sqrt{}2 \\ 3+\sqrt{}6+\sqrt{}3 \\ \hline \textit{produit}\ 4+\sqrt{}24. \\ -4+\sqrt{}24 \\ \hline -16-\sqrt{}384+\sqrt{}384+24 \end{array}$$

Ainſi auſſi, ſi on multiplie $\sqrt{}3+\sqrt{}5+\sqrt{}6$ par ſon reſpondant $\sqrt{}3+\sqrt{}5-\sqrt{}6$, ſera produit $\sqrt{}60+2$, qui multipliez par $\sqrt{}60-2$, le produit ſera ſimple nombre 56; lequel produit on aura auſſi auec la meſme briefueté que deſſus.

Et par ceſte maniere peuuent eſtre reduits tous tels nombres compoſez ou diminuez en ſimple nom: ſçauoir eſt multipliant touſiours par le reſpondant contraire, ainſi que dit eſt cy-deſſus, iuſques à ce que l'on ſoit paruenu à vn ſimple nombre.

De la diuiſion des nombres irrationnaux compoſez & diminuez.

CHAP. XX.

POur diuiſer vn nombre irrationnel compoſé par vn ſimple nombre radical, il faut diuiſer chaſque particule par ledit ſimple nombre radical, obſeruant la regle de + & de —. Comme pour diuiſer $\sqrt{24}+\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuiſe chaſque particule du diuidande par le diuiſeur $\sqrt{6}$, & le quotient eſt $\sqrt{4}+\sqrt{\frac{3}{2}}$, ou $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, comme il appert en ceſte formule.

$$\frac{\sqrt{24}+\sqrt{9}}{\sqrt{6}} \quad \frac{\sqrt{24}+\sqrt{9}}{\sqrt{6}} \quad [\sqrt{4}+\sqrt{1\tfrac{1}{2}}$$

Ainſi auſſi diuiſant $\sqrt{c28}+\sqrt{c20}$, par $\sqrt{c4}$, vient au quotient $\sqrt{c7}+\sqrt{c5}$.

Que s'il faut diuiſer vn nombre irrationel compoſé par vn nombre ſimple & abſolu. Comme pour exemple, $\sqrt{20}-\sqrt{c10}$ par le nombre abſolu 3; il faut premierement reduire iceluy nombre 3 en l'eſpece de la premiere particule $\sqrt{20}$, & ſeront $\sqrt{9}$; par leſquels eſtãt diuiſée ladite particule, viendra au quotient $\sqrt{2\frac{1}{9}}$: en apres il faudra auſsi reduire ledit diuiſeur 3 en l'eſpece de la racine de la ſeconde particule $\sqrt{c10}$; & ſeront $\sqrt{c27}$, qui diuiſant icelle particule, le quotient ſera $\sqrt{c\frac{10}{27}}$: tellement que tout le quotient de la diuiſion ſera $\sqrt{2\frac{1}{9}}-\sqrt{c\frac{10}{27}}$. Ainſi auſſi pour diuiſer $\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\beta 3}$ par $\sqrt{2}$, il faut reduire iceluy diuiſeur en la meſme denomination que chaque particule du diuidande, & on trouuera pour le quotient de la diuiſion $\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{q\beta\frac{9}{32}}$: Car $\sqrt{\sqrt{8}}$ & $\sqrt{2}$ eſtant reduites à meſme denomination, ſeront $\sqrt{\sqrt{64}}$, & $\sqrt{\sqrt{16}}$: & celle là diuiſee par ceſte cy donne $\sqrt{\sqrt{4}}$, c'eſt à dire $\sqrt{2}$. Et pour la ſeconde particule ſeront reduits $\sqrt{\beta 2}$ & $\sqrt{2}$, à $\sqrt{q\beta 9}$ & $\sqrt{q\beta 32}$; & celle-là eſtant diuiſee par ceſte cy, le quotient eſt $\sqrt{q\beta\frac{9}{32}}$.

Mais pour diuiſer vn ſimple nombre par vn compoſé ou diminué de racines quarrees, ou cenſicenſiques; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25}+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 7; il faut multiplier l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{25}-\sqrt{4}$, le correſpondant contraire du diuiſeur, & viendront $\sqrt{44100}-\sqrt{7056}$, & 21, ou $\sqrt{441}$: puis apres ſoit diuiſé $\sqrt{44100}-\sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100}-\sqrt{16}$, c'eſt à dire 6, qui ſera le quotient de 42 diuiſé par $\sqrt{25}+\sqrt{4}$. Qu'il faille encore diuiſer 54 par $2+\sqrt{16}$, c'eſt à dire par 6: ſoit donc multiplié le diuiſeur $2+\sqrt{16}$, par $2-\sqrt{16}$, & ſera produit le nombre diminué $4-16$; pource que la derniere particule eſt plus grande que la premiere: parquoy ſoient tranſpoſees les particules dudit diuiſeur en ceſte maniere $\sqrt{16}+2$, afin qu'eſtant multiplié par ſon reſpondant contraire $\sqrt{16}-2$, ſoit fait vn nombre ſimple 12. En apres ſoit auſsi multiplié le nombre diuidande 54 par le meſme nombre $\sqrt{16}-2$, & viendra pour nouueau diuidande $\sqrt{45656}-108$, qui diuiſé par le nouueau diuiſeur 12, ie quotient ſera $\sqrt{324}-9$, c'eſt à dire $18-9$, qui ſont 9. Voulant encore diuiſer 20 par $\sqrt{\sqrt{16}}+\sqrt{\sqrt{81}}$, c'eſt à dire par 5: ſeront premierement tranſpoſees les particules d'iceluy diuiſeur, afin que la plus grande ſoit la premiere: puis ſera trouué vn nouueau diuiſeur & diuidande, qui ſera 5, & $\sqrt{\sqrt{12960000}}-\sqrt{\sqrt{2560000}}$, & la diuiſion faicte, le quo-

tient ſera $\sqrt{\sqrt{20736}}-\sqrt{\sqrt{4096}}$, c'eſt à dire 12—8, c'eſt aſſauoir 4.

Que ſi tant le diuidãde que le diuiſeur, ſont nombres compoſez, ou diminuez de racines quarrees, il faut reduire le diuiſeur en ſimple nombre, comme il a eſté dit au chap. precedent: puis multiplier le diuidande par les meſmes nombres par leſquels on aura multiplié le diuiſeur pour le conuertir à ſimple nombre, & ce qui viendra ſoit diuiſé par le ſimple nombre trouué, comme dit eſt cy-deſſus, & ainſi qu'il appert aux exemples ſuiuans.

Eſtant propoſé à diuiſer $18+\sqrt{36}$, qui ſont 24, par $7-\sqrt{16}$, (c'eſt à dire par 3.) Il faut premierement multiplier le diuiſeur $7-\sqrt{16}$ par ſon reſpondant contraire $7+\sqrt{16}$, & viendront 33 pour vn nouueau diuiſeur: puis par le meſme nombre $7+\sqrt{16}$ ſoit auſsi multiplié le diuidande $18+\sqrt{36}$, & viendront $198+\sqrt{4356}$, pour le nouueau diuidande, qui diuiſé par les 33 trouuez, viendront au quotient $6+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 8.

Soit encore propoſé à diuiſer $\sqrt{41+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, par $\sqrt{5+\sqrt{2}}$. Il faut donc premierement multiplier le diuiſeur $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ par ſon reſpondant contraire $\sqrt{5-\sqrt{2}}$, & viẽdra vn ſimple nombre 3 pour nouueau diuiſeur: en apres ſoit multiplié le nombre diuidande $\sqrt{41+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ par le meſme nombre $\sqrt{5-\sqrt{2}}$, afin d'auoir vn nouueau diuidande, & le produit ſera $\sqrt{205+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{82}-\sqrt{6}+\sqrt{4}}$. Lequel il faut diuiſer par 3, c'eſt à dire par $\sqrt{9}$, & le quotient ſera $\sqrt{22\frac{7}{9}+\sqrt{1\frac{6}{9}}-\sqrt{1\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}+\frac{2}{3}}}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}+\sqrt{\frac{15}{9}}-\sqrt{\frac{10}{9}}-\sqrt{\frac{82}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}}$.

Que ſi le diuiſeur auoit deux parcelles de racines cubiques, il faudroit auſsi trouuer vn diuiſeur ſimple, comme ſera dit en ceſte exemple. Qu'il faille diuiſer 10 par $\sqrt[c]{5}+\sqrt[c]{3}$. Premierement il faut trouuer ſuiuant ce qui eſt enſeigné en la 2. prop. 8. trois nombres continuellement proportionnaux (à cauſe de 3 expoſant du cube) en la raiſon des particules du diuiſeur, c'eſt aſſauoir de $\sqrt[c]{5}$ à $\sqrt[c]{3}$, & ce comme il enſuit. Premierement ſoit multiplié $\sqrt[c]{5}$ en ſoy, & viendra $\sqrt[c]{25}$ pour le premier nombre; puis apres ſoit multiplié $\sqrt[c]{5}$ en $\sqrt[c]{3}$, & viendront $\sqrt[c]{15}$ pour le ſecond nombre; tiercement ſoit multiplié $\sqrt[c]{3}$ en ſoy, & ſera produit $\sqrt[c]{9}$ pour l'autre nombre: & par ainſi nous aurons ces trois nombres $\sqrt[c]{25}$, $\sqrt[c]{15}$, & $\sqrt[c]{9}$, continuellement proportionnaux, en la raiſon de $\sqrt[c]{5}$ à $\sqrt[c]{3}$, comme il eſt demonſtré en la ſuſdite 2. p. 8. Or eſtant apposé le ſigne + aux deux nombres extremes, & le ſigne — à celuy du milieu, en ceſte ſorte $\sqrt[c]{25}-\sqrt[c]{15}+\sqrt[c]{9}$ ſoit multiplié par ce nombre, tant le diuidande propoſé 10, que le diuiſeur $\sqrt[c]{5}+\sqrt[c]{3}$, & viendra $\sqrt[c]{250000}-\sqrt[c]{150000}+\sqrt[c]{90000}$ pour le nouueau diuidande; mais pour nouueau diuiſeur $\sqrt[c]{125}+\sqrt[c]{27}$, c'eſt à dire 8: lequel ſimple diuiſeur on obtiendra auſsi en adiouſtant ſeulement les nombres des parcelles du diuiſeur 5 & 3.

Il faut proceder en la meſme maniere lors que le diuiſeur eſt compoſé de deux racines cenſicenſiques, ſurſolides, quarrees cubiques, &c. trouuant autant de nombres continuellement proportionnaux, en la raiſon des parcelles du diuiſeur qu'il y aura d'vnitez en l'expoſant du ſigne coſsique qq, β, qc, &c. c'eſt aſſauoir quatre au diuiſeur des racines cenſicenſiques, cinq pour le diuiſeur des ſurſolides &c. Leſquels nombres eſtans trouuez, ſoit apposé

le signe + au premier, & le signe — au second: mais au troisiesme derechef +, au quatriesme encore —, & ainsi alternatiuement iusques au dernier; tellement que tous les nombres des lieux impairs soient nottez du signe +, & ceux des lieux pairs, du signe —. Nous poserons pour exemple qu'il faille diuiser 10 par $\gamma\gamma 5+\gamma\gamma 3$. D'autant que l'exposant de qq est 4, il faut trouuer quatre nombres continuellement proportionnaux en la raison de $\gamma\gamma 5$ à $\gamma\gamma 3$, en la sorte cy-dessus.

$$\gamma\gamma 5+\gamma\gamma 3$$
$$\gamma\gamma 25-\gamma\gamma 15+\gamma\gamma 9$$
$$\gamma\gamma 125-\gamma\gamma 75+\gamma\gamma 45-\gamma\gamma 27$$

Maintenant, si par ce monbre de quatre particules on multiplie tant le diuidande 10, que le diuiseur $\gamma\gamma 5+\gamma\gamma 3$, on trouuera pour nouueau diuidande $\gamma\gamma 1250000-\gamma\gamma 750000+\gamma\gamma 450000-\gamma\gamma 270000$, & pour nouueau diuiseur $\gamma\gamma 625-\gamma\gamma 81$, c'est à dire 2: lequel diuiseur 2 on obtiendra aussi sans multiplication, en soustrayant seulement le nombre de la moindre particule du diuiseur de la plus grande, c'est assauoir 3 de 5. Car les Algebraistes enseignent que quand le nombre exposant des racines est pair, comme q, qq, &c. le simple diuiseur est donné en ostant le nombre de la moindre particule de celuy de la grande: mais en les adioutant ensemble lors que ledit exposant est impair, comme c, β, &c.

Mais il est à noter que les particules du diuiseur estans denommées de diuerses racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparauant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande: & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de $\gamma 41+\gamma 3-\gamma 2$, diuisé par $\gamma 5+\gamma 2$, se peut donner ainsi $\frac{\gamma 41+\gamma 3-\gamma 2}{\gamma 5+\gamma 2}$. Semblablement s'il faut diuiser $\gamma 48+\gamma c3$ par $\gamma 15+\gamma c6-\gamma 3$, le quotient sera ceste fraction $\frac{\gamma 48+\gamma c3}{\gamma 15+\gamma c6-\gamma 3}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationnaux composez est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composez $3+\gamma 8$, & $8-\gamma 5$, le plus grand desquels ie desire sçauoir. Ie soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\gamma 8$, & $5-\gamma 5$, desquels ie prend les quarrez, ce sont 8 & $30-\gamma 500$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0: & $22-\gamma 500$: & à chacun d'iceux i'adiouste $\gamma 500$, & viennent $\gamma 500$, & 22, c'est à dire $\gamma 484$, qui sont moindre que $\gamma 500$: & partant ie dis que $3+\gamma 8$ est plus grand que $8-\gamma 5$.

Des fractions des nombres irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuant le milieu de la fraction, iceluy signe est referé à l'vn & à l'autre terme, c'est à sçauoir, tant au numerateur qu'au denominateur. Comme ceste fraction $\gamma\frac{9}{16}$ signifie $\gamma 9$ estre diuisée par $\gamma 16$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi

$\sqrt{c}\frac{8}{27}$ signifie $\sqrt{c}8$ estre diuisee par $\sqrt{c}27$: & icelle equiuale à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\sqrt{}\frac{6}{8}$ denote $\sqrt{}6$ estre diuisee par $\sqrt{}8$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier auec la fraction, il faut reduire tout le nombre à vne seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\sqrt{c}1\frac{67}{125}$ sera reduit à $\sqrt{c}\frac{192}{125}$, & signifie $\sqrt{c}192$ estre diuisee par $\sqrt{c}125$, c'est à dire par 5; & peut estre representee ainsi $\frac{\sqrt{c}192}{5}$, tellement qu'il signifie $\sqrt{c}192$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\sqrt{c}\frac{192}{125}$ sont multipliez par vn mesme nombre, c'est à sçauoir par $\sqrt{c}192$, sera produit la fraction $\sqrt{c}\frac{36864}{24000}$ equiuallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si derechef les termes produits de la fraction sont multipliez par la mesme $\sqrt{c}192$, sera produit la fraction $\sqrt{c}\frac{7077888}{4608000}$, c'est à dire $\frac{192}{\sqrt{c}4608000}$, & signifie le cube 192 (qui est produit de $\sqrt{c}192$ multipliee en soy cubiquement) estre diuisé par $\sqrt{c}4608000$; pource que la racine cubique du numerateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\sqrt{}\frac{16}{64}$, signifie $\sqrt{}16$, c'est à sçauoir 4, estre diuisee par $\sqrt{}64$, c'est à dire par 8; & est equiualente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{\sqrt{}16}{64}$ signifie $\sqrt{}16$, c'est à dire 4 estre diuisé par 64: & est equiualente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\frac{16}{\sqrt{}64}$, signifie que le nombre 16 est diuisé par $\sqrt{}64$, c'est à dire par 8: & est equiualente au nombre 2.

Quand la raison des numerateurs aux denominateurs est vne mesme, les fractions sont egales, tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Parquoy toutes ces fractions $\sqrt{}\frac{64}{4}$, $\frac{\sqrt{}64}{2}$, $\frac{64}{\sqrt{}256}$ sont de mesme valeur: pource qu'en toutes, le numerateur est quadruple du denominateur.

Les fractions irrationelles se reduisent à minimes termes (quand elles peuuent estre reduites,) tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Comme ceste fraction $\sqrt{qc}\frac{4}{8}$ se reduira à ceste-cy $\sqrt{qc}\frac{1}{2}$: & $\sqrt{}\frac{16}{144}$ à $\sqrt{}\frac{1}{9}$. Elles peuuent aussi estre quelquesfois reduites à moindres signes radicaux: Comme $\sqrt{qc}\frac{4}{8}$ se reduit à $\frac{\sqrt{c}4}{\sqrt{c}2}$. Pource que le numerateur 4 a racine quarree 2, mais il n'a pas racine cubique: Et le denominateur 8 a racine cubique 2, mais il n'a pas la quarree.

Quant à l'addition & soustraction, elles se font en ceste maniere. Si le denominateur est vn mesme, soient adiouſtez les numerateurs, comme il a esté dit cy-deuant, ou soit soustrait l'vn de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit apposé le denominateur commun, ainsi qu'il appert és exemples suiuans.

Addition	*Soubstraction*
$\frac{\sqrt{}4}{7}$ adiouſtez à $\frac{\sqrt{}9}{7}$	$\frac{\sqrt{}9}{7}$ ostee de $\frac{\sqrt{}9}{7}$
font $\frac{\sqrt{}25}{7}$ ou $\frac{5}{7}$	reste $\frac{\sqrt{}1}{7}$ ou $\frac{1}{7}$

Mais quand les denominateurs sont diuers, soit faicte la reduction à vn mesme denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires: puis soit fait ainsi que cy-dessus, & comme il appert en ces formules.

Reduction.	*Addition.*	*Soubstraction*
$\sqrt{}144$ $\sqrt{}196$	$\sqrt{}\frac{144}{441}$ & $\sqrt{}\frac{196}{441}$	$\sqrt{}\frac{144}{441}$ de $\sqrt{}\frac{196}{441}$
$\sqrt{}\frac{16}{49}$ & $\sqrt{}\frac{9}{49}$.	font $\sqrt{}\frac{625}{441}$, ou $1\frac{9}{49}$,	reste $\sqrt{}\frac{4}{441}$, ou $\frac{2}{21}$.
$\sqrt{}441$.		

En la meſme maniere s'il faut adiouſter $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{24}}{5}$ à $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{8}}{2}$; on reduira premierement icelles fractiõs à meſme denomination, c'eſt à ſçauoir à $\frac{\sqrt{200}+\sqrt{192}}{10}$ & $\frac{\sqrt{3000}+\sqrt{100}}{10}$: puis apres adiouſtant les numerateurs, on aura $\frac{\sqrt{2000}+\sqrt{8232}}{10}$: Mais ſi on ſouſtraict la moindre d'icelles fractions de la plus grande, reſtera $\frac{\sqrt{648}}{10}$.

Quand les numerateurs ſont incommenſurables, l'addition d'iceux ſe faict par l'interpoſition du ſigne +, mais la ſoubſtraction par l'interiection du ſigne —. Comme la ſomme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{5}{8}}$ eſt $\sqrt{\frac{7}{8}}+\sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ oſtée de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reſte $\sqrt{\frac{7}{8}}-\sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & diuiſion des fractions irrationnelles, il faut ſeulement les reduire à meſme ſigne radical, & acheuer comme és fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\frac{\sqrt{3}}{4}$ par $\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\frac{\sqrt{18}}{28}$. Et $\frac{\sqrt{36}}{3}$ diuiſée par $\frac{\sqrt{147}}{2}$ ſera $\frac{4}{3}$: & auſſi $\frac{\sqrt{3}}{4}$ diuiſee par $\frac{\sqrt{6}}{7}$, viendra $\sqrt{\frac{147}{96}}$ c'eſt à dire $\sqrt{1\frac{51}{96}}$.

Quant à la preuue de chacune de ces operations, elle ſe fait par ſa contraire, c'eſt à dire que l'addition ſe preuue par la ſoubſtraction: & la ſoubſtraction par l'addition, &c.

Or voila quant à ce qui concerne l'Algorithme des nombres ſourds, reſte que pour en monſtrer quelque vſage nous adiouſtions icy quelques queſtions en la ſolution deſquelles on ſe ſert deſdits nombres ſourds & irrationnels.

1. *Trouuer deux nombres en vne raiſon donnee, tels que l'vn multiplié par l'autre produiſe vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon ſeſquialtere, tels que le produict de leur multiplication ſoit 40. Poſons qu'iceux nombres ſoient 2 ℛ & 3 ℛ: leur produit ſera 6q, qui doit eſtre egal à 40. Diuiſant donc 40 par 6, viendront $\frac{40}{6}$ ou $\frac{20}{3}$ pour la valeur de 1q, & conſequemment 1ℛ, ſera $\sqrt{\frac{20}{3}}$: Et pour ce que le premier nombre a eſté poſé 2 ℛ, & le ſecond 3 ℛ, iceux nombres ſeront $\sqrt{\frac{80}{3}}$ & $\sqrt{\frac{180}{3}}$, leſquels multipliez entr'eux produiſent $\sqrt{\frac{14400}{9}}$, c'eſt à dire $\frac{120}{3}$ ou 40, ainſi qu'il eſtoit requis.

2. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, tels que le plus grand eſtant diuiſé par le moindre, le quotient & le quarré d'iceluy moindre, ſoient auſſi en raiſon donnée.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon quadruple, tels que le quarré du moindre aye raiſon double au quotient du plus grand diuiſé par iceluy moindre. Poſons qu'iceux nombres ſoient 1ℛ & 4ℛ: Or le plus grand eſtant diuiſé par le moindre, le quotient ſera 4, & le quarré du moindre eſt 1q: & puis que ce quarré doit auoir raiſon double au quotient 4: il y aura Equation entre 1q, & 8: parquoy 1ℛ ſera $\sqrt{8}$, qui eſt le moindre nombre, & par conſequent le plus grand qui eſt en raiſon quadruple ſera $\sqrt{128}$: & diuiſant iceluy par le moindre $\sqrt{8}$, le quotient eſt $\sqrt{16}$, c'eſt à dire 4, auquel 8 quarré dudit moindre nombre à raiſon double.

3. *Trouuer trois nombres en progreſſion arithmetique, tels qu'eſtans multipliez entr'eux, le produit ait vne raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres conſtituans vne progreſſion arithmetique, tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux ſoit triple de leur ſomme. Poſons que les trois nombres cherchez ſoient 1ℛ, 2ℛ & 3ℛ ayans vn meſme excez 1ℛ. De la multiplication d'iceux eſt faict le nombre 6c,

lequel doit estre triple de leur somme $-6\mathcal{R}$: & partant egal à $18\mathcal{R}$. Diuisant donc 18 par 6, viendra 3 pour $1\mathcal{q}$ (car d'autant que le caractere $\mathcal{q}$, est au milieu de c & $\mathcal{R}$, il vient le mesme qu'en deprimãt les signes.) Partant $1\mathcal{R}$ sera $\sqrt{3}$, & par consequent les trois nombres cherchez seront $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, & $\sqrt{27}$, qui ont mesme excez $\sqrt{3}$, & multipliez entr'eux font $\sqrt{972}$, qui est le triple de la somme des mesmes, c'est à sçauoir du nombre $\sqrt{108}$.

Notez que quand le denominateur de la raison que doit auoir le produict de la multiplication à la somme, est nombre quarré: la question se resoult en nombres rationnaux. Comme les mesmes choses que dessus estans posees, si le nombre produit deuoit auoir à la somme la raison quadruple, l'equation viendroit entre $6c$ & $24\mathcal{R}$: parquoy diuisant 24 par 6, viendroit 4 pour $1\mathcal{q}$, & consequemment $1\mathcal{R}$ seroit 2, & les trois nombres cherchez seroient 2, 4, & 6, lesquels multipliez entr'eux produisent 48, qui est le quadruple de leur somme 12.

4. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raison donnée, tels que la somme de leurs quarrez face vn nombre donné.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres continuellement propor. en raison double, desquels la somme de leurs quarrez face 600. Posons que les trois nombres soient $1\mathcal{R}$, $2\mathcal{R}$, & $4\mathcal{R}$, qui sont en raison double: leurs quarrez seront $1\mathcal{q}$, $4\mathcal{q}$, & $16\mathcal{q}$. Mais la somme d'iceux quarrez sera $21\mathcal{q}$, qui est egale à 600. Diuisant donc 600 par 21 viendront $\frac{200}{7}$ pour vn quarré, & partant $1\mathcal{R}$ sera $\sqrt{\frac{200}{7}}$, qui est le premier nombre cherché, & le second doublé d'iceluy sera $\sqrt{\frac{800}{7}}$: mais le troisieſme aussi double de cestuy-cy sera $\sqrt{\frac{3200}{7}}$, & leurs quarrez font ensemble $\frac{4200}{7}$, c'est à dire 600.

5. *Trouuer vn nombre, qui auec vn nombre donné face son quarré.*

Le nombre donné soit 50, & il faut trouuer vn autre nombre qui adiousté auec 50 face son quarré. Posons que le nombre cherché soit $1\mathcal{R}$: donc son quarré sera $1\mathcal{q}$, qui doit estre egal à $1\mathcal{R} + 50$. Or le quadruple de 50 estant adiousté au quarré des racines, faict 201, dont la racine quarree est $\sqrt{201}$: à icelle soient adiouſtees les racines, & viendront $\sqrt{201} + 1$, dont la moitié, qui est $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, est la valeur de $1\mathcal{R}$, & consequemment le nombre cherché: tellement que si à iceluy nombre on adiouste le donné 50, le nombre qui en prouiendra, sçauoir $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50\frac{1}{2}$, sera le quarré du mesme nombre $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, ainsi qu'il estoit requis.

6. *Diuiser vn nombre donné selon la moyenne & extreme raison.*

Le nombre donné soit 12, lequel il faut coupper en deux parties telles que la moindre, la plus grande, & ledit nombre 12, soient continuellement proportionnaux, c'est à dire que le quarré de la plus grande partie soit egal au produit de tout le nombre 12 multiplié par la moindre partie. Posons que la plus grande partie soit $1\mathcal{R}$: donc la moindre sera $12 - 1\mathcal{R}$, & partant ces trois nombres $12 - 1\mathcal{R}$, $1\mathcal{R}$, & 12 seront proport. tellement que le quarré du moyen, sçauoir $1\mathcal{q}$, sera egal au produict des deux extremes, qui est $144 - 12\mathcal{R}$. Or la moitié du nombre des racines est 6, & son quarré 36, auquel adiouſtant le nombre 144, viendront 180, dont la racine quarree est $\sqrt{180}$, de laquelle estant ostee la susdite moitié des racines, à cause du signe $-$ le reste sera $\sqrt{180} - 6$.

qui eſt la plus grande partie cherchee, laquelle oſtee du nombre donné 12, reſteront 18—√180 pour la moindre partie.

Or d'autant que nous rapporterons à la fin de ce liure beaucoup d'autres queſtions eſquelles les nombres ſeront ioincts & appliquez aux choſes materielles, afin qu'au moyen d'icelles on voye mieux l'vſage & practique de tous les preceptes & documens enſeignez en ce traicté, nous ne nous arreſterons d'auantage ſur ſemblables queſtions abſtraittes de la matiere.

Des nombres coſſiques & irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

TOut ainſi que les nombros abſolus ſe font irrationnaux, eſtans precedez de ſignes radicaux: comme de 5, ſe fait √c5: Ainſi auſſi les nombres coſſiques ſe font irrationnaux, quand on leur propoſe quelqu'vn d'iceux ſignes radicaux. Comme de 20ℛ, ſe fait √20ℛ, nombre coſſique irrationnel, qui ſe prononce, la racine quarrée de 20 racines: Item de 6c, ſe fait √6c: qui ſignifie la racine quarrée de 6c. Item de 9ℛ, ſe fait √√9ℛ, &c. Or tels nombres peuuent eſtre quelquesfois rationnaux, & quelquefois irrationnaux ſelon la valeur d'vne racine. Car ſi 1ℛ vaut 5, 20ℛ vaudront 100, duquel la racine quarree eſt 10: partant √20ℛ eſt vn nõbre rationel equiuallant 10: Et √c20ℛ ſera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il eſt donc euident qu'on ne peut iuger ſi tels nombres ſont rationnaux ou irrationnaux, iuſques à ce que l'eſtimation & valeur d'vne ſeule racine apparoiſſe.

Or l'addition & ſouſtraction d'iceux nombres ſe fait par l'interpoſition des ſignes + & — Comme √36ℛ adiouſtee à √129, fait √36ℛ + √129, ou √129 + √36ℛ. Et 36 eſtans oſtez de √36ℛ, reſtera √36ℛ — 36: & ainſi des autres.

Que ſi les ſignes coſſiques ſont ſemblables, & les nombres irrationnaux (conſiderez ſans leurs ſignes coſſiques) commenſurables; l'addition & ſoubſtraction ſe fera en la meſme maniere que des ſimples racines ſourdes, appoſant apres l'operation le meſme ſigne coſſique. Ainſi √8ℛ adiouſtee à √18ℛ, fera √50ℛ. Mais oſtant √8ℛ de √18ℛ, reſtera √2ℛ.

La preuue ſera facile & euidente, ſi on poſe la valeur d'vne ſeule racine eſtre quelque nombre, comme 2. Car 8ℛ ſeront 16, dont la racine quarree eſt 4: & 18ℛ ſeront 36, dont la racine quarree eſt 6: Or 4 & 6 ſont 10: comme auſſi √50ℛ, puis que 50ℛ ſont 100, dont la racine eſt 10. Mais 4 oſtez de 6, reſtent 2, valeur de √2ℛ, puis que 2ℛ ſont 4, dont la racine eſt 2.

Mais afin que les nombres coſſiques irrationaux ſoient multipliez entr'eux, ou diuiſez, ils doiuent eſtre premierement reduits à meſme ſigne radical par multiplication en croix, comme nous auons enſeigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier √c4ℛ par √8ℛ: icelles eſtans reduites à meſme ſigne radical, ſeront √qc16q, & √qc512c, ainſi qu'il appert en ceſte formule: leſquels deux nombres multipliez entre eux produiſent

√qc 16q.		√qc512c.	
4ℛ.	X	8ℛ.	
√ c.		√ q.	
3.		2.	
6.			

diuisent $\sqrt{qc}$ 8192ß: mais $\sqrt{qc}$ 512c diuisee par $\sqrt{qc}$ 169, le quotient sera $\sqrt{qc}$ 32ℛ. Item le nombre $\sqrt{qc}$ 131072 bß estant diuisé par $\sqrt{qc}$ 512c, le quotient sera $\sqrt{qc}$ 256ℛ.

Semblablement pour multiplier 12ℛ par $\sqrt{4}$, il n'y a qu'à quarrer 12, & à son quarré prepoſer le ſigne radical, afin d'auoir $\sqrt{144}$: puis le multiplier par $\sqrt{4}$, & viendra pour le produit $\sqrt{576}$. Par meſme moyen 3ℛ multipliees par $\sqrt{16}$, le produit ſera $\sqrt{144}$: c'eſt à dire la racine quarree de 144, qui ſera 24, la racine eſtant 2. Et tels produits $\sqrt{576}$, & $\sqrt{144}$ ſont appellez par Clauius Nombres des Racines, ainſi qu'il appert és 12 & 28 queſtions du 32. chap. de ſon Algebre.

Or la preuue de toutes ces operations ſe fera, poſant la valeur d'vne racine, comme dit eſt cy deſſus: ou bien chaque operation par ſa contraire.

Quant aux fractions de ces nombres coſſiques irrationaux, il n'eſt beſoin d'en traicter particulierement, pource qu'elles ſuiuent l'Algorithme de leurs entiers, ioinct à celuy des nombres communs.

Or eſt icy à noter qu'vne equation ſe rencontrant entre vn nombre coſſique irrationel, & vn nombre abſolu, il la faudra reduire en ceſte maniere. Soit pour exemple vne equation entre $\sqrt{24}$ℛ & 12. Il y aura pareillement equation entre leurs quarrez, ſçauoir 24ℛ & 144: ſoit donc diuiſé 144 par 24, & viendront 6 au quotient pour la valeur d'vne racine. Item, s'il y a equation entre $\sqrt{109}$ & 20; il y aura auſſi equation entre 109 & 400: diuiſant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'vne racine. Finalement ſi vne equation eſt trouuee entre $\sqrt{c}$ 729, & 30: il y aura auſſi equation entre 729 & 27000, les cubes d'iceux: parquoy diuiſant 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'vne ſeule racine.

Que ſi quelqu'vn propoſoit vne equation entre $\sqrt{c}$ 8 & 3, il y auroit auſſi equation entre leurs cubes 8 & 27: Ce qui eſt impoſſible. Parquoy en ces equations il eſt neceſſaire que le nombre abſolu ſoit la racine du nombre auec lequel eſt le ſigne radical: telle qu'eſt l'equation d'entre $\sqrt{c}$ 8 & 2. Item entre $\sqrt{c}$ 64 & 4: Item entre $\sqrt{81}$ & 9, &c. Autrement l'equation ſera impoſſible.

Des racines vniuerſelles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

LA racine d'vn nombre compoſé ou diminué eſt appellee racine vniuerſelle: Comme la racine quarree de ce nombre compoſé $\sqrt{9}+22$, eſt dicte racine vniuerſelle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle ſera 5; car $\sqrt{9}$, qui eſt 3, eſtant adiouſtee à 22 fait 25, dont la racine quarree eſt 5. Ainſi auſſi par la racine vniuerſelle de cet autre nombre compoſé $10+\sqrt{7}$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, ſi elle ſe peut auoir, eſtant adiouſtee à 10, on doit prendre la racine de tout le nombre.

Or ces racines sont notees diuersement par les Autheurs: mais nous les figurerons apposant le signe radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt{c}$ au deuant du nombre dont la racine deura estre extraicte, & enfermant tout ledit nombre entre deux parentheses, en ceste maniere, $\sqrt{}(\sqrt{9}+22)$, ou ainsi $\sqrt{}(22+\sqrt{9})$, qui est le mesme. Item $\sqrt{c}(10+\sqrt{7})$. Item $\sqrt{}(44+\sqrt{128})$. Item $\sqrt{}(10+\sqrt{16}+3+\sqrt{64})$. Item $\sqrt{c}(\sqrt{25}-\sqrt{4}+24)$. Item $\sqrt{}(10+\sqrt{36})+\sqrt{}(70+\sqrt{121})$, laquelle vaut 13.

Or tout ainsi que le quarré d'vne simple racine quarree sourde est le mesme nombre, delaissant seulement le signe radical $\sqrt{}$, tellement que le quarré de $\sqrt{5}$ est 5, & celuy de $\sqrt{12}$ est 12: mais le cube d'vne racine cubique simple est le mesme nombre, delaissant le signe radical $\sqrt{c}$, tellement que le cube de $\sqrt{c}9$ est 9, & le cube de $\sqrt{c}12$ est 12: Ainsi aussi, le quarré de la racine quarree de quelque nombre composé, est le mesme nombre, estant delaissé le signe radical $\sqrt{}$. Comme le quarré de $\sqrt{}(11+\sqrt{9}+\sqrt{4})$ est $11+\sqrt{9}+\sqrt{4}$, c'est à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\sqrt{}(\sqrt{c}216+\sqrt{c}27)$ est $\sqrt{c}216+\sqrt{c}27$, c'est à dire 9, dont la racine est 3. Le quarré de $\sqrt{}(\sqrt{c}216-\sqrt{c}27)$ est $\sqrt{c}216-\sqrt{c}27$, c'est à dire 3, & la valeur de sa racine est $\sqrt{3}$. Et semblablement le cube de la racine cubique d'vn nombre composé est le mesme nombre, estant osté le signe radical $\sqrt{c}$. comme le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}+\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}+\sqrt{9}$, c'est à dire 8, tellement que ceste racine-là valoit 2. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}-\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}-\sqrt{9}$, c'est à dire 2, & la racine d'iceluy est $\sqrt{c}2$. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{c}64+\sqrt{c}27)$ est $\sqrt{c}64+\sqrt{c}27$, c'est à dire 7, dont la racine est $\sqrt{c}7$. Et faut entendre le mesme de quarré de quarrez, & sursolides, &c. En ceste maniere on multiplie la racine de quelconque nombre composé en soy, c'est à dire qu'on a le produict de son quarré, ou cube, &c.

Mais, pour multiplier la racine d'vn nombre composé, par vne racine simple, ou par vn nombre simple, ou composé, ou finalement par vne autre racine de nombre composé: il faut reduire l'vn & l'autre nombre à quarré, ou cube: puis faire la multiplication comme dit est cy dessus. Comme pour exemple, soit $\sqrt{}(7+\sqrt{3})$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarrez sont $7+\sqrt{3}$, & 4. Multipliant donc 7 par 4 viendront 28; mais $\sqrt{3}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, viendront $\sqrt{48}$. Donc tout le nombre produit est $\sqrt{}(28+\sqrt{48})$.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{3}. \\ 4. \\ \hline 28+\sqrt{48}. \end{array}$$

Item $\sqrt{c}(\sqrt{c}64+\sqrt{c}27)$ multipliée par 2, le produict est $\sqrt{c}(\sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824)$, ou $\sqrt{c}(32+24)$, c'est à dire $\sqrt{c}56$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c}64+\sqrt{c}27. \\ 8. \\ \hline \sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824 \end{array}$$

Item soit $\sqrt{}(7+\sqrt{4})$ qu'il faut multiplier par $\sqrt{9}$. Les quarrez des nombres sont $7+\sqrt{4}$, & 9. Ie multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$: puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit sera $\sqrt{}(63+\sqrt{324})$, c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{4} \\ 9 \\ \hline 63+\sqrt{324}. \end{array}$$

Soit auſſi $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$, qu'il faut multiplier par le nombre compoſé $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Le quarré du premier nombre eſt $6+\sqrt{9}$; & du poſterieur $20+\sqrt{256}$: eſtant donc faicte la multiplication, comme il ſe void icy, le produit ſera $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, c'eſt à dire $\sqrt{324}$ ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{9} \\ 20+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120. \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13+\sqrt{9})}$ par $\sqrt{(5+\sqrt{16})}$, c'eſt à dire 4 par 3. Les quarrez des nombres ſont $13+\sqrt{9}$, & $5+\sqrt{16}$; & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, eſt fait $\sqrt{144}$; & 13, c'eſt à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 5, c'eſt à dire par $\sqrt{25}$, eſt fait $\sqrt{225}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc tout le nombre produit eſt $\sqrt{(\sqrt{2704}+\sqrt{225}+77)}$, c'eſt à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ eſt 52, & celle de $\sqrt{225}$ eſt 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 adiouſtez enſemble font 144, dont la racine quarrée eſt 12.

$$\begin{array}{r} 13+\sqrt{9} \\ 5+\sqrt{16} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{144} \\ 65+\sqrt{225} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{225}+77 \end{array}$$

Qu'il faille encore multiplier $\sqrt{(\sqrt{18000}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ par $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$. Ayant poſé ces nombres comme tu vois icy, multiplie premierement $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, & viendra ſon quarré $\sqrt{450}+15$, auquel il faut prepoſer le ſigne $-$ à cauſe que de $+$ en $-$ eſt faict $-$. En apres, de $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}$ en $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ ſera fait $\sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450$; (c'eſt à ſçauoir en multipliant leurs quarrez entr'eux) c'eſt à dire $1350+\sqrt{1620000}$, pource que $\sqrt{810000}$ vaut autant que 900, lequel nombre adiouſté à 450, fait 1350, & prepoſant le ſigne $\sqrt{}$, le produit ſera le nombre $\sqrt{(1350+\sqrt{1620000})}$: Mais la racine de ce nombre ſera $\sqrt{900}+\sqrt{450}$, (comme il apparoiſtra au chapitre ſuiuant) c'eſt à dire $30+\sqrt{450}$; duquel nombre eſtant oſté le premier produit $-\sqrt{450}+15$, fait de $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, reſtera ſeulement 15 pour tout le produit de la multiplication propoſee.

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \sqrt{(\sqrt{9}+6)}+\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \hline \sqrt{144}+84-\sqrt{9}+6 \\ \sqrt{36}+\sqrt{1764} \\ \hline \sqrt{144}-9 \end{array}$$

Et afin de rendre cecy plus manifeſte, nous adiouſterons encore vn exemple en nombres rationaux. Soit propoſé à multiplier $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ par $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ c'eſt à dire 1 par 3, & viendront 3. Car de $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faiſon quarré $\sqrt{9}+6$ auec le ſigne $-$, qui luy doit eſtre propoſé: puis apres, de $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faict $\sqrt{144}$,

c'eſt à dire 12 : Car $\sqrt{36}$ eſt 6, & $\sqrt{144}$ eſt 12, & $\sqrt{1764}$ eſt 42 ; tous leſquels nombres auec 84 font iceluy nombre 144, & luy prepoſant le ſigne $\sqrt{}$, ſera le produit $\sqrt{144}$, c'eſt à ſçauoir 12, duquel nombre eſtant oſté l'autre produit $\sqrt{9}+6$, ſçauoir 9, reſtera 3 pour tout le nombre produit ainſi qu'il deuoit eſtre.

Or quand il faut multiplier la racine quarree d'vn nombre compoſé enſemble auec la racine quarree d'vn nombre diminué ſemblable, en ſoy-meſme, comme $\sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})}$; ſoit poſé le nombre deux fois, ainſi qu'il appert icy, & ſoient pris les quarrez des parties, leſquels ſeront $12+\sqrt{6}$, & $12-\sqrt{6}$, qui font enſemble 24 : (car $+\sqrt{6}$ ruine $-\sqrt{6}$) Et ſoit multipliee vne partie par l'autre, & ſera fait $\sqrt{138}$, (pource que 6, quarré de $\sqrt{6}$, oſté de 144, quarré du nombre 12, reſte 138, auquel faut appoſer le ſigne $\sqrt{}$) dont le double eſt $\sqrt{552}$: & $24+\sqrt{552}$ ſera le nombre produit cherché. Or la racine de ce produit eſt auſſi la ſomme des deux racines $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ & $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ recueillie en vne ſeule ſomme. Car quand la ſomme de deux nombres eſt multiplice en ſoy, la racine quarree du nombre produit eſt la ſomme des meſmes deux nombres : & partant puis que les deux racines propoſees enſemble, multiplices en ſoy, font $24+\sqrt{552}$, la racine de ce produit, ſçauoir eſt $\sqrt{(24+\sqrt{552})}$ ſera la ſomme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeſte par vn autre exemple en nombres rationnaux. Soit $\sqrt{(10+36)}+\sqrt{(10-\sqrt{36})}$ c'eſt à dire 6, qu'il faut multiplier en ſoy. Il eſt euident que le nombre qui ſera produict doit eſtre 36.

$\sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})}$
$\sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})}$

$10+\sqrt{36}+10-\sqrt{36}$.
$\sqrt{64}$
$\sqrt{64}$

$\sqrt{256}$
$20+\sqrt{256}$.

Soient donc trouuez les quarrez des parties, leſquels ſeront $10+\sqrt{36}$, & $10-\sqrt{36}$, qui adiouſtez enſemble font 20 : & ſoit multipliée vne partie en l'autre, & viendra $\sqrt{64}$, dont le double ſera $\sqrt{256}$, c'eſt à dire 16 ; & partant le nombre produit eſt $20+16$, c'eſt à dire 36 : & la racine de ce nombre, ſçauoir 6, eſt pareillement la ſomme de l'addition de ces deux racines-là propoſees, comme il eſt manifeſte.

Or quand il faut multiplier vn nombre compoſé de racine ſimple, & de racine vniuerſelle, par vn nombre diminué ſemblable ; a auſſi lieu le compendium que nous auons enſeigné au chapitre 19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le nombre $\sqrt{20}+\sqrt{(20-\sqrt{5})}$ par le nombre $\sqrt{20}-\sqrt{(20-\sqrt{5})}$: Il n'y a qu'à ſouſtraire $20-\sqrt{5}$, quarré de la derniere particule du nombre compoſé ou diminué, de 20 quarré de la premiere particule, & le reſte $\sqrt{5}$, ſera le produit de la multiplication.

Mais s'il falloit multiplier $\sqrt{(24+8)}+5$ en ſoy, il n'y auroit qu'à quarrer

chaque particule, & viendroient $2q+8$, & 15: puis multiplier l'vne par l'autre, & le double du produit estant adiousté auec les susdits deux quarrez des particules, donneroit $2q+33+\sqrt{(200q+800)}$ pour tout le produit de la multiplication.

Si on vouloit encor multiplier $\sqrt{(5q-48)}+8$ en soy, il ne faudroit aussi que prendre les quarrez de chaque particule, qui seroient $5q-48$, & 64, puis les adiouster au double du produit d'vne particule en l'autre, & viendroient $5q-48+\sqrt{(1280q-10248)}$ pour tout le produit de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq+1q)}$ par $\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq-1q)}$: Il n'y a qu'à soustraire le quarré de la derniere particule, du quarré de la premiere particule, sçauoir est $\frac{1}{4}qq+1q$, de $\frac{1}{4}qq$, & le reste $-1q$, sera le produit de la multiplication.

Pour faire la diuision des racines vniuerselles, soit reduit à quarré, tant le nombre diuidande que diuiseur: puis apres soit faite la diuision comme il a esté enseigné cy deuant, & la racine du nombre produit sera le quotient. Comme pour exemple, soit $\sqrt{(13+\sqrt{7})}$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{5}$. Les quarrez des nombres sont $13+\sqrt{7}$, & 5. Ie diuise donc 13 par 5, & vient $2\frac{3}{5}$, & $\sqrt{7}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, & vient $\sqrt{\frac{7}{25}}$: tellement que tout le quotient est $\sqrt{(2\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{7}{25}})}$.

$$\begin{array}{l} 13+\sqrt{7}\ [2\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{7}{25}} \\ 5\ \sqrt{25} \end{array}$$

Item soit $\sqrt{(432+\sqrt{7776})}$ qu'il faut diuiser par 6. Les quarrez des nombres sont $432+\sqrt{7776}$, & 36: le nombre 432 estant diuisé par 36, viennent 12; & $\sqrt{7776}$ estant diuisee par 36, c'est à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$.

$$\begin{array}{l} x \\ 17 \quad 153 \\ 432+\sqrt{7776}\ [12+\sqrt{6} \\ 36 \quad 1296 \\ 3 \end{array}$$

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diuiser par $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$. Afin de trouuer vn nouueau diuiseur nous multiplierons $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$ & viendra vn nouueau diuiseur $\sqrt{4}$. Que si le diuidande $\sqrt{15}$, est aussi multiplié par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$, nous aurons vn nouueau diuidande $\sqrt{(45-\sqrt{1125})}$: le quarré d'icelluy sera $45-\sqrt{1125}$, & le quarré du nouueau diuiseur sera 4. Si donc on diuise 45 par 4, le quotient sera $11\frac{1}{4}$: si nous diuisons $-\sqrt{1125}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, le quotient sera $-\sqrt{70\frac{5}{16}}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{(11\frac{1}{4}-\sqrt{70\frac{5}{16}})}$.

Item soit diuisé 20 par $\sqrt{(10-\sqrt{5})}$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{(10+\sqrt{5})}$, afin d'auoir vn nouueau diuidãde $\sqrt{(4000+\sqrt{800000})}$, & vn nouueau diuiseur $\sqrt{95}$: les quarrez d'iceux nombres sont $4000+\sqrt{800000}$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, seront donnez $42\frac{2}{19}$, & de la diuision de $\sqrt{800000}$ par 95, c'est à dire par $\sqrt{9025}$, sera produit $\sqrt{88\frac{232}{361}}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{(42\frac{2}{19}+\sqrt{88\frac{232}{361}})}$.

Item soit diuisée $\sqrt[c]{(\sqrt[c]{32768}+\sqrt[c]{13824})}$ par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt[c]{32768}+\sqrt[c]{13824}$, & 8. Ie diuise donc $\sqrt[c]{32768}$ par 8, c'est à dire par $\sqrt[c]{4096}$, & vient au quotient $\sqrt[c]{64}$: & de la diuision de $\sqrt[c]{13824}$ par 8, c'est à dire par $\sqrt[c]{1728}$, vient $\sqrt[c]{27}$. Tout le quotient est donc $\sqrt[c]{(\sqrt[c]{64}+\sqrt[c]{27})}$, c'est à dire $\sqrt[c]{7}$.

Item ſoit $\sqrt{(588+\sqrt{34848})}$, qu'il faut diuiſer par $\sqrt{(12+\sqrt{8})}$. Les quarrez des nombres ſont $588+\sqrt{34848}$, & $12+\sqrt{8}$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nõbre par $12-\sqrt{8}$, afin d'auoir nouueau nombre diuidande, & diuiſeur: le diuidande ſera $\sqrt{(7056+\sqrt{1018112}-\sqrt{27653952}-\sqrt{278784})}$, ou pluſtoſt par reduction $\sqrt{(6528+\sqrt{332928})}$, & le diuiſeur ſera 136. Si donc on diuiſe 6528 par 136, viendront 48: & $\sqrt{332928}$ par 136, c'eſt à dire par $\sqrt{18496}$, viendront $\sqrt{18}$: & partant tout le quotient ſera $\sqrt{(48+\sqrt{18})}$.

Nous auons dit cy-deſſus comment il faut adiouſter vne racine vniuerſelle à vne ſemblable ayant le ſigne contraire: comme $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ auec $\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ dont la ſomme eſt $\sqrt{6}$. Mais telles racines ſe peuuent encore adiouſter enſemble comme enſuit.

Le quarré de la derniere particule de l'vne ou l'autre d'icelles racines ſoit oſté du quarré de la premiere particule, & à la racine quarree du reſte ſoit adiouſtee la premiere particule; puis ſoit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double là, ſera la ſomme de l'addition. Comme en l'exemple cy-deſſus, le quarré de la derniere particule eſt 3, lequel i'oſte de 4, quarré de la premiere particule, & reſte 1, que i'adiouſte à icelle premiere particule, & ſont 1, dont le double eſt 6, & la racine de 6, eſt $\sqrt{6}$, & autant eſt la ſomme de l'addition des deux racines propoſees.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouſter ſont diſſemblables, il faut diuiſer la plus grande par la moindre, & au quotient adiouſter 1, (ſinon que leſdites racines fuſſent incommenſurables: car alors l'addition d'icelles ſe fera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —) puis par le produict ſoit multipliee la plus petite racine; & le produict de la multiplication ſera la ſomme de l'addition. Comme pour exemple: ſoit $\sqrt{(8+\sqrt{48})}$ à laquelle il faut adiouſter $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Ie diuiſe celle là par ceſte-cy, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'eſt à dire 2, auquel i'adiouſte 1, & ſont 3, par leſquels ie multiplie $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, & vient $\sqrt{(18-\sqrt{243})}$ pour la ſomme des deux racines propoſees à adiouſter.

Item ſoit $\sqrt{(10+\sqrt{36})}$, qu'il faut adiouſter à $\sqrt{(11+\sqrt{25})}$. Ie diuiſe ceſte-cy par celle là, & vient 1 au quotient, auquel i'adiouſte vne vnité, & ſont 2, par leſquels ie multiplie $\sqrt{(10+\sqrt{36})}$, & vient $\sqrt{64}$, c'eſt à dire 8, pour la ſomme de l'addition des deux racines propoſees.

Maintenant ſi d'vne racine vniuerſelle de nombre compoſé, il en faut ſouſtraire vne autre ſemblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule ſoit oſté du quarré de la premiere, & la racine du reſte ſoit oſtee d'icelle premiere particule, puis ſoit doublé ce dernier reſidu, & la racine de ce double ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$. Le quarré de la premiere particule eſt 144, duquel i'oſte 6, quarré de la derniere particule, & reſte 138, dont la racine eſt $\sqrt{138}$, que ie ſouſtrais de la premiere particule 12, & reſte $12-\sqrt{138}$, que ie double, & viennent $24-\sqrt{552}$, dont la racine eſt $\sqrt{(24-\sqrt{552})}$, qui eſt le reſte requis.

Mais ſi les racines ſont diſſemblables: pour faire la ſouſtraction, il faut diuiſer la plus grande par la moindre, & du quotient oſter 1; (ſinon que les racines propoſees fuſſent incommenſurables: Car alors la ſouſtraction ſe

ſera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —). Puis par le reſte ſoit multipliee la moindre racine, & le produit ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\gamma(2+\gamma 3)$ qu'il faut ſouſtraire de $\gamma(8+\gamma 48)$. Ie diuiſe ceſte-cy par celle-là, & vient au quotient $\gamma 4$, c'eſt à dire 2, dont i'oſte vne vnité, & reſte 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\gamma(2+\gamma 3)$, & vient la meſme $\gamma(2+\gamma 3)$ pour le reſte de la ſouſtraction.

Item ſoit $\gamma(486-\gamma 162)$, de laquelle faut ſouſtraire $\gamma(\gamma 6-\gamma 2)$: ie diuiſe celle-là par celle-cy, & vient au quotient $\gamma 9$, c'eſt à dire 3, dont i'oſte 1, & reſte 2, par leſquels ie multiplie la moindre racine $\gamma(\gamma 6-\gamma 2)$, & vient au produict $\gamma(\gamma 96-\gamma 32)$ pour le reſte de la ſouſtraction requis.

De l'extraction des racines des binomes, & reſidus.

CHAP. XXIIII.

QVand deux quelconques nombres ſont conioints par le ſigne +, ils ſont ordinairement nommez Binome: comme $\gamma 12+\gamma 3$: & $\gamma 18+\gamma 8$. Mais eſtans accouplez par le ſigne —, ils ſont appellez Apoteme ou Reſidu: Comme $\gamma 12-\gamma 3$: & $\gamma 18-\gamma 8$. Et plus de deux nombres ainſi accouplez, ſont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\gamma 17+\gamma 10-\gamma 3$: ou $\gamma 17-\gamma 10+\gamma 3$, ſont dits Trinome: & $\gamma 17+\gamma 10+\gamma 3+\gamma 2$: ou $\gamma 17-\gamma 10+\gamma 3+\gamma 2$, ſont appellez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure, prop. 37 & 74 appelle ſeulement Binome, ou reſidu, quand les deux nombres conioints par le ſigne + ou —, ſont rationnels commenſurables en puiſſance ſeulement: il conſtitue de ſix ſortes de Binome, & autant de reſidu, chacun deſquels il definit, & enſeigne à trouuer au meſme liure. Or pour extraire la racine quarree d'iceux Binomes & reſidus, il y a diuerſes manieres, deux deſquelles nous enſeignerons icy, & au prealable le probleme ſuiuant.

Coupper vn nombre donné en deux parties, telles que le nombre produit d'icelles ſoit egal à vn nombre donné, qui ne ſoit plus grand que le quarré de la moitié d'iceluy nombre propoſé à diuiſer, ou (qui eſt le meſme) que la quatrieſme partie du quarré dudit nombre.

Qu'il faille coupper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliées entr'elles, leur produict ſoit 75, qui eſt moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nõbre propoſé 20. Soit oſté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, & reſteront 25, dont ſoit pris la racine quarree, laquelle ſera 5, & ſoit icelle adiouſtee à 10, moitié du nombre propoſé à diuiſer, & viendra 15, qui ſera le plus grand nombre cherché, mais icelle racine 5 eſtant oſtée d'icelle moitié 10, reſteront 5, qui ſera le moindre nombre requis: tellement donc que les deux nombres 15 & 5, ſont parties du nombre 20, telles que multipliees entr'elles, elles produiſent 75, ainſi qu'il eſtoit requis.

Maintenant ſoit le binome $38+\gamma 288$, duquel il faut extraire la racine quarrée. Soit couppé le plus grand nom 38 en deux parties, telles que leur

produit ſoit le nombre 72, quatrieſme partie du quarré du moindre nom, ſçauoir de 288, leſquelles parties ſeront trouuees par le prob. cy-deſſus, eſtre 36 & 2: d'iceux deux nombres ſoient priſes les racines quarrees, & icelles ſeront 6 & $\sqrt{2}$, qui conioinctes par le ſigne + feront $6+\sqrt{2}$, qui ſera la racine quarree du binome propoſé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$ eſtans accouplees par le ſigne — feront $6-\sqrt{2}$, qui ſera la racine quarree du reſidu $38-\sqrt{288}$. Item la racine quarree du binome $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, ſera trouuee en la meſme maniere eſtre $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{2}}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom d'iceluy binome eſtant coupé en deux parties, telles que leur produit ſoit 6, quatrieſme partie de 24, quarré du moindre nom: icelles parties ſeront trouuees eſtre $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les racines conioinctes par le ſigne +, ſont $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{2}}$.

Pour autrement extraire la racine quarree du binome $38+\sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, oſter le quarré du moindre nom, & reſteront 1156, deſquels ſoit pris le quart, qui ſera 289, duquel ſoit pris la racine quarree, laquelle ſera 17, qu'il faut adiouſter, & ſouſtraire de la moitié du plus grand nom, ſçauoir de 19, & viendront 36, & 2, deſquels deux nombres ſoient priſes les racines quarrees, & ſeront 6, & $\sqrt{2}$, qui accouplees par le ſigne +, ſeront $6+\sqrt{2}$ pour la racine quarree du binome $38+\sqrt{288}$, comme deuant. Par la meſme maniere la racine quarree du reſidu $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, ſera trouuee eſtre $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{12})}-\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{12})}$.

Quant à la preuue, elle ſe fait comme en l'extraction des nombres abſolus, ſçauoir eſt, multipliant la racine trouuée par ſoy-meſme.

Or voila ſommairement les operations plus ordinaires & vſitees en l'Algebre numeralle: Et afin de donner aux apprentifs & peu verſez en ceſte ſcience, tant plus de cognoiſſance de ſa pratique, nous finirons ce traicté par quelques problemes ou queſtions, auec leurs ſolutions, au moyen deſquelles & des preceptes cy-deuant enſeignez on en pourra ſouldre infinis autres.

Diuerſes queſtions & problemes, auec leurs ſolutions.

CHAP. XXV.

1. *EN vne armée de 24000 hommes, il y a de trois nations, ſçauoir, François, Suiſſes & Allemans: mais le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt ſeptuple du nombre des Allemans: & le nombre des François ioinct à celuy des Allemands eſt quintuple des Suiſſes: On demande quel eſt le nombre de chaque nation?*

Premierement poſons 1☉, pour le nombre des Allemans: donc le nombre des François & des Suiſſes enſemble ſera $24000-1☉$; & partant $7☉$ ſeront egales à $24000-1☉$. Adioutons donc 1☉ de part & d'autre, & nous aurons $8☉$ egales à 24000; par conſequent 1☉, qui eſt le nombre des Allemands ſera 3000: parquoy le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt 21000. Or poſons 1☉ pour les Suiſſes: & les François ſeront $21000-1☉$: Et puis que le nombre des François & des Allemands enſemble, eſt quintuple de celuy des Suiſſes, $24000-1☉$ ſeront egales à $5☉$: adioutons de part & d'autre 1☉, & viendront $6☉$ egales à 24000: partant 1☉ vaudra 4000, qui eſt le nombre des Suiſſes: & par conſequent il y a 17000 François.

2. *Il y a*

2 *Il y a vne armee composée de François, Allemans & Anglois: les François sont 25000: les Allemans sont moitié des François & Anglois, & les Anglois sont la huictiesme partie des François & Allemans: il faut trouuer le nombre tant des Allemans que des Anglois, & combien il y a d'hommes en toute l'armee.*

Soit posé 1ℛ pour les Allemans: donc les François & les Anglois ensemble seront 2ℛ, & toute l'armee sera 3ℛ. Et puis que les Anglois sont la huictiesme partie des François & des Allemans ensemble; & que les Allemans & François sont ensemble 1ℛ+25000: les Anglois seront $\frac{1}{8}$ℛ+3125. Parquoy veu que les François sont 25000, les Allemans 1ℛ, & les Anglois $\frac{1}{8}$ℛ+3125, toute l'armee sera $1\frac{1}{8}$ℛ+28125 egale à 3ℛ. Ostant donc $1\frac{1}{8}$ℛ de part & d'autre, l'equation sera entre 28125, & $1\frac{7}{8}$ℛ: parquoy diuisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, viendra le nombre 15000, pour la valeur de 1ℛ, qui est le nombre des Allemans; & partant les François & Allemans seront ensemble 40000, dont la huictiesme partie est 5000 pour le nombre des Anglois: & par consequent toute l'armée sera de 45000 hommes.

3. *Il y a vne colomne quadrangulaire rectangle de laquelle la base a les costez en raison sesquitierce, & sa hauteur est au plus grand costé de la base en raison double superbipartiente tierce, & la solidité d'icelle colomne contient 93312 toises: il faut trouuer chacune des dimensions susdictes.*

Le moindre costé de la base soit posé 3ℛ, & le plus grand 4ℛ: mais la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ afin qu'elle soit au plus grand costé 4ℛ, en raison double superbipartiente tierce, & le plus grand costé au moindre en raison sesquitierce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent 128c, egaux à 93312 solidité de la colomne. Diuisant donc 93312 par 128, viennent 729 pour 1c, & 9 pour 1ℛ: donc le moindre costé de la base, lequel nous auons posé estre 3ℛ, sera 27: & le plus grand 4ℛ, sera 36; & la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ sera 96. Et ces trois nombres 27, 36, 96 multipliez entr'eux produisent la solidité proposée 93312.

4. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est 30, & les costez d'iceluy sont en raison sesquialtere: il faut trouuer iceux costez, & le diametre.*

Soit posé le moindre costé 2ℛ, & partant le plus grand qui doit estre sesquialtere à iceluy sera 3ℛ: de la multiplication des costez entr'eux, sera produit 6q egaux à 30, aire donné. Diuisant donc 30 par 6, viendront 5 pour 1q; & partant 1ℛ, sera $\sqrt{5}$. Et pource que nous auons posé le moindre costé estre 2ℛ, iceluy sera $\sqrt{20}$, nombre double de $\sqrt{5}$; & le plus grand costé 3ℛ. sera $\sqrt{45}$, nombre triple de $\sqrt{5}$. Et pource que les quarrez des costez 20 & 45 sont ensemble egaux au quarré du diametre, le quatré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy diam. $\sqrt{65}$.

5. *Il y a vn rectangle dont la difference des costez est $\sqrt{32}$, & leur raison triple: trouuer tant iceux costez, que l'aire d'iceluy rectangle.*

Posons que le moindre costé soit 1ℛ: Donc l'autre sera 3ℛ, puis qu'ils sont en raison triple: Mais puis que leur difference est 2ℛ, & la donnee est $\sqrt{32}$: icelles 2ℛ seront egales à $\sqrt{32}$; & consequemment 1ℛ vaudra $\sqrt{8}$, qui est le moindre costé, & partant le plus grand qui luy est triple sera $\sqrt{72}$: Et puis que l'aire d'vn rectangle s'obtient en multipliant vn costé par l'autre, si on multiplie $\sqrt{72}$ par $\sqrt{8}$, viendront $\sqrt{576}$, c'est à dire 24 pour l'aire du rectangle proposé.

6. *Il y a vn rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarrez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouuer les costez, l'aire, & le diam. dudit rectangle.*

Soit posé le moindre costé estre 1ℵ, & le plus grand 7ℵ: donc la somme d'iceux costez sera 8ℵ, & leurs quarrez, sçauoir 1q & 49q, adioustez ensemble feront 50q, centuple de 8ℵ. Il y a donc equation entre 50q & 800ℵ. Et diuisant 800 par 50, viendront 16 pour 1ℵ, moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112, & l'aire sera 1792, car c'est le produit d'vn costé multiplié par l'autre: Mais le diametre sera √12800. Car les quarrez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128, qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, dont la racine quarree, sçauoir est √12800 sera ledit diametre.

7. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est 80, & la difference des costez est 2: trouuer le diametre, & les costez d'iceluy rectangle.*

Soit posé le moindre costé de 1ℵ; & partant le plus grand sera 1ℵ+2. Ces costez multipliez entr'eux donnent pour l'aire 1q+2ℵ, lequel est egal à l'aire donné 80. Ostant donc 1ℵ de chacun, l'equation sera entre 1q, & 80—2ℵ. La moitié du nombre des racines est 1, dont le quarré est 1, qui adiousté à 80, sera 81, dont la racine quarree est 9, de laquelle ostant la susdite moitié 1, restera 8, estimation de 1ℵ, qui est pour le moindre costé: Donc le plus grand excedant iceluy de 2 sera 10. Iceux costez multipliez entr'eux produisent 80 aire donné, & les deux quarrez des costez sont 64 & 100, egaux au quarré du diametre: & partant le quarré du diametre sera 164, & iceluy diametre √164.

8. *Il y a vn rectangle duquel le diametre est 30, & la somme des costez 42: trouuer iceux costez, & l'aire du rectangle.*

Soit posé vn costé de 1ℵ, & partant l'autre sera 42—1ℵ: donc leurs quarrez seront 1q, & 1764—84ℵ+1q, qui sont ensemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation sera entre 2q+1764—84ℵ & 900. Et adioustant 84ℵ à chacun, elle sera entre 84ℵ+900, & 2q+1764. Et ostant 900 de chacun, restera equation entre 84ℵ, & 2q+864. Et derechef ostant 864 de chacun, elle sera entre 2q, & 84ℵ—864. Parquoy diuisant tout par 2, l'equation viendra entre 1q & 42ℵ—432. La moitié du nombre des racines est 21, dont le quarré est 441, duquel ostant 432, resteront 9, dont la racine quarree est 3, qui adioustee à la susdite moitié 21, viendront 24 pour le plus grand costé: & partant resteront 18 pour le moindre: & iceux costez multipliez entr'eux, produisent 432 pour l'aire du rectangle.

9. *Il y a vn quarré duquel le diametre & le costé ensemble font 6: trouuer iceux costé & diametre.*

Soit posé 1ℵ pour le costé, & partant le diametre sera 6—1ℵ. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré du costé est 1q; & le quarré du diametre est 36—12ℵ+1q: il y aura equation entre 2q, & 36—12ℵ+1q: parquoy ostant 1q de chacun, demeurera equation entre 1q, & 36—12ℵ: maintenant la moitié du nombre des racines est 6, dont le quarré est 36, qui adioustez au nombre 36, viennent 72, dont la racine est √72, de laquelle estant ostee la susdite moitié 6, restera √72—6, pour la valeur de 1ℵ; & autant sera le costé du quarré; lequel estant osté de 6, resteront 12—√72 pour le diametre.

10. *Il y a vn autre quarré duquel le diametre surpasse le costé de 3: trouuer lesdits costé, & diametre.*

Pour le costé soit posé 1ℵ, & partant le diametre sera 1ℵ+3. Et pource que le

quarré du diametre eſt double du quarré du coſté ; lequel le quarré du coſté eſt 1q; le quarré du diametre ſera 1q+6R+9: L'equation ſera donc entre 2q, & 1q+6R+9; & oſtant 1q de chacun, reſtera l'equation entre 1q, & 6R+9. La moitié du nombre des racines eſt 3, dont le quarré eſt 9, qui adiouſté au nombre 9, faict 18, dont la racine eſt V18, à laquelle ſoit adiouſtée la ſuſdite moitié 3, & ſera faict V18+3, valeur de 1R, qui eſt pour le coſté du quarré: & partant le diametre ſera V18+6.

11. *Il y a vn quarré duquel le coſté multiplié par le diametre faict* 10 *: trouuer leſdits coſté, & diametre.*

Soit poſé le coſté de 1R: & puis qu'iceluy coſté multipliant le diametre fait 10: par le contraire diuiſant 10, le quotient donnera le dit diametre, & par conſequent iceluy diametre ſera $\frac{10}{1R}$. Et pource que le quarré du diametre eſt double du quarré du coſté, ſçauoir eſt de 1q, & le quarré dudit diametre eſt $\frac{100}{1q}$; il y aura equation entre 2q, & $\frac{100}{1q}$, laquelle par la multiplication croiſee ſera reduitte à celle d'entre 2qq, & 100. Diuiſant donc 100 par 2, viendront 50 pour la valeur de 1qq: & partant 1R ſera VV50, & tel eſt le coſté du quarré propoſé. Parquoy ſi on diuiſe 10 par VV50, viendront au quotient VV200 pour le diametre dudit quarré.

12. *Il y-a vn quarré duquel le coſté multiplié par la difference d'entre iceluy coſté, & le diametre fait* 15 *: trouuer le diametre, & le coſté dudit quarré.*

Soit poſé le coſté eſtre 1R, & partant la difference d'entre le coſté & le diametre ſera $\frac{15}{1R}$, laquelle eſt trouuee diuiſant 15 par 1R, ſçauoir eſt afin que le quotient multiplié par le diuiſeur 1R, produiſe le nombre diuiſé 15. Et pource que le diametre excede le coſté de ceſte difference, le diametre ſera 1R+$\frac{15}{1R}$. Et d'autant que le quarré du diametre eſt double du quarré du coſté: & le quarré d'iceluy coſté eſt 1q, & le quarré du diametre eſt $\frac{2qq+30q+225}{1q}$, il y aura equation entre 2q, & $\frac{2qq+30q+225}{1q}$, qui par multiplication en croix ſera reduite à l'equation d'entre 2qq, & 1qq+30q+225. Oſtant donc 1qq de chacun, l'equation ſera entre 1qq & 30q+225. La moitié du nombre des quarrez eſt 15, dont le quarré eſt 225, qui adiouſté à 225, viennent 450, dont la racine quarree eſt V450, à laquelle adiouſtant la ſuſdite moitié 15, viendra V450+15 pour 1q; & partant 1R ſera V(V450+15): & autant eſt le coſté requis, dont le quarré V450+15 eſtant doublé donnera V1800+30, pour le quarré du diametre: & partãt iceluy diametre ſera V(V1800+30), duquel eſtant ſouſtraict le coſté, reſtera la difference V(V1800+30)—V(V450+15), qui multipliee par le coſté V(V450+15) ſera produict le nombre 15.

13. *Il y a vn triangle duquel les ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire ſont* 16 *&* 5, *mais l'aggregé des deux coſtez eſt* 33: *On demande combien eſt chacun deſdits coſtez, & conſequemment l'aire d'iceluy triangle?*

Ie poſe que le moindre coſté ſoit 1R: donc l'autre coſté ſera 33—1R, & partant les quarrez d'iceux coſtez ſeront 1q, & 1q—66R+1089: du moindre d'iceux quarrez ſoit oſté le quarré du moindre ſegment, & reſtera 1q—25 pour le quarré de la perpendiculaire. Mais du quarré du plus grand coſté ſoit auſſi oſté le quarré du grand ſegment, & reſteront encore 1q—66R+833 pour le quarré de la perpend. Partant il y a equation entre 1q—25, & 1q—66R+833. Parquoy adiouſtant & ſouſtraiant de part & d'autre ſelon les preceptes des Equations, viendront 66R egales à 858. Donc la valeur de 1R ſera 13, qui eſt le moindre coſté requis, & partant l'autre ſera 20, & la ſuperficie 126.

14. *Il y a vn triangle rectangle, duquel vn costé de l'angle droict est* $\sqrt{18}+3$, *mais l'autre costé & l'hypotenuse font ensemble* $\sqrt{162}+9$: *on demande combien est chaque costé.*

Posons 1ℛ pour le costé de l'angle droict requis; & partant l'hypotenuse sera $\sqrt{162}+9-1ℛ$: donc les quarrez des deux costez dudit angle droict seront $27+\sqrt{648}$, & $1q$; lesquels deux quarrez ensemble sont egaux au quarré de l'hypotenuse, c'est assauoir à $243-18ℛ+1q+\sqrt{52488}-\sqrt{648}q$: Parquoy si on oste de part & d'autre $\sqrt{648}$, viendra equation entre $1q+27$, & $243-18ℛ+1q+\sqrt{41472}-\sqrt{648}q$: (car ostant $\sqrt{648}$ de $\sqrt{52488}$, qui sont commensurables, restera $\sqrt{41472}$) & si de chaque terme d'icelle equation on osté $1q$, & 27, restera encore equation entre 0, & $216-18ℛ+\sqrt{41472}-\sqrt{648}q$: mais adiouſtant de part & d'autre $18ℛ$, & $\sqrt{648}q$, l'equation viendra entre $\sqrt{648}q+18ℛ$, & $216+\sqrt{41472}$. Or d'autant que le nombre $\sqrt{648}q$ a esté procreé multipliant deux fois $\sqrt{162}$ par 1ℛ il doit estre pris pour nombre de racines, suiuant ce que nous auons dit à la page 393: & partant tout ce nombre $\sqrt{648}q+18ℛ$ est le nombre des racines, & consequemment il faut par iceluy nombre (delaissant les signes cossiques q & ℛ) diuiser l'autre nombre de l'equation $216+\sqrt{41472}$, afin d'auoir la valeur d'vne racine: pour faire laquelle diuision il faut, suiuant ce qui est enseigné au chap. 20. multiplier tant le diuiseur $\sqrt{648}+18$, que le diuidande $216+\sqrt{41472}$, par $\sqrt{648}-18$: quoy faisant viendront 324 pour nouueau diuiseur, & $\sqrt{3359232}+1296$ pour nouueau diuidande: & la diuision faite, le quotient sera $\sqrt{32}+4$, qui est la valeur de 1ℛ: & autant est le costé cherché, que nous auons posé estre 1ℛ, lequel costé estant soustrait de $\sqrt{162}+9$, restera $\sqrt{50}+5$ pour l'hypotenuse, puis que l'aggregé d'iceluy costé, & de ladite hypotenuse est $\sqrt{162}+9$.

15. *Il y a vn iardin rectangulaire, dont la diagonalle excede la longueur dudit iardin de* 4 *perches, & la largeur de* 8. *On demande combien est la longueur & la largeur dudit iardin, & consequemment l'aire d'iceluy.*

Ie pose que la largeur dudit iardin soit 1ℛ: donc la diagonalle sera $1ℛ+8$, & son quarré $1q+16ℛ+64$, duquel estant osté le quarré de la largeur, sçauoir $1q$, restent $16ℛ+64$ pour le quarré de la longueur dudit iardin, & partant icelle longueur sera $\sqrt{(16ℛ+64)}$, qui ostee de la diagon. resteront $1ℛ+8-\sqrt{(16ℛ+64)}$, qui sont egaux à l'excez donné 4: adiouſtant donc & souſtraiant de part & d'autre ainsi qu'il appartient, viendra $1q$ egal à $8ℛ+48$. Parquoy la valeur de 1ℛ sera 12: & autant est la largeur du iardin, & consequemment la diagonalle d'iceluy sera 20, la longueur 16, & la superficie 192.

16. *Il y a vn autre iardin rectangulaire, dont les quatre costez auec la diagonalle font ensemble* 38, *& la superficie d'iceluy est* 48. *Assauoir combien est la longueur & la largeur dudit iardin.*

Ie pose 1ℛ pour la somme de la longueur & de la largeur dudit iardin, & consequemment les quatre costez seront 2ℛ, & la diagon. $38-2ℛ$: partant son quarré est $1444-152ℛ+4q$: à iceluy quarré soit adiousté le double de la superficie donnee, (pource que par la 4. p. 2. le quarré de l'aggregé des costez comprenant l'angle droict d'vn rectangle, est egal aux quarrez d'iceux costez auec deux fois leur rectangle) & viendront $1540-152ℛ+4q$, qui sont egaux au quarré de la somme de la longueur & largeur, qui est $1q$. Adiouſtons & souſtraions de part & d'autre ainsi qu'il appartient, & viendra $1q$ egal à $50\frac{2}{3}ℛ-513\frac{1}{3}$. Parquoy 1ℛ vaut 14 1 Et autant est

la ſomme de la longueur & de la largeur du iardin propoſé. Parquoy les quatre coſtez ſeront enſemble 28, & la diagonalle 10. Nous auons donc maintenant l'aggregé des deux coſtez d'vn rectangle, ſçauoir 14, & la diagon. d'iceluy 10: Partant nous trouuerons ſuiuant ce qui eſt enſeigné cy-deuant en la 8. queſtion que la longueur du iardin propoſé eſt 8, & ſa largeur 6.

17. *Il y a vne piece de terre en forme de Rhombe, dont chaque coſté eſt de 20 perches, & la difference des diagon. 4: Aſſauoir combien eſt chacune deſdites diag. & la ſuperficie de ladite piece.*

Ie poſe que la moitié de la moindre diagon. ſoit 1ℵ: Donc la moitié de l'autre ſera 1ℵ+2: & partant les quarrez d'icelles moitiez ſeront 1q, & 1q+4ℵ+4, leſquels quarrez font enſemble 2q+4ℵ+4, & ſont egaux au quarré du coſté donné, qui eſt 400. Parquoy procedant à la reduction de ceſte equation ainſi qu'il appartient, ſera trouué 1q egal à 198—2ℵ, & partant la valeur de 1ℵ ſera √199—1, & par conſequent la moindre diagon. requiſe ſera √796—2, & y adiouſtant la difference donnee, viendront √796+2 pour la plus grande diagonalle, laquelle multipliee par la ſuſdite moitié √199—1, donne 396 pour la ſuperficie de ladite piece de terre.

18. *Il y a vne autre piece de terre en Rhombe, dont chaque coſté eſt de 15 perches, & la ſuperficie 216: On demande combien eſt chaque diagonalle de ladite piece.*

Ie poſe que la moitié de la petite diagonalle ſoit 1ℵ: Donc ſon quarré eſt 1q, qui oſté de 225, quarré du coſté donné 15, reſtent 225—1q pour le quarré de la moitié du grand diametre, qui partant eſt √(225—1q), & icelle moitié eſtant multipliee par tout l'autre diam. ſçauoir eſt par 2ℵ, viendront √(900q—4qq) pour la ſuperficie de la piece. Mais elle a eſté propoſee de 216: Il y a donc equation entre 216, & √(900q—4qq), & conſequemment entre leurs quarrez 46656, & 900q—4qq. Donc auſſi entre 1qq, & 225q—11664: partant 1ℵ vaut 9, & conſequemment la moindre diagonalle eſt 18, & la grande 24.

19. *Il y a encore vn Rhombe, duquel la ſomme des quatre coſtez & des deux diagonalles eſt 68, & la difference d'icelles diagonalles 4: On demande combien eſt chaque coſté dudit Rhombe, chacune des diagonalles, & la ſuperficie.*

Ie poſe que le coſté dudit Rhombe ſoit 1ℵ: Donc les quatre coſtez enſemble ſeront 4ℵ, & les diagonalles enſemble 68—4ℵ. Et puis que la difference d'icelles eſt propoſee 4, la moindre deſdites diagonalles ſera 32—2ℵ, & la plus grande 36—2ℵ. Parquoy leurs moitiez ſeront 16—1ℵ, & 18—1ℵ, dont les quarrez font enſemble 2q—68ℵ+580, & ſont egaux au quarré du coſté dudit Rhombe, c'eſt à dire à 1q. Parquoy adiouſtant & ſouſtraiant de part & d'autre ainſi qu'il appartient, on trouuera 1q egal à 68ℵ—580: & partant la valeur de 1ℵ ſera 10, la moindre diagon. 12, & la plus grande 16. Mais multipliant l'vne d'icelles diagonalles par la moitié de l'autre viendront 96 pour la ſuperficie dudit Rhombe propoſé.

20. *Trois marchans s'aſſocians enſemble le premier met 140 liures plus que le ſecond: mais le ſecond & le troiſieſme enſemble mettent 336 liures: Eſt aduenu qu'il ont gagné 264 liures, dont le troiſieſme en a eu 84 liures pour ſa part. On demande combien ils ont mis chacun, & combien le premier & le ſecond ont eu chacun du gain.*

Poſons que le ſecond ait mis en la ſocieté 1ℵ: donc la miſe du premier ſera 1ℵ+140, & celle du troiſieſme 336—1ℵ; conſequemment la miſe de tous les trois ſera 476+1ℵ. Et puis que le gain du 3. eſt 84 liures, & le gain total 264, poſez les ſuſdits nombres en ordre de regle de trois ainſi:

si 476+1R *donnent* 264, *combien donneront* 336—1R? 84.

Or d'autant que de quatre nombres proportionaux le produict du premier par le quatrieſme doit eſtre egal au produit du ſecond par le tiers; il y aura equation entre 39984+84R & 88704—264R: laquelle equation eſtant reduite ainſi qu'il appartient, viendra entre 348R & 48720, & par conſequent 1R vaut 140 liures, qui eſt la miſe du ſecond: partant la miſe du premier ſera 280 liures, & celle du troiſieſme 196: tellement que toute la miſe ſera 616 liures. Parquoy nous trouuerons le gain du premier diſant par regle de trois,

si 616 *donnent* 264, *combien donneront* 280?

Et viendront 120 liures pour le gain du premier: qui auec celuy du troiſieſme fait 204 liures, & partant le gain du ſecond ſera 60 liures.

21. *Deux Marchands s'eſtans aſſociez enſemble ont gaigné* 100 *liures, & le premier, tant pour le principal qui a demeuré trois mois en la ſocieté, que pour ſon gain prend* 100 *liures. Et l'autre duquel le principal n'a demeuré que deux mois en ladite ſocieté prend* 125 *liures. Aſſauoir combien ils auoient mis chacun.*

Premierement, adiouſtons les deux ſommes qui ont eſté priſes, & viendront 225: oſtons en tout le gain, & reſteront 125 liures pour toute la miſe. Poſons 1R pour la miſe du premier, & par conſequent la miſe de l'autre ſera 125—1R: Chacune de ces miſes ſoit multipliee par ſon temps: viendra au premier 3R & à l'autre 250—2R: mais l'aggregé ſera 250+1R: Diſons donc par regle de trois, Si 250+1R donnent 100 de gain, que donneront les 3R du premier? & la regle faite on aura pour ſon gain $\frac{300R}{250+1R}$ tellement que l'aggregé de ſa miſe & gain ſera $1R+\frac{300R}{250+1R}$, qui eſt egal à 100: & par conſequent $\frac{300R}{250+1R}$ ſeront egaux à 100—1R, qui reduits par multiplication croiſee, viendront 300R egales à 25000—150R—1q: & partant 1q ſera egal à 25000—450R: parquoy prenant la racine quarree dudit nombre 25000—450R on trouuera 50 pour la valeur de 1R, qui eſt la miſe du premier, laquelle oſtee de 125 reſteront 75 pour la miſe de l'autre.

Or eſt à noter que quand telles queſtions ſe font de trois marchans, elles tombent aux equations cubiques: de quatre aux quarrez de quarré: & ainſi de ſuitte: deſquelles equations nous n'auons eſtimé eſtre à propos de parler en ce ſommaire & abbregé d'Algebre, mais les auons reſeruees pour eſtre traitees amplement en vn autre lieu.

22. *Vn marchand eſtant allé traffiquer à trois foires; il a autant gaigné à la premiere qu'il y auoit porté d'argent, tellement qu'apres ceſte premiere negotiation il auoit le double de ſon argent: à la ſeconde ſon gain eſtoit* 6 *liures dauantage que la racine quarree de ce double; mais à la troiſieſme ſon gain eſtoit* 4 *liures dauantage que le quarré du gain fait à la ſeconde foire: & apres toutes ces negotiations, il trouue qu'il a gaigné à ces trois foires* 1786 *liures. On demande quelle ſomme d'argent ce marchand auoit au commencement, & combien il a gaigné à chaque foire.*

Suppoſons qu'à la ſeconde foire il aye gaigné 1R: donc puis que ce gain eſt 6 dauantage que la racine quarree du double de ce qu'il auoit porté ou gaigné à la premiere foire; ſi nous multiplions 1R—6 en ſoy, viendront 1q—12R+36, pour iceluy double; & pourtant le gain de la premiere foire ſera $\frac{1}{2}q-6R+18$: mais le gain de la troiſieſme eſt 4 dauantage que le quarré du gain de la ſeconde que nous auons poſé eſtre 1R: donc iceluy gain ſera 1q+4. Adiouſtons ces trois gains enſemble

1q+4, 1R, & $\frac{1}{2}$q—6R+18, & viendront $1\frac{1}{2}$q—5R+22 pour tous lesdits gains, qui partant sont egaux à 1786. Ostons de part & d'autre 22, & l'equation viendra entre $1\frac{1}{2}$q—5R, & 1764; adiouſtons les 5R, & nous aurons l'equation entre $1\frac{1}{2}$q, & 5R+1764. Puis à cauſe de la fraction, reduiſons & multiplions en croix, & l'equation viendra entre 3q, & 10R+3528: & diuiſons tout par 3, viendra equation entre 1q, & $3\frac{1}{3}$R+1176. Parquoy prenant la racine quarrée de ce nombre, nous trouuerons 36 pour la valeur d'vne racine: Et partant la ſomme du gain fait à la ſeconde foire ſera 36 liures; & puis qu'elle vaut 6 liures dauantage que la racine quarree du double de la ſomme gaignee à la premiere foire, oſtons 6 liures, & reſteront 30, dont le quarré 900, eſt le double de la ſomme, tant de l'argent porté à la premiere foire, que du gain fait à icelle, parquoy le marchand auoit porté 450 liures à ladite foire, & y gaigna autant. Mais puis que le gain fait à la troiſieſme foire eſt 4 liures dauantage que le quarré de la ſomme du gain fait à la ſeconde, multiplions le gain 36 en ſoy, & viendront 1296, à quoy adiouſtons 4, & nous aurons 1300 liures pour le gain fait à ladite troiſieſme foire: & que cela ſoit, adiouſtons enſemble tous ces trois gains 450, 36 & 1300 liures; viendront 1786 liures pour tout le gain fait aux trois foires ſuſdites, ainſi que veut la propoſition.

Que ſi on diſoit qu'ayant gaigné à la troiſieſme foire 4 liures dauantage que le quarré de toute la ſomme qu'il auoit au precedent; tout ſon argent eſt 877036: Nous poſerions qu'apres la ſeconde foire il eut 1R: Donc le gain de la troiſieſme foire ſeroit 1q+4: & partant tout ce qu'il auroit apres ces negotiations ſeroit 1q+1R+4, egaux à 877036: Oſtons donc 1R & 4 de part & d'autre, & reſtera 1q egal à 877032—1R. Or la moitié du nombre des racines eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$, qui adiouſté à 877032, font $877032\frac{1}{4}$, dont la racine quarree eſt $936\frac{1}{2}$, de laquelle ſoit oſtée la ſuſdite moitié du nombre des racines, & reſteront 936 pour la valeur de 1R. Et partant le marchand auoit autant d'argent apres la ſeconde foire: Mais oſtons en 6 qu'il auoit gaigné plus que la racine de ce qu'il auoit apres la premiere foire; & pour ce gain poſons 1R: Donc il auoit 1q apres ladite premiere foire: Parquoy 1q+1R ſeront egaux à 930; & oſtant 1R, l'equation ſe trouuera entre 1q, & 930—1R; & procedant à l'extraction, nous trouuerõs 30 pour la valeur de 1R: partant 36 eſt le gain de la ſeconde foire, qui oſté des 936, reſtent 900 pour ce qu'il auoit apres la premiere foire, dont la moitié 450, eſt ce qu'il y auoit apporté, ainſi que deuant.

23. *Deux hommes mettant leur argent enſemble, la ſomme eſt* 200 *eſcus, mais diuiſant l'argent du ſecond par celuy du premier, le quotient eſt* $1\frac{1}{2}$: *Il faut trouuer l'argent de chacun.*

Soit poſé 1R pour le premier, & pour le ſecond 1A: il faut donc reſoudre la ſeconde racine en premiere ainſi. Pource que les deux enſemble ont 200 eſcus; il y aura equation entre 1R+1A, & 200. Oſtant 1R de chacun, reſtera l'equation entre 1A, & 200—1R: donc 1A ſera reduite en 200—1R. Parquoy ie poſe derechef le nombre du premier eſtre 1R, & celuy du ſecond 200—1R, qui font enſemble 200 eſcus. Ie diuiſe maintenant le nombre du ſecond par celuy du premier, & vient $\frac{200-1R}{1R}$ egal à $1\frac{1}{2}$, laquelle equation, par la multiplication en croix, ſera reduite à l'equation d'entre 400—2R, & 3R. Et adiouſtant 2R à chacun, l'equation ſera entre 400, & 5R: diuiſant donc 400 par 5, le quotient ſera 80 pour le nombre du premier: & partant le ſecond aura 120, qui diuiſez par 80, le quotient eſt $1\frac{1}{2}$.

24. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dit aux deux autres, que s'il auoit encore*

100 eſcus, il auroit autant qu'eux: le ſecond dit auſſi aux deux autres, que s'il auoit encore 100 eſcus il auroit le double de leur argent: pareillement le troiſieſme dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 eſcus, il auroit le triple de leur argent: ſçauoir combien a chacun.

Soit poſé l'argent du premier eſtre 1℞: donc auec 100, il aura 1℞+100, & autant ſera la ſomme du ſecond & du troiſieſme, & tous les trois auront 2℞+100. Or ſoit poſé la ſomme du ſecond eſtre 1A: Donc auec 100, il aura 1A+100, lequel nombre eſt double de la ſomme du premier & du tiers, laquelle eſt 2℞+100—1A: (Pource que ayans tous trois 2℞+100, ſi on oſte 1A, c'eſt à ſçauoir l'argent du ſecond, reſtera 2℞+100—1A pour la ſomme du premier & du troiſieſme.) Partant il y aura equation entre 1A+100, & 4℞+200—2A. Et adiouſtant 2A à chacun, l'equation ſera entre 3A+100, & 4℞+200: & oſtant 100 de chacun, demeurera l'equation entre 3A, & 4℞+100. Si donc les touts ſont diuiſés par 3, l'equation viendra entre 1A, & $\frac{4}{3}$℞+$\frac{100}{3}$: & partant puis que le ſecond eſt poſé auoir 1A, la ſomme d'iceluy ſera $\frac{4}{3}$℞+$\frac{100}{3}$. Finalement la ſomme du troiſieſme ſoit poſee eſtre 1B. Donc auec 100, il aura 1B+100, qui eſt nombre triplé de la ſomme du premier & du ſecond, laquelle eſt $\frac{7}{3}$℞+$\frac{100}{3}$, compoſee de 1℞ ſomme du premier, & de $\frac{4}{3}$℞+$\frac{100}{3}$ ſomme du ſecond: Il y aura donc equation entre 1B+100, & $\frac{7}{3}$℞+$\frac{100}{3}$; c'eſt à dire entre 1B+100, & 7℞+100, & oſtant 100 de chacun, l'equation ſera entre 1B, & 7℞: & partant la ſomme du tiers, qui a eſté poſee 1B, ſera 7℞. Parquoy puis que le premier a 1℞, le ſecond $\frac{4}{3}$℞+$\frac{100}{3}$: & le tiers 7℞: tous les trois enſemble auront $9\frac{1}{3}$℞+$\frac{100}{3}$. Mais tous les trois auoient auſſi 2℞+100: Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3}$℞+$\frac{100}{3}$, & 2℞+100: & oſtant 2℞ de chacun, reſtera equation entre $7\frac{1}{3}$℞+$\frac{100}{3}$, & 100: & oſtant derechef $\frac{100}{3}$, c'eſt à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3}$℞, & $66\frac{2}{3}$: diuiſant donc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 1℞, ſomme du premier: & le ſecond ayant $1\frac{1}{3}$℞+$33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{5}{11}$: & le tiers ayant 7℞, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainſi le premier auec 100, aura $109\frac{1}{11}$, egale à la ſomme du ſecond & tiers: & le ſecond auec 100, aura $145\frac{5}{11}$, qui eſt le double de la ſomme du premier & tiers: & finalement le tiers auec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui eſt le triple de la ſomme du premier & ſecond.

Fin du Sommaire de l'Algebre.

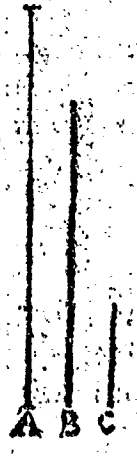
ELEMENT

ELEMENT DIXIESME.

DEFINITIONS.

1 GRANDEVRS commensurables, sont celles là qui sont mesurees par vne mesme mesure.

Ainsi les deux lignes droittes A & B, estans mesurees par vne mesme ligne C, seront dittes commensurables. Ainsi aussi vne ligne de 6 pieds est commensurable avne autre ligne de 7 pieds, pource qu'elles sont toutes deux mesurees tant par la ligne d'vn pied, que par celle d'vn demy pied, d'vn tiers de pied, &c. semblablement les superficies, qui sont mesurees par vne mesme superficie, sont dites commensurables: Item les corps, ou solides qui sont mesurés par vn mesme corps, sont aussi dits commensurables.

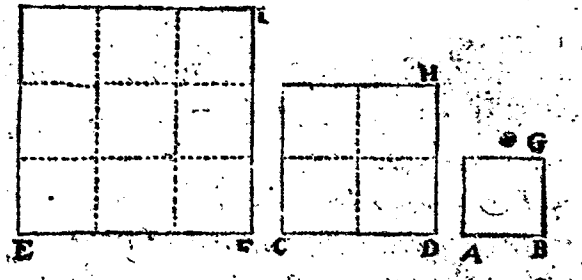


2 Mais les grandeurs incommensurables, sont celles-là qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diametre & le costé de quelconque quarré: car icelles grandeurs n'ont aucune commune mesure, comme il sera demonstré à la derniere prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçauoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles sont expliquees en ce 10. liure; & enseigné par quelles manieres elles peuuent estre trouuees: derechef, les superficies sont dites incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3 Les lignes droictes commenſurables en puiſſance, ſont celles là deſquelles les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Les lignes droictes ſont conſiderees ou ſelon leur longueur, ou ſelon leur puiſſance: & en l'vne & l'autre ſorte elles ſont dites commeſurables, & incommenſurables. Aux deux premieres definitions Euclide a expliqué quelles ſont les lignes commenſurables, & incommenſurables conſiderees ſelon leurs longitudes, mais en ceſte-cy, & en la ſuiuante, il declare quelles ſont celles dites commenſurables, & incommenſurables en puiſſance. Il dit donc icy que les lignes droictes dont les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie ſont commenſurables en puiſſance: Ainſi les lignes droictes AB & CD ſeront dites commenſurables en puiſſance, d'autant que leurs quarrez AG & CH peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie AG: Item les lignes droictes CD & EF, ſeront auſſi dites commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez CH & EI peuuent eſtre meſurez par l'eſpace ou quarré AG. Semblablement, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds ſera dite commenſurable en puiſſance à vne autre ligne de 6 pieds, parceque leurs quarrez 9 & 36 peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie: Ainſi auſſi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre √8 ſeront dictes commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez 4 & 8 ſont meſurez par vn meſme eſpace ſuperficiel: derechef, vne ligne eſtant √√20, & vne autre √√125 ſeront pareillement dites commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez √20 & √125 ſont meſurez par vne meſme ſuperficie √5: car elle eſt deux fois en √20, & 5 fois en √125.



Or eſt à noter que toutes lignes droictes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance; car les quarrez d'icelles lignes ſont meſurez par le quarré de leur commune meſure, ainſi qu'il appert aux trois premiers exemples cy-deſſus.

4 Mais les lignes droictes incommenſurables en puiſſance, ſont celles-là deſquelles les quarrez n'ont aucune commune ſuperficie qui les puiſſe meſurer.

Comme par exemple, vne ligne eſtant de 2 pieds, & vne autre √√6, icelles deux lignes ſeront dites incommenſurables en puiſſance, pource qu'il n'y a aucune ſuperficie qui meſure leurs quarrez 4 & √6: de meſme √8 & √√12 ſeront auſſi dictes incommenſurables en puiſſance, car nul eſpace ſuperficiel ne meſure leurs quarrez 8 & √12.

Or eſt icy à noter que toutes lignes (en nombres) incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude, mais non pas au contraire. Ainſi vne ligne de 2 pieds ſera bien incommenſurable en longitude à vne autre ligne de √8: mais non pas en puiſſance: & 2 qui eſt incommenſurable en puiſſance à √√8, l'eſt auſſi en longitude.

5 Cela eſtant ainſi, il eſt euident qu'à toute ligne droicte propoſee, on trouuera infinies lignes droictes commenſurables, & infinies incommenſurables: les vnes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or ceſte ligne droicte propoſee, eſt appellee rationelle.

C'eſt à dire que quand on propoſe quelque ligne droicte de grandeur cogneue & determinee, icelle eſt appellee rationelle, pource que c'eſt ſelon elle que nous ratiocinons: & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poſerons touſiours d'vn de ces nombres abſolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

6 Et les lignes droictes commenſurables à ceſte ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement ſont auſſi appellees rationelles.

7 Mais les lignes incommenſurables à ceſte ligne rationelle, ſont dictes irrationelles.

Si comparant quelque ligne droicte, à la ligne prinſe pour rationelle, & ſur laquelle nous ratiocinons, elle eſt trouuee commenſurable à icelle rationelle, ſoit en longueur, & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement, telle ligne eſt auſſi rationelle; mais ſi elle eſt incommenſurable à icelle ligne rationelle propoſee, tant en longitude qu'en puiſſance, ceſte dicte ligne eſt appellee irrationelle.

8 Le quarré deſcrit ſur vne ligne rationelle propoſee, eſt appellé rationel.

Tout ainſi que ceſte ligne-là, laquelle eſt cogneuë & determinee de certaine quantité eſt dicte rationelle; ainſi auſſi le quarré deſcrit ſur icelle ligne, eſt appellé rationel, pource qu'iceluy eſt certain & cogneu: & les ſuperficies comparees à iceluy quarré, ſont auſſi dictes rationelles, ou bien irrationelles, ſelon qu'elles ſeront trouuees commenſurables ou incommenſurables à iceluy quarré rationel, ainſi qu'il eſt dit és deux definitions ſuiuantes.

9 Les figures commenſurables à ce quarré rationel, ſont auſſi rationelles.

10 Mais celles qui luy ſont incommenſurables, ſont irrationelles & ſourdes.

11 Et les lignes droictes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſont irrationelles & ſourdes.

Or vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure, quand le quarré deſcrit ſur icelle eſt

egal à icelle figure, d'autant que tout quarré eſt la puiſſance de ſa racine ou de ſon coſté. Ainſi il a eſté dit cy-deſſus que deux lignes ſont commenſurables en puiſſance, lors que non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Or à ces definitions nous adiouſterons (apres Clauius) vne demande, & quelques communes ſentences, dont l'vſage ſera trouué en celiure

DEMANDE.

Qu'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excede quelconque grandeur propoſee de meſme genre.

COMMVNES SENTENCES.

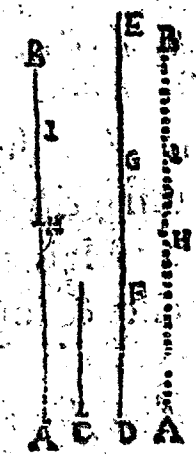
1 Vne grandeur meſurant tant de grandeurs qu'on voudra, meſure auſſi la compoſee d'icelles.

2 Vne grandeur meſurant quelconque grandeur, meſure pareillement toute grandeur que celle-là meſure.

3 Vne grandeur qui meſure toute vne grandeur, & vne retranchee d'icelle, meſure auſſi le reſte.

THEOR. 1. PROP. I.

Eſtans propoſees deux grandeurs inegales, ſi de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reſte encore plus de la moitié, & qu'en continuant cela ſe faſſe touſiours ainſi: Il demeurera en fin vne grandeur plus petite que la moindre des deux propoſees.



Soient propoſees deux grandeurs inegales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande: Ie diſque ſi d'icelle AB on retranche plus de la moitié, & du reſte encores plus de la moitié, & qu'on continue touſiours ainſi, il reſtera en fin quelque grandeur plus petite que C.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la grandeur C multipliee tant de fois que le produict excede la plus grande AB, & la produite d'icelle multiplication ſoit DE, laquelle ſera multiplice de C, & plus grande que AB: qu'elle ſoit donc diuiſee en parties egales à C, comme en DF, FG, GE: Item de AB ſoit retranché plus de la moitié, AH, & du reſte HB encore plus de la moitié HI, & en continuant touſiours cecy iuſques à ce que

AB soit diuisee en autant de parties que DE, sçauoir AH, HI, & IB. D'autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est pas plus grand que la moitié de DE: comme le retranché AH, est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB: semblablement si du plus grand reste FE, on oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit reste HB on oste plus de la moitié HI; le reste IB sera plus petit que le reste GE egal à C: & par consequent IB derniere partie de AB, sera plus petite que C. Estans donc proposees deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

On demonstrera semblablement que le mesme aduiendra si de AB, on oste la moitié AH, & du reste HB la moitié HI.

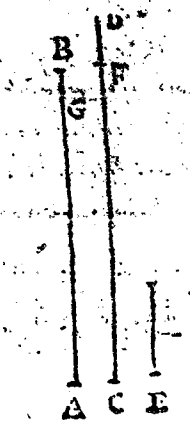
AVTREMENT. Ayant fait la mesme construction que dessus, soit prise KL autant multiple de IB que DE est multiple de C. Donc icelle KL estant diuisee en KM, MN, NL, parties egales chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE. Mais d'autant que AH est plus grande que HB, (ou egale si on a osté seulement la moitié de AB) & icelle HB plus grande que IB: aussi AH sera plus grande que IB, c'est à dire que KM. Derechef, puis que HI est plus grande que IB, (ou egale à icelle) & que icelle IB, est egale à MN; aussi HI sera plus grande que MN: (ou egale) & partant la toute AI sera plus grande que la toute KN. Adiouſtant donc les egales IB, NL, la toute AB sera plus grande que la toute KL. Mais DE est encore plus grande que AB: Donc DE sera bien plus grande que KL. Et puis que comme DE est à C, ainsi KL est à IB; (car KL est prise autant multiple de IB, que DE de C) aussi C sera plus grande que IB par la 14. p. 5. & partant le reste IB est moindre que C. Ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposees on retranche touſjours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le reste mesure la grandeur precedente: telles grandeurs seront incommensurables.

Soient proposees deux grandeurs inegales AB & CD, desquelles la moindre AB soit retranchee de la plus grande CD: puis le reste CD soit osté de AB, & qu'ainsi continuellement & alternatiuement la plus petite estant ostee de la plus grande, le reste ne mesure iamais sa grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit reste ne mesure iamais le plus grād reste: Ie dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables: & partant qu'elles ayent vne commune mesure, laquelle soit



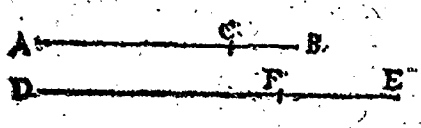
E, s'il eſt poſſible. Maintenant, de la plus grande CD ſoit retranchee CF egale à AB: Et s'il ſe peut faire, ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que le reſte DF ſoit plus petit que AB. Donc E commune meſure, meſurera la toute CD & la retranchee CF, egale à AB, ou multiplice d'icelle, par la 1. com. ſent. & elle doit auſſi meſurer le reſte DF par la 3. com. ſent. Item ſoit retranchee DF de AB tant de fois que faire ſe pourra, iuſques à ce que le reſte GB ſoit plus petit que E, qui meſure FD, & par conſequent ſa multiplice AG, par la 2. comm. ſent. donc auſſi le reſte GB, par la 3. comm. ſent. ce qui eſt abſurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune meſure; & par conſequent ſont incommenſurables. Parquoy ſi de deux grandeurs inegales propoſees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons ceſte prop. ainſi:

Si de deux grandeurs incommenſurables propoſees l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, le reſte ne meſurera iamais la grandeur precedente.

Soient propoſees deux grandeurs incommenſurables, AB, DE, dont la moindre AB ſoit oſtee de DE, & le reſte ſoit FE: Item de AB ſoit oſtee FE, & le reſte ſoit BC, & ainſi continuellement la plus petite de la plus grande: Ie dis que le reſte ne meſurera iamais la grandeur prec. Car ſi faire ſe peut que CB meſure la preced. FE. Donc puis que CB meſure FE, & icelle FE meſure AC, auſſi CB meſurera AC par la 2. com. ſent. Mais elle meſure auſſi ſoy-meſme. Donc CB meſurera pareillement la toute AB par la 1. comm. ſent. Mais AB meſure DF: Donc par la 2. com. ſent. CB meſurera la meſme DF: Et puis qu'on a poſé qu'elle meſure auſſi FE, elle meſurera la toute DE par la 1. com. ſent. Mais il a eſté demonſtré qu'icelle CB meſure auſſi AB: elle meſure donc AB & DE: ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ont eſté poſees incõmenſurables.



A ce theor. Clauius adiouſte ceſtuy-cy.

Si de deux grandeurs commenſurables propoſees, on oſte touſiours alternatiuement la moindre de la plus grande, quelque grandeur reſtante meſurera la precedente.

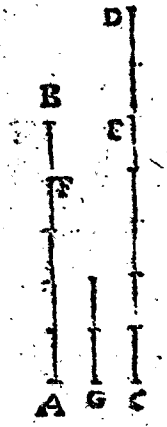
Car ſi iamais le reſte ne meſuroit la grandeur precedente, les propoſees ſeroient incommenſurables par ceſte 2. prop. ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ſont poſees commenſurables.

Parquoy il eſt facile de cognoiſtre, ſi deux quelconques grandeurs propoſees ſont commenſurables, ou non: Car retranchant alternatiuement la moindre de la plus grande, ſi quelque reſte meſure le precedent, les grandeurs propoſees ſeront commenſurables, comme il appert de la demonſtration du premier theor. de ce Scholie: Mais ſi le reſte ne meſure iamais la grandeur precedente, les grandeurs propoſees ſeront incommenſurables, comme Euclide a demonſtré en ceſte 2. prop.

PROBL. 1. PROP. III.

Eſtans donnees deux grandeurs commenſurables, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point: Si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchee de CD, & que le reste ED mesure AB. Ie dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son egale: & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G (s'il est possible) donc par les communes sentences G mesurera AB, CD, & le retranché CE egal à AB, & par consequent le reste ED, qui est plus petit; ce qui est impossible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD: Partant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc donnees deux grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

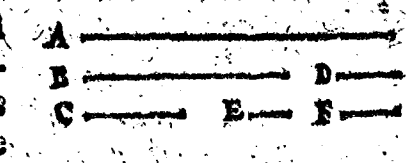
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit premierement trouuee D plus grande commune mesure de A & B par la 3. proposition 10. Or si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le corollaire de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que les grandeurs A, B, C sont commensurables, quelque commune mesure d'i-



celles mesurera, D plus grande mesure d'icelles A & B, par le corol. de la 3. prop. 10 mais ceste mesme mesure-là mesurera aussi C: donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouuee par la susdicte 3. proposition 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C. Donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdit coroll. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C; donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grãdeurs A, B, C: Et partant E est la plus grande commune mesure d'icelles. Parquoy estans donnees trois grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est euident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si F mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

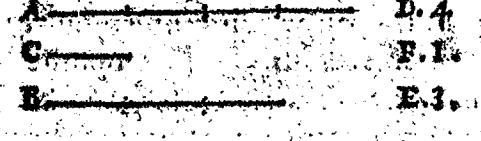
Par semblable maniere, estans données plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure: & ce mesme corollaire aura aussi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Ie dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle soit C: & autant de fois que C mesure A, que l'vnité F mesure le nombre D; & autant de fois que C mesure B, que l'vnité mesure aussi le nombre E. Or puis que la grandeur C & l'vnité F, mesurent egallement la grandeur A & le nombre D; la grandeur A contiendra la grandeur C autant de fois que le nombre D contient l'vnité F; & partant comme A est à C, ainsi le nombre D est à l'vnité F. Mais puis que la grandeur C mesure la grandeur B, & l'vnité F le nombre E, egalement; comme C est à B, ainsi l'vnité F est au nombre E. Donc en raison egale, A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. p. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles ſeront commenſurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui ſoient l'vne à l'autre comme le nombre C eſt au nombre D: Ie dis qu'elles ſeront commenſurables.

Car la grandeur A ſoit entendue eſtre diuiſee en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'vne d'icelles parties ſoit egale à E: donc E eſt à A, ainſi que l'vnité F eſt au nombre C. Mais par l'hypotheſe A eſt à B, comme le nombre C eſt au nombre D: donc en raiſon egale, E ſera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F meſure le nombre D: donc auſſi E meſure B: mais E meſure pareillement A. Donc E eſt commune meſure de A & B: & partant par la premiere deff. de ce liure A & B ſont commenſurables. Parquoy ſi deux grandeurs ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident qu'eſtant propoſez deux nombres comme C & D, & vne ligne droicte comme A, qu'il ſera aiſé de trouuer vne autre ligne droicte, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: Car diuiſant A en autant de parties egales qu'il y-a d'vnitez au nombre C, & on prend vne ligne droicte B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez au nombre D; alors A ſera à B, comme le nombre C au nombre D: ainſi qu'il eſt manifeſte, parce qui a eſté demonſtré en ceſte prop.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut, eſtans donnez deux nombres, & vne ligne droicte, trouuer vne autre ligne droicte, le quarré de laquelle ſoit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer vne ligne droicte, au quarré de laquelle ſoit le quarré de la ligne A, comme le nombre C eſt au nombre D: Il faudra trouuer ainſi que deſſus la ligne B, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: puis ſoit trouuee par la 13. prop. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A ſera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A ſera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B: & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommenſurables, ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommenſurables A & B: Ie dis qu'elles ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.

A ——————

B ——————————

Ce qui eſt manifeſte: car ſi elles eſtoient entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeroient commenſurables par la 6 prop. 10. ce qui eſt contre l'hypotheſe, ayans eſté poſées incommenſurables. Parquoy les grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR 6. PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeront incommenſurables.

Que les grandeurs A & B ne ſoient entr'elles comme nombre à nombre: Ie dis qu'elles ſont incommenſurables. A —— B ——

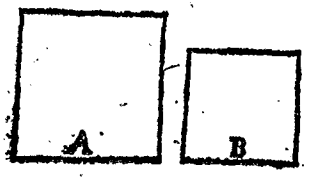
Ce qui eſt euident: car ſi elles eſtoient commenſurables, il faudroit qu'elles fuſſent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui eſt contre noſtre hypotheſe, puis qu'elles ont eſté poſees n'eſtre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy ſi deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez deſcrits ſur lignes droictes commenſurables en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez qui ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez deſcrits de lignes droictes incommenſurables en longitude, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez incommenſurables en longitude.

Soient les lignes droictes A & B commenſurables en longitude: Ie dis que leurs quarrez ſont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Car puis que les lignes A & B ſont commenſurables en longitude, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D: & les quarrez d'iceux C & D ſoient E & F. Or les quarrez de A & B ſont en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarrez E & F ſont auſſi en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A eſt au quarré de B, comme le nombre quarré E eſt au nombre quarré F: C'eſt à ſçauoir en raiſon doublee des coſtez A & B, ou des nombres C & D, qui ſont en la meſme raiſon que les lignes A & B.



Pour la ſeconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Ie dis que les lignes A & B ſeront commenſurables en longitude. Car par la 20. pr. 6. & 11. prop. 8. la raiſon des

quarrez aux quarrez, eſt la raiſon doublee de leurs coſtez: & partant comme le coſté A au coſté B, ainſi le nombre C au nombre D, puis que leurs raiſons doublees ſont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B ſont commenſurables en longitude.

Pour la troiſieſme partie, ſoient les lignes droictes A & B incommenſurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne ſont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi les quarrez de A & B eſtoient ainſi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B ſeroient commenſurables en longitude contre l'hypotheſe.

Finalement, les quarrez de A & B n'eſtans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis qu'elles ſont incommenſurables en longitude. Car autrement leurs quarrez ſeroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypotheſe. Parquoy les quarrez deſcrits de lignes droictes commenſurables en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par les choſes cy-deſſus demonſtrees, que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance: mais que celles qui ſont commenſurables en puiſſance ne le ſont pas touſiours en longitude. Que les incommenſurables en longitude, ne le ſont pas pourtant en puiſſance: & que celles incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commenſ. en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré; c'eſt à dire ſimplement comme nombre à nombre: iceux quarrez ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commenſurables en longitude le ſont auſſi en puiſſance.

Puis apres, veu que les lignes dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains ſeulement comme nombre à nombre, ſont commenſ. en puiſſance (car leurs quarrez ſont commenſurables par la 6. prop. 10.) & non en longitude, comme il a eſté demonſtré: il appert que les lignes commenſurables en puiſſance ne le ſont pas pourtant en longitude, ſinon que les quarrez d'icelles lignes ſoient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, puis que les lignes deſquelles les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre ſont incommenſurables en longitude, & commenſurables en puiſſance: il appert que les lignes incommenſurables en longitude ne le ſont pas touſiours en puiſſance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre à nombre, qui ſoyent auſſi incommenſ. en puiſſance, veu que leurs quarrez ſont incommenſ. par la 8. prop. 10.

Finalement eſt manifeſte que les lignes incommenſ. en puiſſance, le ſont auſſi en longitude: car ſi elles eſtoient commenſ. en longit. elles le ſeroient auſſi en puiſſance, comme appert par la premiere partie de ce corollaire; ce qui eſt contre l'hypotheſe.

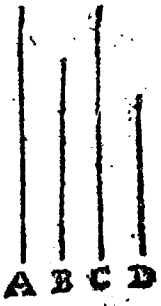
SCHOLIE.

Il eſt à noter qu'és deux premieres parties de ceſte propoſition s'entend auſſi des lignes inexplicables par nombres, pourueu qu'elles ſoient commenſurables en longitude; com-

me ſi les quarrez de A & B eſtoient 12 & 3, leurs coſtez ſeroient √12 & √3, qui ſont nexplicables par nombres, toutesfois commenſ. Car par la 20. prop. 6. 12 ſeroit à 3 en raiſon doublee de √12 à √3. Mais 12 eſt quadruple de 3: Ainſi le coſté A ſera double du coſté B, par la 10. def. 5. Car la double raiſon doublee eſt quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit commenſurable à la ſeconde, la troiſieſme, ſera auſſi commenſurable à la quatrieſme. Que ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi incommenſ. à la quatrieſme.



Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: & ſoit A 1, commenſurable à B 2e. Ie dis que C 3e. ſera auſſi commenſ. à D 4e.

Car A eſtant commenſurable à B, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D; Partant C eſt à D, comme nombre à nombre: & par conſequent commenſurable par la 6. prop. 10.

Que ſi A eſtoit incommenſ. à B. Ie dis que C ſeroit auſſi incommenſurable à D: Car A & B ne ſeroient pas comme nombre à nombre par la 7. pr. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D: donc C n'eſt pas à D comme nombre à nombre: & par conſequent incommenſurable par la 8. prop. 10. Si donc quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans diſſemblables, c'eſt à dire, qui ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A, & vn autre non quarré B. *A 16. B 10.*
Ie dis qu'iceux nombres A & B ſont plans diſſemblables. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, ils ſeroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. pr. 8. & partant A eſtant nombre quarré, auſſi B ſeroit quarré par la 24. pr. 8. contre l'hypotheſe. Donc A & B, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

PROBL. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables à vne ligne rationelle propoſee, ſçauoir vne en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soit la ligne rationelle propoſee A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommenſurables, l'vne ſeulement en longitude, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soient trouuez par le lemme precedent deux nõbres B, & C, qui ne ſoient

entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarrez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurables en puissance seulement : la ligne D est donc la premiere requise.

A ——— B. 20.
E ———
D ——— C 16.

Maintenant soit trouuée la ligne E moyenne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee : car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A est à D, & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté demonstré : le quarré de A sera aussi incommens. au quarré de E, par la 10 prop. 10. Parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le corol. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

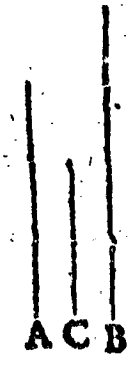
La ligne A soit 5 : donc la ligne D sera √ 20, laquelle il appert estre incommensurable en longitude à A, mais commensurable en puissance. Mais la ligne E estant moyenne prop. entre A 5, & D √ 20, elle sera √√ 500, qui est incommensurable en longit. que puissance à A 5.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C : Ie dis qu'elles sont commensurables entr'elles.

Car puis que A & C sont commensur. icelles seront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nombre E. Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G : tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I, & C à B, comme I à K ; en raison egale, A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre : & partant A



D 10, F 8.
F 2, G 3.
H 5, I 4. K 6.

& B ſont commenſ. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commenſurables à vne autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'vne eſt commenſurable à vne troiſieſme, & l'autre incommenſ. icelles grandeurs ſeront incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſ. à C; & B incommenſ. à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſ. entr'elles. Car ſi B eſtoit commenſ. à A, lequel A eſt poſé auſſi commenſ. à C, par la 12. pr. 10. B & C ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A & B ne ſont commenſ. Parquoy ſi de deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

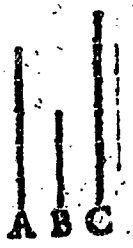
A———.
C———
B———

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'vne eſt incommenſ. à vne tierce grandeur, auſſi ſera l'autre à la meſme.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B, & que A ſoit incommenſurable à la tierce C: Ie dis que B & C ſont auſſi incommenſurables.

Autrement, ſi B eſt commenſurable à C, elle ſera auſſi commenſurable à A, par la 12. prop. 10. contre noſtre hypotheſe: donc B eſt incommenſurable à C: Parquoy ſi de deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

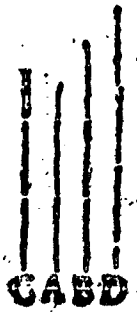


SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceſte prop. le theoreme ſuiuant, vtile aux choſes demonſtrees en ce liure.

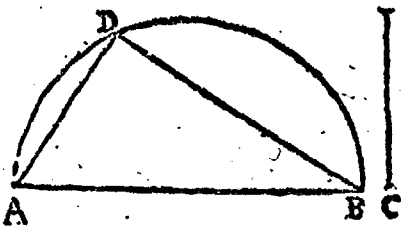
Les grandeurs commenſurables à des incommenſurables, ſont auſſi incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommenſurables, auſquelles C & D ſoient commenſurables, ſçauoir eſt C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommenſurables entr'elles. Car puis que A & C ſont poſees commenſurables, & A incommenſurable à B, l'autre C ſera auſſi incommenſ. à A par la 14. prop. 10. Derechef, puis que D & B ſont poſees commenſurables, & B eſté demonſtree incommenſurable à C; D ſera auſſi incommenſurable à la meſme C par la 14. prop. 10. Ce qui eſtoit propoſé.



LEMME.

Eſtans données deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.



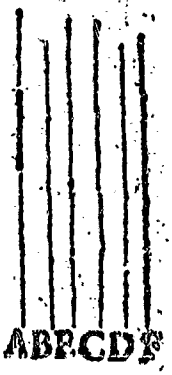
Soient données les deux lignes droictes AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit descrit sur AB le demy cercle A D B, & dans iceluy soit accommodee AD egale à C, par la 1. pr. 4. & soit menee DB. Ie dis que AB peut plus que C du quarré de BD. Car d'autant que l'angle D est au demy cercle, il est droict par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB: sera egal aux quarrez de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'est à dire que C, du quarré de BD. Ce qui estoit proposé.

Semblablement estans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient données les deux lignes droictes AD, BD: & il faut trouuer vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posées icelles AD, BD à angle droict D, & tiré AB. Il est euident que icelles AB peut les deux AD & BD, puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB, est egal aux deux quarrez de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes droictes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: aussi la troisiesme pourra plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude: aussi la troisiesme pourra plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude.



Soient 4. lignes droictes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E; & C plus que D du quarré de F. Ie dis que comme A sera commensurable ou incommens. en longitude à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable en longitude à F.

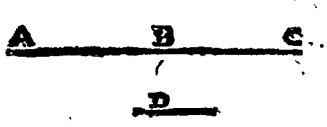
Car puis que A, B, C, D, sont proportionneles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarrez de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc aussi les quarrez de B, E, seront au quarré de B, comme les quarez de D, F, au quarré de D; & en diuisant, cõme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. cõme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F sera à la ligne D; & en changeant,

comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D; & comme B à E ainsi D à F; en raison egale, cõme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parquoy si quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commensurables sont conioinctes, la composee sera commensurable à chacune de ses parties: Et si la composee est commensurable à vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles.

Soient ioinctes deux grandeurs commensur. AB & BC: Ie dis que la composee AC, est aussi commens. à chacune d'icelles A B & B C.



Car puis que AB & B C sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle soit D. Donc puis que D mesure A B & BC, elle mesurera aussi la toute A C, par la 1. c. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Que la toute AC soit commens. à vne de ses parties, sçauoir à A B: Ie dis qu'icelles parties A B, B C seront commensurables entr'elles. Car puis que A C & A B sont commensurables, elles auront vne commune mesure, comme D, laquelle mesurant la toute AC & la retranchee AB, elle mesurera aussi le reste B C par la 3. commune sent. Partant AB & BC seront commensurables entr'elles, puis qu'elles ont vne commune mesure D. Parquoy si deux grandeurs commensurables, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à l'vne d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC: Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commensurables: donc par la premiere partie AC sera commensurable à chasque partie, AB, BC.

SCHOLIE.

Soit AB √18, & BC √8, lesquelles sont commens. La composee AC sera √50, laquelle est commens. tant à √18, que à √8. Car √50 est à √18, comme 5 à 3: & à √8 comme 5 à 2.

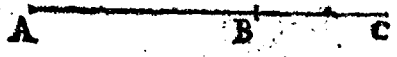
THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommensurable à chacune de ses parties: Et si la composee est incommensurable à l'vne de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.

Soient

Soient conioinctes deux grandeurs incommenſ. AB & BC: Ie dis que la toute AC eſt incommenſ. à vne chacune de ſes parties AB & BC.

Autrement, ſi AC eſtoit commenſ. à AB, elle le ſeroit auſſi à BC: car la commune meſure qui meſureroit AC & le retranché AB, meſureroit auſſi le reſte BC, par la 3. c. ſent.



Et partant AB & BC ſeroient commenſ. (ce qui eſt contre l'hypotheſe.) Donc AC & AB ſont incommenſ. Il s'enſuiura le meſme inconuenient ſi on nie que AC & BC ſoient incommenſurables.

Pour la ſeconde partie: Ie dis que ſi AC & BC, ſont incommenſ. que AB & BC ſeront auſſi incommenſ. Autrement ſi elles eſtoient commenſurables: La toute AC, ſeroit auſſi commenſurable à ſa partie BC par la 16. p. 10. contre noſtre hypotheſe. Donc AB & BC ſont incommenſ. Par meſme argument nous demonſtrerons que ſi AC & AB ſont incommenſ. que AB & BC ſont auſſi incommenſurables. Parquoy ſi on conioinct deux grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il reſulte de ces choſes, que ſi vne grandeur compoſee de deux, eſt incommenſurable à l'vne d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC compoſee de AB & BC eſt incommenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC. Car ſi AC eſtoit commenſ. à icelle BC, elle le ſeroit auſſi à AB, par le coroll. de la precedente prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc AC & BC ne ſont commenſurables, mais incommenſurables.

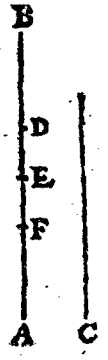
SCHOLIE.

Soit AB 8, *&* BC $\sqrt{}$ 28, *leſquelles ſont incommenſurables. La compoſee* AC *ſera* 8 + $\sqrt{}$28 *incommenſurable à chacune d'icelles* AB 8, *&* BC $\sqrt{}$ 28.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude: Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & deffaillant d'vne figure quarrée; le rectangle diuiſera icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. ſur la plus grande AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarrée, c'eſt à dire d'vne ligne egale à ſon autre coſté. Et ſoit iceluy rectangle contenu ſous AD & DB commenſurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB couppee en deux egalement en E, & ſoit faicte EF egale à ED: Il eſt euident que AF ſera egale à DB, puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchees EF, ED. Maintenant, puis que AB eſt couppee en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB auec le quarré de ED, ſeront egaux au quarré de BE, lequel n'eſtant par l'hypotheſe que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, ſont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AD & DB eſt le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB eſt plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du ſeul de FD egal à iceux par le Schol. de la 4. p. 2. puiſque FD eſt double de ED. Dauantage, puis que AD & DB ſont poſees commenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi commenſ. en longitude à ſa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à ſon egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: & par conſequent au reſte de la ligne FD par la meſme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt commenſurable en longitude.

Pour la ſeconde partie, que AB puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, & qu'à icelle AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarree, lequel rectangle diuiſe AB és parties AD, DB: Ie dis qu'icelles parties AD & DB ſeront auſſi commenſ. en longitude. Car demeurant la meſme conſtruction que deſſus, il ſera demonſtré comme là que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a eſté poſee pouuoir plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: & partant AB ſera commenſ. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compoſee de FD, AF, & DB comme d'vne, eſt commenſurable en longitude à la partie FD; la meſme AB ſera auſſi commenſurable en longitude à l'autre partie compoſee de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle compoſee de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longit. à DB, puis qu'elle eſt double d'icelle: donc puis que chacune d'icelles AB, DB eſt commenſurable en longit. à la compoſee de AF, DB; auſſi AB, DB ſeront commenſurables entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB compoſee de AD, DB eſt commenſurable en longitude à icelle DB; auſſi icelles AD, DB ſeront commenſurables en longitude entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

L'application mentionnee au commencement de la demonſt. cy-deſſus ſe fera bien plus

briefuement par le 60. de nos Problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

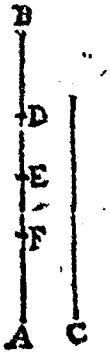
Quant à l'application des nombres soit AB 30, & C 24: donc les segmens AD & DB, seront 24 & 6, desquels le produict, c'est à dire le rectangle, est 144, qui est egal au quart de 576, quarré de C 24, & deffaillant du quarré de DB 6, c'est à dire 36: & sont icelles parties AD 24, DB 6, commens. en longitude: car l'vne est quadruple de l'autre. Ainsi FD, qui peut auec C le quarré de AB, sera 18: car le quarré de AB est 900, & celuy de C 576; & partant reste pour le quarré de FD, 324, dont la racine quarree est 18, commensurable en longitude à AB. L'autre partie sera aussi euidente par l'adaption des nombres cy-dessus.

La proposition suiuante sera aussi facilement entenduë, si on pose AB 12, & C √ 96: car les segmens AD, DB, seront 6 + √ 12. & 6 — √ 12: & FD √ 48, qui est à 12 incommensurable en longitude, &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y-a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, & qu'iceluy rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incōmensurable en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, le rectangle diuisera la plus grande ligne en parties incommensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales A B & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. prop. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarree: & soit iceluy rectangle contenu sous AD, DB incommensurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude. Car ayant construit comme en la preced. prop. nous demonstrerons semblablement que AB peut plus que C du quarré de FD. Il faut donc demonstrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posees incommens. en longitude, la toute AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurable en longitude à la composee de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle-là: donc



puis que de ces deux lignes commenſ. icelle DB eſt incommenſ. en longitude à AB; la compoſee de AF, DB ſera auſſi incommenſ. en long. à la meſme AB par la 14. prop. 10. Et d'autant que AB compoſee de AF, DB comme vne, & de FD, eſt incommenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB; la meſme AB ſera auſſi incommenſ. en long. à FD, par le corol. de la 17 p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy eſt incommenſurable en longitude.

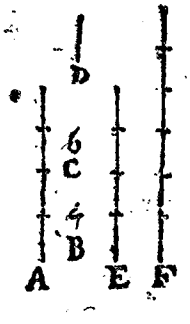
Maintenant, ſi AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt incom. en longitude, & ſur icelle AB eſt appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel rectangle diuiſe AB és parties AD, DB. Ie dis qu'icelles AD, DB ſont incommenſ. en long. Car nous demonſtrerons comme deuant (les meſmes choſes eſtans conſtruictes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD ſont incommenſurables en longitude: & puis que AB eſt compoſee de FD, & de AF, DB ioinctes en vne, icelle AB ſera auſſi incommenſ. en longitude à la compoſee de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la compoſee de AF, DB eſt commenſ. en longit. à icelle DB, puis que celle-là eſt double de ceſte-cy. Donc puis que AB eſt incommenſurable en longit. à la compoſee de AF, DB, icelle AB ſera auſſi incommenſ. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB compoſee de AD, DB eſt incommenſ. en long. à DB, icelles AD, DB ſeront auſſi incomm. en long. entr'elles par la 7. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

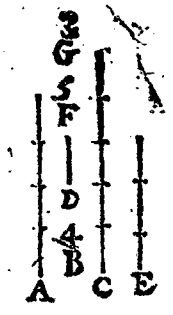
Puis qu'il a eſté demonſtré que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance, mais que celles commenſ. en puiſſance ne le ſont pas touſiours en longitude: il eſt manifeſte que s'il y a quelque ligne comm. en longitude à vne propoſee rationnelle: elle doit eſtre appellee rationnelle & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puiſſance: car les lignes commenſ. en long. le ſont touſiours auſſi en puiſſance. S'il y a auſſi quelque ligne droicte commenſ. en puiſſance & longitude à l'expoſee rationele, elle ſera auſſi dite rationele commenſ. en longitude & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à icelle, mais incommenſ. en longitude, elle ſera auſſi dicte rationelle commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

SCHOLIE.

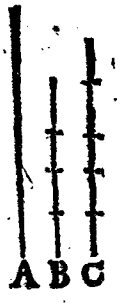
Il appert par ce que deſſus, qu'il y a de trois ſortes de lignes rationeles commenſ. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commenſurables entr'elles en longitude, ou l'vne eſt egale à l'expoſee rationele; & partant l'vne & l'autre commenſ. en longitude à la rationele: ou l'vne ny l'autre n'eſt egale à l'expoſee rationele, & toutesfois commenſ. en longit. à icelle: ou finablement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationele en puiſſance ſeulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceſte maniere. Soit vne rationele propoſee A diuiſee en quatre parties egales: c'eſt à ſçauoir en autant qu'il y a d'vnitez au nombre B: puis apres eſtant pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit vne partie de A: & qu'autant de fois que D meſure A, autant de fois elle meſure quelque ligne E: Item autant de fois que l'vnité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Donc



puis que A & E ſont compoſees de parties egales en nombre, qui ſont egales à D, elles ſeront egales. Derechef, puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F, elles ſeront commenſurab. en longitude: parquoy E & F ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſſi commenſ. entr'elles en longitude. Nous auons donc trouué deux rationeles E & F commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele expoſee A, & deſquelles l'vne ſçauoir E, eſt egale à A.



Or maintenant, que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G diffevens de B, tellement que l'vne & l'autre ligne C & E ſoit inegale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commenſurables en longitude: parquoy C & E ſont rationeles commenſ. en longit. à la rationelle A: mais elles le ſont auſſi entr'elles. Nous auons donc trouué deux rationeles C & E commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele propoſee A: l'vne ny l'autre deſquelles n'eſt egale à icelle A.



Finalement par la 11. prop. 10. à l'expoſee rationele A ſoit trouuee la ligne B, incommenſurable en longitude ſeulement, laquelle ſoit couppee en tant de parties egales qu'on voudra, & ſoit priſe C, compoſee de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C ſeront commenſ. en longitude. Ie dis qu'elles ſont auſſi commenſ. en puiſſance ſeulement à l'expoſee rationele A. Car puis que A & B ſont commenſurable en puiſſance; le quarré de A ſera commenſ. au quarré de B: Mais au meſme quarré de B, eſt auſſi commenſ. le quarré de C, pource que B, C eſtans commenſ. en longitude, elles le ſeront auſſi en puiſſance. Donc par la 12. prop. 10. les quarrez de A & C, ſont pareillement commenſ. entr'eux. Parquoy C eſt commenſ. en puiſſance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commenſ. en longitude, B eſt incommenſ. en longitude à A: par la 14. pr. 10. G ſera auſſi incommenſ. en longitude à la meſme A. Donc C eſt commenſ. à A ſeulement en puiſſance. Et pource que B & C, commenſurables en puiſſance à l'expoſee rationele A, ſont rationeles; elles ſeront deux rationeles commenſ. en longit. entr'elles, mais en puiſſance ſeulement à l'expoſee rationele A: elles ſont donc les deux lignes requiſes à trouuer.

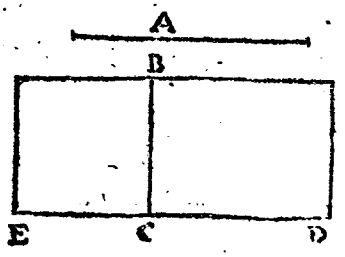
Que ſi quelqu'vn deſire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationeles commenſurables en longitude entr'elles, cela ſe fera ainſi qu'il enſuit: Soit pris quelconque meſure D, (regardez la premiere figure de ceſte page) & ſoient compoſees autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D; qu'il y a d'vnitez en autant de nombres ineganx B, F, G: car les lignes A, C, E, ayans la commune meſure D, ſeront commenſurables en longitude.

Or il eſt auſſi euident que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. non ſeulement à vne expoſee rationele, mais auſſi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles ſont celles qui ſont commenſ. à l'expoſee rationele, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement, & que par la 12. p. 10. les commenſurables à vne meſme, ſont auſſi com-

mensurables entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationeles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en longitude selon quelqu'vne des manieres cy-deuant dites, est rationel.



Soit vne exposee rationele A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationeles commens. en longitude, selon quelqu'vne des manieres cy-dessus dites: Ie dis qu'iceluy rectangle est rationel.

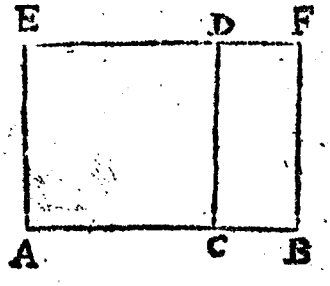
Car si sur l'vne d'icelles BC, CD, sçauoir BC, on faict le quarré BE, il sera commensurable au quarré de la rationele A par la 3. def. 10. puis que BC est rationele commensurable à la rationele exposee A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC, ou CE, CD sont commens. en longitude; (car BC, CD ont esté posees rationeles commensurables en longitude entr'elles) & par la 1. p. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD seront aussi commens. tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commensurables au quarré EB; & partant commens. entr'eux par la 12. prop. 10. Mais le quarré de A est rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationel: Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit BC 3 & CD 4: donc le rectangle BD sera 12. Derechef soit BC √3 & CD √12: Le rect. BD sera √36, c'est à dire 6. Et derechef si BC est √8, & CD √18: Le rectangle BD sera √144, c'est à dire 12. Par ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux costez seront entr'eux commensurables en longitude.



Soit le rectangle rationel DB ayant le costé CD rationel: Ie dis que BC sera aussi rationel commensurable en longitude à CD.

Car sur DC, soit faict le quarré AD, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB est à CA par la 1. prop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationnaux, & partant commensurables. Donc par la 10. prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si

vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD $\sqrt{3}$: BC sera donc $\sqrt{12}$, qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$: Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droicte CD $\sqrt{8}$, l'autre costé BC sera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à CD $\sqrt{8}$. Car si on diuise $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, prouiendra $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ c'est à dire $\sqrt{\frac{9}{4}}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$, comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longitude.

LEMME.

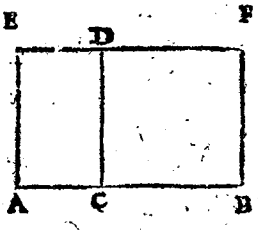
Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droicte incommensurable en longitude seulement à vne ligne droicte rationele proposee, & icelles seront les requises: car puis qu'elles sont comm. en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d. 10.

Que si à la ligne trouuee, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la proposee rationele, il est manifeste par la 12. prop. 10. que toutes les trois seront commensurables entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commens. en puissance seulement, est irrationel: & la ligne droicte qui peut iceluy est irrationelle. Soit icelle appellee Mediale.



Soit le rectangle AD, compris de deux lignes rationelles DC & CA commensurables en puissance seulement. Ie dis que le rectangle est irrationel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appelle Mediale.

Car si sur la rationelle CD on descrit le quarré DB, il sera rationel, & sera au rectangle AD, comme BC ou CD son egale, est à CA, par la 1. prop. 6. Mais DC & CA sont incommens. en longitude: donc par la 10. prop. 10. le quarré BD, & le rectangle AD seront incommens. Or le quarré est rationel: donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationel; & par la 11. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle: & soit icelle ligne appellee Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationelles DC, CA commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons icelle estre vne ligne irrationelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationnel qu'elle peut, eſt auſsi nommé medial, pource qu'il eſt moyen prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſance ſeulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle medial ſoit touſiours contenu ſous deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, tel qu'eſt le medial CF: car il en aduient quelquesfois autrement, comme ſe verra cy-apres.

La ligne DC ſoit 2, & BC √8. Le rectangle BD ſera √32, qui eſt irrationel; & ſera dict medial, mais la ligne pouuant iceluy eſt √√32, laquelle on appelle mediale.

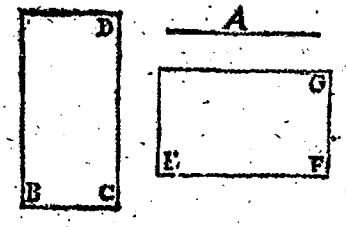
THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la ligne à laquelle ſe faict l'application.

Auparauant que venir à ce qui eſt icy propoſé, eſt à notter que pour appliquer ſur vne ligne rationele vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poſer quelconque ligne rationelle, en ſecond lieu la mediale, & chercher la tierce proportionelle, laquelle ſera l'autre coſté du rectangle: car par la 17. propoſition 6, le quarré de la moyenne eſt egal au rectangle des extremes.

Venons maintenant à la demonſtration de la propoſition.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle ſoit appliqué ſur la ligne rationelle BC, faiſant le rectangle BD: Ie dis que BC & CD ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement.



Car A eſtant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, autrement elle ne ſeroit dicte mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu ſous les rationelles EF, FG commenſurables en puiſſance ſeulement. Et pource que A, par l'hypotheſe peut auſſi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG ſeront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les coſtez reciproques, ſçauoir que comme BC à EF, ainſi FG à CD, & par la 22. prop. 6. les quarrez d'icelles lignes ſeront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle, eſt commenſ. au quarré de EF, auſſi ligne rationelle: donc par la 10. pr. 10. le quarré de FG ſera auſſi commenſ. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD ſeront com. au moins en puiſſance, & le quarré de FG eſtant rationel, le quarré de CD ſera auſſi rationel; & par conſequent les lignes CB & CD ſeront rationelles. Or qu'icelles BC & CD ſoient commenſ. en puiſſance ſeulement, il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré à la 21. prop. 10. Car ſi elles eſtoient commenſurables en longitude, le rectangle BD ſeroit rationel, & nous l'auons poſé medial, c'eſt à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD ſont incommenſurables en longitude. Parquoy le quarré d'vne ligne mediale appliqué ſur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

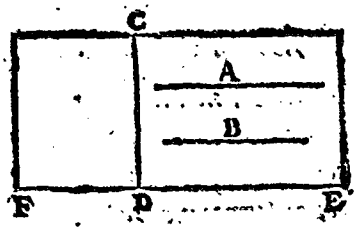
SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit le quarré de AV 40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique V 40, l'autre costé CD sera V 10. qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est V 5, CD sera V 8, aussi comm. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit VV 35, & BC V 5: le quarré de A seroit V 35: & CD V 7, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.



Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Ie dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposee la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationelle CD soit appliqué le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront commens. en longit. Mais la ligne ED est rationnelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationelle & incommens. en longit. à la mesme CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. pr. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à vne figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'vne d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit AVV 200, BVV 128, CD 4. Donc DE sera V 12½ & DF V 8 commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4: & DF est commens. en puiss. seulement à CD; & par consequent le rectangle CF, qui est V 128, est medial, & la ligne BVV 128, qui peut iceluy, aussi mediale.

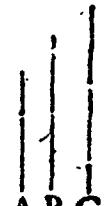
LEMME I.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de ce liure, nous le dirons aussi des mediales: Sçauoir est que les lignes droictes commens. en long. à vne mediale, est dite mediale, & comm. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance. Car

vniuerſellement les lignes droictes commenſ. en longit. le ſont auſſi en puiſſance. Et s'il y a quelque ligne comm. en puiſſance & longit. à vne mediale, elle ſera pareillement dite mediale, & à icelle commenſ. en longit. & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à vne mediale, mais incomm. en longit. elle ſera auſſi dite mediale commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en longitude: Item deux commenſurables en puiſſance ſeulement.

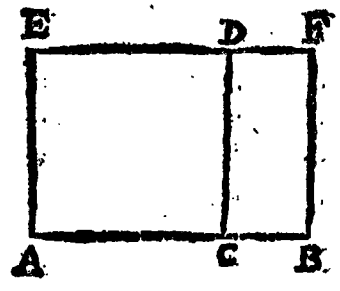


Soient trouuees les deux lignes A & B commenſ. à la mediale C, c'eſt à ſçauoir A en longit. & B en puiſſance ſeulement: & chacune d'icelles A & B ſe-xont auſſi mediales par la 24. prop. 10. Veu donc que A & C ſont commenſ. en longit. & B, C en puiſſance ſeulement, eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

Or il eſt à noter qu'encore que toute ligne droicte commenſ. à vne mediale, ſoit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'eſt pas commenſ. à quelque mediale que ce ſoit. Car deux mediales ſe peuuent donner incomm. en longit. & puiſſance, comme apparoiſtra par la 36. prop. de ce liure, où nous enſeignerons auſſi à trouuer deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en longitude, eſt auſſi medial.



Soit le rectangle DB, compris de deux mediales commenſ. en longitude DC & BC: Ie dis qu'il eſt medial.

Car ſi ſur la ligne DC on deſcrit le quarré DA, il ſera medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale: & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi AD eſt à DB: mais CD, ou CA ſon egale, eſt commenſurable en longitude à BC: Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, ſera commenſurable au rectangle DB: & par le corollaire de la 24. prop. 10. iceluy rectangle ſera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si les mediales DC, CB commenſ. en longitude ſont VV2 & VV32: le rectangle d'icelles ſçauoir DB, ſera VV64, c'eſt à dire V8, qui eſt medial.

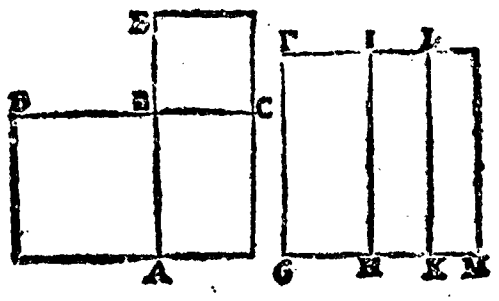
THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt rationel, ou medial.

Soient les deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel ou medial.

Qu'ainſi ne ſoit: Sur AB & BC ſoient deſcrits les quarrez AD & CE, leſ-

quels eſtans faits ſur lignes mediales ſeront mediaux. Maintenant ſoit propoſee la ligne rationelle FG, & ſur icelle ſoient deſcrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. pr. 1. Et d'autant que les quarrez AD & CE ſont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM ſeront mediaux: leſquels appliquez ſur la rationelle FG, leurs autres coſtez GH & KM, ſeront rationnaux commenſ. en puiſſance ſeulement à FG par la 23. prop. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE ſont commenſ.



(eſtans faicts ſur lignes commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles FH & LM ſeront auſſi commenſ. mais par la 1. p. 6. comme FH eſt à LM, ainſi la ligne droicte GH eſt à la ligne droicte KM: donc par la 10. prop. 10. GH & KM ſeront commenſ. en longitude; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH & KM ſera rationel. Et pource que AB, BD ſont egales, & BC, BE auſſi egales, comme DB eſt à BC, ainſi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainſi AD à AC par la 1. prop. 6. & comme AB eſt à BE, ainſi AC à CE: donc comme AD à AC, ainſi AC à CE: & partant AD, AC, CE ſont proportionnaux: & par conſequent leurs egaux FH, HL, LM ſeront auſſi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes GH, HK, KM ſont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM: elles ſeront donc proportionelles: & par la 17. pr. 6. le rectangle de GH, KM, ſera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a eſté demonſtré rationel: donc auſſi le quarré de HK ſera rationel: & par conſequent la ligne HK ſera auſſi rationelle: & par la 6. def. 10. elle ſera pareillement commenſurable à la rationelle propoſee FG, ou à ſon egale HI, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement: Si en longitude, le rectangle HL contenu ſous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy eſt egal, ſera rationel par la 20. prop. 10. mais ſi HK eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC ſera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commenſ. en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soient les mediales AB & BC, √√8, & √√2: (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables, car elles ſont en raiſon double.) Le rectangle d'icelles AC ſera √√16, c'eſt à dire 2, qui eſt rationel. Mais ſi AB eſt √√12, & BC √√3, (deſquelles les puiſſances ſont commenſ. eſtans en raiſon double.) Le rectangle AC ſera √√36, c'eſt à dire √6, qui eſt vn medial.

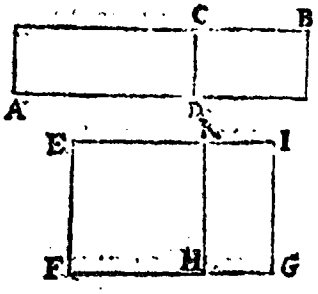
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale n'eſt pas plus grande qu'vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial AC du rectangle DB: ie dis que DB n'eſt pas figure rationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi: Sur vne propoſee rationelle EF ſoient faicts les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI ſera egal à DB: partant iceux rectangles EG, EH ſeront mediaux, leſquels eſtans appli-

quez ſur la rationelle EF, les autres coſtez FG & FH ſeront lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement à EF par la 23. prop. 10.



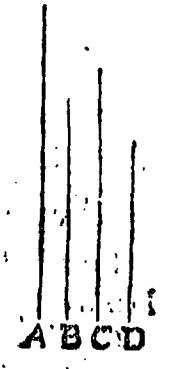
Maintenant ſi on dit que HI eſt rationel; eſtant appliqué ſur la rationelle KH, l'autre coſté GH ſera rationel commenſurable en longit. à KH par la 21. prop. 10. mais FH eſt incom. en long. à KH, ou EF: donc par la 14. pr. 10. FH & GH ſeront incomm. en longit. mais comme FH à GH, ainſi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils ſont de meſme hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le quarré de GH eſt incomm. au rectangle de FH & GH. Il le ſera auſſi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. pr. 10. Or le meſme quarré de GH eſt comm. au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG eſtans rationelles) & par la 16. pr. 10. les deux quarrez de FH & GH, enſemble ſeront commenſurables au ſeul quarré de GH: mais iceluy quarré eſt incommenſurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13. prop. 10. les deux quarrez de FH & GH ſeront enſemble incommenſur. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH & GH ſont egaux au quarré de FG par la 4. pr. 2. donc par la 17. p. 10. le quarré de FG ſera incomm. aux deux quarrez de FH & GH enſemble: leſquels eſtans rationaux, (car ils ſont faicts ſur lignes rationelles) le quarré de FG ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne FG irrationelle: Ce qui eſt abſurde, car nous auons monſtré qu'elle eſt rationelle: donc le rectangle HI, ou ſon egal DB, n'eſtoit pas rationel. Parquoy vne figure mediale n'eſt pas plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle medial AB √50, & le rectangle AC √18: le rectangle reſtant DB ſera √8, qui eſt medial. Derechef AB eſtant √32, & AC √20; le reſtant DB ſera √32—√20, qui n'eſt pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel.



Soient deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. de ce liure) entre leſquelles (par la 13. prop.) ſoit trouuée la moyenne proportionelle C; puis (par la 12. prop. 6.) aux trois A, B, C, ſoit trouuée la quatrieſme proportionelle D: Ie dis que C & D ſont les deux mediales demandees.

Car puis que C eſt moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. eſt medial) ſera egal au quarré de C par la 17. p. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, eſt mediale: Item, puis que comme A à B, ainſi C à D, & que A eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à B, auſſi le ſera C à D par la 10. prop. 10. Mais C eſt ligne mediale: donc D qui luy eſt commenſ. en puiſſance ſeulement ſera auſſi

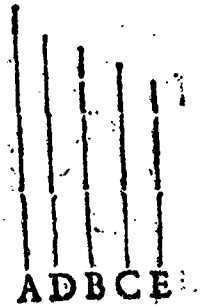
ligne medialle par la 24. prop. 10. Ie dis en outre que le rectangle contenu d'icelles medialles C & D eſt rationel. Car d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D, en permuttant, comme A à C, ainſi B à D: mais comme A eſt à C, ainſi C à B. Donc C ſera auſſi à B, comme B à D par la 11. prop. 5. parquoy B eſt moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B ſera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B, ligne rationelle, eſt rationel: donc le rectangle comprins de C & D eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales comm. en puiſſance ſeulement qui comprennent vn rectangle rationel: Ce qu'il failloit faire.

SCHOLIE.

Soit A V 20, & B V 12. donc la moyenne prop. C ſera V V 240. & puis que comme A à B, ainſi C à D; D ſera V V 86 2/5. Or les puiſſances de V V 240, & V V 86 2/5 ſont commenſ. car elles ſont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles eſt V V 20736, c'eſt à dire 12, egal au quarré de V 12, qui eſt auſſi 12: & partant iceluy rectangle de C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement eſt rationel.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial.



Soient trois lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement A, B, C, trouuees comme il eſt enſeigné au lemme qui precede la 22. pr. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B ſoit trouuee la moyenne proportionelle D: puis par la 12. pr. 6. ſoit fait comme B à C, ainſi D à E: Ie dis que D & E ſont les deux mediales demandées.

Car en premier lieu, il eſt euident que D eſt mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. propoſit. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B: mais comme B à C, ainſi D à E, & B eſt commenſ. en puiſſance ſeulement à C, auſſi par la 10. pr. 10. D ſera commenſ. en puiſſance ſeulement à E: Et par la 24. prop. 10. D eſtant mediale, E ſera auſſi mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle d'icelles deux mediales D & E eſt auſſi medial. Car puis que comme B à C, ainſi D à E, en permutant B ſera à D comme C à E: mais B eſt à D comme D à A; partant comme D eſt à A, ainſi C eſt à E: & par la 16. prop. 6. le rectangle des extremes D & E ſera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſt medial par la 22. prop. 10. Donc par le corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E ſera auſſi medial. Parquoy nous auons trouué deux lignes medialles commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE 1.

Soit A 20, B V 200, & C V 80. Donc la moyenne prop. D, ſera V V 80000. Et puis que comme B à C, ainſi D à E; icelle E ſera V V 12800. Or les puiſſances de D & E, ſont commenſurables, car elles ſont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles eſt V V 1024000000, c'eſt à dire V 32000, egal au rectangle de A & C, qui eſt V 32000.

Or és choſes ſuiuantes nous aurons beſoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D. Mais A & B ſe multiplians entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multiplians faſſent F. Donc E & F ſeront nombres ſemblables, puis qu'ils ſont les coſtez proportionnaux.

A	6.	C	12.
B	4.	D	8.
E	24.	F	96.

Or d'autant qu'il a eſté demonſtré és 28 & 29. p. 9. que ſi on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, eſt produit vn nombre pair: mais vn impair, ſi on multiplie vn impair par vn impair: il appert par quelle maniere peuuent eſtre trouuez deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair ou impair; ou vn ſeul pair, & l'autre impair: car ſi les coſtés pris ſont nombres pairs, les plans d'iceux ſeront auſſi pairs; mais ſi les nombres ſont impairs, les plans d'iceux ſeront auſſi impairs. Que ſi les coſtez de l'vn ſont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là ſera impair, mais de ceux-cy pair: ſemblablement les plans ſeront pairs, ſi chacun a vn coſté nombre pair, & l'autre impair, &c.

LEMME 1.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ſoit auſſi nombre quarré.

Soient trouuez par les choſes cy-deſſus dittes deux plans ſemblables AB & C, chacun deſquels ſoit pair ou impair. Et d'autant que par les 24 & 26. prop. 9. ſi d'vn nombre pair on en oſte vn pair, ou bien vn impair d'vn impair, le reſte eſt pair: eſtant oſté BD egal à C de AB, le reſte AD ſera pair; & iceluy AD eſtant diuiſé en deux egalement en E: Ie dis que le nombre fait de AB en BD (qui eſt vn quarré par la 1. prop. 9.) auec le quarré du nombre ED, fait vn quarré. Car puis que le nombre AD eſt diuiſé en deux egalement en E, & à iceluy eſt adiouſté DB; le nombre qui eſt fait de AB en BD, auec le quarré du nombre DE, ſera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theor. de ceux que nous auons demonſtré à la 14. p. 9. Parquoy les deux nombres quarrez, ſçauoir celuy fait de AB en DE, & celuy du nombre DE adiouſtez enſemble ſeront vn quarré, ſçauoir celuy qui ſera produit de EB. Ce qui eſtoit propoſé.

A.....E.....D.....B
C.....

COROLLAIRE.

De ces choſes eſt manifeſte que quand AB & C ſont ſemblables, eſtre trouuez en la meſme maniere les deux nombres quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en BD, eſt auſſi quarré.

Que ſi les nombres AB & C ne ſont prins ſemblables, l'vn & l'autre toutesfois pair, ou impair, ſeront trouuez en la meſme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en DB n'eſt quarré. Car s'il eſtoit quarré, par la 2. propoſit. 9. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB & C, ſeroient plans ſemblables. Ce qui eſt abſurde, puis qu'ils ont eſté poſez diſſemblables.

SCHOLIE 2.

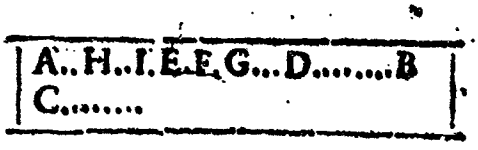
Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrés, deſquels l'excez ſoit auſſi nombre quarré, nous prendrons comme cy-deſſus, deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair, ou impair, ſçauoir AB & C, & acheuerons comme il eſt dict au precedent lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, deſquels l'excez ne ſoit quarré, il faudra prendre deux nombres plans diſſemblables, & paracheuer comme deſſus. Ce qu'on obtiendra plus facile-

ment, diuisant vn nombre quarré en deux nombres, l'vn desquels soit quarré, & l'autre non: Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainsi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit nombre quarré.



Soient deux nombres plans semblables AB, & G pairs, ou impairs, & soit fait mesme construction qu'au lemme precedant: tellement que le quarré fait de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, auec le quarré de DE, soit egal au quarré de BE: en apres, de DE soit ostee l'vnité EF. Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE, à cause de l'inegalité des costez. Ie dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il seroit plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF: Soit premierement plus grand, s'il est possible; donc le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF; partant egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'vnité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE.) Si on dit qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF; puis qu'au mesme quarré de BE, a esté demonstré au lemme precedent estre egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE; aussi celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF, sera egal à celuy là fait de AB en BD, auec le quarré de DE. Ostant donc le commun quarré fait de AB en DB, le reste quarré de DF, sera egal au reste quarré de DE; & partant le costé DF aussi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE. Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI, qui est plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais au preced. lemme le quarré de BE a esté demonstré egal au nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE: ostant donc le commun nombre fait de AB en BD, restera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE; & partant le costé DF plus grand que le costé DE, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas plus grand que le costé BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BE.

Soit maintenant, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, egal au quarré de BF: & soit posé AH double de l'vnité EF. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, (car AD a esté diuisé en deux egalement en E) & l'osté AH double de l'osté EF, aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. prop. 7. & pariant HD est diuisé en deux egalement en F: Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons demonstré sur la 14. prop. 9. le nombre fait de HB en BD, auec le quarré de DF, sera egal au quarré de BF: Mais au mesme quarré de BF, est posé egal le nombre fait de AB en BD auec le quarré de DF. Donc le nombre fait de HB en BD, auec le quarré du nombre DF, est egal à celuy fait de AB en DB, auec le quarré de DF. Ostant donc le commun quarré de DF,

resterale nombre fait de HB en BD, egal à celuy fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD, produisent nombres egaux, & que par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produicts: HB sera egal à AB, la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en DB, auec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF, lequel soit BG, tellement que le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, soit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD est double du tout FD, & l'osté AI double de l'osté EG; par la 7. prop. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD: & partant ID est diuisé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor. demonstré sur la 14. pr. 9. le nombre fait de IB en BD auec le quarré de DG, est egal au quarré de BG. Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF: Donc le nombre fait de IB en BD, auec le quarré de DG, est egal à celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF. Ostant donc les quarrez de DG & DF, desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celuy fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD, auec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à demonstrer.

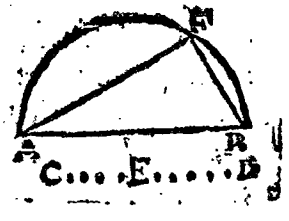
SCHOLIE 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarrés, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: Car ainsi le quarré total ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 6. PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soit proposee la rationele, AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, en iceluy soit accommodee la ligne droite AF: & ioinct BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes requises.



Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme le nombre CD est au nombre DE, ils seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant aussi leurs costez

AB & AF, au moins en puiſſance: mais AB eſt rationnele, & par conſequent auſſi rationele AF qui luy eſt commenſurable: mais les quarrez de AB & AF n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. pr. 10. les lignes AB & AF ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle eſt droict par la 31. pr. 3. le quarré de AB ſera egal aux deux quarrez de AF & FB, c'eſt à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF du quarré de FB. Et d'autant que comme CD eſt à DE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AF, par conuerſion de raiſon, comme le nombre quarré CD ſera au nombre quarré CE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de FB; (car, ainſi que CD excede DE du quarré de CE, ainſi auſſi le quarré de AB ſurpaſſe le quarré de AF du quarré de FB.) Parquoy les lignes droictes AB, FB ſont commenſurables en longitude par la 9. pr. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, & laplus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy eſt commenſurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

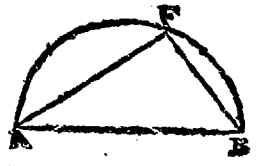
SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 6: AF ſera √20: & partant BF ſera 4, commenſ. en longitude à AB.

PROB. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude.

Soit expoſée la rationele AB, & ſoient trouuez (comme il a eſté enſeigné au lemme 2. de la pr. 29. de ce liure) deux nombres quarrez tels que le compoſé d'iceux ne ſoit quarré; ou pluſtoſt ſoit diuiſé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarrez CE, ED, afin que le tout CD ne ſoit à l'vn ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré puis ſur AB ſoit deſcrit le demy cercle AFB; & par le corollaire de la 6. pr. 10. ſoit trouuee la ligne droicte AF, au quarré de laquelle ſoit le quarré de AB, comme le nombre CD eſt au nombre CE: & finalement icelle AF eſtant accommodee au cercle ſoit menee BF. Ie dis que AB & AF ſont les deux lignes demandees.



C.....E...D

Car on prouuera tout ainſi qu'à la precedente, que AB & AF ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, (car leurs quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré;) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD eſt à CE, ainſi le quarré de AB eſt au quarré de AF; par conuerſion de raiſon comme CD ſera à DE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de BF. Mais CD n'eſt pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc auſſi le quarré de AB ne ſera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF, ſeront incommenſurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, telles

que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy eſt incommenſurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si la rationele AB eſt 3, AF ſera √6, & BF √3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

Soient trouuées par la 30. prop. de ce liure deux lignes rationeles A & B commenſurables en puiſſance ſeulement, & que la plus grande A puiſſe plus que la plus petite B du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude: Item par la 13. pr. 6. ſoit trouuee C moyenne proportionnele entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, ſoit trouuee la 4. proportionele D: Ie dis que C & D ſont les deux lignes demandees.

A ——— ——
C ——— ——
B ———
D ———

Car puis que A & B ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, par la 22. pr. 10. le rectangle d'icelles A & B ſera irrationel; & la ligne C pouuant iceluy par la 17. prop. 6. (car elle eſt moyenne prop. entre A & B) ſera mediale. Et d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D; & A eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à B, auſſi C ſera commenſurable en puiſſance ſeulement à D, par la 10. propoſition 10. Mais puis que C eſt mediale, par la 24. propoſition 10. D ſera auſſi mediale. Et d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D: en permutant comme A ſera à C, ainſi B ſera à D: mais par la conſtruction comme A eſt à C, ainſi C eſt à B: pareillement donc comme C ſera à B, ainſi B ſera à D: & partant le rectangle de C & D ſera egal au quarré de B, par la 17. prop. 6. & puis que le quarré de la rationele B eſt rationel, le rectangle compris ſous C & D, qui luy eſt egal, ſera auſſi rationel. Et veu que comme A eſt à B, ainſi C à D; & peut plus que B du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſur. en longitude, auſſi par la 15. pr. 10. C pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſur. en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Ce qu'il falloit faire.

Que ſi on vouloit que C pûſt plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fuſt incommenſ. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles ſont requiſes par la precedente prop. au lieu que cy deſſus elles ont eſté trouuées par la 30. pr. 10. & acheuer le tout comme deſſus.

SCHOLIE.

Soit A8, B √28: le rectangle d'icelles ſera √1792, & la ligne C √√1792, qui eſt mediale. Et puis que comme A8, eſt à B √28, ainſi C √√1792 eſt à D, icelle ſera √√345: donc C & D ſont deux mediales comm. en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent vn rationel 28, & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude.

Car ſi du quarré d'icelle C, on oſte le quarré de D, reſtera V 567, & ſeront commenſ. en longit. les deux mediales V V 1792 & V V 567. Car elles ſont comme 4 à 3. Derechef ſoit A 8, & B V 20 : le rectangle d'icelles ſera V 1280, & la ligne C V V 1280, & partant D ſera V V 125, donc C & D ſont mediales comprenant vn rationel. 20. & C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

Soient trouuées trois lignes rationneles commenſ. en puiſſance ſeulement, A, B, C, & que A puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 30. ſp. 10. les deux rationelles A & C commenſurables en puiſſance ſeulement, & que A puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude : puis à C & A ſoit trouuée B commenſ. en puiſſance ſeulement, par ce qui eſt enſeigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. ſoit trouuée D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. ſoit faict comme D à B, ainſi C à E. Ie dis que D & E ſont les deux lignes demandées.

A
D
B
C
E

Car puis que D eſt moyene prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui eſt irrationel, & par conſequent D eſt mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainſi C à E, en permutant comme A ſera à C, ainſi D ſera à E. Mais A & C ſont commenſ. en puiſſance ſeulement : donc auſſi D & E : & par la 24. p. 10. D eſtant mediale, E le ſera auſsi. Et derechef puis que comme D à B ainſi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrémes D & E ſera egal au rectangle des moyennes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationneles commenſ. en puiſſance ſeulement eſt medial. Donc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E ſera auſſi medial. Finalement, puis que comme A à C, ainſi D à E ; & A peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude, par la 15. p 10. D pourra auſsi plus que E du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que ſi on trouue A, B, C, rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tellement que B puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incomm. en longitude, & on acheue de conſtruire comme deſſus ; on demonſtrera ſemblablement que D & E ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

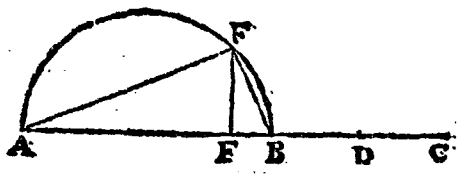
SCHOLIE.

Soit A 8, B V 48, & C V 28 : le rectangle compris de A & B ſera donc V 3072, & la ligne droicte D V V 3072, qui eſt mediale ; & A eſtant à C, comme D à E, icelle ſera V V 588. Donc D & E, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn medial, & la

plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'vne ligne, qui luy eſt commenſurable en longitude. Car ſi du quarré d'icelle D, on oſte le quarré de E, le reſte ſera V 972, qui eſt commenſurable en longitude à icelle D V V3072. Derechef ſi A eſt 8, B V 48, & C V 20, D ſera encore V V3072, mais E ſera V V300. Donc D & E ſont deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.



Soient deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement AB & BC, & que la plus grande AB puiſſe plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, trouuée comme il à eſté enſeigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppé en deux egalement CB au poinct D, ſoit appliqué vn rectangle ſur BA egal au quarré de BD defaillant d'vne figure quarrée par la 28. p. 6. & ſoit iceluy rectangle compris de AE & EB; & apres auoir fait vn demy cercle ſur la ligne AB, & mené la perpendiculaire EF, ſoient menées BF & FA: Ie dis qu'icelles lignes ſont les requiſes.

Car puis que AB & BC ſont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué ſur AB, & defaillant d'vne figure quarrée, eſt egal au quart du quarré de BC, (c'eſt à dire au quarré de DB; car nous auons demonſtré au ſcholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC eſt quadruple du quarré de BD) les deux lignes AE & EB ſeront incommenſ. en longitude par la 19. p. 10 Mais par le ſcholie de la 13. p. 6. EF eſt moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a eſté demonſtré à la 11. p. 10. elle ſera incommenſ. en puiſſance à EA. Mais comme FE à EA, ainſi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles ſont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA ſont incommenſ. en puiſſance, par la 10. p. 10. BF & FA ſeront auſſi incómenſ. en puiſſance. Item le quarré de AB, eſt egal aux deux de BF & FA par la 47. p 1. lequel quarré de BA eſt rationel, eſtant la ligne AB rationele; partant le compoſé des quarrez de BF & FA, ſera auſſi rationel. Et d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AE, EB, eſt egal au quarré de BD, & qu'il eſt auſſi egal au quarré de la moyenne prop. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de EF ſera egal au quarré de BD: partant la ligne EF eſt egale à BD: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA ſera egal au rectangle de BA & EF, ou BD ſon egale. (car par la 8. & 4. prop. 6. AB eſt à BF comme FA à EF.) Or par la 1. pr. 6. le rectangle de AB & DC eſt double du rectangle de AB & BD: (car la baſe BC eſt double de la baſe BD.) Mais le rectangle de AB & BC eſt medial par la 22. prop. 10. donc auſſi ſa moitié rectangle de AB & BD: & par conſequent medial ſon egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommenſu-

cables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt 6, & BC √12: BD ou EF ſera √3: & par conſequent AE ſera 3 + √6, & EB 3 — √6.: & puis que le quarré de AF eſt egal aux quarrez de AE, EF: icelle AF ſera √(18 + √216): mais BF ſera √(18 — √216). Donc icelles AF, FB ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir 36, eſt rationel, mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt √108, eſt medial.

PROB. 11. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial: mais qu'elles comprenent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement (*voyez la figure precedente*) AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puiſſe plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, trouuées comme il a eſté enſeigné en la 31. p. 10. & ſoit acheuée la conſtruction comme en la precedente. Ie dis que BF & FA ſont les deux lignes demandées.

Car nous demonſtrerons ainſi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA ſont incommenſ. en puiſſance: & que le quarré de BA eſt medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le compoſé des deux quarrez de BF & FA eſt medial. Et dautant que le rectangle de AB, BC (comme il a eſté demonſtré en la preced. prop.) eſt double du rectangle de AB, BD; & qu'il eſt rationnel par la conſtruction, auſſi iceluy rectangle de AB, BD ſera rationel. Mais il a eſté demonſtré en la precedente qu'il eſt egal au rectangle de BF & FA: & par conſequent iceluy eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommenſurables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

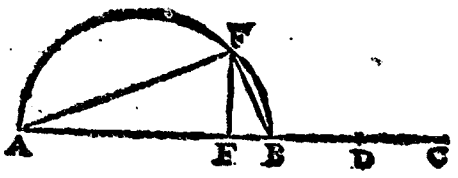
Si AB eſt √√432, & BC √√48: BD ou EF ſera √√3, & AF √(√108 + √72); mais BF eſt √(√108 — √72): & partant icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt √432, eſt medial: mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt √36, c'eſt à dire 6, eſt rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial, & auſſi le rectangle d'icelles medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puiſſe plus que la plus pe-

tire BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude, trouuées comme nous auons enſeigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la conſtruction comme en la 34. p. 10. Ie dis que BF & FA ſont les lignes demandées.



Car premierement elles ſont incommenſurables en puiſſance, comme en la demonſtration de la 34. p. 10. & le quarré de BA eſtant medial, comme en la precedente, le compoſé des quarrez de BF & FA ſera auſſi medial: Item le rectangle de AB & BC eſtant medial par l'hypotheſe, le rectangle de AB, & BD (ou EF ſon egale) qui eſt ſa moitié, ſera auſſi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & par conſequent medial le rectangle de BF & FA qui luy eſt egal, comme il a eſté demonſtré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypotheſe AB eſt incommenſurable en longitude à BC, & qu'à icelle BC eſt commenſurable en longitude ſa moitié BD, par la 13. p. 10. BD ſera auſſi incommenſurable en longitude à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB ſera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils ſont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'eſt à dire incommenſurable, par la 10. prop. 10. & par conſequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, ſera incõmenſurable au quarré de BA, c'eſt à dire au compoſé des quarrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droites AF, BF incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu ſous icelles, medial & incommenſurable au compoſé d'iceux quarrez: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt √√192, & BC √√48; BD ou ſon egale EF ſera √√3, & AF √(√48+√24). & BF √(√48−√24): Parquoy icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt √192, eſt medial incommenſ. à √24, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme eſt manifeſte le ſuiuant.

Trouuer deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

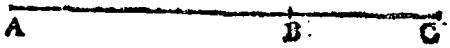
Car puis que tant le compoſé des quarrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, eſt medial, & qu'iceluy rectangle eſt incommenſ. à ce compoſé, auſſi les lignes pouuans iceluy compoſé, & rectangle, ſeront pareillement mediales incommenſ. tant en longitude que puiſſance. Car ſi elles eſtoient commenſ. en puiſſance, auſſi les quarrez d'icelles, c'eſt à dire le compoſé des quarrez des lignes, AF, BF, & le rectangle ſous icelles AF, FB, ſeroient commenſ. ce qui n'eſt pas. Parquoy ſi on prend AB pouuant le compoſé des lignes AF, FB; & vne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB, c'eſt à dire vne moyenne proportionnelle entre AF, FB, ſeront trouuées deux mediales incommenſurables en longit. & puiſſance.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes rationnelles par compoſition.

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont compoſées, la toute ſera irrationnelle: & ſoit icelle appellée Binome.

Soient compoſées deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, trouuées par le lemme qui precede la 22. prop. 10 Ie dis que la toute AC eſt irrationnelle.



Car par la 1. prop. 6, le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC ſont incommenſ. en longit. par l'hypotheſe. Donc par la 10. pr. 10. le rectangle de AB, BC ſera incommenſ. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC ſera incommenſ au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB & BC ſont rationnelles commenſ. en puiſſance ſeulement, leurs quarrez ſeront commenſurables entr'eux, & le compoſé de tous deux ſera commenſurable au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & partant par la 14. prop. 10. les deux quarrez d'icelles AB & BC ſeront incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. prop. 10. le compoſé de deux fois le rectangle & des deux quarrez, c'eſt à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré eſt egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) eſt incommenſ. aux deux quarrez de AB & BC, leſquels eſtans rationnaux, & le compoſé d'iceux rationnel, le quarré de AC qui luy eſt incommenſurable ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne AC irrationelle: or icelle ſera appellee binome, pource qu'elle eſt compoſée de deux noms, c'eſt a dire de deux lignes rationelles AB, BC, commenſurables en puiſſance ſeulement. Si donc deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il failloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB 1, BC √3: la toute AC ſera 2+√3, & ſon quarré eſt 7+√48.

Or il appert de ce que deſſus, que de deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, ſont procreées deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles eſt irrationelle par la 22. prop. de ce liure, laquelle eſt appellée mediale. Et la compoſee d'icelles, par la 37. prop. 10. eſt vne irrationelle, qui eſt dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel ſont compoſées,

la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee bimediale premiere.

Soient compoſées deux mediales AB & BC commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel trouuees, par la 28. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

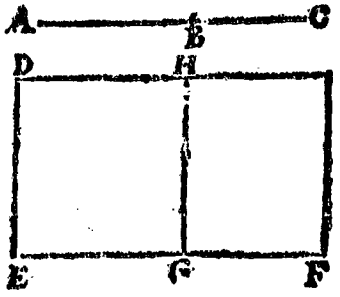
Car puis que par la 1. prop. 6. comme AB eſt à BC, ainſi le rectangle compris ſous AB, BC eſt au quarré de BC; & que AB, BC ſont incommenſurables en longitude; par la 10. prop. de ce liure, iceluy rectangle de AB, BC ſera auſſi incommenſurable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC eſt commenſurable à deux fois iceluy: & au quarré de BC eſt commenſ. le compoſé des quarrez d'icelles AB, BC (car puiſque AB, BC ſont commenſurables en puiſſance, leurs quarrez ſeront commenſur. & partant le compoſé d'iceux quarrez ſera auſſi commenſurable au quarré de BC par la 16. prop. 10.) Donc le compoſé des deux quarrez de AB, BC ſera incommenſurable à deux fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le compoſé d'iceux deux quarrez & rectangles, c'eſt à dire le ſeul quarré de AC, qui leur eſt egal par la 4. prop. 2. ſera auſſi incommenſurable à deux fois le rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux fois iceluy rectangle de AB, BC eſt commenſurable vn ſeul rectangle d'icelles AB, BC : donc par la 13. prop. 10. le quarré de AC ſera incommenſurable au rectangle compris ſous AB, BC : & iceluy rectangle eſtant rationel par l'hypotheſe, iceluy quarré de AC ſera irrationel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC ſera auſſi irrationelle par la 11. def. 10. Et icelle ligne ſoit appellée bimediale premiere. Si donc deux lignes mediales comm. en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB √√54, & BC √√24 : La toute AC ſera donc √√54 + √√24, irrationelle nommee bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial ſont compoſées, la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee bimediale ſeconde.



Soient compoſées les deux mediales AB & BC commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car ſoit vne ligne rationelle propoſee DE, ſur laquelle ſoit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au compoſé des quarrez de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AC, c'eſt à dire le rectangle DF, eſt egal aux deux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle d'icelles AB, BC; le rectangle HF ſera egal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypotheſe le rectangle

ctangle de AB, BC, eſt medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy eſt commenſurable, c'eſt à dire le rectangle HF, ſera auſſi medial. Derechef, puis que les quarrez des mediales AB, BC ſont commenſ. le compoſé d'iceux, c'eſt à ſçauoir le rectangle DG, ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, BC, eſt medial: Donc par le coroll. de la 24. prop. 10. le rectangle DG ſera auſſi medial: Ainſi les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, (car GH eſt egale à la rationelle DE,) leurs autres coſtez EG & FG ſeront rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à DH, par la 23. pr. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC comme AB eſt à BC, par la 1. prop. 6. c'eſt à dire incommenſurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC eſtans commenſurables entr'eux, les deux enſemble ſeront commenſurables au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarrez de AB & BC ſeront incommenſurables à deux fois le rectangle de AB & BC; & par conſequent auſſi leurs egaux rectangles DG & HF: & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationelles ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc commenſurables en puiſſance ſeulement; (car autrement elles ne ſeroient rationelles ſi elles eſtoient incommenſurables,) & par la 37. p. 10. la toute compoſee EF ſera irrationelle: & le rectangle DF ſera irrationel: car s'il eſtoit rationel la ligne DE eſtant rationelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre coſté EF fut auſſi rationel, ce qui n'eſt pas: DF eſt donc irrationel: & partant auſſi irrationel ſon egal quatré de AC; & par conſequent la ligne AC irrationelle, qui ſera appellee bimediale ſeconde. Si donc deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

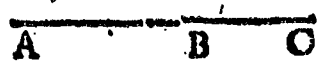
Il eſt manifeſte par cecy que le rectangle compris d'vne ligne rationelle & d'une irrationelle, eſt auſſi irrationel. Car il a eſté demonſtré que le rectangle DF compris de la rationelle DE, & irrationelle EF, ne peut eſtre rationel.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{\sqrt{18}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{8}}$: La toute AC ſera $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{8}}$, qui eſt irrationelle, appellee bimediale ſeconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adiouſte enſemble deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, mais le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel; la toute ſera irrationelle: & ſoit icelle appellee ligne majeure.



Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC incommenſur. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, trouuees par la 34. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car d'autant que le rectangle compris ſous AB & BC eſt poſé medial, deux fois le meſme rectangle ſera auſſi medial par le corollaire de la 24. prop. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypotheſe le compoſé des quarrez de AB & BC eſt rationel: partant incommenſurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17. prop. 10. le compoſé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui eſt le quarré de AC par la 4. prop. 2.) ſera incommenſ. au compoſé des deux quarrez de AB & BC, qui eſt rationel: partant le quarré de AC ſera irrationel, & ſon coſté AC auſſi irrationel: lequel ſera appellé ligne Majeure. Parquoy ſi on adiouſte deux lignes droictes incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, *& BC* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, *qui eſt irrationelle nommee ligne majeure.*

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial, ſont aſſemblees; la toute ſera irrationelle: & ſoit icelle appellee ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soient compoſées les deux lignes AB & BC, telles que demande la propoſ. & qu'enſeigne à trouuer la 31. prop. de ce liure. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car puis que le compoſé des quarrez de AB & BC eſt medial, & leur rectangle rationel; deux fois iceluy rectangle ſera auſſi rationel, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & BC, lequel eſtant medial, par la 17. prop. 10. le compoſé des deux quarrez, & des deux rectangles, ſçauoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. ſera incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel eſt rationel: Ainſi par la 10. def. 10. le quarré de AC ſera irrationel: & par conſequent la ligne AC auſſi irrationelle: laquelle ſera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy ſi deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

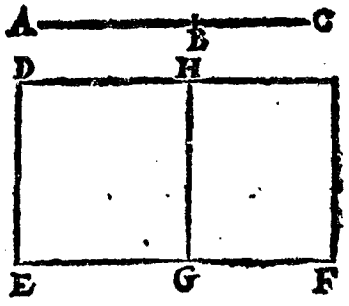
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$: *La toute AC ſera donc* $\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, ſont compoſées; la toute ſera irrationnelle: Soit icelle appellee ligne pouuant deux mediaux.

Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



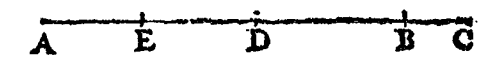
Soit exposee la rationnelle DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. prop. 10. sçauoir que le rectangle DF soit egal au quarré de AC: DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté demonstré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF seront aussi incommensurables en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE, feront les deux autres costez EG & FG rationnaux par la 23. prop. 10. Ainsi EG & FG seront rationelles commens. en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF sera irrationelle. Mais DE estant rationelle, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la 39. pr. 10. Partant la ligne qui peut icelluy rectangle, sçauoir AC sera irrationelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}$ *&* $BC\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$. *Donc la toute* AC *sera* $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$.

LEMME 1.

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalement en vn autre poinct, & que les parties de l'vne des diuisions soient inegales aux parties de l'autre diuision, chacune à la sienne: les quarrez des deux parties de la plus inegale diuision seront ensemble plus grands que les quarrez des parties de la moins inegale.



Soit la ligne droicte AC diuisee inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC, sont plus grands ensemble que ceux de AE & EC ensemble.

Car si AC est couppee en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC sont plus inegales que CE, AE, & que AE est plus grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD, est egal au quarré de DC: item le rectangle de AE & EC, auec le quarré de DE, est aussi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC auec le quarré de DE, est egal au rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD. Et en ostant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, auec deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle

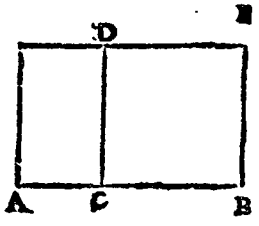
de AE & EC: & par conſequent les compoſez des quarrez & rectangles ſont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont eſté demonſtrez plus grands que les deux de AB & BC : partant les deux quarrez de AB & BC ſeront plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui eſtoit propoſé.

LEMME 2.

Vne figure rationelle excede vne figure rationelle, d'vne figure rationelle.

Soient les deux figures rationelles AE & AD, eſtant AE plus grande que AD de CE: Ie dis que CE eſt figure rationelle.

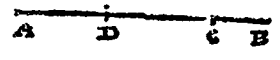
Car AE & AD eſtans rationelles, elles ſeront auſſi commenſ. & par la 16. prop. 10. AD & CE ſeront commenſurables entr'elles, & par conſequent rationelles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut eſtre diuiſee en ſes noms, qu'en vn poinct ſeulement.

Soit le binome AB diuiſé en ſes noms au poinct C : tellement que AC, CB ſoient rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, comme veut la 37. prop. Ie dis qu'on ne peut diuiſer AB en ſes noms en vn autre poinct, ſçauoir eſt que les lignes ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement.



Car s'il ſe peut faire, ſoit diuiſee derechef AB en ſes noms au poinct D. Or il appert que AB n'eſt couppee en deux egalement és poincts C & D. Car AC & CB, ou AD & DB, ſeroient commenſ. en longitude contre l'hypotheſe : il faut donc que AB ſoit couppée inegallement eſdits poinct C & D ; & que les parties AD & DB ſoient inegalles aux parties AC & CB, chacune à la ſienne : car ſi elles eſtoient egales, icelle AB ſeroit diuiſee à la ſeconde diuiſion au meſme poinct qu'à la premiere. Si donc AD & DB ſont parties moins inegales que AC & CB, par le lemme qui ſuit la 42. prop. 10. le compoſé des quarrez de AC & CB ſera plus grand que le compoſé des quarrez de AD & DB: Et d'autant qu'iceux compoſez ſont rationnaux (car ce ſont quarrez conſtruicts ſur lignes rationelles) leurs excez ſera auſſi rationel par le lemme preced. Or eſt-il que le compoſé des quarrez de AC & CB, auec deux fois le rectangle de AC & CB, eſt egal au compoſé des quarrez de AD & DB, auec deux fois le rectangle de AD & DB: (car iceux ſont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, ſont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC, CB ſoient plus petits que les rectangles de AD & DB: mais il a eſté demonſtré que l'excez des quarrez eſt rationel : donc l'excez des

rectangles sera aussi rationel: (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB; ou AD & DB, sont rationnelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a pû estre diuisé, en ses noms qu'en C: car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura tousiours la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il est à notter qu'és cinq sortes de lignes irrationelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux: car comme il a esté dict cy-dessus, ils seroient commens. en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au poinct proposé faut entendre que le contredisant apportant vne autre diuision, les parties d'icelles doiuent estre, inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au poinct C, tellement que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. Ie dis qu'on ne la peut diuiser en ses noms en vn autre poinct.

Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonstrerons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB seront autant plus grands que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB sont plus petits que les quarrez de AC & BC: Or tous ces rectangles sont rationnaux par l'hypotheſe. Donc leurs excez sera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par consequent l'excez des quarrez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarrez, estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, ainsi qu'il appert par la 16. proposition 10. & coroll. de la 24. proposition 10. partant l'excez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Si vne ligne droicte est couppee inegallement, les quarrez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB couppee inegallement en C: Ie dis que les quarrez de AC, CB, sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.

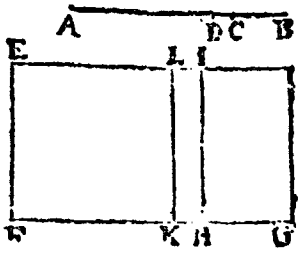
Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. pr. 2. les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB, sont egaux à deux fois le rectangle de

AC, CD, (c'eſt à dire de AC, CB) auec le quarré de AD: & partant les deux quarrez de AC, CB ſont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB: ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale ſeconde, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la bimediale ſeconde AB diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC & BC ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la 37. prop. de ce liure: Ie dis qu'elle ne peut eſtre diuiſee en ſes noms en vn autre poinct que C.



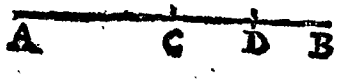
Car ſi faire ſe peut qu'elle ſoit encore diuiſee en AD & DB, en ſorte que deſſus: & ſoit vne ligne rationelle propoſee EF, ſur laquelle (par la 45. prop. 1.) ſoit conſtruit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarrez de AC, CB: le reſte IG ſera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AC, CB, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la meſme maniere ſi ſur EF on applique EK égal aux quarrez de AD, DB: le reſte LG ſera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, ſont inegaux aux quarrez de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK ſeront auſſi inegaux: & partant les lignes FH, FK, ſeront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB ſont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent; EH ſera auſſi plus grand que IG: & partant EH plus grand que la moitié de EG: & conſequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonſtrerons par meſmes raiſons que FK, eſt auſſi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, ſont inegales aux parties FK, KG, chacune à la ſienne. Et pource que AC, CB ſont mediales, & commenſurables en puiſſance; les quarrez d'icelles ſeront auſſi mediaux & commenſurables; & par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'eux; leſquels eſtans mediaux, leur compoſé, c'eſt à ſçauoir le rectangle EH, ſera auſſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. Par meſme raiſon EK ſera demonſtré medial; parquoy EH, EK appliquez ſur la rationelle EF, auront les coſtez FH, FK rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB eſt poſé medial; le double d'iceluy, ſçauoir eſt IG, ſera auſſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & eſtant appliqué ſur la rationele HI, l'autre coſté HG ſera auſſi rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB ſont incommenſurables en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi le quarré de AC eſt au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré ſera incommenſurable au rectangle. Mais au quarré de AC eſt commenſurable le compoſé des quarrez de AC, CB;

(car d'autant que AC, CB ſont commenſurables en puiſſance, & partant les quarrez d'icelles commenſurables, le compoſé d'iceux quarrez ſera auſſi commenſurable au quarré de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB, eſt commenſurable à ſon double. Donc auſſi le compoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle EH, eſt incommenſurable au double du rectangle de AC, CB, c'eſt à dire à IG, par le ſcholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH eſt à IG, ainſi FH eſt à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG ſeront incommenſurables en longitude. Mais elles ont eſté demonſtrees rationeles: Donc les lignes FH, HG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG ſera binome, & diuiſée en ſes noms au poinct H. En la meſme maniere nous demonſtrerons auſſi FG binome eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct K; ce qui eſt abſurde: car par la 43. p. 10. elle ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'en vn ſeul poinct. Donc AB bimediale ſeconde ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne majeure, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne majeure AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance: & le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial, comme veut la 40. prop. de ce liure. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

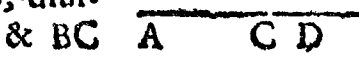


Car ſi faire ſe peut, qu'elle ſoit diuiſee en ſes noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que ſoit le poinct D, nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la 45. p. de ce liure, que les compoſez des quarrez de AC & BC; & de AD & DB ont vn meſme excez que les doubles rectangles de AC, BC: & de AD, DB. Mais d'autant que les compoſez quarrez ſont rationaux par l'hypotheſe, & par conſequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (leſquels ſont mediaux par le corol. de la 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui eſt contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne ſera diuiſee en ſes noms en autre poinct qu'en C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AB & BC ſoient incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: mais le re-



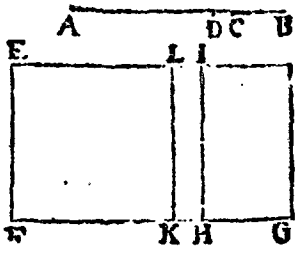
ctangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. prop. 10. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

Car il s'enſuiuroit meſme abſurdité qu'en la precedente prop. ſçauoir que ſi on la diuiſoit encores au poinct D, il s'enſuiuroit comme là, que l'excez tant des quarrez, que des rectangles ſeroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC & BC ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, comme veut la 42. prop. 10. Ie dis qu'on ne peut diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.



Car ſi faire ſe peut, qu'icelle AB ſoit encore diuiſee au poinct D: & ſur la rationele propoſee EF ſoit faite pareille conſtruction qu'en la 45. p. 10 ſçauoir eſt le rectangle EG egal au quarré de AB, & EH egal aux deux quarrez de AC & CB: & partant IG, egal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a eſté demonſtré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui ſont mediaux par la ſuſdite demonſtration, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſurable au double de leur rectangle: (car par l'hypotheſe il eſt incommenſurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant auſſi les rectangles EG & EH ſeront incommenſurables. Ainſi les lignes rationeles FH & HG ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. AB ſera binome diuiſé en ſes noms au poinct H. Que ſi on veut dire que AB peut encore eſtre diuiſé en ſes noms au poinct D: il s'enſuiura, comme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diuiſé en ſes noms au poinct H, ſe pourroit encore diuiſer en ſes noms au poinct K, contre la 42. pr. 10. Ainſi AB ne pouuoit eſtre diuiſee en ſes noms qu'au ſeul poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele eſtant propoſee, & vn binome diuiſé en ſes noms; lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude:

1. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee: toute la ligne ſoit appellée Binome premier.

2. Mais

2. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée : toute la ligne ſoit appellée Binome ſecond.

3. Que ſi ny l'vn ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée : toute la ligne ſoit appellée Binome troiſieſme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee : toute la ligne ſoit appellee Binome quatrieſme.

5. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee : toute la ligne eſt appellee Binome cinquieſme.

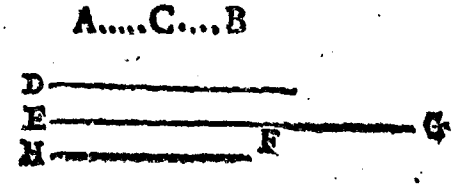
6. Que ſi ny l'vn ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee ; la toute ſoit appellee Binome ſixieſme.

Il n'eſt rien dit icy des lignes, deſquelles les deux noms ſoient commenſurables en longitude à la rationele propoſee : parce que telles lignes ne ſont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome eſt composé de deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous auons enſeigné au 2. ſcholie de la 29. prop. 10.) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, à fin que AB, CB ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne ſoient ent'eux comme nombre quarré à nombre quarré ; à vne rationele propoſée D, ſoit pris E F commenſ. en longit. & icelles D & E F ſeront rationeles commenſurables en longitude. En apres, par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quar-



ré de EF ſoit au quarré de FG. Ie dis que la toute EG eſt binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG, qui ſont entr'eux comme les nombres AB, AC, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. auſſi les lignes EF, FG ſeront commenſurables, au moins en puiſſance: Et d'autant que EF eſt rationele, auſſi FG ſera rationele. Mais pource que AB, AC ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré; & partant les lignes EF, FG ſont incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'il eſt premier. Car puis que les quarrez de EF, FG ſont entr'eux comme les nombres AB, AC: & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: que ce ſoit donc du quarré de H: (iceluy quarré ſera trouué par le lemme qui ſuit la 14. prop. 10.) Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG: par conuerſion de raiſon comme AB à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de EF ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes EF, H ſont commenſ. en longitude par la 9. pr. 10. Veu donc que le plus grand nom EF eſt commenſ. en longit. à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ en longitude; EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier: Ce qu'il falloit faire.

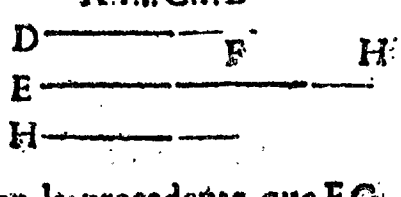
SCHOLIE.

Soit la rationele propoſee D 8, & EF 6; faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 36 quarré de EF, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant la toute EG, ſera 6+√20, qui eſt binome premier: car le plus grand nom eſt commenſurable à nombre abſolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt commenſurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier ſera trouué plus briefuement que deſſus, poſant quelconque nombre pour le plus grand nom, & pour le moindre la racine quarree des trois quarts de ſa puiſſance. Ainſi poſant 8 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 64, dont le quart ſouſtrait reſte 48; & partant 8+√48 ſera binome premier.

PROB. 14. PROP. L.

Trouuer vn Binome ſecond.

Eſtans trouuez les deux nõbres quarrez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commenſurable en longitude à vne rationele propoſée D: icelles D & FG ſeront rationeles commenſurables: puis apres par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG ſoit au quarré de EF. Ie dis que EG eſt binome ſecond.



Car on demonſtrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG

eſt binome. Et puis que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG eſt au quarré de EF, en changeant comme AB à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG. Mais AB eſt plus grand que AC: Donc auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG, & ſoit du quarré de H. Nous demonſtrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF ſont commenſurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, & le moindre nom FG commenſurable en longitude à la rationele D: & par les ſec. def. EG, ſera binome ſecond. Nous auons donc trouué vn binome ſecond, ainſi qu'il eſtoit requis.

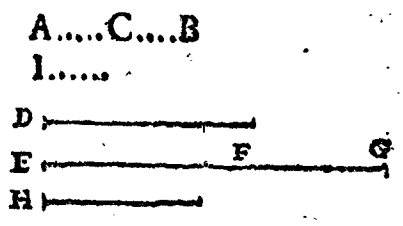
SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 5: faiſant donc que comme AC 3 eſt à AB 9, ainſi 25 quarré de FG ſoit au quarré de EF 3 icelle EF ſera √45: & partant la toute EG ſera √45+5, qui eſt binome ſecond: pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt commenſ. en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom eſt auſſi commenſur. au nombre rationel propoſé. Or pour trouuer plus briefuement que deſſus iceluy binome ſecond, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adiouſter le tiers, & la racine quarree de ce qui en viendra ſera le plus grand nom. Ainſi prenant pour le moindre nom 6, ſon quarré eſt 36, dont le tiers luy eſtant adiouſté ſera 48: & partant √48+6 ſera binome ſecond.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troiſieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. ſoit pris vn autre nombre I qui ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qui ſe fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'eſt quarré, il ne ſera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Derechef, puis qu'il eſt non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: & partant il ne tombera pas entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 8. p. 8. Ils ne ſeront donc pas plans ſemblables: & partant ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez.) & apres auoir expoſé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. ſoit fait que comme I à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: par ainſi les quarrez de D & E F, eſtans entr'eux comme nombre à nombre, ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D & EF le ſeront auſſi, au moins en puiſſance. Parquoy D eſtant rationele, EF le ſera, auſſi. Mais parce que I n'eſt pas à AB, c'eſt à dire le quarré de D au quarré de EF comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF ſeront incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef ſoit fait par le ſuſdict corol. que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG: & par la 6. prop. 10. iceux



quarrez de EF, FG, eſtans comme nombre à nombre, ſeront commenſurables entr'eux: & partant les lignes EF, FG auſſi commenſurables, au moins en puiſſance: & EF eſtant rationele, FG le ſera auſſi. Et d'autant que AB n'eſt pas à AC, c'eſt à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG ſeront incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'elle eſt binome troiſieſme. Car d'autant que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D eſt au quarré de EF; & comme AB à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de FG: par raiſon egale comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D ſera au quarré de FG. Mais I n'eſt pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré: donc les quarrez de D & FG ne ſeront auſſi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D & FG, ſeront incommenſurables en longitude par la 9. p. 10. Et puiſque comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG; & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: ſoit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonſtrerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H ſont commenſurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy eſt commenſurable en longitude, & l'vne ny l'autre d'icelles EF, FG n'eſt commenſurable en longitude à la propoſee rationele D, comme il a eſté demonſtré: partant EG ſera binome troiſiéme par les ſecondes definitions. Nous auons donc trouué vn binome troiſieſme. Ce qu'il falloit faire.

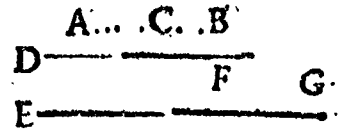
SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 6: faiſant donc que comme 16, eſt à AB 9, ainſi 36 quarré de D ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera √54: & faiſant que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 54 quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √30: & partant la toute EG ſera √54 + √30, qui eſt binome troiſieſme, parce que l'vn ny l'autre nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, duquel la racine eſt commenſurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouuer ce binome plus promptement que deſſus, on poſera la racine quarree de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarree des trois quarts du meſme nombre pour le moindre nom: Ainſi poſant pour le plus grand nom √20, l'autre nom ſera √15: & partant √20 + √15 ſera binome troiſieſme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatrieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB, ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarrez, (ſuiuant ce que nous auons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop. de ce liure) ſoit expoſé la rationele D, & pris EF commenſ. en long. à icelle rationele D; & par conſequent EF ſera auſſi rationele: Et ayant conſtruit le reſte comme en la 49. pr. 10.



Nous demonſtrerons comme là que la toute EG eſt binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du quarré de H; & que par conuerſion de raiſon, comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & par la 9. prop. 10. les lignes EF & H, ſont incommenſ. en longitude: parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt incommenſurable en longitude, & qu'icelle EF eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee D: EG ſera binome quatrieſme par les def. ſecondes. Nous auons donc trouué vn binome quatrieſme: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele expoſee D ſoit 8, & EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt AC 6, ainſi le quarré de EF, ſçauoir 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera trouuee de √24: & partant la toute EG ſera 6+√24, qui eſt binome quatrieſme: pource que le plus grand nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt incommenſurable en longitude à iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus promptement que deſſus poſant pour le plus grand nom quelconque nombre: & pour le moindre la racine quarree de la moitié du quarré d'iceluy. Ainſi poſant 6 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 36, dont la moitié ſera 18, & partant 6+√18 ſera binome quatrieſme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50. p. on demonſtrera comme en ladite 50. prop. que EG eſt binome. Item que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H: Et comme en la precedente, qu'icelles EF & H ſont incommenſurables en longitude: & partant par les ſecondes def. EG eſt binome cinquieſme. Nous auons donc trouué vn binome cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

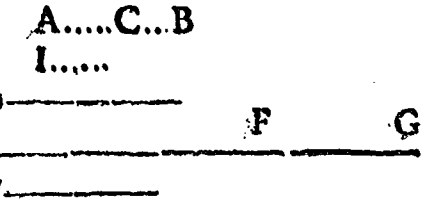
La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 6: donc faiſant que comme AC 6 eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF, ſçauoir eſt 36, ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera trouuee de √54: partant la toute EG ſera √54+6, qui eſt binome cinquieſme: car le moindre nom eſt commenſ. en longitude au nombre rationel propoſé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré dont la racine eſt incommenſ. en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer tel binome, ſoit poſé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy eſtant adiouſtee au meſme quarré, la racine du tout ſera le plus grand nom: Ainſi poſant 4 pour le moindre nom, ſon quarré ſera 16, dont la moitié 8 luy eſtant adiouſtee ſeront 24, dont la racine ſera √24, & partant √24+4 ſera binome cinquieſme.

PROB. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome ſixieſme.

Soient trouuez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB ne ſoit

à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qu'on fera adiouſtant enſemble deux nombres premiers: Car par la 30. p. 7. le total ſera auſſi premier à chacun d'eux: & partant ne ſera à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré par les choſes demonſtrées à la fin du 8. liure) puis ſoit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres, ſoit vne rationele propoſee D: &



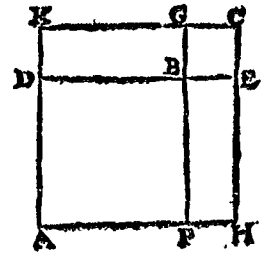
par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: & ayant acheué comme en la 51. pr. 10. nous demonſtrerons comme là que EG eſt binome: Item que D & FG ſont incommenſ. en longitude, & que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonſtrerons comme en la 49. pr. que par conuerſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conſequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. pr. 10. les lignes droictes EF & H, ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy eſt incommenſ. en longitude: & que l'vn ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſ. en longitude à l'expoſee rationele D, par les ſecondes def. EG ſera binome ſixieſme. Nous auons donc trouué vn binome ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 6: faiſant que comme 16 eſt à AB 8, ainſi le quarré de D, c'eſt à ſçauoir 36, au quarré de EF: icelle EF ſera trouuee de √48: & faiſant que comme AB 8 eſt à AC 5, ainſi 48 quarré de EF ſoit au quarré de FG: icelle FG ſera trouuee de √30: partant la toute EG ſera √48+√30, qui eſt binome ſixieſme: car l'vn & l'autre nom eſt incommenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt incommenſ. à iceluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que deſſus tel binome il n'y a qu'à prendre les racines quarrees de deux nombres non quarrez, dont l'vn ſoit double de l'autre: Ainſi poſant √12 pour le plus grand nom, l'autre ſera √6; & partant √12+√6 ſera binome ſixieſme.

LEMME.

Les quarrez AB, BC eſtans conioincts à l'angle B, tellement que les coſtez DB, BE facent vne ſeule ligne droicte DE; & par conſequent les coſtez FB, BG auſſi vne ſeule ligne droicte FG: eſtant acheué le parallelogramme HK: Ie dis qu'iceluy eſt quarré; & le rectangle FE moyen proportionnel entre les quarrez AB, BC; & DC moyen proportionnel entre les quarrez AC, BC.



Car d'autant que DB eſt egale à FB, & BE à BG: la toute DE ſera egale à la toute FG. Mais par la 34. pr. 1. la ligne DE eſt egale à l'vne & à l'autre d'icelles AH, KC: & FG

à AK, HC: & par conſequent chacune d'icelles AH, KC eſt egale à l'vne & à l'autre AK, HC: donc le parallelogramme HK eſt equilateral. Mais par la 29. prop. 1. il eſt auſſi rectangle, & partant quarré. Derechef, puis que DB, BE, ſont egales à FB, BG, chacune à ſa correſpondante, comme DB eſt à BE, ainſi FB à BG. Mais par la 1. prop. 6. comme DB à BE, ainſi AB à FE: & comme FB à BG, ainſi FE à BC: donc comme AB à FE, ainſi FE à BC: & partant FE eſt moyen prop. entre AB, BC. Et finalement, veu que comme AD à DK, ainſi KG à GC, icelles eſtans egales chacune à la ſienne: en compoſant comme AK à DK, ainſi KC à GC. Mais comme AK à DK, ainſi AC à DC: & comme KC à GC, ainſi DC à BC par la 1. prop. 6. Donc comme AC à DC, ainſi DC à BC: & par conſequent DC eſt moyen prop. entre AC, BC.

Or voila comme Commandin propoſe & demonſtre ce lemme: mais Clauius le propoſe ainſi.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt moyen proportionnel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu ſous la toute, & vne des parties, eſt moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

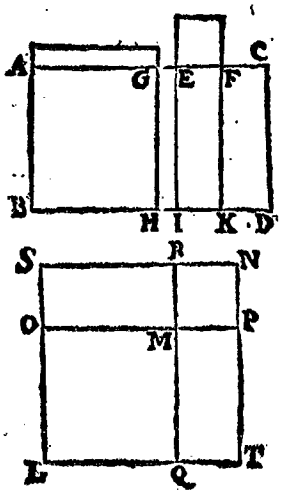
Ce qui eſt la meſme choſe que deſſus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier; la ligne pouuant iceluy rectangle eſt binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationelle appellee binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom ſoit AE: donc par la def. AE, EC ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & auſſi AE ſera commenſ. en longit. à la rationelle propoſee AB. Soit couppee EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. ſi ſur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eſt à dire au quarré de EF, & defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle AE en parties commenſ. en long. par la 18. prop. 10. ſoient donc icelles parties AG, GE: & par les poincts G, E, F ſoient menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. p. 2. ſoient deſcrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & diſpoſez en ſorte que OM, MP facent vne ligne droicte: puis ſoit acheué le rectangle ST, lequel ſera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la conſtruction le rectangle de AG, GE eſt egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE ſeront proport. par la 17. pr. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI ſeront auſſi proportionnaux: parquoy EK ſera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK ſeront egaux.

Mais par la 43. prop. 1. OR, QP ſont auſſi egaux: & par la 36. p. 1. EK eſt egal à FD: donc QP ſera auſſi egal à FD: & par conſequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle AD: & par ainſi la ligne OP peut le rectangle AD: Ie dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude, la toute AE ſera auſſi commenſ. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE eſt auſſi commenſ. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle AB eſt auſſi commenſ. en long. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB eſtant rationelle, AG, GE ſeront auſſi rationelles: & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationelles, ſeront rationaux: donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationelles. Et d'autant que AE eſt incomm. en long. à EC, mais commenſ. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. AG, EF ſeront incommenſ. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. p. 6. ſont auſſi incommenſ. par la 10. p. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. pr. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommenſ. en long. puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demonſtrees rationelles: & partant elles ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc la toute OP pouuant le rectangle AD eſt binome par la 37. p. 10. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC 4+√12. Donc le rectangle AD ſera 20+√300: Et puis que AE plus grand nom du binome eſt 4, & EF moitié du plus petit nom EC, eſt √3, AG ſera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH ſera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle ſera √15: Ainſi GI eſt 5, & MP √5. Mais EF eſt √3, & EI egale à AB: donc EK ſera √75, & ſon double ED √300. Or ſi on multiplie OM, MP entr'elles, ſera produict MT √75, egal à EK. Mais à iceluy MT eſt egal MS: donc MS, MT enſemble ſeront auſſi √300. Or les quarrez LM 15, MN 5, ſont enſemble 20: Partant tout le quarré LN eſt 20+√300, & ſon coſté OP ou LT √15+√5, qui eſt binome ſixieſme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

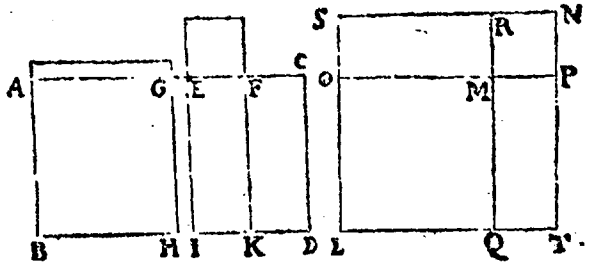
Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome ſecond, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome ſecond AC: Ie dis que (apres auoir fait pareille conſtruction & demonſtration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt l'irrationelle appellee bimediale premiere.

Car puis que AC eſt binome ſecond, AE ſera incommenſ. en longit. à la rationelle AB: Item AG & EG (qu'on prouuera eſtre commenſurable en longi-

tude

eude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. prop. 10. à leur toute AE seront par la 14. pr. 10. aussi incommensurables en longitude à icelle AB, laquelle estant rationelle, icelles AG, GE seront aussi rationelles: & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationelle AB. Donc par la 22. prop. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux: & leurs egaux quarrez L M, M N aussi mediaux: Et partant les lignes O M, M P mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longitude à la rationelle AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. prop. 10. aussi sera sa moitié I K: & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP: & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC √48+6: donc le rectangle AD sera √12000+30. Et puis que AE est √48, & EC 6: EF sera 3, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront √27, & √3: parquoy le rectangle AH sera √675, & par consequent la ligne OM, qui peut iceluy sera √√675: ainsi GI sera √75, & MP √√75. Or EC est 6: partant ED double de MS √√30625, c'est a dire 15, est 30; & par consequent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarrez LM √675, MN √75, & des deux rectangles MS, MT 30, sera √1200+30, & son costé OP ou LT √√675+√√75, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome troisiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationele nommee bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisiesme AC; (apres auoir construict comme aux precedentes.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationele appellée bimediale seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commens. en puissance seulement: Item, d'autant que AC est binome troisiesme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationele AB; & par la 22. p. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK: Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP, sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC √32+√24: Donc le rectangle AD sera √800+√600. Mais d'autant que AE est √32, & EC √24; EF sera √6, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG sera √18, & GE √2. Parquoy le rectangle AH sera √450, & GI √50; & par consequent la ligne OM est √√450, & MP √√50. Et puis que EI est 5, & EC √24, le rectangle ED sera √600, lequel est double de MT √150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarrez LM √450, MN √50, & des rectangles MS, MT √600; sera √800+√600: & partant son costé OP est √√450+√√50, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Majeure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC, & de la rationelle AB: (apres auoir construict & demonstré comme en la 55. prop.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle qu'on appelle ligne majeure.

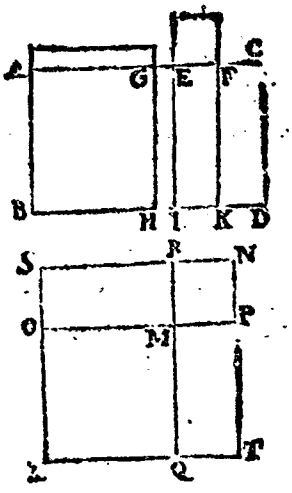
Car puis que AC est binome quatriesme, le plus grand nom AE est commensur. en longitude à la rationele AB, & peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 19. pr. 10. le rectangle defaillant compris soubs AG, GE, (qui est egal au quart du quarré de EC) diuisera AE en AG & EG incommens. en longitude: & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Donc aussi incommens. leurs egaux quarrés LM & MN: & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris des rationeles AB, AE, (qui est egal aux quarrez LM, MN) est rationel par la 20. prop. 10. Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. estant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP est ligne majeure. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC 4+√8: Donc le rectangle AD sera 20+√100. Et puis que AE est 4, & EC √8: EF sera √2, au quarré de laquelle, sçauoir 2, ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE: la ligne AG sera 2+√2, & GE 2—√2: partant le rectangle AH sera 10+√50, & GI 10—√50: & par consequent OM est √(10+√50.) & MP √(10—√50). Or EC estoit √8: donc ED double du rectangle MT √50, sera √200. La somme des quarrez LM, MN, sera donc 20, à laquelle si on adiouste les plans TMS √100; on aura pour tout le quarré LN 20+√200: & partant son costé OP sera √(10+√50) + √(10—√50), ou √(20+√200) qui est ligne majeure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome cinquieſme; la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome cinquieſme AC; Ie dis, (apres auoir conſtruict & demonſtré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt ligne irrationelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC eſt binome cinquieſme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & comme en la precedente, AG & GE ſeront incomm. en long. Et les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance, & l'egal au compoſé de leurs quarrez, ſçauoir le rectangle AI, eſt medial par la 22. pr. 10. car les lignes AB & AE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, ſont comm. en longit. par la 20. p. 10. ED eſt rationel: auſſi ſera ſa moitié EK, & ſon egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP eſt ligne irrationele pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn binome cinquieſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC √8+2. Donc le rectangle AD ſera √200+10. Et d'autant que AE eſt √8, & EC 2; EF ſera 1, au quarré de laquelle eſtant egal le rectangle de AGE, le coſté AG ſera √2+1, & GE √2−1: & partant le rectangle AH ſera √50+5, & la ligne OM √(√50+5): & MP √(√50−5), puis que GI eſt √50−5. Et pource que EI eſt 5, & EC 2; le rectangle ED ſera 10: & par conſequent ſa moitié MT eſt 5. Donc la ſomme des quarrez LM, MN, eſt √200, à laquelle adiouſtant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN ſera √200+10: & par conſequent ſon coſté OP, eſt √(√50+5) +√(√50−5), ou bien √(√200+10), qui eſt ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

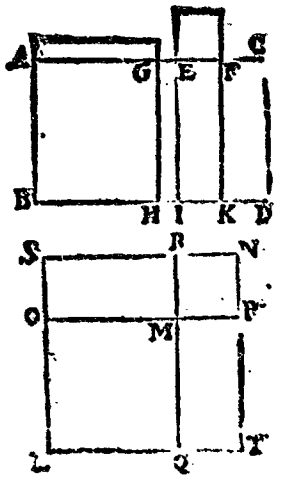
THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome ſixieſme la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt ligne qui peut deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome ſixieſme AC: (apres auoir conſtruit & demonſtré comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD.) Ie dis qu'icelle OP eſt ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC eſt binome ſixieſme, le plus grand nom AE peut plus

que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & ſi les deux noms ſont incommenſur. en longitude à la rationelle AB : Et comme il a eſté demonſtré à la 58. prop. 10. OM, MP ſeront incommenſurables en puiſſance: auſſi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui eſt egal au compoſé de leurs quarrez eſt medial: Item ED qui eſt compris de deux rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt auſſi medial par la meſme propoſ. auſſi medial ſa moitié EK, & ſon egal QP compris d icelles lignes OM, MP. Et de plus, iceluy rectangle QP, ou ſon egal EK, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez LM, MN, ſçauoir AI: car les lignes AE & EC eſtans incommenſ. en longitude, auſſi AE & EF le ſeront: & partant par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AI & EK ſeront incommenſ. & par la 42. prop. 10. OP ſera ligne pouuant deux mediaux. Parquoy, ſi vn rectangle eſt compris, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, AC √12+√8. Donc le rectangle AD ſera √,00+√200. Et pource que AE eſt √12, & EC √8: EF ſera √2, au quarré de laquelle eſtant egal le rectangle de AGE; le coſté AG ſera √3+1, & le coſté GE √3—1: Parquoy le rectangle AH ſera √75+5, & la ligne OM √(√75+5): & GI eſtant √75—5, MP ſera √(√75—5). Mais EC eſtant √8, le rectangle ED, qui eſt double de MT √50, ſera √200. Donc les quarrez LM, MN, ſeront enſemble √300, & les rectangles SMT √200: & partant tout le quarré LN ſera √300+√200: & par conſequent ſon coſté OP ſera √(√75+5) +√(√75—5), ou bien √(√500+√200), qui eſt ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

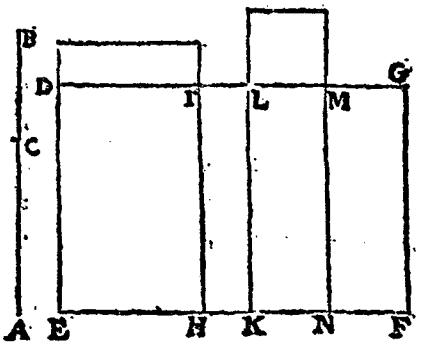
Le quarré d'vn binome appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel eſt AC; & ſur la rationelle DE ſoit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF egal au quarré de AB: Ie dis que l'autre coſté DG eſt binome premier.

Car ſur la meſme DE ſoit conſtruit le rectangle DH egal au quarré de AC: & ſur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il eſt donc euident par la 4. prop. 2. que le reſte LF eſt egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuiſant LG egalement en M, & en menant MN parallele à DE, chaſque rectangle LN, MF ſera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB eſt binome, AC, CB ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: & leurs quarrez ſeront rationnaux, & leurs egaux rectangles DH & IK auſſi rationaux: & par la 21. prop. 10. les coſtez DI & IL ſeront rationelles commenſ. en longitude à la rationelle DE, & entr'elles par la 12. prop. 10. Et par la 16. pr. 10. la toute

DL ſera commenſ. en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle ſera rationelle & commenſ. en longitude à DE rationelle: Et d'autant que par la 22. pr. 10. le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF ſera auſſi medial: & par la 23. prop. 10. iceluy medial LF eſtant appliqué ſur la rationelle LK, l'autre coſté LG ſera auſſi rationel incommenſ. en longit. à icelle LK, c'eſt à dire à DE, à laquelle DL eſtant commenſ. en longit. par la 13 prop. 10. DL, LG ſont incommenſ. en longit. mais elles ſont rationelles: elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement; & par la 37. prop. 10. DG eſt binome. Ie dis en outre que c'eſt binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB eſt moyen proport. entre les quarrez d'icelles AC, CB: donc auſſi LN moyen prop. entre DH, IK: & par conſequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL ſera egal au quarré de LM: Et d'autant que les quarrez de AC, CB ſont commenſ. (car icelles AC, CB ſont poſees commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles DH, IK ſeront auſſi commenſ. Donc auſſi commenſ. en longitude les lignes DI, IL par les 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB ſont plus grands que deux fois leur rectangle, par le lemme qui ſuit la 44. prop. de ce liure: DK ſera plus grand que EF; & par conſequent DL plus grand nom que LG: car icelles lignes ſont entr'elles comme DK à LF. par la 1. p 6. Et puiſque le rectangle de DI, IL appliqué ſur DL, eſt egal au quarré de LM, c'eſt à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, & que les parties DI, IL ſont commenſ. en longitude: icelle DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant eſté demonſtrée commenſ. en longit. à la rationelle DE, par les ſecondes def. DG ſera binome premier. Donc le quarré d'vn binome appliqué ſur vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

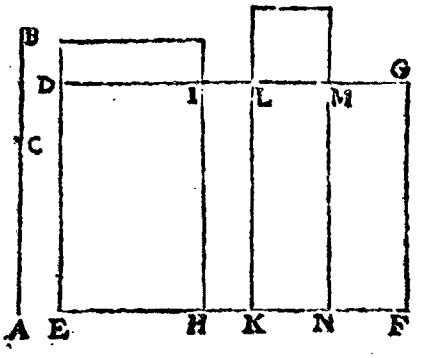
Le binome AB ſoit V45+3, & la rationelle DE 6: d'autant que le plus grand nom AC eſt V45, ſon quarré eſt 45, lequel appliqué ſur DE 6, fait l'autre coſté DI de 7 1/2: Et le moindre nom CB eſtant 3, ſon quarré eſt 9, qui appliqué ſur IH 6, fait IL de 1 1/2, & partant la toute DL eſt 9. Or le rectangle de ACB eſt V405, & ſon double LF V1620. Donc la ligne FG ſera V45: & par conſequent la toute DG ſera 9+V45, qui eſt binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimediale premiere appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté binome ſecond.

Soit la bimediale premiere AB diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC : (apres auoir construit comme en la precedente). Ie dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. prop. 10. AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrez sont mediaux: & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK. par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longitude à la rationelle DE: & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente, que DL est le plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationelle DE : & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'vne bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La bimediale AB soit $\sqrt{\sqrt{108}}+\sqrt{\sqrt{12}}$, *& la rationelle DE* 4. *D'autant que le plus grand nom AC est* $\sqrt{\sqrt{108}}$, *son quarré est* $\sqrt{108}$, *lequel estant appliqué sur la rationelle DE* 4, *le costé DI sera* $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. *Ainsi aussi le moindre nom estant* $\sqrt{\sqrt{12}}$, *son quarré est* $\sqrt{12}$: *& par consequent IL, est* $\sqrt{\frac{3}{4}}$. *& la toute DL* $\sqrt{12}$. *Or le rectangle de ACB est* 6 : *& partant le rectangle KG double d'iceluy est* 12, *& le costé LG* 3. *Donc la toute DG sera* $\sqrt{12}+3$, *qui est binome second.*

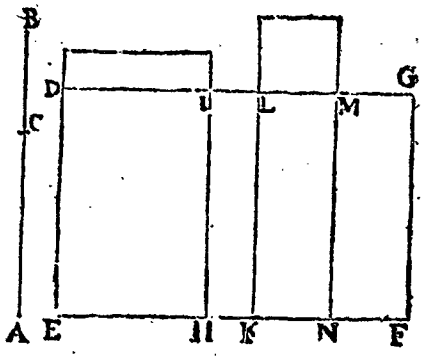
THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'vne bimediale seconde appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Apres auoir construit comme en la 61. pr.) Ie dis que DG est binome troisiesme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC, BC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle

medial; partant les quarrez d'icelles AC, CB seront comment. & mediaux: & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. prop. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. pr. 10. DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationelle DE, par la 23. pr. 10. son autre costé DL sera rationnel incommens. en longitude à icelle DE. Derechef, puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi: & iceluy LF estant appliqué sur la rationelle LK, son autre costé LG sera rationel incommens. en longitude à LK: c'est à dire à DE. Donc l'vne & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationelle & incommens. en longit. à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il est euident par la 10. pr. 10. que le quarré sera incomm. au rectangle (estans les deux lignes incommens. en longit.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC est commens. le composé des quarrez de AC, CB: & au rectangle de AC, CB est commensur. son double: Donc le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommens. au double du rectangle de AC, CB: c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, FL sont incomm. en long. par la 10. p. 10. mais elles sont rationeles, & partant comm. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG est binóme.



Ie dis d'auantage, qu'il est binome troisiesme. Car il a esté demonstré que les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: Et se prouuera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & par les secondes def. DG est binome troisiesme. Donc le quarré d'vne bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{72}+\sqrt{8}$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, & LN ou MF $\sqrt{24}$, qui appliquez sur DE; DI sera $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, IL $\sqrt{\frac{1}{2}}$ & LM ou MG $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{8}$, & LG $\sqrt{6}$. Parquoy la toute DG est $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, qui est binome troisiesme.

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'vne ligne majeure appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome quatriesme.

Soit la ligne majeure AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construict comme en la 61. p. de ce liure) ie dis que DG est binome quatriéme.

Car puis que AB est ligne majeure, par la 40. p. AC, & CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quar-

rez rationel; le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en longit. à icelle DE par la 21. pr. 10. Item le rectangle LF, double du rectangle de AC, CB, sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommens en longit. à DE. Et partant par la 13. pr. 10. les rationeles DL & LG seront incommensurables en long. Donc commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Ie dis dauantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarrez seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, IL incommens. Et d'autant que l'on demonstrera comme en la 61. prop. que DL est plus grande que LG, & que sur icelle DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise icelle DL à I en parties incomm. en long. par la 19. p. 10. DL, qui est commens. en longit. à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longit. & par les secondes def. DG est binome quatriesme. Donc le quarré d'vne ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne maieure AB soit $\sqrt{(10+\sqrt{37\frac{1}{2}})}+\sqrt{(10-\sqrt{37\frac{1}{2}})}$, *& la rationele DE soit* 5. *Donc le rectangle DH sera* $10+\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *IK* $10-\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *& LN ou MF* $\sqrt{62\frac{1}{2}}$; *qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *IL* $2-\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *& LM ou MG* $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. *Parquoy DL sera* 4, *& LG* $\sqrt{10}$: *& par consequent la toute DG est* $4+\sqrt{10}$, *qui est binome quatriesme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (apres auoir construit comme en la 61. prop.) Ie dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel & vn medial, AC, CB, par la 41 pr. 10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele commens. en longit. à icelle DE: & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Ie dis de plus, qu'il est binome cinquiesme. Car LG est commensurable en longitude à la rationele DE, & si on prouuera

commo

comme aux precedentes, que DL peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par les ſecondes definicions DG eſt binome cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

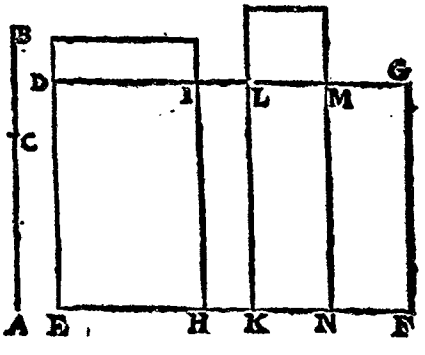
La ligne AB ſoit √(√125+5)+√(√125−5), & la rationelle DE 5. Donc le rectangle DH ſera √125+5, IK √125−5, & LN ou MF 10, qui appliquez ſur DE, le coſté DI ſera √5+1, IL √5−1, & LM ou MG 2. Parquoy DL ſera √20, & LG 4, & par conſequent la toute DG eſt √20+4, qui eſt binome cinquieſme.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté binome ſixieſme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, dont le plus grand eſt AC. (Apres auoir conſtruit comme aux preced.) ie dis que DG eſt binome ſixieſme.

Car puis que AB eſt ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſ. au compoſé de leurs quarrés auſſi medial: par ainſi il eſt euident que DK & LF ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. p. 10. iceux rectang. eſtans appliquez ſur lignes rationelles, leurs autres coſtez DL, LG ſeront rationaux commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele DE. Mais iceux coſtez DL, LG eſtans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF leſquels ſont incommenſ. ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr. 10. Donc les rationeles DL, LG ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 37. prop. 10. DG eſt binome, duquel les deux noms ſont incommenſ. en longitude à la rationele DE: & comme il a eſté demonſtré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & par les ſecondes def. DG eſt binome ſixieſme. Parquoy le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

La ligne AB ſoit √(√252+√72)+√(√252−√72), & DE 6. Le rectangle DH ſera donc √252+√72, IK √252−√72, & LN, ou MF √180, qui appliquez à DE, le coſté DI eſt √7+√2, IL √7−√2, & IM ou MG √5. Partant DL eſt √28, & LG √20; & par conſequent la toute DG eſt √28+√20, qui eſt binome ſixieſme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commenſurable en longitude au binome, eſt auſſi binome de meſme ordre.

Soit quelconque binome AB diuiſé en ſes noms au poinct C, deſquels AC eſt le plus grand, & CB le moindre: ſoit la ligne droicte DE commenſurable en longitude au binome AB. Ie dis que DE eſt auſſi binome, & de meſme ordre que AB.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la toute AB eſt à la toute DE, ainſi la retranchee AC ſoit à la retranchee DF, par la 19. p. 5. le reſte CB ſera au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, ſont commenſ. en longit. par la 10. pr. 10. AC, DF, & CB, FE, ſeront auſſi commenſ. en longitude. Mais par la 37. pr. 10. AC, CB, ſont rationeles. Donc auſſi DF, FE ſont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE, en permutant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc auſſi DF, FE ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE eſt binome. Maintenant ie dis qu'il eſt auſſi binome de meſme ordre que AB.

Car ſi AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, auſſi par la 15. prop. 10. DF pourra de meſme plus que FE. Et ſi AC eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee, auſſi ſera DF par la 12. prop. 10. veu que l'vne & l'autre eſt commenſurable en longitude à la meſme AC; & partant chacune d'icelles AB & DE ſera binome premier. Que ſi CB eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, auſſi ſera FE: ainſi AB & DE ſeront binome ſecond: mais ſi AC & CB ſont incommenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſeront DF & FE: & par les def. AB & DE ſeront binome troiſieſme. Que ſi AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. auſſi par la 15. pr. 10. DF pourra de meſme plus que FE. Parquoy nous demonſtrerons comme deſſus, que AB, DE ſeront binome 4^e. ou 5^e. ou 6^e. Partant AB, DE, ſeront binomes de meſme ordre. Donc la ligne commenſ. en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

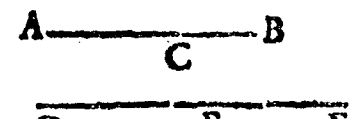
THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commenſurable en longitude à vne bimediale, eſt auſſi bimediale de meſme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, deſquels AC eſt le plus grand, & CB le plus petit; & à icelle AB ſoit commenſ. en longitude la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi bimediale de meſme ordre qu'icelle AB.

Car (apres auoir conſtruit comme en la precedente) le reſte CB ſera au

reſte FE, comme la toute AB à la toute DE: & partant par la 10.p.10. AC ſera commenſurable en longitude à DF; & CB à FE. Mais AC, CB ſont mediales: donc par la 24. pr. 10. DF, FE commenſurables à icelles, ſont auſſi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE: en permutant, comme AC à CB ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 38.p.10. Donc auſſi DF, FE ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 10.p.10. mais elles ſont auſſi mediales: & partant par la 38 ou 39. prop. 10. DE ſera bimediale.



Dauantage ie dis qu'elle eſt en meſme ordre que AB. Car d'autant que comme AC eſt à DF, ainſi BC à FE, par la 22.pr. 6. le quarré de AC ſera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC eſt au rectangle de DF, FE: (eſtans iceux rectangles ſemblables, d'autant qu'ils ont les coſtez proport.) Mais le quarré de AC eſt commenſurable au quarré de DF, (pource que les lignes AC, DF ont eſté demonſtrees commenſ. en long.) Donc par la 10. pr. 10. les rectangles ſeront auſſi commenſ. Que ſi l'vn eſt rationel, l'autre le ſera auſſi: & par ainſi AB, & DE ſeroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que ſi l'vn des rectangles eſt medial, l'autre ſera auſſi medial, & conſequemment AB & DE ſeront bimediales ſecondes, par la 39. prop. 10. Ainſi DE ſera bimediale, & en meſme ordre que AB. Parquoy la ligne commenſurable en longitude à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commenſurable à vne ligne majeure eſt auſſi ligne majeure.

Soit la ligne majeure AB, diuiſee en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſ. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne majeure.

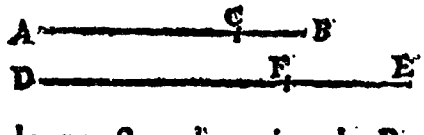
Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) AC ſera à CB comme DF à FE, & AC commenſurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. prop. 10. AC & CB ſont incommenſ. en puiſſance; les lignes DF & FE le ſeront donc auſſi. Item puis qu'icelles lignes AC, CB, DF, FE ſont proport. par la 22. pr. 6. leurs quarrez ſeront porportionnaux: & en compoſant, les deux de AC & BC ſeront au ſeul de CB, comme les deux de DF & FE ſont au ſeul de FE: & en permutant, les deux quarrez de AC & CB, ſeront aux deux de DF & FE, comme le ſeul de CB eſt au ſeul de FE. Mais les lignes CB, FE eſtans commenſ. leurs quarrez ſeront auſſi commenſurables; & partant les deux de DF & FE, ſeront par la 10. prop. 10. commenſ. aux deux de AC & BC: & ſeront rationaux comme iceux. Item, on prouuera comme en la precedente, que le rectangle de DE & FE eſt commenſurable au rectangle de AC & BC; lequel eſtant medial par la 40. prop. 10. auſſi ſera celuy de DF & FE par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE ſera ligne majeure. Donc la ligne commenſ. à vne ligne majeure, eſt auſſi majeure. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commenſurable à vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, eſt auſſi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuiſee en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſurable la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle conſtruction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC ſont incommenſur. en puiſſance, auſſi le ſeront DF & FE. Item que le compoſé des quarrez de AC & BC ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DF & FE: & le rectangle de AC & BC auſſi commenſur. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41 p. 10. le compoſé des quarrez de AC & BC eſt medial, & leur rectangle rationel: Partant le compoſé des quarrez de DF & FE ſera auſſi medial, & leur rectangle rationel: & par ainſi la toute DE ſera ligne pouuant vn rationel & vn medial, par la ſuſdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commenſ. à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commenſurable à vne ligne pouuant deux mediaux, eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuiſee en ſes noms au poinct C, & à icelle ſoit comm. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

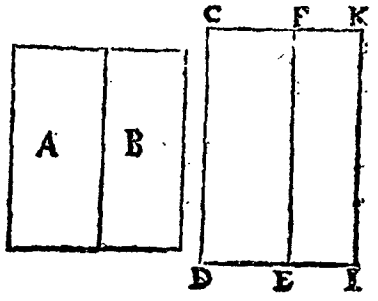
Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) on prouuera tout de meſme que DF & FE ſont incommenſ. en puiſſance; que le compoſé de leurs quarrez eſt medial, & leur rectangle auſſi medial: Mais on prouuera auſſi comme en la 69. pr. que le compoſé des quarrez de AC & BC, eſt au compoſé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE: & encore comme en la 68. p. que le quarré de CB eſt au quarré de EF, comme le rectangle de AC & BC, eſt au rectangle de DF & FE: donc par la 11. prop. 5. le compoſé ſera au compoſé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſ. à leur rectangle, auſſi le compoſé des quarrez de DF & FE eſt incommenſ. à leur rectangle, & par la 42. pr. 10. DE eſt ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commenſ. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 54. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne ſuperficie rationele, & vne mediale ſont ioinctes; la ligne qui peut tout le compoſé eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soient iointes deux ſuperficies A rationele, & B mediale: ie dis que la ligne qui peut toutes les deux eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car premierement les deux ſuperficies ne ſçauroient eſtre egales (car ou elles ſeroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales.) Soit donc premierement A plus grande que B: Et ſur la rationele CD ſoit appliqué le rectangle CE egal à A: & ſur EF vn autre rectangle FI egal à B, afin que tout le rectangle CI ſoit egal aux deux ſuperficies propoſees A & B. Et puis que A eſt rationele, & B mediale, auſſi le rectangle CE ſera rationel, & FI medial, leſquels eſtans appliquez à la rationele CD; CF ſera rationele commenſ. en longitude à icelle CD par la 21. prop. 10. & FK auſſi rationele, mais incommenſ. en longitude à la meſme CD par la 23. pr. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK ſeront incommenſ. en longitude: donc commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. CK ſera binome diuiſé en ſes noms en F. Mais puis que A a eſté poſee plus grande que B, auſſi CE ſera plus grand que FI; & partant CF ſera plus grande que FK par la 1 p. 6. Parquoy CF ſera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable, ou incommenſurable en longitude. Si commenſ. (eſtant CF commenſ. en longitude à la rationele CD) CK ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt binome. Si incommenſ. CK ſera binome quatrieſme, par la 4. des ſecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eſt ligne maieure.



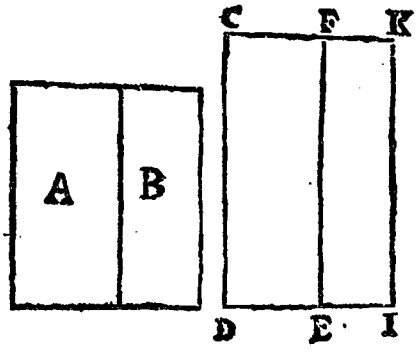
Que ſi la figure A eſtoit plus petite que B, auſſi le rectangle CE ſeroit plus petit que le rectangle FI; & CF ſeroit le plus petit nom commenſ. à la rationele CD: & par ce moyen CK ſeroit binome ſecond, ou cinquieſme: ſi binome ſecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale premiere. Si binome cinquieſme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial. Si donc vne ſuperficie rationele, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie rationelle A eſt 7, & la mediale B √48, la ligne pouuant icelles adiouſtees enſemble ſera 2+√3, qui eſt binome premier: ſi A & B ſont 21. & √432, la ligne pouuant icelles ſera √12+3, qui eſt binome ſecond: mais elle ſera √8+√6, qui eſt binome troiſieſme, ſi A eſt 14 & B √192: mais ſi A eſt 6, & B √32, elle ſera 2+√2, qui eſt binome quatrieſme: ſi A eſt 3 & B √8, elle ſera √2+1 qui eſt binome cinquieſme: & ſi A eſt 5, & B √24, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √3+√2, qui eſt binome 6: mais ſi A eſt 4, & B √18, la ligne pouuant la ſuperficie compoſee d'icelles ſera √√8+√√2, qui eſt mediale premiere: mais ſi A eſt 6, & B √12, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √(6+12) ou √(3+√6)+√(3—√6): & finalement ſi A eſt 2, & B √8, la ligne pouuant icelles ſera √(√8+2), ou √(√2+1)+√(√2—1), qui eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux ſuperficies mediales incommenſurables ſont iointes, la ligne qui peut le compoſé d'icelles eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soient ioinctes enſemble deux ſuperficies mediales incommenſ. A & B: Ie dis que la ligne droicte qui peut le compoſé d'icelles ſuperficies A & B eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Ayant fait ſur la rationele CD pareille conſtruction qu'en la prec. prop. les rectangles CE & FI ſeront mediaux & incomm. Et par la 23. p. 10. CF, FK ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele CD: & par la 37. p. 10. CK ſera binome. Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FK ne ſçauroient eſtre egales, d'autant qu'elles ſont incommenſ. en longit. Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſ. CK eſt binome troiſieſme par la 3. d. ſec. (eſtans les deux noms CF, FK incomm. en long. à la rationele CD) & par la 57. prop. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde: Si incommenſ. par la 6. des ſec. def. CK ſera binome ſixieſme: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy ſi deux ſuperficies mediales incommenſ. ſont ioinctes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si A eſt $\sqrt{50}$, *& B* $\sqrt{48}$: *la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera* $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{8}}}$, *qui eſt bimediale ſeconde: mais ſi A eſt* $\sqrt{12}$, *& B* $\sqrt{8}$, *ladite ligne pouuant icelles ſera* $\sqrt{(\sqrt{12}+\sqrt{8})}$, *ou bien* $\sqrt{(\sqrt{3}+1)}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$, *qui eſt ligne pouuant deux mediaux.*

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que le binome, & les autres lignes irrationeles qui ſuiuent icelle ſont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele à la quelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, faict l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale premiere, faict l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale ſeconde, faict l'autre coſté binome troiſieſme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'vne ligne maieure, faict l'autre coſté binome quatrieſme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial fait l'autre coſté binome cinquieſme, par la 65. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre coſté binome ſixieſme, par la 66. p. 10.

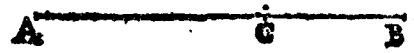
Mais il faut touſiours entendre qu'ils ſoient appliquez ſur vne ligne rationele. Et puis que tous ces coſtez ſont differens entr'eux, il eſt manifeſte que toutes icelles lignes irrationeles ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'vne ligne rationele, eſt retranchée vne ligne rationele commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute; le reſte eſt irrationel: & ſoit appelé Reſidu.

Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en ſorte que AB & AC, ſoient rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: Ie dis que le reſte CB eſt irrationel.



Car par la 1. p. 6. comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB eſt au rectangle de AB & AC: mais AB eſt incommenſ. en longitude à AC. Donc par la 10. pr. 10. le quarré de AB eſt incommenſ. au rectangle de AB & BC: Partant auſſi à ſon double: mais les quarrez de AB & AC, ſont poſez commenſ. Donc par la 16. prop. 10. les deux enſemble ſeront commenſ. au ſeul de AB: & partant puis que le quarré de AB eſt incommenſ. au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarrez de AB & AC, ſeront auſſi incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & AC, leſquels auec le quarré de CB, eſtans egaux aux deux quarrez de AB & AC par la 7. pr. 2. il s'enſuiura que le quarré de CB auec deux fois le rectangle de AB & AC ſeront incommenſ. à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17. pr. 10. deux fois le rectangle auec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) ſeront incommenſ. au quarré de CB: Mais iceux quarrez de AB, AC, eſtans rationaux; (car ils ſont deſcrits ſur lignes rationelles) le quarré de CB ſera irrationel: Partant la ligne CB ſera auſſi irrationelle: Et icelle ſoit appellee Apotome ou Reſidu. Si donc d'vne ligne rationelle eſt retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 2, & AC √3: Donc le reſte BC ſera 2—√3. Or en ceſte prop. & és 5 ſuiuantes, où Euclide monſtre l'origine des Apotomes ou reſidus, il ne veut dire autre choſe, ſinon que ſi des lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. on retranche le plus petit nom du plus grand, le reſte ſera irrationel, qu'on appellera Apotome, ou reſidu, &c.

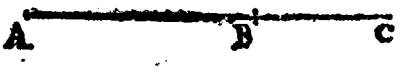
THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'vne ligne mediale, eſt retranchee vne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel; le reſte eſt irrationel: Soit appellé reſidu medial premier.

Soit la bimediale AC, de laquelle eſt retranchee la mediale AB, en ſorte que AB & AC ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, compre-

nant vn rectangle rationel : Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarrez seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel, vn seul rectangle ayant esté posé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, auec le quarré de BC sont egaux aux quarrez de AB & AC: donc aussi deux fois le rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC seront incommens. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. pr. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle de AB & AC: mais iceluy double est rationel: donc le quarré de BC sera irrationel; & partant la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial premier. Parquoy si d'vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



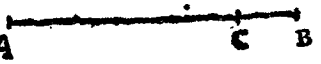
SCHOLIE.

La mediale AC soit √√54, & la retranchee AB √√24 : donc le reste BC sera √√54—√√24.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne mediale est retranchee vne ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial; le reste est irrationel: Soit appellé residu medial second.

Soit la mediale AB, de laquelle est retranchee la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial: Ie dis que le reste CB est irrationel.



Car puis que les quarrez de AB & AC sont commens. par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commens. à vn chacun d'eux: & chacun d'iceux estant medial, (pource que les lignes AB, AC sont posees mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme aussi le double du rectangle de AB, AC, puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de CB: le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'vn rationel: donc le quarré de CB n'est pas rationel, & partant il est irrationel: & consequemment la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial second. Parquoy si d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

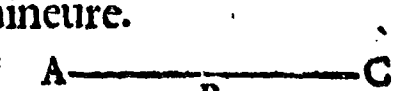
SCHOLIE.

La mediale AB soit √√18, & AC √√8 : donc le reste CB sera √√18—√√8.

THEOR.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel; le reſte ſera irrationel: Soit appellé ligne mineure.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle eſt retranchee AB incommenſ. en puiſſance à la toute AC, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

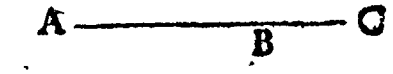
Car puiſque le compoſé des quarrez de AB, & AC eſt rationel, il eſt incommenſ. au rectangle de AC & AB, lequel eſt medial: partant auſſi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC eſt egal au double du rectangle de AB, AC, enſemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez de AB, AC ſera auſſi incommenſ. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy compoſé eſt poſé rationel, par la 10. def. le quarré de BC eſt irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{(18+\sqrt{108})}$, *& AB* $\sqrt{(18-\sqrt{108})}$: *le reſte BC ſera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{108})} - \sqrt{(18-\sqrt{108})}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial; le reſte ſera irrationel: Soit appellé ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle eſt retranchee AB incommenſ. en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC eſt rationel, auſſi ſera ſon double, & partant par la 10. def. il ſera incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles AB, AC, lequel eſt medial, c'eſt à dire irrationel. Mais le compoſé d'iceux quarrez par la 7. pr. 2. eſt egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC. Donc auſſi le double du rectangle de AB, AC eſt incommenſur. au double d'iceluy rectangle auec le quarré de BC: Et par la 17. pr. 10. iceluy double rectangle ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC. Et puis qu'iceluy double rectangle eſt rationel, par la 10. definit. le quarré de BC ſera irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle: la-

quelle ſoit appellee ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, vn tout medial: & ce d'autant que le quarré d'icelle ligne eſtant adiouſté auec vne ſuperficie rationele fait vn tout medial, comme il apparoiſtra à la 109. prop. 10. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AC eſt √(√216+√72), & AB √(√216−√72); le reſte BC ſera √(√216+√72) −√(√216−√72).

THEOR. 61. PROP. LXXIX.

Si d'vne ligne droicte, eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial; le reſte eſt irrationel: ſoit appellé ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne doicte AB, de laquelle eſt retranchée la ligne AC incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

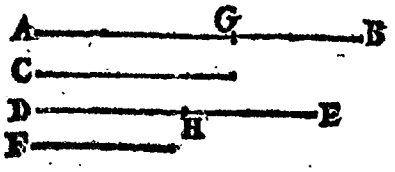
Car puis que par la 7. propoſit. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC auec le quarré de BC: iceluy compoſé des quarrez excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. prop. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'vn rationel: Donc le quarré de BC n'eſt pas rationel; & partant eſt irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle; laquelle on appellera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial; parce que le quarré d'icelle ligne auec vne ſuperficie mediale fait vn tout medial. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB eſt √(√180+√60), & AC √(√180−√60), le reſte CB ſera √(√180+√60) −√(√180−√60).

LEMME.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C ſoit egal à HE excez d'entre DE & F; auſſi en permuttant l'excez d'entre AB & DE ſera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB eſt l'excez d'entre AB & C, AG ſera egal à C: En la meſme maniere DH ſera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH ſera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne, & partant adiouſtant à AG & DH choſes egales GB & HE, l'excez d'entre les toutes AB & DE ſera touſiours egal à l'excez d'entre C & F. Ce qui eſtoit propoſé.



COROLLAIRE.

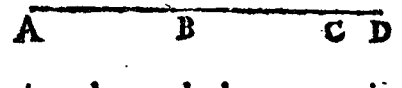
De ces choſes appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles ſeront auſſi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'vne seule ligne droicte rationele commensurable en puissance seulement à la toute.

Soit le residu AB, auquel conuienne la ligne droicte BC, rationele commens. en puissance seulement à la toute AC: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car s'il est possible, soit vne autre ligne BD, s'accordant auec icelle AB, en sorte que AD & BD soient rationeles commens. en puissance seulement. Maintenant par la 7.pr.2. les deux quarrez de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en permutant, par le lemme precedent les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme qui precede la 43.p.10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22.p.10. vn seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. prop.10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationele commens. en puissance seulement à la toute. Parquoy au residu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

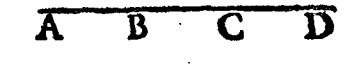


THEOR. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'vne seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne droicte que BC en la mesme sorte.

Car si faire se peut, en soit vne autre BD. Maintenant par la 7.prop 2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui sont mediaux, (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27.pr.10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit commens. en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.



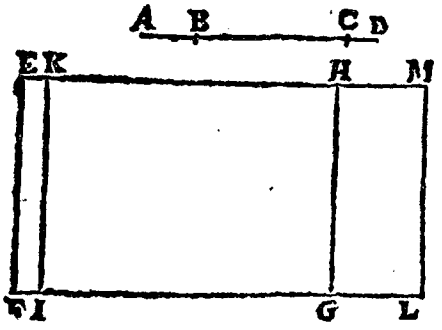
THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conioincte qu'vne seule

ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant auec icelle vn rectangle medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut pas conuenir vne autre ligne que BC, en la mesme sorte.

Car si faire se peut, en soit conioincte vne autre BD en la sorte requise. Et sur la rationele proposee EF, soit appliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & à la mesme EF soit encore appliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7. pr. 2. le reste KG sera egal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item sur la mesme rationele soit encore appliqué le rectangle EL egal aux deux quarrez de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est egal au quarré de AB, aussi KL sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la susdite 7. prop. 2.

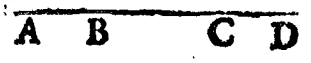


Maintenant les quarrez de AC & BC sont mediaux (estans faits de lignes mediales) & si le double rectangle de AB & BD doit estre medial: partant leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH & KH rationaux comm. en puiss. seulement à EF par la 23. p. 10. en apres, le quarré de AC estant au rectangle de AC & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incommens. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC: & partant aussi à son double KG. Item le quarré de BC est commens. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarrez, sera incomm. au seul quarré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10 pr. 10. lesquelles estans rationeles seront incommens. en puissance seulement: & par la 74. p. 10. EK sera residu & KH sa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe à AB selon le requis) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ce qui seroit contre la 80. pr. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adioindre autre conuenable que BC. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, conuient vne seule ligne droicte incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

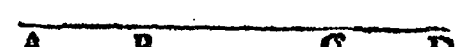
Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut estre adiointe autre ligne que BC qui face le mesme.



Car si faire se peut en soit adiouſtee vne autre BD, qui soit pareillement incommenſ. en puiſſance à la toute AD, & faisant le composé des quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle compris sous icelles AD, BD, mediał. Il se prouuera comme en la 80. prop. 10. qu'il y a meſme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'vn & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles estans mediaux, l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on ne peut adiouſter autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIIII.

A la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommenſ. en puiſſance à la toute, & faisant auec icelle vn rectangle rationel: mais le composé de leurs quarrez medial.



Soit la ligne AB faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, à laquelle AB s'accorde la ligne BC, incommenſ. en puiſſance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais que le composé de leurs quarrez soit medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui faſſe la meſme choſe.

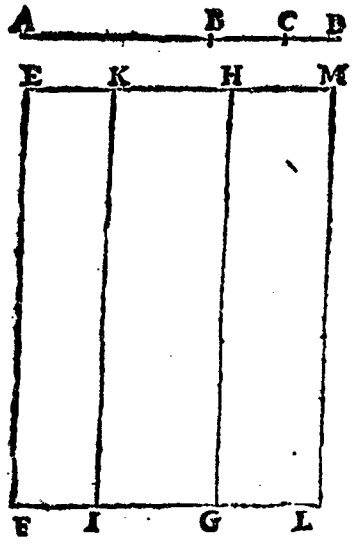
Car s'il est possible, en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. pr. 10. que les quarrez de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'vn meſme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB on pouuoit encore ioindre BD incommenſ. en puiſſance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, se conioint vne seule ligne incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incommenſ. au composé de leurs quarrez qui est aussi medial.

Soit la ligne AB faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, à laquelle AB s'accorde BC incommenſ. en puiſſance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommenſurable au composé de leurs quarrez, qui est aussi medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'adioindre autre ligne que BC, qui faſſe le proposé.

Car si faire se peut, en soit adiouſtee vne autre BD. Puis soit fait mesme construction qu'en la 82. prop. 10. Donc le composé des quarrez de AC & BC estant medial, & incommens. à deux fois le rectangle de AC & BC, aussi medial, leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux, & incommensurables: Et par la 23. prop. 10. estans appliquez sur la rationele EF, leurs autres costez EH & KH seront lignes rationeles, & par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. commens. en puissance seulement; (puis que leurs rectangles sont incommens.) & par la 74. prop. 10. EK sera residu auquel KM sera conuenablement adiouſtee: Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi conuenable à AB, & faſſe ce qui est proposé) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ainsi le residu EK n'auroit pas vne seule conuenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouuoit donc pas adioindre à AB, autre ligne conuenable que BC, incommensurable en puissance à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



DEFINITIONS TROISIESMES.

Estant proposee vne ligne rationele, & vn residu: Lors que la toute composee du residu & de sa conuenable ou adiouſtée, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude;

1. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; le residu soit appellé residu premier.

2. Mais si la conuenable ou adiouſtée est commensurable en long. à la rationelle proposée; soit appellé residu second.

3. Que si l'vne ny l'autre n'est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu troisiesme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adiouſtée, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu quatriesme.

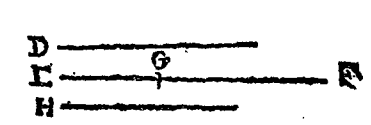
5. Mais si l'adiouſtée est commensurable en longitude à la rationele; soit appellé residu cinquiesme.

6. Que si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable en longitude à la rationele; soit appellé residu sixiesme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn Apotome ou residu premier.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enſeigné au ſecond ſcholie de la 29. prop. de ce liure) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit poſée la rationele D, à laquelle EF ſoit commenſ. en longit. & partant icelle EF ſera auſſi rationele: puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de GF. Ie dis que EG eſt reſidu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF, qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſ. par la 10. pr. auſſi les lignes EF, GF ſeront commenſ. au moins en puiſſance: & EF eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Mais d'autant que les deux nombres AB, AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez: auſſi les quarrez de EF, GF ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez: & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF ſont incommenſ. en longit. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant le reſte EG ſera reſidu par la 74. pr. 10.

Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu premier: car EF eſtant plus grande que GF, elle poutra plus qu'icelle GF: ſoit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de GF, par conuerſion de raiſon, comme AB ſera à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB, CB ſont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H ſont entr'eux comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10. les lignes EF & H ſont commenſ. en longitude. Par ainſi la toute EF commenſurable en longitude à la rationelle D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſurable en longitude: & partant par la 1. des troiſieſmes def. EG ſera reſidu premier. Nous auons donc trouué vn reſidu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: AB 9, CB 4, & par conſequent AC eſt 5: faiſant donc que comme 9 eſt à 5, ainſi le quarré de EF, c'eſt à dire 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant le reſte EG ſera 6—√20, qui eſt reſidu premier.

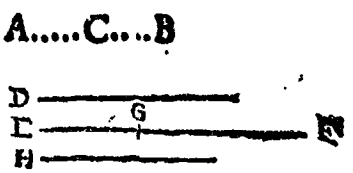
Or il appert par les def. preced. que Apotome ou reſidu n'eſt autre choſe que ce qui reſtera ſi de deux nombres poſez rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement on ſouſtraict le moindre du plus grand; ce qui ſe fait par l'interpoſition du ſigne —: & par ainſi il n'y a aucune difference entre le binome & le reſidu, ſinon qu'en celuy-là les deux noms ſont conioincts par le ſigne +, & en ceſtuy cy, l'vn eſt ſouſtraict de l'autre par le ſigne —. Parquoy pour promptement trouuer vn reſidu de quelque eſpece que ce ſoit, il n'y a qu'à trouuer le binome de meſme eſpece, ainſi qu'il a eſté dit cy-deuant, puis au lieu du ſigne + appoſer le ſigne —. Comme au ſcholie de la 49. prop. nous auons trouué ce binome premier 8+√48; mais en changeant ſeulement le ſigne nous aurons 8—√48, pour reſidu premier: & ainſi des autres.

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.

Trouuer vn reſidu deuxieſme.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB. (comme en la precedente propoſition) & l'expoſee rationele D, ſoit priſe GF commenſ. en longitude à icelle D, laquelle ſera auſſi rationele: puis ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF par le corol. de la 6. pr. 10. Ie dis que EG eſt reſidu ſecond.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raiſon des nombres AC, AB, ſont commenſ. par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF ſeront auſſi commenſ. au moins en puiſſance: & GF eſtant rationele, EF le ſera auſſi. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant auſſi les quarrez de GF, EF, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, par la 9. pr. 10. GF, EF, ſeront incommenſ. en longitude: donc les rationeles GF, EF, ſont commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. p. 10. le reſte EG eſt reſidu.



Ie dis auſſi qu'il eſt reſidu ſecond. Car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & ſoit du quarré de H. Donc puis que comme AC eſt à AB, ainſi le quarré de GF au quarré de EF; en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de GF. Maintenant nous demonſtrerons comme en la preced. que la ligne H eſt commenſ. en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adiouſtee GF, du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, comme auſſi à la rationele propoſee D: par les troiſieſmes def. EG ſera reſidu ſecond. Nous auons donc trouué vn reſidu ſecond, ainſi qu'il falloit faire.

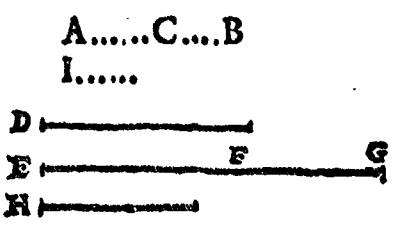
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, FG 5: AB 9, CB 4: & par conſequent AC 5: faiſant donc que comme AC 5 eſt AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera √45: & partant EG ſera √45—5, qui eſt reſidu ſecond.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn reſidu troiſieſme.

Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la propoſition 86, ſoit pris vn autre nombre I, (comme nous auons enſeigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: puis eſtant expoſee la rationele D, ſoit fait que comme I eſt à AB, le quarré de D ſoit au quarré de EG, leſquels quarrez par la 6. pr. 10. ſeront commenſurables: & partant les lignes D & EG auſſi commenſ. au moins en puiſſance. Donc D eſtant rationele, auſſi EG ſera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne ſont en raiſon de nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG ſeront incommenſ. en longitude. Derechef, ſoit fait que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EG ſoit au quarré de GF. Ie dis que EF eſt reſidu troiſieſme.



Car puis que les quarrez de EG, GF, eſtans comme nombre à nombre, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF ſeront auſſi commenſ. au moins en puiſſance. Mais EG eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Et puis que AB, AC, & partant auſſi les quarrez de EG, GF, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez; par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF ſeront incommenſ. en longitude. Donc EG, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: & partant puis que de EG eſt oſtee GF commenſ. en puiſſance à icelle, par la 74. pr. 10. le reſte EF ſera reſidu.

Ie dis qu'il eſt auſſi reſidu troiſieſme: Car puis que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D eſt au quarré de EG, & comme AB à AC, ainſi le quarré de EG au quarré de FG;

de GF; en raiſon egale, comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, ny par conſequent auſſi les quarrez de D & GF: parquoy par la 9. prop. 10. les lignes D & GF ſont incommenſ. en longitude. Donc l'vne & l'autre d'icelles EG, GF eſt incommenſ. en longitude à la rationele propoſee D. Et comme en la 86. pr. on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par les tierces def. EF ſera reſidu troiſieſme, qu'il falloit trouuer.

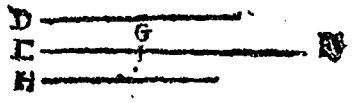
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 6, & ſoit fait que comme le nombre 16, eſt à AE 9, ainſi le quarré de D, ſçauoir 36, ſoit au quarré de EF, & iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF √54: Mais faiſant que comme AB 9, eſt à AC 5, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √30, & par conſequent EG ſera √54—√30, qui eſt reſidu troiſieſme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn reſidu quatrieſme.

Eſtans trouuez (comme nous auons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop.) deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré; ſoit propoſee la rationele D, à laquelle ſoit commenſurable en longitude EF, laquelle ſera par conſequent auſſi rationele. Que ſi on acheue de conſtruire comme en la 86. prop. on demonſtrera comme là que EG eſt reſidu: & d'auantage, ie dis qu'il eſt reſidu quatrieſme.



Car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, ſoit du quarré de H. Et puis que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de GF; par conuerſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adiouſtee GF du quarré de H, qui luy eſt incommenſ. en longitude, & la meſme EF eſt commenſurable en longitude à la rationele D: partant par les 3. def. EG ſera reſidu quatrieſme. Nous auons donc trouué vn Apotome ou reſidu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 6, ainſi 36 quarré de EF ſoit au quarré de FG, icelle ſera √24, & par conſequent le reſte EG ſera 6—√24, qui eſt reſidu quatrieſme.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. prec. ſoit fait meſme conſtruction qu'en la 87. puis ſoit demonſtré comme en icelle que GE eſt reſidu. Ie dis en outre qu'il eſt reſidu 5e. Car FE peut plus que GF du quarré de H: Et comme en la 86. prop. nous demonſtrerons par conuerſion de raiſon, que comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de H; & comme en la prece-

dente, les lignes E F & H ſeront incommenſurables en longitude: & la conuenable GF commenſurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les 3. def. EG ſera reſidu cinquieſme. Nous auons donc trouué vn reſidu cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

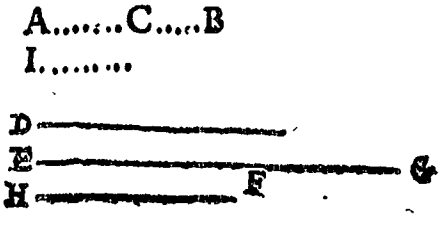
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, FG 6, faiſant que comme AC 6, eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF, iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF √54; & le reſte EG √54—6, qui eſt reſidu cinquieſme.

PROBL. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn reſidu ſixieſme.

Eſtans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. tels que AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AC, CB: & I à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: ſoit expoſee la rationele D, & acheuee la conſtruction comme en la 88. prop. Nous demonſtrerons donc comme là, que D & EG ſont incommenſ. en longitude, & que EF eſt reſidu: en apres, que D & FG ſeront auſſi incommenſ. en longitude; & partant l'vne & l'autre d'icelles EG, FG eſt incommenſurable en longitude à la rationele propoſee D. Maintenant, que EG puiſſe plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonſtrerons comme en la 89. prop. eſtre incommenſurable en longitude à icelle EG. Donc puis que la toute EG peut plus que la conuenable FG, du quarré de H qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que EG ny FG n'eſt commenſ. en long. à la rationele propoſee D, par la derniere des 3. def. EF ſera reſidu ſixieſme. Nous auons donc trouué vn reſidu ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9; & ſoit fait que comme 19 eſt à AB 12, ainſi 81 quarré de D ſoit au quarré de EF; lequel ſera trouué de 108, & par conſequent icelle EF ſera √108; & faiſant que comme AB eſt à AC 7, ainſi 108 ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √63, & par conſequent le reſte EG ſera √108—√63, qui eſt reſidu ſixieſme.

Or nous trouuerons encores (comme enſeigne Theon) les ſix reſidus ſuſdits, ainſi qu'il enſuit.

S'il faut trouuer pour exemple le reſidu premier: ſoit trouué par la 49. pr. 10. le binome premier AD, duquel le plus grand nom eſt AC, & le moindre CD; puis ſoit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Ie dis que AB eſt reſidu premier. Car d'autant que AC, CD, ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement; auſſi AC, BC ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement:

Donc par la 74. pr. 10. AB eſt reſidu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude, & AC eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee par la def. du binome premier; AB ſera reſidu premier par la 1. des tierces def. Par la meſme maniere ſeront trouuez tous les autres reſidus, ſçauoir eſt le 2e, ſi du ſecond binome nous oſtons le moindre nom du plus grand, &c.

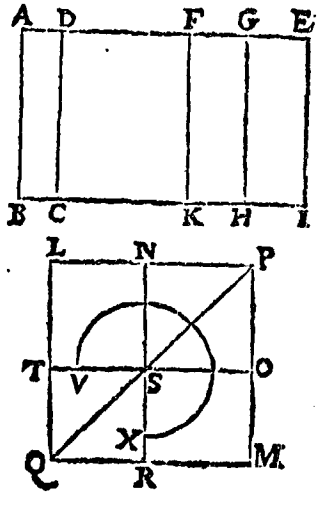
Ainſi ayant trouué le binome premier AD 9+√45, ſi du plus grand nom AC 9, on oſte le moindre nom, reſtera le reſidu AB de 9—√45. & ainſi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu premier AD: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Au reſidu AD ſoit ſa conuenable DE, laquelle ſoit couppee en deux egalement au poinct F, puis ſur la ligne AE ſoit appliqué vn rectangle defaillant d'vne figure quarree, & egal au quart du quarré de DE, qui eſt le quarré de FE, & ſoit iceluy rectangle compris ſous AG, GE: en apres, ſoient menees les lignes FK, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H & I: puis ſoit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant auec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26. prop. 6. ſeront au long d'vn meſme diametre, lequel ſoit PQ: ſoient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant, FE eſt moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. pr. 6. car par l'hypotheſe le quarré de EF eſt egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. pr. 6. le rectangle KE ſera milieu porport. entre les deux rectangles AH & HE: il le ſera auſſi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54. pr. 10. le rectangle LO, eſt auſſi milieu proport. entre iceux quarrez: Donc KE, ou DK ſon egal, ſera egal au rectangle LO; & par conſequent KG à LS, (eſtant HE egal à NO.) Iceluy GK ſera auſſi egal à SM: par ainſi le rectangle DH ſera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM eſt egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC ſera egal au quarré TR. Maintenant, ie dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC eſt reſidu.



Car puiſque AD eſt reſidu premier, & DE ſa conuenable: les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſtant la toute AE commenſ. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adiouſtee DE, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par la 18. pr. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſ. en longit. & par la 16. pr. 10. ils ſeront commenſ. en longit. à la totale AE, laquelle eſtant commenſurable en longit. à la rationele AB, par la 12. prop. 10. AE, AG, GE, AB, ſeront toutes rationeles commenſ. en longitude: & par la 20. pr. 10. les rectangles AH & HE ſeront rationaux, & par conſequent leurs egaux quarrez LM & NO auſſi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles. Pareillement, les deux lignes DF & FE eſtans egales & commenſ. elles le ſeront auſſi à leur toute DE, par la 16. pr. 10. laquelle DE eſtant rationele, DF & FE ſeront auſſi rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement à AB, comme leur toute DE: & par la 22. pr. 10. leurs rectangles CF & KE ſeront medians. Mais le rectangle LO eſt egal au medial KE, partant auſſi medial & incommenſ. au quarré rationel NO, donc par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs coſtez TO

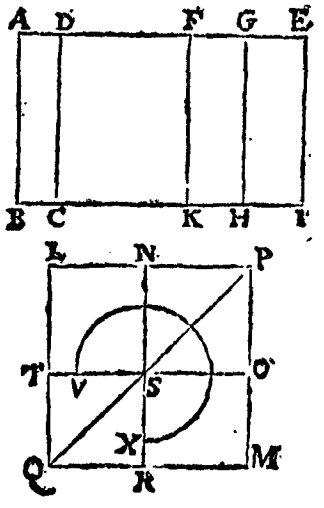
& SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. pr. 10. TS est residu. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 8, *& AD* 9—$\sqrt{45}$: *DE est donc* $\sqrt{45}$, *& sa moitié DF* $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: *mais AG sera* $7\frac{1}{2}$, *& GE* $1\frac{1}{2}$. *Donc le rectangle BE est* 72, *AH* 60, *HE* 12, *CF* $\sqrt{720}$ *& AC* 72—$\sqrt{2880}$, *& le rectangle de AG, GE est* $11\frac{1}{4}$. *Parquoy le quarré LM sera* 60, *& NO* 12: *& partant la ligne LP est* $\sqrt{60}$, *& NP* $\sqrt{12}$: *& par consequent LN, ou TS sera* $\sqrt{60}$—$\sqrt{12}$, *qui est residu; & son quarré TR est* 72—$\sqrt{2880}$, *egal au rectangle AC.*

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.



Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu second AD. Ie dis (apres auoir construit comme en la precedente, & demonstré comme là que le rectangle AC est egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE sa conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 13. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commensurables en longitude, & par la 16. prop. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. prop. 10. icelle totale estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le seront AG & GE, qui sont rationeles (car elles sont commensurables à leur totale AG, qui est rationele) commens. en puissance seulement à la rationele AB, & par la 22. pr. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux; partant mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales. Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longitude: (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. pr. 10.) & par la 75. pr. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, *AD* $\sqrt{45}$—5: *DE est donc* 5, *& sa moitié DF* $2\frac{1}{2}$, *& par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est* $6\frac{1}{4}$, *auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront* $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ *&* $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: *parquoy le rectangle HE, ou le quarré NO sera* $\sqrt{20}$: *& partant son*

coſté SO eſt √√20. Mais puis que la ligne ÆE eſt √45, & ÆG √31¼: le rectangle BE ſera √720, & ÆH, ou le quarré LM √500: & par conſequent la ligne TO eſt √√500: de laquelle eſtant oſtee SO, reſtera TS √√500—√√20, qui eſt reſidu medial premier, & ſon quarré TR eſt √720—√20. Mais le rectangle ÆC eſt autant: car multipliant ÆB 4 par ÆD √45—5, viendra auſſi √720—√20. Donc ST reſidu medial premier peut le rectangle ÆC.

THEOR. 70. PROP. XCIV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu troiſieſme; la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt reſidu medial ſecond.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu troiſieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. prop. 10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme nous auons demonſtré en la ſuſdite prop.) eſt reſidu medial ſecond.

Car puis que AB eſt reſidu troiſieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tant entr'elles, qu'à la rationele AB: mais AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. & par la 18. prop. 10. AG & GE ſeront commenſ. en longit. & à leur totale AE par la 16 pr. 10. Et ſeront rationeles comme icelle: mais AE eſt commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 14. pr. 10. AG & GE ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement à AB: Et par la 22. propoſ. 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux: donc auſſi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes mediales. Pareillement DE eſtant incommenſ. en longit. à la rationele AB, auſſi le ſera ſa moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF eſtant rationele comme ſa double DE, le rectangle KE ſera medial, partant auſſi medial ſon egal LO, compris des deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement TO & SO: car leurs quarrez LM, NO ſont commenſ. l'eſtans leurs egaux rectangles AH & HE. Or ils ne ſçauroient eſtre commenſ. en longit. car il faudroit par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. que LO & NO fuſſent auſſi commenſurab. & par conſequent leurs egaux rectangles KE & HE: ce qui n'eſt pas. Donc par la 76. p. 10. TS eſt reſidu medial ſecond. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

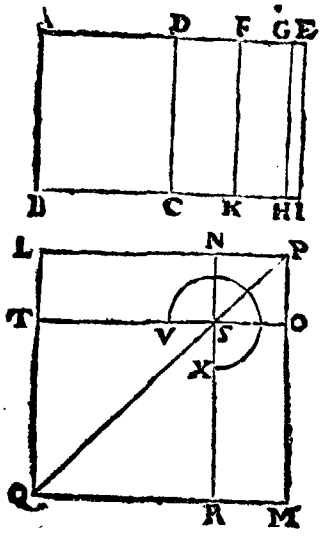
SCHOLIE.

La rationele ÆB ſoit 4, & ÆD √54—√30: donc DE eſt √30; ſa moitié DF √7½, & ſon quarré 7½, lequel eſtant appliqué ſur la ligne ÆE √54, & defaillant d'vne figure quarrée, les coſtez du rectangle appliqué, ſçauoir ÆG, GE, ſeront √37½, & √1½. Parquoy le rectangle ÆC ſera √864—√480, DE √864, CE √480, ÆH √600, DK √120, & HE √24. Mais le quarré LM eſtant egal à ÆH, il ſera auſſi √600, NO egal à HE √24: & partant les coſtez d'iceux quarrez, ſçauoir TO, SO ſont √√600, √√24: & par conſequent TS eſt √√600—√√24, & ſon quarré TR √864—√480, egal au rectangle ÆC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu quatrieſme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu quatrieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. p. 10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC). Ie dis qu'icelle ligne TS eſt ligne mineure.



Car puis que AD eſt reſidu quatrieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement; & AE qui eſt commenſ. en longit. à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incomm. en long. & par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longitude: partant par la 1. pr. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AH & HE ſeront incommenſurables, auſſi ſeront donc leurs egaux quarrez LM & NO: partant les lignes TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance: Mais AE eſtant commenſ. en long. à la rationele AB, par la 20. p. 10. le rectangle AI ſera rationel: partant auſſi rationel ſera le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement DE eſtant commenſurable en puiſſance ſeulement à AB, le rectangle CE ſera medial par la 22. prop. 10. auſſi ſera ſa moitié KE: & par conſequent ſon egal LM ſera auſſi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales, (car elles ſont incommenſur. en puiſſance) & le compoſé de leurs quarrez eſtant rationel, par la 77. p. 10. TS eſt ligne mineure. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 6, AD 9—√54: donc DE eſt √54, & ſa moitié DF √13½, ſon quarré 13½, lequel appliqué ſur AE 9, & defaillant d'vne figure quarrée, les coſtez AG, GE ſeront 4½+√6¼, & 4½—√6¼. Parquoy le rectangle AC ſera 54—√1944, BE 54, AH 27+√243, DK √486, & HE 27—√243. Mais le quarré LM eſtant egal à AH, ſera auſſi 27+√243, & NO egal à HE 27—√243: & partant leurs coſtez TO, SO ſont √(27+√243), & √(27—√243): & par conſequent TS eſt √(27+√243)—√(27—√243), & ſon quarré TR 54—√1944, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu cinquieſme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu cinquieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. pr. 10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Ie dis qu'icelle TS eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu cinquieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & DE eſt commenſurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & par la 19. p. 10. les lignes AG & GE ſont incomm. en longit. & comme en la precedente TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais AE eſtant incommenſ. en longitude à la rationele AB, le rectangle AI ſera medial par la 22. prop. 10. partant auſſi medial le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement, DE eſtant commenſur. en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE ſera rationel, auſſi le ſera ſa moitié KE, & ſon egal LO, compris de deux lignes incommenſ. en puiſſance TO & SO, deſquelles le compoſé de leurs quarrez fait vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Cequ'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 4, AD $\sqrt{54}-6$: donc DE eſt 6, & ſa moitié DF 3, ſon quarré 9, auquel eſtant egal le rectangle de AGE: AG ſera $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$, & GE $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC ſera $\sqrt{864}-24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216}-\sqrt{72}$: ainſi le quarré LM ſera $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, NO $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, & leurs coſtez TO, SO, $\sqrt{(\sqrt{216}+72)}$, & $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, & par conſequent TS eſt $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, & ſon quarré TR ſera $\sqrt{864}-24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu ſixieſme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu ſixieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. p. 10.) Ie dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme il a eſté demonſtré en la ſuſdite prop.) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu ſixieſme, & DE ſa conuenable, AE & DE ſont rationeles commenſur. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en long. Et par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longit. Et comme en la 95. pr. 10. TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance; & tout ainſi qu'en la precedente, le rectangle AI eſtant medial, le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO, ſera auſſi medial: Item DE eſtant commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, par la 22. p. 10. le rectangle CE ſera medial: auſſi le ſera donc ſa moitié KE, & ſon egal LO. Et AE, DE eſtans incomm. en longit. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AI, CE, ſeront incommenſ. & puis que CE eſt commenſ. à ſa moitié KE, par la 14. p. 10. KE ſera incommenſ. à AI: & partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incomm. en puiſſance, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reſte TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

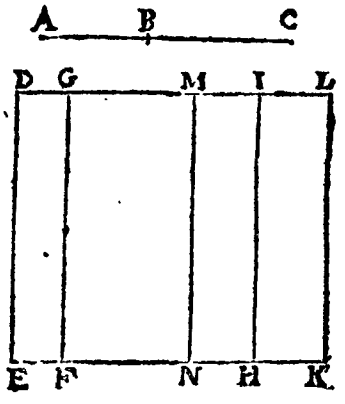
SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 6, AD √108—√63 : donc DE eſt √63, & ſa moitié DE √15¾, ſon quarré 15¾, AG √27+√11¼, GE √27—√11¼ : mais le rectangle AC ſera √3888—√2268, BE √3888, AH √972+√405, DK √567, & HE √972—√405 : ainſi le quarré LM ſera √972+√405, NO √972—√405, & leurs coſtez TO, SO, ſeront √(√972+√405), & √(√972—√405) : & par conſequent TS eſt √(√972+√405)—√(√972—√405), & ſon quarré TR √3888—√2268.

THEOR. 74. PROP. XCVIII. Six. 5.

Le quarré d'vn reſidu appliqué ſur vne rationelle, fait l'autre coſté reſidu premier.

Soit le reſidu AB, & BC ſa conuenable, tellement que AC, BC ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & ſur la rationele DE ſoit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu premier.



Car à la meſme rationele DE ſoit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC : & ſur IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK eſt egal au compoſé des quarrez de AC, BC : lequel eſtant egal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, enſemble auec le quarré de AB, ſi on oſte le quarré de AB, & le rectangle DF ; reſtera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB : partant GL eſtant couppee en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE : MK ſera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB ſont rationeles, leurs quarrez ſeront auſſi rationaux, & partant commenſ. & par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez eſt commenſ. à vn chacun d'eux : & partant iceluy compoſé, ou DK ſon egal, eſt rationel, lequel eſtant appliqué à la rationele DE, par la 21. prop. 10. DL ſera rationele commenſ. en longit. à icelle DE. Derechef, puis que AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, le rectangle d'icelles, & partant auſſi ſon double GK, ſera medial : & iceluy eſtant appliqué à la rationele GF, par la 23. pr. 10. GL ſera rationele incommenſ. en longitude à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'eſt à dire irrationel, ſont incommenſ. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ſeront auſſi incommenſ. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont eſté demonſtrees rationeles, elles ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant par la 74. prop. 10. le reſte DG ſera auſſi reſidu. Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu premier.

Car puis que par le lemme de la p. 54. le rectangle de AC, CB, ou ſon egal MK, eſt moyen prop. entre les quarrez de AC, CB, c'eſt à dire entre DH, IK : DH, MK, IK ſeront continuellement proportionaux : & par conſequent auſſi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL eſt egal au quarré de ML, c'eſt à dire au quart du quarré de GL, par le ſcholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, ſont commenſ. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10.

les

les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, LG sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI. IL, egal à la quarte partie du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, par la 18. pr. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier. Parquoy le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

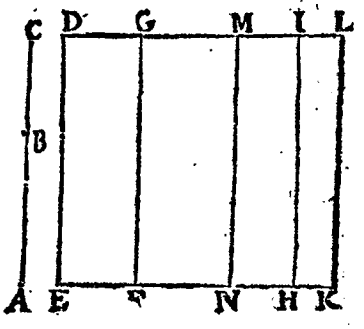
Le residu AB soit √60—√12, & BC √12: donc la toute AC est √60: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est 72—√2880, l'autre costé DG sera 9—√45: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9, & GL √45, & GM $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rectangle DK sera 72, DH 60, IK 12, GN √720, GK √2880, & DF 72—√2880.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'vn residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu second.

Car soit constituit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement: les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. prop. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationele commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. pr. 10. GL sera rationele commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommensur. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude; & partant par les tierces definitions, DG est residu second. Parquoy le quarré d'vn residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit √√500—√√20, & BC √√10: la toute AC sera donc √√500: & estant appliqué sur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui est √500, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est √20,

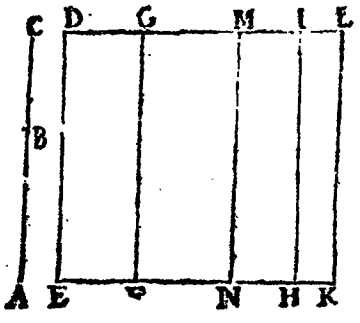
IL sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: *ainsi la toute DL sera* $\sqrt{45}$. *Derechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10, l'autre costé GM sera* $2\frac{1}{2}$, *& son double GL 5: parquoy DG sera* $\sqrt{45}-5$, *qui est residu second.*

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationele DE, soit appliqué le rectangle DF. Ie dis que l'autre costé DG est residu troisiesme.

Car ayant construit comme en la 98. prop. on demonstrera comme en la prec. que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi le sera son double GK, & par la 23. pr. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationele DE: Et puis que AC, BC sont incommens en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double GK: Mais le quarré de AC est aussi commens. au quarré de BC: (pource qu'iceux quarrez sont descrits sur lignes commens en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarrez, c'est à dire DK, sera aussi commens. au quarré de AC, auquel est incommens. GK; donc par la 13. prop. 10. DK sera incommens à GK: & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant mesme raison que DK, GK seront incommens. en longitude. Mais estans rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74. pr. 10. BG sera residu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98. prop. que DL peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: Et par les tierces def. DG est residu troisiesme. Parquoy le quarré d'vn residu medial second, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

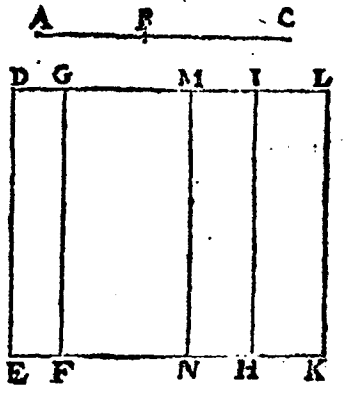
Le residu medial second AB soit $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{24}$, *& BC* $\sqrt{\sqrt{24}}$: *la toute AC sera donc* $\sqrt{\sqrt{600}}$: *& appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est* $\sqrt{600}$, *l'autre costé DI sera* $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *mais appliquant à la mesme DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre costé IL sera* $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL sera* $\sqrt{54}$: *& si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est* $\sqrt{120}$, *l'autre costé GM sera* $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, *& son double GL* $\sqrt{30}$: *parquoy DG est* $\sqrt{54}-\sqrt{30}$, *qui est residu troisiesme.*

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en ſorte que AC, BC, ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel: & le quarré d'icelle AB ſoit appliqué à la rationele DE: ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu quatrieſme.

Car apres auoir conſtruit comme en la 98. p. le rectangle DK ſera rationel, & GK medial, par le diſcours des precedentes: & par la 21. prop. 10. DL ſera rationele commenſ. en longitude à la rationele DE: & GL, par la 23. prop. 10. ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle rationele DE: & puis que DK eſt rationel, & GK medial, ils ſont incommenſ. & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, qui ſont en meſme raiſon que DK, GK, ſeront incommenſ. en longitude. Mais elles ſont rationeles: elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 74. pr. 10. DG ſera reſidu.



Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu quatrieſme. Car puis que les lignes AC, BC, ſont incomm. en puiſſance, leurs quarrez ſeront incommenſ. Auſſi incommenſ. leurs egaux rectangles DH, IK, & par conſequent incommenſ. les lignes DI, IL, coſtez du rectangle defaillant d'vne figure quarree egale au quarré de ML, c'eſt à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a eſté demonſtré en la 98. prop. & par la 19. prop. 10. DL (qui eſt commenſ. en longitude à la rationele DE) peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude: & par les tierces definitions DG eſt reſidu quatrieſme. Donc le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB ſoit $\sqrt{(27+\sqrt{243})}-\sqrt{(27-\sqrt{243})}$, *& BC* $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$, *le quarré de laquelle appliqué ſur la rationele DE 6, l'autre coſté DI ſera* $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *mais eſtant appliqué ſur la meſme DE, le rectangle IK, egal au quarré de BC, qui eſt* $27-\sqrt{243}$, *l'autre coſté IL ſera* $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *& partant la toute DL ſera 9. Que ſi à la meſme DE on applique le rectangle GN egal au rectangle de ACB; qui eſt* $\sqrt{486}$, *l'autre coſté GM ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, *& ſon double GL* $\sqrt{54}$: *& partant DG eſt* $9-\sqrt{54}$, *qui eſt reſidu quatrieſme.*

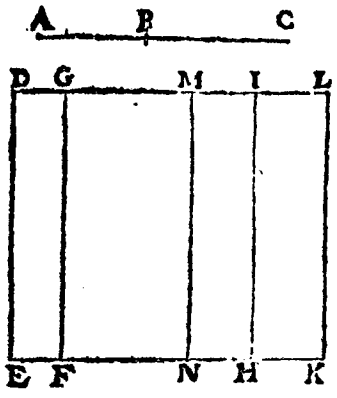
THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, vn tout medial, appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté reſidu cinquieſme.

Soit la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial AB, de laquelle le quarré ſoit appliqué ſur la rationele DE: ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu cinquieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 98. prop. 10.) AB eſtant ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, & BC ſa conuenable, les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance; comprenant vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial: partant le rectangle DK ſera medial, & GK rationel,

& par la 23. prop. 10. DL ſera rationelle incommenſur. en longitude à la rationelle DE: & par la 21. prop 10. GL ſera auſſi rationelle, mais commenſ. en longitude à la rationelle DE: Item les rectangles DK, GK eſtans incommenſurables (car l'vn eſt rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL ſeront auſſi incommenſurables en longitude. Mais icelles ſont rationelles: elles ſont donc commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 74. propoſition DG ſera reſidu. Mais il a eſté demonſtré que GL eſt commenſurable en longitude à la rationelle DE, & on prouuera comme en la precedente, que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude: & partant par les tierces def. DG eſt reſidu cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer:



SCHOLIE.

La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *le quarré de laquelle ſoit appliqué ſur la rationelle DE 4, & l'autre coſté DI ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *mais eſtant appliqué ſur la meſme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui eſt* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *l'autre coſté IL ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL ſera* $\sqrt{54}$: *Que ſi à la meſme rationelle on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui eſt 12, l'autre coſté ML ſera 3, & ſon double GL 6: Parquoy DG ſera* $\sqrt{54}-6$, *qui eſt reſidu cinquieſme.*

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté reſidu ſixieſme.

Soit la ligne AB, faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, le quarré de laquelle AB ſoit appliqué ſur la rationele DE: Ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu ſixieſme.

Car (apres auoir conſtruict comme en la 98. pr.) AB eſtant ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, & BC la conuenable à icelle AB; les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial: partant les deux rectangles DK & GK ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. prop. 10. DL, GL ſeront rationeles incommenſ. en longitude entr'elles, & à la rationele DE: & par conſequent commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 74. prop. BG ſera reſidu. Mais on peut prouuer comme en la 101. prop. 10. que la toute DL peut plus que ſa conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & partant par les tierces def. GD eſt reſidu ſixieſme. Donc le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$:

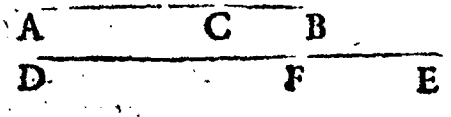
donc la toute AC sera √(√972+√405), au quarré de laquelle soit egal le rectangle DH, appliqué sur la rationele DE6: l'autre costé DI sera donc √27+√11¼: mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est √972—√405, l'autre costé IL sera √27—√11¼: & partant la toute DL sera √108: Si derechef on applique sur la mesme rationele le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est √567, l'autre costé GM sera √15¾, & son double √63: parquoy DG sera √108—√63, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne droicte commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit commensurable en longitude la ligne droicte DF. Ie dis que DF est residu de mesme ordre que AC.

Car CB soit la conuenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commens. en puissance seulement, & par la 12. prop. 6. soit fait que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. prop. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE: & par la 10. p. 10. comme AC est commens. en long à DF, ainsi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant, comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant, comme AB & BC sont rationeles, aussi seront DE & FE: (car elles sont commens. à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC sont commens. en puissance seulement: partant DE & EF seront aussi rationeles commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. DF est residu.



Ie dis dauantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude: si commensur. aussi DE pourra plus que FE de mesme façon par la 15. p. 10. (estans les quatre lignes proport.) Que si AB est commensurable en longitude à vne ligne rationele proposee, aussi DE qui luy est commensur. en longitude sera commens. en longitude à la mesme rationele proposee par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF seront residus premiers: Que si BC est commens. en longitude à la rationele, aussi sera FE; & AC, DF seront residus seconds: Et si AB & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE; & AC, DF seront residus troisiesmes. Que si AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. pr. 10. Et si AB est commens. en longitude à la rationele, aussi sera DE: & AC, DF seront residus quatriesmes. Mais si BC est commens. en longitude à la rationele, aussi sera FE: & AC, DF seront residus cinquiesmes. Si AB & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE: partant AC & DF seront residus sixiesmes: par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC. Parquoy la ligne commens. en long. à vn residu. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Le residu AC soit √60—√12, & DF √15—√3, lesquelles sont commens. en longitude l'vne estant double de l'autre, & la conuenable CB soit √12: Donc la toute AB est √60: & puis que comme AC est à DF, ainsi CB √12 est à FE; icelle FE sera √3: & la toute DE √15, commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne droicte commenſurable à vn reſidu medial, eſt auſſi reſidu medial de meſme ordre.

Soit la ligne DF commenſ. au reſidu medial AC: Ie dis que icelle DF eſt auſſi reſidu medial, & de meſme ordre que AC.

Car ayant faict meſme conſtruction qu'en la prec. prop. AB & BC ſeront commenſ. à DE, EF leſquelles ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 24. p. 10. DE & FE ſeront mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. prop. DF eſt reſidu medial: Ie dis dauantage qu'il eſt de meſme ordre que AC.

Car par la 1. p. 6. le quarré de AB eſt au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE eſt auſſi au rectangle de DE, FE comme DE à FE. Mais le quarré de AB eſt commenſ. au quarré de DE, eſtant AB & DE commenſ. & par la 10. prop. 10. les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. & comme l'vn ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers: & ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds. Donc la ligne commenſ. à vn reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

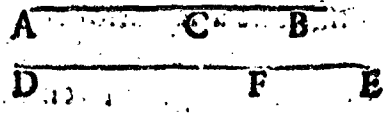
SCHOLIE.

Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, *& DF* $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}} - \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$: *BC ſera* $\sqrt{\sqrt{20}}$, *& la toute AB* $\sqrt{\sqrt{500}}$: *mais FE ſera* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$, *& la toute DE* $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.

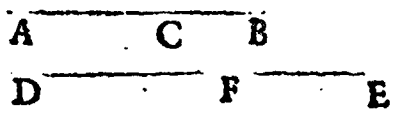
Soit la ligne DF, commenſurable à vne ligne mineure AC: Ie dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuenable à icelle AC, apres auoir faict meſme conſtruction qu'en la 104. pr. 10. AB & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DB & FE ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AB à BC, ainſi DE à FE, par la 22 pr. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux: & en compoſant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DE, FE, ſera au quarré de FE: & en permutant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au compoſé des quarrez de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE: leſquels quarrez de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes BC & FE ſont commenſur. comme AC & DF, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 104. p.) & partant par la 10. pr. 10. le compoſé des quarrez de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE, lequel ſera auſſi rationel. Pareillement, puis que comme à la prop. prec. le quarré de AB eſt au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE eſt au rectangle de DE & FE: en permutant, comme le quarré



au quarré, ainſi le rectangle au rectangle : c'eſt à dire commenſur. Car les lignes AB & DE ſont commenſ. par la 10. prop. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC eſtant medial, celuy de DE & FE ſera auſſi medial : partant DE & FE eſtant incommenſ. en puiſſance comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, par la 77. p. 10. DF ſera ligne mineure. Donc la ligne commenſ. à vne ligne mineure eſt auſſi ligne mineure. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial, eſt auſsi ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.



Soit la ligne DF commenſ. à la ligne AC, faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial. Ie dis que DF eſt auſſi ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Car ſoit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB ſoient incommenſ. en puiſſance, & facent le compoſé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et eſtant faict meſme conſtruction qu'en la 104. prop. on demonſtrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE ſont incommenſ. en puiſſance ; & que le compoſé des quatrez de AB, CB eſt commenſur. au compoſé des quarrez de DE, FE. Mais celuy-là eſt medial : auſsi ſera donc ceſtuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef, comme nous auons demonſtré en la 105. prop. le rectangle de AB, CB eſt commenſurable au rectangle de DE, FE : mais ceſtuy-là eſt poſé rationel : auſſi ſera donc ceſtuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, ſont incommenſ. en puiſſance, & font le compoſé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. pr. 10. DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial. Parquoy la ligne commenſurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commenſurable à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, eſt auſsi ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commenſ. à la ligne AC, faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial : Ie dis que DF eſt auſſi ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car à AC ſoit CB conuenable, tellement que AB, CB ſoient incommenſ. en puiſſance, & facent le compoſé de leurs quarrez medial, & leur rectangle auſſi medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez : & ayant fait ſemblable conſtruction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop. que les lignes DE, FE, ſont incommenſ. en puiſſance, & que le compoſé des quarrez de AB & BC, eſt commenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, eſt commenſ. au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB

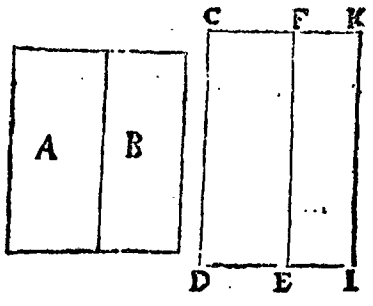
& CB, eſt medial, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & CB, auſſi medial: partant par le ſcholie de la 14. p. 10. le rectangle de DE & FE, ſera medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE auſſi medial: & DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Donc la ligne commenſ. à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'vne ſuperficie rationele, eſt retranchee vne ſuperficie mediale: la ligne qui peut le reſte eſt reſidu, ou ligne mineure.

Soit la ſuperficie rationele AB, de laquelle ſoit retranchee la mediale A: *Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu, ou ligne mineure.*

Car ſur vne rationele propoſee CD ſoit deſcrit le rectangle CE egal à A, & ſur FE le rectangle FI egal à B. Il eſt euident que CI egal au rationel AB, ſera auſſi rationel, & par la 21. pr. 10. ſon autre coſté CK ſera rationel commenſ. en longitude à CD. Item par la 23. p. 10. CE eſtant medial, CF ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à CD, & par la 13. pr. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. pr. 10. FK ſera reſidu, & FC ſa conuenable. Parquoy CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſurable, FK ſera reſidu premier: & partant la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu par la 92. pr. 10. Si incommenſurable, FK eſt reſidu quatrieſme: & conſequemment la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par la 95. pr. 10. Parquoy ſi d'vne ſuperficie rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Si l'eſpace rationel AB eſt 32, le medial AV 320; & la ligne rationele CD 6, ſur laquelle eſt deſcrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B: les coſtez CF, & FK, ſeront V 8 8/9, & 5 1/3 — V 8 8/9: & partant la toute CK ſera 5 1/3: & le rectangle CI 32, duquel oſtant CE, qui eſt V 320, le reſte rectangle FI ſera 32 — V 320: & la ligne pouuant iceluy ſera V (16 + V 176) — V (16 — V 176), qui eſt ligne mineure.

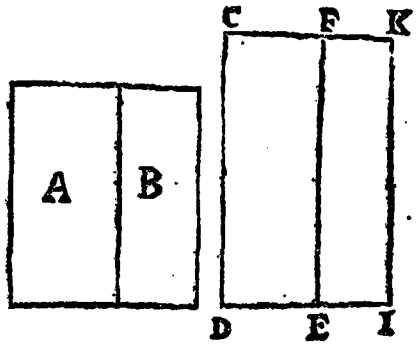
THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'vne ſuperficie mediale eſt retranchee vne ſuperficie rationele, la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la rationele A. *Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.*

Car, ayant conſtruit comme en la preced. puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale, auſſi la totale CI eſt mediale, & par la 23. prop. 10. le coſté CK eſt rationel commenſ.

commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele CD. Item puis que le retranché A eſt rationel, auſſi ſera ſon egal CE, & par la 21. p. 10. CF ſera rationele commenſ. en longitude à la rationele CD: & par la 13 pr. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement; & partant par la 74. prop. 10. FK ſera reſidu, & FC ſa conuenable. Donc CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude, & conſequemment FK ſera reſidu ſecond, ou reſidu cinquieſme. Si reſidu ſecond; la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial premier par la 93. pr. 10. Si reſidu cinquieſme, la ligne qui peut le rectangle FI, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial par la 96. pr. 10. Parquoy ſi d'vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Si la ſuperficie mediale AB eſt √800, & la rationele A 12: le reſte B ſera √800—12, & la ligne pouuant iceluy ſera √(√200+√164)—√(√200—√164), qui eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'vne ſuperficie mediale, eſt retranchee vne ſuperficie mediale incommenſurable à la toute; la ligne qui peut le reſte eſt ou reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la ſuperficie mediale A, incommenſ. à la toute AB. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car ayant fait meſme conſtruction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE ſeront mediaux & incommenſurables entr'eux; & par la 23. pr. 10. les lignes CK, CF ſeront rationeles incommenſ. en longitude à CD. Et puis que CI, CE ſont incommenſ. les rationeles CK, CF, qui par la 1. pr. 6. ſont en meſme raiſon que CI, CE, ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr. 10. & par conſequent elles ſont ſeulement commenſ. en puiſſance: Donc FK ſera reſidu par la 74. prop. 10. & FC ſa conuenable. Partant CK peut plus que FK, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſ. en longitude: ſi commenſ. FK ſera reſidu troiſieſme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial ſecond, par la 94. prop. Si incommenſ. FK ſera reſidu 6^e. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B ſon egal) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, par la 97. prop. Si donc d'vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

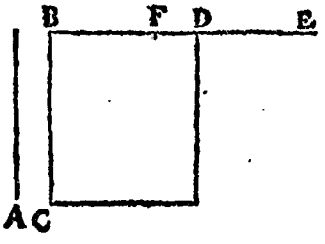
Si la ſuperficie mediale AB eſt √279, & A √40: la ſuperficie reſtante B ſera √279—√40:

& la ligne pouuant icelle sera $V(\sqrt{69\frac{1}{4}}+\sqrt{59\frac{1}{4}})-V(\sqrt{69\frac{1}{4}}-\sqrt{59\frac{1}{4}})$, *qui est appellee ligne faisant auec vne superficie medial vn tout medial.*

THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appellee residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit quelconque residu A. Ie dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.



Car soit la rationele proposee BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD egal au quarré du residu A: par la 98. prop. BD sera residu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE; BE & DE seront rationeles commens. en puissance seulement: & BE commens. en longitude à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome; BD sera binome premier par la 61. pr. 10. lequel estant diuisé en ses noms au poinct F; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commens. en puissance seulement, & BF commensurable en longitude à la rationele BC: & par la 12. pr. 10. BE & BF, seront commens. en longitude. Veu donc que la toute BE est commens. en longitude à la partie BF, par le coroll. de la 16. pr. 10. l'autre partie FE sera aussi commens. en longit. à BE: partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est pas commensurable en longitude à BE, & par la 14. pr. 10. FE, DE sont rationeles commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele; ce qui est absurde: car elle a esté prouuee rationele: donc le residu A sera differend du binome. Parquoy la ligne appellee residu n'est pas la mesme que binome. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appellee residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suiuantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué à vne ligne rationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisiesme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriesme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, fait l'autre costé residu cinquiesme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, fait l'autre costé residu sixiesme par la 103. pr. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles suiuantes, estans appliquez à vne ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq suiuantes sont differentes du residu, & des cinq suiuantes.

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy-deuant dites sont treize: sçauoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.

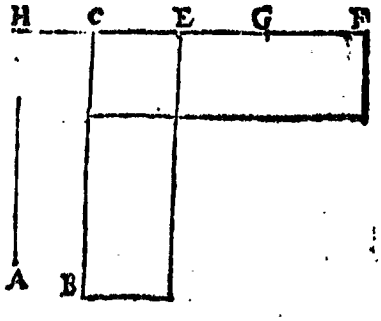
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale ſeconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Reſidu.
9. Reſidu medial premier.
10. Reſidu medial ſecond.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué à vn binome, fait l'autre coſté reſidu, les noms duquel ſont proportionaux, & commenſ. aux noms du binome: en outre le reſidu eſt de meſme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom ſoit BD: & à icelle BC ſoit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Ie dis que l'autre coſté CE eſt reſidu duquel les noms, c'eſt à dire la ligne totale & ſa conuenable, ſont proportionnaux & commenſ. aux noms BD, DC du binome BC: & en outre qu'iceluy reſidu eſt de meſme ordre que ledit binome.

Car au moindre nom CD ſoit appliqué le rectangle DF auſſi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, ſeront egaux, & par la 14.pr.6. leurs coſtez ſeront reciproques, ſçauoir que comme BC à DC, ainſi CF à CE; & en diuiſant, comme BD à DC, ainſi FE à EC. Mais BD eſt plus grande que CD: donc auſſi FE ſera plus grande que EC. Maintenant de EF ſoit retranchee EG egale à EC, & ſoit fait que comme FG à GE, ainſi EC ſoit à CH par la 12. pr. 6. & en compoſant, comme FE ſera à EG, (ou EC ſon egale) ainſi EH à CH, & par la 12.pr.5. les deux antecedens FEH ſeront aux deux conſequens ECH, comme l'vn des antecedens EH à l'vn des conſequens CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, ſeront continuellement proportioneles en la raiſon de FE à EC, ou BD à DC; & par la 22.prop.6. & 10.pr.10. comme le quarré de BD eſt commenſ. au quarré de DC, (car iceux quarrez ſont commenſ. puis que BD, DC ſont les noms du binome BC) ainſi le quarré de EH ſera commenſ. au quarré de CH: & par le coroll. de la 20.p.6. & 10.p.10. CH ſera commenſ. en longitude à la troiſieſme proportionele FH, & par la 16.p.10. CH & GF ſeront commenſ. en longitude. Et d'autant que le rectangle DF eſt rationel (eſtant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele; CF ſera auſſi ligne rationele commenſ. en longitude à CD par la 21.p.10. Et CH ſera auſſi rationele commenſ. en longitude à CD, par la 12.p.10.



& par la 10. pr. 10. comme CD & DB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, auſſi CH, EH, ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. pr. 10. CE ſera reſidu, duquel les noms EH, CH ſont proportionaux, & commenſ. aux noms BD, DC, du binome BC: Car il a eſté demonſtré que comme BD eſt à DC, ainſi EH à CH; & partant en permutant, comme BD ſera à EH, ainſi DC à CH. Mais DC, CH ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH ſeront donc auſſi commenſ. en longitude.

Reſte donc à prouuer que le reſidu CE eſt de meſme ordre que le binome BC: Or les noms de l'vn eſtans proportionnaux, & commenſ. aux noms de l'autre: par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. ou incommenſ. en longitude: auſſi le plus grand nom du reſidu pourra plus de meſme. Que ſi le plus grand nom du binome eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera le plus grand nom du reſidu par la 12. p. 10. & ils ſeront binome premier, & reſidu premier. Que ſi le plus petit nom du binome eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera le plus petit du reſidu; & ils ſeront binome & reſidu ſecond. Que ſi ny l'vn ny l'autre nom du binome eſt commenſ. à la rationele: ſemblablement l'vn ny l'autre nom du reſidu ne ſera commenſ. à la meſme rationele par la 14. p. 10. & partant ils ſeront binome, & reſidu troiſieſme: & ainſi des autres. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele eſtans appliqué ſur vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

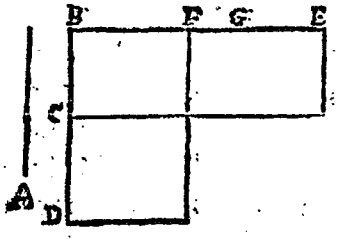
SCHOLIE.

Si la rationele A eſt 8, le binome BC $9+\sqrt{45}$, tellement que BD ſoit 9, & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A eſtant appliqué ſur BC, l'autre coſté du rectangle CE ſera $16-\sqrt{142\frac{2}{9}}$, qui eſt reſidu: & puis que comme DC eſt à CB, ainſi CE à CF, icelle CF ſera $\sqrt{91\frac{1}{45}}$; & EF $\sqrt{460\frac{4}{5}}-16$. Mais EG eſtant egale à CE, eſt $16-\sqrt{142\frac{2}{9}}$; GF $\sqrt{1115\frac{1}{45}}-32$: & d'autant que comme FG eſt à GE, ainſi EC à CH, icelle ſera $\sqrt{142\frac{2}{9}}$, & EH 16: Ainſi eſt manifeſte que CE eſt reſidu de meſme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, ſont proportion. aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIIII.

Le quarré d'vne ligne rationele, eſtant appliqué à vn reſidu, faict l'autre coſté binome, les noms duquel ſont proportionaux, & commenſurables aux noms du reſidu: En outre le binome eſt de meſme ordre que le reſidu.

Soit la rationele A, & le reſidu BC, auquel conuienne CD, & ſur BC ſoit deſcrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Ie dis que l'autre coſté BE eſt binome, dont les noms ſont proport. & commenſ. à BD, CD, noms du reſidu BC; & en outre qu'iceluy binome BE eſt de meſme ordre que ledit reſidu BC.



Car ſur BD ſoit deſcrit le rectangle DF egal au meſme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF ſeront egaux, & ayans les coſtez reciproques, par la 14. pr. 6. BD ſera à BC comme BE à BF; & par conuerſion de raiſon, BD ſera à CD

comme BE à FE. Maintenant ſoit couppée EF en G, par la 10. prop. 6. tellement que comme BE eſt à FE, ainſi EG ſoit à GF: Veu donc que comme la toute BE eſt à la toute FE, ainſi EG retranchée de BE, eſt à GF retranchee de FE, auſſi par la 19. p. 5. le reſte BG ſera au reſte EG, comme la toute à la toute, c'eſt à dire comme la retranchee EG à la retranchee GF: & partant EG eſt moyenne proportionele entre BG & GF. Parquoy comme BG ſera à GF, ainſi le quarré de BG ſera au quarré de EG, par le corollaire de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainſi BE à FE, c'eſt à dire BG à GE; & BD, CD noms du reſidu BC ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: par la 10. p. 10. BG, GE ſeront auſſi commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE ſont commenſ. & par conſequent les lignes BG, FG qui ont meſme raiſon qu'iceux quarrez, ſont commenſ. en longit. par la meſme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF ſeront auſſi commenſ. en longit. Et d'autant que BD plus grand nom du reſidu BC eſt rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, eſt rationel; par la 21. p. 10. BF ſera auſſi rationele commenſ. en longit. à BD. Donc par la 12. pr. 10. BG ſera auſſi rationele commenſ. en longit. à la meſme BD. Et puis que BG, GE, ont eſté demonſtrees commenſ. en puiſſance ſeulement, & BG rationele; GE ſera auſſi rationele. Donc BG, GE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: Et partant par la 37. p. 10. BE eſt binome: duquel les noms BG, GE, ſont proportionaux, & commenſ. aux noms BD, CD, du reſidu BC. Car il a eſté demonſtré que comme BD à CD, ainſi BG à GE: & partant en permutant, comme BD à BG, ainſi CD à GE: mais BD a eſté demonſtré commenſurable en longitude à BG: donc auſſi CD ſera commenſ. en longitude à GE, par la 10. p. 10. Reſte donc à prouuer que BE eſt binome de meſme ordre que le reſidu BC: ce qu'on fera procedant tout ainſi qu'en la precedente. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué ſur vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si la rationele A eſt 4, & le reſidu BC $9-\sqrt{45}$, *CD* $\sqrt{45}$, *& BD 9, le rectangle DF ſera 16, & auſſi CE 16: ainſi le coſté BF ſera* $1\frac{1}{9}$, *& BE* $4+\sqrt{8\frac{8}{9}}$: *& par conſequent FE ſera* $\sqrt{8\frac{8}{9}}+2\frac{2}{9}$; *& GE* $8\frac{8}{9}$, *FG* $2\frac{2}{9}$, *BG 4: ainſi eſt euident que BE eſt binome en meſme ordre que le reſidu BC, & que les noms d'iceux ſont proportionaux.*

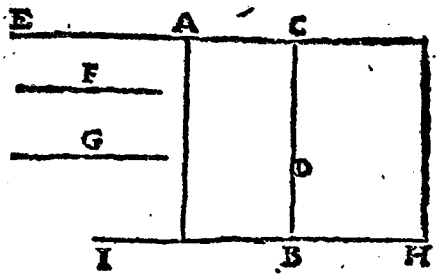
THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle eſt compris d'vn reſidu, & d'vn binome, deſquels les noms ſont proportionaux & commenſurables; la ligne droicte pouuant iceluy rectangle eſt rationele.

Soit le rectangle AB compris ſous le reſidu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB ſoient proportionaux, & commenſurables aux noms CE, AE du reſidu AC: & ſoit la ligne droicte F pouuant iceluy rectangle AB. Ie dis que F eſt rationele.

Car ſoit vne rationele propoſee G, le quarré de laquelle eſtant appliqué ſur le binome CB; face le rectangle CH. Donc par la 113. prop. l'autre coſté BH ſera

residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD, DB, sçauoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE: & en permutant, comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchee BI à la retranchee AE; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commens. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'vne & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC seront commensurables en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH, & AC, ils seront aussi commensurables. Mais HC, egal au quarré de la rationele G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn rectangle rational, peut estre compris de lignes irrationeles.

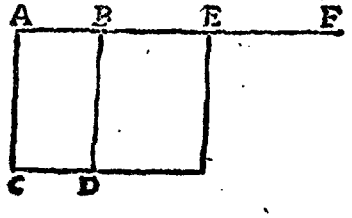
SCHOLIE.

Si le residu AC est $4-\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient 4, &* $\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *mais le binome BC soit* $9+\sqrt{45}$, *le rectangle AB sera 16, qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4, & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8, le rectangle CH sera 64, & le costé BH* $16-\sqrt{142\frac{2}{9}}$, *HI 16, & BI* $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dites.

Soit la ligne mediale AB: ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationeles toutes differentes des treize lignes deuant dites.



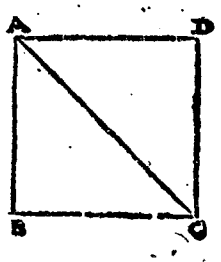
Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationele, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle sera irrationel par le corol. de la 39. p. 10. & par la 11. def. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationele, soit icelle BE laquelle sera differente de toutes les lignes deuant dites. Car son quarré appliqué à vne ligne rationele AC, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des 13 lignes deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationel par le mesme coroll. & la ligne qui le peut, aussi irrationele: & soit EF, laquelle sera differente de toutes les lignes deuant dites. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué à vne ligne rationele, ne fait l'autre costé tel que BE: & procedant de ceste façon, on trouuera infinies autres lignes irrationeles differentes entr'elles & des precedentes. Parquoy de la ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

si la mediale AB est √√2, & la rationele AC 2, le rectangle AD sera √√ 32, & la ligne BE qui peut iceluy sera √√√32 : Ainsi le rectangle DE sera √√√ 512, & la ligne EF qui peut iceluy sera √√√√ 512, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longitude au costé.



Soit le quarré ABCD, duquel AC soit diagonale. Ie dis qu'icelle diagonale AC est incommens. en longitude au costé AB.

Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'vne autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons demonstré au corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. pr. 10. la diagonale AC, & le costé AB, sont incommens. en longitude. Donc au quarré, la diagonale est incommens. en longitude au costé. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera √ 2 : tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à √ 2, c'est à dire incommens. en longitude.

Fin du dixiesme Element.

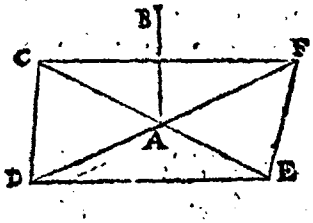
ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1. SOlide, eſt ce qui à longueur, largeur & profondeur.

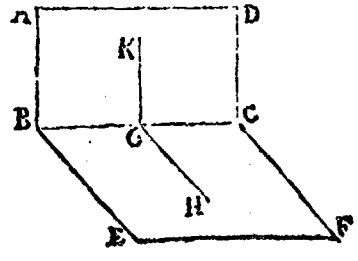
2. Mais les termes d'vn ſolide, ſont ſuperficies.

3. Vne ligne droicte eſt perpendiculairement eſleuee ſur vn plan, quand toutes les lignes droictes conſtituees ſur iceluy plan, & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.



Soit la ligne droicte AB eſleuee au deſſus du plan CDEF, ſur lequel ſoient menees tant de lignes droictes que l'on voudra CA, DA, EA & FA, qui rencontrant en A ladite ligne AB faſſent les angles droicts CAB, DAB, EAB & FAB: Nous dirons donc qu'icelle ligne AB eſt perpendiculaire, ou eſleuee à angles droicts ſur ledit plan propoſé CDEF.

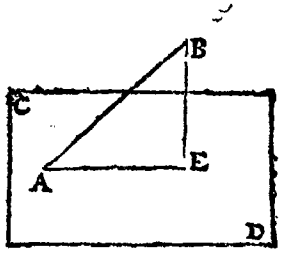
4. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune ſection, ſont auſſi perpendiculaires à l'autre plan.



Soit le plan ABCD eſleué ſur le plan BEFC, tellement que la ligne AD ſoit en l'air, & la ligne BC leur commune ſection: mais au plan BEFC, ſoit tiree la ligne droicte GH perpendiculaire à icelle commune ſection BC. Maintenant ſi la meſme ligne GH eſt auſſi perpend. à l'autre plan ABCD, c'eſt à dire qu'ayant mené en iceluy du poinct G, quelque ligne droicte, comme GK, l'angle HGK ſoit droict: iceluy plan ABCD ſera eſleué perpendiculairement ou à angles droicts ſur l'autre plan BCEF. Partant lors qu'vn plan eſt eſleué à angles droicts ſur quelque autre plan, auſſi les lignes droictes menees en l'vn d'iceux à angles droicts à leur commune ſection, ſeront perpendiculaires à l'autre plan: tellement que ſi on dit que le plan ABCD eſt eſleué à angles droicts ſur le plan BCEF, & qu'en celuy-là ſoient menees les lignes droictes AB, KG, DC perpendic. à la commune ſection BC, nous conclurons qu'icelles lignes ſont auſſi perpend. à l'autre plan BCEF, & ſont les angles ABE, KGH, DCF droicts.

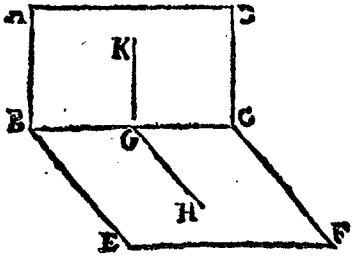
5. L'inclination

5. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan, eſt l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.



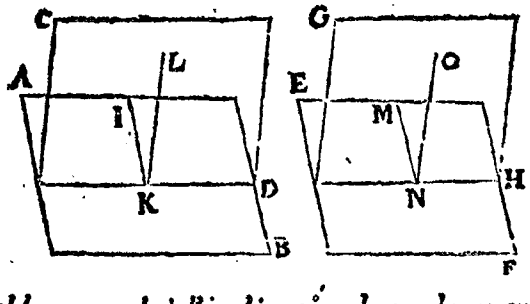
Soit la ligne droicte AB inclince au plan CD, & du poinct du ſommet B, ſoit menee BE perpendic. au meſme plan CD, & tiree AE: l'angle aigu BAE ſera l'inclination de ladite ligne AB au plan CD.

6. Vn plan eſt incliné ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers vn meſme poinct d'icelle, ne ſont point perpendiculaires les vnes aux autres: & l'inclination d'iceux plans, eſt l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.



Soit le plan ABCD eſleué au deſſus du plan BCFE, tellement que la ligne AD eſt en l'air, & BC leur commune ſection: mais de quelque poinct d'icelle comme G, ſoient menees GH au plan CE, & GK au plan AC, chacune perpendiculaire à ladite BC. Or ſi leſdites perpendiculaires GH & GK, ne ſont perpendiculaires entr'elles, c'eſt à dire que l'angle KGH ne ſoit droict, le plan ABCD ſera incliné au plan BCFE, & l'angle aigu KGH contenu ſous icelles perpendiculaires GH, GK, ſera l'inclination d'iceux plans.

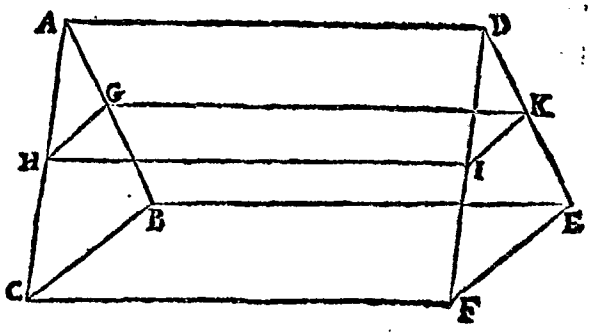
7. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, lors que les ſuſdicts angles d'inclinations ſont egaux entr'eux.



Soient deux plans AB, CD, inclinez entr'eux, & deux autres plans EF, GH, auſſi inclinez entr'eux; mais que l'angle d'inclination de ceux-là, qui eſt IKL, ſoit egal à l'angle d'inclination de ceux-cy, qui eſt MNO: Le plan AB ſera ſemblablement incliné au plan CD, que le plan EF au plan GH, c'eſt à dire que l'inclination de ces deux plans-là ſera ſemblable & egale à l'inclination de ces deux-cy.

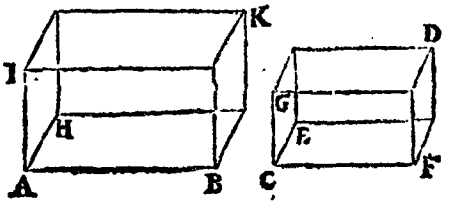
8. Plans parallels, ſont ceux leſquels eſtans continuez ne ſe rencontrent point.

Comme ſi les deux plans ABC, DEF, eſtans prolongez de part & d'autre, ne ſe rencontrent point: iceux plans ſeront parallels entr'eux. Item, les deux plans BCFE, GHIK ne ſe pouuant iamais rencontrer eſtans prolongez ſeront auſſi dicts plans parallels, mais non pas les deux plans CHIF, BGKE, leſquels eſtans continuez ſe rencontrent en AD.



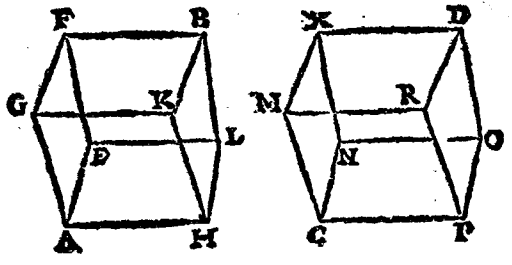
9. Solides ſemblables, ſont ceux qui ſont compris de plans ſemblables, egaux en nombre.

Comme les ſolides AK, & CD, chacun deſquels eſt contenu & enuironné de ſix plans ou ſuperficies ſemblables, ſeront dicts ſolides ſemblables.



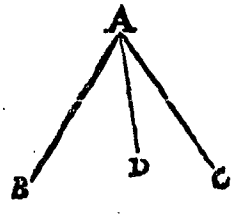
10. Solides egaux & ſemblables, ſont ceux qui ſont compris & enuironnez de ſemblables plans, egaux en nombre & grandeur.

C'eſt à dire que ſi les plans ſemblables, qui ſuiuant la precedente definition contiennent les corps ſemblables, ſont egaux chacun au ſien: tels ſolides ne ſeront pas ſeulement dicts ſemblables, mais auſſi egaux: Comme chacun des corps AB, CD, eſtant contenu de ſix plans ſemblables & egaux, chacun à ſon correſpondant, ſeront dicts corps ou ſolides egaux & ſemblables.



11. Angle ſolide, eſt l'inclination ou rencontre de plus de deux lignes, qui ſe touchans en vn meſme poinct, ne ſont conſtituees ſur vn meſme plan. *ou bien*, Angle ſolide, eſt celuy qui eſt contenu ſous plus de deux angles plans, qui ſe rencontrans à vn meſme poinct ſont conſtituez ſur plans differens.

Nous auons dit au premier liure que quand deux lignes droictes conſtituees à vn meſme plan ſe rencontrent indirectement à vn poinct, elles ſont vn angle plan, tel qu'eſt l'angle BAC contenu des deux lignes AB, AC, conſtituees en vn meſme plan: Mais s'il y interuient vne troiſieſme ligne comme AD, qui ne ſoit conſtituee au meſme plan, ains que le poinct D ſoit en l'air hors le plan d'icelles, ſera fait au poinct A vn angle ſolide: Lequel eſt auſſi conſtitué par les trois angles plans BAC, BAD, & CAD, qui ſe rencontrent au meſme poinct A, & ſont conſtituez ſur plans differens.

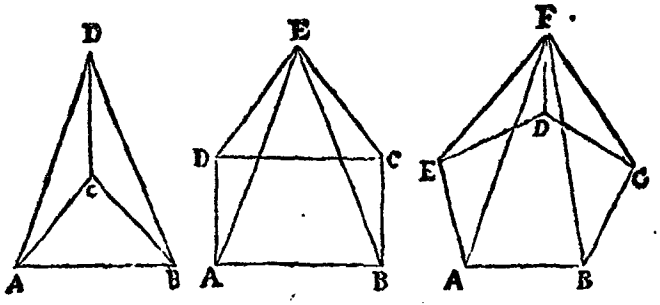


Mais eſt icy à noter que ceſte def. ne comprend que les angles ſolides qui ſont contenus ſous plus de deux lignes droictes, ou plus de deux angles plans rectilignes: car elle ne comprend pas

l'angle du cone, qui eſt contenu d'vne ſeule ſuperficie courbe; ny celuy fait de deux ſuperficies l'vne plaine & l'autre courbe, tel qu'eſt l'angle fait lors qu'vn Cone eſt couppé par le ſommet. Comme eſt auſſi à noter que les angles ſolides contenus d'angles plans egaux en multitude & grandeur, ſont egaux entr'eux.

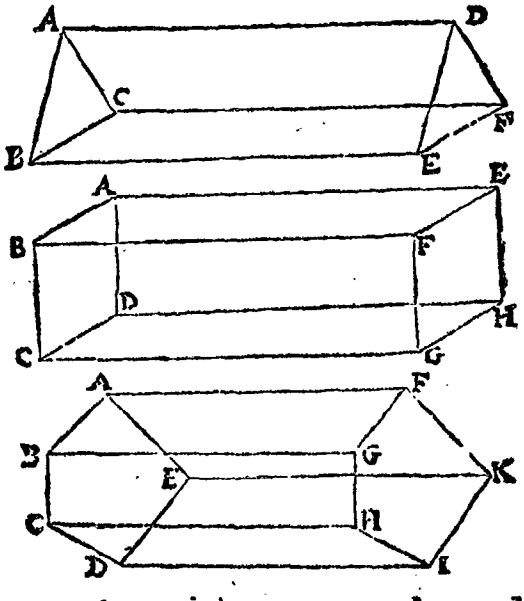
12. Pyramide, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, ſe rencontrans en vn meſme poinct, & ayans vn autre plan pour baſe.

Comme la figure ſolide ABCD conſtituee ſur le plan ABC auec les trois autres plans ADB, ADC, & CDB, qui ſe rencontrent & terminent au poinct D, eſt appellee Pyramide. Comme auſſi la figure ſolide ABCDE conſtituee ſur la baſe ABCD, les autres plans ſe rencontrans au ſommet E: Item la figure ſolide ABCDEF: Chacune deſquelles Pyramides prend ſa denomination ſelon la figure de ſa baſe: tellement que celle qui a vn triangle pour baſe, comme la premiere des trois cy-deſſus, s'appelle Pyramide triangulaire: celle qui a vn quadrangle comme la 2e. ſe nomme Pyramide quadrangulaire: celle qui a vn pentagone pour baſe, comme la 3e. s'appelle Pyramide pentagonalle, &c.



13. Priſme, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

Comme la figure ſolide ABCDEF s'appelle priſme, car elle eſt contenue de deux triangles oppoſez ABC, DEF qui ſont egaux ſemblables & parallels, & de trois parallelogrammes BCFE, BADE, ACFD. Semblablement la figure ſolide ABCDHEFG, en laquelle les plans oppoſez, egaux, ſemblables & parallels ſont les quadrilateres ABCD, EFGH, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommee Priſme: Comme auſſi l'autre figure ſolide ABCDEKFGHC, dont deux des plans qui la contiennent ſont oppoſez, egaux ſemblables & parallels, ſçauoir les pentagones ABCDE, FGHIK, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommee Priſme. Parquoy vn priſme n'eſt autre choſe qu'vne colomne d'egale groſſeur qui a les baſes oppoſees egales, ſemblables & paralleles, ſoit qu'icelles bazes ſoient triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, &c. ainſi qu'il appert és figures cy deſſus.



14. Sphere, eſt vne figure contenue de la ſuperficie deſcrite par vn demy cercle, lors que ſon diametre demeurant immobile, iceluy de-

my cercle eſt tourné iuſques à ce qu'il reuienne où il a commencé de mouuoir.

Encore que nous ayons ſuppleé quelque choſe en ceſte def. de la ſphere, ſi eſt-ce toutesfois que celle de Theodoze rapportee en noſtre Coſmographie ſemble plus claire & intelligible: & des deux nous en auons faict vne autre, qui eſt au commencement de noſtre Geometrie practique, laquelle eſt telle qu'il enſuit.

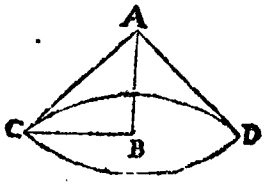
La ſphere eſt vn corps compris d'vne ſeule ſuperficie, à laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont au dedans d'iceluy corps ſont egales entr'elles: & icelle ſphere eſt deſcrite par vn demy cercle tournant vn tour ſur ſon diametre immobile.

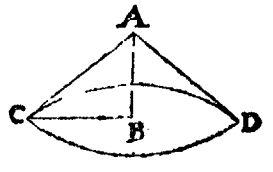
15. L'axe de la ſphere, eſt iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

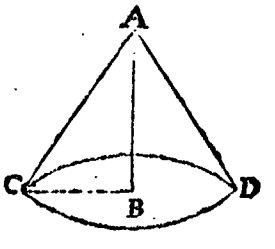
16. Le centre de la ſphere, eſt le meſme que celuy du demy cercle.

17. Mais le diametre de la Sphere, eſt vne ligne droicte, laquelle paſſant par le centre d'icelle, eſt terminee à la ſuperficie de la ſphere.

18. Cone, eſt vn ſolide compris ſous deux ſuperficies deſcrites par vn triangle rectangle, lors que l'vn des coſtez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, le triangle fait vn tour à l'entour d'iceluy coſté. Et ſi ledit coſté immobile eſt egal à l'autre coſté comprenant l'angle droict, le cone ſera rectangle: mais ſi plus petit; il ſera ambligone: & ſi plus grand; il ſera oxigone.







Soit le triangle ABC, dont l'angle B eſt droict, & le coſté AB demeurant fixe, ſoit imaginé ledit triangle ABC eſtre meu à l'entour dudit coſté AB iuſques à ce qu'il ait fait vne entiere reuolution: alors ſera deſcrite vne figure ſolide contenue ſoubs deux ſuperficies, l'vne plane & circulaire deſcrite par le coſté BC, & l'autre courbe & conuexe deſcrite par le coſté AC oppoſé à l'angle droict: laquelle figure eſt appellee Cone par Euclide & autres Geometres; mais pluſieurs l'appellent auſſi Pyramide ronde.

Que ſi le coſté immobile AB eſt egal à BC autre coſté de l'angle droict, comme en la premiere figure, le Cone ſera dit Orthogonel ou rectangle, pource que l'angle au ſommet A ſera droict, chacun des deux CAB & DAB, qui le compoſent eſtant demy droict, à cauſe que l'angle B eſt droict, & les coſtez AB & BC egaux. Mais ſi le coſté immobile AB eſt moindre que l'autre coſté de l'angle droict BC, comme en la 2. figure, le Cone deſcrit ſera dit Ambligone, pource que l'angle au ſommet A ſera obtus, attendu que chacun des angles egaux BAC, BAD, qui le compoſent eſt plus grand qu'vn demy droict, l'angle ACB qui fait vn droict auec BAC eſtant moindre qu'iceluy. Et finalement ſi le coſté immobile AB eſt plus grand que l'autre coſté BC,

comme en la 3. figure, le Cone descrit sera appellé Oxigene, parce que l'angle au sommet A sera aigu, puis que l'angle ACB sera plus grand qu'vn demy droict, & chacun des angles BAC, BAD qui composent ledit angle A, moindre qu'vn demy droict.

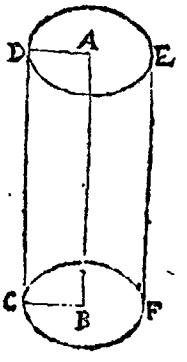
19. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

Comme en chacun des trois Cones descrits cy-dessus, l'axe est la ligne droicte immobile AB.

20. Mais la baze du cone, est le cercle descrit par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne.

Comme és Cones cy-dessus, la base est le cercle descrit par le costé BC.

21. Cylindre, est vn solide compris de trois superficies descrites par vn parallelogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme fait vn tour à l'entour d'iceluy costé.



Soit vn parallelogramme rectangle ABCD, & le costé AB demeurant fixe & immobile soit conceu ledict parallelogramme estre meu allentour dudit costé AB, iusques à ce qu'il soit reuenu au lieu où il a commencé de mouuoir: alors sera descrite vne figure solide CDEF contenue soubs trois superficies, c'est à sçauoir deux planes, & circulaires descrites par les costez AD, BC, & l'autre courbe & conuexe descrite par le costé DC: laquelle figure CDEF est appellée Cylindre par Euclide & plusieurs autres Geometres; mais quelques vns l'appellent Colomne ronde.

22. L'axe du Cylindre, est icelle ligne mobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

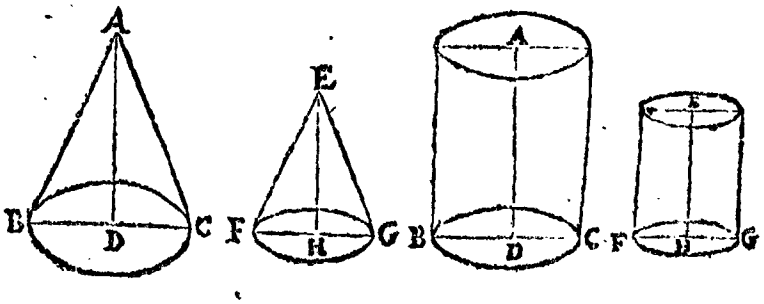
Comme en la figure precedente la ligne droicte AB qui est demeuree immobile est dicte Axe du Cylindre CDEF.

23. Mais les bases du cylindre, sont les cercles descrits par les deux costez opposez, meus allentour.

Ainsi en la figure cy-dessus les cercles DE & CF descrits par les costez opposez AD, BC, seront les bases du Cylindre CDEF.

24. Semblables Cones, & Cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

Soient deux Cones ABC, EFG: Item deux Cylindres; & AD, EH soient leurs Axes; & BC, FG les diametres des bazes. Or si l'axe AD est à l'axe EH, comme le diametre BC est au diametre FG; tant les Cones, que les Cylindres seront semblables entr'eux.



Mais est icy à noter qu'en ceste def. & autres preced. des Cones & des Cylindres, Euclide

ne definit, & n'entend parler cy apres que des Cones & Cylindres droicts, c'eſt à ſçauoir de ceux dont l'axe eſt perpendiculaire & à angles droicts ſur la baze: mais Appolonius Pergeus, & Serenus en traictent vniuerſelement, c'eſt à ſçauoir tant des Ortogones, que des inclinez, ou ſcalenes.

25. Cube eſt vn ſolide compris de ſix quarrez egaux.

26. Tetraedre, eſt vne figure ſolide compriſe de quatre triangles egaux, & equilateraux.

27. Octaedre, eſt vn ſolide compris de huict triangles egaux, & equilateraux.

28. Dodecaedre, eſt vn ſolide compris de douze pentagones egaux, equilateraux, & equiangles.

29. Icoſaedre, eſt vn ſolide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

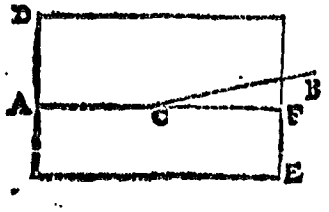
30. Parallelipipede, eſt vn ſolide compris de ſix quadrangles plans, deſquels les oppoſez ſont parallels.

31. Vne figure ſolide, eſt dicte inſcrite en vne figure ſolide, lors que tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou és angles, ou és coſtez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

32. Mais vne figure ſolide, eſt dicte circonſcrite à vne figure ſolide, quand ou les angles, ou les coſtez, ou les plans de la figure circonſcrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

THEOR. 1. PROP. 1.

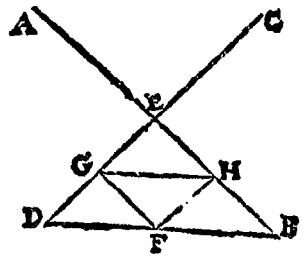
Vne partie d'vne ligne droicte ne peut eſtre ſur vn plan, & l'autre partie en l'air.



Car ſoit, s'il eſt poſſible, vne partie de la ligne droicte AB, ſçauoir AC ſur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air. Donc puis que AC eſt ligne droicte poſée au plan DE, elle peut eſtre prolongee directement ſur iceluy plan, lequel prolongement ſoit CF, qui ſera autre que CB, icelle ayant eſté poſee en l'air, & hors dudit plan DE: Et partant les deux lignes droictes ACB, ACF auront vn commun ſegment AC: Ce qui ne peut eſtre par la 10. comm. ſent. Parquoy vne partie d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, elles ſeront ſur vn meſme plan: & tout triangle eſt en vn meſme plan.



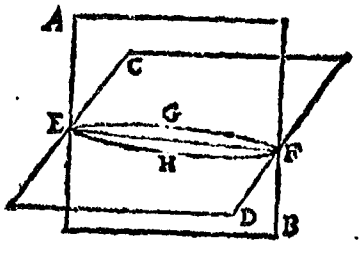
Soient deux lignes droictes AB & CD ſe coupans l'vne l'autre au poinct E; & en EB, ED ſoient pris quelconques poincts B & D, & ſoit tiree la ligne droicte BD, afin de faire le triangle EBD. Ie dis que les deux lignes droictes AB, CD, ſont conſtituees en vn ſeul & meſme plan: Item, que le triangle EBD eſt pareillement en vn meſme plan.

Car ſi quelque partie d'iceluy triangle EBD, comme FBEG eſtoit en vn plan, & la partie reſtante FDG en vn autre plan, auſſi BF, EG ſeroient en vn plan, & les parties reſtantes FD, GD, en vn autre plan, c'eſt à dire en l'air, contre la prec. prop. Par meſmes raiſons DEHF partie du meſme triangle BED, ne peut pas eſtre en vn plan, & l'autre partie BHF en vn autre plan: Ny auſſi la partie DGHB ne peut pas eſtre en vn autre plan que la partie reſtante GHE: car il arriueroit touſiours la meſme abſurdité que deſſus, ſçauoir eſt que partie d'vne ligne droicte ſeroit en vn plan, & l'autre partie en l'air contre ce qui a eſté demonſtré à la prec. pr. Partant tout le triangle EBD eſt en vn ſeul & meſme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, ſont en vn meſme plan, il s'enſuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD, ſont auſſi en vn meſme plan; ſçauoir eſt en celuy auquel nous auons demonſtré eſtre le triangle EBD. Parquoy ſi deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR 3. PROP. III.

Si deux plans ſe coupent l'vn l'autre, leur commune ſection ſera vne ligne droicte.

Soient deux plans ſe coupans l'vn l'autre AB & CD, & leur commune ſection, ſoit la ligne EF. Ie dis que icelle commune ſection EF eſt vne ligne droicte.



Car ſi elle n'eſt telle, des poincts extremes E & F, qui ſont communs à tous les deux plans on pourra tirer ſur chacun d'iceux plans vne ligne droicte qui ſera autre qu'icelle commune ſection EF: ſoit donc menee au plan AB vne ligne droicte EGF, & au plan CD la ligne droicte EHF. Donc puiſque ces deux lignes droictes EGF, EHF ont meſmes termes E & F, elles encloront vn eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la commune ſection EF ſera ligne droicte. Parquoy ſi deux plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

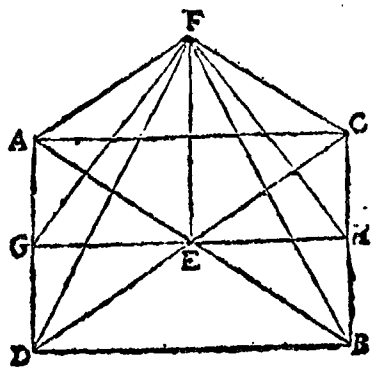
THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune ſection on eſleue perpendiculairement vne au-

tre ligne droicte, elle ſera auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le plan d'icelles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, ſe coupans l'vne l'autre au poinct E, & d'iceluy poinct de ſection E, ſoit eſleuee EF perpendiculaire à chacune d'icelles AB, CD: ie dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à leur plan.

Car ſoient poſees egales les lignes droictes AE, EB, & CE, ED; puis ſoient tirees les lignes droictes AD, BC; & par le poinct E ſoit menee quelconque ligne droicte GH couppant les lignes AD, BC, és poincts G & H: item du poinct en l'air F ſoient tirees les lignes droictes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les coſtez EA, ED du triangle AED, ſont egaux aux coſtez EB, EC du triangle BEC, chacun au ſien, & les angles AED, BEC contenus par iceux coſtez auſſi egaux par la 15. pr. 1. les baſes AD, BC ſeront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH ſont egaux par la 15. p. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE ſeront egaux aux deux angles BEH, EBH, du triangle BHE, & le coſté AE eſt egal au coſté BE: donc par la 26. prop. 1. les deux coſtez AG, GE, ſeront egaux aux deux coſtez BH, HE. Et puis que les deux coſtez FE, EA du triangle FEA ſont egaux aux coſtez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, ſçauoir droicts par l'hypotheſe, par la 4. prop. 1. les bazes FA, FB ſeront egales. Par meſme raiſon ſeront auſſi egales les lignes FD, FC. Dauantage, veu que les coſtez FA, AD du triangle FAD, ſont egaux aux coſtez FB, BC du triang. FBC, & la baſe FC egale à la baſe FD, par la 8. pr. 1. les angles FAD, FBC ſeront auſſi egaux: Parquoy les coſtez FA, AG du triangle FAG, eſtans egaux aux coſtez FB, BH, du triangle FBH, les baſes FG, FH, ſeront pareillement egales par la 4. prop. 1. Et finalement, puis que les coſtez FE, EG, du triangle FEG, ſont egaux aux coſtez EF, EH du triangle FEH, & les baſes FG, FH auſſi egales, les angles FEG, FEH ſeront pareillement egaux par la 8. pr. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE ſera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & conſtituee au meſme plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 11.



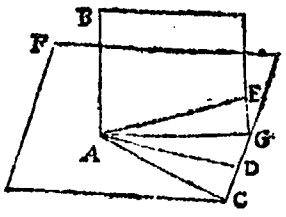
On pourra ſemblablement mener tant de lignes droictes qu'on voudra ſur le meſme plan, leſquelles rencontrant la perpendiculaire FE en E, y ſeront angles droicts, par les meſmes raiſons que deſſus: & par la 2. def. 11. icelle FE ſera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes ſeront en vn meſme plan.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE,

AE, au poinct de leur rencontre A. Ie dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, ſont ſur vn meſme plan.

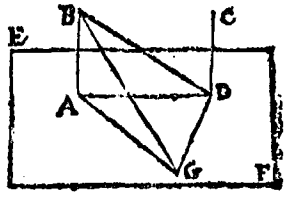


Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles ſoient ſont en vn meſme plan par la 2. prop. 11. ſoient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'eſt point ſur le meſme plan FC, mais qu'elle eſt eſleuee en l'air, elle pourra eſtre au meſme plan que AB par la 2. p. 11. & ſoient toutes deux au plan BE. Ainſi FC, & BE ſont deux plans differens, leſquels ſe touchans au poinct A, ne ſont pas parallels, partant eſtans continuez tant qu'il ſera de beſoin ils ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte par la 3. p. 11. ſoit la ligne AG, laquelle par ce moyen ſera au meſme plan que AC; & partant par la 4. d. 11. BA, & GA ſe rencontreront en angles droicts: mais par l'hypotheſe AB & AE ſe rencontrent auſſi en angles droicts: par ainſi les angles BAE, BAG eſtans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, ſeroient egaux, la partie au tout: ce qui eſt impoſſible: Donc AE n'eſtoit pas eſleuee en l'air, ains eſtoit au meſme plan que AC & AD. Parquoy ſi vne ligne droicte rencontre en vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes ſont eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan, elles ſeront paralleles.

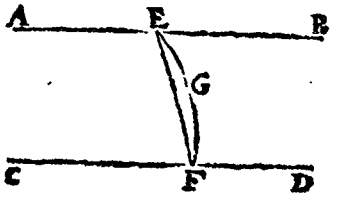
Soient deux lignes droictes AB, CD eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan EF, & aux poincts A & D. Ie dis qu'icelles AB, CD, ſont paralleles entr'elles.



Car des ſuſdits poincts A & D du plan EF, ſoit menee la ligne droicte AD, & du poinct D la ligne droicte DG perpendiculaire à icelle AD par la 11. prop. 1. puis ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux coſtez AB, DG egaux, & AD commun, & l'angle BAD egal à l'angle GDA (car ceſtuy-là eſt droict par la 3. def. 11. & celuy-cy eſt auſſi droict par la conſtruction) par la 4. pr. 1. la baſe BD ſera egale à la baſe AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux coſtez AB, AG egaux aux deux coſtez DG, BD, chacun au ſien, & la baſe BG commune, par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG ſeront egaux. Mais l'angle BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict: & partant la ligne DG eſt perpendiculaire à BD: Mais elle eſt auſſi perpendiculaire à chacune d'icelles AD, CD par la 3. def. 11. Parquoy GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. pr. 11. icelles trois lignes ſeront en vn meſme plan, c'eſt à dire que CD ſera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. pr. 11. les trois lignes AB, BD, AD qui conſtituent le triangle ABD ſont en vn meſme plan: partant AB & CD ſeront auſſi en vn meſme plan. Mais par la 3. def. 11. elles ſont les deux angles BAD, CDA droicts: Donc par la 28. pr. 1. icelles lignes AB, DC ſont paralleles entr'elles. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont eſleuees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes ſont paralleles, & de l'vne à l'autre on mene vne ligne droicte, elle ſera au meſme plan des lignes paralleles.



Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'vne à l'autre ſoit menee la ligne droicte EF. Ie dis qu'icelle ligne EF eſt au meſme plan des lignes paralleles AB & CD.

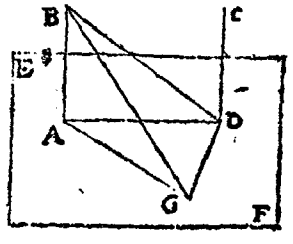
Car ſi elle n'eſt au meſme plan, ains en vn autre: que celuy-cy couppe ceſtuy-là és poincts E & F, & la commune ſection d'iceux plans ſoit EGF, laquelle ſera ligne droicte par la 3. pr 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans meſmes termes E & F, enfermeront vn eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte EF n'eſt pas en vn autre plan que celuy auquel ſont les paralleles AB, CD. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte meſme propoſition eſt auſſi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne ſoient paralleles, pourveu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, deſquelles l'vne ſoit à angles droicts à quelque plan: auſſi l'autre ſera à angles droicts ſur le meſme plan.

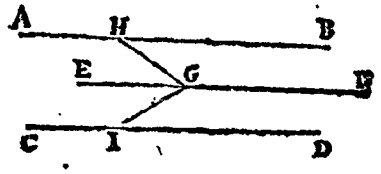


Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'vne d'icelles AB ſoit éleuée perpendiculairement ſur le plan EF. Ie dis que l'autre CD eſt auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le meſme plan EF. Car eſtant menee au plan EF la ligne droicte AD, l'angle BAD ſera droict par la 3. d. 11. Mais les deux lignes AB, CD eſtans paralleles, les deux angles BAD, CDA ſont egaux à deux droicts par la 29. pr. 1. donc l'angle CDA ſera droict. Maintenant au meſme plan EF ſoit menee DG perpendiculaire à AD, & ayant poſé icelle DG egale à AB; ſoient menees les lignes AG, BG, BD. D'autant que les coſtez BA, AD du triangle ABD ſont egaux aux coſtez GD, DA du triangle ADG, chacun au ſien, & les angles BAD, ADG contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, eſtans droicts; les bazes BD, AG ſeront egales par la 4. prop. 1. Item, les coſtez BA, AG du triangle GBA eſtans egaux aux coſtez GD, DB du triangle BDG, & la baze BG commune à tous les deux triangles; les angles BDG, BAG contenus deſdicts coſtez ſeront egaux par la 8 prop. 1. Mais BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict. Parquoy GD ſera perpendiculaire à chacune d'icelles AD, BD, leſquelles faiſant angle à D s'y entrecouperont eſtans prolongees: & par la 4. prop. 11. icelle GD ſera eſleuee perpendiculairement au plan mené par les lignes AD & BD: mais par la preced. prop. icelles deux lignes BD & AD ſont au meſme plan des paralleles AB & CD: donc GD eſt perpendicu-

laire sur le plan où est la ligne CD: partant l'angle CDG sera droict. Mais nous auons demonstré que l'angle ADC est aussi droict: donc par la 4. prop. 11. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Parquoy s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont en vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.

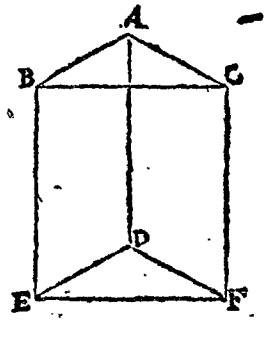


Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Ie dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque poinct G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçauoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G; elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles; & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI: aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. Par mesme raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI: & partant par la 6. p. 11. AB, CD estans perpendiculaires à vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droictes s'entretouchans, sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.



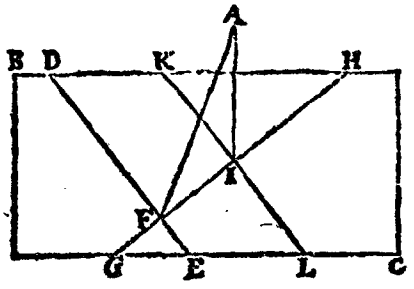
Soient deux lignes droictes AB & AC s'entretouchans en A, lesquelles soient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF se touchans l'vne l'autre en D: & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF, comprins par icelles sont egaux.

Car estans prises egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF, soient menees les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Donc AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par mesme raison AD & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la prec. prop. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles: & par la 33. p. 1. BC & EF seront pareillement egales & paralleles entr'elles. Parquoy les deux triangles ABC & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. prop. 1. les angles BAC, EDF, seront egaux. Si donc deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'vn poinct donné en l'air, mener vne ligne droicte perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy poinct.

Soit le poinct A en l'air, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy poinct A. Au plan BC, soit mence comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A soit tiree la perpendiculaire AF par la 12. pr. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. p. 1. Et à icelle GH soit tiree de A la perpendiculaire AI par la 12. prop. 1. Ie dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.

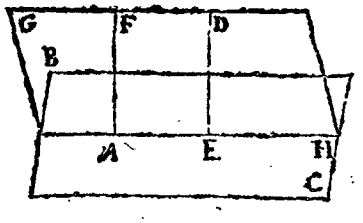


Car au plan BC, soit tiree par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. Donc puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH, par la construction; & partant aussi perpendiculaire au plan tiré par icelles FA, FH par la 4. prop. 11. pareillement KI sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en vn mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droict par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendic. au plan où sont les lignes KI, IF, sçauoir au plan BC. Nous auons donc d'vn poinct donné en l'air abaissé vne perpendiculaire au plan d'au-dessous d'iceluy poinct: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le poinct donné en iceluy soit A: il faut d'iceluy poinct A esleuer vne ligne perpendiculaire audit plan BC.

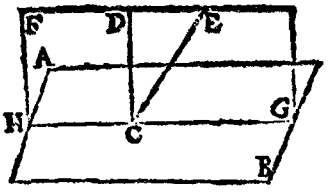


Soit pris en l'air comme on voudra le poinct D, & d'iceluy soit menee sur le plan BC, la perpendiculaire DE par la preced. prop. laquelle rencontrant le plan BC au poinct A, on aura faict ce qui estoit requis: Mais si elle ne rencontre iceluy poinct A, ains quelque autre poinct E, dudict poinct A soit menee AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. Ie dis qu'icelle AF sera perpendiculaire au plan BC. Car DE, AF estans paralleles, & DE perpendic. au plan BC par la construction, par la 8. pr. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuee sur le mesme plan BC. Parquoy à vn plan donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 11. PROP. XIII.

D'vn plan donné, & d'vn mesme poinct d'iceluy, on ne leuera pas

en l'air d'vn meſme coſté, deux lignes droictes perpendiculaires.

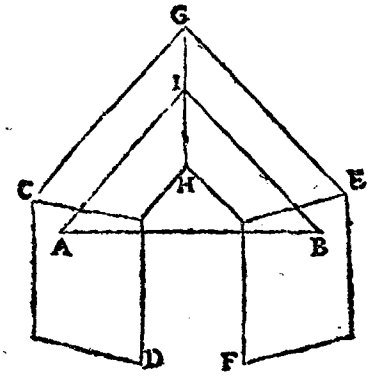


Soit donné le plan AB, & le poinct en iceluy C: ie dis que du poinct C, on n'eſleuera pas en l'air deux lignes droictes perpendiculaires ſur iceluy plan, & de meſme coſté.

Car, s'il eſt poſſible, du poinct C, ſoient eſleuees en l'air les deux perpendiculaires CD & CE: par la 2. p. 11. elles ſeront en vn meſme plan, & ſoit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB au poinct C, n'eſt point parallele à iceluy AB: partant iceux plans eſtans continuez ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte, laquelle ſoit GCH. Et parce que les lignes CD & CE ſont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG ſeront droicts, & partant egaux: la partie au tout: ce qui eſt impoſſible. Il ne ſe peut donc eſleuer du poinct C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de meſme coſté. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droicte eſt perpendiculaire à deux plans, iceux plans ſeront parallels.



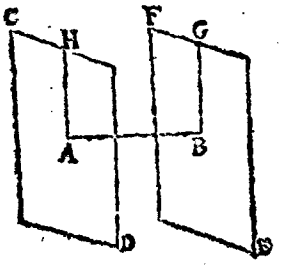
Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à chacun des plans CD, & EF: ie dis qu'iceux plans ſont parallels entr'eux.

Car s'ils ne ſont parallels, eſtans continuez il ſe rencontreront: que ce ſoit donc de la part de C, E, & que GH ſoit la ligne de leur commune ſection, en laquelle ſoit pris comme on voudra le poinct I, & d'iceluy ſoient menees les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB eſt poſee perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, ſeront droicts, contre la 17. pr. 1. donc les deux plans CD, EF prolongez ne ſe rencontreront point; & partant ils ſont parallels. Si donc vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre la conuerſe de ceſte prop. qui eſt telle.

S'il y a deux plans parallels, la ligne droicte qui eſt perpendiculaire à l'vn d'iceux, ſera auſſi perpendiculaire à l'autre.



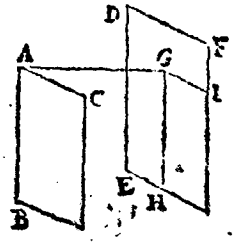
Soient deux plans parallels, CD, EF, & la ligne droicte AB ſoit perpendiculaire au plan CD: Ie dis qu'icelle AB eſt auſſi perpendiculaire au plan EF: car ſi elle n'eſt perpendiculaire ſoit tiree audit plan EF, la ligne droicte BG de la part que AB fait l'angle moindre qu'vn droict; & par AB, BG ſoit mené vn autre plan, duquel & du plan CD la commune ſection ſoit la ligne droicte AH. Et d'autant que l'angle ABG eſt aigu, les plans eſtans prolongez, les lignes droictes BG, AH ſe rencontreront, & partant auſſi les plans, leſquels ont eſté poſez parallels: ce qui eſt abſurde. Donc AB eſt perpendiculaire au plan EF. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchans ſont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'eſtans toutesfois en vn meſme plan: les plans paſſans par icelles, ſeront auſſi parallels.

Soient deux lignes droictes AB & AC, s'entretouchans en A, paralleles à deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne ſoient en vn meſme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par icelles AB, AC eſt parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

Car par la 11. prop. 11. de A ſoit tiree ſur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31 pr. 1. audit plan EF, ſoient tirees de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH ſont paralleles à DE, icelles AB, GH ſeront paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. & partant par la 29. pr. 1. les angles BAG, AGH ſont egaux à deux droicts. Mais AGH eſt droict, par la 3. def. 11. Donc BAG ſera auſſi droict. Par meſme raiſon on prouuera l'angle CAG eſtre droict. Parquoy, veu que la ligne GA eſt perpendiculaire aux deux AB, AC; par la 4. pr. 11. elle ſera auſſi perpendiculaire à leur plan BC: Mais par la conſtruction elle l'eſt auſſi au plan EF. Donc par la prec. prop. les plans BC, EF ſeront parallels. Parquoy ſi deux lignes droictes s'entretouchans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

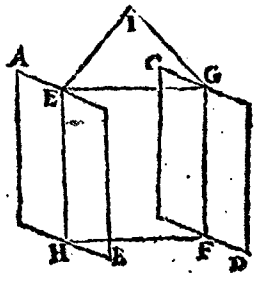


THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels ſont couppez par vn autre plan; les lignes de communes ſections ſeront paralleles.

Soient deux plans parallels AB & CD, couppez par le plan EF, & les communes ſections d'iceux ſoient EH, GF. Ie dis qu'icelles HE & FG ſont paralleles entr'elles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans prolongees elles ſe rencontreront au plan couppant EF: Que ce ſoit donc au poinct I. Or d'autant que toute la ligne droicte HEI eſt en vn meſme plan, ſçauoir en AB prolongé; & auſſi toute la ligne droicte FGI en vn meſme plan, ſçauoir en CD prolongé; les plans AB, CD eſtans prolongez ſe rencontreront auſſi en I: ce qui eſt abſurde, ayans eſté poſez parallels. Donc HE, FG eſtans continuées ne ſe rencontrent point; & partant ſont paralleles entr'elles. Parquoy, Si deux plans parallels ſont couppez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

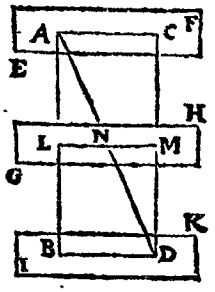


THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes ſont couppees par des plans parallels, elles ſeront couppees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, trauerſans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes ſont couppees par iceux plans és poincts A, L, B, C, M, D. Ie dis qu'elles ſont couppees proportionellement, c'eſt à dire que les ſegmens d'icelles compris entre les ſuſdicts plans ſont proportionaux, ſçauoir que comme AL eſt à LB, ainſi CM à MD.

Car és plans EF, IK, ſoient menees les lignes droictes AC, BD: & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel ſoient menees les lignes LN, NM, au meſme plan GH: & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. ſera en vn meſme plan: ſemblablement le triangle ADC auſſi en vn meſme plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK ſont couppez par le plan du triangle ABD: leurs communes ſections LN, BD ſeront paralleles par la prec. prop. Par meſme raiſon MN, AC, ſeront auſſi paralleles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL ſera à LB, ainſi AN ſera à ND: Item comme AN à ND, ainſi CM à MD: Et partant par la 11: prop. 5. comme AL ſera à LB, ainſi CM ſera à MD. Si donc deux lignes droictes ſont couppees par des plans parallels, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

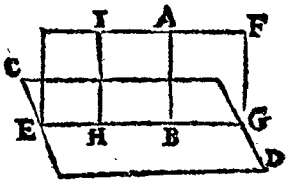


THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte eſt eſleuee perpendiculairement ſur vn plan, auſſi tous les plans procedans d'icelle, ſeront perpendiculaires au meſme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire ſur quelque plan CD: Ie dis que tous les plans menez de la ligne AB, vers quelle part on voudra, ſeront eſleuez perpendiculairement ſur le meſme plan CD.

Car par AB ſoit tiré le plan EF, couppant le plan CD par la ligne droicte EG: & en icelle ſoit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF ſoit menee HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH ſont paralleles, & AB a eſté poſee perpendiculaire au plan CD; auſſi IH ſera perpendiculaire au meſme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant auſſi perpendiculaire à la commune ſection EG, par la 3. d. 11. Par meſme diſcours toutes autres lignes qui ſeront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, ſeront perpendiculaires au plan CD: & par conſequent à la ligne EG. Parquoy par la 4. def. 11. le plan EF ſera perpendiculaire au plan CD. Par meſme raiſon ſeront demonſtrez tous autres plans tirez par la ligne AB, eſtre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte eſt eſleuee perpendiculairement ſur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



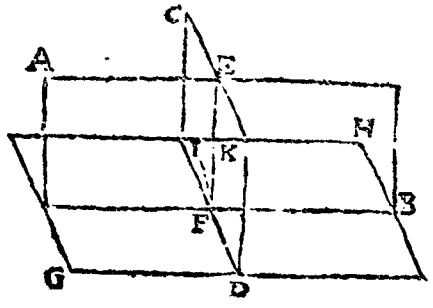
THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans eſleuez perpendiculairement ſur vn autre plan

s'entrecoupent, leur ligne de commune ſection eſt perpendiculaire ſur iceluy plan.

Soient les deux plans ſe couppans l'vn l'autre AB & CD, eſleuez perpendiculairement ſur le plan GH, & ſoit la ligne de leur commune ſection EF : ie dis qu'icelle EF eſt perpendiculaire au meſme plan GH.

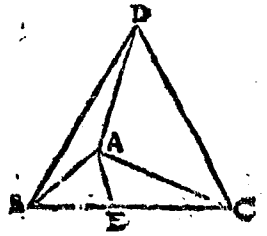
Car, ou EF eſt perpendic. à BF, DF, communes ſections des plans AB, CD auec ledit plan GH, ou non : Que ſi elle leur eſt perpend. par la 4. p. 11. elle le ſera auſſi audit plan GH, mené par icelles BF, DF. Mais ſi on dit que EF eſt ſeulement perpend. à l'vne ou l'autre deſdites ſections BF, DF; qu'elle le ſoit à BF. Donc puis que le plan AB eſt perpendic. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne EF (qui au plan AB eſt menee perpend. à BF, commune ſection d'iceluy auec le plan GH) ſera perpendic. au plan GH. Lon conclura le meſme ſi ladite EF eſt concedee perpendiculaire à la ſection DF : car alors icelle EF ſera perpend. au plan GH par ladite 4. def. puis qu'elle eſt poſee perpendicul. à DF commune ſection du plan CD auec le plan GH, & menee audit plan CD qui eſt perpendic. à iceluy plan GH. Finalement, ſi on croit EF n'eſtre perpendic. à l'vne ny l'autre d'icelles communes ſections BF, DF, du poinct F ſoit menee au plan AB la ligne FI perpendic. à BF par la 11. pr. 1. & au plan CD, la ligne FK perpendiculaire à la ſection DF. Donc puis que le plan AB eſt perpend. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne FI (laquelle eſt perpendic. à DF commune ſection d'iceux plans AB, GH) ſera auſſi perpendic. à iceluy plan GH. Par meſme raiſon FK ſera encore perpend. au meſme plan GH. Par ainſi FI, FK ſeront d'vn meſme poinct F donné au plan GH eſleuees perpendiculairement ſur iceluy plan : Ce qui eſt contre la 13. pr. 11. Parquoy EF ſera perpendiculaire au plan GH. Si donc deux plans eſleuez perpendicul. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, deux d'iceux pris comme on voudra, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux d'iceux leſquels on voudra, comme BAD & DAC ſont plus grands enſemble que le troiſieſme BAC.



Car ſi on dit que BAC eſt plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, ſoit fait l'angle BAE egal à l'angle DAB par la 23. prop. 1. & la ligne AE egale à la ligne AD : puis au meſme plan ſoit menee par E la ligne droicte BC, coupant les lignes AB, AC, en B & C : & tirees les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux coſtez AB & AD du triangle ABD ſont egaux aux deux coſtez

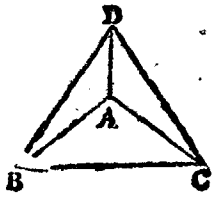
ſtez AB & AE du triangle ABE, chacun au ſien, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux; la baſe DB ſera egale à la baſe BE, par la 4. pr. 1. Item puis que l'on poſe l'angle BAC plus grand que les deux autres BAD, CAD, & que le retranché BAE eſt egal à l'vn d'iceux BAD, le reſte CAE ſera plus grand que l'autre CAD: mais les deux coſtez EA & AC du triangle ACE, ſont egaux aux deux coſtez AD & AC du triangle CAD, & l'angle CAE eſt plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24.p.1. la baſe EC ſera plus grande que la baſe DC: adiouſtant donc les egales EB & DB, les deux CE, EB, c'eſt à dire la toute BC, ſera touſiours plus grande que les deux CD, DB: & partant au triangle ABC le coſté BC eſt plus grand que les deux autres: ce qui eſt contre la 20. pr. 1. Donc l'angle BAC n'eſt point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que ſi on dit qu'il eſt egal, il s'enſuiura par le meſme diſcours que BC eſt egal à BD & CD: ce qui contreuient touſiours à la 20. pr. 1. Il eſt donc plus petit que les deux autres. Parquoy ſi vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle ſolide, ſont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans ſont plus petits que quatre angles droicts.

Car eſtans tirees les trois lignes droictes BC, CD, BD, ſeront conſtituez trois angles ſolides B, C, D, deſquels chacun eſt contenu ſous trois angles plans, ſçauoir B, ſous ABC, ABD, CBD: & C ſous ACB, ACD, BCD: & D ſous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. pr. 11. de chacun d'iceux angles ſolides, deux angles plans leſquels on voudra ſont plus grands que le troiſieſme, les deux angles ABC, ABD, ſeront plus grands que le troiſieſme DBC; & les deux ACB, ACD, ſeront plus grands que le troiſieſme BCD: Item les deux CDA, & BDA, ſont plus grands que BDC: & partant les ſix angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA enſemble, ſeront plus grands que les trois de la baſe triangulaire BCD, c'eſt à dire que deux droicts: (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux ſix angles auec les trois qui font l'angle ſolide A, vallent ſix droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce ſont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) ſi on oſte ces ſix-là, qui ſont plus grands que deux droicts; les trois qui font l'angle ſolide A, demeureront plus petits que quatre droicts. Parquoy tous les angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



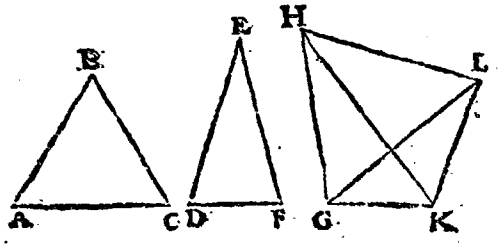
THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſoient plus grands que l'autre, & les lignes droictes compre-

nant iceux, egales; il ſe peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, ſoit conſtitué vn triangle.

Soient trois angles plans ABC, DEF, GHK contenus de lignes droictes egales BA, BC, ED, EF, HG & HK: deux deſquels pris comme on voudra ſont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droictes AC, DF, GK, qui conioignent icelles lignes egales, peut eſtre conſtitué vn triangle, c'eſt à dire que deux d'icelles lignes AC, DF, GK de quelque façon qu'elles ſoient priſes, ſont plus grandes que la troiſieſme.

Car premierement ſi les trois angles B, E, H ſont egaux, puis que les lignes qui les contiennent ſont egales, par la 4. pr. 1. les baſes AC; DF, GK ſeront egales: & partant deux d'icelles leſquelles on voudra ſeront enſemble plus grandes que la troiſieſme. Mais ſi leſdits angles propoſez ſont egaux, puis que deux d'iceux pris comme on voudra ſont plus grands que le troiſieſme, ſi on en met deux enſemble tels qu'on voudra, comme ſi à GHK on adiouſte KHL egal à E par la 23. pr. 1. & ayant fait HL egale à EF on tire LK & GL: l'angle total GHL ſera plus grand que le troiſieſme ABC, & la baſe GL par la 24. pr. 1. ſera plus grande que la baſe AC: (car les deux coſtez ſont egaux aux deux coſtez) & à plus forte raiſon les deux GK, KL, qui par la 20. pr. 1. ſont plus grandes qu'icelle GL, ſeront plus grandes que la troiſieſme AC. Et par meſme diſcours on monſtrera touſiours que deux d'icelles baſes AC, DF, GK, priſes comme on voudra, ſont plus grandes que la troiſieſme: Partant d'icelles on pourra faire vn triangle par la 22. prop. 1. S'il y-a donc trois angles plans, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

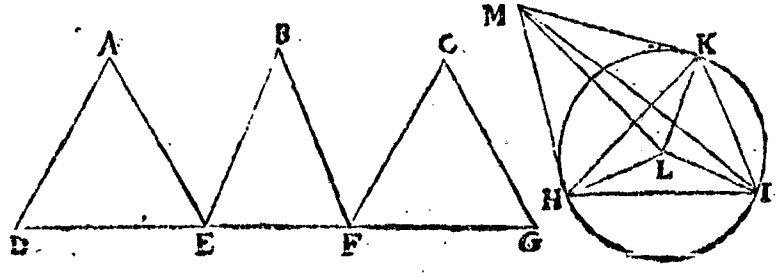


PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle ſolide de trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſont plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles ſoient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que quatre droicts, & deſquels deux quels qu'ils ſoient ſont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle ſolide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.

Soient poſees egales les ſix lignes droictes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles propoſez, leſquels ſoient ſouſtenus des trois baſes DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG,



ſoit fait le triangle HIK, ayant les trois coſtez egaux à icelles baſes DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel ſoit circonſcrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L ſoient menees les trois lignes LH, LI, LK: & apres auoir par la 12. pr. 11. eſleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. ſoit icelle retranchee en ſorte, que ſon quarré auec le quarré de LH, ſoit égal au quarré de l'vn des coſtez d'iceux angles plans: puis ſoient menees les lignes HM, IM, KM: Ie dis que HIMK eſt vn angle ſolide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK eſtans egales, & LM perpendiculaire à icelles: les trois lignes HM, IM, KM, ſeront egales, d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des coſtez des angles plans donnez, elles ſeront egales aux coſtez d'iceux angles plans: puis les trois baſes HI, IK, KH eſtans egales aux baſes des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faiſant l'angle ſolide au poinct M, ſeront egaux aux trois donnez A, B, C. Nous auons donc fait vn angle ſolide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

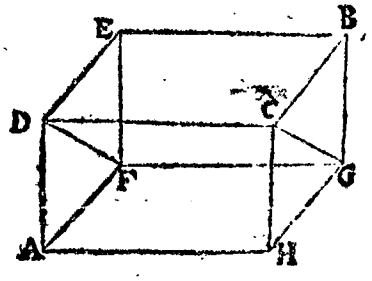
Si quelqu'vn obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas touſiours eſtre retranchée, en ſorte que ſon quarré auec le quarré de LH ſoit egal au quarré de l'vn des coſtez des angles donnez: comme par exemple, ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arriue iamais, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à HL: Car ſi HL & IL eſtoient egaux à AD & AE: & la baſe HI egale à la baſe DE, par la 8. p. 1. (& ainſi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L ſeroient egaux aux trois angles A, B, C, chacun au ſien: ce qui eſt euidemment faux: Car touſiours par hypotheſe les trois angles A, B, C, ſont plus petits que quatre droicts; & par le corol. de la 15. p. 1. les trois au poinct L ſont egaux à quatre droicts.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si vn ſolide eſt compris de plans parallels; les plans oppoſez d'iceluy ſeront parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Soit le ſolide AB compris de ſix plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB: Ie dis que les plans oppoſez ſont parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB ſont parallels, eſtans couppez par les plans AE & HB: les lignes de commune ſection AD, FE ſont paralleles: Item HC & GB, par la 16. prop. 11. par la meſme raiſon les plans AG & DB eſtans parallels, les lignes de commune ſection AF & DE: Item GH & BC ſont paralleles: partant AE & HB ſont parallelogrammes. Par le meſme diſcours AG, DB; AC, FB, ſe prouueront eſtre parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes oppoſites ſont ſemblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, ſont paralleles aux lignes HG, HC, & non en meſmes plans, mais en oppoſez: par la 10. pr. 11. les angles DAF, CHG, ſeront egaux: par meſme raiſon les autres angles du parallelogramme AE, ſeront egaux aux autres angles du



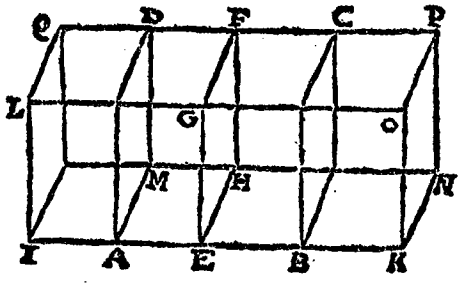
parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC le costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogramme AG. comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux: & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG: veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG. du triangle HCG, & les angles DAF, CHG, aussi egaux: par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux: lesquels estans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogrammes seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrera les autres parallelogrammes opposez AG, DB: AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc vn solide est compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan parallel aux plans oppofez, les solides couppez seront l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soit le solide parallelipipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux oppofez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis qu'iceux solides seront l'vn à l'autre, comme la base AH à la base BH.

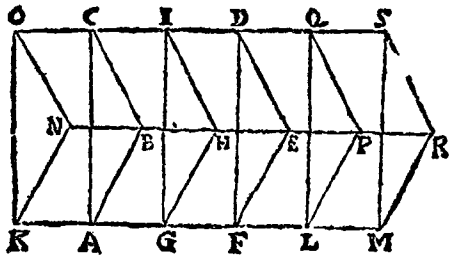
Car la ligne AB estant prolongee de part & d'autre, soient faites egales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallelogrammes IM, & BN: Item les solides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelogrammes IM, AH seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans oppofez LD, GD seront semblables & egaux: Item AL, AG semblables & egaux à MQ, MF, plans oppofez, & ainsi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le solide AQ est egal au solide AF. Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB: partant le solide IF est autant multiplice du solide AF, comme la base IH est multiplice de la base AH: Item le solide EP est autant multiplice du solide EC, comme la base EN est multiplice de la base BH: & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC: desquelles de la premiere & troisiesme, (sçauoir de la base AH & du solide AF) on a pris les equemultiplices HI base, & IF solide: Item de la seconde & quatriesme, (sçauoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prinses: & partant comme la base AH à la base BH,



ainſi le ſolide AF au ſolide EC. Parquoy ſi vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

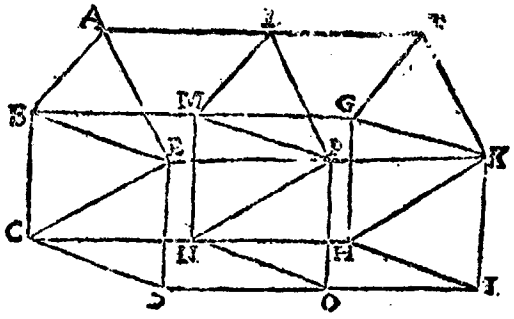
SCHOLIE.

Ceſte propoſ. ſe peut acommoder à tous priſmes: Car ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez: tout ainſi que la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide ſera au ſolide. Car ſoit premierement le priſme ABCDEF, duquel les plans oppoſez ſont les triangles ABC, DEF: & ſoit iceluy couppé par le plan GHI parallel aux plans oppoſez. Ie dis que comme la baſe AI eſt à la baſe FI, ainſi le ſolide ABCIHG eſt au ſolide FEDIHG. Car ſoit imaginé le priſme ABCDEF eſtre prolongé de part & d'autre tant qu'on voudra: & de AF prolongees ſoient priſes AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres, par les poincts G, L, M, ſoient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, ſont couppez par le plan AI: leurs communes ſections AC, GI, ſeront paralleles par la 16. prop. 11. Mais à cauſe que AD eſt parallelog. AG, CI ſeront auſsi paralleles. Donc AI eſt parallelog. Par meſmes raiſons ſeront demonſtrez AH, CH eſtre parallelog. Et pource que les coſtez AC, AB, du triangle ABC, ſont egaux aux coſtez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. prop. 1. AC eſt egal à GI, & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI ſont auſsi egaux: (pource que les lignes AB, AC ſont paralleles aux lignes GH, GI, & en diuers plans) par la 4. prop 1. les triangles ABC, GHI ſont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4. prop. 6. les coſtez d'alentour les angles egaux, ſeront proportionnaux; & partant iceux triangles ſeront ſemblables. Donc le ſolide ABCIHG, contenu des deux plans oppoſez ABC, GHI egaux, & ſemblables, & des parallelog. AI, IB, GB, eſt vn priſme. Par meſme raiſon ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM ſeront priſmes: Et pource que les parallelogrammes AI, KC ſont egaux & ſemblables, comme auſsi AH, KB, & CH, OB; tous les plans du priſme ABCIHG, ſeront egaux & ſemblables à tous les plans du priſme ABCONK. Parquoy par la 10. def. 11, les priſmes ABCIHG, ABCONK ſont egaux. Par meſme raiſon les priſmes GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM ſeront egaux Partant le priſme KNOIHG ſera autant multiple du priſme ABCIHG, que la baſe KI de la baſe AI; & le priſme GHISRM autant multiplice du priſme GHIDEF, que la baſe GS de la baſe GD. Et pource que ſi la baſe KI, (multiplice de la baſe AI premiere grandeur) eſt egale à la baſe GS, (multiplice de la baſe GD 2. grandeur) auſsi le priſme KNOIHG, (multiple du priſme ABCIHG 3. grandeur) eſt egal au priſme GHISRM, (multiple du priſme GHIDEF 4. grandeur:) Mais ſi la baſe KI eſt plus grande que la baſe GS, auſsi le priſme eſt plus grand que le priſme; & ſi moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. def. 5. comme la baſe AI premiere grandeur, ſera à la baſe GD 2. grandeur, ainſi le priſme ABCIHG 3. grandeur ſera au priſme GHIDEF 4. grandeur. En la meſme maniere on demonſtrera que le priſme eſt au priſme, comme la baſe AH eſt à la baſe GE, & comme la baſe CH eſt à la baſe EI. Ce qui eſtoit propoſé.



Soit maintenant le priſme ABCDEFGHIK, duquel les plans oppoſez ſont polygones, c'eſt à ſçauoir pentagones, & ſoit couppé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que comme la baſe CM

eſt à la baſe NG, ainſi eſt le ſolide ABCDELMNOP, au ſolide LMNOPFGHIK. Car ſi les plans oppoſez parallels ſont reſouds en triangles; auſſi le priſme ſera reſolud en autant de priſmes qu'il y aura de triangles és plans oppoſez. Parquoy comme la baſe BP ſera à la baſe MK, ainſi le priſme ABEPML ſera au priſme LMPKGF, par les choſes demonſtrees cy deſſus. En la meſme maniere, comme la baſe CP eſt à la baſe NK, ainſi le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH; & le priſme CDEPNO au priſme NOPKHI. Mais par la 1. prop. 6. comme BP eſt à MK: & CP à NK, ainſi eſt la ligne EP à la ligne PK, c'eſt à dire comme CN eſt à NH, & comme CN eſt à NH, ainſi eſt CM à NG. Donc les priſmes ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG, & partant ont la meſme entr'eux. Mais par la 12. prop. 5. comme vn ſeul eſt à vn ſeul, ainſi ſont les trois aux trois. Donc comme le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH, c'eſt à dire comme la baſe CM à la baſe NG, ainſi le priſme ABCDELMNOP compoſé des trois ſera au priſme LMNOPFGHIK compoſé des trois. Ce qui eſtoit propoſé. Il y aura meſme demonſtration en quelconque autre priſme.



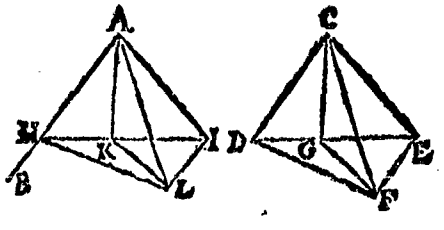
COROLLAIRE.

De cecy reſulte que ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Car il a eſté demonſtré au premier priſme que le triangle GHI eſt egal, & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a meſme demonſtration en tous. Le meſme ſe doit entendre des parallelipipedes.

PROBL. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, conſtituer vn angle ſolide egal à vn angle ſolide donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, & le poinct donné en icelle A; & il faut conſtruire ſur icelle AB, & au poinct A, vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.

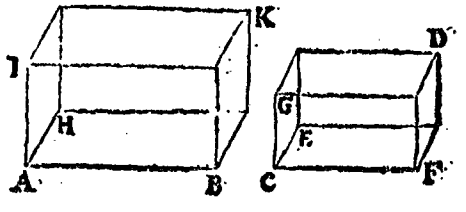


Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. prop. 11. & ſoient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG: en apres ſoit priſe AH egale à CD: & par la 23. pr. 1. ſoit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE; & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, ſoit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG, & la ligne AK egale à la ligne CG: puis par la 12. prop. 11. de K ſoit tiree au plan auquel ſont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL: laquelle ſoit poſee egale à FG, & ſoit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle ſolide A, conteneu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, eſt egal à l'angle ſolide donné C.

Car eſtans menees les lignes HK, KI, IL, LH: veu que les coſtez AH, AK du triangle AHK, ſont egaux aux coſtez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la conſtruction: les baſes HK, DG ſeront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, eſtans oſtez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE: leſquels par la conſtruction ſont compris de lignes egales: par la 4. prop. 1. les baſes KI, GE, ſeront auſſi egales. Les coſtez KH, KL ſont auſſi egaux aux coſtez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts: donc par la meſme 4. prop. 1. les baſes HL, DF, ſeront egales. Parquoy puis que les coſtez AH, AL du triangle AHL, ſont auſſi egaux aux coſtez CD, CF du triangle CDF: (car les coſtez AK, KL, ſont egaux aux coſtez CG, GF, par la conſtruction, & comprenent angles droicts: partant les baſes AL, CF ſont egales par la 4. prop. 1.) les angles HAL, DCF ſeront pareillement egaux par la 8. p. 1. Finalement, pource que les coſtez KI, KL ſont egaux aux coſtez GE, GF: & les angles IKL, EGF droicts; par la 4. pr. 1. les baſes IL, EF ſont egales: partant puis que les coſtez AI, AL du triangle AIL ſont egaux aux coſtez CE, CF du triangle CEF, par la conſtruction, les angles IAL, ECF ſeront auſſi egaux par la 8. p. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, compoſans l'angle ſolide A, ſont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, compoſans l'angle ſolide C; & partant l'angle ſolide A eſt egal à l'angle ſolide C. Parquoy nous auons conſtitué ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipipede donné.



Soit la ligne donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipipede donné CD.

Sur la ligne AB, & au poinct en icelle A, ſoit fait par la prec. vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C, lequel ſoit compris des trois angles plans HAI, IAL, LAH: tellement que HAI ſoit egal à ECG; IAL à FCG; & LAH à FCE: puis par la 12. prop. 6. ſoit fait comme CF eſt à CG, ainſi AB à AI, & comme CG à CE, ainſi AI à AH: & en raiſon egale, AB ſera à AH comme CF à CE. Et ſoient paracheuez les parallelogr. BH, HL, BI, BK, KI, KH; qui accompliront le parallelipipede AK. Ie dis qu'iceluy parallelipipede AK eſt ſemblable & ſemblablement poſé au donné CD.

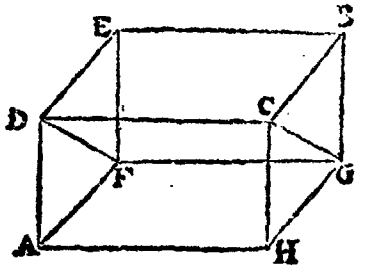
Car d'autant que AB eſt à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI eſt ſemblable au parallelogramme FG: par la meſme raiſon le parallelog. BH ſera ſemblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelogrammes du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement poſez, à trois parallelog. du ſolide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois oppoſez ſont egaux, & ſemblables. Parquoy les ſix plans du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement

poſez aux ſix plans du ſolide CD: & partant par la 9. defin. les ſolides AK & CD ſeront ſemblables & ſemblablement poſez. Nous auons donc ſur vne ligne droicte donnee, deſcrit vn parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan paſſant par les diagonales des plans oppoſez, il ſera couppé en deux egalement.

Soit le ſolide parallelipipede AB couppé par le plan CDFG, par les diagonales des plans oppoſez DF, CG. Ie dis qu'il eſt couppé en deux egalement.

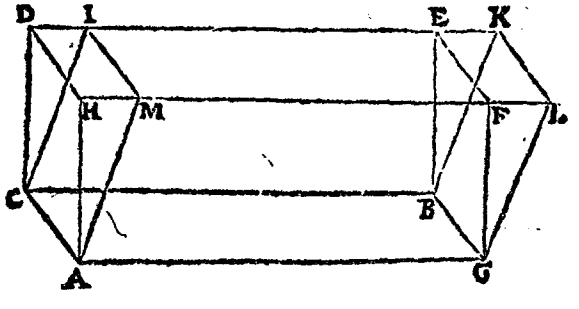


Car puis que les plans AE, HB, ſont parallelogr. egaux & ſemblables par la 34. prop 1. les triangles ADF, EFD, CGH & GCB ſont egaux entr'eux: mais les coſtez qui contiennent les angles egaux DAF, DEF, CHG, & CBG ſont proportionnaux: donc iceux triangles ſeront auſſi ſemblables par la 6. pr. 6. & le plan AG eſt egal & ſemblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ce ſont plans oppoſez.) Partant les deux priſmes ADCHGF, FEBGCD, ſont compris de parallelogrammes, & de triangles oppoſez ſemblables & egaux, & par la 10. def. iceux priſmes ſont egaux. Parquoy puis qu'ils compoſent le parallelipipede AB: iceluy ſera couppé en deux egalement par le plan DCGF. Si donc vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les ſolides parallelipipedes ayans meſme baſe, & meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ſont colloquees en meſmes lignes droictes; ſont egaux entr'eux.

Soient conſtituez ſur la baſe AB, & en meſme hauteur, les ſolides parallelipipedes ADEG, AIKG, deſquels les lignes inſiſtantes AH, AM, GF, GL; CD, CI, BE, BK ſont colloquees en meſmes lignes droictes HL, DK. Ie dis que le ſolide ADEG eſt egal au ſolide AIKG. Car d'autant que les parallelogrammes AF, AL conſtituez ſur meſme baſe AG ſont egaux



ent'eux par la 35. p. 1. ſi on en oſte le trapeze commun GM, reſteront egaux les triangles AHM, GFL: Et puis que par la 34. prop. 1. ils ont leurs coſtez egaux, chacun au ſien, ils ſeront equiangles, & partant auſſi ſemblables par la 4. prop. 6. Pour meſmes raiſons les triangles CDI, BEK, ſeront auſſi egaux & ſemblables. Mais par la 24. prop. 11. le parallelog AD eſt egal & ſemblable au parallelog. GE; Item le parallogr. AI au parallelogr. GK. Et par la 36. prop. 1. DM eſt egalà EL;

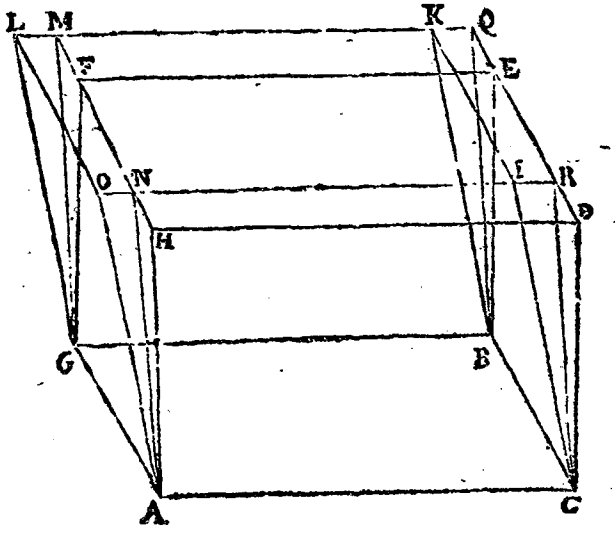
attend u

attendu que leurs baſes HM, FL ſont egales (car HF, ML ſont egales entr'elles, chacune d'icelles eſtant egale à AG; & oſtant MF qui leur eſt commune, reſtent MH, FL egales.) Parquoy les cinq plans du priſme AHMIDC ſont egaux & ſemblables aux cinq plans du priſme GFLKEB: & par la 10. def. 11. leſdits priſmes ſeront egaux: partant ſi on adiouſte à chacun d'iceux priſmes le commun ſolide AMICBEFG, ſeront faits egaux les parallelipipedes ADEG, AIKG. Parquoy les ſolides parallelip. ayans vne meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les ſolides parallelipipedes, conſtituez ſur meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ne ſont colloquees en meſmes lignes droictes; ſont egaux entr'eux.

Sur vne meſme baſe AB, & en meſme hauteur (c'eſt à dire entre meſme plans parallels) ſoient conſtituez les ſolides parallelipipedes CF, CL deſquels les lignes inſiſtentes menees des quatre angles de la baſe AB, ſçauoir AH, AO, GF, GL, CD, CI, BE, BK, ne ſont pas colloquees en meſmes lignes droictes. Ie dis que le ſolide CF eſt egal au ſolide CL.



Car puis que les plans HE, OK oppoſez à la baſe commune AB, ſont en vn meſme plan, à raiſon de la meſme hauteur des parallelipipedes; ſoient prolongees en iceluy plan les lignes HF, DE, iuſques à ce qu'elles rencontrent LK auſſi prolongee en M & Q: ſoit encore prolongee OI, qui rencontre HF & ED en N & R, puis ſoient tirees les lignes droictes AN, GM, BQ, CR. D'autant que les lignes continuees LK, OI ſont paralleles, comme auſſi HF, DE; le quadrilatere NMQR ſera parallelogramme, qui ayant les coſtez oppoſez egaux & parallels, auſſi ANMG, CRQB, ANRC, GMQB, ſeront parallelog. & partant le ſolide CM ſera parallelipipede: & par la prec. prop. il ſera egal au parallelip. CF, puis qu'eſtans conſtituez ſur meſme baſe AB, & de meſme hauteur, les lignes inſiſtantes AH, AN, GF, GM, CD, CR, BE, BQ ſont colloquees en meſmes lignes droictes HM, DQ. Mais pour meſmes raiſons le parallelipip. CM eſt auſſi egal au parallelip. CL, ayans meſme baſe, & les lignes inſiſtantes colloquees en meſmes lignes droictes LQ, OR. Donc le parallelipipede CF ſera egal au parallelip. CL. Parquoy les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On conuertira tant ceſte propoſition que la precedente en ceſte maniere.

Les ſolides parallelipipedes egaux ayans meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtentes ſoient colloquées en meſmes lignes droictes, ou non, ſont de meſme hauteur.

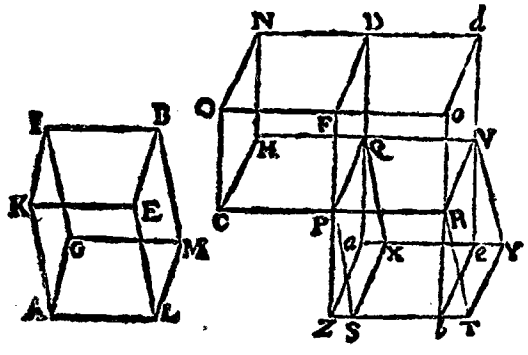
Car ſi l'on dit que l'vn eſt plus haut, ſi d'iceluy on coupe vn parallelipipede de meſme hauteur que l'autre, le coupé & l'autre ſeront egaux, par la 29. ou 30. prop. 11. & puis que ceſt autre eſt poſé egal au tout; le coupé ſera egal au tout. Ce qui eſt abſurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les ſolides parallelipipedes conſtitués ſur baſes egales, & de meſme hauteur, ſont egaux entr'eux.

Soient les ſolides parallelipipedes AB, CD conſtituez ſur baſes egales AE & CF, & de meſme hauteur. Ie dis qu'iceux ſolides ſont egaux entr'eux.

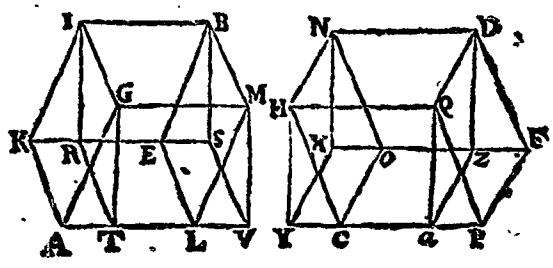
Car premierement les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, EB ſoient perpendiculaires à la baſe AE, & les inſiſtentes CH, PQ, ON, FD perpendic. à la baſe CF; toutes leſquelles perpendicul. ſeront egales entr'elles, puis que les parallelip. ſont de meſme hauteur: & apres auoir continué CP iuſques à R, & fait PR egale à KE, au plan de OP prolongé, ſoit fait l'angle RPS egal à l'angle AKE, & fait PS egale à KA: puis ſoit acheué le parallelogr. PM, ſur lequel ſoit conſtruit le parallelip. QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les coſtez PR, PS ſont egaux aux coſtez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelogrammes PT, KL ſeront egaux & ſemblables.



Derechef puis que les coſtez PQ, PS ſont egaux aux coſtez KI, KA, & les angles QPS, IKA droicts par la 3. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ ſont poſees perpendiculaires aux plans AE, PT: auſſi les parallelogrammes QS, AI, ſeront egaux & ſemblables. Item les coſtez PR, PQ eſtans egaux aux coſtez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts, par la meſme def. les parallelogrammes PV, KB ſeront auſſi egaux & ſemblables. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelipipede QSTV ſont egaux & ſemblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la 24. prop. 11. tant ceux-là, que ceux-cy ſeront egaux & ſemblables à leurs autres parallelogrammes oppoſez: & partant par la 10. definit. les parallelipipedes AB, SV ſeront egaux entr'eux. Maintenant que EF, TS prolongees ſe rencontrent en Z: & DQ, YX, en *a*, & ſoit acheué le parallelipipede ZV. Item que ND, *e*V prolongees ſe rencontrent en *d*, & OF, *b*R, en *o*, & ſoit acheué le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont meſme baſe PV, & meſme hauteur, & que les lignes inſiſtentes PS, PZ, RT, R*b*: Q*x*, Q*a*, VY, V*e*, ſont colloquees entre meſmes lignes droictes ZT, *a*Y: iceux ſolides ſeront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV eſt demonſtré egal au parallelipipede AB: donc le parallelipipede ZV ſera egal au meſme AB. Et d'autant que par la 35. pr. 1. les parallelogrammes PT, P*b* ſont egaux, & PT egal à AE, auſſi P*b* ſera egal au meſme AE,

c'eſt à dire à CF (car AE, CF ſont poſees baſes egales:) & par la 7. pr. 5. comme CF ſera à P*o*, ainſi P*b* ſera à P*o*: & par la 25. pr. 11. comme la baſe CF eſt à la baſe P*o*, ainſi le ſolide CD eſt au ſolide P*d*, puis que le parallelipipede C*d* eſt couppé par le plan PD parallel aux plans oppoſez CN, R*d*: Semblablement comme P*b* eſt à P*o*, ainſi le ſolide ZV au ſolide P*d*, pource que le parallelipipede D*b* eſt coupé par le plan PV parallel aux plans oppoſez F*d*, *Ze*. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipipedes CD, ZV, ſeront egaux, puis qu'ils ont meſme raiſon au ſolide P*d*, ſçauoir eſt la meſme qu'ont les baſes CF, P*b* à la baſe P*o*. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a eſté demonſtré egal au parallelipipede AB: les parallelipipedes AB & CD ſeront pareillement egaux: ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, ſi les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, EB; CH, PQ, ON, FD, ne ſont perpendiculaires, ſur les baſes AE, CF, ſoient tirees des poincts (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il ſera de beſoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & ſur les plans d'audeſſous d'iceux poincts les perpendiculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Q*a*, par la 11. pr. 11. & ſoient tirees RT, SV, XY, Z*a*, pour faire les parallelipipedes ITVB, NY*a*D, leſquels par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus ſeront egaux entr'eux, car ils ſont ſur baſes egales, GB, HD; & de meſme hauteur: Mais par la 29. ou 30. prop. 11. le ſolide ITVB eſt egal au ſolide AB; & le ſolide NY*a*D egal au ſolide CD: donc le ſolide AB ſera egal au ſolide CD. Parquoy les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

On conuertira ceſte 31. prop. en ceſte maniere.

Les ſolides parallelipipedes egaux, conſtituez ſur baſes egales, ſont de meſme hauteur: & les ſolides parallelipipedes egaux, qui ſont en meſme hauteur: ſont ſur baſes egales. s'ils n'ont vne meſme baſe.

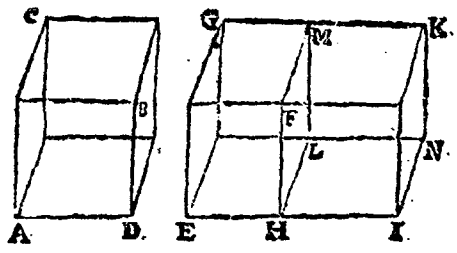
Car ſi on croit l'vn plus haut que l'autre: ſi on couppe du plus haut vn parallelip. de meſme hauteur que l'autre: par la 31. p. 11. le couppé ſera egal à l'autre, auquel eſt auſſi poſé egal le tout: parquoy le couppé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde. Que ſi les parallelipip. eſtans de meſme hauteur, on croit que la baſe de l'vn ſoit plus grande que la baſe de l'autre: ſi d'icelle baſe on en couppe vne egale à l'autre, & ſur icelle couppee on entend eſtre vn parallelipipede de meſme hauteur, lon demonſtrera en la meſme maniere, la partie eſtre egale au tout: Ce qui eſt abſurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les ſolides parallelipipedes de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux parallelipipedes de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquels les baſes ſoient AB, EF. Ie dis que le ſolide eſt au ſolide comme la baſe à la baſe.

Car ſi ſur la ligne HF, (apres auoir prolongé le plan EF vers I) & à l'angle FHI on conſtruit le parallelogramme FI egal au parallelog. AB; puis on acheue le ſolide IFLK; iceluy eſtant de meſme hauteur que le ſolide ABCD, & ſur baſe egale, il luy ſera egal par la 31. pr. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le ſolide IFKL eſt au ſolide EFGH, ainſi le ſolide ABCD eſt au meſme ſolide EFGH. Mais par la 25. prop: 11. le ſolide IFKL eſt au ſolide EFGH, comme la baſe IF, c'eſt à dire AB, à la baſe EF: Donc auſſi le ſolide ABCD, ſera au ſolide EFGH, comme la baſe AB à la baſe EF. Parquoy les ſolides parallelipipedes de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

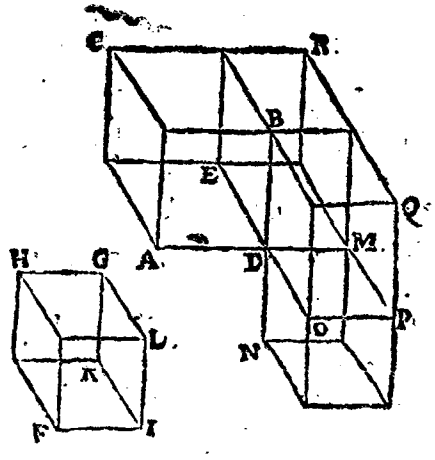
La conuerſe: Si les ſolides parallelipipedes ſont entr'eux comme leurs baſes; ils ſeront en meſme hauteur. *Car ſi l'vne des hauteurs eſt plus grande que l'autre, de la plus grande en ſoit couppee vne egale à la moindre, & puis ſoit tiré vn plan parallel à la baſe; & par la 32. p. 11. comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le parallelipipede ſera au parallelipipede couppé: mais ainſi il eſtoit auſſi au parallelipipede total. Donc le couppé eſt egal au tout par la 9. p. 5. Ce qui eſt abſurde.*

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les ſemblables ſolides parallelipipedes, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

Soient deux ſemblables parallelipipedes ABCE, FHGI conſtituez ſur baſes ſemblables AE, FK, eſquelles les coſtez homologues ſont AD, FI. Ie dis que le parallelipipede ABCE eſt au parallelipipede FHGI en raiſon triplee des coſtez homologues AD, FI.

Car ſoit prolongé AD vers M, tellement que DM ſoit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en ſorte que DN ſoit egale à LI ou GK: Item ED vers O, tellement que DO ſoit egale à KI ou GL: puis apres eſtans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO, ſoit acheué le parallelipipede NMP. Il eſt donc euident que les deux parallelipipedes FG, NP ſont ſéblables & egaux, puis qu'ils ſont compoſez de plans qui ont les angles egaux, & les coſtez au long d'iceux angles egaux, auſſi egaux. Item ſoient conſtruits les parallelipipedes BMOQ, & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD, FGHI, ſont ſemblables, comme AD eſt à FI, c'eſt à dire à DM, ainſi DE à KI, c'eſt à dire à DO: & BD à LI, c'eſt à dire à DN. Mais



par la 1. prop. 6. comme AD à DM, ainsi le parallelog. AE au parallelog. EM: & comme ED à DQ, ainsi le parallelog. EM à DP: & comme BD à DN, ainsi le parallelogramme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP & BM à MN. Mais par la 32. prop. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelipipede AECB au parallelip. EMRB: & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelip. EMRB est au parallelipipede DPBQ: & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelip. DPBQ est au parallelipipede NP. Parquoy comme le parallelipipede AECB sera au parallelip. EMRB, ainsi le parallelipipede EMRB sera au parallelip. DPBQ: & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP. Partant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. d. 5. la premiere AECB sera à la quatrieſme NP, c'est à dire à FG, en raison triplee de la premiere AECB à la seconde EMRB. Mais par la 32. pr. 11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE est à la base EM: & par la 1. prop. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. pr. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: partant la raison triplee de AECD à EMRB, sera la meſme que de AD à FI: & par consequent AECD estant à FG en raison triplee de AECD à EMRB: il sera aussi en raison triplee de AD à FI. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

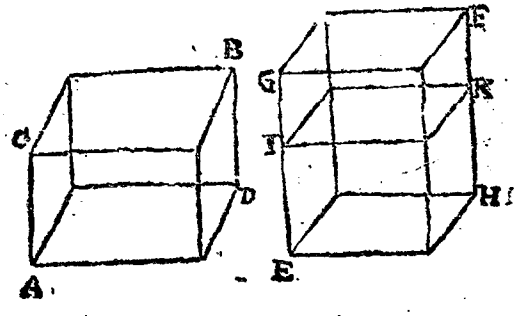
COROLLAIRE.

Par cecy est euident que s'il y a quatre lignes droittes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la quatrieſme, ainsi le parallelipipede descrit sur la premiere, est au parallelipipede semblable, & semblablement descrit sur la seconde: Puis que tant le parallelipipede est au parallelipipede, que la premiere ligne à la quarte en raison triplee de la raison de la premiere ligne à la seconde, sçauoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les solides parallelipipedes egaux, ont les bases & les hauteurs reciproques: Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient les parallelipipedes egaux ABCD, EFGH sur les bases AD, EH, desquels les hauteurs sont AC, EG. Ie dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.



Car si les bases AD & EH sont egales, (estans les solides posez egaux) les hauteurs AC, EG seront aussi egales par le schol. de la 31. pr. 11. & partant comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG à la hauteur AC.

Mais si les bases sont inegales, sçauoir AD, plus grande que EH, la hauteur EG sera plus grande que la hauteur CA: car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 31. p. 11. iceux solides seroient l'vn à l'autre cõme leurs bases;

partant AB plus grand que EF, & nous les auons poſez egaux: La hauteur EG ſera donc plus grãde que CA; & d'iceluy ſoit retranchee EI egale à CA, & d'iceluy poinct I ſoit imaginé que le plan IK parallel à EH, couppe le parallelip. EF: Or les deux ſolides AB & EF eſtans egaux, ils auront meſme raiſon l'vn comme l'autre au ſolide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK eſtans de meſme hauteur, ils ſeront l'vn à l'autre comme la baſe AD à la baſe EH, par la 32. prop. 11. Partant EF ſera auſſi à EK comme la baſe AD à la baſe EH. Or comme le parallelipipede EF eſt au parallelip. EK, ainſi la baſe GL à la baſe IL, par la 25. prop. 11. & icelle baſe GL eſt à la baſe IL, comme la ligne EG eſt à la ligne EI, par la 1. prop. 6. & partant par la 11. p. 5. le ſolide EF eſt au ſolide EK, comme EG à EI. Mais le ſolide EF eſt auſſi au ſolide EK, comme la baſe AD à la baſe EH: Donc par la 11. prop. 5. comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur EI, ou à ſon egale AC.

Pour la ſeconde partie, ſi la baſe AD eſt à la baſe EH, comme la hauteur EG eſt à la hauteur AC. Ie dis que les deux ſolides AB & EF ſont egaux.

Car ſi les hauteurs ſont egales, il eſt euident que les baſes ſont auſſi egales, puis qu'elles ſont poſees en meſme raiſon: & partant par la 31. prop. 11. les parallelipipedes AB, EF ſeront pareillement egaux.

Que ſi la heuteur EG eſt plus grande que la hauteur AC d'icelle, ſoit retranchee EI egale à AC, & par I ſoit tiré le plan IK parallele à la baſe EH. Donc par la 32. p. 11. comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi le ſolide AB eſt au ſolide EK, puis que leurs hauteurs ſont egales: Et par la 1. p. 6. comme EG eſt à EI, ainſi le plan GL eſt au plan IL. Mais comme la baſe GL eſt à la baſe IL, ainſi le ſolide EF, eſt au ſolide EK: (car ils ſont de meſme hauteur,) donc comme le ſolide AB eſt au ſolide EK, ainſi le ſolide EF eſt au meſme ſolide EK, puis que par l'hypotheſe AD eſt à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. prop. 5. les ſolides AB, EF ſeront egaux. Donc les ſolides parallelipipedes egaux, ont les baſes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à ceſte demonſtration & preſque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des ſolides doiuent eſtre perpendiculaires. Parquoy ſi elles n'eſtoient telles, il les y faudroit reduire, comme nous auons fait à la fin de la 31. prop. de ce liure.

Or toutes les choſes que nous auons demonſtrees és 6 precedentes propoſitions, ſçauoir és 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent auſſi aux priſmes qui ont deux plans oppoſez triangulaires, obſeruant les ſuſdites hypotheſes. Car ſi à deux tels priſmes de meſme hauteur, & conſtituez ſur vne meſme baſe, ou ſur baſes egales, on appoſe deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront faits deux parallelipipedes de meſme hauteur, & conſtituez ſur meſmes, ou egales baſes. Parquoy par la 29. 30. ou 31. pr. 11. ſeront egaux iceux parallelipipedes; & partant auſſi les priſmes donnez, c'eſt à ſçauoir les moitiez d'iceux parallelipipedes.

Derechef, ſi aux deux priſmes ſuſdits de meſme hauteur, & conſtituez ſur diuerſes baſes, on adioinct deux autres priſmes egaux, & ſemblables à iceux, ſeront faits derechef deux parallelipipedes de meſme hauteur: Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelip. ſera au parallelip. comme la baſe à la baſe; & partant par la 15. p. 5. le priſme ſera au priſme, c'eſt à ſçauoir la moitié de l'vn des parallelip. à la moitié de l'autre, comme la meſme baſe à la baſe, ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçauoir eſt la moitié d'vne baſe à la moitié de l'autre, ſi les baſes ſont triangulaires.

Dauantage, ſi à iceux deux priſmes ſemblables, on adiouſte deux autres priſmes egaux &

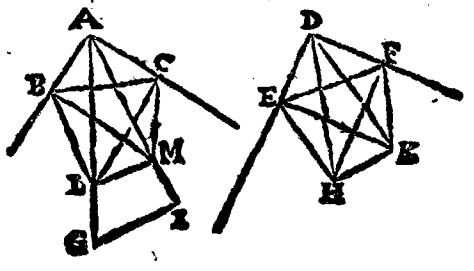
ſemblables à eux, ſeront conſtituez deux parallelip. ſemblables, leſquels par la 33. p. 11. ſeront entr'eux en raiſon triplee des coſtez homologues. Donc auſſi par la 15. pr. 5. les priſmes, ſçauoir eſt les moitiez d'iceux, auront la raiſon triplee de meſmes coſtez homologues, leſquels ſont pareillement coſtez homologues des priſmes.

Finalement, ſi aux deux ſuſdits priſmes egaux, on adiouſte deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront conſtituez deux parallelip. egaux de meſme hauteur que les priſmes: Parquoy par la 34. pr. 11. puis que les baſes, & les hauteurs des parallelip. ſont reciproques, & les baſes des priſmes ſont les meſmes, ou les triangles moitiez d'icelles, ayant meſme raiſon par la 15. p. 5. auſſi les baſes & les hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux, aux ſommets deſquels ſoient leuees en l'air deux lignes droictes faiſant angles egaux auec les lignes des angles premierement poſez, chacun au ſien; & d'vn poinct pris au haut de chacune d'icelles deux lignes eſleuees ſont menees des lignes perpendiculaires aux plans eſquels ſont les angles premierement poſez, & des poincts où tombent icelles perpendiculaires ſont tirees des lignes droictes vers les ſommets des angles premierement poſez: Les angles que font icelles lignes, auec les leuees en l'air ſont egaux entr'eux.

Soient deux angles plans egaux BAC, EDF, des ſommets deſquels A & D, ſoient leuees en l'air les lignes droictes AG, DH, tellement que l'angle BAG ſoit egal à l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH: & des poincts G & H pris és lignes AG, DH, ſoient tirees aux plans eſquels ſont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, deſquels ſoient menees les lignes IA, DK. Ie dis que les angles GAI, HDK, ſont egaux entr'eux.



Car ſi les deux lignes AG, DH ſont inegales, de la plus grande AG, ſoit retranchee AL egale à DH: & de L au plan du triangle AGI, ſoit tiree LM parallele à GI: laquelle LM ſera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que GI eſt perpendiculaire à iceluy plan. Soient auſſi tirez des poincts M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF: & ſoient menees les lignes BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM eſt perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le ſera auſſi à la ligne AM tiree au meſme plan par la 3. def. 11. partant par la 47. prop. 1. le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AM, ML: mais par la meſme prop. le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AC, CM, puis que l'angle ACM eſt droict par conſtruction. Donc le quarré

de AL eſt egal aux quarrez de AC, CM, ML : Et par la 47. prop. 1. le quarré de CL eſt egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 3. d. de ce liure, l'angle CML eſt droict. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL eſt droict. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AM, ML : & le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM eſtant droict par la conſtruction : le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BM, ML : mais le quarré de BL eſt egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML eſt droict par la 3. def. 11. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BL : & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL ſera droict. On demonſtrera en la meſme maniere que les angles DFH, DEH ſont auſſi droicts. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, eſtans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4. pr. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droicts : Donc auſſi les autres angles BMC, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE ; & partant puis que les coſtez BC, EF, ont eſté demonſtrez egaux ; les coſtez BM, MC, ſeront egaux aux coſtez EK, FK, par la 26. prop. 1. veu donc que les coſtez AC, CM, du triangle ACM ſont egaux aux coſtez DF, FK, du triangle DFK, & les angles ACM, DFK ſont droicts, par la 24. prop. 1. les baſes AM, DK ſeront egales. Et puis que BL, EH ont eſté demonſtrées egales, leurs quarrez ſeront auſſi egaux. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL eſt egal au quarré de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, KH, pource que les angles BML, EKH ſont droicts, par la 3. def. 11. Donc les quarrez de BM, ML ſeront egaux aux quarrez de EK, KH : & partant eſtans oſtez les quarrez de BM, EK, qui ſont egaux, les lignes BM, EK, ayant eſté demonſtrees egales, reſteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes LM, HK ſeront egales. Parquoy veu que les coſtez AL, AM du triangle ALM, ſont egaux aux coſtez DH, DK du triangle DHK, & la baſe LM egale à la baſe HK ; les angles LAM, HDK ſeront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

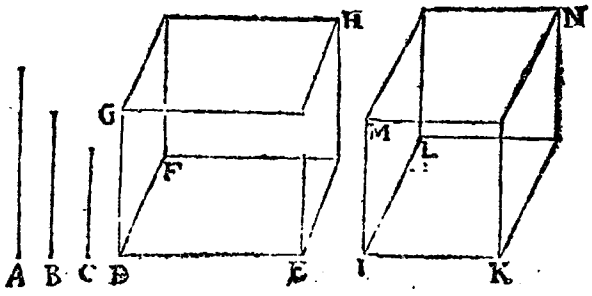
Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, és ſommets deſquels ſoient eſleuees en l'air des lignes droictes egales, leſquelles auec les lignes d'iceux angles premierement poſez, contiennent angles egaux, chacun au ſien : les perpendiculaires tirees des poincts extremes d'icelles lignes eſleuees en l'air, ſur les plans des angles premierement poſez, ſeront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, ſont poſez egaux, & les lignes egales AL, DH eſleuees en haut conſtituent les angles egaux LAB, HDE ; Item LAC, HDF, il a eſté demonſtré que les perpendiculaires LM, HK, ſont egales entr'elles.

THEOR.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droictes ſont proportioneles; le ſolide parallelipipede conſtitué d'icelles trois lignes, eſt egal au ſolide parallelipipede fait de la moyenne, pourueu qu'iceux deux ſolides ſoient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportioneles A, B, C: & ſoit conſtitué vn angle ſolide D, de trois quelconques angles plans EDF, EDG, FDG, tellement que la ligne DE ſoit egale à la ligne A, DG à B, & DF à C: & ſoit accomply le parallelipipede DH: en apres, par la 26. pr. 11. ſur la ligne IK egale à B, & au poinct I ſoit fait l'angle ſolide I des trois angles plans KIL, KIM, & MIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que chacune des lignes IK, IL, IM ſoit egale à la moyenne B; & ſoit parfait le parallelipipede IN. Ie dis que les ſolides DH, IN ſont egaux.



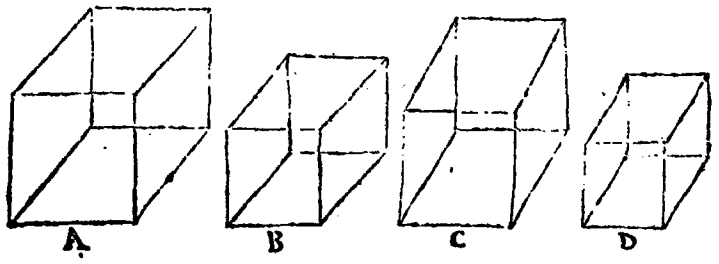
Car puis que comme DE eſt à IK, ainſi IL à DF: (car DE eſt egale à A; IK, IL à B; & DF à C,) & les angles EDF, KIL egaux, les parallelog. EF, KL ſeront egaux par la 14. prop. 6. pource qu'ils ont les coſtez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux ſommets des angles plans egaux EDF, KIL ſont eſleuez en l'air les lignes egales DG, IM, leſquelles auec les lignes des angles premierement poſez comprennent angles egaux, vn chacun au ſien: les perpendiculaires tirees de G, M, ſur les plans des baſes EF, KL; (ſçauoir eſt les hauteurs des parallelip. DH, IN) ſeront egales entr'elles par le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. prop. 11. les parallelip. DH, IN, ſeront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les baſes EF, KL egales, & pareillement les hauteurs egales. Parquoy ſi trois lignes droictes ſont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droictes ſont proportioneles; les ſolides parallelipipedes ſemblables, & ſemblablement deſcrits ſur icelles, ſeront auſſi proportionaux: Et ſi quatre ſolides parallelipipedes ſemblables & ſemblablement poſez ſont proportionaux; les quatre lignes droictes, ſur leſquelles ils ſeront deſcrits, ſeront auſſi proportioneles.

Soient quatre lignes droictes proportioneles A, B, C, D: & ſoient deſcrits ſur icelles quatre ſolides ſemblables & ſemblablement poſez A, B, C, D. Ie dis qu'iceux ſolides ſont proportionaux.

Car puis que le ſolide A eſt ſemblable au ſolide B: par la 33. prop. 11. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B: pareillement les ſolides C & D ſeront auſſi en raiſon triplee de C à D: mais la raiſon de A à B, eſt comme de C à D par l'hypotheſe. Donc la raiſon triplee de A à B, ſera ſemblable à la raiſon triplee de C à D; & partant par la 11. prop. 5. le ſolide A ſera au ſolide B, comme le ſolide C au ſolide D.



Maintenant, ſi les quatre ſolides A, B, C, D, ſemblables & ſemblablement deſcrits ſur les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſont proportionaux. Ie dis que la ligne A ſera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car le ſolide A ſera au ſolide B, en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B par la 33. pr. 11. Item le ſolide C au ſolide D, en raiſon triplee de C à D: mais le ſolide A eſt au ſolide B comme le ſolide C au ſolide D: partant leur raiſon triplee ſera ſemblable; & par conſequent les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſeront proportioneles. Parquoy ſi quatre lignes droictes ſont proportioneles, &c. Cequ'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement, ſi trois lignes droictes ſont proportionelles, les parallelipip. ſemblables & ſemblablement deſcrits ſur icelles ſeront ptoportionaux; & ſi trois ſolides ſemblables, &c. Car la moyenne ligne eſtant poſee deux fois auec ſon ſolide, les quatre ſolides ſeront proportionaux, comme il a eſté demonſtré. Car puis que le ſolide de la deuxieſme ligne eſt egal au ſolide de la troiſieſme ligne, & la deuxiéme ligne egale à la troiſiéme, la propoſition eſt manifeſte.

Et eſt à notter qu'il n'importe pas que tous les quatre ſolides ſoient ſemblables entr'eux: Car les deux ſolides deſcrits ſur les deux premieres lignes A & B eſtans ſemblables & ſemblablement poſez, il n'eſt pas neceſſaire que les deux autres ſolides deſcrits ſur les deux dernieres lignes C & D ſoient ſemblables & ſemblablement poſez aux deux premiers, ains ſuffit qu'ils le ſoient entr'eux deux, ainſi qu'il eſt euident par la demonſtration cy-deſſus.

Nous adiouſterons icy cét autre theoreme.

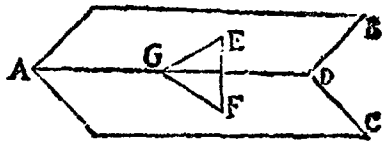
Si quatre lignes droictes ſont continuellement proportioneles: le parallelipipede ayant pour baſe le quarré de l'vne des extrémes, & pour hauteur l'autre extréme, eſt egal au cube de la moyenne proport. plus prochaine de la premiere extréme priſe.

Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Ie dis que le parallelipipede ayant le quarré de l'extréme A pour baſe, & l'autre extréme D pour hauteur, eſt egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extréme A.

Car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A eſt au quarré de B, comme A à C, c'eſt à dire comme B à D: les baſes auec les hauteurs ſeront reciproques, puis que le quarré de A eſt la baſe du parallelipipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy; & la baſe du cube eſt le quarré de B, & ſa hauteur la meſme ligne B. Donc par la 34. prop. 11. le parallelipipede & le cube ſeront egaux. Par meſme raiſon le parallelip. ayant pour baſe le quarré de l'extreme D, & pour hauteur l'autre extreme A, ſera demonſtré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan eſt perpendiculaire à vn autre plan, & d'vn poinct de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire à l'autre, elle tombera ſur leur commune ſection.

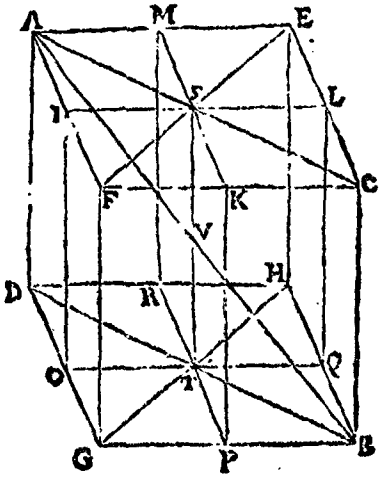


Soit le plan AB perpendiculaire au plan AC, leur ligne de commune ſection AD; & du poinct E pris en AB, ſoit menee vne perpendiculaire au plan AC: ie dis qu'elle tombera ſur la commune ſection AD.

Car qu'elle tombe ailleurs, s'il eſt poſſible, comme au poinct F du plan AC: & par la 12. prop. 1. de F ſoit menee FG perpendiculaire à AD; & la ligne GE faiſant le triangle GFE. Or ſi la ligne EF eſt perpendiculaire au plan AC, par la 3. def. 11. elle le ſera auſſi à la ligne FG: & icelle FG eſtant perpendiculaire à la commune ſection AD, par la 4. def. elle le ſera pareillement au plan AB: & par conſequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles ſur la ligne GF ſeroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E au plan AC ne tombera pas hors la commune ſection AD, ains ſur icelle. Parquoy ſi vn plan eſt perpendiculaire à vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, ſont couppez en deux egalement, & on meine des plans par les ſections: la ligne de commune ſection d'iceux plans, & le diametre du ſolide parallelipipede, ſe coupperont en deux egalement.



Soit le parallelipipede AB; les plans oppoſez AC, BD, deſquels tous les coſtez ſoient couppez en deux egalement és poincts I, K, L, M, O, P, Q, R, par leſquels ſoient imaginez paſſer les plans IQ, KR, ſe couppans l'vn l'autre en la ligne ST: & ſoit menee la diagonale AB: Ie dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entrecouppent en deux egalement.

Car eſtans tirees les lignes SA, SC, TD, TB: ſoient conſiderez les deux triangles BQT, DOT, deſquels les deux coſtez BQ, QT ſont egaux aux deux coſtez DO, OT, (car BQ, DO, ſont moitiez des lignes droictes egales BH, DG: & par la 34. pr. 1. QT, OT, ſont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO ſont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. prop. 1. eſt egal à l'interne DOT: partant par la 4. prop. 1. les baſes BT, DT ſeront auſſi egales: & les angles BTQ, DTO pareillement egaux: & par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO ſont egaux à deux droicts. Donc auſſi

DTO, BTO ſont egaux à deux droicts: & partant par la 14. pr. 1. BT, DT conſtituent vne ſeule ligne droicte. En la meſme maniere ſera demonſtré que AS, CS ſont egales, & compoſent vne ſeule ligne droicte. Maintenant puis que l'vne & l'autre AD, BC eſt parallele & egale à FG, à cauſe des parallelogrammes DF, FB: icelles ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioignent les extremitez d'icelles AD, BC, ſont auſſi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par conſequent AS, BT moitiez d'icelles ſont egales. Mais pource que AC, BD ſont paralleles, les lignes AB, ST ſeront auec icelles en vn meſme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecoupperont en vn poinct, ſçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. pr. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, ſont egaux aux deux angles BTV, BVT, du triangle BTV, & le coſté AS egal au coſté BT: les autres coſtez AV, SV, ſeront auſſi egaux aux autres coſtez BV, TV, chacun au ſien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalement au poinct V. Parquoy ſi les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

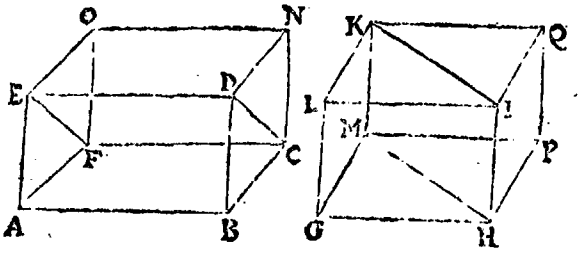
COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident qu'en tout parallelipipede, tous les diametres s'entrecouppent en deux egalement en vn ſeul poinct, ſçauoir eſt au poinct V, auquel ils diuiſent en deux egalement la ligne ST. Eſt auſſi manifeſte que tout plan qui couppe le parallelipipede en deux egalement paſſe par le centre d'iceluy, ſçauoir par V.

THEOR. 35. PROP. XL.

S'il y a deux priſmes d'egale hauteur, l'vn deſquels ait pour baſe vn triangle, & l'autre vn parallelogramme double d'iceluy triangle: iceux priſmes ſeront egaux entr'eux.

Soient deux priſmes d'egale hauteur ABCDEF, GHIKLM: & que celuy-là ait pour baſe le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM baſe du priſme GHIKLM. Ie dis qu'iceux priſmes ſont egaux entr'eux.



Car ſi on les accomplit pour eſtre ſolides parallelipipedes AN, GQ, la baſe GP ſera egale à la baſe BF: & eſtans poſez de meſme hauteur, ils ſeront egaux par la 31. prop. 11. & par la 28. prop. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diuiſeront en deux egalement; & partant les priſmes propoſez eſtans les moitiez de choſes egales, ſeront egaux entr'eux. Parquoy s'il y a deux priſmes d'egale hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnzieſme Element.

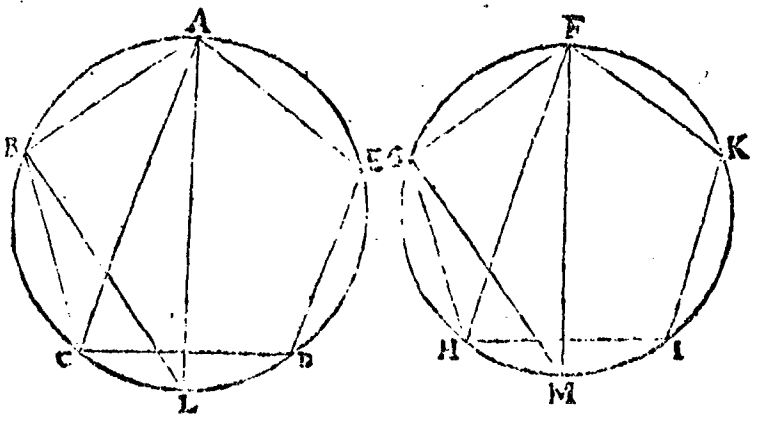
ELEMENT DOVZIESME

THEOR. 1. PROP. 1.

LES polygones ſemblables inſcrits aux cercles, ſont l'vn à l'autre comme les quarrez deſcrits des diametres des cercles.

Soient deux polygones ſemblables ABCDE & FGHIK, inſcrits aux cercles, deſquels les diametres ſont AL, FM. Ie dis qu'iceux polygones ſont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.

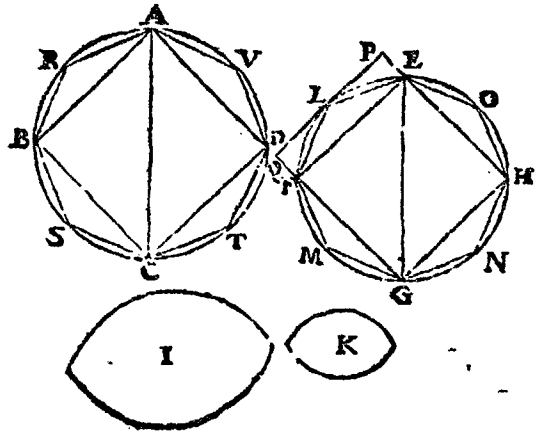
Car ſoient menees les lignes droictes AC, FH: item BL & GM. D'autant que les pentagones eſtans ſemblables, AB eſt à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC egal à l'angle FGH: par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH ſont equiangles: partant l'angle BCA ſera egal à l'angle FHG. Mais celuy-là eſt egal à l'angle L, ceſtuy-cy à l'angle M, par la 21. pr. 3. (car ils ſont ſur meſmes ſegmens BA, & FG.) Donc l'angle L ſera egal à l'angle M: & par la 31. pr. 3. les angles ABL, FGM eſtans dans les demy cercles ſont droicts & egaux: partant les triangles ABL FGM ſeront equiangles: (car le troiſieſme angle BAL ſera egal au troiſieſme GFM par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL ſera à AB, ainſi FM à FG: & en permutant, comme AL ſera à FM, ainſi AB à FG. Parquoy par la 22. prop. 6. comme le pentagone deſcrit ſur AB ſera à l'autre pentagone ſemblable, & ſemblablement poſé ſur FG: ainſi le quarré de AL ſera au quarré de FM. Parquoy les polygones ſemblables inſcrits aux cercles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles ſont l'vn à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres ſont AC & EG: Ie dis qu'ils ſont l'vn à l'autre comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD ſoit à quelque figure quatriéme proport. comme I, qu'icelle figure I eſt egale au cercle EFGH.



Autrement elle ſera plus petite ou plus grande. Qu'elle ſoit premierement plus petite, s'il eſt poſſible: & ſoit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K: Soit donc dans iceluy cercle EFGH deſcrit le quarré EFGH, qui eſt plus grand que la moitié du cercle: (d'autant que le quarré de EG, qui eſt ſon double, eſt plus grand que le cercle.) Si les quatre ſegmens du cercle ſont moindres que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon ſoit couppé l'arc EF en deux egalement au poinct L, & ſemblablement les trois autres arcs FG, GH, HE, és poincts M, N, O; & ſoient tirees les lignes droictes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, afin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inſcrit au cercle: Il eſt euident que dans les quatre ſegmens egaux, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, eſt plus de la moitié de ſon ſegment: (car par la 41. prop. 1. le triangle Iſoſcele FLE eſt la moitié du rectangle FP de meſme hauteur, & ſur meſme baſe FE, lequel rectangle eſt plus grand que le ſegment FLE.) Soient maintenant les huict petites figures reſtantes plus petites que la figure K: que ſi cela n'eſtoit, il faudroit touſiours couppper les arcs derniers, & touſiours inſcrire des polygones, deſquels le dernier auroit deux fois autant de coſtez que ſon precedent, & ſouſtraire touſiours plus de la moitié de chaque ſegment, ſçauoir ſon triangle Iſoſcele: Il eſt certain que les dernieres portions ſeront en fin plus petites que la figure K. Mais pour abreger ſoient les deuant dites huict portions reſtantes plus petites que la figure K: Il eſt euident que l'octogone ELFMGNHO ſera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K ſont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inſcrit vn octogone ſemblable au cercle AB CD: ce qui eſt facile; car il n'y a qu'à couppper chaque demy circonference ABC, ADC en deux egalement és poincts B & D; puis les circonferences AB, BC, CD, AD auſſi en deux egalement en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV, & VA; il eſt euident que la figure inſcripte ſera ſemblable à la figure octogone deſcrite au cercle EFGH. Maintenant

par la prec. prop. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC est au quarré de EG : mais comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I : & par la 11. prop. 5. comme le poligone ARBSCTDV sera au poligone ELFMGNHO, ainsi le cercle ABCD sera à la figure I : mais le poligone ARBSCTDV est moindre que le cercle ABCD : Donc par la 14. propos. 5. le poligone ELFMGNHO sera aussi moindre que la figure I : mais il a aussi esté demonstré plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

Elle ne peut aussi estre plus grande : Car puis que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I ; en changeant, la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC : mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme K : & par la 14. pr. 5. comme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K : & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD sera à la figure K, comme le quarré de AC est au quarré de EG : ce qui est contre la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous auons demonstré que l'vn des cercles estant à vne figure, en la raison des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle : Partant la figure I ne pouuoit estre plus grande que le cercle EFGH : ny plus petite, comme en la premiere partie : elle estoit donc egale à iceluy. Parquoy les cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres : Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone descrit en celuy-là est au polygone semblable descrit en cestuy-cy. Puis que le cercle est au cercle, & le polygone au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté demonstré és 1 & 2. prop. cy-dessus.

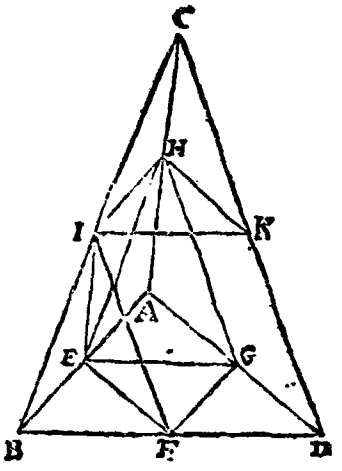
THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD ayant la base triangulaire ABD, & le sommet au poinct C : Ie dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale ABCD : & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié d'icelle pyramide proposee.

Car soient couppez en deux egalement, tous les costez des plans d'icelle pyramide, sçauoir les trois de la base ABD aux poincts E, F, G, & les trois hypothenuses AC, BC, DC aux trois poincts H, I, K, & soient menees les lignes EF, FG,

GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Premierement il eſt euident que toute la pyramide ABDC eſt diuiſee en quatre ſolides, ſçauoir en deux pyramides AEGH, HIKC, dont les baſes ſont les triangles AEG, HIK, & les ſommets H, C: & en deux priſmes BFIHEG, FGDKHI, dont la baſe de celuy-là eſt le quadrangle BEGF, & de celuy-cy le triangle FGD. Or d'autant que les coſtez AB, AC, ont eſté couppez en deux egalement en E & H, par la 2. prop. 6. BC, EH ſeront paralleles: & par meſme raiſon HI eſt parallele à BA: donc le quadrilatere BIHE eſt parallelogramme: & par la 34. pr. 1. HI eſt egale à EB, ou EA ſon egale, & HE à BI, ou IC ſon egale: & par le corol. de la 4. prop. 6. les deux triangles ABC, AEH ſont ſemblables entr'eux. Par meſmes raiſons les deux triangles ABC, HIC ſeront ſemblables entr'eux, & conſequemment auſſi les deux AEH, HIC, par la 21. prop. 6. leſquels ſeront auſſi egaux entr'eux, puis qu'ils ont tous leurs coſtez egaux, chacun au ſien. Par meſmes raiſons le triangle AHG ſera egal & ſemblable au triangle HCK: mais les lignes HE, HG eſtans paralleles aux lignes CI, CK, & ſe touchans en diuers plans, par la 10. p. 11. les angles EGH, ICK ſeront egaux: & les coſtez qui font iceux angles eſtans proportionaux, les trois triangles EHG, ICK, BCD ſeront equiangles, & conſequemment ſemblables: comme auſſi les trois AEG, HIK, ABD: Donc par la 9. def. 11. les trois pyramides ABDC, AEGH, HIKC ſeront ſemblables entr'elles: & par la 10. def. les deux dernieres ſeront auſſi egales entr'elles, puis que tous les quatre triangles de l'vne ont eſté monſtrez ſemblables & egaux aux quatre triangles de l'autre.



Or que les deux ſolides BFIHGE, FGDKHI, ſoient deux priſmes egaux, & faiſans enſemble plus de la moitié de la pyramide propoſee ABDC, on le prouuera ainſi, puis que les coſtez des plans d'icelle pyramide ont eſté couppez en deux egalement, & partant proportionnellement, par la 2. prop. 6. les lignes AB, FG ſont paralleles, comme auſſi BD, EG: par ainſi le quadrilatere BEGF eſt vn parallelogr. & par la 9. prop. 11. HG & IF eſtans parallelles à CD, elles le ſont auſſi entr'elles: Donc FIHG eſt vn parallelogramme; comme eſt auſſi BIHE: partant les trois coſtez du triangle BIF ſeront egaux aux trois coſtez du triangle EHG, chacun au ſien: conſequemment iceux triangles ſont equiangles & egaux entr'eux, & partant ſemblables: Mais par la 15. prop. 11. ils ſont auſſi parallels, les lignes BI, FI, eſtans paralleles aux lignes EH, GH. Parquoy le ſolide BFIHGE contenu des deux triangles BIF, EHG egaux ſemblables & parallels oppoſez, & des trois parallelogrammes BEGF, BIHE, FIHG eſt vn priſme par la 13. def. 11. Derechef FD, FG, GD, coſtez de parallelogrammes ſont egaux aux coſtez oppoſez IK, IH, HK, chacun au ſien par la 34. pr. 1. & partant les triangles FGD, IHK ſeront egaux & equiangles entr'eux, & conſequemment ſemblables: Mais ils ſont auſſi parallels par la 15. prop. 11. donc le ſolide FGDKHI contenu des deux triangles oppoſez FGD, IHK egaux, ſemblables & parallels, & des trois parallelogr. FIKD, FIHG, GHKD eſt vn priſme; lequel eſtant de meſme hauteur que le priſme BFIHGE (car ils ſont tous

deux

deux entre les plans parallels BEGD, IHK) luy ſera egal par la 40. prop. 11. puis que la baſe quadrangulaire BEGF de celuy-cy eſt double de la baſe triangulaire de celuy-là, par le ſcholie de la 41. prop. 1. Mais il eſt euident qu'iceluy priſme BFIHGE eſt plus grand que la pyramide de meſme hauteur BEFI, qui n'en eſt que partie, la baſe d'icelle BEF n'eſtant que la moitié du parallelogr. BEGF: laquelle pyramide BEFI eſt egale & ſemblable à la pyramide EAGH, comme il eſt manifeſte par l'egalité & ſimilitude de leurs triangles. Parquoy ledit priſme BFIHEG ſera auſſi plus grand qu'icelle pyramide EAGH: Et par conſequẽt les deux priſmes BFIHEG, FGDKHI enſemble, ſeront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK enſemble. Mais iceux priſmes & pyramides ſont enſemble la pyramide totale ABCD: donc iceux priſmes eſtans plus grands qu'icelles deux pyramides, ſeront auſſi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

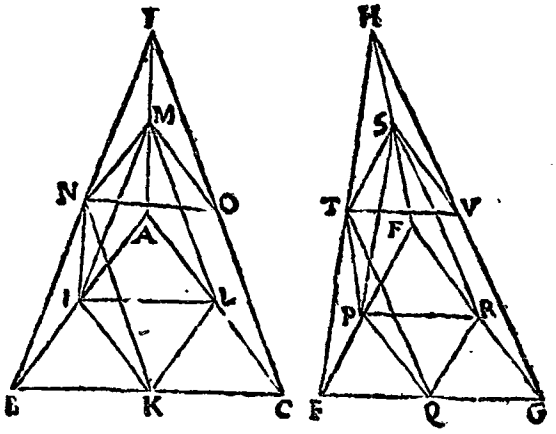
THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, chacune deſquelles ſoit diuiſee en deux autres pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, & en deux priſmes egaux; & que les pyramides prouenues de cette diuiſion ſoient touſiours diuiſees de meſme façon: comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'vne des pyramides, ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de meſme hauteur, chacune deſquelles ſoit diuiſee comme en la precedente propoſition en deux pyramides egales entr'elles & ſemblables à la toute, ſçauoir eſt en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de meſme façon ſoient entendues les pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH eſtre diuiſees; & en continuant touſiours de meſme façon. Ie dis que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes faits en la pyramide ABCD ſont à tous les priſmes faits en la pyramide EFGH, egaux en multitude.

Car puis que comme BC à CK, ainſi FG à GQ: pource que l'vne & l'autre ligne eſt diuiſee en deux egalement, & les triangles ABC, LKC ſont ſemblables & ſemblablement poſez: item les triangles EFG, RQG par le coroll. de la 4. prop. 6. auſſi comme le triangle ABC ſera au triangle LKC, ainſi le triangle EFG ſera au triangle RQG par la 22. prop. 6. & en permutant, comme ABC à EFG, ainſi LKC à RQG. Mais comme LKC à RQG, ainſi eſt le priſme CKLMNO au priſme GQRSTV, comme nous demonſtrerons incontinent: & partant ainſi auſſi le priſme IBKLMN eſt au priſme PFQRST, puis que ceux-cy ſont egaux à ceux-là: Et

comme vn ſeul priſme, ſçauoir IBKLMN eſt à vn ſeul priſme PFQRST, ainſi ſont les deux priſmes enſemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux priſmes enſemble PFQRST, GQRSTV par la 12. prop. 5. Donc auſſi comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi les deux priſmes en la pyramide ABCD ſeront aux deux priſmes en la pyramide EFGH. Nous demonſtrerons en la meſme maniere, deux priſmes és pyramides AILM, MNOD, faites en la pyramide ABCD, eſtre à deux priſmes és pyramides EPRS, STVH, faites en la pyramide EFGH, comme ſont les baſes AIL, MNO de ces pyramides là aux baſes EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainſi continuellement, tant que la meſme diuiſion ſera faite. Mais comme ces baſes là ſont à celles-cy, ainſi la baſe LKC, qui eſt egale & ſemblable à celles-là, eſt à la baſe RQG, qui eſt egale & ſemblable à celle-cy, c'eſt à dire ainſi la baſe ABC eſt à la baſe EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi les priſmes de quelconque pyramide faite en la pyramide ABCD, ſeront aux priſmes de quelconque pyramide faite en la pyramide EFGH: & partant auſſi comme les priſmes de la pyramide ABCD ſeront aux priſmes de la pyramide EFGH, ainſi ſeront tant les priſmes de la pyramide AILM, aux priſmes de la pyramide EPRS, que les priſmes de la pyramide MNOD, aux priſmes de la pyramide STVH; & ainſi continuellement. Parquoy puis que par la 12. prop. 5. comme les deux priſmes de la pyramide ABCD ſont aux deux priſmes de la pyramide EFGH, ainſi tous les priſmes eſtans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes eſtans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. enſemble, ſi ceux cy ſont egaux en multitude à ceux-là: pareillement comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi ſeront tous les priſmes de la pyramide ABCD, à tous les priſmes de la pyramide EFGH. Parquoy s'il y a deux pyramides de meſme hauteur, ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



LEMME.

Or que comme LKC eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO ſoit au priſme GQRSTV, nous le demonſtrerons ainſi. Soient imaginees tomber des ſommets D, H, des lignes perpendiculaires ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCDEFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droittes, ſçauoir DC, & la perpendiculaire tombant de D, & DC eſt couppee en deux egalement en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, ſera couppee en deux egalement au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la meſme raiſon la perpendiculaire tombant de H, ſera couppee en deux egalement par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires ſont poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir eſt les hauteurs des priſmes, ſeront auſſi egales: & partant les priſmes CKLMNO, GQRSTV eſtans d'egales hauteurs, ſe-

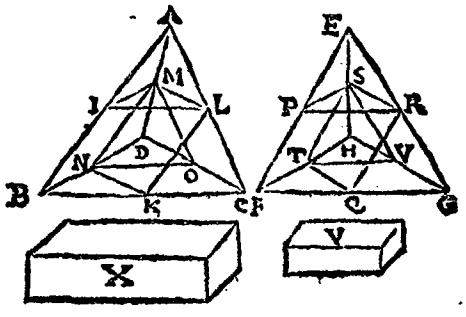
ront entr'eux, comme les baſes LKC, KQG, par les choſes que nous auons demonſtrees au ſcholie de la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquelles les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe.

Autrement, ſoit imaginé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſoit à quelque ſolide, comme X, lequel ſera plus petit ou plus grand que la pyramide EFGH: Et ſoit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du ſolide Y. Ainſi nous imaginons que les deux ſolides X & Y, ſont egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiſer vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, leſquels ſeront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que ſi de la pyramide EFGH, on retranche plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide reſtante EPRS, STVH, encores plus de la moitié, ſçauoir deux priſmes, en continuant touſiours iuſques à ce que toutes les pyramides reſtantes apres le dernier retranchement, ſoient toutes enſemble manifeſtement plus petites que le ſolide Y: ce qui peut arriuer par la 1. prop. 10. Ainſi tous les priſmes enſemble retranchez de la pyramide EFGH, ſeront plus grands que le ſolide X, puis que le reſte eſt plus petit que le ſolide Y. Pareillement ſoient retranchez autant de fois deux priſmes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché de la pyramide EFGH: il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré en la precedente propoſition, que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH: Mais nous auons poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Or tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſont plus petits qu'icelle pyramide: donc par la 14. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, ſeront auſſi plus petits que le ſolide X: Mais nous les auons tantoſt prouuez plus grands: Ce qui eſt abſurde. Partant le ſolide X n'eſtoit pas plus petit que la pyramide EFGH.



Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible; & puis que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD au ſolide X; en permutant, la baſe EFG ſera à la baſe ABC, comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD. Mais comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD, ſoit poſé la pyramide EFGH eſtre à quelque autre

ſolide, comme Y : Et par la 14. prop. 5. d'autant que le ſolide X eſt poſé plus grand que la pyramide EFGH, auſſi la pyramide ABCD ſera plus grande que le ſolide Y : & par la 11. p. 5. comme la baſe EFG eſt à la baſe ABC, ainſi la pyramide EFGH à vn ſolide plus petit que l'autre pyramide : mais nous auons demonſtré que cela eſtant, il s'enſuit vne abſurdité, ſçauoir que les priſmes retranchez d'vne pyramide, eſtoient plus grands que la pyramide de laquelle ils ſont retranchez : Partant le ſolide X ne peut eſtre plus grand que la pyramide EFGH, ny auſſi plus petit : il ſera donc egal. Parquoy puis qu'il a eſté poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X ; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD eſt au ſolide X, cõme à la pyramide EFGH egale à iceluy ſolide X ; pareillement comme la baſe ABC ſera à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Par la converſe : Si les pyramides triangulaires ſont entr'elles comme leurs baſes ; elles ſeront de meſme hauteur. Car ſi on croit que la hauteur de l'vne ſoit plus grande que l'autre, en ſoit couppee d'icelle vne egale à la moindre, & du poinct de la ſection à tous les angles de la baſe, ſoient tirees des lignes droictes ; & comme la baſe ſera à la baſe, ainſi la pyramide ſera à la pyramide n'agueres conſtituee : mais elle eſtoit pareillement ainſi à toute la pyramide. Donc par la 9 pr. 5. la pyramide conſtituee ſera egale à toute la pyramide ; c'eſt à ſçauoir la partie au tout : ce qui eſt abſurde.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les pyramides de meſme hauteur conſtituees ſur meſme, ou egales baſes triangulaires, ſont egales entr'elles : puis qu'elles ſont en meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſees egales, ou vne ſeule & meſme.

Item il s'enſuit au contraire que les pyramides triangulaires conſtituees ſur vne meſme, ou egales baſes, ſont de meſme hauteur : Et que les pyramides egales, & ayans meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme : leſquelles deux choſes l'on demonſtrera par la premiere partie du corol. par le meſme argument dont nous auons vſé en demonſtrant la converſe des 30. & 31. p. 11. ſi tant ſur la hauteur, que ſur la baſe couppee eſt conſtituee vne autre pyramide, &c.

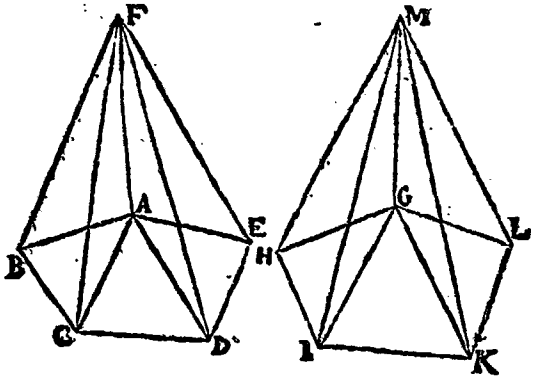
THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soit la pyramide ABCDEF de meſme hauteur que la pyramide GHIKLM, deſquelles les baſes ABCDE & GHIKL ſont polygones : Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi la pyramide eſt à la pyramide.

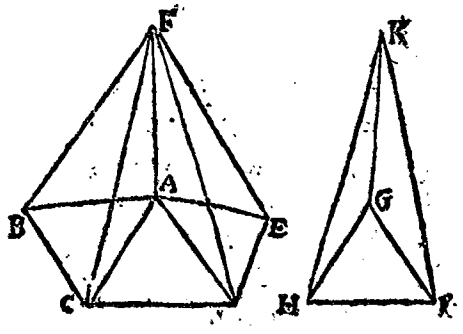
Car les baſes eſtans reduites en triangles ABC, ACD, ADE ; GHI, GIK, GKL : ſoit imaginé ſur chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ACD, ainſi la

pyramide ABCF eſt à la pyramide ACDF; en compoſant, comme la baſe ABCD ſera à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCDF ſera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5. prop. 12. comme la baſe ACD eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ACDF eſt à la pyramide ADEF: Donc en raiſon egale, comme la baſe ABCD eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide ADEF: & partant en compoſant, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide ADEF. Par ſemblable argument ſera demonſtré que comme la baſe GHIKL eſt à la baſe GKL, ainſi la pyramide GHIKLM eſt à la pyramide GKLM: & en changeant, comme la baſe GKL eſt à la baſe GHIKL, ainſi la pyramide GKLM eſt à la pyramide GHIKLM. Derechef, puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ADE eſt à la baſe GKL, ainſi la pyramide ADEF eſt à la pyramide GKLM: les 4. baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, ſeront és meſmes raiſons que les quatre pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM: Parquoy en raiſon egale, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe GHIKL, ainſi la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIKLM. Donc les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



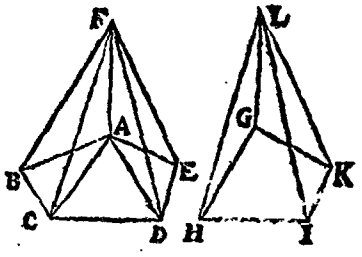
SCHOLIE.

Encore que ſelon pluſieurs Interpretes, il ſoit parlé en la demonſtration de ceſte prop. ſeulement des pyramides de meſme hauteur, deſquelles les baſes polygones ont les coſtez egaux en nombre: toutesfois nous demonſtrerons auſſi le meſme des pyramides de meſme hauteur, la baſe de l'vne deſquelles contient plus de coſtez que la baſe de l'autre. Car ſoient premierement deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIK, la baſe de l'vne deſquelles ſoit polygone, ſçauoir eſt pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe: Car le pentagone eſtant reſoud en triangles, auſſi la pyramide ſera diuiſee en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC premiere quantité eſt à la baſe GHI, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſieſme quantité eſt à la pyramide GHIK quatrieſme quantité. Et en la meſme maniere, comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxieſme quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la 24. p. 5. comme la baſe ABCD premiere & cinquiéme quantité enſemble ſera à la baſe GHI ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité auec la ſixiéme ſera à la pyramide GHIK quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD eſt à



la baſe GHI, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonſtrer: & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ADE cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxiéme quantité, ainſi la pyramide ADEF ſixiéme quantité eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la meſme 24. pr. 5. la baſe ABCDE ſera à la baſe GHI, comme la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: ce qui eſtoit propoſé. En la meſme maniere faudroit touſiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe du polygone. Or puis que comme il a eſté demonſtré, la baſe du polygone ABCDE eſt à la baſe triangulaire GHI, ainſi que la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: pareillement en changeant, comme la baſe GHI ſera à la baſe ABCDE, ainſi la pyramide GHIK ſera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, deſquelles l'vne a la baſe polygone, & l'autre triangulaire, ſont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence: Car encore que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyramide, comme appert par la demonſtration cy-deſſus, toutesfois en changeant, il eſt permis de commencer au triangle & à ſa pyramide, comme il a eſté dict.

Maintenant ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, deſquelles les baſes ſont polygones, & ſont plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre: Ie dis derechef que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe. Car eſtant reſoud le polygone ABCDE és triangles ABC, ACD, ADE: la pyramide ſera diuiſee en autant de pyramides. Et d'autant que comme la baſe triangulaire ABC, premiere quantité, eſt à la baſe polygone GHIK, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité; & comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: auſſi par la 24. prop. 5. comme la baſe ABCD premiere quantité auec la cinquiéme ſera à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité auec la ſixiéme ſera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD premiere quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF tierce quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: & auſſi que comme la baſe ADE quinte quantité, eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ADEF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quarte quantité: pareillement par la 24. propoſit. 5. comme la baſe ABCDE premiere quantité auec la quinte, ſera à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDEF tierce quantité auec la ſixiéme, ſera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: ce qui eſtoit propoſé. Il faudroit touſiours proceder en la meſme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe.



Or nous conuertirons tant ceſte 6. prop. d'Euclide que celle demonſtree en ce Scholie en ceſte maniere.

Les pyramides de quelconques baſes, leſquelles ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere, que les choſes dittes au Scholie de la 5. pr. de ce liure, ont eſté demonſtrées.

COROLLAIRE.

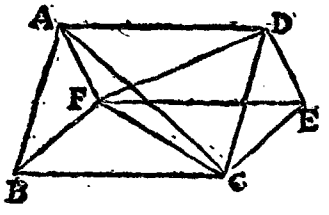
Il appert auſſi que les pyramides de meſme hauteur, conſtituées ſur baſes egales multilateres, ou ſur vne meſme, eſtre egales entr'elles: puis qu'elles ont meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſees egales, ou vne meſme.

Derechef, eſt euident que les pyramides multilateres egales, & conſtruites ſur baſes egales, ou ſur vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans meſme hauteur, ont auſſi les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme. Ce qui ſe peut demonſtrer comme nous auons dict au coroll. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout priſme ayant la baſe triangulaire peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires

Soit le priſme ABCDEF duquel les deux triangles oppoſites ABF, DCE ſont egaux & ſemblables. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires.



Car aux trois parallelogrãmes d'iceluy priſme, ſoient menés les trois diametres AC, CF, FD: d'autant que par la 34. prop. 1. les triangles ABC, ADC ſont egaux, & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ADC, ainſi eſt la pyramide ABCF à la pyramide ADCF, (car elles ont vne meſme hauteur, ſçauoir eſt la perpendiculaire menee du ſommet F au plan BCD) icelles pyramides ſeront egales entr'elles. Par meſme raiſon ſeront egales les pyramides ADFC, EFDC, conſtituees ſur les baſes egales ADF, EFD, & ſous meſme hauteur, ſçauoir de la perpendiculaire menee du ſommet C ſur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF eſt la meſme que la pyramide ADFC: puis que l'vne & l'autre eſt contenue des quatre plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Parquoy tout priſme ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

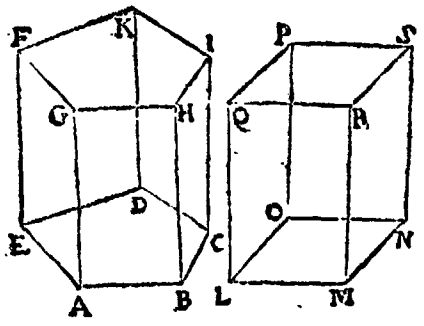
De cecy reſulte que tout priſme eſt triple d'vne pyramide de meſme hauteur, eſtant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales, ou bien qu'vne pyramide eſt la tierce partie d'vn priſme de meſme hauteur, eſtant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons icy la demonſtration d'vne autre propoſition, touchant les priſmes qui ont au ſommet les plans parallels à la baſe, egaux & ſemblables: ceſte propoſition eſt telle.

Les priſmes eſtans ſous meſme hauteur, & ayans quelconques baſes, ſont entr'eux comme leur baſes.

Soient deux prifmes de meſme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, deſquels les baſes ſont figures multilateres. Ie dis que comme la baſe ABCDE eſt à la baſe LMNO, ainſi eſt le prifme au prifme. Car ſi de tous les angles de chaque baſe on tire des lignes droictes à vn poinct du plan ſuperieur, qui eſt oppoſé à la baſe, ſe feront deux pyramides ſous meſme hauteur, ayans meſmes baſes que le prifme: Et partant par le corollaire cy-deſſus, chaque pyramide ſera la troiſiéme partie de ſon prifme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide ſera à la pyramide, ainſi le prifme ſera au prifme: Mais la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 6. prop. de ce liure. Dont auſſi comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le prifme ſera au prifme. Ce qui eſtoit propoſé.



COROLLAIRE.

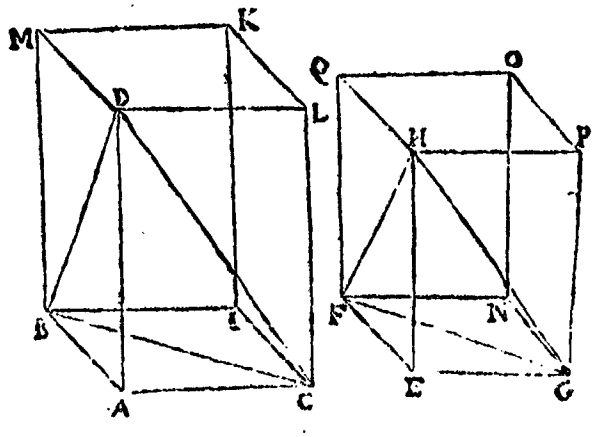
Il eſt manifeſte par ces choſes, que les prifmes de meſme hauteur, & conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales quelles qu'elles ſoient, ſont egaux entr'eux, puis qu'ils ont meſme raiſon entr'eux que leurs baſes, leſquelles ſont vne meſme, ou bien ſont egales.

Appert auſſi par le contraire, que les prifmes egaux, conſtituez ſur vne meſme baſe, ou ſur egales ſont en meſme hauteur: Et que les prifmes egaux de meſme hauteur, ont auſſi meſme baſe, ou egales. Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere qu'a eſté demonſtré la conuerſe de la 31. prop. 11.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides ſemblables ayans baſes triangulaires, ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

Soient deux pyramides ſemblables ABCD & EFGH, ayans baſes triangulaires ABC & EFG: Ie dis qu'elles ſont en raiſon triplee des coſtez de meſme raiſon AC & EG. Car ſoient acheuez les parallelipipedes AK & EO. D'autant que les pyramides ſont ſemblables, les trois angles plans de l'angle ſolide A, (ſçauoir DAC, DAB, BAC) ſeront egaux aux trois angles plans de l'angle ſolide E, (ſçauoir HEG, HEF, FEG) & les coſtez au long d'iceux angles egaux, proportionaux; tellement que comme DA eſt à AC, ainſi HE eſt à EG; & comme DA eſt à DB, ainſi HE eſt à EF; & comme BA eſt à AC,

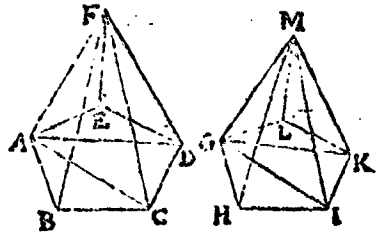


ainſi FE eſt à EG: Parquoy les trois parallelogrammes AL, AM, AI ſeront ſemblables aux trois parallelog. EP, EQ, EN. Mais par la 24. prop. 11. tant les trois AL, AM, AI du parallelipipede AK ſont egaux & ſemblables aux trois oppoſez BK, CK, ML; que les trois EP, EQ, EN du parallelipipede EO, le ſont aux trois oppoſez QN, PN, HO: & partant les ſix plans du parallelelipipede AK ſont ſemblables aux ſix plans du parallelip. EO. Et par la 9. def. 11. iceux parallelipipedes ſont ſemblables. Donc par la 33. prop. 11. ils ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homologues AC & EG. Mais par la 15. prop. 5. comme le parallelipipede AK eſt au parallelip. EO, ainſi la pyramide ABCD eſt à la pyramide EFGH: (car chacune d'icelles pyramides eſt la ſixieſme partie de ſon parallelipipede, puis que chaque parallelipipede peut eſtre diuiſé en deux priſmes egaux par la 38. prop. 11. & chacun priſme en trois pyramides egales par la prec. prop.) donc par la 11. prop. 5. leſdites pyramides ABCD, EFGH, ſont auſſi en la raiſon triplee des meſmes coſtez AC & EG. Parquoy les pyramides ſemblables ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'auſſi les pyramides ſemblables, deſquelles les baſes ont plus de trois coſtez, ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

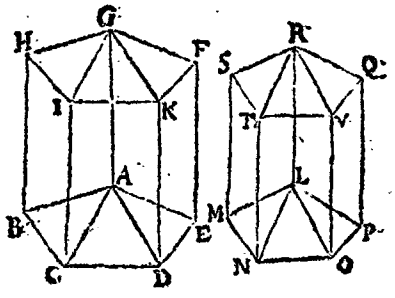
Soient les pyramides ſemblables ABCDEF, GHIKLM, ayans baſes rectilignes ſemblables de pluſieurs coſtez. Ie dis qu'icelles pyramides ſont en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH. Car ſi des angles A & G, on tire aux angles oppoſez les lignes droictes AC, AD: GI, GK: par la 20. prop. 6. les baſes ſemblables ſeront diuiſees en nombre egal de triangles ſemblables, ſçauoir eſt que les triangles ABC, ACD, ADE, ſeront ſemblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides ſont ſemblables, les triangles AFB, GMH, ſont ſemblables, & l'angle FAB, egal à l'angle MGH; & comme FA ſera à AB, ainſi MG ſera à GH: mais comme AB à AC, ainſi GH à GI, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: donc en raiſon egale, comme FA ſera à AC, ainſi MG ſera à GI. Derechef, puis que comme AC eſt à CB, ainſi GI eſt à IH, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: & comme CB à CF, ainſi IH à IM, car à cauſe de la ſimilitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, ſont ſemblables: auſſi en raiſon egale, comme AC ſera à CF, ainſi GI ſera à IM: & partant puis que comme FA à AC, ainſi MG à GI; & comme AC à CF, ainſi GI à IM: pareillement en raiſon egale, comme FA ſera à FC, ainſi MG à MI. Parquoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC, GMI, ſeront equiangles, & partant ſemblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC ſont auſſi ſemblables aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. def. 11. les pyramides ABCF, GHIM, ſont ſemblables. Par meſme raiſon ſeront ſemblables les pyramides ACDF, GIKM: Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. prop. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, ſeront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne, en raiſon triplee des coſtez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au ſien. Veu donc qu'à cauſe de la ſimilitude des baſes ABCDE, GHIKL, il y a vne ſeule & meſme raiſon de AB, CD, DE à GH, IK, KL: auſſi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, vn



ſeule & meſme raiſon, c'eſt à ſçauoir triplee. Et par la 12. prop. 5. comme vne ſeule pyramide ABCF eſt à vne ſeule pyramide GHIM, ainſi toutes les pyramides, ſçauoir eſt la pyramide ABCDEF, eſt à toutes les pyramides, ſçauoir à la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. prop. 12. la pyramide ABEF eſt à la pyramide GHIM en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH; auſſi la pyramide ABCDEF ſera à la pyramide GHIKLM en la raiſon triplee des meſmes coſtez homologues AB, GH: Ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon les priſmes ſemblables ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues: Car ſoient deux priſmes ſemblables ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV: ie dis qu'ils ſont en raiſon triplee des coſtez homologues. Car ſi des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO; par la 20. prop. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, ſeront ſemblables aux triangles LMN, LNO, OPL. ſemblablement, ſi des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV; les triangles GHI, GIK, GKF, ſeront auſſi ſemblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux ſuſdits, puis que par la def. du priſme, tous les plans oppoſites des priſmes ſont ſemblables. Et d'autant qu'à cauſe de la ſimilitude des priſmes, les parallelogrammes CH, NS ſont ſemblables, comme CI ſera à CB, ainſi TN ſera à NM: mais comme BC eſt à CA, ainſi NM eſt à NL, à cauſe de la ſimilitude des triangles. Donc en raiſon egale, comme CI ſera à CA, ainſi TN à NL. Derechef, pource que l'angle ſolide N, eſt egal à l'angle ſolide C, à cauſe de la ſimilitude des priſmes, ſi celuy-cy eſt ſuperposé à l'autre, l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais auſſi la ligne droicte NL conuient à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA ſont egaux. Donc les angles ICA, TNL ſont egaux; & partant puis que les coſtez d'alentour iceux, ont eſté demonſtrés proportionaux, les parallelogrammes CG, NR, ſeront ſemblables. Mais auſſi les parallelogrammes CH, HA, ſont ſemblables aux parallelogrammes NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les priſmes ABCIGH, LMNTRS, ſont ſemblables, par la 8. def. 11. On demonſtrera en la meſme maniere que les priſmes CDAGIK, NOLTRV, ſont ſemblables, comme auſſi les priſmes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les priſmes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF par les choſes demonſtrees à la 34. prop. 11. ſont aux priſmes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au ſien, en raiſon triplee des coſtez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP; chacun au ſien. Et partant en la meſme maniere que nous auons demonſtré cy-deſſus des pyramides multangles, on demonſtrera que les priſmes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, ſont en raiſon triplee des coſtez homologues BC, MN.



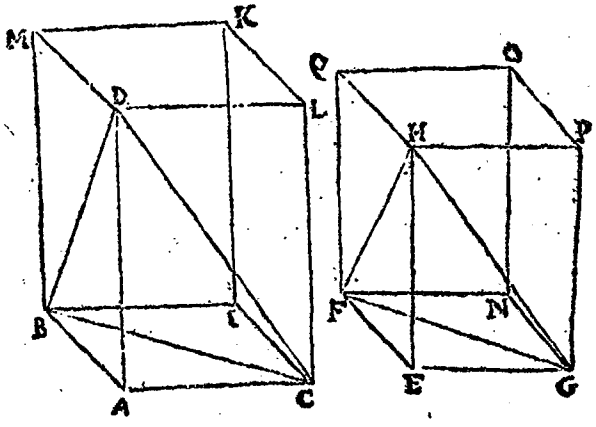
De toutes ces choſes ſe collige, que les pyramides multangles ſemblables, ſe diuiſent en pyramides triangulaires ſemblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Ce qui eſt manifeſte par la demonſtration du preced. corollaire.

Il ſe collige auſſi que les priſmes multangulaires ſemblables, ſe diuiſent en priſmes ſemblables, ayans baſes triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonſtration de ſe ſcholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales ayans baſes triangulaires, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les pyramides ayans baſes triangulaires reciproques à leurs hauteurs, ſont egales.

Soient les pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans baſes triangulaires: ie dis que les baſes d'icelles ſont reciproques à leurs hauteurs, c'eſt à dire que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la hauteur du poinct H à la hauteur du poinct D.



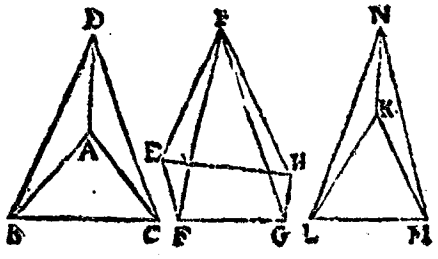
Car ſoient acheuez les parallelipipedes AK, EO; & comme il a eſté dit en la prop. precedente, chacun d'iceux parallelipipedes ſera ſextuple de ſa pyramide. Et les deux pyramides eſtans egales, iceux ſolides AK, EO, ſeront egaux: & par la 34. prop. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux baſes. (C'eſt à dire que comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainſi la baſe EN à la baſe AI) Mais comme EN eſt à AI, ainſi le triangle EFG (moitié de EN) eſt au triangle ABC; (moitié de AI) & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du poinct D eſt à la hauteur du poinct H, ainſi le triangle EFG eſt au triangle ABC.

Pour la ſeconde partie: Si la hauteur du poinct D eſt à la hauteur du poinct H, comme le triangle EFG eſt au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH ſeront egales. Car il eſt euident comme cy deſſus que la hauteur du poinct D, ſera à la hauteur du poinct H, comme la baſe EN à la baſe AI: (d'autant qu'elles ſont doubles des triangles EFG & ABC) ainſi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux baſes: & par la 34. prop. 11. ils ſeront egaux; & par conſequent leurs ſixieſmes parties ſeront auſſi egales, ſçauoir les pyramides ABCD, & EFGH: Parquoy, des pyramides egales ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

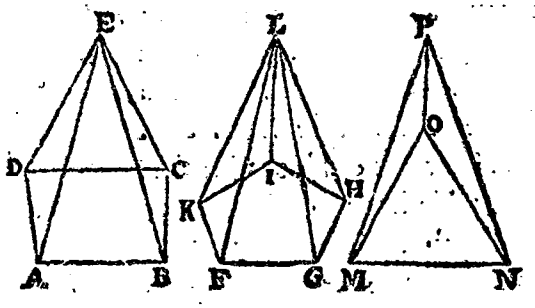
Les pyramides egales, deſquelles les baſes ne ſont triangulaires, ont auſſi les baſes & hauteurs reciproques: & les pyramides deſquelles les baſes ne ſont triangulaires, & ont leurs baſes reciproques à leurs hauteurs, ſont egales. Car ſoient premierement deux pyramides egales, l'vne deſquelles ABCD ait la baſe triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la baſe non triangulaire EFGH; puis ſur iceluy triangle ſoit conſtruicte la pyramide KLMN, de meſme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les baſes egales, & meſme hauteur; elles ſeront egales, par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 6. prop. 12. Mais la pyramide EFGHI a eſté poſee egale à la pyramide ABCD; donc auſſi les pyramides ABCD, KLMN ſeront egales: Parquoy

puis qu'elles ont les baſes triangulaires, par la 9. prop. 12. comme la baſe ABC ſera à la baſe KLM, ou à ſon egale EFGH, ainſi la hauteur de la pyramide KLMN, c'eſt à dire la hauteur de la pyramide EFGHI, ſera à la hauteur de la pyramide ABCD: & partant des pyramides egales ABCD, EFGHI, les baſes & hauteurs ſont reciproques.



Mais maintenant d'icelles pyramides, les baſes & hauteurs ſoient reciproques: ie dis qu'icelles pyramides ſont egales. Car demeurant la meſme conſtruction faite cy-deſſus; puis que la baſe ABC eſt poſee eſtre à la baſe EFGH, comme la hauteur de la pyramide EFGHI à la hauteur de la pyramide ABCD; auſſi la baſe ABC ſera à la baſe KLM, comme la hauteur de la pyramide KLMN ſera à la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides ABCD, KLMN, ſont egales. Mais comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 6. prop. 12. la pyramide KLMN eſt egale à la pyramide EFGHI: donc auſſi la pyramide ABCD ſera egale à la pyramide EFGHI. Ce qui eſtoit propoſé.

Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FGHIKL, ayans baſes multangulaires. Soit fait derechef le triangle MNO egal à la baſe ABCD; & la pyramide MNOP de meſme hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 6. prop. 12. la pyramide MNOP ſera egale à la pyramide ABCDE, laquelle a eſté poſee egale à la pyramide FGHIKL: donc auſſi la pyram. MNOP ſera egale à la pyram. FGHIKL. Parquoy cõme nous auons demonſtré cy-deſſus, ainſi que la baſe MNO, c'eſt à dire la baſe ABCD, ſera à la baſe FGHIK, ainſi la hauteur de la pyramide FGHIKL ſera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'eſt à dire à la hauteur de la pyramide ABCDE: Et partant des pyramides egales ABCDE, FGHIKL, les baſes & hauteurs ſont reciproques.



Mais ſoient maintenant reciproques les baſes & hauteurs d'icelles pyramides: on demonſtrera comme deſſus qu'elles ſont egales.

Or tout ce que nous auons demonſtré cy deſſus peut auſſi conuenir à quelconques priſmes. Car ſi les priſmes eſtoient egaux, auſſi les pyramides de meſme hauteur qu'iceux, ayans les meſmes baſes, ſeroient egales, puis que d'iceux priſmes par le corol. de la 7. prop. 12. elles ſont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le ſcholie de la meſme prop. Parquoy, comme nous auons demonſtré n'agueres, les baſes & hauteurs d'icelles pyramides ſeront reciproques. Veu donc que ces baſes & hauteurs ſont les meſmes que des priſmes, les baſes & hauteurs des priſmes ſeront pareillement reciproques.

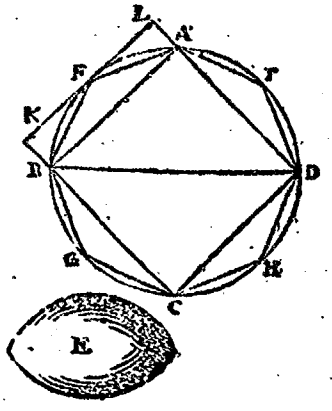
Derechef, ſi les baſes & hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyramides ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Parquoy, comme il a eſté demonſtré, les pyramides ſont egales: & partant auſſi les priſmes, puis que d'icelles pyram. ils ſont triples, ou ſeſquialteres. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre qui a meſme baſe, & egale hauteur.

Soit vn cone, & vn cylindre ayans vne meſme baſe, ſçauoir le cercle ABCD, & vne meſme hauteur. Ie dis que le cylindre eſt triple du cone.

Autrement, il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone: Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible, ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire, que ſi du cylindre ayant pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone ayant pour baſe le meſme cercle ABCD: dans iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, diuiſé en deux triangles par la diagonale BD, & ſur iceux triangles ſoient imaginez eſtre eſleuez deux priſmes de meſme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré eſt plus de la moitié du cercle, il eſt euident qu'iceux deux priſmes ſeront plus de la moitié du cylindre. Que ſi les ſegmens reſtans du cylindre, (les deux priſmes eſtans oſtez) ſont encores plus grands que le ſolide E, ſur les baſes d'iceux ſegmens ſoient faits les quatre triangles Iſoſceles AFB, BGC, CHD, DIA, & ſur iceux ſoient imaginez eſtre eſleuez quatre priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre, dont la baſe eſt le cercle ABCD. Il eſt euident que ces triangles Iſoſceles ſont plus de la moitié des baſes des ſegmens reſtans du cylindre; & par conſequent qu'iceux quatre priſmes ſeront plus de la moitié d'iceux quatre ſegmens: Que ſi les huict petits ſegmens reſtans du cylindre ne ſont plus petits que le ſolide E, ſoit touſiours en ceſte façon ſouſtrait plus de la moitié de ce qui reſtera, iuſqu'à ce que les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E: Ce qui doit aduenir par la 1. prop. 10. Et pour abreger, ſoient iceux huict petits ſegmens plus petits qu'iceluy ſolide E; Il eſt donc manifeſte que la colomne compoſee de ces ſix priſmes, ayant pour baſe le polygone inſcrit au cercle ABCD, & de meſme hauteur que le cylindre donné, ſera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a eſté dit cy-deſſus. Or d'autant que chacun priſme eſt triple de ſa pyramide de meſme hauteur, & ayant baſe egale, (car il peut eſtre diuiſé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'enſuit que tous iceux priſmes faiſans la colomne qui a pour baſe le polygone inſcrit au cercle ABCD, (c'eſt à dire icelle colomne de meſme hauteur que le cylindre) eſt triple de toutes les ſix pyramides, qui font la ſeule pyramide, ayant le meſme polygone pour baſe, & de meſme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide ſera plus grande que le cone de meſme hauteur, qui a le cercle ABCD pour baſe: ce qui eſt impoſſible, n'eſtant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'eſtoit pas plus grand que le triple du cone.



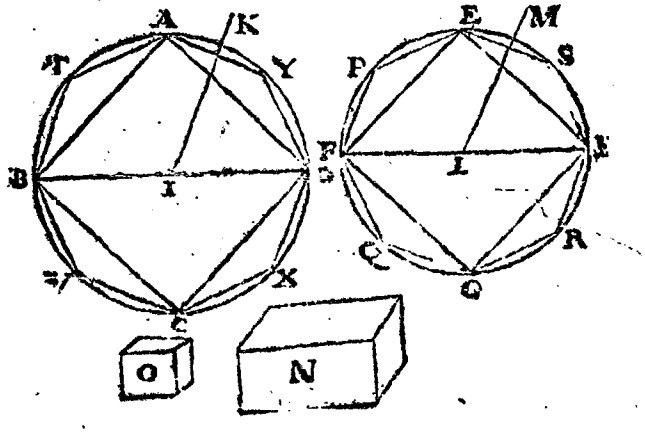
Soit donc plus petit, s'il eſt poſſible; ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire que ſi on retranche le ſolide E du cone, que le reſidu ſoit la troiſieſme partie du

cylindre. Maintenant du cone, qui a pour baſe le cercle ABCD, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de meſme hauteur, ayant pour baſe le quarré ABCD, & du reſidu, ſçauoir des quatre ſegmens F, G, H, I, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de chacun ſegment, de meſme hauteur qu'iceluy ſegment, & ayant pour baſe le triangle Iſoſcelle en iceluy ſegment : ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E : ce qui doit arriuer par la 1. prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huict petits ſegmens plus petits que le ſolide E : il eſt donc euident que la pyramide de meſme hauteur que le cone, qui a iceluy octogone pour baſe, eſt plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle eſt plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le ſolide E. Or iceluy cone ainſi reſcinde eſt le tiers du cylindre donné, & la pyramide eſt auſſi, (comme il a eſté dit cy-deſſus) le tiers de la colomne de meſme hauteur, ayant le meſme octogone pour baſe : Partant icelle colomne ſeroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle eſt partie : Ce qui eſt impoſſible. Donc le cylindre donné n'eſtoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone : il faut donc qu'il luy ſoit egal. Parquoy tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux cones de meſme hauteur, deſquels les baſes ſont les cercles ABCD & EFGH ; les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Ie dis que comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au cone FM ; c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le cone BK ſoit à quelque autre ſolide, comme N ; iceluy ſolide N ſera egal au cone FM.



Autrement, il ſera plus petit ou plus grand : Soit premierement plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité du ſolide O : donc les deux ſolides N & O ſeront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant pour baſe le quarré FGHE : & du reſidu encores plus de la moitié, ſçauoir quatre pyramides de meſme hauteur que le cone, ayans pour baſes les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, en continuant touſiours iuſques à ce que le reſidu ſoit plus petit que

le ſolide O : & ſoit iceluy reſidu pour abreger les huict petits ſegmens : il s'enſuit que la pyramide FM de meſme hauteur que le cone FM, & ayant pour baſe l'octogone EPFQGRHS, ſera plus grande que le ſolide N. Au cercle ABCD, ſoit inſcrit vn polygone ſemblable au polygone inſcrit dans la baſe circulaire EFGH, & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre eſleuee vne pyramide de meſme hauteur que le cone BK. Or par le corol. de la 2. prop. 12. comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le polygone TVXY eſt au poligone PQRS: mais comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au ſolide N, & par la 6. prop. 12. comme le poligone au poligone, ainſi la pyramide à la pyramide de meſme hauteur que les cones : & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXDYK ſera à la pyramide EPFQG RHSM, comme le cone BK au ſolide N. Mais la pyramide ATBVCXDYK eſt plus petite que le cone BK ; la partie que le tout : Donc auſſi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM ſera moindre que le ſolide N. Mais elle a eſté demonſtree auſſi plus grande : ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide N n'eſtoit pas plus petit que le cone FM.

Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible : Or puis que l'on a poſé le cercle ABCD eſtre au cercle EFGH, comme le cone BK au ſolide N ; en permutant, comme le ſolide N ſera au cone BK, ainſi le cercle EFGH ſera au cercle ABCD : Mais comme iceluy ſolide N eſt au cone BK, ſoit auſſi le cone FM à quelque autre ſolide, comme O : Et par la 14. prop. 5. puis que le ſolide N eſt plus grand que le cone FM, auſſi le cone BK ſera plus grand que le ſolide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi le ſolide N eſt au cone BK : par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi le cone FM au ſolide O, plus petit que le cone BK : ce que tantoſt nous auons monſtré eſtre impoſſible. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a poſé la baſe ABCD eſtre à la baſe EFGH, ainſi que le cone ABCDK au ſolide N : & que par la 7. prop. 5. comme le cone ABCDK eſt au ſolide N, ainſi eſt le meſme cone ABCDK au cone EFGHM : pareillement comme la baſe ABCD ſera à la baſe EFGH, ainſi le cone ABCDK ſera au cone EFGHM.

Or ce que nous auons prouué des cones de meſme hauteur, ſe doit auſſi entendre des cylindres de meſme hauteur : d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre eſt triple de ſon cone de meſme hauteur, & ayant baſe egale. Que ſi le cone eſt au cone, comme la baſe à la baſe, auſſi le triple du cone ſera au triple du cone, comme la baſe à la baſe par la 15. prop. 5. c'eſt à dire le cylindre au cylindre, comme la baſe à la baſe. Donc les cones & cylindres de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On peut conuertir ceſte prop. ainſi : Les cones & les cylindres qui ſont entr'eux comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on peut demonſtrer en la meſme façon que nous auons demonſtré la conuerſe de la 31. prop. 11.

COROLLAIRE.

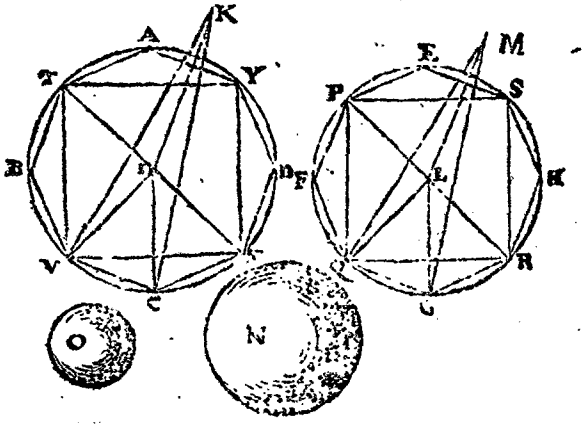
De cecy resulte que les cones, & les cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi egaux. Il s'ensuit encore que les cones & les cylindres egaux constituez sur mesme base, ou sur bases egales sont de mesme hauteur; & que les egaux de mesme hauteur sont sur bases egales, s'ils n'ont vne mesme base. Ce que l'on pourroit aussi demonstrer, comme en la conuerse de la 31. prop. 11.

THEOR. 12. PROP. XII.

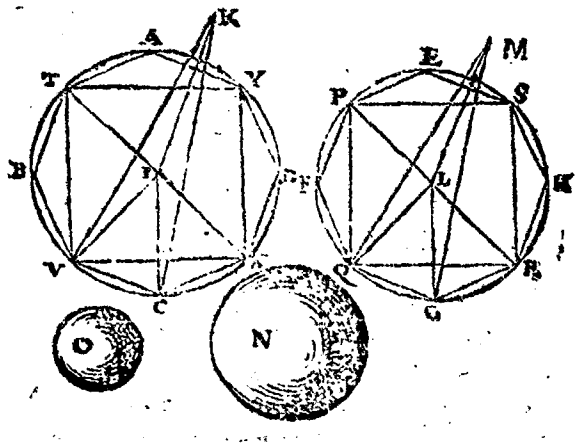
Les cones, & les cylindres semblables, sont l'vn à l'autre en raison triplee des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones, & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux soient IK, LM; & les diametres des bases TX, PR. Ie dis que le cone est au cone, & le cylindre au cylindre, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme N, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, iceluy solide N sera egal au cone EFGHM.

Autrement, il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçauoir de la quantité du solide O: Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EFGHM: & comme en la precedente soit faite distraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que les restes soient plus petits que le solide O: & pour abreger, iceux restes soient les huict petits segmés qui sont à l'entour de la pyramide FM qui a pour base l'octogone EPFQGRHS; tellement qu'icelle pyramide sera plus grãde que le solide N. Maintenant au cercle ABCD soit inscrit vn tel poligone que le plus grand inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY: & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyram. de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, GM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale BK est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide VICK de mesme hauteur que la totale.) On peut dire semblablement que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur



hauteur que ſa totale. Mais d'autant que les cones BK & FM ſont ſemblables par la definition des cones ſemblables, comme le diametre TX eſt au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI eſt au demy diametre QL, ainſi l'axe IK eſt à l'axe LM: & en permutant, comme le demy diametre VI ſera à l'axe IK, ainſi le demy diametre QL à l'axe LM: & les angles VIK & QLM eſtans droicts, (car les cones ſont poſez droicts, & par conſequent les axes d'iceux, ſont auſſi à droicts angles ſur leurs baſes) par la 6. prop. 6. le triangle VIK ſera equiangle au triangle QLM. Item CIK ſera auſſi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les coſtez proportionaux, & ſeront ſemblables. Item VI eſt à CI comme QL à GL, (eſtans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun la huictieſme partie de la circonference pour baſe) & partant par la 6. propoſit. 6. les triangles VIC, QLG, ſeront equiangles; partant ſemblables. Item VC eſt à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC & QLG ſont ſemblables) & pour la meſme raiſon VI eſt à VK, comme QL à QM: & en raiſon egale, VC ſera à VK, comme QG à GM: Et par meſme diſcours VC eſt à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, ſeront l'vne à l'autre, comme les egales QM & GM: Et partant par la 5. prop. 6. les triangles VKC, QMG, ſeront equiangles, & ſemblables: & par la def. des pyramides ſemblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, ſeront ſemblables: Et par la 8. prop. 12. elles ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homologues, ſçauoir des demy diametres VI & QL. Par meſme diſcours on prouuera les ſept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK, proportioneles à vne chacune des ſept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. prop. 5. les toutes ſeront aux toutes, comme l'vne d'icelles eſt à l'vne d'icelles: C'eſt à dire que toute la pyramide BK eſt à toute la pyramide FM, en raiſon triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX au diametre PR; puis que comme VI eſt à QL, ainſi TX eſt à PR par la 15. prop. 5. Mais par noſtre hypotheſe le cone BK eſt au ſolide N, auſſi en raiſon triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK ſera au ſolide N, comme la pyramide ATBVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK eſt plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, auſſi par la 14. prop. 5. le ſolide N ſera plus grand que la pyramide FM: & il a eſté demonſtré eſtre auſſi moindre. Ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide N n'eſt pas plus petit que le cone FM. Qu'il ſoit donc plus grand, s'il eſt poſſible. D'autant qu'õ a poſé que le cone ABCDK eſt au ſolide N en raiſon triples du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK eſt à la pyramide FM en raiſon triplee des meſmes diametres, comme nous auons demonſtré par la 11. prop. 5. comme le cone BK ſera au ſolide N, ainſi la pyramide BK à la pyramide FM: & en permutant, comme N eſt au cone B, ainſi la



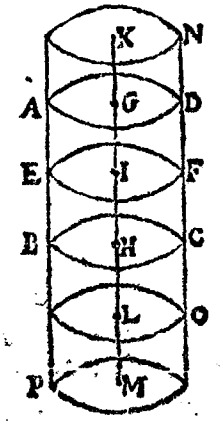
pyramide FM eſt à la pyramide BK. Parquoy puis que par le corol. de la 8. p. 12. la pyramide FM eſt à la pyramide BK en raiſon triplee des coſtez homologues QG à VG : c'eſt à dire du diametre PR au diametre TX : pareillement le ſolide N ſera au cone BK en raiſon triplee des meſmes diametres PR à TX. Soit poſé que comme N eſt au cone BK, ainſi le cone FM ſoit au ſolide O. Donc auſſi le cone FM ſera au ſolide O en raiſon triplee du diametre PR au diametre TX. Et puis que le ſolide N a eſté poſé plus grand que le cone FM: par la 14. prop. 5. le cone BK ſera auſſi plus grand que O. Parquoy le cone FM ſera au ſolide O, moindre que le cone BK, en raiſon triplee du diametre TR au diametre TX : ce qui eſt abſurde. Car il a eſté demonſtré cy-deſſus qu'vn cone ne peut eſtre à vn ſolide moindre qu'vn autre cone, en raiſon triplee des diametres des baſes d'iceux cones. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM: il eſt donc egal. Parquoy par la 7. prop. 5. le cone ABCDK à meſme raiſon au cone EFGHM qu'au ſolide N. Et partant puis qu'on a poſé le cone ABCDK eſtre à N en raiſon triplee des diametres TX & PR : le cone ABCDK ſera auſſi au cone EFGHM en la raiſon triplee des meſmes diametres.

Ceſte demonſtration ſe doit auſſi entendre des cylindres ſemblables : car leurs cones eſtans en raiſon triplee des diametres, par la 15. propoſit. 5. les cylindres qui ſont triples d'iceux cones, ſeront auſſi l'vn à l'autre en raiſon triplee de leurs diametres. Donc les cones, & les cylindres ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, les ſegmens du cylindre ſeront l'vn à l'autre comme les ſegmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF parallel aux plans oppoſez AD & BC, lequel couppe l'axe GH en I. Ie dis que le ſegment du cylindre AF eſt au ſegment du cylindre EC, comme l'axe GI eſt à l'axe IH.



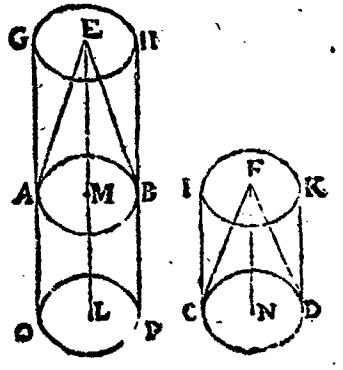
Car ayant continué l'axe GH de part & d'autre, ſoit faite GK egale à GI : & de l'autre coſté HL, LM, chacune egale à IH : Et ſoit imaginé le cylindre ABCD eſtre continué de part & d'autre iuſques aux poincts K & M : Cela eſtant, il eſt euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, ſont tous ſur baſes egales : & par le corollaire de la 11. prop. 12. les deux AF, AN, qui ſont de meſme hauteur, (c'eſt à dire qui ont leurs axes IG, GK egaux) ſont egaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, eſtans de meſme hauteur, ſont auſſi egaux entr'eux. Parquoy l'axe IK eſt autant multiple de l'axe IG, que le cylindre EN eſt multiple du cylindre ED ; & l'axe IM autant multiple de l'axe IH, que le cylindre PF eſt multiple du cylindre BF : Et partant ſi l'axe IK (multiple de IG premiere grandeur) eſt egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiple de IH ſeconde grandeur) auſſi le cylindre EN (multiple du cylindre ED troiſie-

me grandeur) ſera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiple du cylindre BF quatrieſme grandeur) en quelque multiplication que ce ſoit: & partant par la 6. def. 5. l'axe GI ſera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy ſi vn cylindre eſt couppé par vn plan, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans baſes egales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient ſur baſes egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDKI, deſquels les axes ou hauteurs, (car aux cones & aux cylindres droicts, deſquels ſeulement parle Euclide, les axes & les hauteurs ſont les meſmes) ſoient ME, NF. Ie dis que le cone ABE eſt au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME eſt à la hauteur NF.



Car ayant continué l'axe EM, iuſques au poinct L, ſoit faite ML egale à FN; & ſoit imaginé le cylindre AH continué iuſques au plan OP parallel à AB, & paſſant par le poinct L, afin que le cylindre AP ſoit fait de meſme hauteur que le cylindre CK. Et d'autant que le plan AB couppe le total cylindre OPGH, eſtant paſallel aux deux plans oppoſez OP, GH par la precedente prop. les cylindres AH, AP, ſeront entr'eux comme les axes EM & ML: Mais ML eſt egal à FN, & la baſe AB egale à la baſe CD: Donc par le corollaire de la 11. prop. 12. le cylindre AP ſera egal au cylindre CK: Partant comme EM ſera à NF, ainſi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABE, CDF, ſont les tierces parties des cylindres AH, CK: ils auront meſme raiſon qu'iceux cylindres, par la 15. prop. 5. Et partant le cone ABE ſera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la hauteur NF. Donc les cones, & les cylindres conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

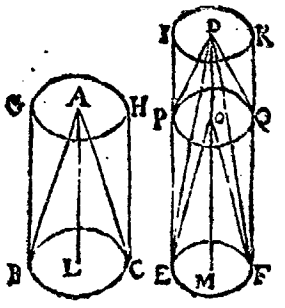
THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les cones, & les cylindres, deſquels les hauteurs ſont reciproques aux baſes, ſont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux; & les cylindres BGHC, EIKF auſſi egaux, deſquels les baſes ſoient BC, EF, & leurs axes ou hauteurs AL, DM. Ie dis que les baſes ſont reciproques aux hauteurs; c'eſt à dire que comme la baſe BC eſt à la baſe EF, ainſi la hauteur DM eſt à la hauteur AL.

Car premierement ſi la hauteur DM eſt egale à la hauteur AL; les cylindres eſtans egaux par le corollaire de la 11. prop. 12. la baſe ſera egale à la baſe; & partant comme la baſe BC ſera à la baſe EF, ainſi la hauteur DM à la hauteur AL. Que ſi

l'vne, comme MD eſt plus grande que AL, ſoit retranchee MO egale à AL; Et ſoit couppé le cylindre EK par le plan PQ, parallel à EF, & paſſant par le poinct O. Donc par la precedente prop. le cylindre EK ſera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO: & partant par la 7. prop. 5. le cylindre BH, egal à iceluy BK, ſera au cylindre EQ, comme MD eſt à MO: & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH eſt au cylindre de meſme hauteur EQ, ainſi la baſe BC à la baſe EF: Et partant par la 11. prop. 5. comme la baſe BC à la baſe EF, ainſi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA ſon egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les baſes & les hauteurs reciproques.



Par meſme diſcours on prouuéra que les baſes & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, ſont reciproques; ſi on conſtruit deux cones ſous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

Maintenant, ſoient les baſes reciproques aux hauteurs: Ie dis que les cylindres BH & EK ſont egaux. Car ayant conſtruict comme deſſus, puis que la baſe BC eſt à la baſe EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO ſon egale: Et par la 11. pr. 12. comme la baſe BC à la baſe EF, ainſi le cylindre BH au cylindre de meſme hauteur EQ: Item par la precedente prop. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainſi le cylindre EK au cylindre EQ: donc par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront meſme raiſon au troiſieſme EQ, l'vn comme l'autre: Et par la 9. prop. 5. ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs reciproques, ils ſeront par le meſme diſcours demonſtrez egaux. Ce qui eſt toutesfois aſſez euident, puis qu'ils ſont par la 10. prop. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

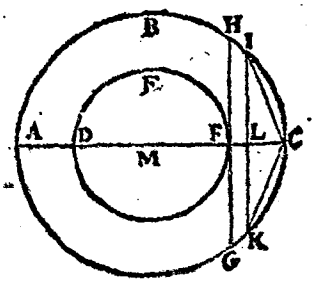
PROBL. 1. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre; inſcrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des coſtez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles inegaux ABC & DEF, à l'entour d'vn meſme centre M: Il faut dans le plus grand ABC, inſcrire vn polygone equilateral, duquel les coſtez ſoient en nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre M le diametre AC, couppant le petit cercle au poinct F; duquel ſoit menee HG perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du grand cercle aux poincts H & G: & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corollaire de la 16. pr. 3. Item ſoit couppee la demye circonference ABC en deux egalement en B: & la moitié BC encores en deux egalement, en continuant touſiours ainſi iuſques à ce qu'on vienne à vn arc plus petit que l'arc HG: ce qui eſt poſſible par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tiree

la ligne droicte ſubtendante IC. Ie dis qu'icelle ligne droicte IC eſt vn coſté du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont touſiours eſté diuiſez par moitiez iuſques à l'arc IC: il eſt euident qu'iceluy arc eſt contenu preciſement certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nombre pair; & par conſequent que la ligne droicte IC ſera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant ſera deſcrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de coſtez pair, lequel ne touchera le moindre cercle DEF. Car de I ſoit menee IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF ſont droicts, les lignes GH, IK ſeront paralleles par la 28. prop. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au ſeul poinct F; la ligne droicte IK ſera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra auec la ligne droicte GH: Donc à plus forte raiſon la ligne droicte IC, qui eſt moindre & plus eſloignee d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partant auſſi les autres coſtez du polygone inſcrit, puis qu'ils ſont egaux à IC, & par conſequent egalement diſtans du centre d'iceluy cercle par la 14. prop. 3. Parquoy deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre, &c. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi de l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel rencontre le diametre, on tire vne ligne droicte perpendiculaire à iceluy diametre, elle ne pourra toucher le moindre cercle, mais tombera toute hors iceluy. Car telle eſt la ligne IK, laquelle du poinct I, extremité du coſté IC rencontrant le diametre AC, eſt tiree perpendiculairement ſur iceluy diametre AC, & a eſté demonſtré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

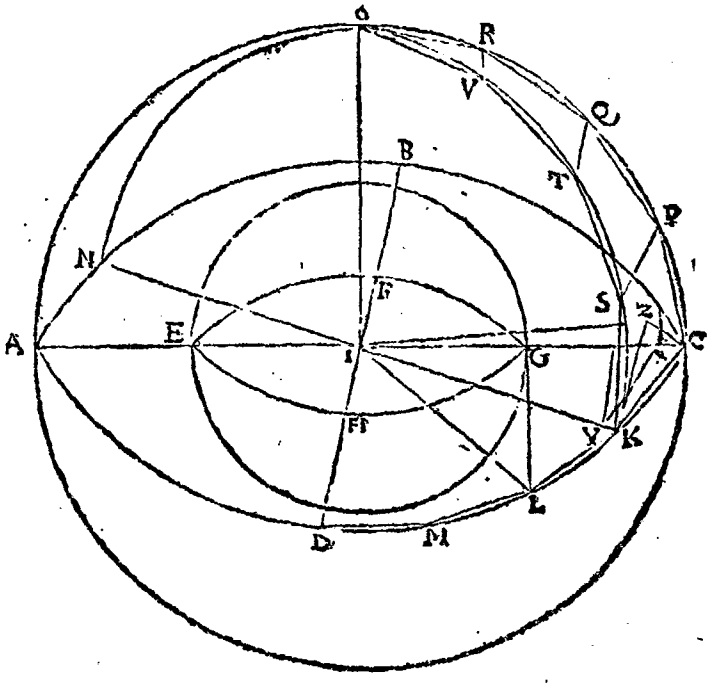
PROBL. 2. PROP. XVII.

Deux ſpheres inegales eſtans ſur vn meſme centre; inſcrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la ſuperficie de la petite ſphere.

Soient deux ſpheres inegales ABCD, EFGH à l'entour d'vn meſme centre I: & il faut dans la plus grande ABCD inſcrire vn ſolide polyedre, ou de pluſieurs coſtez, lequel ne touche la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH.

Les deux ſpheres ſoient couppees par quelque plan paſſant par le centre I: il eſt euident par la def. de la ſphere, que les communes ſections ſeront cercles, & les plus grands de toute la ſphere: d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la ſphere, puis que le plan couppant paſſe par le centre de ladite ſphere: ſoient donc icelles communes ſections, ſçauoir en la plus grande ſphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH: & ſoient leurs diametres AC & BD ſe couppans en angles droicts au centre I: Et dans le cercle de la plus grande ſphere ABCD,

ſoit inſcrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFGH, par la precedente prop. duquel les coſtez de la quarte CD, ſoient CK, KL, LM, MD: Et ayant mené par le centre I le diametre KN, par la 12. prop. 11. dudit centre ſoit menee IO perpendiculaire ſur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la ſuperficie de la plus grande ſphere en O: puis par icelle IO, & chacun des diametres AC, NK, ſoient tirez les plans AOC, NOK, leſquels (par ce qui a eſté dit cy-deſſus) feront en la ſuperficie de la ſphere des grands cercles: & d'iceux ſoient les demy cercles AOC, NOK: Et d'autant que la ligne IO eſt eſleuee perpendiculairement ſur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, ſeront par la 18. prop. 11. eſleuez perpendiculairement ſur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK ſont egaux, (ayans les diametres egaux,) auſſi leurs moitiez ſeront egales, ſçauoir les quartes DC, OC, OK: Parquoy, autant qu'il y aura de coſtez du polygone en la quarte CD, on en pourra inſcrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & KS, ST, TV, VO: & ſoient menees les lignes SP, TQ, VR: Item des poincts P & S ſoient menees par la 11. p. 11. PX, SY perpendiculaires au plan du cercle ABCD, leſquelles par la 38. prop. 11. tomberont ſur les lignes IC, IK, communes ſections d'iceluy plan, & des quarts de cercles IOC, IOK eſleuez perpendiculairement ſur ledit plan ou quart IDC. Soit auſſi menee la ligne XY. Maintenant, puis que les arcs & les cordes PC & SK ſont egales; les angles PXC, SYK droicts, & les angles PCX, SKY egaux; (car ils inſiſtent ſur les peripheres egales AOP, NOS) les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le coſté PC, ſont egaux aux deux angles SKY, SYK, & au coſté SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres coſtez PX, XC ſeront egaux aux autres coſtez SY, YK. Parquoy puis que les deux ſemidiametres IC, IK ſont egaux: & les ſegmens XC, YK, auſſi egaux; les ſegmens IX, IY ſeront pareillement egaux: partant comme IX eſt à XC, ainſi IY eſt à YK: & par la 2. prop. 6. YX ſera parallele à KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY eſtans egales, ſont auſſi paralleles par la 6. prop. 11. & par la 33. prop. 1. SP, YX, ſeront egales & paralleles: & par la 9. prop. 11. SP & KC ſeront paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC ſeront au meſme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CKSP, eſt en vn meſme plan. Par meſme diſcours on mõſtrera



auſſi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn meſme plan. Que ſi des poincts P, Q, R, S, T, V, on imagine des lignes droictes eſtre menees au centre I, on ſe repreſentera vne figure ſolide, compriſe entre OC & OK, compoſee de quatre pyramides, deſquelles le ſommet eſt au centre I, & leurs baſes ſont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR: Et ſi on conſtruit pareillement ſur les coſtez KL, LM, & MD, comme on a fait ſur CK: Et ſemblablement ſur toutes les autres quartes, on aura inſcrit vn poliedre en la ſphere donnee.

Ie dis d'auantage qu'iceluy poliedre ne touche la petite ſphere EFGH. Car ſi du centre I on moine la ligne IZ perpendiculaire ſur le plan SC, elle ſera plus grande que IG demy diametre de la petite ſphere. Car ayant pour l'inſcription du polygone tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle eſt manifeſtement plus grande que CK coſté d'iceluy poligone inſcrit, ſoit tiree IL; & auſſi CZ, KZ. D'autant que par la 3. def. 11. les angles IZC, IZK ſont droicts, le quarré de IC ſera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK: Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, eſtans egaux, les quarrez de IZ, CZ, ſeront egaux aux quarrez de IZ, ZK: oſtant donc le quarré de IZ commun, reſteront egaux les quarrez de CZ, KZ; & par conſequent les lignes CZ, KZ ſont egales. On demonſtrera en la meſme maniere, eſtans tirees des lignes de Z à P & S, qu'elles ſeront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy ſi du centre Z, & de l'interuale de l'vne d'icelles, on deſcrit vn cercle, il circonſcrira le quadrilatere CKSP: duquel les trois coſtez CK, CP, KS, qui ſouſtiennent arcs egaux de cercles egaux, ſont egaux, & l'autre coſté SP plus petit: (car les triangles ICK, IXY eſtans ſemblables, & le coſté IC plus grand que le coſté IX, auſſi le coſté CK ſera plus grand que le coſté XY, qui a eſté demonſtré egal à SP) & partant ſouſtiendra vn plus petit arc que chacun de ces trois là, qui conſequemment ſera moindre que le quart de l'entiere circonference, & chacun de ceux-cy plus grand: Parquoy l'angle CZK ſera plus grand qu'vn droict: & par conſequent le plus grand du triangle CZK: & par la 19. prop. 1. CK ſera plus grand coſté que CZ. Parquoy GL eſtant plus grande que CK, elle ſera auſſi plus grande que CZ: & par conſequent le quarré de GL plus grand que celuy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarrez de IG & GL, ſont egaux aux quarrez de IZ, CZ: (car tant ces deux cy, que ces deux-là ſont egaux au quarré du demy diametre de la grande ſphere, les triangles IGL, ICZ eſtans rectangles) & le quarré de GL, eſt plus grand que le quarré de CZ: le quarré de IZ, ſera plus grand que le quarré de IG; & par conſequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite ſphere EFGH. On prouuera par meſme raiſon que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la grande ſphere ne touchent pas la petite ſphere EFGH. Donc deux ſpheres inegales, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Des choſes cy-deſſus demonſtrees reſulte que ſi en vne autre ſphere on inſcrit vn polyedre ſemblable au polyedre cydeſſus deſcrit, qu'iceux polyedres ſeront en raiſon triplee des diametres des ſpheres, auſquelles ils ſeront inſcrits. Car iceux polyedres eſtans ſemblables par la

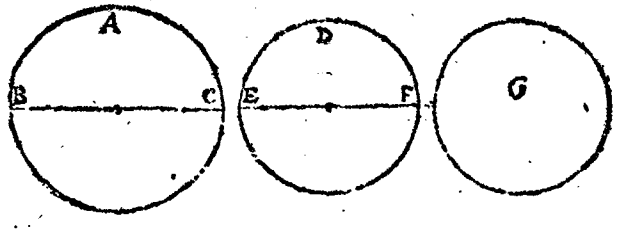
def. des ſolides ſemblables, ils auront en leur conuexité autant de plans ſemblables l'vn comme l'autre : partant ils ſe pourront diuiſer en autant de pyramides ſemblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur ſphere pour vn de leurs coſtez : Partant priſes vne à vne, elles ſeront en raiſon triplee des coſtez homologues, ſçauoir eſt des demy diametres des ſpheres, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raiſon triplee des meſmes demy diametres, par la 12. prop. 5. Et par la 15. prop. 5. en raiſon triplee des diametres entiers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les ſpheres ſont l'vne à l'autre, en raiſon triplee de leurs diametres.

Soient deux ſpheres ABC, DEF, deſquelles les diametres ſont BC, EF. Ie dis qu'elles ſont l'vne à l'autre en raiſon triplee du diametre BC au diametre EF : C'eſt à dire que ſi on imagine que comme la raiſon triplee de BC à EF, ainſi la ſphere ABC ſoit à quelque autre ſphere, comme G : icelle ſphere G ſera egale à la ſphere DEF.

Autrement, elle ſera plus grande ou plus petite. Soit premierement la ſphere G, plus petite que la ſphere DEF, s'il eſt poſſible : Elle pourra donc eſtre cõtenuë dans icelle, ſi on les met toutes deux ſur vn meſme centre : Et partant dans la ſphere DEF, peut eſtre inſcrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite ſphere G par la 17. prop. 12. Et dedãs l'autre ſphere pourra eſtre pareillement inſcrit vn ſemblable polyedre par la meſme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy ſera à celuy-là, en raiſon triplee du diametre BC au diametre EF : mais en telle raiſon, la ſphere ABC eſt poſee eſtre à la ſphere G, & par la 11. prop. 5. comme la ſphere ABC eſt à la ſphere G, ainſi le polyedre de la ſphere ABC, ſera au polyedre de la ſphere DEF. Or la ſphere ABC, eſt plus grande que ſon polyedre, n'eſtant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la ſphere G eſt auſſi plus grande que le polyedre de la ſphere DEF : ce qui eſt impoſſible, n'eſtant que partie d'iceluy. Donc la ſphere ABC, ne peut eſtre en raiſon triplee des diametres BC & EF, à vne autre ſphere plus petite que DEF.



Soit donc la ſphere G plus grande que DEF, s'il eſt poſſible : Et puis qu'on a poſé que la ſphere ABC eſt à la ſphere G, en la raiſon triplee du diametre BC au diametre EF ; en changeant, la ſphere G ſera à la ſphere ABC, en raiſon triplee du diametre EF au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la ſphere G eſt à la ſphere ABC, ainſi la ſphere DEF ſoit à vne quatrieſme proportionele : laquelle ſera plus petite que ABC par la 14. prop. 5. d'autant que G eſt poſee plus grande

que

que DEF: Et partant icelle quatrieſme proport. pourra eſtre inſcrite en la ſphere ABC: Et ſi par la 11. pr. 5. la ſphere DEF ſera à icelle quatrieſme inſcrite dans ABC, en raiſon triplee du diametre EF au diametre BC: ce que nous auons demonſtré eſtre impoſſible. Donc la ſphere G n'a peu eſtre plus grande, ne plus petite que la ſphere DEF, mais egale: & par conſequent les ſpheres ſont l'vne à l'autre en raiſon triplee de leurs diametres. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'vne ſphere eſt à vne ſphere, comme le polyedre deſcrit dans celle-là, eſt au polyedre ſemblable deſcrit en ceſte-cy: pource que tant les ſpheres que les polyedres ſont en raiſon triplee des diametres d'icelles ſpheres, comme il a eſté demonſtré.

Fin du douzieſme Element.

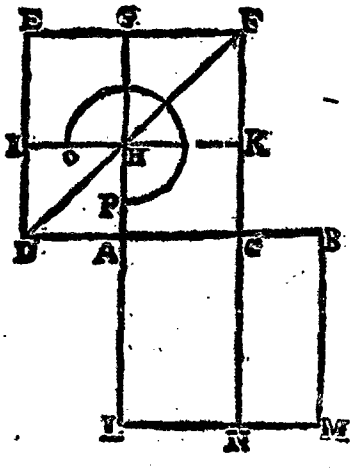
ELEMENT TREZIESME.

THEOR. 1. PROP. 1.

SI vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon : le quarré de la moitié de la toute, & du grand ſegment comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB couppee au poinct C en la moyenne, & extreme raiſon, dont le grand ſegment eſt AC, auquel ſoit adiouſtee AD egale à la moitié de la totale AB : ie dis que le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA.

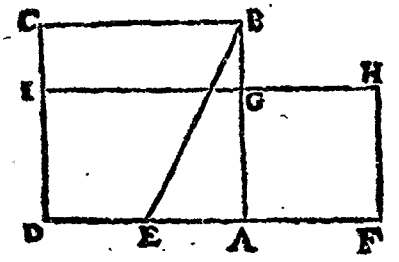
Car ſoit deſcrit ſur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF ; puis ſoit menee AG parallele à DE, couppant le diametre DF en H, par lequel poinct ſoit tiree IK parallele à CD. En apres, ayant prolongé GA, & accomply le quarré AM, ſoit produicte FC iuſques en N. Premierement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, comme AB ſera à AC, ainſi AC eſt à CB ; & par la 17. prop. 6. le rectangle CM compris ſous AB, CB, eſt egal au quarré de AC, ſçauoir GK. Et puis que AB eſt poſee double de DA ; & AL eſt egale à icelle AB ; & AH à AD, auſſi AL ſera double de AH. Mais comme AL eſt à AH, ainſi le rectangle AN eſt au rectangle AK, par la 1. prop. 6. Donc AN eſt double de AK. Et puis que par la 43. prop. 1. AK eſt egal à IG ; AN ſera egal aux deux IG, AK ; adiouſtant donc ces egaux aux egaux CM, KG le quarré AM ſera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI, auſſi le gnomon OP ſera quadruple du meſme quarré AI : & partant ſi au gnomon OP eſt adiou-



ſté le quarré AI ; CE quarré de DC ſera quintuple de AI quarré de DA. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre encore cette prop. ainſi. Soit la ligne droitte AB couppee en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon, de laquelle AB ſoit fait le quarré ABCD, & ayant couppé AD en deux egalement en E ſoit menee BE, & prolongee EA en F, de ſorte que EF ſoit egale à icelle EB; & par ce qui eſt demonſtré en la 11. prop. 2. AF ſera egale à AG ; parquoy appert EF eſtre compoſee du grand ſegment AG & de AE, moitié de la toute AB. Ie dis que le quarré de EF eſt quintuple du quarré de EA. Car puis que AB eſt double de AE, le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AE par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 4. prop. 2. Mais le quarré de EB eſt egal aux quarrez d'icelles AB, AE par la 47. prop. 1. donc le quarré de BE, c'eſt à dire de EF, ſera quintuple du quarré de AE : Ce qu'il falloit prouuer.



Or tout ainſi qu'en la plus part des prop. du 10. liure nous auons ioinct & appliqué les nombres aux lignes, afin d'en rendre les demonſtrations plus claires & euidentes, auſſi le ferons nous en ceſtuy-cy pour le contentement de ceux qui ſe delectent aux opperations numeralles. Donc en la precedente figure la ligne droicte AB ſoit 10, ſa moitié AE 5 ; & leurs quarrez ſeront 100 & 25 : partant le quarré de BE, ou de EF ſon egale ſera 125, qui eſt quintuple de 25 quarré de la moitié AE, comme veut la propoſition.

De cecy appert qu'eſtant cogneue vne ligne droicte couppee en la moyenne & extreme raiſon, on peut facilement cognoiſtre les ſegmens d'icelle. *Car ladite ligne AB eſtant 10, & couppee en la moyenne & extreme raiſon en G, par ce que deſſus EF eſt trouuee de √125, & AE de 5 ; partant le reſte AF, ou AG, qui eſt le grand ſegment, ſera √125—5, qui oſtez de la toute AB 10, reſteront 15—√125 pour le moindre ſegment BG. Les meſmes ſegmens AG, BG ſeront auſſi cogneus par ce qui eſt cy-deuant enſeigné à la fin du 21. chap. de noſtre ſommaire d'Algebre.*

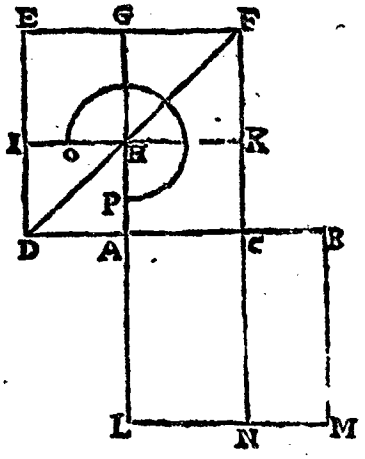
THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple du quarré d'vne partie d'icelle : le double d'icelle partie eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment ſera l'autre partie de la donnee.

Soit la ligne droicte DC diuiſee au poinct A, en ſorte que le quarré d'icelle, ſoit quintuple du quarré de la plus petite partie DA : & ſoit priſe AB double d'icelle AD, laquelle (comme nous demonſtrerons cy apres) ſera plus grande que l'autre partie AC : Ie dis que ſi on diuiſe AB en la moyenne & extreme raiſon, que le grand ſegment ſera AC, autre partie de la donnee DC.

Car ayant fait ſur DC le quarré CE, & acheué la conſtruction comme en la precedente ; les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez par le corol. de la 4. prop. 2. Et puis que AB, c'eſt à dire AL, eſt double de DA, ou AH ſont egale, le rectangle

AN ſera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou egal aux deux AK, IG qui ſont egaux par la 43. prop. 1. Or par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI, & le quarré EC eſt quintuple du meſme par l'hypotheſe: il eſt donc euident que le quarré AM eſt egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, ſont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, ſoit egal au quarré GK, fait ſur vne ligne egale à AC: & partant par la 17. prop. 6. comme BM, c'eſt à dire AB eſt à AC, ainſi AC à CB. Parquoy par la 3. def. 6. la ligne AB ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: & AC autre partie de la totale DC, eſt le grand ſegment d'icelle. Parquoy ſi le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



LEMME.

Que AB double de AD ſoit plus grand que AC, nous le demonſtrerons ainſi. D'autant que par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de AB eſt quadruple du quarré de AD, iceux deux quarrez ſeront enſemble quintuple du ſeul quarré de AD. Mais le quarré de DB eſt plus grand que les quarrez de DA, AB, puis que par la 4. prop. 2. il eſt egal à iceux deux quarrez auec deux fois le rectangle ſous DA, AB. Donc le quarré de DB ſera auſſi plus grand que le quintuple du quarré de AD: & partant plus grand que le quarré de DC, qui eſt poſé quintuple du meſme quarré de AD: parquoy la ligne droicte DB ſera plus grande que la ligne droicte DC: & oſtant DA qui eſt commun, le reſte AB ſera plus grand que le reſte AC.

SCHOLIE.

La ligne donnee DC ſoit 5, & DA √5, afin que le quarré de celle là, qui eſt 25, ſoit quintuple du quarré de celle-cy, qui eſt 5: Donc le reſte AC ſera 5—√5, & AB double de AD ſera √20: laquelle eſtant diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ainſi qu'il a eſté dit au prec. ſcholie, le plus grand ſegment ſera 5—√5, qui eſt egal à AC, comme veut la propoſition.

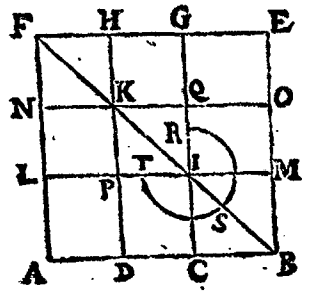
THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon; le quarré du petit ſegment & de la moitié du grand ſegment, comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié du grand ſegment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C, de laquelle le grand ſegment AC eſt couppé en deux egalement en D: ie dis que le quarré du petit ſegment & de la moitié du grand, ſçauoir de BD, eſt quintuple du quarré de DC, moitié du grand ſegment AC.

Car ſur AB ſoit deſcrit le quarré AE, & ayant mené ſon diametre BF, des poincts C & D ſoient menees CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF és poincts I & K, par leſquels ſoient menees LM, NO paralleles à AB, leſquels couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. prop. 2. les quadrilateres LG,

PQ, DO seront quarrez des lignes AC, CD, DB. Donc puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (sçauoir AM) est egal au quarré de la moyenne AC, sçauoir LG, lequel estant par le scholie de la 4. prop. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM sera aussi quadruple de PQ: mais AP & DI estans sur bases egales, sont egaux par la 1. prop. 6. Et DI estant egal à IO par la 43. prop. 1. le gnomon KST sera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: Parquoy adiouſtant à iceluy gnomon le mesme quarré PQ; le quarré DO, descrit de DB sera quintuple d'iceluy quarré PQ, descrit de DC: Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La ligne droicte AB estant 12, le grand segment AC sera √180—6, & le moindre CB 18—√180. Parquoy DC moitié de AC sera √45—3, & son quarré 54—√1620. Mais DB composee de DC & CB sera 15—√45, & son quarré 270—√40500, qui est quintuple du quarré de DC 54—√1620, comme veut la proposition: La conuerse de laquelle est aussi veritable, c'est à sçauoir que

Si vne ligne droicte est couppee en deux segmens inegaux, & que le quarré du moindre segment & de la moitié du grand, comme d'vne seule ligne soit quintuple du quarré d'icelle moitié: cette ligne-là sera couppee en la moyenne & extreme raison.

Soit la ligne droicte AB (en la prec. fig.) couppee inegalement en C, de laquelle le grand segment AC est couppé en deux egallement en D, & le quarré de DB soit quintuple du quarré de CD: Ie dis que la ligne AB est diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison. Car demeurant la mesme construction que dessus, le quarré LG est quadruple du quarré PQ par le scholie de la 4. prop. 2. Mais du mesme quarré PQ est aussi quadruple le gnomon RST, puis que le quarré DO est posé quintuple dudit quarré PQ: donc le gnomõ RST sera egal au quarré LG. Mais il est aussi egal au rectangle AM: donc le quarré LG sera egal au rectangle AM contenu sous AB, BC: & partant par la 17. p. 6. comme AB sera à AC, ainsi AC à CB: Parquoy AB sera couppee en C, selon la moyenne & extreme raison: Ce qui estoit proposé

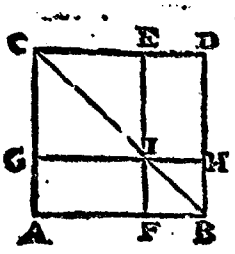
THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & le quarré du petit segment ensemble, sont triples du quarré du grand segment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en F, selon la moyenne & extreme raison, dont AF soit le plus grand segment: ie dis que les quarrez de AB, & FB, sont ensemble triples du quarré de AF.

Car soit descrit sur AB le quarré AD, auquel estant tiré le diametre BC, soit menee de F la ligne EF parallele à AC, couppant BC en I, par lequel soit menee GH parallele à AB. Par le corol. de la 4. prop. 2. les parallelogrammes GE, IH seront quarrez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB,

par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB, FB, ſçauoir AH, eſt egal au quarré de la moyenne AF, ſçauoir GE. Veu donc que AH & FD ſont egaux, le gnomon EBG auec le quarré FH, ſera egal au double du quarré GE: & partant adiouſtant le quarré GE; AD quarré de AB, auec FH quarré de FB, ſera triple de GE quarré de AC. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

La ligne AB ſoit 4; donc le grand ſegment AF ſera √20—2, & le moindre FB 6—√20: & partant leurs quarrez ſeront 16, 24—√320, & 56—√2880: mais celuy-cy adiouſté au premier 16, fait 72—√2880, qui eſt le triple de 24—√320, quarré de l'autre ſegment AF, ainſi que veut la prop. La conuerſe de laquelle eſt auſſi veritable, ſçauoir eſt que

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux inegallement, & que le quarré de la toute auec le quarré du moindre ſegment ſoit triple du quarré du grand ſegment: cette ligne là ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux inegallement en F, de ſorte que le quarré de la toute AB auec le quarré du moindre ſegment FB eſt triple du quarré de l'autre ſegment AF. Ie dis que la ligne droicte AB eſt couppee en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Car ayant conſtruit comme deſſus, d'autant que les quarrez AD, FH ſont triples du quarré GE, eſtant le quarré GE, le gnomon EBG auec le quarré FH ſera double du meſme quarré GE. Mais iceluy gnomon EBG auec ledit quarré FH eſt egal aux deux rectangles AH, FD: donc iceux deux rectangles ſont auſſi double du quarré GE: & partant puis que leſdits rectangles AH, FD ſont egaux, le ſeul AH compris ſous AB, BF ſera egal à iceluy quarré GE: & par la 17. prop. 6. comme AB ſera à GI ou AF, ainſi AF ſera à FB: & partant AB eſt diuiſee en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Ce qui a eſté propoſé.

Nous adiouſterons encore icy la demonſtration que fait Maurolic de cet autre theoreme.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & du moindre ſegment comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré du grand ſegment: & vne ligne droicte eſtant couppee inegallement, ſi le quarré de la toute & du moindre ſegment, comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré du grand ſegment; icelle ligne ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon.

Soit premierement la ligne droicte AD *couppee en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, à laquelle ſoit adiouſtee DB egale au moindre ſegment CD: Ie dis que le quarré de* AB *eſt quintuple du quarré de AC. Car d'autant que par la 17. pr. 6. le rectangle de AD, DC eſt egal au quarré de AC (pour ce que les trois lignes* AD, AC, CD *ſont proport.) quatre fois le rectangle de* AD, DC *ſera quadruple du quarré de* AC, *& conſequemment le quarré de* AC *auec quatre fois le rectangle de* AD, DC *ſera quintuple d'iceluy quarré de* AC. *Mais par la 8. p. 2. le quarré de* AD *eſt egal auſſi quarré de* AC, *auec quatre fois le rectangle d'icelles* AD, DC: *Donc auſſi le quarré de* AD *ſera quintuple du quarré de* AC: *Ce qui eſtoit propoſé.*

Secondement ſoit la ligne droicte AD *diuiſee inegalement en* C, *à laquelle ſoit adiouſtee* DB *egale au moindre ſegment* CD, *& ſoit le quarré de* AB *quintuple du grand ſegment* AC: *Ie dis que* AD *eſt coupppee ſelon la moyenne & extreme raiſon en* C. *Car d'autant que par la*

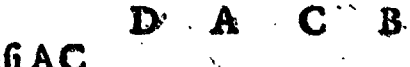
8. pr. 2. *le quarré de* AB *eſt egal au quarré de* AC *auec quatre fois le rectangle de* AD, DC, *auſſi iceux quarré de* AC *& quatre rectangles de* AD, DC, *ſeront enſemble quintuple dudit quarré de* AC: *& partant le rectangle de* AD, DC *quatre fois ſera quadruple d'iceluy quarré de* AC, *c'eſt à dire qu'vn ſeul rectangle de* AD, DC, *ſera egal à iceluy quarré de* AC, *& par la* 17. *prop.* 6. *comme* AD *ſera à* AC, *ainſi* AC *ſera à* CD: *& partant* AD *eſt couppee en* C, *ſelon la moyenne & extreme raiſon. Ce qui eſt propoſé.*

Cette prop. eſt auſſi euidente par nombres: Car ſi AD *eſt* 4, *le grand ſegment* AC *ſera* $\sqrt{20}-2$, *& ſon quarré* $24-\sqrt{320}$. *mais le moindre ſegment* CD *ſera* $6-\sqrt{20}$, *qui adiouſté à* AD, *fait* $10-\sqrt{20}$ *pour la toute* AB, *dont le quarré eſt* $120-\sqrt{8000}$, *qui eſt quintuple de* $24-\sqrt{320}$ *quarrez du grand ſegment* AC.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & à icelle on adiouſte vne ligne droicte egale au grand ſegment; la toute ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera la ligne premierement poſée.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C, dont le grand ſegment eſt AC; & à icelle AB ſoit adiouſtee directement AD egale à AC: ie dis que la toute DB eſt auſſi couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & que le grand ſegment eſt AB.



Car puiſque comme AB eſt à AC, c'eſt à dire AD, ainſi AC eſt à CB; en changeant, comme DA ſera à AB, ainſi BC à AC: & en compoſant, comme DB ſera à AB, ainſi AB à AC, c'eſt à dire AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & le grand ſegment eſt la ligne AB propoſee au commencement. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

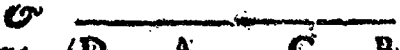
SCHOLIE.

La ligne droicte AB *ſoit* 4, *le moindre ſegment* CB $6-\sqrt{20}$, *& le grand* AC $\sqrt{20}-2$: *Adiouſtant donc à* AB *le grand ſegment* AC, *viendront* $\sqrt{20}+2$, *pour la toute* DB. *Or comme* $\sqrt{20}+2$ *eſt à* 4, *ainſi* 4 *eſt à* $\sqrt{20}-2$; *car multipliant* $\sqrt{20}+2$ *par* $\sqrt{20}-2$, *le produit eſt* 16, *qui eſt le quarré de* 4: *Parquoy eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.*

Clauius apres Campanus demonſtre en cet endroit les deux theorémes ſuiuans.

1. **Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & que du grand ſegment on retranche le moindre: iceluy grand ſegment ſera auſſi couppé en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera cette ligne là, qui eſtoit le moindre ſegment de la premiere ligne.**

Car la ligne droicte DB *ſoit couppee en* A, *ſelon la moyenne & extreme raiſon, & du grand ſegment* AB *ſoit retranchee* AC *egale au moindre ſegment* AD: *Ie dis que le grand ſegment* AB *eſt diuiſé en* C, *ſelon la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment eſtre* AC, *qui eſt egal au moindre ſegment* AD. *Car d'autant que comme la toute* DB *eſt à la toute* AB, *ainſi* AB *retranchee de* BD *eſt à* AD, *c'eſt à dire* AC *retranchee de* AB, *auſſi par la* 19. *prop.* 5. AD *reſte d'icelle* BD, *c'eſt à dire* AC *ſera à* CB *reſte d'icelle* AB, *comme la toute* DB *à la toute*

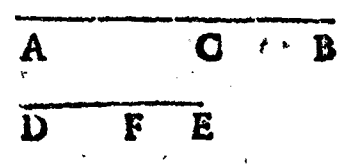


AB, c'eſt à dire comme AB à AC: & partant AB ſera diuiſee en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon: Ce qui eſtoit propoſé.

Le meſme eſt auſſi manifeſte en nombres: Car ſi DB eſt 4, le grand ſegment AB ſera √20—2, & le moindre AD 6—√20, qui retranché de AB reſtera CB de √80—8. Or comme √20—2 eſt à 6—√20, ainſi 6—√20 eſt à √80—8, car le produit des extremes eſt egal à celuy des moyens, ſçauoir eſt 56—√2880: & partant appert ce qui eſtoit propoſé.

2. Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & de la moitié d'icelle on retranche la moitié du grand ſegment; la moitié de la toute ſera auſſi diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera la moitié du grand ſegment de la toute.

Car ſoit AB diuiſee en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & DE ſoit la moitié de la toute, & DF moitié du grand ſegment AC: Ie dis que DE eſt couppee en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que le grand ſegment eſt DF. Car puis que comme la toute AB eſt à la toute DE, ainſi la retranchee AC eſt à la retranchee DF, (car l'vne & l'autre eſt raiſon double) par la 19. prop. 5. le reſte CB ſera auſſi au reſte FE, comme la toute à la toute, & partant CB ſera auſſi double de FE. Mais par la 15. prop. 5. comme AB eſt à AC, ainſi DE moitié de celle-là eſt à FE moitié de celle-cy, & par la def. de la ligne couppee en la moyenne & extreme raiſon AB eſt à AC, comme AC à CB: donc auſſi DE ſera à DF, comme DF à FE: & partant par la meſme def. DE ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon en F. Ce qui eſt propoſé.



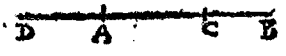
Ce theoreme eſt auſſi manifeſte en nombres: car ſi AB eſt 4, la moitié DE ſera 2, le grand ſegment AC √20—2, & ſa moitié DF √5—1, & partant le reſte FE ſera 3—√5. Or il eſt euident que ces trois nombres 2, √5—1, & 3—√5 ſont continuellement proport. car le produit des deux extremes eſt egal au quarre du milieu, ſçauoir eſt à 6—√20.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon: l'vn & l'autre ſegment eſt ligne irrationele, appellee reſidu.

Soit la ligne droicte rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: ie dis que chaque ſegment AC, BC eſt ligne irrationele appellee reſidu.

Car au grand ſegment AC ſoit adiouſtee directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA, il eſt à iceluy comme nombre à nombre: Et par la 6. prop. 10. iceux quarrez de DC, DA ſeront commenſurables: & par conſequent les lignes DC, DA, ſont auſſi commenſurables, au moins en puiſſance. Or AD eſt rationele, puis qu'elle eſt moitié d'vne rationele AB: Donc auſſi DC ſera rationele. Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8. car ils ſont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, ſeront incommenſ. en longitude, par la 9. prop. 10. & partant rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy ſi de DC rationele on oſte DA commenſurable en puiſſance ſeulement,



par

par la 74. prop. 10. le reſte AC ſera irrationele, appellee reſidu.

Derechef AB eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, le quarré de AC ſera egal au rectangle de AB, CB par la 17 prop. 6. Mais le quarré du reſidu AC applicqué à la rationele AB, doit faire l'autre coſté CB reſidu premier par la 98. prop. 10. Parquoy chacun des ſegmens AC, CB, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Si donc vne ligne droicte rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

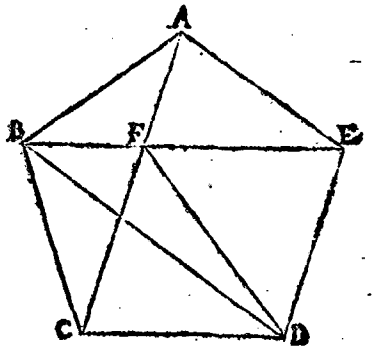
SCHOLIE.

La ligne AB ſoit 4 : donc le grand ſegment AC ſera √10—2, & le moindre ſegment CB 6—√10, l'vn & l'autre deſquels ſegmens eſt reſidu, puis que leurs deux nombres ſont commenſurables en puiſſance ſeulement, &c.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra ſont egaux : il ſera equiangle.

Au pentagone equilateral ABCDE, ſoient trois angles egaux, premierement d'ordre comme A, B, C : ie dis qu'iceluy pentagone eſt equiangle.



Car eſtans tirees à iceux angles egaux A, B, C, les lignes ſubtendantes AC, BE, BD : de F ou s'entrecouppent AC, BE ſoit tiree FD. Or puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BC, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux, auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD ſeront egales, & les angles AEB, BDC egaux. Mais par la 5. prop. 1. les angles BED, BDE ſont auſſi egaux, les deux coſtez BE, BD ayans eſté prouuez egaux : Donc l'angle total AED ſera egal au total CDE. Derechef, puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BA, BC du triangle ABC, & les angles A & B contenus d'iceux egaux, par la 4. prop. 1. la baſe BE ſera egale à la baſe AC, & les angles ABE, AEB egaux aux angles BAC, BCA, chacun au ſien : & partant les angles FAB, FBA du triangle ABF ſont egaux : donc les coſtez AF, BF ſeront auſſi egaux : & partant iceux eſtans oſtez des ſubtendantes egales AC, BE les reſtes FC, FE ſeront egales. Parquoy les deux coſtez FC, CD du triangle CFD ſeront egaux aux coſtez FE, ED du triangle DFE, & la baſe FD commune : donc par la 8. prop. 1. les angles FCD, FED ſeront egaux. Mais ACB, AEB ont eſté prouuez egaux : donc les touts BCD, AED ſont egaux : Parquoy AED, ayant eſté monſtré egal à CDE, tous les angles du pentagone ſeront egaux entr'eux par la 1. com. ſent. & conſequemment iceluy pentagone ABCDE ſera equiangle.

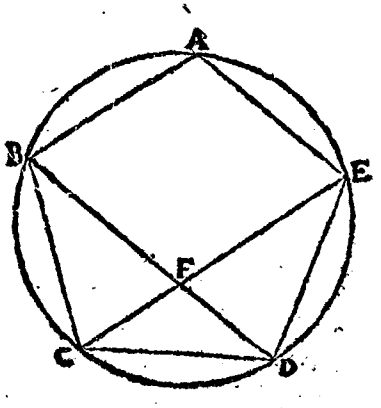
Secondement, ſoient les trois angles A, C, D, non d'ordre, egaux. D'autant que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux aux coſtez CB, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD, & les angles AEB, BDC ſeront egaux : Mais par la 5. pr. 1. les coſtez BE, BD eſtans egaux, les angles BED, BDE ſeront pareillement egaux ; donc l'angle total AED ſera egal

au total CDE. Et puis que les angles BAE, CDE ont eſté poſez egaux: les trois angles A, E, D, qui ſont d'ordre, ſeront egaux: & partant comme il a eſté deſia monſtré, le pentagone ſera equiangle. Donc ſi en vn pentagone equilateral, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes ſubtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſoient d'ordre; elles ſe coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raiſon, & leurs grands ſegmens ſeront egaux au coſté du pentagone.

Au pentagone ABCDE equiangle & equilateral ſoient deux lignes droictes BD, CE, ſubtendantes les angles C, D, qui ſont d'ordre, leſquelles s'entrecouppent en F. Ie dis qu'elles ſe couppent en la moyenne & extreme raiſon, & que chacun de leurs grãds ſegmens BF, EF ſera egal à quelconque coſté du pentagone.



Car ayant deſcrit par la 14. prop. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA ſeront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux coſtez egaux, & l'angle compris d'iceux auſſi egal par l'hypotheſe; les baſes BD, CE, & les angles CDB, DCE ſeront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF ſont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC eſt egal à iceux: iceluy BFC ſera double de DCE. Mais par la 33. prop. 6. l'angle BCE eſt auſſi double du meſme DCE, pource que l'arc BAE eſt double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCF ſont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF eſt egale au coſté du pentagone BC. Et d'autant que par la 17. prop. 3. les angles DBC, ECD, inſiſtans ſur arcs egaux, ſont egaux; les deux angles DBC, CDB du triangle BCD ſont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD ſeront equiangles par la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. p. 6. comme BD ſera à DC, c'eſt à dire à BF, ainſi CD ou BF ſera à FD: & partant la ſubtendante BD eſt couppee en F, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment BF eſt egal à BC coſté du pentagone. Par meſme raiſon on demonſtrera CE eſtre couppee en la moyenne & extreme raiſon en F, & que le grand ſegment EF eſt egal à DE coſté du pentagone. Parquoy ſi deux lignes droictes ſubtendent deux angles d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

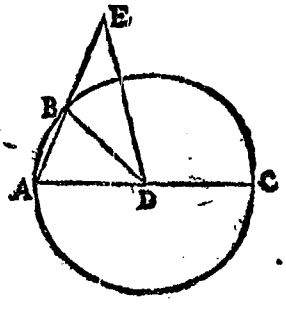
On peut facilement demonſtrer que la ligne droicte qui ſouſtient l'angle du pentagone equilateral & equiangle eſt parallele au coſté oppoſé, c'eſt à dire que CE eſt parallele au coſté AD, & BD au coſté AE: car ayant deſcrit vn cercle à l'entour du pentagone, d'autant que par la 32. p. 3. tant les deux angles AEC & BCE, que les deux ABC, AEC ſont egaux à deux droicts,

& que A, ABC sont egaux entr'eux, le pentagone estant equiangle, les deux autres BCE, ACE seront aussi egaux. Veu donc que A & BCE sont egaux à deux droicts; A & AEC sont aussi egaux à deux droicts, & par la 28. prop. 1. AB, CE seront paralleles, &c.

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le grand segment est le costé de l'hexagone.

Au cercle ABC soit inscrite la ligne droicte AB, costé du decagone, à laquelle soit adioustee directement BE egale au demy diametre du cercle, c'est à dire au costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle, car il luy est egal par le coroll. de la 15. p. 4. Ie dis que AE est couppee en la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le grand segment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB estant la dixiesme partie de toute la periphere du cercle, sera la cinquiesme de l'arc ABC, moitié d'icelle periphere: & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. prop. 1. l'angle BDC estant exterieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels estans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD est Isoscele, l'vn ou l'autre sera double de ADB: mais l'vn d'iceux DBA estant exterieur, est egal aux deux opposez interieures DEB & BDE: (lesquels sont egaux, estant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont egaux par la construction) donc l'angle DBA sera double de l'angle E; qui par consequent sera egal à l'angle ADB: Parquoy les deux triangles AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, l'angle E egal à l'angle ADB, & par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers: donc par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB: partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B: & BE costé de l'hexagone est le grand segment. Donc la ligne droicte composee du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

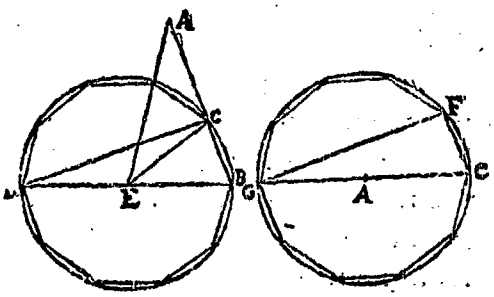
De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant couppé en la moyenne & extreme raison, le grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on couppe vne partie egale à AB: comme la toute AE sera à la toute BE, ainsi la retranchee BE sera à la retranchee de BE, c'est à dire à AB: & partant par la 19. prop. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le grand segment sera AB costé du decagone.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre apres Campanus la conuerſe de cette propoſition ainſi qu'il enſuit.

Si le grand ſegment d'vne ligne diuiſee en la moyenne & extreme raiſon eſt le coſté de l'hexagone de quelque cercle ; le moindre ſegment ſera le coſté du decagone du meſme cercle. Que ſi le petit ſegment eſt le coſté du decagone de quelque cercle, le grand ſegment ſera le coſté de l'hexagone du meſme cercle.

Car ſoit AB diuiſee en C ſelon la moyenne & extreme raiſon, & ſoit premierement le grand ſegment AC coſté de l'hexagone du cercle BCD : Ie dis que le petit ſegment BC eſt le coſté du decagone inſcrit au meſme cercle. Car BC eſtant accommodee au cercle, en ſorte que CA tombe hors le cercle, ſoit tiree de B par le centre E le diametre BED, & les lignes EA, EC. Donc puis que comme AB eſt à AC, ainſi AC eſt à CB, & que AC eſt egale au ſemidiametre EB par le corol. de la 15. prop. 4. Auſſi comme AB ſera à BE, ainſi EB à BC : & par la 6. prop. 6. les triangles ABE, EBC ſeront equiangles, puis qu'ils ont les coſtez de l'angle commun B proportionnaux ; & l'angle A ſera egal à l'angle BEC. Derechef, pource que les coſtez CA, CE ſont egaux, par la 5. prop. 1. les angles CAE, CEA ſeront egaux, & puis que par la 32. prop. 1. à iceux eſt egal l'angle externe BCE ; iceluy BCE ſera double de l'angle A : Mais par la 5. prop. 1. l'angle CBE eſt egal à l'angle BCE, à cauſe de l'egalité des coſtez EB, EC : donc auſſi CBE ſera double de l'angle A : & partant les deux angles BCE, CBE enſemble ſeront quadruple du meſme angle A. Et puis que l'angle externe CED eſt egal aux internes BCE, CBE, auſſi CED ſera quadruple du meſme angle A, & partant de l'angle BEC ſon egal : & par la 33. prop. 6. l'arc DC ſera pareillement quadruple de l'arc CB : & partant l'arc du demy cercle BCD ſera quintuple du meſme arc BC, & conſequemment toute la periphere du cercle ſera decuple d'iceluy arc BC : Parquoy la ligne droicte BC eſt le coſté du decagone.

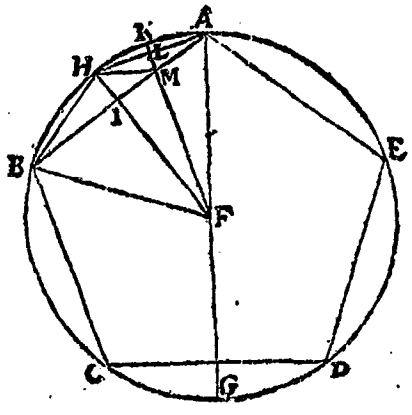


Maintenant, le moindre ſegment CB ſoit le coſté du decagone du cercle BCD. Ie dis que le grand ſegment AC eſt le coſté de l'hexagone : Car derechef ſoit accommodé au cercle BCD, le ſegment BC, & ſoit tiré le diametre BED : puis de l'interualle AC ſoit deſcrit le cercle CFG, duquel le diametre eſt CAG, & par le corol. de la 15. prop. 4. AC ſera coſté de l'hexagone du cercle CFG. Donc puis que AB eſt couppee en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que le grand ſegm. AC eſt coſté de l'hexagone du cercle CFG, le petit ſegment CB, comme il a ia eſté demonſtré, ſera coſté du decagone du meſme cercle CFG. Soit donc deſcrit en iceluy cercle CFG, le decagone equilateral & equiangle CFG : Item au cercle BCD, le decagone equilateral & equiangle BCD, & les coſtez BC, CF ſeront egaux entr'eux : Mais d'autant que les lignes droictes CD, FG eſtans tirees, les angles CDB, FGC inſiſtans ſur arcs ſemblables BC, CF, ſont egaux, comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 22. prop. 3. & que les angles BCD, CFG eſtans au demy cercle ſont auſſi egaux, ſçauoir droicts par la 31. prop. 3. les coſtez BD, CG ſeront pareillement egaux entr'eux par la 26. prop. 1. Parquoy les diametres BD, CG eſtans egaux, les cercles BCD, CFG ſeront auſſi egaux : & partant puis que la ligne droicte AC eſt coſté de l'hexagone du cercle CFG, auſſi la meſme AC ſera le coſté de l'hexagone du cercle BCD. Ce qui eſt propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du coſté du pentagone equilateral inſcrit en vn cercle, eſt egal aux deux quarrez des coſtez du decagone, & de l'hexagone, inſcrits au meſme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre eſt F, ſoit inſcrit vn pentagone equilateral, vn coſté duquel eſt AB. Ie dis que le quarré d'iceluy coſté AB eſt egal aux deux quarrez des coſtez de l'hexagone, & du decagone inſcrits au meſme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG, & ioinct FB, ſoit couppé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle couppe auſſi la ligne droicte AB en I, & ſoient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH ſera coſté du decagone, & FB coſté de l'hexagone: En apres, ſoit couppé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle couppe auſſi la ligne droicte AH en L, & la ligne droicte AB au poinct M, auquel ſoit menee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH ſont egaux, auſſi ſeront egaux les angles AFH, BFH appuyez ſur iceux, par la 27. pr. 3. Parquoy les coſtez AF, FB eſtans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la baſe AI ſera egale à la baſe BI, par la 4. prop. 1. & les angles AIF, BIF auſſi egaux, & partant droicts. Par meſme raiſon ſeront egales les lignes droictes AL, HL, & les angles ALF, HLF droicts. Or ſi des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oſte arcs egaux ABC, AED, reſteront egaux les arcs CG, GD, & partant l'arc CG ſera moitié de l'arc CGD. Mais auſſi l'arc AH eſt moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD ſont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux, ſeront auſſi egaux: & partant l'arc AH eſtant double de l'arc HK, auſſi le ſera CG. Et puis que les arcs AB, BC ſont egaux, & l'arc AB eſt double de l'arc BH, l'arc BC ſera pareillement double du meſme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC ſont equemultiplices, ſçauoir eſt doubles des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG ſera double de l'arc BK: & par conſequent l'angle BFG auſſi double de l'angle BFK, par la 33. prop. 6. Mais par la 20. prop. 3. le meſme angle BFG au centre, eſt double de l'angle FAB en la circonference: donc les angles BFM, FAB ſeront egaux, & partant l'angle ABF eſtant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers par la 32. prop. 1. iceux triangles ſeront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB ſera à BF, ainſi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM ſera egal au quarré de BF. Dereſhef, puis que les coſtez AL, LM du triangle ALM ſont egaux aux coſtez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux, ſçauoir droicts, par la 4. prop. 1. les baſes AM, HM, & les angles LAM, LHM ſeront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM eſt egal à l'angle HBA, pource que les coſtez HA, HB ſont egaux: Donc auſſi l'angle LHM ſera egal au meſme HBA: & partant par la 32. prop. 1. les triangles ABH, AHM ſeront equiangles, puis

qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. prop. 6. comme AB ſera à AH, ainſi AH à AM: & par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, AM ſera egal au quarré de AH. Mais il a eſté demonſtré que le rectangle de AB, BM, eſt egal au quarré de BF: donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM enſemble, ſont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. prop. 2. iceux rectangles ſont egaux au quarré de AB: donc le quarré de AB coſté du pentagone eſt egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, coſtez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui eſtoit à prouuer.

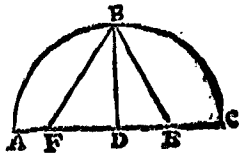
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte qu'vne ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuiſe en deux egalement vn arc, diuiſe auſſi la ligne ſubtendante d'iceluy arc en deux egalement, & à angles droicts.

Eſt auſſi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuiſe en deux egalement l'arc que le coſté oppoſé à iceluy angle ſubtend, comme auſſi iceluy coſté oppoſé, & à angles droicts. Car il a eſté demonſtré que le diametre AG tiré du poinct A, diuiſe en deux egalement l'arc CD, lequel le coſté oppoſé CD ſubtend: Parquoy par ce que deſſus, il couppera auſſi en deux egalement & à angles droicts iceluy coſté CD. La meſme demonſtration ſera en tout polygone equilateral inſcrit au cercle, le nombre des coſtez eſtant impair, tellement que ſi d'vn angle de quelconque polygone regulier dont le nombre des coſtez eſt impair, on meine vne ligne droicte par le centre d'iceluy qui couppe le coſté oppoſé; elle couppera les angles en deux egalement, comme auſſi ledit coſté, & à angles droicts. Mais au contraire, ſi elle couppe l'angle, ou le coſté en deux egalement, ou à angles droicts: icelle ligne paſſera par le centre.

SCHOLIE.

Au quatrieſme liure, Euclide a enſeigné à deſcrire au cercle vn pentagone equilateral: Mais Ptolomee au premier liure de ſa grande conſtruction a enſeigné vn autre moyen, beaucoup plus bref & facile pour deſcrire tant ledit pentagone que le decagone; lequel moyen nous auons deſia rapporté en noſtre Conſtruction de la table des ſinus: & neantmoins nous le rapporterons encore icy. Soit donc vn cercle ABC, duquel le centre eſt D, & ayant tiré le diametre AC, du centre D ſoit eſleuee DB perpendic. à AC; & apres auoir couppé en deux egalement le ſemidiametre DC en E, & menee BE ſoit priſe EF egale à EB, & tiree BF. Ie dis que BF eſt le coſté du pentagone, & DF le coſté du decagone. Car puis que CD eſt couppee en deux egalement en E, & qu'à icelle eſt adiouſtee DF, par la 6. pr. 2. le rectangle de CF, FF auec le quarré de DE eſt egal au quarré de FE, ou EB ſon egale. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EB eſt egal aux quarrez de BD, DE: donc le rectangle de CF, DF, auec le quarré de DE ſera auſſi egal aux quarrez de BD, DE: & oſtant le quarré de DE commun, reſtera le rectangle de CF, FD egal au quarré de BD, c'eſt à dire au quarré de CD: & par la 17. prop. 6. comme CF ſera à CD, ainſi CD à DF: & partant la ligne droicte CF ſera diuiſee en D ſelon la moyenne & extreme raiſon. Veu donc que le grand ſegment CD eſt le coſté de l'hexagone du cercle ABC par le coroll. de la 15. prop. 4. le moindre ſegment DF ſera le coſté du decagone du meſme cercle par le ſchol. prec. Et pource que par cette 10. prop. le quarré de BF, coſté de l'hexagone, auec le quarré de DF, coſté du decagone, eſt egal au quarré du coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle, & que par la 47. pr. 1. le quarré de BF eſt egal aux ſuſdits quarrez de BD, DF, le quarré du coſté du pentagone ſera egal au quarré de BF; & partant la



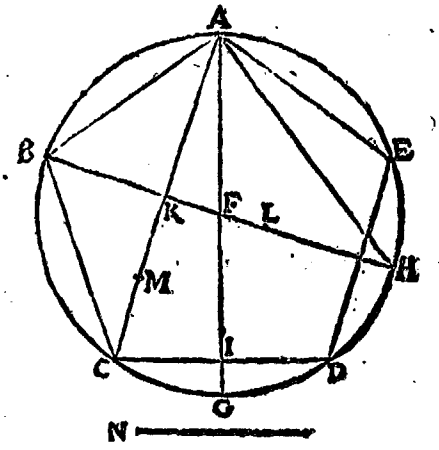
ligne droicte BF eſt egale au coſté du pentagone. Ce qui a eſté propoſé.

De cecy appert qu'eſtant cogneu le diametre d'vn cercle, on cognoiſtra aiſement le coſté tant du pentagone que du decagone inſcriptibles en iceluy cercle. Car le diametre AC eſtant 8, BD ſera 4, & DE 2 : partant BE ou EF ſera √20, & oſtant DE d'icelle EF, reſtera DF √20—2, qui eſt le coſté du decagone : Et pource que le quarré d'iceluy coſté FD eſt 24—√320, & celuy de BD 16 ; le quarré de BF ſera 40—√320, & partant icelle BF, qui eſt egale au coſté du pentagone ſera √(40—√320).

THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inſcrit vn pentagone equilateral ; le coſté du pentagone eſt irrationel, appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, inſcrit dans le cercle ABCDE, duquel le diamatre eſt rationel : ie dis que AB, coſté du pentagone, eſt irrationel, appellé ligne mineure.



Car ſoient menez par le centre F les diametres AG, BH, deſquels AG couppera le coſté CD en deux egalement en I, & à angles droicts par le corol. de la preced, ſoient auſſi tirees les lignes droictes AC, AH, deſquelles AC ſera couppee par le diametre BH en deux egalemẽt en K par le corol. de la preced. Partant eſt manifeſte que les deux triangles ACI & AKF ſont equiãgles : car l'angle du poinct A eſtant commun à tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC ; le tiers ſera egal au tiers par la 32. prop. 1. Et par la 4. prop. 6. comme IC à CA, ainſi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel eſt rationel & egal à A) ſoit retranchee FL egale au quart de FA, laquelle FL ſera rationele, eſtant le quart d'vne ligne rationele, & par la 16. prop. 10. BL compoſee des deux BF, FL, & commenſurable à chacune d'icelles, ſera auſſi rationele. Item de AC ſoit retranché CM quart d'icelle ligne : Et par la 15. prop. 5. CI ſera à CM quart de CA, comme KF à FL quart de FA : Que ſi on double les deux CI & CM par la 15. prop. 5. CD ſera à CK (car elle eſt la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL : & en compoſant, comme les deux CD & CK enſemble à CK, ainſi KL à FL : Et par la 22. p. 6. le quarré de la compoſee de CD & CK ſera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon (ſçauoir eſt eſtant tiree la ligne droicte BD) par la 8. prop. 13. ſon plus grand ſegment eſt egal au coſté du pentagone, ſçauoir à iceluy CD ; par la 1. p. 13. le quarré de la compoſee de CD plus grand ſegment, & de CK moitié de la toute CA, ſera quintuple du quarré de CK, moitié de la toute : partant auſſi le quarré de KL, ſera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL eſt auſſi quintuple de FL, eſtant FL quart de FB ; donc comme BL à FL, ainſi le quarré de KL au quarré de

FL, c'eſt à dire en raiſon doublee de KL à FL: car iceux quarrez ſont en cette raiſon par la 20. prop. 6. dont s'enſuit que KL ſera moyenne proportionelle entre BL & FL. Mais par le corol. de la meſme propoſition le quarré de BL ſera au quarré de KL, comme BL à FL, c'eſt à dire que le quarré de BL ſera quintuple du quarré de KL: donc iceux quarrez ſeront entr'eux comme nombre à nombre, & partant commenſurables par la 6. pr. 10. & conſequemment les lignes BL, KL ſeront commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance: Mais leurs quarrez eſtans entr'eux comme 5 à 1, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré par la 9. prop. 10. icelles lignes BL & KL, ſeront incommenſurables en longitude: & partant BL ayant eſté monſtree rationelle, icelles BL & KL ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 74. prop. 10. BK ſera reſidu.

Maintenant, que la ligne BL puiſſe plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que le quarré de BL, qui eſt quintuple du quarré de KL eſt egal aux deux quarrez de KL & N, iceux quarrez de BL & N ſeront entr'eux comme 5 à 4, & partant commenſ. par la 6. prop. 10. & conſequemment les lignes BL & N, commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance: Mais BL a eſté monſtree rationelle: donc N le ſera auſſi. Et pource que les quarrez d'icelles BL & N ſont entr'eux comme 5 à 4, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre qnarré à nombre quarré, icelles lignes BL & N ſeront incommenſurables en longit. par la 9. p. 10. & partant rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Donc la toute BL eſtant rationelle commenſ. en longitude à la rationelle propoſee BE (car BL eſt de 5 parties telle que BH en a 8) peut plus que ſa conuenable KL du quarré de N, qui luy eſt incommenſ. en longit. partant BK ſera reſidu quatrieſme par la 4. des tierces def. du 10.

Finalement, pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB eſt moyenne proportionele entre BH, BK; (car par la 31. prop. 3. le triangle ABH a l'angle BAH droict, duquel eſt tiree AK perpend à la baſe BH) le quarré de AB ſera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la ſuperficie contenue de la rationele BH & du reſidu quatrieſme BK: par la 95. prop. 10. icelle AB ſera ligne mineure. Parquoy ſi dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

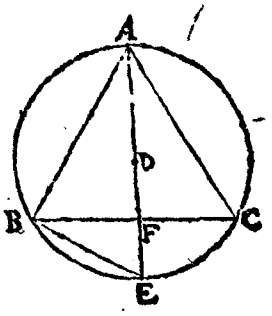
Le diametre BH ſoit 8: donc BE ſera 4, BL 5, & AB $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& par conſequent ſon quarré ſera* $40-\sqrt{320}$, *qui diuiſé par BH 8, viendront* $5-\sqrt{5}$ *pour BK; & conſequemment KL ſera* $\sqrt{5}$, *qui eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à BL, leurs quarrez 5 & 25, eſtans en raiſon quintuple; partant BK eſt reſidu. Et puis que BL peut plus qu'icelle KL du quarré de N, iceluy quarré ſera 20, &* $N\sqrt{20}$, *qui eſt incommenſurable en longitude à la toute BE 5; & partant BK ſera reſidu quatrieſme. Mais le quarré de AB* $40-\sqrt{320}$ *eſtant egal au produit d'iceluy reſidu* $5-\sqrt{5}$ *multiplié par la rationele BH 8; icelle* $AB\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *qui eſt le coſté du pentagone, ſera ligne mineure, comme veut la propoſition. Les nombres appliquez aux autres lignes de la fig. ſeront tels qu'ils enſuiuent: KE ſera* $\sqrt{5}-1$, *CK* $\sqrt{(10+\sqrt{20})}$, *AC* $\sqrt{(40+\sqrt{320})}$, *CM* $\sqrt{(2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}})}$, *&* $CI\sqrt{(10-\sqrt{20})}$.

THEOR.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit au cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.



Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. propos. de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E; & aussi la ligne droicte BC en deux egalement & à angles droicts: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiéme partie: partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone, & egale au demy diametre DE par le corol. de la 15. p. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale au demy diametre par le scholie de la 4. pr. 2. & par la 47. prop. 1. il est aussi egal aux deux de BA & BE, l'angle ABE estant droict par la 31. prop. 3. il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce que dessus, que le quarré du diametre d'vn cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquitierce, c'est à dire comme 4 à 3. Car puis qu'il a esté demonstré que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD, posant le quarré de AB 3, le quarré de AD sera 1; & le quarré de AE quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4 à 3.

Et pour ce que par le corol. de la 8. prop. 6. comme AE est à AB, ainsi AB est à AF, perpendiculaire tombant d'vn angle sur vn costé; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4 à 3.

On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE, lequel tombe perpendiculairem. sur BC costé du triangle equilateral, est couppé en deux egalement en F par ledit costé BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE, costé de l'hexagone; si on pose iceluy quarré de AB estre 12, le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1 par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est couppee en deux egalement en F par le costé BC: tellement que la ligne perpendic. tombant du centre du cercle au costé du triangle equilateral inscrit en iceluy est moitié du costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

SCHOLIE.

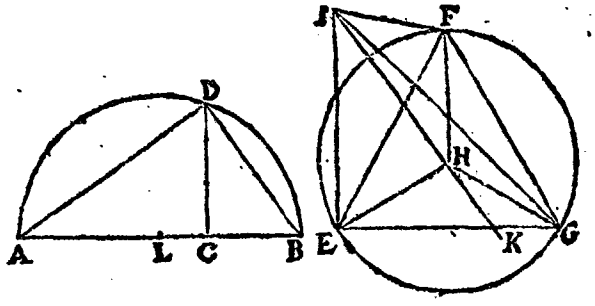
Le diametre AE estant 8, BE sera 4, EF 2, AF 6, AB √48 & BF √12: Parquoy le quarré du costé du triangle sera 48, & celuy du semidiametre 16, &c.

PROB. 1. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale: &

monſtrer que le quarré du diametre d'icelle ſphere, eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté d'icelle pyramide.

Soit AB diametre de la ſphere donnee, & ſoit diuiſé en C, de ſorte que AC ſoit double de BC. Et apres auoir deſcrit ſur AB le demy cercle ADB, leué la moyenne proportionele CD, & mené les lignes droictes DA & DB: Soit deſcrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE ſoit egal à CD: & apres auoir inſcrit en iceluy le triangle equilateral EFG, & tiré HF, HG, chacune deſquelles ſera egale à CD, eſtant egale à HE; du centre H ſoit leuee HI perpendiculaire au plan du cercle EFG par la 12. p. 11. & egale à AC: puis ſoient menees les lignes IE, IF, & IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI eſt equilaterale.



Car par la conſtruction le triangle EFG eſt equilateral, & il eſt euident que les trois lignes IE, IF, IG, ſont auſſi egales entr'elles: (puis que par la 47. prop. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle eſt egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, leſquelles ſont egales.) Et d'autant que les coſtez AC, DC du triangle ADC ſont egaux aux coſtez HI, HE du triangle IHE; & les angles qu'ils comprennent egaux, eſtans droicts: la baſe AD ſera egale à la baſe EI par la 4. prop. 1. En la meſme maniere ſera demonſtré AD eſtre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC eſt double du quarré de CD, (car ils ſont l'vn à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. prop. 6. eſtans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de CD, ou de ſon egale HE: Mais par la prec. prop. le quarré de EF eſt auſſi triple du quarré de HE: donc EF & AD ſont egales: & par la 1. com. ſent. EF & EI ſeront egales. Parquoy puis que AD eſt auſſi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI ſeront equilateraux, & egaux entr'eux: Et par conſequent la pyramide EFGI, dõt la baſe eſt le triangle EFG, & le ſommet I, eſt equilaterale.

Ie dis en ſecond lieu qu'icelle pyramide peut eſtre inſcrite en la ſphere, dont le diametre eſt AB. Soit continuee la ligne perpendiculaire IH par deſſous la baſe de la pyramide iuſques en K: tellement que HK ſoit egale à CB, & la toute IK à la toute AB; & ſoit imaginé eſtre poſé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, ſçauoir le poinct A au poinct I, le poinct B au poinct K: & puis que AC & CB ſont egales à IH & HK; & HG egale à DC, faiſant angle droict auec IH, auſſi bien que leurs egales AC & CD, il eſt euident que le poinct D du demy cercle tombera ſur le poinct G: Partant le diametre AB demeurant immobile, ſi le demy cercle fait vne reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (eſtans les lignes HE, HF, HG egales) & par ainſi la pyramide EFGI eſt inſcrite en la ſphere donnee, puis que tous les angles d'icelle E, F, G, I, touchent ladite ſphere.

Finalement, ie dis que le quarré du diametre AB eſt ſeſquialtere au quarré du coſté AD, qui eſt egal à chacun coſté de la pyramide: Car puis que AB eſt triple de BC;

& AC double de la meſme BC, AB ſera en raiſon ſeſquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC ſont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AD. Donc auſſi le quarré de AB ſera au quarré de AD en raiſon ſeſquialtere. Nous auons donc inſcrit vne pyramide equilaterale dans vne ſphere donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De ces choſes on peut facilement colliger, que la puiſſance du diametre de la ſphere eſt quadruple ſeſquialtere de la puiſſance du ſemidiametre du cercle deſcrit à l'entour de la baſe de la pyramide. Car puis que AB diametre de la ſphere, a eſté demonſtré ſeſquialtere en puiſſance à EF coſté de la pyramide, le quarré de EF ſera de 6 parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF eſt triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de 9 telles parties que contiendra le quarré de AB; le quarré de HE en contiendra 2: Et partant le diametre AB eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſance au ſemidiametre HE, puis que la raiſon des quarrez eſt comme 9 à 2.

Auſſi la perpendiculaire tiree du centre de la ſphere au plan de la baſe de la pyramide eſt la ſixiéme partie du diametre de la ſphere, & la tierce partie du ſemidiam. Car L ſoit le centre du demy cercle ADB: L ſera pareillement le centre de la ſphere. Ie dis que la ligne LC, (qui eſt la perpend. tiree du centre de la ſphere à la baſe EFG: car puis que AC eſt egale à HI, & partant le poinct C le meſme que H, ſera auſſi L le meſme que le centre de la ſphere.) eſt la ſixieſme partie du diametre de la ſphere, ſçauoir eſt de AB, & la tierce partie du ſemid. AL. Car puis que AC eſt double de CB, de telles 4 parties qu'eſt AC, de 2 telles ſera CB: & partant de 6 telles ſera la toute AB, & de 3 le ſemid. AL. Parquoy ſi AC eſt 4, & AL 3; LC ſera 1: & partant LC ſera la ſixieſme partie de AB, & la tierce de AL.

Semblablement la hauteur de la pyramide HI ſera deux tierces parties du diametre de la ſphere. Car HI eſt la meſme que AC, laquelle par la conſtruction eſt deux tierces parties d'iceluy diametre.

Auſſi de 9 telles parties que ſera le quarré d'iceluy diametre, le quarré de la hauteur de la pyramide en ſera 4: Car la raiſon de 9 à 4, eſt la raiſon doublee de 3 à 2.

SCHOLIE.

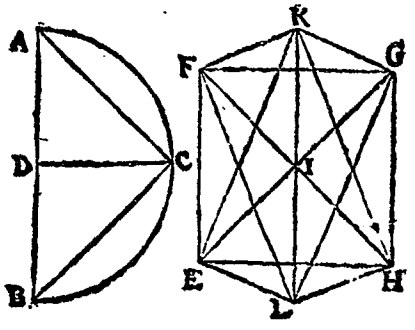
Le diametre AB eſtant 12, AC ou HI ſera 8, CB 4, CD ou HE √32, AD ou EF, EI √96, & BD √48. Parquoy le quarré du diametre AB eſt 144, & celuy de EF coſté de la pyramide eſt 96: tellement que ces deux quarrez ſont entr'eux comme 3 à 2, ainſi que veut la prop. &c.

PROBL. 2. PROP. XIIII.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn octaedre: Et monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt double du quarré du coſté de l'octaedre.

Soit AB le diametre de la ſphere donnee, & iceluy ſoit couppé en deux egalement au poinct D: & apres auoir conſtruict le demy cercle ACB; leué la perpendiculaire DC, & mené les lignes droictes CA, CB, leſquelles ſeront egales entr'elles par la

4. p. 1. ſur la ligne EF egale à l'vne d'icelles AC, CB, ſoit conſtruit le quarré EFGH: dans lequel ſoient menees les deux diagonales FH, GE ſe couppans au poinct I duquel poinct par la 12. p. 11. ſoit eſleuee la ligne IK perpendiculairement ſur le quarré GE, & continuee par deſſous iceluy plan iuſques en L, tellement que IK, IL ſoient chacune egale à AD: puis des poincts L & K, ſoient menees aux angles du quarré les lignes KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, & LH.



Ie dis maintenant que la figure ſolide KL eſt enuironnee de huict triangles equilateraux; & que c'eſt vn octaedre. Car le quarré EFGH, ayant les coſtez egaux à AC: Il eſt euident que les diagonales EG, FH ſeront egales à AB; partant leurs moitiez à AD. Mais les deux lignes IL & IK ſont auſſi egales à AD: & par conſequent elles ſeront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales: & par la 4. prop. 1. les huict lignes LE, LF, LG, LH, KE, KF, KG, KH, ſeront toutes egales entr'elles; & aux quatre du quarré EFGH par la meſme 4. prop. 1. (eſtans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en conſtituant des angles droicts au poinct I, milieu du quarré.) Et puis que tous les coſtez ſont egaux, tous les triangles ſeront equilateraux, ſçauoir les quatre d'audeſſus du quarré EFGH, ayans leurs baſes ſur les quatre coſtez d'iceluy quarré, & ſe terminans au poinct K: & quatre autres au deſſous du meſme quarré, ayans auſſi leurs baſes ſur les coſtez du quarré, & ſe terminans au poinct L: & partant le ſolide KL compris de huict triangles equilateraux, ſera octaedre.

Ie dis d'auantage qu'iceluy octaedre eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car il eſt euident que la ligne KL, eſt egale au diametre AB, & que l'angle KEL eſt droict: (d'autant que les deux lignes KI, IE eſtans egales, les angles ſur la baſe KE ſeront egaux, & demy droicts, pource que l'angle KIE eſt droict: Et par meſme raiſon l'angle IEL eſt demy droict: & partant le total KEL ſera droict.) Partant le demy cercle ayant pour diametre KL, & faiſant vne reuolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le poinct E: & par meſme diſcours il touchera auſſi les trois autres F, G, H, deſquels les angles ſont egaux à l'angle E, & par conſequent l'octaedre KL ſera inſcriptible en la ſphere dont le diametre eſt AB, puis que tous les angles d'iceluy touchent ladite ſphere.

Finalement, il eſt euident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la ſphere AB ou KL, eſt egal aux deux quarrez de KE, EL, leſquels ſont egaux: & partant iceluy quarré de KL diametre de la ſphere, ſera double du quarré de l'vn d'iceux coſtez de l'octaedre. Nous auons donc inſcrit vn octaedre dans vne ſphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il eſt euident par les choſes cy-deſſus, qu'en l'octaedre trois diametres s'entrecouppent à angles droicts au centre de la ſphere, car le diametre KL eſt perpend. aux deux diametres EG, FH, qui s'entrecouppent au centre I à angles droicts.

Il eſt encore euident que l'octaedre peut eſtre diuiſé en deux pyramides ſemblables & egales, ayans pour baſe commune le quarré EFGH, & pour ſommets K & L, telles que ſont les deux pyramides EFGHK, EFGHL.

Il appert auſſi que ſi le tetraedre & l'octaedre ſont deſcrits en vne meſme ſphere: le coſté du tetraedre ſera ſeſquitierce en puiſſance au coſté de l'octaedre. Car le quarré du diametre de la ſphere eſtant 6 parties, par la prec. prop. le quarré du coſté du tetraedre ſera 4 parties: & par cette 14. prop. le quarré de l'octaedre ſera 3 parties. Donc le quarré du coſté du tetraedre ſera au quarré du coſté de l'octaedre, comme 4 à 3, qui eſt raiſon ſeſquitierce.

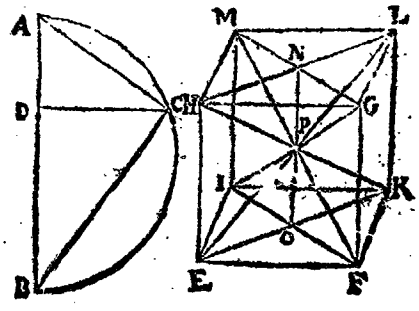
SCHOLIE.

Le diametre AB eſtant 12, AD, ou DC, IK ſera 6, AC ou EF √72, EG 12, & EI 6. Parquoy le quarré AB diam. de la ſphere eſt 144, & celuy de EF coſté de l'octaedre eſt 72: tellement qu'iceux quarrez ſont entr'eux comme 2 à 1, ainſi que veut la prop. &c.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn cube: & monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt triple au quarré du coſté d'iceluy cube.

Soit le diametre de la ſphere donnee AB, lequel ſoit couppé au poinct D, en ſorte que BD ſoit double de AD, c'eſt à dire que AB ſoit triple d'icelle AD: Puis, apres auoir conſtruict le demy cercle ACB, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC & BC; ſur EF egale à AC, ſoit fait le qnarré EFGH, ſur lequel ſoient eſleuees par la 12. prop. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, FK, GL, HM, chacune egale à EF; puis ſoient menees les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK ſont perpendiculaires au plan EFGH, elles ſeront paralleles par la 6. pr. 11. Mais elles ſont auſſi egales: donc par la 33. p. 1. EF, IK ſeront pareillement egales & paralleles: & partant EFKI eſt vn parallelogramme ayant les quatre coſtez egaux. Mais il a auſſi par la 34. prop. 1. les 4 angles droicts, puis que les angles EIK, FKI ſont oppoſez aux droicts KFE, IEF: donc EFKI eſt quarré. Par meſme raiſon FKLG, GLMH, HMIE ſeront quarrez: & partant IKLM ſera auſſi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il eſt egal & ſemblable au quarré oppoſé EFGH: Car EL eſt vn ſolide parallelipipede, pource que par la 15. pr. 11. les plans oppoſez d'iceluy ſont parallels, eſtans tirez par des lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL ſera vn cube: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, & GM, des plans oppoſez EFKI, HGLM, ſoient imaginez eſtre tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, leſquels par la 28. pr. 11. coupperont le cube en deux egalement, & paſſeront par le centre d'iceluy, ſçauoir par le poinct P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entrecoupperont auſſi en deux



egalement: & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P sur le diametre EL; il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, décrira vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de EK est egal aux quarrez des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL: les quarrez de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. p. 1. le quarré de EL est egal aux quarrez de EK, KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB: (car par le corollaire de la 8. prop. 6. AB, AC, AD sont proport. & partant par le corol. de la 20. p. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC. Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres; comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstré que le quarré du diametre EL est triple du quarré du costé du cube KL. Parquoy nous auons fait tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarrez du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC, costez du cube, & du tetraedre.

Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux egalement au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarrez opposez, se couppent en deux egalement au mesme centre de la sphere.

SCHOLIE.

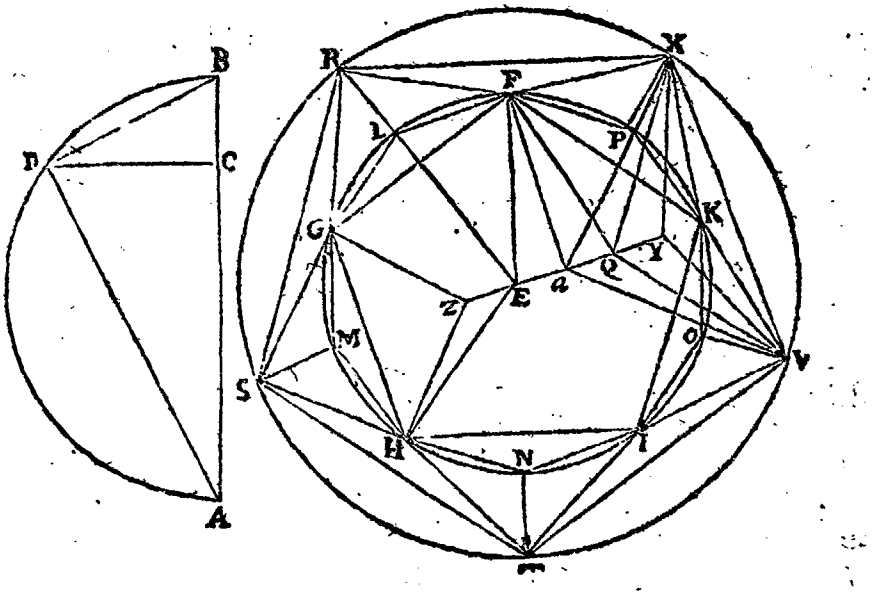
Le diametre AB estant 12, AD sera 4, BD 8, DC V32, BC V96, AC ou EF V48, EK V96, & EL 12. Parquoy appert que le quarré du diametre de la sphere AB, qui est 144, est triple du quarré de EF costé du cube, qui est 48, &c.

PROBL. 4. PROP. XVI.

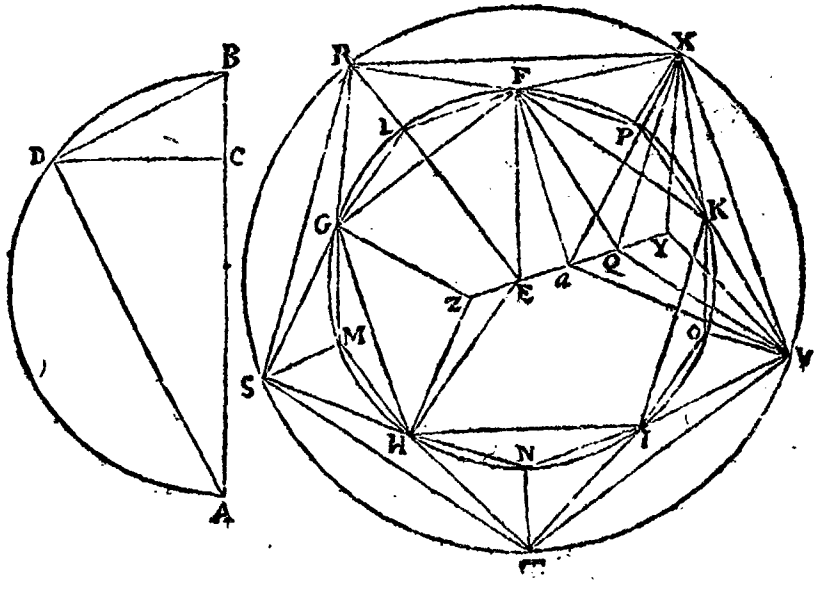
Dans vne sphere donnee, inscrire vn icosaëdre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construict le demy cercle ADB, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes droictes AD, DB; du centre E, & de l'interuale EF egale à BD: soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral: (ce qui se fera en couppant en deux egalement l'arc d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E, & des poincts L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du

cercle FGHIK, chacune deſquelles ſoit poſee egale à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles ſeront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conjoignant icelles, ſçauoir EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX, (toutes leſquelles toutesfois nous n'auons tirees pour euiter confuſion) ſeront egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. Donc puis que EL, EM, &c. ſont egales au ſemidiametre EF; auſſi QR, QS, QT, QV, QX ſeront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. pr. 11. le plan mené par les lignes QR, QS eſt parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la meſme raiſon le plan tiré par les lignes QS, QT, eſt parallel au meſme plan FGHIK, tiré par les lignes EM, EN: mais que le plan tiré par les lignes QR, QS conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS; il eſt euident par les choſes demonſtrees à la 16. prop. 11. que ces deux plans en font vn ſeul. On demonſtrera en la meſme maniere, que le plan tiré par QT, QV, auec celuy-cy en fait vn ſeul, & auſſi celuy tiré par QV, QX & par QX, QR: tellement donc que les 5. lignes QR, QS, QT, QV, QX ſont en vn meſme plan: & partant ſi de Q, & de l'interuale QX, on deſcrit vn cercle en iceluy plan, il paſſera par les autres poincts R, S, T, V, & ſera egal au cercle FGHIK. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autant que LR, PX ſont egales & paralleles; ſi on imagine eſtre tiree vne ligne droicte LP, auſſi par la 33. prop. 1. LP, RX ſeront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la cinquieſme partie du cercle FGHIK, ſçauoir les deux dixieſmes parties LF, FP: Donc auſſi RX, prend la cinquieſme partie du cercle RSTVX. Par meſme maniere nous conclurons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la cinquiéme partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX eſt vn pentagone equilateral, ayant tous les coſtez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR eſt egale au demy diametre EF, c'eſt à dire au coſté de l'hexagone du cercle FGHIK; & que LF eſt coſté du decagone, par la 10. p. 13. le quarré du coſté du pentagone du meſme cercle, eſt egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarré de FR par la 47. prop. 1 eſt egal à iceux quarrez de LR, LF: Donc le quarré de FR eſt egal au quarré du coſté



du pentagone; & par conſequent la ligne RF ſera egale à LP coſté du pentagone, ou à FG, c'eſt à dire à RX. Par la meſme raiſon, les autres lignes RG, SG, &c. ſeront egales aux autres coſtez de chaque pentagone: & partant les dix triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, ſeront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant ſoit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que chaque prolongement QY, Ez ſoit egal au coſté du decagone, & ſoient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, Gz, HE, Hz. D'autant que QX eſt ſemidiametre du cercle RSTVX, c'eſt à dire coſté de l'hexagone, & QY eſt coſté du decagone de meſme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de XV, coſté du pentagone, ſera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47. p. 1. à iceux quarrez de QX, QY, eſt auſſi egal le quarré de XY: (car l'angle XQY eſt droict, eſtant EQ perpendiculaire à l'vn & l'autre plan des cercles parallels). Donc le quarré de XY eſt egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à la ligne XV. Par meſme raiſon XV ſera demonſtree egale à VY: & partant le triangle VYX eſt equilateral. Par meſme maniere, (eſtans tirees les lignes RY, SY, TY, leſquelles ne ſont tirees pour euiter confuſion) chacun des 4 triãgles RYX, RYS, SYT, TYV, ſera demõſtré equilateral, & egal au triangle VYX, c'eſt à dire à chacun des dix premiers triangles, puis que tous leurs coſtez ſont egaux aux coſtez du pentagone. Par ſemblable argument ſera prouué que le triangle GZH eſt equilateral, comme auſſi les 4 autres triangles HZI, IZK, KXF, FZG, (deſquels toutesfois nous n'auons auſſi tiré les lignes, afin d'euiter confuſion) tous leſquels ſeront egaux tant entr'eux qu'aux 15 precedans. Veu dõc que tous ces 20 triangles ſont equilateraux, & egaux, & qu'ils ſe conioignent les vns aux autres par lignes droictes; ſera conſtitué d'iceux vn Icoſaedre: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee, de laquelle le diametre eſt AB. Car ayant couppé en deux egalement EQ en *a*, & tiré les lignes *a*F, *a*X, *a*V; les coſtez *a*Q, QV du triangle *a*QV ſeront egaux aux coſtez *a*Q, QX du triangle *a*QX, (car QV, QX, ſont ſemy diametres du cercle RSTVX) & les angles *a*QV, *a*QX ſont droicts: & partant par la 4. prop. 1. les baſes *a*V, *a*X ſeront egales. Par la meſme raiſon, ſi on tire des lignes de *a* & Q, à R, S, T, les lignes *a*R, *a*S, *a*T ſeront demonſtrees egales entr'elles, & à icelles *a*V, *a*X. Et puis que les coſtez *a*Q, QX du triangle *a*QX ſont egaux aux coſtez *a*E, EF du triangle *a*EF,



aEF, (pource que QX, EF sont demy diametres de cercles egaux, & EQ est couppee en deux egalement en a) & les angles aQX, aEF sont aussi egaux, sçauoir droicts: par la 4. prop. 1. les bases aX, aF, seront aussi egales. Par mesme raison, si de a & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonstrera les lignes aG, aH, aI, aK, estre egales à icelle aX: & partant les dix lignes droictes tirees de a aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, sont egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à dire costé de l'hexagone du cercle FGHIK, & EZ costé du decagone du mesme cercle; par la 9. prop. 13. QZ sera diuisee en la moyenne & extreme raison en E, & le plus grand segment sera QE. Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ sera quintuple du quarré de Ea. Mais le quarré de aF est aussi quintuple du mesme quarré de Ea: (car le quarré de EF estant quadruple du quarré de Ea par le scholie de la 4. prop. 2. pource que EF est double de Ea: les quarrez de EF, Ea, sont le quintuple du quarré de Ea. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de aF est egal à iceux quarrez de EF, Ea: donc aussi le quarré d'icelle aF sera quintuple d'iceluy quarré de Ea.) Donc les quarrez de aZ, aF, sont egaux: & par consequent les lignes aZ, aF seront egales. Et puis que aE, aQ, & EZ, QY sont egales, aussi aZ, aY seront egales: & toutes les lignes droictes tirees de a, à tous les angles de l'Icosaedre pareillement egales. Parquoy la sphere descrite à l'entour du diametre ZY, passera par tous les angles de l'Icosaedre. Car d'autant que par la 15. prop. 5. comme aZ est à aE, ainsi YZ à QE; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de aZ est au quarré de aE, ainsi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de aZ a esté demonstré quintuple du quarré de aE: pareillement le quarré de YZ sera quintuple du quarré de QE, c'est à dire du quarré de DB son egale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du mesme quarré de BD: (car AB, BD, BC estans proportionaux par le coroi. de la 8. prop. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. prop. 6. & partant AB estant quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB sont egaux: & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descrites à l'entour d'icelles seront egales.

Ie dis finalement que le costé de l'Icosaedre est ligne irrationele, appellee ligne mineure: ce qui est euident par la 11. prop. 13. estant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele commensurable en puissance à la posee rationele AB, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc fait ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'Icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone descrits en vn mesme cercle.

Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

SCHOLIE.

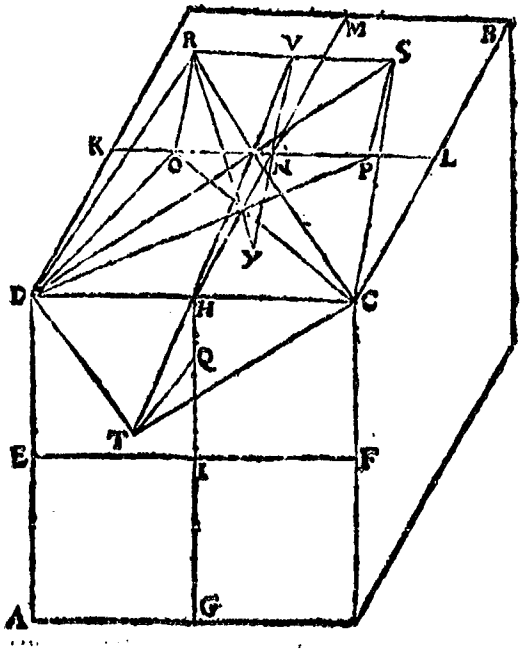
Le diametre AB estant 10, AC sera 8, CB 2, CD 4, AD $\sqrt{80}$, BD ou EF $\sqrt{10}$: & partant GF ou RX costé du pentagone sera $\sqrt{(50-\sqrt{500})}$, & LG ou FL $\sqrt{(50-\sqrt{500})}$. Mais RL

eſtant egale au ſemidiametre, ou coſté de l'hexagone EF, eſt √20: donc RG ou RF coſté de l'Icoſaedre ſera √(50—√500), qui partant eſt egal au coſté du pentagone GF ou RX, & par conſequent ligne mineure comme iceluy. Dauantage Ea ou aQ eſtant moitié de EQ ou EF egale à QX ſera √5, EZ ou QT 5—√5: partant ZQ ou ZT compoſee du coſté de l'hexagone EQ, & de celuy du decagone LF ſera 5+√5, IZ 5, & la toute ZT 10: Parquoy appert que le quarré du diametre de la Sphere eſt quintuple, &c.

PROB. 5. PROP. XVII.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn dodecaedre: Et monſtrer que ſon coſté eſt ligne irrationele, appellee reſidu.

Soit le cube AB inſcriptible en la ſphere donnee, duquel les deux plans exterieurs AC & DB, ſe rencontrent à angles droicts à la ligne de commune ſection DC: & d'iceux plans tous les coſtez ſoient couppez en deux egalement, ſçauoir AC, par les deux lignes EF, GH ſe couppans au poinct I; & DB, par les lignes KL & HM ſe couppans au poinct N. Item les trois lignes KN, NL, HI ſoient couppees en la moyenne & extreme raiſon aux poincts O, P, Q, deſquelles les plus grands ſegmens ſoient NO, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11. ſoient leuees les deux lignes OR, PS perpendiculaires au plan DB: mais QT au plan AC, leſquelles ſoient poſees egales aux trois ſegmens ON, NP, IQ: Puis ſoient menees les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Ie dis que DRSCT eſt pentagone equilateral conſtitué ſur vn meſme plan, & equiangle.



Car ſoient menees les lignes DO, DP, DS: & d'autant que KN eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct O, & que ON eſt le plus grand ſegment, par la 4. prop. 13. les deux quarrez de KN, KO ſeront triples du quarré de ON: Et KN eſtant egale à KD, & ON à OR, les deux quarrez de KD & KO, ou le ſeul de DO, qui leur eſt egal par la 47. pr. 1. eſt triple du quarré de OR: & partant le quarré de DR, qui eſt egal à tous les deux par la 47. prop. 1. ſera quadruple du ſeul de RO: Et d'autant que RS eſt double de RO, ſon quarré, par le ſcholie de la 4. pr. 2. ſera auſſi quadruple du quarré de OR, auſſi bien que le quarré de DR: Partant les lignes DR, RS ſeront egales. Par meſme diſcours on monſtrera l'egalité des trois autres coſtez SC, CT, TD, tant entr'eux qu'aux deux DR, RS: donc le pentagone DRSCT eſt equilateral.

Ie dis qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Car ayant menee NV parallele à OR, ſoient tirees TH, & HV, icelles deux lignes ſe rencontreront directement: tel-

lement que THV ſera vne ſeule ligne droicte. Car d'autant que HI eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct Q; IH ſera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN eſt egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN eſt à NV, ainſi QT à QH. Parquoy les triangles NVH, QTH, ont deux coſtez proportionaux à deux coſtez, & ſont conioincts à l'angle H, tellement que les coſtez homologues HN, TQ; & NV, QH, ſont parallels par la 6. prop. 11. ces deux-là eſtans perpendiculaires au plan AC, & ces deux-cy au plan DB: Donc par la 32. prop. 6. THV ſera vne ſeule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte eſt en vn meſme plan: par conſequent le pentagone DRSCT eſt en vn meſme plan.

Ie dis encores qu'il eſt equiangle: Car puis que KN eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, eſtant ON plus grand ſegment, par la 5. p. 13. en adiouſtant KN à NP, egale au plus grand ſegment ON; la toute BP ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct N, & ſera KN le plus grand ſegment: & partant par la 4. prop. 13. les quarrez de KP & NP (ou PS ſon egale) ſont triples du quarré de KN, (ou de ſon egale KD:) & en adiouſtant le quarré de KD auec les deux de KP & PS: iceux trois quarrez ſeront quadruples du ſeul de KD, (ou par la 47. p. 1. au lieu des deux de KP & KD, le ſeul de DP auec celuy de PS, ou encore le ſeul de DS, ſera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC eſt auſſi quadruple par le ſcholie de la 4. prop. 2. eſtant DC double de KD: partant les deux lignes DC & DS ſeront egales: Mais auſſi eſtans tous les coſtez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien: Et par la 8. prop. 1. l'angle au poinct R ſera egal à l'angle au poinct T. Et ſemblablement nous monſtrerons que l'angle RSC eſt egal à l'angle DTC: partant trois angles du pentagone ſeront egaux, & par la 7. prop. 13. il ſera equiangle. Il eſt auſſi equilateral, & fait ſur DC l'vn des coſtez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que ſi on veut conſtruire de meſme façon vn pentagone, ſur chacun des vnze coſtez reſtans, on trouuera vne figure ſolide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux, qui par les def. ſera dodecaedre.

Ie dis d'auantage qu'il eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car ſi on prolonge VN, qui eſt perpendiculairem. eſleuee ſur le centre du quarré DB, il appert par la 39. prop. 11. qu'elle couppera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la couppe donc au poinct X, auquel poinct ſera le centre de la ſphere enuironnant le cube par le corol. de la 15. prop. 13. & NX eſt egale au demy coſté du cube: Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantoſt monſtré par la 4. prop. 13. que les quarrez de KP & NP ſont triples du quarré de KN: Mais VX eſt egale à KP; & RV à NP: (car NX eſt egale à KN, & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le ſeul de RX, par la 47. prop. 1. eſt triple du quarré de KN: Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcripte au cube, eſt triple du quarré du coſté d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre eſt triple au quarré du demy coſté. Or KN eſt le demy coſté du cube: Partant RX ſera le demy diametre de la ſphere circonſcripte au cube AB, duquel le centre eſt X. Par meſme diſcours nous monſtrerons que du poinct X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, ſont egales au demy diametre de la ſphere circonſcripte au cube. Partant vne meſme ſphere pourra eſtre circonſcripte au cube & au dodecaedre.

Ie dis finalement que le costé du dodecaedre est ligne irrationele, appellee residu. Car d'autant que lesdeux demy costez du cube KN, NL sont chacun couppez en la moyenne & extreme raison : par la 15. prop. 5. toute la ligne KL sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçauoir à OP, comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, sçauoir à la composee de KO & PL. Parquoy si KL costé du cube est couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP. Mais la toute KL ainsi couppee est rationele: (car son quarré est commensurable au quarré du diametre de la sphere, lequel est posé rationel: puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13.) Donc par la 6. prop. 13. le plus grand segment OP, c'est à dire RS costé du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appellee residu. Nous auons donc fait tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le costé d'vn cube estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en vne mesme sphere.

Auss: que le costé du cube est egal à la ligne droicte subtendant vn angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant couppee en la moyenne & extreme raison, par la 8. prop. 13. le plus grand segment est costé d'vn pentagone: & partant par la 5. prop. 13. la ligne droicte composee d'icelle, c'est à dire du costé du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement diuisee, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grand est costé du cube: Il s'ensuit que si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre: le plus grand segment sera costé du cube inscrit en la mesme sphere.

SCHOLIE.

Nous auons trouué à la 15. prop. que le diametre de la sphere estant 12, le costé du cube inscriptible en icelle est V 48, & partant KN moitié d'iceluy costé sera V 12, & estant couppee en la moyenne & extreme raison en O, le grand segment NO sera V 15 — V 3, & le moindre KO V 27 — V 15, tellement que leurs trois quarrez seront 12, 18 — V 180, & 42 — V 1620. Mais d'autant que le quarré de DO est egal aux deux quarrez de KO, DK, iceluy quarré de DO sera 54 — V 1620: & adiouſtant à iceluy le quarré de OR, c'est à dire de ON, viendront 72 — V 2880 pour le quarré de DK costé du dodecaedre: & partant iceluy costé sera V 60 — V 12, qui est residu sixiesme. Dauantage, adiouſtant à KN son grand segment ON, viendront V 15 + V 3 pour la toute KP; dont le quarré est 18 + V 180, auquel quarré estant adiousté celuy de DK, viendront 30 + V 180 pour le quarré de DP; & luy adiouſtant le quarré de PS, qui est 18 — V 180, viendront 48 pour le quarré de DS subtendante de l'angle du pentagone, qui partant est V 48, egal au costé du cube: lequel costé estant couppé en la moyenne & extreme raison, le moindre segment sera V 108 — V 60, & le grand V 60 — V 12, partant egal au costé du dodecaedre, qui estant adiousté à la subtendante DS, la composee sera V 60 + V 12, qui est le double de KP. Parquoy appert que le costé d'vn cercle estant couppé, &c.

PROB. 6. PROP. XVIII.

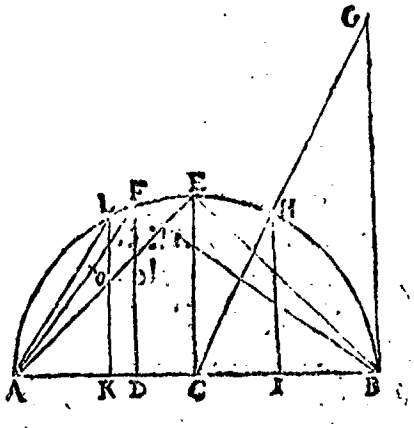
Le diametre d'vne sphere estant donné; trouuer les costez des

cinq figures regulieres inſcrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit donné AB le diametre d'vne ſphere: & il faut premierement trouuer les coſtez des cinq figures regulieres inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diuiſé le diametre AB en deux egalement au poinct C, mais au poinct D, tellement que AD ſoit la tierce partie de AB: puis ayant deſcrit ſur AB vn demy cercle, ſoient eſleuees les perpendiculaires CE, DF, & tirées les lignes droictes AE, AF, BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF eſt moyenne proportionele entre AB, BD, par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à BD, ainſi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB eſt à BD en raiſon ſeſquialtere: (car par la conſtruction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2.) Donc auſſi le quarré de AB eſt au quarré de BD, en raiſon ſeſquialtere: & partant puis que par la 13. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté du tetraedre: BF ſera le coſte du tetraedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.



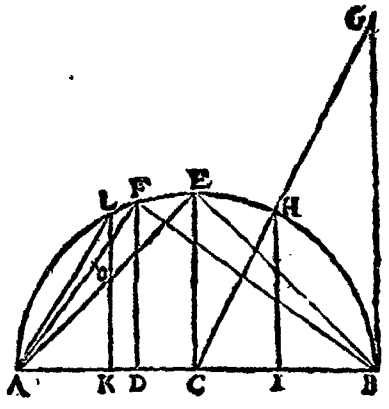
Derechef, puis que par le meſme corol. de la 8. prop. 6. AE eſt moyenne proportionele entre AB, AC: & partant comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB au quarré de AE par le corol. de la 20. prop. 6. & AB eſt double de AC: auſſi le quarré de AB ſera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt double du coſté de l'octaedre, AE ſera coſté de l'octaedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et pour autant que par les meſmes corol. des 8. & 20. prop. 6. le quarré de AB eſt au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la conſtruction AB eſt triple de AD; le quarré de AB ſera triple du quarré de AF. Parquoy veu que par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré du coſté du cube, AF ſera le coſté du cube inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et d'autant que AF eſt coſté du cube, ſoit iceluy couppé en la moyenne & extreme raiſon au poinct O, duquel le plus grand ſegment ſoit AO: iceluy ſegment (par le corol. de la 17. prop. 13.) ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en la meſme ſphere que le cube, qui eſt celle là meſme qui a pour diametre AB.

Quant au coſté de l'Icoſaedre, ſoit leuee la perpendiculaire BG egale à AB: & apres auoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy poinct ſoit menee HI perpendicul. à AB par la 12. prop. 1. Or BG eſtant egale à AB, elle ſera double de BC: & partant par la 4. prop. 6. HI ſera double de IC: (car les triangles ſont equiangles, pour ce qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts: le tiers G ſera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI ſera quadruple du quarré de IC: & partant le quarré de HC (ou de ſon egale AC) qui par la 47. prop. 1. eſt egal à

tous les deux, ſera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD eſt le tiers du diametre AB, & AC ſa moitié, DC ſera le demy tiers: & partant AC ſera triple de DC, & ſon quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'eſt que quintuple du quarré de CI: & partant la ligne CI ſera plus grande que DC. Soit donc priſe CK egale à CI, & apres auoir leué la perpendiculaire KL, ſoit menee la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC eſt quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) ſera quintuple du quarré de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaedre eſt quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonſcriuant 5 coſtez de l'Icoſaedre: donc IK ſera ſemidiametre, c'eſt à dire coſté de l'hexagone d'iceluy cercle, lequel coſté de l'hexagone auec deux fois le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle, eſt egal au diametre de la ſphere AB, par le corol. de la meſme 16. p. 13. Il faut donc que AK & IB lignes egales, ſoient deux coſtez du decagone inſcrit dans le meſme cercle, dans lequel KI eſt le coſté de l'hexagone. Mais KI & KL ſont egales: (car KL eſt egale à IH, pour eſtre en meſme diſtance du centre C, laquelle eſtant double de CI ſera egale à KI.) Partant KL ſera coſté de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL ſera le coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle. Donc il ſera auſſi le coſté de l'Icoſaedre, par la 16. prop. 13. Nous auons donc trouué les coſtez des 5 figures regulieres inſcriptibles en vne meſme ſphere.



Maintenant, pour le regard de la comparaiſon d'iceux coſtez trouuez. D'autant qu'il a eſté demonſtré que le quarré du diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere au quarré du coſté de la pyramide; mais double de celuy du coſté de l'octaedre, & triple du quarré du coſté du cube: il eſt euident que le quarré du diametre de la ſphere eſtant 6, celuy du coſté du tetraedre ſera 4; celuy du coſté de l'octaedre 3, & celuy du coſté du cube 2. Partant le quarré du coſté de la pyramide eſt ſeſquitierce au quarré de l'octaedre: mais double de celuy du coſté du cube. Item le quarré du coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere à celuy du coſté du cube. Parquoy les quarrez des coſtez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la ſphere, ſont entr'eux comme nombre à nombre: & partant par la 6. prop. 10. iceluy diametre de la ſphere, & les coſtez d'icelles trois figures ſont lignes commenſurables & rationeles, pource que le diametre eſt poſé rationel. Mais les ſuſdits quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainſi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (ſçauoir le diametre de la ſphere, le coſté de la pyramide, le coſté de l'octaedre, & celuy du cube,) ſont incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant elles ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Et quant aux coſtez de l'icoſaedre, & dodecaedre: pource qu'ils ſont lignes ir-

rationeles, il eſt euident qu'ils ſont incommenſurables, tant entr'eux, qu'au diametre de la ſphere, & aux coſtez des autres figures.

Or leſquels d'iceux coſtez ſont les plus grands, nous le rendrons manifeſte ainſi: d'autant qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le quarré de AB eſt triple du quarré de AF: mais quintuple du quarré de KI, c'eſt à dire de KL ſon egale, trois quarrez de AF ſeront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF eſt couppé en la moyenne & extreme raiſon en O, & AO eſt le plus grand ſegment, il eſt euident par la 1. pr. 6. que le rectangle compris de AF, AO ſera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles enſemble, ſeront plus grands que le double du rectangle de AF, OF: Mais à iceux deux rectangles enſemble, eſt egal le quarré de AF par la 2. p. 2. & au double du rectangle de AF, OF, eſt egal le double du quarré de AO: (car par la 17. p. 6. le ſimple rectangle de AF, OF eſt egal au ſimple quarré de AO.) Donc auſſi le quarré de AF ſera plus grand que deux fois le quarré de AO: & par conſequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de KL leurs egaux, ſeront auſſi plus grands que 6 quarrez de AO. Parquoy vn ſeul quarré de KL ſera plus grand qu'vn ſeul quarré de AO: & par conſequent la ligne KL ſera plus grande que AO: Partant AL, qui eſt plus grande qu'icelle KL, ſera beaucoup plus grande que la meſme AO, coſté du dodecaedre. Nous auons donc fait ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures ſolides cy-deſſus declarees, on n'en peut pas trouuer d'autres compriſes de ſuperficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou de deux autres ſuperficies planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouuant iceux conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icoſaedre: de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide: car iceux ſont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle ſolide, doiuent eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. pr. 11. Par meſme raiſon on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide: car ce ſeroit touſiours contreuenir à la 21. prop. 11. L'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangles: De quatre pentagones il ſera impoſsible, eſtans iceux plus grans que quatre droicts, puis que chacun vaut les ſix quints d'vn droict par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuiuroit touſiours la meſme abſurdité. Partant il eſt euident qu'outre les cinq figures regulieres cy-deſſus declarees, on n'en trouuera point d'autres equilateres & equiangles.

Quant à l'application des nombres aux lignes de la demonſtration cy-deſſus, le diametre AB eſtant 6, AC ſera 3, AD 2, & DC 1, DB 4: Mais DF ſera √8, BF coſté de la pyramide √24, AE coſté de l'octaedre √18, AE coſté du cube √12, AO coſté du dodecaedre √15—√3, CG √45, CI ou CK √11½, HI ou IK ou KL √7½, IB ou AK 3—√1⅘, & partant AL coſté de l'Icoſaedre ſera √(18—√64⅘).

Reſte à remarquer icy certaines reigles colligées des choſes demonſtrees en ce 13. liure, au moyen deſquelles il ſera fort aiſé de cognoiſtre les coſtez des cinq corps reguliers inſcriptibles en vne ſphere, dont le diametre ſera cogneu: Et au contraire eſtant cogneu le coſté de quelconque

deſdits cinq corps, cognoiſtre le diametre de la ſphere, & conſequemment auſſi les coſtez des autres corps.

1. Le quarré du diametre de la ſphere eſt au quarré du coſté du tetraedre, comme 3 à 2; de l'octaedre, comme 2 à 1; & du cube, comme 3 à 1.

2. Le quarré du coſté du tetraedre eſt au quarré du coſté de l'octaedre, comme 4 à 3, & du cube, comme 2 à 1.

3. Le quarré du coſté de l'octaedre eſt au quarré du coſté du cube, comme 3 à 2.

4. Mais le diametre de la ſphere eſtant rationel, le quarré du coſté de l'Icoſaedre eſt reſidu quatrieſme, duquel le grand nom eſt la moitié du quarré dudit diametre, (*ou le double du quarré du ſemidiam.*) & le moindre nom eſt $\sqrt{\frac{1}{10}}$ du quarré dudit diametre: (*ou* $\sqrt{\frac{4}{5}}$ *du quarré du ſemidiam.*)

5. Et le coſté du dodecaedre eſt reſidu ſixieſme, duquel le grand nom eſt $\sqrt{\frac{5}{3}}$ du ſemidiam. (*ou* $\sqrt{\frac{5}{12}}$ *du diam.*) & le petit nom eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$ dudit ſemidiam. (*ou* $\sqrt{\frac{1}{12}}$ *du diam. c'eſt à dire* $\sqrt{\frac{1}{5}}$ *du grand nom*).

Leſquelles Reigles ſeront d'autant plus intelligibles par les exemples, ou propoſitions ſuiuantes.

1 Qu'il faille cognoiſtre les coſtez des cinq corps inſcriptibles en vne ſphere, dont le diametre eſt 8.

Premierement, ie quarre ledit diametre 8, *& viennent* 64, *dont ie prends les* $\frac{2}{3}$, *& viennent* $42\frac{2}{3}$ *pour le quarré du coſté du tetraedre ou pyramide equilateralle: & partant iceluy coſté eſt* $\sqrt{42\frac{2}{3}}$.

Secondement, du meſme quarré 64, *ie prends la moitié, pour auoir le coſté de l'octaedre: & partant iceluy coſté eſt* $\sqrt{32}$.

Tiercement, du meſme quarré 64, *ie prends le tiers, pour le quarré du coſté du cube, qui partant eſt* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$.

Quartement, du meſme quarré 64, *ie prends la moitié* 32 *pour le grand nom du reſidu de l'Icoſaedre; puis ie quarre ledit quarré* 64, *& viennent* 4096, *que ie diuiſe par* 20, *& prepoſant le ſigne* $\sqrt{}$ *au quotient, il ſera* $\sqrt{204\frac{4}{5}}$, *qui eſt le petit nom dudit reſidu: Parquoy le quarré du coſté de l'Icoſaedre ſera* $32-\sqrt{204\frac{4}{5}}$, *& partant iceluy coſté eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$.

Finalement, ie diuiſe le meſme quarré 64 *par* 12, *& viennent* $5\frac{1}{3}$, *& le quintuple* $26\frac{2}{3}$, *à chacun deſquels deux nombres ie prepoſe le ſigne* $\sqrt{}$ *pour auoir les deux noms du coſté du dodecaedre, qui partant ſera* $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

2. Le coſté du dodecaedre inſcriptible en vne ſphere eſtant $\sqrt{10}-2$: cognoiſtre tant le diametre d'icelle ſphere, que les coſtez des autres corps reguliers.

Premierement, ie multiplie le moindre nom 2 *par* $\sqrt{3}$, *& viennent* $\sqrt{12}$, *pour le ſemidiametre de la ſphere: & partant tout le diametre ſera* $\sqrt{48}$.

Secondement, ie prends les $\frac{2}{3}$ *du quarré du diametre trouué, & viennent* 32 *pour le quarré du coſté de la pyramide, qui partant eſt* $\sqrt{32}$.

Tiercement, du meſme quarré 48, *ie prends la moitié, qui eſt le quarré du coſté de l'octaedre, qui partant eſt* $\sqrt{24}$.

Quartement, du meſme quarré 48, *ie prends le tiers pour auoir le quarré du coſté du cube, & partant iceluy coſté ſera* 4.

Finallement la moitié du meſme quarré 48, *ſera le grand nom du quarré du coſté de l'Icoſaedre, & pour auoir le petit nom, ie quarre ledit quarré* 48, *& viennent* 2304, *que ie diuiſe par* 20, *& prepoſant le ſigne radical* $\sqrt{}$ *au quotient, il ſera* $\sqrt{115\frac{2}{5}}$. *Parquoy le quarré du*

du coſté de l'Icoſaedre requis ſera $24-\sqrt{115\frac{1}{2}}$: *& partant iceluy coſté ſera* $\sqrt{(24-\sqrt{115\frac{1}{2}})}$.

Or quant aux perpendiculaires, ou hauteurs d'iceux corps, enſemble leurs ſuperficies, & contenus ſolides, nous en auons traitté amplement aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, où les curieux & amateurs de telles ſupputations pourront auoir recours, s'ils ne ſe contentent de ce que nous en dirons au liure ſuiuant.

Fin du trezieſme Element.

ELEMENT QVATORZIESME.

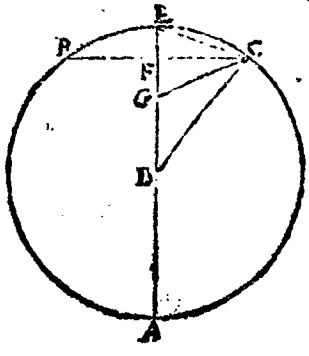
Qu'aucuns attribuent à Hypſicle Alexandrin.

THEOR. 1. PROP. I.

LA ligne droicte perpendiculaire menee du centre au coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié des deux coſtez de l'hexagone, & decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.

Soit le cercle ABC, dont le centre eſt D, & BC le coſté du pentagone inſcrit en iceluy cercle; mais du centre D ſoit menee la ligne DF, perpendicul. à iceluy coſté BC, & icelle eſtant prolongee de part & d'autre iuſques en A & E pour parfaire le diametre AE, elle couppera en deux egalement, tant la ligne droicte BC, que l'arc BEC, ainſi qu'il eſt euident par les 3 & 28. pr. 3. Parquoy eſtant tiree la ligne droicte EC, elle ſera le coſté du decagone, & DE le coſté de l'hexagone. Ie dis que la perpendiculaire DF eſt la moitié des deux coſtez enſemble EC & DE.

Car apres auoir pris FG egale à FE, ſoit menee la ligne GC. Puis que l'arc BEC eſt la cinquieſme partie de la circonference du cercle, EC ſa moitié ſera la cinquieſme partie de la demy circonferenee ACE: Et partant l'arc AC ſera quadruple de CE, & par la 33. propoſ. 6. l'angle CDA ſera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonferenee par la 20. prop. 3. lequel par ce moyen ſera double de CDE: mais par la 4. p. 1. la baſe CE eſt egale à la baſe CG: & par la 5. prop. 1. les deux angles ſur la baſe EG ſeront egaux: donc FGC ſera auſſi double de GDC: Mais iceluy FGC eſtant par la 32. prop. 1. egal à tous les deux GDC, GCD oppoſez interieurement, iceux deux angles ſur la baſe DC ſeront egaux entr'eux: & par la 6. p. 1. GC & GD ſeront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE eſtans egales, la ſeule FD ſera egale aux deux FE, EC enſemble: & partant les trois enſemble DF, FE, EC, c'eſt à dire les deux enſemble DE, EC, ſeront egales au double de la ſeule DF: & par conſequent icelle DF perpendiculairem. tiree du centre ſur le coſté du pentagone, ſera moitié des deux enſemble DE, EC, coſtez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droicte perpend. &c. Ce qu'il falloit prouuer.



COROLLAIRE.

Il eſt donc manifeſte que la perpendiculaire menee du centre au coſté du pentagone eſt egale à la perpendic. tiree dudit centre au coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, puis que par le corol. de la 12. prop. 13. ladite perpendiculaire menee au coſté du triangle equilateral eſt moitié du coſté de l'hexagone.

SCHOLIE.

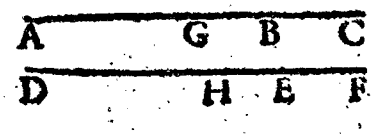
Le ſemidiametre DC eſtant 4, nous auons trouué au Scholie de la 10. pr. 13 que le coſté du pentagone BC ſera $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$: *Parquoy le quarré de FC moitié dudit coſté BC ſera* $10-\sqrt{20}$, *qui oſté du quarré de DC, c'eſt à dire de 16, reſteront* $6+\sqrt{20}$ *pour le quarré de DF; & partant icelle DF eſt* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$. *Mais le ſemidiam. DC, qui eſt 4, eſtant adiouſté auec le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$, *fait* $\sqrt{20}+2$, *dont la moitié* $\sqrt{5}+1$ *eſt egal à* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$: *car le quarré de l'vn & l'autre eſt* $6+\sqrt{20}$: *partant appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes couppees en la moyenne & extreme raiſon; elles ſeront ſemblablement couppees.

Soient deux lignes droictes AB & DE couppees en la moyenne & extreme raiſon aux poincts G & H: & leurs plus grands ſegmens ſoient AG & DH. Ie dis qu'icelles lignes ſont ſemblablement couppees: c'eſt à dire que comme AB eſt à DE, ainſi AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainſi DH à HE, &c.

Car par la 17. propoſition du 6. le rectangle de AB, & GB, eſt egal au quarré de AG: & le rectangle de DE & HE egal au quarré de DH; & partant comme le rectangle de AB, GB ſera au quarré de AG, ainſi le rectangle de DE, HE ſera au quarré de DH: (y ayant raiſon d'egalité de part & d'autre) & par le 3. theor. du Scholie de la 22. p. 5. quatre fois le rectangle de AB & GB ſera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en compoſant (apres auoir adiouſté directement BC egale à BG; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB auec le quarré de AG, (ou par la 8. prop. 2. le ſeul quarré de AC) eſt au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, auec le quarré de DH, (ou le ſeul quarré de DF) eſt au quarré de DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG, ainſi DF à DH: Et en compoſant, comme la compoſee de AC, AG, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AG, ainſi la compoſee de DF, DH, c'eſt à dire la double de DE, eſt à DH: & en permutant, comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AG à DH: Et par la 15. pr. 5. comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AB à DE. Donc comme AB ſera à DE, ainſi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainſi ſera auſſi le reſte GB au reſte HE. Parquoy comme AG à DH, ainſi ſera GB à HE, puis que l'vne & l'autre raiſon eſt comme AB à DE: & en permutant, comme AG ſera à GB, ainſi DH ſera à HE: & ainſi ſelon toutes les autres manieres d'argumenter és proportions, on demonſtrera toutes lignes & les parties d'icelles eſtre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

La ligne droicte AB eſtant 4, le grand ſegment AG ſera √20—2, & le petit GB 6—√20. Mais DE eſtant 2, le grand ſegment DH ſera √5—1, & le petit HE 3—√5. Or le produit de AB 4, en DH √5—1 eſt √80—4, & le produit de DE 2 en AG √20—2 eſt auſſi √80—4: & partant comme AB à DE, ainſi AG à DH. Le produit de AB 4 en HE 3—√5 eſt 12—√80: & le produit de DE 2 en GB 6—√20 eſt auſſi 12—√80: partant comme AB à DE, ainſi GB à HE. Le produit de AG √20—2 en HE 3—√5 eſt √320—16, & le produit de GB 6—√20 en DH √5—1 eſt pareillement √320—16: Parquoy eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

Or de ceci appert qu'eſtant cogneue vne ligne droicte, il eſt fort aiſé de cognoiſtre combien ſeront les ſegmens d'icelle couppee en la moyenne & extreme raiſon, par le moyen de quelque autre ligne dont les ſegmens ſeront cogneus: Et pour tant plus en faciliter la pratique nous auons expreſſement adapté de petits nombres à la ligne DE: tellement que ſi on veut, par exemple, cognoiſtre les ſegmens d'vne autre ligne de 10 pieds, il faut dire par regle de trois, Si 2 donnent √5—1, que donneront 10? & faiſant la regle on trouuera √125—5 pour le grand ſegment, qui oſté de la toute 10, reſterent 15—√125 pour le moindre ſegment.

Auſſi l'vn ou l'autre des ſegmens eſtant cogneu, on cognoiſtra par la meſme methode tant l'autre ſegment que la toute: Parquoy eſtant cogneu le coſté d'vn pentagone on peut cognoiſtre le diametre du cercle circonſcriuant iceluy: car puis que par la 8. prop. 13. la ſubtendante de l'angle d'vn pentagone eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon le grand ſegment eſt egal au coſté dudit pentagone, on cognoiſtra le petit ſegment ou reſte de ladite ſubtendante, ainſi qu'il eſt dit cy-deſſus; & le quarré de la moitié d'icelle ſubtendante eſtant oſté du quarré du coſté du pentagone, reſtera le quarré d'vne ligne par laquelle eſtant diuiſé le quarré de la moitié de la ſubtendante on aura le diametre du cercle, ainſi qu'il appert des choſes demonſtrees à la 11. pr. 13. Lequel diametre on obtiendra encore par la regle de proportion; dautant que nous auons demonſtré ſur le 8. chap. du 2. liu. de la Geometrie d'Errard que la raiſon du ſemidiametre du cercle au coſté du pentagone inſcrit en iceluy eſt comme de 2 à √(10—√20): parquoy voulant cognoiſtre le diametre d'vn cercle dont le coſté du pentagone eſt √(40—√320), ie diray, ſi √(10—√20) donnent 2, que donneront √(40—√320)? & ayant fait la regle ainſi qu'il appartient, le 4. nombre proport. ſera 4, dont le double 8 eſt le diametre requis.

Le meſme ſe doit entendre de tout autre polygone dont la raiſon du ſemidiametre au coſté ſera cogneue: Et pour ce ſubiet nous remarquerons icy que le ſemidiametre du cercle eſtant 2, le coſté du triangle inſcrit en iceluy ſera √12: celuy du quarré √8: celuy du pentagone √(10—√20): celuy de l'octogone √(8—√32): celuy du decagone √5—1: & celuy du dodecagone √6—√2.

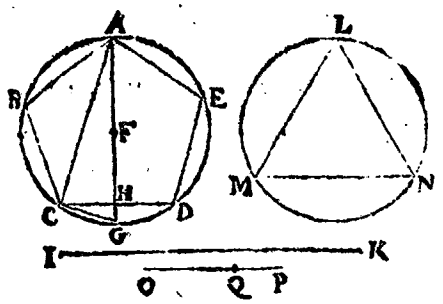
THEOR. 3. PROP. III.

Vn meſme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere.

A uparauant que d'expliquer ceſte prop. il conuient demonſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy, eſt quintuple du quarré du demy diametre du cercle dans lequel eſt inſcrit iceluy pentagone.

Soit vn cercle ABCDE, le coſté du pentagone inſcrit en iceluy cercle CD, la

ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel couppe en deux egalement, tant l'arc CGD, que le coſté CD, par le corol. de la 10. prop. 13. Ie dis que les deux quarrez de CA & CD ſont enſemble quintuples du quarré de FG.



Car ſi on mene CG, ce ſera le coſté du decagone: & par le ſcholie de la 4. pr. 2. le quarré de AG, ſera quadruple du quarré du demy diametre FG; & par conſequent les deux de AC, CG, qui par la 47. p. 1. ſont egaux au quarré de AG, ſeront auſſi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, ſeront enſemble quintuple du ſeul de GF: Mais les deux de CG & GF, coſtez de l'hexagone & decagone ſont enſemble egaux au quarré de CD coſté du pentagone, par la 10. p. 13. partant les deux quarrez de AC & CD ſont quintuples du quarré de GF. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la propoſition. Soit IK le diametre de la ſphere comprenant le dodecaedre & l'Icoſaedre: & d'iceluy dodecaedre ſoit vn pentagone ABCDE, & de l'Icoſaedre ſoit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'vn meſme cercle circonſcrit le pentagone ABCDE, & le triangle LMN: c'eſt à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonſcriuent ſont egaux.

Car eſtant tiree AC ſubtendante de l'angle du pentagone B, ce ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & ſoit expoſee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la ſphere, ſoit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP ſera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on conſtruit l'Icoſaedre par le corol. de la 16. pr. 13. ſoit icelle OP couppee en la moyenne & extreme raiſon en Q; & le plus grand ſegment OQ ſera coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, dont OP eſt le coſté de l'hexagone ou ſemidiametre, par le corol. de la 9. prop. 13 Mais par la 7. propoſit. 13. lors que CA eſt diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment eſt AB: Donc par la 2. propoſit. 14. comme la toute AC ſera à la toute OP, ainſi le plus grand ſegment AB ſera au plus grand ſegment OQ: partant par la 22. p. 6. comme le quarré de AC ſera au quarré de OP, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de OQ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC eſt au quintuple du quarré de OP, ainſi le triple du quarré de AB eſt au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC eſt egal au quintuple du quarré de OP: (pource que le quarré de IK diametre de la ſphere, eſt egal, tant au triple du quarré de AC coſté du cube par la 15. pr. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypotheſe.) Donc auſſi le triple du quarré de AB ſera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le corollaire de la 16. p. 13. ML coſté du triangle de l'Icoſaedre, eſt egal au coſté du pentagone inſcrit dans le cercle, dont OP eſt demi-diametre: & partant puis que par la 10. propoſ. 13. le quarré d'iceluy coſté eſt egal aux deux quarrez de OP, & OQ, coſtez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML ſeront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ: ou à trois de BA, & à trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC eſtans quintuples du quarré du demidiametre FA,

(comme nous auons demonſtré au commencement de ceſte propoſition) trois quarrez de AB, & AC ſeront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, coſté du triangle equilateral, ſont auſſi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML eſt triple du quarré du demy diametre, par la 12. propoſit. du 13.) Donc les trois de BA & AC eſtans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, ſeront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux ſera egal à vn quarré, & le demidiametre au demi-diametre, & par conſequent les cercles ABCDE, LMN ſeront egaux. Donc vn meſme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

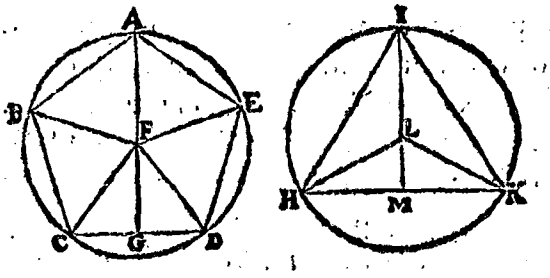
SCHOLIE.

Il appert par ce que nous auons dit à la fin du liure preced. que le diametre de la ſphere IK eſtãt 8, AB coſté du dodecaedre ſera $\sqrt{26\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$, *& LM coſté de l'Icoſaedre* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Mais par ce qui a eſté enſeigné au ſcholie prec. le ſemidiam. du cercle circonſcriuant vn pentagone dont le coſté eſt* $\sqrt{26\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$ *ſera trouué de* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$: *& celuy du cercle circonſcriuant vn triangle equilateral dont le coſté eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$ *ſera auſſi trouué de* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$, *ſoit qu'on procede par la meſme methode du ſcholie prec. ou bien qu'on prenne le tiers du quarré dudit coſté: car par la 12. pr. 13. iceluy tiers ſera le quarré du ſemidiametre requis: Parquoy appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du centre du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre, on meine vne ligne droicte perpendiculaire ſur vn coſté d'iceluy pentagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du coſté du pentagone, eſt egal à la ſuperficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonſcriuant vn pentagone du dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle ſoit F, duquel ſoit tiree FG perpendiculairement ſur le coſté CD. Ie dis que trente fois le rectangle compris de FG & CD, eſt egal à la ſuperficie du dodecaedre.



Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il eſt euident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, eſt double du triangle CFD. Or en la ſuperficie du dodecaedre il y a douze pentagones egaux, & chaſque pẽtagone a cinq pareils triangles que CFD, qui ſont en tout ſoixante triangles, deſquels ſoixante rectangles, ſeroiẽt le double: Donc trente rectangles de FG & CD, leur ſeront egaux.

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi vn triangle equilateral, comme HIK, eſt inſcrit en vn cercle, du centre duquel L, on tire ſur le coſté HK la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, ſeront egaux à la ſuperficie de

l'Icoſaedre. Car icelle ſuperficie contient vingt triangles equilateraux ſemblables à HIK; & chacun d'iceux ſe diuiſe en trois autres triangles egaux entr'eux & ſemblables, & egaux à HLK, qui font en tout ſoixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du coſté HK, eſt double du triangle HLK par la 41. p. 1. Et par conſequent ſoixante rectangles ſeroient doubles de ſoixante triangles: Donc trente rectangles de LM & HK ſeront egaux à la ſuperficie totale de l'icoſaedre.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte, par la 15. pr. 5. que comme vn ſeul rectangle de FG & CD, eſt à vn ſeul rectangle de LM & HK, ainſi la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que le diametre de la ſphere eſtant 8, CD coſté du dodecaedre ſera $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$, *HK coſté de l'Icoſaedre,* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$, *& le ſemidiametre CF ou LH* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{14}{45}})}$: *Parquoy le quarré de CG ſera* $8-\sqrt{35\frac{5}{9}}$, *qui oſté de* $10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{14}{45}}$ *quarré du ſemidiametre CF, reſteront* $2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendic. FG, qui partant eſt* $\sqrt{(2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *& le produit d'icelle perpendiculaire par le coſté CD ſera* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{209}{405}})}$, *lequel produit multiplié par 30, donne* $\sqrt{(51200-\sqrt{524288000})}$ *pour la ſuperficie de tout le dodecaedre. Mais le quarré de HM ſera* $8-\sqrt{12\frac{4}{5}}$, *qui oſté du quarré de LH, reſteront* $2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendic. LM, qui partant eſt* $\sqrt{(2\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *le produit de laquelle perpendicul. par le coſté HK ſera* $\sqrt{(102\frac{2}{5}-\sqrt{5825\frac{19}{45}})}$, *& trente fois ce produit donne* $\sqrt{(92160-\sqrt{4718592000})}$ *pour la ſuperficie de l'Icoſaedre.*

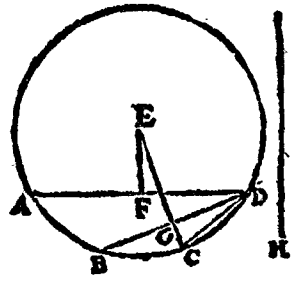
Or en la meſme maniere que deſſus on peut auſſi trouuer la ſuperficie des trois autres corps reguliers, c'eſt aſſauoir du tetraedre, de l'octaedre & du cube: Car ſi du centre du cercle qui circonſcrit le triangle du tetraedre ou de l'octaedre, ou le quarré du cube, eſt tiree vne perpendic. à vn coſté d'iceux; au tetraedre ſix fois le rectangle compris ſous icelle perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre: Mais à l'octaedre, & au cube, douze fois ledit rectangle compris ſous la perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie de l'octaedre, & auſſi egal à la ſuperficie du cube. Car ſi du centre du cercle circonſcriuant le triangle du tetraedre, ou de l'octaedre, on tire des lignes droittes à chaque angle dudit triangle ainſi que deſſus, on le diuiſera en trois triangles ſemblables & egaux entr'eux, & par conſequent il y aura 12 tels triangles en toute la ſuperficie dudit tetraedre, & 24 en celle de l'octaedre: Mais le rectangle compris ſous la baſe & la perpendic. eſt double de chacun deſdits triangles par la 41. p. 1. & partant ledit rectangle pris ſix fois ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre; & pris douze fois, il ſera egal à la ſuperficie dudit octaedre. Mais ayant mené du centre du cercle circonſcriuant le quarré du cube des lignes droittes à chaſque angle d'iceluy quarré il ſera diuiſé en quatre triangles egaux & ſemblables; & par conſequent il y en aura 24 en toute la ſuperficie du cube, leſquels ſont egaux à 12 rectangles compris ſoubs le coſté & la perpendic. ainſi que nous auons demonſtré plus au long ſur le 4. chap. du 3. liure de la Geometrie d'Errard.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre; ainſi le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoit pris AD, coſté du triangle equi-

lateral de l'icoſaedre, & BD coſté du pentagone du dodecaedre inſcrits en vne meſme ſphere; (ce qui eſt poſſible, puis que par la 3. p. 14. vn meſme cercle comprend le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Et du centre E ſoient tirees ſur AD, BD les perpendiculaires EF, EG: & icelle EG eſtant prolongee iuſques à la circonference, elle couppera l'arc BCD en deux egalement en C: & eſtant tiree la ligne droicte CD, ce ſera le coſté du decagone: & finalement ſoit expoſée la ligne droicte H coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere. Ie dis que la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, comme H coſté du cube eſt à AD coſté de l'icoſaedre.



Car d'autant que EC eſt coſté de l'hexagone, & CD coſté du decagone inſcrit en vn meſme cercle; la compoſée d'iceux coſtez, ſera couppée en la moyenne & extreme raiſon, dont le plus grand ſegment ſera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle compoſée eſt EG; & par le corol. de la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand ſegment EC eſt EF. Et partant, puis que par la 15. p. 5. les toutes ſont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez: il eſt euident que la moitié EG eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la moitié EF ſera le plus grand ſegment: (car la moitié du plus grand ſegment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H coſté du cube eſtant auſſi couppé en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment ſera BD coſté du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, ſera à BD ſon plus grand ſegment, ainſi la toute EG ſera à EF ſon plus grand ſegment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, ſera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H eſt à AD, ainſi le rectangle de H, EF, eſt au rectangle de AD, EF: (car ces deux rectangles ont vne meſme hauteur EF.) Auſſi comme H ſera à AD, ainſi le rectangle de BD, EG (lequel eſt egal à celuy de H, EF,) eſt au meſme rectangle compris ſoubs AD, EF. Parquoy, puis que par le Corol. de la preced. comme le rectangle compris ſous BD, EG eſt au rectangle compris de AD, EF, ainſi la ſuperficie du dodecaedre eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre: pareillement comme H coſté du cube ſera à AD coſté de l'icoſaedre, ainſi ſera la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que AD eſt $\sqrt{(32-\sqrt{2045\frac{4}{5}})}$, *BD* $26\frac{2}{3}-\sqrt{53\frac{1}{3}}$, *EC* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{14}{45}})}$, *EF* $\sqrt{(2\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{19}{45}})}$. *EG* $\sqrt{(2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *& H* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$: *& que le rectangle ou produict du coſté BD en la perpendic. EG eſt* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$, *celuy du coſté AD en la perpendic. EF* $\sqrt{(102\frac{2}{9}-\sqrt{5825\frac{19}{45}})}$: *Mais que la ſuperficie du dodecaedre eſt* $\sqrt{(51200-\sqrt{524288000})}$, *& celle de l'icoſaedre* $\sqrt{(92160-\sqrt{4718592000})}$. *Or le produict de ceſte ſuperficie-là multipliée par le coſté de l'icoſaedre AD* $\sqrt{(32-2045\frac{4}{5})}$ *eſt egal au produict de ceſte ſuperficie cy multipliée par le coſté du cube H* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$, *car l'vn & l'autre produit eſt* $\sqrt{(1966080-\sqrt{2147483648000})}$: *& partant appert ce qui eſtoit propoſé; & en outre que le rectangle ou produict de H en EF eſt egal à celuy de BD en EG, l'vn & l'autre d'iceux produicts eſtant* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$: *partant que comme le coſté du cube H eſt au coſté du dodecaedre BD, ainſi la perpendic. EG eſt à la perpendic. EF.*

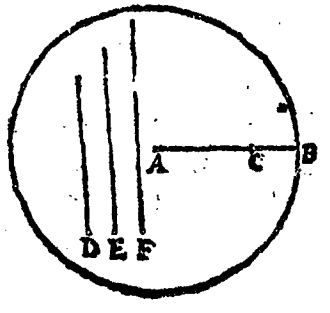
Appert

Appert encore que EF perpendic. de l'icosaedre est moitié du semidiam. EC, le quarré de laquelle perpend. est vn residu, dont le binome correspondant est le quarré de EG perpend. du dodecaedre; & partant ledit semidiam. EC estant cogneu on trouuera fort aisément les dites perpendiculaires; car prenant la moitié d'icelluy, on aura la perpendicul. EF, & changeant le signe — en + on aura l'autre perpend. EG.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison; comme les quarrez de la toute & du plus grand segment, sont aux quarrez de la toute & du plus petit segment, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy-diametre AB, soit couppé en la moyenne & extreme raison en C, dont le plus grand segment soit AC, qui sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le coroll. de la 9. prop. 13. Item soient prises trois lignes, sçauoir D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, & F costé du cube inscriptibles en vne mesme sphere: Ie dis que le quarré de F est au quarré de E, comme les quarrez de AB & AC sont aux quarrez de AB & CB.



Car D estant le costé du pentagone, & E le costé du triangle tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment, par le corol. de la 17. prop. 13. Donc E estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy-diametre AB. par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarrez de AB & CB sont triples du quarré de AC: partant le quarré de E est au quarré de AB, comme les deux quarrez de AB, CB sont au quarré de AC: Et en permutant, le quarré de E sera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB est à son plus grand segment AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainsi le quarré de F au quarré de D: & en permutant, comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarrez de AB & CB sont au quarré de D, costé du pentagone; lequel quarré par la 10. pr. 13. est egal aux deux quarrez de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en vn mesme cercle; & par consequent le quarré de F costé du cube, est à E costé de l'Icosaedre, comme les quarrez de AB & AC, sont aux quar-

rez de AB & CB. Si donc vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Si quelconque ligne droicte AB eſt 2, icelle eſtant couppée en C ſelon la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment AC ſera √5—1, & le petit CB 3—√5 : mais puis que F eſt le coſté du cube inſcrit en vne ſphere, iceluy ſoit tel que nous l'auons cy-deuant trouué, ſçauoir eſt √21⅓, & E coſté de l'icoſaedre inſcrit en la meſme ſphere ſera auſſi tel que nous l'auons trouué, ſçauoir eſt √(32—√204⅘). Or le quarré de la toute AB eſt 4, celuy de AC 6—√20, & celuy de CB 14—√180 : donc les deux quarrez de AB, AC ſont enſemble 10—√20, & les deux de AB, CB ſont 18—√180: Mais le quarré de F eſt 21⅓, & celuy de E eſt 32—√204⅘ ; leſquels quatre nombres ſont proportionnaux ; car le produict des deux extremes eſt egal au produict des deux moyens, l'vn & l'autre produict eſtant 384—√81920 ; partant appert ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre eſt à l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Ceſte demonſtration eſt facile, les predentes eſtans bien entendues: car puis que par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre ſont inſcrits dans vn meſme cercle : il eſt euident qu'iceux triangle & pentagone ſeront equidiſtans du centre de la ſphere. Parquoy ſi on diuiſe le dodecaedre & l'icoſaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre ſolide ſeront de meſme hauteur : Et par les 5. & 6. prop. 12. elles ſeront l'vne à l'autre, comme leurs baſes; c'eſt à ſçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icoſaedre, comme douze pentagones à vingt triangles : C'eſt à dire que comme la ſuperficie du dodecaedre ſera à la ſuperficie de l'icoſaedre, ainſi tout le dodecaedre ſera à tout l'icoſaedre. Mais par la 5. pr. 14. icelles ſuperficies ſont l'vne à l'autre, comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre: donc par la 11. prop. 5. comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre à l'icoſaedre. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné tant en noſtre Geometrie pratique qu'aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, diuers moyens pour trouuer les ſuperficies & ſoliditez non ſeulement du dodecaedre & icoſaedre, mais auſſi de tout autre corps, c'eſt pourquoy nous n'en dirons rien icy, ſeulement y adiouſterons nous (pour d'abondant ſeruir d'exemple de tout ce que nous auons cy-deuant dit) les coſtez, ſuperficies & ſoliditez des cinq corps reguliers inſcrits en vne ſphere, dont le diametre eſt 6, afin que par le moyen d'icelles on puiſſe plus promptement trouuer les coſtez, ſuperficies & ſoliditez de tout autre corps ſemblable, dont le coſté ſera cogneu, ſuiuant les regles & proportions des figures ſemblables cy-deuant demonſtrees, c'eſt aſſauoir de la raiſon doublee des coſtez, quant aux ſuperficies ; & de la triplee pour les ſoliditez.

Le coſté du tetraedre ſera √24, ſa ſuperficie √1728, & ſa ſolidité √192.

Le coſté de l'octaedre ſera √18, ſa ſuperficie √3888, & ſa ſolidité 36.

Le costé du cube sera $\sqrt{12}$, *sa superficie* 72, *& sa solidité* $\sqrt{1728}$.

Le costé du dodecaedre sera $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, *sa superficie* $\sqrt{(16200-\sqrt{52488000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$.

Le costé de l'Icosaedre sera $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$, *sa superficie* $\sqrt{(29160-\sqrt{472392000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$.

Parquoy appert d'abondant ce qui estoit proposé, sçauoir est que comme $\sqrt{12}$. *costé du cube est à* $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$ *costé de l'Icosaedre, ainsi* $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$ *solidité du dodecaedre est à* $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$ *solidité de l'Icosaedre: car le produit des deux nombres extremes est egal à celuy des deux du milieu, l'vn & l'autre produict estant* $\sqrt{(38880+\sqrt{302330880})}$.

Appert aussi que la superficie de l'octaedre est sesquialtere à la superficie du tetraedre, c'est à dire comme 3 *à* 2: *car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux nombres du milieu, l'vn & l'autre produit estant* $\sqrt{15552}$.

Que l'octaedre est au triple du tetraedre, comme le costé de l'octaedre au costé du tetraedre: car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux moyens, l'vn & l'autre produit estant 31104.

Que la superficie du cube est egale au double du quarré du diametre de la sphere, & la solidité d'iceluy cube triple de la solidité du tetraedre.

Et finalement, que le cube est à l'octaedre, comme la superficie du cube est à la superficie de l'octaedre: car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux du milieu, l'vn & l'autre produit estant 2592: *& aussi comme le costé du cube au semi-diametre de la sphere, car le produit des deux nombres extremes est* $\sqrt{15552}$ *aussi bien que le produit des deux du milieu.*

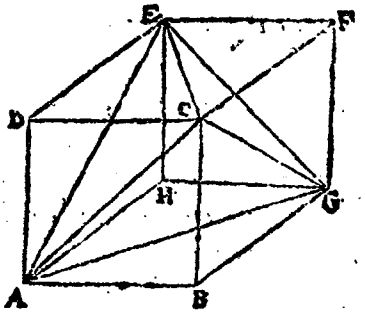
Fin du quatorzieſme Element.

ELEMENT QVINZIESME.

PROBL. 1. PROP. I.

Dans vn cube donné, inſcrire vne pyramide.

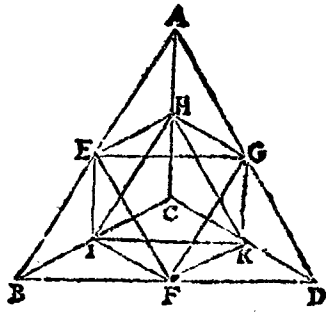
Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. De quelque angle d'iceluy, comme E ſoient menees les diagonales EA, EC, EG; & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menees les diagonales AG, AC, GC; Toutes leſquelles diagonales ſont egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menees ſont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG, ſont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant la pyramide AEGC conſtituee d'iceux triangles eſt inſcrite au cube donné AF, par la 31.d.11. Car tous les angles d'icelle pyramide ſont colloquez és angles d'iceluy cubo AF. Nous auons donc inſcrit vne pyramide dans le cube dõné. Ce qu'il falloit faire.



PROBL. 2. PROP. II.

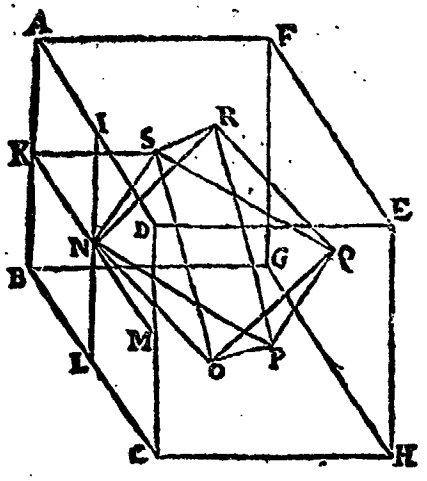
Dans vne pyramide donnee, inſcrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egalement aux poincts E, F, G, H, I, K: Et ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles par la 4. pr. 1. toutes les lignes couppees eſtans egales entr'elles, & les angles des triangles plãs de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGKI a les quatre coſtez egaux, & les quatre triangles EHI, IHK, KHG, GHE, commençans ſur iceluy quadrilatere, & finiſſans au poinct H, ſont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au deſſous du quadrilatere, & finiſſans au poinct F, ſont auſſi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux quatre precedans. Parquoy la figure EIKGHF compoſee d'iceux huict triangles eſt vn octaedre, par la 27.def.11. & par la 31 d.11. il eſt inſcrit dans la pyramide donnee ABCD, puis que tous les angles d'iceluy touchent tous les coſtez d'icelle pyramide. Nous auons donc fait ce qui eſtoit requis.



PROBL. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inſcrire vn octaedre.



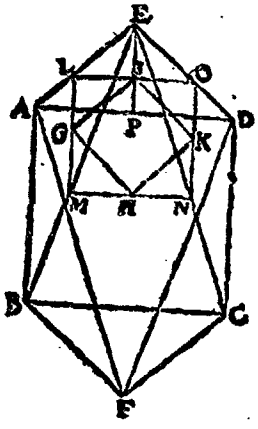
Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez en deux egalement les coſtez du quarré AC, és poincts I, K, L, M, & ſoient menees les deux lignes IL, KM, s'entre-couppans en N, lequel poinct ſera le centre du quarré AC, comme il appert par la demonſtration de la 8. p. 4. Par la meſme maniere ſeront trouuez les centres des 5 autres quarrez du cube, leſquels centres ſoient O, P, Q, R, S: Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres à chaque poinct de la ſection des coſtez de leurs quarrez, telles que ſont NI, NK, NL, NM, KS, &c. ſeront egales aux moitiez d'iceux coſtez, comme il appert par la ſuſdite demonſtration de la 8. p. 4. & par conſequent ſont egales entr'elles. Item ſoient conioincts les centres S, N, P, Q par les quatre lignes droictes SN, NP, PQ, QS, leſquelles ſeront toutes egales par la 4. p. 1. d'autant qu'elles ſont baſes de quatre triangles Iſoſcelles ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, (chacun d'iceux coſtez eſtant egal à la moitié du coſté du cube ainſi que NK, SK du triangle NKS) & l'angle contenu d'iceux coſtez egal à l'angle, ſçauoir droict comme NKS: Il eſt euident qu'icelles quatre lignes ſeront auſſi vn quarré, qui eſt au milieu de l'octaedre, & parallel à la baſe d'iceluy. Or des quatre angles d'iceluy quarré ſoient menees au poinct R, centre du quarré ſuperieur AE, les quatre lignes NR, PR, QR, SR, leſquelles comme il a eſté dit cy-deſſus ſeront toutes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & feront les quatre triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, NRS: Item des meſmes quatre angles du quarré NPQS, ſoient menees au poinct O, centre de la baſe CG, les lignes NO, PO, QO, SO, qui ſeront egales comme deſſus, & feront quatre autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS, leſquels ſeront auſſi egaux aux quatre premiers, car tous leurs coſtez ſont egaux, eſtans baſes de huict triangles Iſoſcelles rectangles, tel qu'eſt NKS. Parquoy le ſolide NOPQRS compoſé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux eſt octaedre inſcrit au cube donné, par les 27. & 31. def. 11. puis que tous les ſix angles d'iceluy, touchent les ſix plans dudit cube à leurs centres. Nous auons donc fait ce qui eſtoit requis.

PROBL. 4. PROP. IV.

Dans vn octaedre donné, inſcrire vn cube.

Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inſcrire vn cube. Des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui ſe terminent au poinct E, ſoient pris les centres G, H, I, K, & ſoient menees les lignes GH, HK, KI, GI: Il eſt euident que GHKI ſera quarré. Car ſi d'iceux quatre centres on meine les lignes droictes LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à ſon coſté du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO ſeront equilateraux, puis qu'ils ſont ſemblables aux triangles equilateraux cy-deſſus par le corol. de la 4. p. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les coſtez communs; & par conſequent les quatre

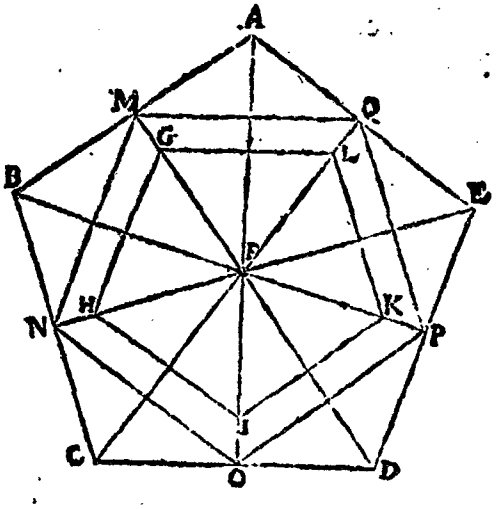
baſes LM, MN, NO, LO ſont egales. Item ſi de E par le centre I on meine EP: elle diuiſera en deux egalement tant l'angle E, que le coſté AD par le corol. de la 10.p.13. & par conſequent LO eſtant parallele à AD ſera auſſi couppee en deux egalemẽt au centre I: Par meſme raiſon LM, MN, NO ſeront auſſi couppez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainſi les quatre triangles GLI, IOK, GMH, HNK ſont Iſoſceles rectangles. (Car par la 10.p.11. les angles des poincts L, M, N, O, *ſont egaux aux droicts du quarré* ABCD.) Parquoy les quatre baſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI eſt quarré. Que ſi ſemblablemẽt des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres eſtans tous conioincts par lignes droictes, ſeront deſcrits encores 5 quarrez, *leſquels ayans les coſtez communs* ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cube cõpoſé d'iceux 6 quarrez ſera inſcrit dans l'octaedre donné, puiſque les angles d'iceluy touchent les huict baſes de l'octaedre à leurs centres; & par ainſi nous auons fait ce qui eſtoit requis.



PROBL. 5. PROP. V.

Dans vn icoſaedre donné, deſcrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on conſtruit l'icoſaedre, ſur lequel ſoit vne des douze pyramides pentagonales de l'icoſaedre, ayant pour ſommet le poinct F, auquel s'aſſemblent les 5 triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & ſoit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH: Item de F par iceux centres, ſoient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, leſquelles *coupperont en deux egalement les coſtez* AB, BC, CD, DE, EA, comme il appert par le corol. de la 10.p.13. & partant eſtant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il eſt euident par la 4 p.1. qu'elles ſeront egales; & que par la 8.p.1. les angles qu'elles ſouſtiennent au poinct F ſont egaux; & d'autant que *les lignes* FG, FH, FI, FK, FL *ſont auſſi* egales; (car ce ſont demi-diametres de cercles circonſcriuans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG ſeront pareillement egales, & les angles de deſſus icelles auſſi egaux, par la 4 p.1. Parquoy le pentagone GHIKL eſt equilateral & equiangle: & il ſe prouuera aiſément comme à la 17.p.13. qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Que ſi ſemblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres vnze pyramides de l'icoſaedre, ſeront auſſi deſcrits des pentagones equilateraux & equiangles, leſquels puis qu'ils ont des coſtez communs, ſeront auſſi egaux entr'eux. Parquoy 12 tels pentagones conſtitueront vn dodecaedre, lequel ſera inſcrit dans l'icoſaedre, puis que les 20 angles d'iceluy octaedre ſont conſtituez & touchent les vingt baſes de l'icoſaedre à leurs centres. Nous auons donc inſcrit vn dodecaedre, dans vn Icoſaedre donné. Ce qu'il falloit faire.



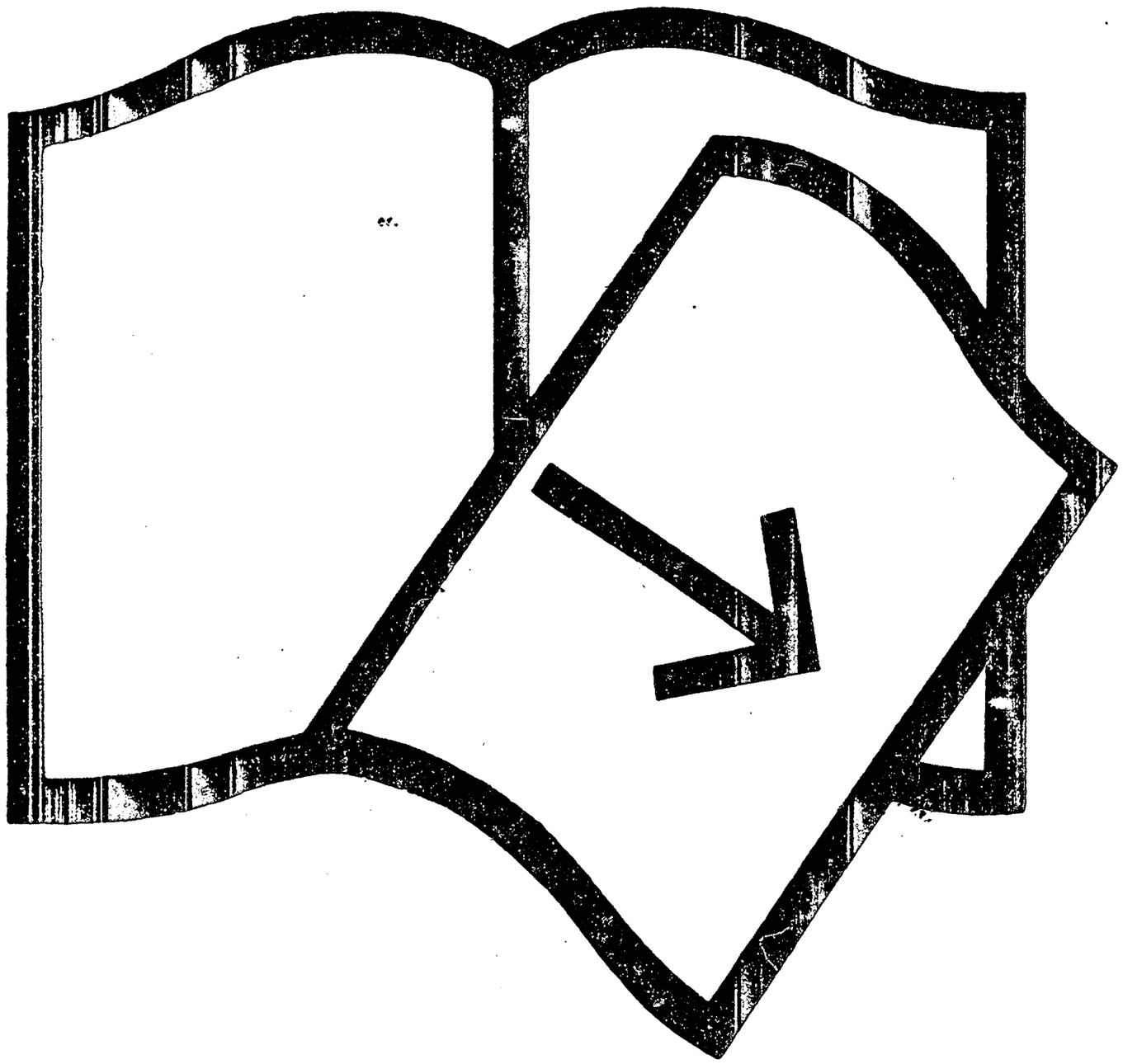
Fin du quinzieſme & dernier Element.

COMMENTAIRE OV PREFACE DE MARIN PHILOSOPHE SVR LE LIVRE des DONNEZ d'Euclide.

PRemierement, il nous faut mettre comme fondement que c'eſt qu'on appelle Donné *: en apres remarquer l'vtilité d'iceluy, & en troiſieſme lieu à quelle ſcience appartient ce Traicté.*

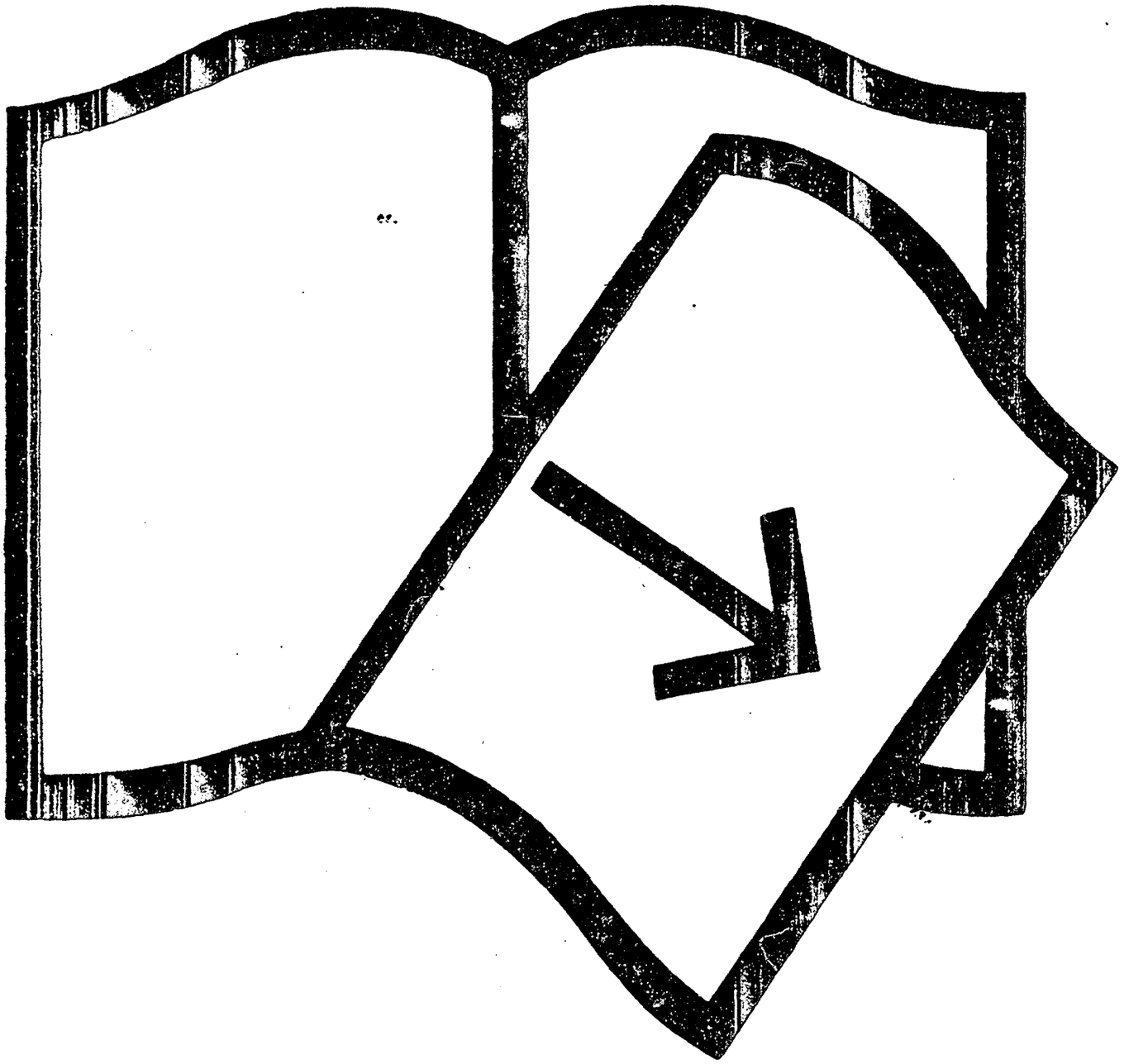
Donné *doncques ſe definit en pluſieurs manieres; car les Anciens l'ont defini d'vne façon, & les modernes d'vne autre; dont s'enſuit qu'il ſemble mal-aiſé d'en pouuoir donner la vraye explication. Car quelques vns n'ont point baillé de definition de* Donné, *mais ils ont auec beaucoup de trauail recherché certaines proprietez d'iceluy, & quelques autres raſſemblans & meſlangeans ce qui en auoit eſté dict auparauant par les autres ont eſſayé de definir* Donné *: mais non pas de telle façon qu'ils ne ſe ſoient contrariez eux-meſmes, quoy qu'il ſemble que tous fondez ſur vne meſme notion & ſuppoſition en ayent dit quelque choſe: car tous ont eſtimé que le* Donné *eſtoit quelque choſe compriſe; & partant entre ceux qui ont taſché de le deſcrire plus ſimplement & auec quelque ſimple difference, les vns ont creu que* Donné *eſtoit ce qui eſt* Ordonné, *ainſi qu'Apollonius en ſon Traicté des Inclinations, & en ſon Traicté Vniuerſel: & les autres, comme Diodore, ce qui eſt* Cogneu: *car en coſte ſignification il prend la ligne droicte, & les angles eſtre donnez, & tout ce qui peut venir à noſtre cognoiſſance, encore qu'on ne le puiſſe pas bien exprimer: Mais les autres ont creu que c'eſtoit meſme ce qui eſt* Effable, *comme ſemble auoir voulu Ptolomée, lequel appelle* Donnez *toutes les choſes dont la meſure eſt cogneue, ſoit preciſément, ou à peu prés. Quelques autres auſſi ont penſé que* Donné *eſtoit ce qui nous eſt concedé en l'hypotheſe par le propoſant, veu qu'aux premiers Elemens ils prennent autrement vn poinct donné qu'vne ligne droicte donnée, c'eſt à dire que qui donneroit & determineroit la quantité d'vne ligne droicte: toutes leſquelles choſes veulent ſignifier quelque* Comprehenſion. *Et partant de toutes ces definitions, celles-là aggreent le plus, leſquelles plus appertement declarent la* Comprehention *comme nous ferons voir par les choſes ſuiuantes.*

Or expliquons maintenant les diuerſes opinions de ceux, leſquels deſcriuans la nature du Donné *n'ont point pris vne ſimple marque, ou vnique caractere pour le definir, & les reduiſons comme en vn ſommaire & abbregé, afin que nous puiſſions aiſément recognoiſtre ou nombrer toutes leurs differences. Les vns donc ont defini* Donné *eſtre ce qui eſt* Ordonné & Porime *enſemble; & les autres, ce qui eſt* Ordonné & Cogneu *enſemble: & les autres, ce qui eſt* Porime & Cognen *enſemble: c'eſt pourquoy tous ſemblent auoir defini en ſorte qu'ils ont eu eſgard à la* Comprehenſion *ou* Somption & Inuention *du Donné. Et afin que nous concevions tant mieux leur oppinion, & que des dicts de pluſieurs nous puiſſions tirer vne vraye definition de ce qui eſt propoſé, nous remarquerons en premier lieu la ſignification de tous les termes ſimples dont ils ſe ſeruent, cõme auſſi de leurs oppoſez, aſçauoir de l'*Inordonné, & de l'Incogneu, de l'Apote, &



Documents manquants (pages, cahiers...)

NF Z 43-120-13



Documents manquants (pages, cahiers...)

NF Z 43-120-13

de l'Irrationel : *car ces choſes-là appartiennent à ceſte matiere Geometrique, aux choſes naturelles, & aux diſciplines Mathematiques.*

Or on appelle Ordonné (*ou reglé*) *cela qui garde & obſerue touſiours ce parquoy il eſt dict eſtre ordonné, ſoit quant à la grandeur, ou quant à l'eſpece, ou touchant quelque autre choſe de ſemblable : On le definit encore ainſi :* Ordonné *eſt ce qui ne peut eſtre fait en diuerſes façons, mais en vne ſeule en quelque lieu determiné : comme pour exemple, Vne ligne droicte menée par deux poincts donnez, eſt dicte eſtre* Ordonnee, *parce qu'il ne ſe peut faire autrement, ny en pluſieurs façons : Mais vn angle paſſant par deux poincts eſt dict* Inordonné, (*ou deſordonné & dereglé*) *parce qu'il eſt conſtitué en infinies & differentes façons par vn grand ou vn petit cercle deſcrit par deux poincts en l'infini : Et au contraire, vn angle conſtitué par trois poincts eſt dict* Ordonné; *comme auſſi ces choſes ſont dictes eſtre* Ordonnées; *conſtituer ſur vne ligne droicte vn triangle equilateral, car on ne le conſtitue point diuerſement, mais inuariablement ſur l'vne & l'autre extremité de la ligne : Et couppper vne ligne droicte donnée ſelon vne raiſon donnée, car cela ne ſe peut faire qu'en vne partie de la biſſection. Les* Inordonnez, *ſont ceux qui ſe font au contraire de ceux là; comme conſtruire vn triangle ſcalene, & couppper vne ligne droicte indefiniment. Or ce parquoy le Probleme eſt ordonné eſt propoſé en la determination, attendu qu'vne certaine choſe pourra eſtre* Ordonnée *en vne certaine maniere, &* Inordonnee *en vne autre : comme vn triangle equilateral, entant qu'il eſt equilateral il eſt* Ordonné; *mais quant à la grandeur il eſt* Inordonné, *car il n'eſt nullement determiné.*

Mais on appelle Cognu, *ce qui eſt notoire, comme clair & compris de nous : &* Incognu, *ce qui n'eſt point cognu ny compris de nous; comme la longueur d'vn chemin eſt dicte cognue quand l'on ſçait combien il contient de ſtades : Item que les trois angles d'vn triangle rectiligne ſont egaux à deux droicts : & pareillement que le binome eſt irrationel; telles choſes ſont cognues, comme auſſi qu'il n'y a qu'vne ligne droicte qui touche la ligne ſpyralle d'vn poinct donné hors d'icelle de l'vne ou l'autre part : car s'il y en auoit encore vne autre, deux lignes droictes enclorroient vn eſpace, ce qui eſt impoſſible. Au reſte les choſes irrationelles ne s'appellent point incognues, mais celles-là ſeulement qui ne ſont ny cognues, ny compriſes de nous.*

Le Porime (*ou qui a effection*) *eſt ce que nous pouuons faire & conſtruire, c'eſt à dire le reduire en cognoiſſance : On le definit encore en cette maniere,* Porime *eſt ce qui peut eſtre exhibé par demonſtration, ou qui eſt apparent ſans demonſtration; comme eſt deſcrire vn cercle d'vn centre & interualle, comme auſſi conſtruire non ſeulement vn triangle equilateral, mais auſſi vn Scalene : ou trouuer vn binome, ou trouuer deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement; & autres choſes que lon cognoit en infinies façons ſont* Porimes, *comme deſcrire vn cercle par deux poincts.*

L'Apore (*ou qui n'a effection*) *eſt totalement oppoſé au Porime, comme par exemple, la quadrature du cercle; car elle n'a pas encore eſté trouuee, bien qu'il ſoit certain qu'elle le peut eſtre : toutefois le moyen & façon de la trouuer n'a pas iuſques à preſent eſté compriſe : Mais nous parlons icy de ce qui eſt deſia cognu, qui s'appelle* Porime principal; *car ce qui n'a pas encore eſté fait, & qui neantmoins eſt poſſible, eſt appellé* Poriſte (*ou faiſable*). *Mais l'*Apore, *comme il a eſté deſia dit, eſt oppoſé au* Porime, *& eſt ce dont la recherche n'eſt point encore decidee ny bien determinee.*

L'Effable, (*c'eſt à dire rationel, ou dicible & explicable*) *eſt ce dont nous pouuons*

dire la grandeur, l'espece, & position: Mais cette definition est vn peu trop generale, car proprement & selon soy, Effable, est ce qui est cognu par certaines choses, & selon vne mesure donnee par position, comme d'vn espam ou d'vn doigt.

Ces choses doncques estans ainsi expliquees, nous pouuons aisement appercenoir en quoy conuiennent & different toutes les choses que nous auons dictes cy-dessus: Et premierement comme s'accorde Ordonné auec Cognu, & semblablement leurs oppositez entr'eux; car on ne peut point dire qu'vne de ces choses par contreschange soit l'autre, ny aussi que l'vne n'ait pas plus d'estendue que l'autre, quoy qu'ils s'accordent en plusieurs choses, comme descrire vne ligne droicte par deux poincts, & constituer vn triangle equilateral par trois cercles. Mais quarrer vn cercle, cela est bien Ordonné, mais Incognu neantmoins: Item qu'à vn poinct d'vne Spyralle il y ait vne seule touchante, cela est bien du genre des Ordonnez, & ne se peut faire autrement, mais pourtant la demonstration & construction n'en est pas cognue. Et derechef, la section indefinie, & la constitution du Scalene est bien Cognue, mais elle n'est pas Ordonnee; tellement qu'il est manifeste qu'entre les Ordonnez, il y en a de Cognus, & d'autres Incognus: Et par le contraire, qu'entre les Cognus, il y en a d'Ordonnez, & d'autres Inordonnez: Et partant ces choses se rapportent entr'elles, comme entre les animaux, celuy qui a raison auec celuy qui a des pieds; car ils ne s'egallent point entr'eux, ny l'vn ne s'estend pas plus que l'autre.

Semblablement se comportent entr'eux l'Ordonné & l'Inordonné, au regard du Porime & de l'Apore, veu qu'entre iceux il y a vne tres-grande ressemblance, & different entr'eux en la façon susdite: Car à la verité la Spyralle est bien Ordonnee, mais elle n'estoit pas Porime deuant Archimede. Et par mesme raison les choses qui sont inordonnees & cognues par infinis moyens sont Porimes, si quelqu'vn en inuente leur constitution & construction. Et neantmoins elles ne sont pas encore ordonnees, comme est constituer vn triangle Scalene, car il n'est pas difficile de faire cognoistre la constitution d'iceluy par vn equilateral, voire il est tres-facile, quoy qu'il soit inordonné, & cognu en infinies façons.

Et de mesme façon se comportent l'Ordonné & l'Inordonné auec l'Effable & l'Irrationel, car en plusieurs choses ils s'accordent entr'eux, & different neantmoins par la susdite raison, veu que ces choses-là ne s'egallent point entr'elles, ny vne chose ne contient pas l'autre: Car tous les binomes, & les choses qui sont prises comme irrationelles, sont bien ordonnees; mais elles ne sont pas pourtant effables ou dicibles & expliquables, comme ne l'est pas le diametre du quarré au regard du costé. Or des Effables il y en a plusieurs inordinez, parce qu'ils sont cognus diuersement, & en façons indeterminees: Car on peut mesurer vn triangle Scalene par vne mesure proposee & definie, comme explicable, quoy qu'il soit inordonné.

Or il est aisé de voir la conuenance du Cognu auec le Porime, mais il est difficile d'en expliquer leur difference, d'autant que leur nature approche l'vne de l'autre, tellement qu'il semblent s'egaler entr'eux: il paroistra neantmoins y auoir quelque difference à qui les considerera de prés. Car qu'il n'y ait qu'vne ligne droicte qui touche la Spyralle en vn poinct, cela est Cognu; toutesfois le Probleme n'en est pas Porime, n'estant pas encore compris. De maniere que tout ce qui est Cognu n'est pas pourtant Porime: Mais tout ce qui est Porime est aussi Cognu; & partant le Cognu paroist plus estendu que le Porime.

Or le Cognu, le Porime, & l'Effable conuiennent en certaines choses, & different en d'autres par la mesme raison que nous auons desia dite: Car ces lignes-là que l'on appelle irrationelles, à la verité sont cognues, & toutesfois elles ne sont pas effables ou explicables.

Au contraire tout nombre eſt bien Effable, *& neantmoins tout nombre n'eſt pas* Cognu. *Mais l'*Effable *de ſa nature eſt touſiours effable, iaçoit que quelque longueur ſoit tantoſt effable, & tantoſt non, ſi elle eſt exigee auec quelque autre ſelon vne meſme meſure. Mais auſſi cette meſme longueur eſt par fois cognue, & autresfois non, iaçoit qu'elles s'accordent totalement entr'elles. Or il eſt dificile de trouuer quelque choſe qui ſoit* Effable *&* Incognu *enſemble; car le Cognu ſemble paroiſtre plus eſtendu que l'Effable. Et par ces choſes il eſt manifeſte que le* Porime *& l'*Apore *different du* Rationel *ou* Effable, *& de l'*Irrationel: *Car il ſe peut faire que des choſes* Irrationelles, *quelques vnes ſoient* Porimes; *mais des* Rationelles, *aucunes ne peuuent eſtre irrationelles. Et partant il eſt tres-aiſé à voir en quoy s'accordent les choſes ſuſdites, neantmoins elles ſe comportent entr'elles de telle ſorte qu'il ſemble que le* Porime *ſoit plus eſtendu que l'*Effable.

Or par ces choſes on peut recognoiſtre la difference des choſes qui ont eſté dittes, car à la verité Effable *&* Irrationel *ſe dit au reſpect de la meſure, laquelle neantmoins n'eſt pas paruenue à noſtre cognoiſſance; veu que quelque choſe qui eſt rationel, peut n'eſtre pas cognu de nous, & ſemblablement eſtre rationel, & n'eſtre iamais compris qu'il le ſoit. Mais l'*Ordonné *& l'*Inordonné *ſe dit ſelon ſoy, & ſelon la propre nature de la choſe qui vient en contemplation, encore qu'il ne ſoit pas compris de nous, comme Archimede a apperceu quelques choſes eſtre ordonnees de leur nature, leſquelles Serenus auoit auparauant contemplees. Mais le* Cognu *& l'*Incognu *ſe dit au regard de nous; tellement que les choſes ſuſdites different entr'elles: car celles-cy ſe rapportent à nous, celles-là à la propre nature, & les autres à la meſure.*

Ayant donc expliqué les conuenances & differences des choſes qui ont eſté propoſees il reſte à conſiderer que c'eſt que Donné: *Car de tous ceux-là qui croient que ce qui eſt concedé en l'hypotheſe par le propoſant ſoit le* Donné, *ſe fouruoient de ce qui eſt cherché, parce que tous les Elemens des Donnez ne ſont pas compoſez de cette ſorte de* Donné, *qui eſt ſelon l'hypotheſe, comme on peut voir aux traictez qui ont eſté faits du* Donné: *C'eſt pourquoy delaiſſant cette opinion il nous faut iuger des definitions des autres. Donc ce qui eſt concedé en l'hypotheſe, eſt quelque choſe qui eſt conſequemment cognue par les principes: mais ceux qui ſe ſeruent des definitions d'vn ſeul mot, le definiſſent & le marquent par quelques-vns des ſuſdits, comme il a eſté dit au commencement; tellement que preſque tous ſemblent auoir eu cette commune notion du* Donné, *ſçauoir eſt qu'il eſt compris, comme auſſi le mot de* Donné *le manifeſte: Et entre ceux-cy, ſont les principaux ceux qui le definiſſent par l'hypotheſe ou ſuppoſition: Et les autres ont eu egard à ce qui eſt concedé. Mais nous vſant des choſes dites comme d'vne regle & addreſſe pour bien iuger, nous pourrons trouuer vne parfaitte definition de* Donné: *Car il eſt certain qu'il faut qu'elle s'egale & conuertiſſe auec la choſe definie, qui eſt vne choſe propre aux bonnes definitions. Or telle ſemble eſtre la definition du propoſé, laquelle entre les expliquees le plus ſimplement, le definit* Porime; *& entre les complexes, celle qui le definit* Porime *&* Cognu *enſemble, mais toutes les autres ſont imparfaittes: Car celle qui le definit* Ordonné, *ne ſuffit pas pour la comprehenſion & intelligence du* Donné, *parce que ny tout ordonné, ny le ſeul ordonné n'eſt pas compris, veu qu'il y a des choſes inordonnees qui ont la meſme condition, comme il a eſté monſtré. Celle-là ne ſatisfait pas non plus, laquelle deſcrit qu'il eſt le* Cognu: *car tout cognu n'eſt pas compris, encore que le ſeul cognu ſoit compris. Celle-là n'eſt pas auſſi parfaitte laquelle definit que c'eſt l'*Effable: *car l'effable n'eſt pas ſeul compris, puis que quelques vnes des irrationelles ſont auſſi compriſes: Semblablement tout effable n'eſt pas compris, comme nous auons declaré cy-deſſus. Or entre les definitions qui*

s'expliquent par vn ſeul mot, reſte celle qui le definit Porime, *laquelle ſemble grandement manifeſter la comprehenſion; car tout Porime & le ſeul Porime eſt compris : Pourtant Euclide meſme a vſé d'vne telle definition deſcriuant toutes les eſpeces de Donnez par luy conceues & regardees. Mais entre les definitions compoſees celle-là eſt parfaitte, laquelle definit le Donné eſtre le* Cognu *& le* Porime *enſemble, ayant le Cognu pour genre analogique, & le Porime pour difference. Mais celle-là eſt imparfaitte, laquelle dit l'*Ordonné *& le* Porime *enſemble : car les choſes qui ſont telles ne ſont pas ſeules donnees. Et celle-là qui le definit* Ordonné *&* Effable *enſemble, comprend ſemblablement le Donné auec deffaut. Mais celle du* Cognu *&* Ordonné *enſemble, n'eſt pas auſſi receuable, veu qu'elle excede ce qu'on definit : car ce qui eſt tel n'eſt pas donné ſeul. Donc ceux-là ſeuls qui ont dit que le* Donné *eſt le* Cognu *& le* Porime *enſemble, ſemblent auoir atteint la notion du Donné : car ce qui eſt tel, eſt tout & ſeul compris, leſquelles deux choſes doiuent eſtre aux definitions bien donnees. Mais ceux-là approchent bien prés de ceux-cy, leſquels ont defini ainſi :* Donné *eſt ce à quoy nous pouuons trouuer vn égal, ſelon les choſes que nous auons propoſees aux premieres hypotheſes & principes. Du nombre deſquels eſt Euclide ayant vſé par tout du verbe* πορίσαι δεῖ *qui ſignifie exhiber ou inuenter, quoy qu'il delaiſſe le* Cognu *comme conſequent du* Porime. *Quelqu'vn pourroit neantmoins le reprendre de ce qu'il n'ait auparauant defini* Donné *en general, mais immediatement quelques vnes des eſpeces de* Donné, *iaçoit qu'aux Elemens de Geometrie il ait definy la ligne ſimple auant que de definir les eſpeces.*

Quelle eſt l'vtilité du traicté des Donnez.

Donques apres auoir expliqué vniuerſellement & ſelon qu'il nous a ſemblé neceſſaire pour l'vſage preſent, que c'eſt que Donné, *il faut conſequemment que nous facions voir les vtilitez de ce traicté. Or ce traicté eſt tel, qu'il n'eſt pas ſeulement inſtitué pour l'amour de ſoy-meſme, mais auſſi pour quelque autre choſe : car il eſt grandement neceſſaire au lieu que lon appelle* Reſolu: *Et nous auons deſia dit ailleurs combien de force obtient le* Lieu reſolu *aux diſciplines Mathematiques & en l'Optique & Canonique, leſquelles approchent grandement d'icelles, tant pource que la* Reſolution *eſt vne inuention de la demonſtration, que parce qu'en choſes ſemblables elle nous ſert de beaucoup pour l'inuention de la demonſtration, ou parce qu'il eſt beaucoup plus excellent de rencontrer vne puiſſance reſolutiue, que de poſſeder pluſieurs demonſtrations particulieres.*

A quelle ſcience ſe rapporte le traicté des Donnez.

Or veu que la conſideration des Donnez eſt vtile à toutes les ſciences, attendu qu'elle ſert de beaucoup à la Resolvtion, *elle ſera dite à bon droict eſtre reuoquee non pas à vne ſeule ſcience, mais à la Mathematique vniuerſellement, laquelle traicte des nombres, des temps, de la velocité, & choſes ſemblables; qui traitte meſme des raiſons, comme auſſi des proportions, & pour dire en vn mot de toutes medietez. Parquoy pour la parfaitte & demonſtratiue cognoiſſance des* Donnez *tant vtile, Euclide a trauaillé à ce liure des* Donnez, *lequel autheur entre tous ceux qui ont compoſé des Elemens de Geometrie obtient à bon droict le premier rang, & lequel ayant elaboré les Elemens, ou pluſtoſt les introductions preſque de toutes les diſciplines Mathematiques, aſſauoir de toute la Geometrie en 13 liures; de l'Aſtronomie es Phœnomenes, de la Muſique, & Optique, il a laiſſé par eſcrit les Elemens reſolutifs du traicté de* Donné. *Mais comme il eſtoit Geometre, il a particulierement accommodé aux grandeurs ce qui eſtoit du Donné, & toutesfois commun aux autres choſes, laquelle methode a auſſi eſté obſeruee par luy, lors que traittant vniuerſellement des raiſons & proportions, il les a appropriees aux grandeurs au 5. liure des Plans.*

Maintenant il a esté dit en general que c'est que Donné, *à quelle science il appartient, & combien en est vtile la contemplation: Adiouſtons donc à ce qui a esté dit la deſcription d'icelle ſcience, laquelle traitte du* Donné, *attendu qu'elle est, comme il appert par ce qui a esté dit, vne comprehenſion en toutes manieres de* Donnez, *& de leurs accidens & proprietez. Mais en egard au liure propoſé nous dirons que c'eſt vne doctrine Elementaire de toute la cognoiſſance du* Donné: *dont s'enſuit qu'elle ſera fort vtile, cõme auſſi les choſes y contenues, entant qu'elles ſe referent au* Donné. *Or ce liure eſt diuiſé ſelon les eſpeces des Donnez, & en la premiere ſection ſont contenues les choſes qui ſont donnees par raiſon: ſecondement, celles qui ſont donnees par poſition; & en apres, celles qui ſont donnees par eſpece. Car ce qui eſt* Donné *par grandeur, eſt ſimple & particulierement contenu aux autres, & principalement aux Donnez par eſpece. Or il a commencé aux choſes donnees par raiſon & poſition, d'autant que celles qui ſont donnees par eſpece en ſont conſtituees. Euclide donne encore vne autre diuiſion à ce liure; car il le diuiſe en vniuerſelles grandeurs, en lignes, en ſuperficies, & en theoremes circulaires; lequel ordre il a auſſi gardé es definitions & ſuppoſitions de ce liure. Outre ce il s'eſt ſerui d'vn genre d'enſeigner qui ne procede point par la compoſition, mais par la reſolution, ainſi que Pappus a fait voir amplement aux Commentaires qu'il a fait ſur ce liure.*

FIN.

LES DONNEZ D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. LES plans ou eſpaces, les lignes, & les angles, auſquels nous en pouuons trouuer d'egaux ſeront dits eſtre donnez par grandeur.

2. Vne raiſon eſt dicte eſtre donnee, lors que nous en pouuons trouuer vne meſme, ou egale à icelle.

3. Les figures rectilignes dont les angles ſont donnez, & auſſi les raiſons que les coſtez ont entr'eux, ſont dictes eſtre donnees par eſpece.

4. Les poincts, les lignes, & les angles, qui ont & gardent touſiours vn meſme lieu & ſit, ſont dicts eſtre donnez par poſition ou ſitution.

5. Vn cercle eſt dit eſtre donné par grandeur, lors qu'on en donne le demi-diametre par grandeur.

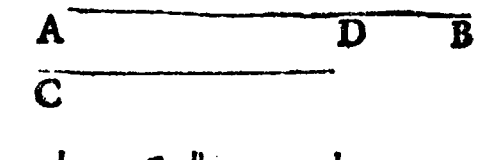
6. Vn cercle eſt dit eſtre donné par poſition, & par grandeur, lors qu'on en donne le centre par poſition, & le demi-diametre par grandeur.

7. Les ſegmens de cercles auſquels les angles, & les baſes ſont

donnees par grandeur, ſont dicts eſtre donnez par grandeur.

8. Les ſegmens de cercle, auſquels les angles ſont donnez par grandeur, & les baſes des ſegmens par poſition & grandeur, ſont dicts eſtre donnez par poſition & par grandeur.

9. Vne grandeur eſt plus grande qu'vne autre, d'vne grandeur donnee, lors qu'en ayant oſté la donnee, le reſte eſt egal à cette autre.



C'eſt à dire que s'il y-a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant oſté de AB vne grandeur donnee BD, le reſte AD ſoit egal à l'autre grandeur C; icelle AB ſera dite plus grande que C, d'vne grandeur ou excez donné.

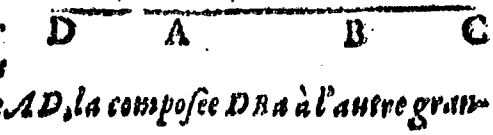
10. Vne grandeur eſt moindre qu'vne autre, d'vne grandeur donnee, lors qu'ayant adiouſté la donnee à icelle, la toute eſt egale à cette autre.

C'eſt à dire que s'il y a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant adiouſté à la moindre AB, vne grandeur donnee BD, toute la grandeur AD ſoit egale à l'autre grandeur C: Icelle AB ſera dicte moindre que C, d'vne grandeur ou excez donné.

11. Vne grandeur eſt dite plus grande qu'vne autre grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon, lors qu'oſtant d'icelle grandeur la donnee, le reſte a à cette autre vne raiſon donnee.

Soient par exemple deux grandeurs AB & CB, & ayant oſté de AB, vne grandeur donnee AD, le reſte DB ait à l'autre grandeur CB, vne raiſon donnee: Icelle AB ſera dicte plus grande que CB d'vne donnee, qu'en raiſon; pource qu'ayant oſté d'icelle AB la donnee AD, le reſte DB a à l'autre grandeur CB vne raiſon donnee.

12. Vne grandeur eſt dite moindre qu'vne autre d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon; lors que la donnee luy eſtant adiouſtee, la toute a à cette autre vne raiſon donnee.



Soient par exemple deux grandeurs AB, BC; & ayant adiouſté à AB, vne grandeur donnee AD, la toute DB ait à l'autre grandeur BC vne raiſon donnee: Icelle AB ſera dicte moindre que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon: car ayant adiouſté à icelle AB, la grandeur donnee AD, la compoſee DB a à l'autre grandeur BC, vne raiſon donnee.

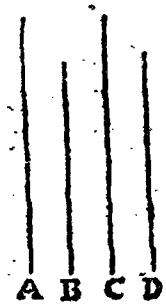
13. Vne

13. Vne ligne droicte eſt au long ou vis à vis par poſition, quand par vn poinct donné elle eſt menee parallele à vne autre ligne.

PROPOSITION I.

Des grandeurs eſtans donnees, la raiſon qu'elles ont entr'elles eſt auſſi donnee.

Soient donnees les grandeurs A & B: Ie dis que la raiſon de A à B eſt donnee.



Car puis que la grandeur A eſt donnee, [a] nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle ſoit C: Derechef, d'autant que la grandeur B eſt donnee, nous en pouuons auſſi trouuer vne egale à icelle: & ſoit D. Donc puis que A eſt egale à C, & B à D, comme A eſt à C [b] ainſi B à D: & en permutant, [c] comme A ſera à B, ainſi C à D. Donc [d] la raiſon de A à B eſt donnee: car c'eſt la meſme raiſon que de C à D, que nous auons trouuée. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 1.d. comm.
b 7.5.
c 16.5.
d 2.d.

PROP. II.

Si vne grandeur donnee a à quelque autre grandeur vne raiſon donnee, cette autre eſt auſſi donnee par grandeur.

Que la grandeur donnee A ait à vne autre grandeur B vne raiſon donnee: Ie dis qu'icelle B eſt auſſi donnee par grandeur.

Car puis que A eſt donnee, nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle ſoit C: Et d'autant que la raiſon de A à B eſt auſſi donnee, nous en pouuons trouuer [e] vne de meſme: Qu'elle ſoit trouuee, & ſoit la raiſon de C à D. Or puis que comme A eſt à B, ainſi C à D; en permutant, comme A à C, ainſi B à D: Mais A eſt egale à C: Donc [f] B ſera auſſi egale à D. Partant [n] la grandeur B eſt donnee, veu qu'à icelle en a eſté trouuee vne egale D.

e 2.d.
f 14.5.
n 1.d.

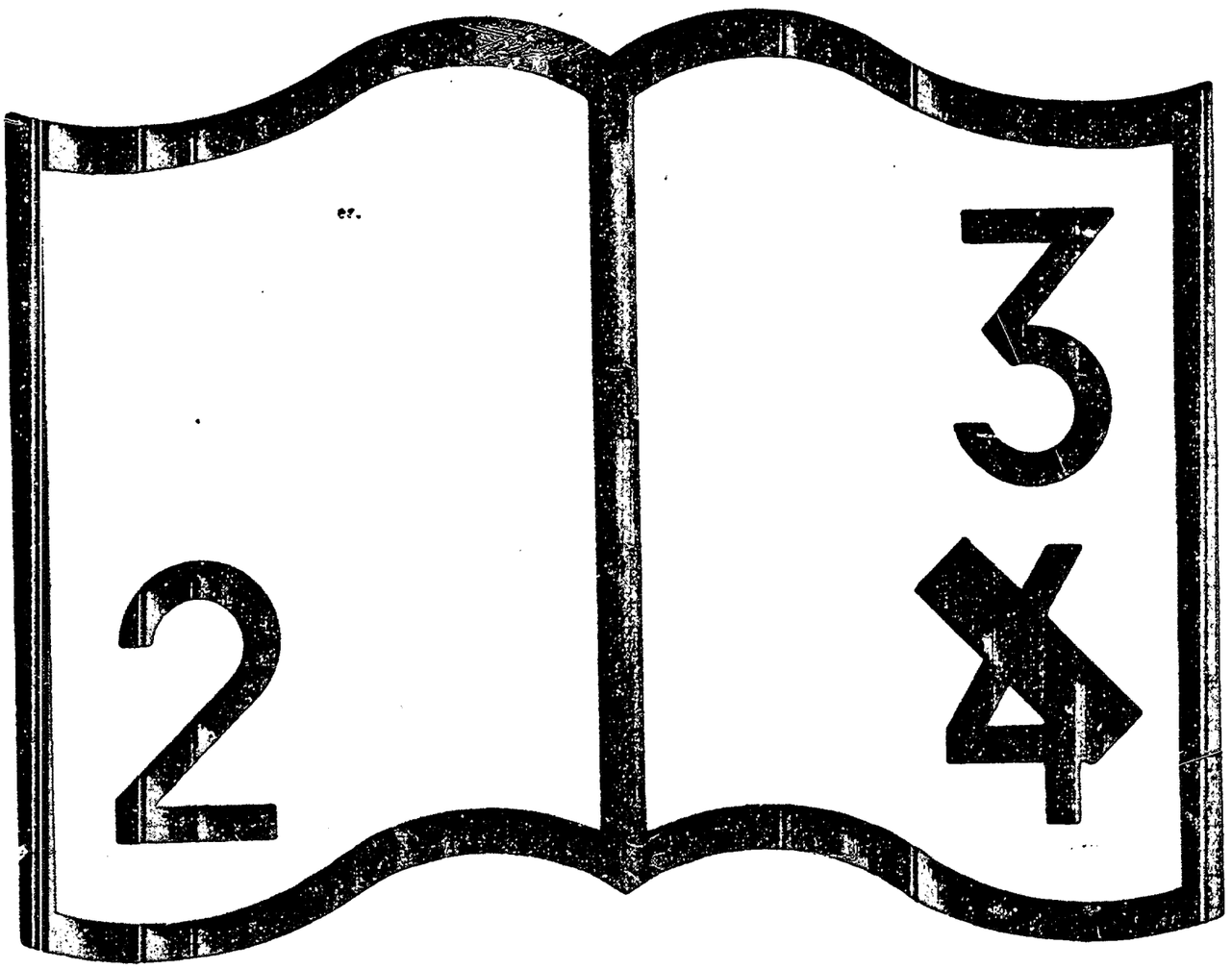
PROP. III.

Si des grandeurs donnees ſont compoſees, auſſi ſera donnee cette grandeur-là, qui eſt compoſee d'icelles.

Soient compoſees les grandeurs donnees AB, BC: Ie dis que la grandeur AC, qui eſt compoſee des grandeurs AB, BC, eſt donnee.

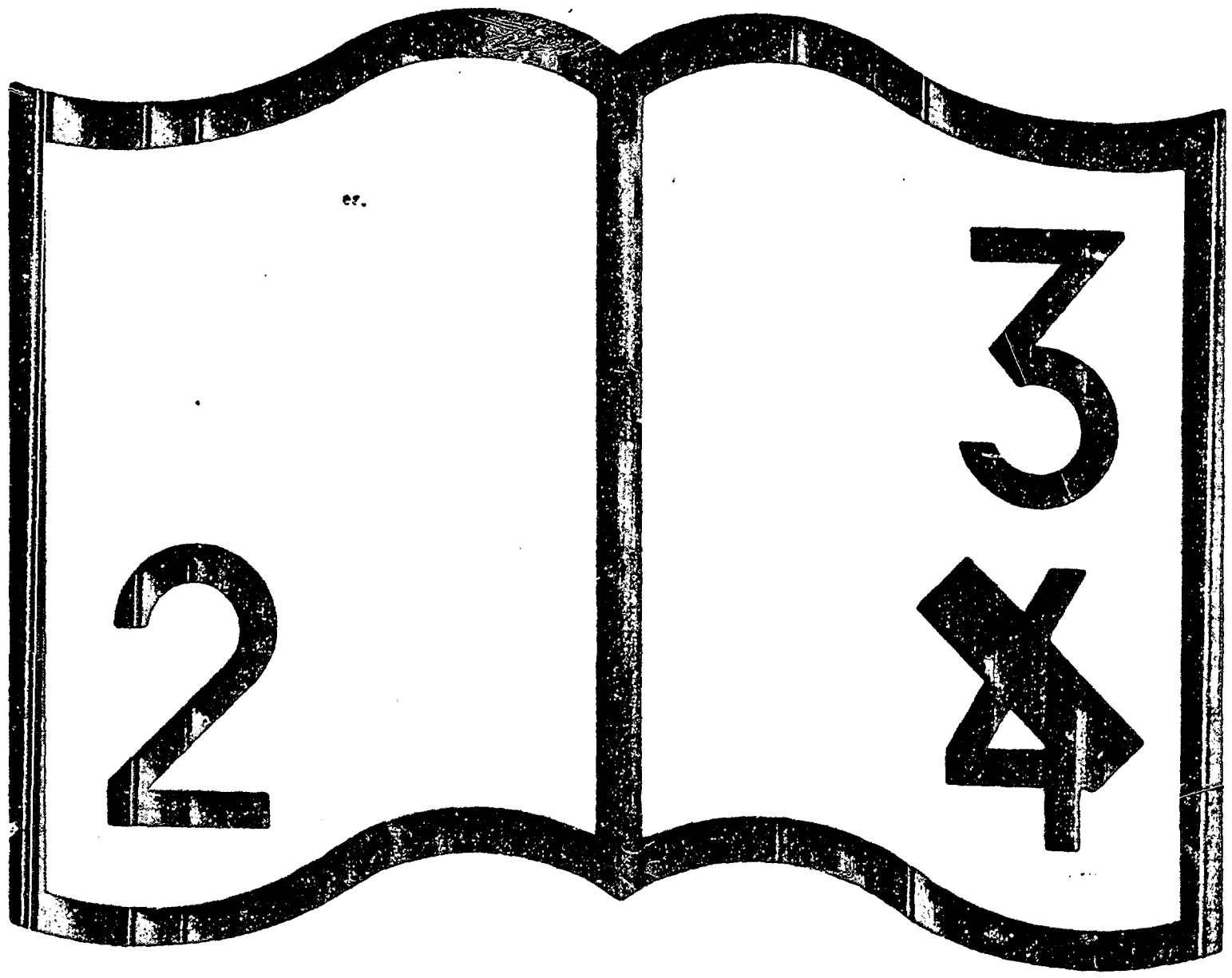
Car puis que AB eſt donnee, nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle ſoit DE. Derechef, veu que BC eſt donnee, nous en pouuons auſſi trouuer vne egale à icelle, laquelle ſoit EF. Donc puis que à icelle DE eſt egale AB, & à EF eſt egale BC, la toute [g] AC eſt egale à la toute DF. Donc AC [n] eſt donnee, puis que à icelle a eſté poſee egale DF.

g 2. ax.



Pagination incorrecte — date incorrecte

NF Z 43-120-12



Pagination incorrecte — date incorrecte

NF Z 43-120-12

PROP. IIII.

Si d'vne grandeur donnee, on oſte vne grandeur donnee, auſſi ſera donnee la grandeur reſtante.

Que d'vne grandeur donnee AB, ſoit retranchee la grandeur donnee AC: Ie dis que la grandeur reſtante CB eſt donnee.

Car d'autant que AB eſt donnee on en peut trouuer vne egale à icelle; laquelle ſoit DE. Derechef, puis que AC eſt donnee nous en pouuons auſſi trouuer vne egale à icelle, laquelle ſoit DF. Veu donc que la grandeur AB eſt egale à la grandeur DE, & la grandeur AC à la grandeur DF; le reſte CB[h] ſera egal au reſte FE. Parquoy CB eſt donnee: car à icelle en a eſté baillee vne egale FE.

h 3. ax.

PROP. V.

Si vne grandeur a vne raiſon donnee à quelque partie d'icelle; elle aura auſſi à la partie reſtante vne raiſon donnee.

Que la grandeur AB ait vne raiſon donnee à quelque partie d'icelle AC: Ie dis qu'elle aura auſſi à la partie CB vne raiſon donnee.

Car ſoit expoſee vne grandeur donnee DE; & pource que la raiſon de la grandeur AB à la grandeur AC eſt donnee,[d] nous en pouuons trouuer vne de meſme, laquelle ſoit DE à DF: Donc la raiſon d'icelle DE à DF eſt donnee: Mais DE eſtant donnee, auſſi l'eſt ſa partie DF, & conſequemment[l] le reſte FE: Donc puis que DE & FE ſont donnees, la raiſon d'icelle DE à FE eſt auſſi donnee. Et d'autant que comme DE eſt à DF, ainſi AB à AC, en conuertiſſant[n] comme DE à FE, ainſi AB à CB. Mais la raiſon de DE à FE eſt donnee, comme il a eſté demonſtré: Donc auſſi la raiſon de AB à CB eſt donnee.

d 2. d. cons.
i 2 p.
l 4 p.
m 1 p.
n sch. 19. 5.

SCHOLIE.

De cecy eſt euident que ſi vne grandeur a à quelque partie d'icelle vne raiſon donnee, en diuiſant, ſera auſſi donnee la raiſon d'vne partie à l'autre. Car puis que comme DE eſt à FE, ainſi AB eſt à CB; en diuiſant, comme DF à FE, ainſi AC à CB. Mais il a eſté demonſtré que les parties DF & FE ſont donnees, & conſequemment leur raiſon eſt auſſi donnee: pareillement donc eſt donnee la raiſon de AC à CB.

PROP. VI.

Si deux grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnee ſont compoſees, auſſi la grandeur compoſee d'icelles aura à l'vne & à l'autre vne raiſon donnee.

Soient compoſees deux grandeurs AB, BC ayans entr'elles vne raiſon donnee: Ie dis que la toute AC a vne raiſon donnee à chacun d'icelles AB, AC.

Car ſoit expoſee vne grandeur donnee DE; & pource que la raiſon de AB à

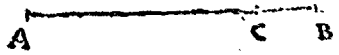
BC est donnee, en soit fait vne mesme d'icelle DE à EF: Donc la raison d'icelle DE à EF est donnee: & partant[o] la grandeur DE estant donnee, l'vne & l'autre d'icelles DE, FE est donnee. Parquoy[p] la toute DF sera aussi donnee. Donc[q] la raison de la mesme DF a chacune d'icelles DE, EF sera donnee. Et d'autant que comme AB à BC ainsi DE à EF: en composant,[r] comme AC à BC, ainsi DF à EF: Donc en conuertissant,[s] comme AC à AB, ainsi DF à DE. Parquoy comme la toute DF est à l'vne & à l'autre grãdeur DE, EF, ainsi la toute AC est à l'vne & à l'autre grandeur AB, BC. Donc[t] la raison d'icelle AC à chaque grandeur AB, BC est dõnee.

o 2 p.
p 3 p.
q 1 p.
r 18 5.
s 1 sch. 19. 5.
t 2. d.

PROP. VII.

Si vne grandeur donnee est couppee en raison donnee, chaque segment est donné.

Que la grandeur donnee AB soit couppee en vne raison donnee, sçauoir est de AC à CB: Ie dis que chaque segment AC, CB sera donné.



Car d'autant que la raison de AC à CB est donnee, la raison de[u] AB à chacune d'icelles AC, CB est aussi donnee. Mais AB est donnee: donc[x] chacun des segmens AC, CB est aussi donné.

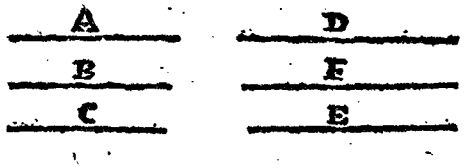
u 6 p.
x 2. p.

PROP. VIII.

Les grandeurs qui ont à vne mesme vne raison donnee, seront entr'elles en vne raison donnee.

Que chaque grandeur A & C ait vne raison donnee à la grandeur B: Ie dis que la raison de la grandeur A à la grandeur C est aussi donnee.

Car soit exposee vne grandeur donnee D: & puis que la raison de A à B est donnee, soit faite la mesme d'icelle D à E. Or veu que D est donnee[y] aussi E est donnee. Derechef, puis que la raison de B à C est donnee, soit faite la mesme de E à F. Mais E est donnee: & partant F est aussi donnee. Mais puis que D est donnee, [z] la raison d'icelle D à F est donne. Et d'autant que comme A à B, ainsi D à E, & cõme B à C, ainsi E à F, en raison egale,[a] comme A à C, ainsi D à F. Mais la raison d'icelle D à F est dõnee: Donc la raison de A à C est aussi donnee.

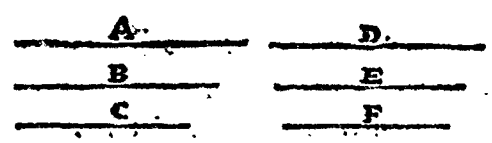


y 2. p.
z 1. p.
a 22. 5.

PROP. IX.

Si deux ou dauantage de grandeurs sont entr'elles en raison donnée: & que les mesmes grandeurs ayent à quelques autres grandeurs des raisons donnees, iaçoit qu'elles ne soient les mesmes: ces autres grandeurs seront aussi entr'elles ne raisons donnees.

Que deux ou dauantage de grandeurs A, B, C, ſoyent entr'elles en raiſon donnee; & que ces meſmes grandeurs A, B, C, ayent à quelques autres grandeurs D, E, F, les raiſons donnees, non toutesfois les meſmes: Ie dis qu'icelles D, E, F ſeront entr'elles en raiſons donnees.



Car d'autant que la raiſon de A à B eſt donnee, & auſſi celle de A à D; la raiſon de D à B ſera donnee: Mais la raiſon de B à E eſt auſſi donnee: Donc la raiſon d'icelle D à E ſera pareillement donnee.

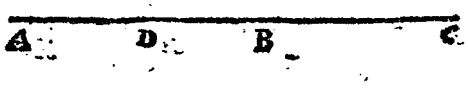
Derechef, puis que la raiſon de B à C eſt donnee, & auſſi celle de B à E; la raiſon de E à C ſera donnee. Mais la raiſon de C à F eſt auſſi donnee: Donc [b] la raiſon de E à F ſera donnee. Mais il a eſté demonſtré que la raiſon de D à E eſt auſſi donnee: & partant [b] la raiſon de D à F ſera donnee. Donc les grandeurs D, E, F, ſont entr'elles en raiſons donnees.

b 8. d.

PROP. X.

Si vne grandeur eſt plus grande qu'vne grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon: la compoſee des deux ſera auſſi plus grande que cette meſme grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon: Mais ſi cette compoſee eſt plus grande que la meſme grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon; ou le reſte ſera auſſi plus grand qu'icelle meſme d'vne donnee, qu'en raiſon; ou bien ſera donné iceluy reſte auec la ſuiuante, à laquelle l'autre grandeur a raiſon donnee.

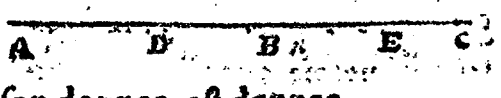
Soit la grandeur AB plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que la toute AC eſt auſſi plus grande que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AD: Donc [c] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnee; & en compoſant, [d] la raiſon de DC à BC eſt auſſi donnee. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnee: Donc AC eſt plus grande que [c] la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.

c 11. d.
d 6. 2.

Derechef, ſoit la grandeur AC plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que le reſte AB eſt ou plus grand que la meſme BC d'vne donnee qu'en raiſon, ou que la meſme AB auec celle qui ſuit, à laquelle BC a vne raiſon donnee, eſt donnee.



Car d'autant que la grandeur AC eſt plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee. Or icelle grandeur donnee eſt, ou moindre que la grandeur AB, ou plus grande. Soit premierement moindre, & ſoit AD: donc la raiſon [c] du reſte DC à CB eſt don-

nee. Parquoy en diuiſant [e] la raiſon de DB à BC eſt donnee. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnee : Donc la grandeur AB eſt plus grande [f] que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon. Soit maintenant la grandeur donnee plus grande que la grandeur AB; & ſoit poſee AE egale à icelle : Donc [f] la raiſon du reſte EC à CB eſt donnee : Et en conuertiſſant, [g] la raiſon d'icelle BC à BE eſt auſſi donnee. Mais icelle EB auec BA eſt donnee, pource que la toute AE eſt donnee : Donc eſt donnee AB auec celle qui ſuit BE, à laquelle BC a vne raiſon donnee.

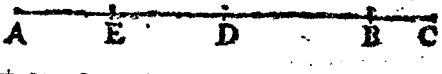
[e] 5. def. 5. pr.
[f] 11. d.
[g] 5. p.

PROP. XI.

Si vne grandeur eſt plus grande qu'vne grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon, la meſme grandeur ſera auſſi plus grande que la compoſee d'icelles d'vne donnee, qu'en raiſon : Et ſi la meſme grandeur eſt plus grande que les deux enſemble d'vne donnee, qu'en raiſon ; cette meſme grandeur ſera auſſi plus grande que le reſte d'vne donnee, qu'en raiſon.

Que la grandeur AB ſoit plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon : Ie dis que la meſme AB eſt auſſi plus grande que la toute AC d'vne donnee, qu'en raiſon.

Car puis que la grandeur AB eſt plus grande que BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee vne grandeur donnee AD. Donc [h] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnee ; & partant [i] la raiſon de DC à BD ſera auſſi donnee. Soit fait la meſme de AD à DE : Donc la raiſon d'icelle AD à DE eſt donnee. Mais AD eſt donnee : Donc [l] DE eſt auſſi donnee, & conſequemment [m] le reſte AE eſt auſſi donné. Mais d'autant que comme AD à DE, ainſi DC à BD, en permutant, [n] comme AD à DC, ainſi DE à DB : Donc en compoſant, [o] comme AC à CD, ainſi EB à DB; & en permutant, [p] comme AC à EB, ainſi DC à DB. Mais la raiſon de DC à DB eſt donnee : Donc auſſi le ſera celle de AC à EB, conſequemment celle de EB à AC. Mais il a eſté demonſtré que AE eſt donnee : Donc [h] AB eſt plus grande que AC d'vne donnee AE, qu'en raiſon.



[h] 12. d.
[i] 16. p.
[l] 2. p.
[m] 4 p.
[n] 16. 5.
[o] 18. 5.
[h] 12. d.

Mais maintenant ſoit AB plus grande que AC d'vne donnee, qu'en raiſon : Ie dis que la meſme AB eſt auſſi plus grande que le reſte BC d'vne donnee, qu'en raiſon. Car d'autant que AB eſt plus grande que AC d'vne donnee qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee AE. Donc la [h] raiſon du reſte EB à AC eſt donnee, & conſequemment auſſi le ſera celle de AC à EB. Soit faite la meſme de AD à DE : Donc la raiſon de AD à DE eſt donnee; & en conuertiſſant, [p] la raiſon de AD à AE ſera auſſi donnee, & conſequemment celle de AE à AD. Or AE eſt donnee : Donc la toute AD [l] ſera auſſi donnee. Et d'autant que comme la toute AC eſt à la toute EB, ainſi la retranchee AD eſt à la retranchee ED ; ainſi auſſi ſera [q] le reſte DC au reſte DB. Mais la raiſon de AC à EB eſt donnee : Donc auſſi le ſera celle de DC à DB. Parquoy en diuiſant,

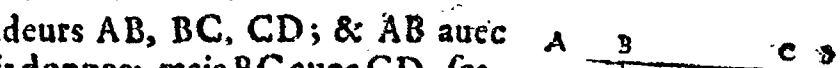
[h] 12. d.
[p] 5. p.
[l] 2. p.
[q] 19. 5.

r *sch. 5. pr.* r la raiſon de BC à DB eſt donnee, & conſequemment auſſi le ſera celle de DB à BC. Mais il a eſté demonſtré que AD eſt donnee: Donc h AB eſt plus grande que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.

h *11. d.*

PROP. XII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere auec la ſeconde ſoit donnee, mais la ſeconde auec la tierce ſoit auſſi donnee: ou la premiere ſera egale à la tierce, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee.



Soient trois grandeurs AB, BC, CD; & AB auec BC, ſçauoir AC ſoit donnee: mais BC auec CD, ſçauoir BD ſoit auſſi donnee: Ie dis que la grandeur AB eſt ou egale à la grandeur CD, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee.

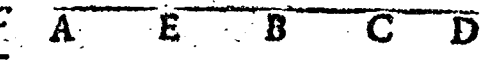
Car d'autant que chacune des grandeurs AC, BD eſt donnee, les grandeurs donnees ſont ou egales entr'elles, ou inegales: Qu'elles ſoient premierement egales. Donc AC eſt egale à BD; ſoit oſtee la commune BC, & demeurera f AB egale à CD. Mais qu'elles ſoient inegales, comme en cette autre figure. Et ſoit BD plus grande que AC. Soit donc poſee BE egale à AC. Or puis que AC eſt donnee, BE eſt auſſi donnee. Mais la toute BD eſt auſſi donnee: le reſte ED g le ſera donc auſſi. Et d'autant que BE eſt egale à AC oſtant la commune BC, h reſtera AB egale à CE. Mais ED eſt donnee: Donc CD eſt plus grande que AB d'vne donnee ED.

f *3. ax.*

g *14. pr.*

h *3. ax.*

SCHOLIE.



Que ſi la premiere auec la ſeconde, ſçauoir AC eſtoit plus grande que la ſeconde auec la tierce, ſçauoir BD, comme en cette autre figure, on feroit CE egale à icelle BD; & par meſmes raiſons que deſſus on demonſtreroit AE eſtre donnee, & egale à CD: & partant AB eſtre plus grande que CD d'vne donnee.

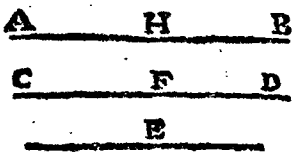
PROP. XIII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere d'icelles ait à la ſeconde vne raiſon donnee, mais la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon; auſſi la premiere ſera plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, E; & icelle AB ait à CD vne raiſon donnee: mais la grandeur CD ſoit plus grande que la grandeur E, d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que la grandeur AB eſt plus grande que la grandeur E d'vne donnee, qu'en raiſon.

Car puis que CD eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee vne grandeur donnee CF: Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnee. Et

d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnee, ſoit faite la meſme de AH à CF. Donc la raiſon d'icelle AH à CF eſt donnee. Mais CF eſt donnee: Donc[a] AH eſt auſſi donnee. Et veu que comme la toute AB eſt à la toute CD, ainſi la retranchee AH eſt à la retranchee CF, & ainſi[x] auſſi le reſte HB eſt au reſte FD: la raiſon d'icelle HE à FD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de FD à E eſt auſſi donnee: Donc[o] la raiſon de HB à E eſt donnee. Mais il a eſté demonſtré que AH eſt donnee: Donc[l] AB eſt plus grande qu'icelle E d'vne donnee, qu'en raiſon.

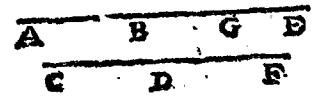


a 2. pr. x 19. 5. o 8. pr. l 11. d.

PROP. XIIII.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raiſon donnee, & qu'à chacune d'icelles on adiouſte vne grandeur donnee: ou les toutes auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs AB, CD ayans entr'elles vne raiſon donnee; & à chacune d'icelles ſoit adiouſtee vne grandeur donnee, ſçauoir BE & DF: Ie dis que les toutes AE, CF, ou ſont entr'elles en vne raiſon donnee, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car d'autant que chacune d'icelles BE, DF eſt donnee, [y] la raiſon d'icelle BE à DF eſt auſſi donnee: Et ſi cette raiſon eſt la meſme que de AB à CD; celle de la toute AE à la toute CF[z] ſera encore la meſme: & partant la raiſon d'icelle AE à CF eſt donnee.

y 1. pr. z 12. 5.

Maintenant, la raiſon de BE à DF ne ſoit la meſme que de AB à CD; & ſoit fait comme AB à CD, ainſi BG à DF: Donc la raiſon d'icelle BG à DF eſt donnee. Mais la grandeur DF eſt donnee: Donc[a] BG eſt auſſi donnee. Et puis que la toute BE eſt donnee, [b] le reſte GE ſera auſſi donné. Mais d'autant que comme AB à CD, ainſi BG à DF; [z] ainſi auſſi eſt la toute AG à la toute CF: & partant la raiſon d'icelle AG à CF eſt donnee: Mais la grandeur GE eſt donnee: Donc[l] la grandeur AE eſt plus grande que la grandeur CF d'vne donnee, qu'en raiſon.

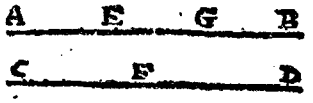
a 2. pr. b 4. pr. z 12. 5. l 11. d.

PROP. XV.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raiſon donnee, & que de chacune d'icelles on oſte vne grandeur donnee: les grandeurs reſtantes, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs AB, CD, ayans entr'elles vne raiſon donnee, & que de chacune d'icelles ſoit retranchee vne grandeur donnee, c'eſt aſſauoir de

AB la grandeur AE, & de CD la grandeur CF: Ie dis que les reſtes EB, FD, ou ſont entr'eux en vne raiſon donnee, ou bien que l'vn eſt plus grand que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

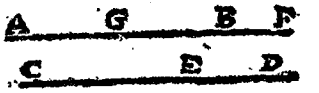


Car d'autant que chaque grandeur AE, CF eſt donnee, la raiſon de AE à CF eſt donnee: Et ſi elle eſt la meſme que de AB à CD, celle du reſte EB au reſte
c 19.5. FD[c] ſera auſſi la meſme; & partant la raiſon d'icelle EB à FD ſera auſſi donnee. Mais ſi elle n'eſt la meſme, ſoit fait comme AB à CD, ainſi AG à CF. Or la raiſon de AB à CD eſt donnee: Donc auſſi celle de
d 2 pr. AG à CF ſera donnee. Mais CF eſt donnee: Donc[d] AG eſt donnee. Mais AE
c 4 pr. eſt auſſi donnee: Donc[c] le reſte EG eſt donnee. Et d'autant que comme AB à CD, ainſi la retranchee AG à la retranchee CF, & ainſi auſſi[c] le reſte GB au reſte FD; la raiſon d'icelle GB à FD eſt auſſi donnee. Partant puis que EG eſt
o 11.d. donnee, EB eſt plus grande que FD[o] d'vne donnee qu'en raiſon.

PROP. XVI.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raiſon donnee, & que de l'vne d'icelles on oſte vne grandeur donnee, & à l'autre on en adiouſte vne donnee: la toute ſera plus grande que le reſte d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs AB, CD, ayans entr'elles vne raiſon donnee, & que de CD on oſte vne grandeur donnee DE, mais à AB ſoit adiouſtee la grandeur donnee BF: Ie dis que la toute AF eſt plus grande que le reſte CE d'vne donnee, qu'en raiſon.



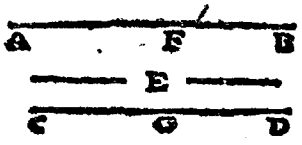
Car puis que la raiſon de AB à CD eſt donnee, ſoit
f 2.d. faicte la meſme de BG à DE: Donc[f] la raiſon d'icelle BG à DE eſt donnee.
g 2.p. Mais DE eſt donnee: Donc[g] BG eſt auſſi donnee. Mais BF eſt auſsi donnee:
h 3.p. Donc[h] la toute GF eſt donnee. Et puis que comme AB à CD, ainſi la retran-
i 19.5. chee BG à la retranchee DE, &[i] ainſi auſsi le reſte AG au reſte CE; la raiſon d'icelle AG à CE eſt donnee: Mais GF eſt donnee: Donc la grandeur AF eſt plus grande[o] que la grandeur CE d'vne donnee, qu'en raiſon.

PROP. XVII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere ſoit plus grande que la ſeconde d'vne donnee, qu'en raiſon, mais la tierce ſoit auſſi plus grande que la meſme ſeconde d'vne donnee, qu'en raiſon: la premiere aura à la tierce, ou vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, E, CD, & que chacune des grandeurs AB, CD, ſoit

ſoit plus grande que la grandeur E d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que les grandeurs AB, CD, ou ſont entr'elles ſelon vne raiſon donnee, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que E d'vne donnee qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AF: Donc la raiſon du reſte FB à E eſt donnee. Derechef, puis que CD eſt plus grande que la meſme E, d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee CG; & la raiſon du reſte GD à E ſera donnee: Donc [l] la raiſon de FB à GD ſera auſſi donnee. Mais à icelles FB, GD, ſont adiouſtees les grandeurs donnees AF, CG: Donc les toutes AB, CD, [m] ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

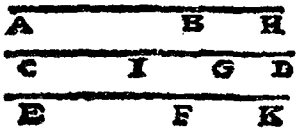
l 8.5.

m 14.5.

PROP. XVIII.

S'il y-a trois grandeurs, & que l'vne d'icelles ſoit plus grande que chacune des autres d'vne donnée qu'en raiſon, ou les deux autres auront entr'elles vne raiſon donnée, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, EF, & l'vne d'icelles, ſçauoir CD, ſoit plus grande que chacune des autres AB, EF, d'vne donnée qu'en raiſon: Ie dis que les deux grandeurs AB, EF, ou ſeront entr'elles ſelon vne raiſon donnée, ou que l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnée, qu'en raiſon



Car d'autant que la grandeur CD eſt plus grande que la grandeur AB d'vne donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée la grandeur donnée DG: donc la raiſon du reſte CG à AB eſt donnée. Soit faicte la meſme de GD à BH: donc la raiſon d'icelle DG à BH eſt donnée. Mais DG eſt donnee: donc [n] BH eſt auſſi donnee. Et d'autant que comme CG à AB, ainſi GD à BH, [o] ainſi auſſi eſt la toute CD à la toute AH; la raiſon d'icelle CD à AH ſera auſſi donnee.

n 2.5.

o 12.5.

Derechef, puis que la meſme CD eſt plus grande que EF, d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee DI: Donc la raiſon du reſte CI à EF eſt donnee: Soit faite la meſme de DI à FK. Donc la raiſon d'icelle DI à FK ſera auſſi donnée. Mais DI eſt donnee: Donc FK eſt auſſi donnee. Et veu que comme CI à EF, ainſi ID à FK; ainſi auſſi eſt la toute [o] CD à la toute EK: la raiſon d'icelle CD à EK ſera donnee. Mais la raiſon de la meſme CD à AH eſt auſſi donnee: Donc [p] la raiſon d'icelle AH à EK ſera donnee. Et puis que d'icelles AH, EK ſont retranchees les grandeurs donnees BH, FK; les grandeurs AB, EF, [q] ou ſont entr'elles en vne raiſon donnee, ou l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

p 8.5.

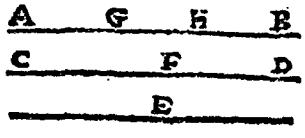
q 15.5.

PROP. XIX.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere ſoit plus grande

que la ſeconde, d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon, & la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon: Auſſi la premiere grandeur ſera plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, E; & la grandeur AB ſoit plus grande que CD d'vne donnee, qu'en raiſon; mais CD ſoit auſſi plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que AB eſt plus grande que la meſme E d'vne donnee qu'en raiſon.

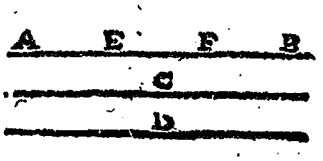


Car puis que CD eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee CF: Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnee. Derechef, veu que AB eſt plus grande que la meſme CD d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AG: Donc la raiſon du reſte GB à CD eſt donnee. Soit faite la meſme de GH à CF: Donc la raiſon d'icelle GH à CF eſt donnee. Mais CF eſt donnee: Donc auſſi GH eſt donnee. Et puis AG eſt auſſi donnee, la toute AH ſera auſſi donnee. Mais comme GB à CD, ainſi GH à CF, & ainſi auſſi le reſte HB au reſte FD: Donc la raiſon d'icelle HB à FD eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme FD à E eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de HB à E eſt pareillement donnee; & eſt auſſi donnee la grandeur AE: Parquoy la grandeur AB eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon.

t 3. p. l 29. 5. l 11. d.

AVTREMENT.

Soient trois grandeurs AB, C, D, & que AB ſoit plus grande que C d'vne donnée, qu'en raiſon; mais icelle C ſoit auſſi plus grande que D d'vne donnée, qu'en raiſon: Ie dis que AB eſt plus grande que D d'vne donnée, qu'en raiſon.



Car d'autant que AB eſt plus grande que C d'vne donnees, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee AE: Donc la raiſon du reſte EB à C eſt donnee. Mais la grandeur C eſt plus grande que la grandeur D d'vne donnee, qu'en raiſon: Donc EB eſt plus grande que D d'vne donnee qu'en raiſon. Parquoy en ſoit retranchee la grandeur donnee EF; & la raiſon du reſte FB à D ſera donnee. Mais AF eſt donnee: Donc AB eſt plus grande que D d'vne donnee, qu'en raiſon.

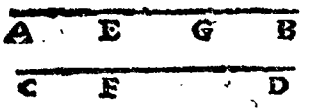
t 13 p. u 3. p. l 11. d.

PROP. XX.

S'il y a deux grandeurs donnees, & que d'icelles ſoient oſtees des grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnee: ou les grandeurs reſtantes auront entr'elles vne raiſon donnees, ou l'vne ſera pas grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs donnees AB, CD, deſquelles ſoient oſtees les grandeurs AE, CF ayans entr'elles vne raiſon donnee: Ie dis que les grandeurs

EB, FD, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon. Car puis que l'vne & l'autre grandeur AB, CD eſt donnee, la raiſon d'icelle AB à CD eſt [z] auſſi donnee : Et ſi c'eſt la meſme que de AE à CF celle du reſte EB au reſte FD ſera [x] auſſi la meſme; & par tant la raiſon d'icelle EB à FD ſera auſſi donnee. Mais ſi elle n'eſt la meſme, ſoit fait que cõme AE à CF, ainſi AG à CD. Or la raiſon d'icelle AE à CF eſt donnee: donc la raiſon d'icelle AG à CD eſt dõnee. Mais CD eſt donnee: Donc [a] AG eſt auſſi donnee. Mais la toute AB eſt pareillement donnee: Donc [b] le reſte BG eſt donné. Et puis que comme AE à CF, ainſi AG à CD, & auſſi le reſte EG au reſte FD: la raiſon d'icelle EG à FD eſt donnee. Mais GB eſt auſſi donnee: Donc la grandeur EB eſt plus grande [l] que la grandeur BD d'vne donnee, qu'en raiſon.

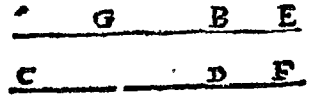


z 1. p.
x 19. 5.
a 3. p.
b 4. p.
l 11. d.

PROP. XXI.

S'il y a deux grandeurs donnees, & qu'à icelles on adiouſte d'autres grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnée : ou les toutes auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs donnees AB, CD, & à icelles ſoient adiouſtees les grandeurs BE, DF ayans entr'elles vne raiſon donnee : Ie dis que les toutes AE, CF, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou bien que l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



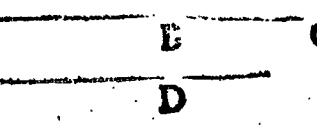
Car puis que l'vne & l'autre grandeur AB, CD eſt donnee, leur raiſon [c] eſt auſſi donnee : Et ſi c'eſt la meſme raiſon que de BE à DF, auſsi ſera donnee la raiſon de la toute AE à la toute CF; car ce ſera encore [d] la meſme. Mais ſi ce n'eſt la meſme, ſoit fait que comme BE eſt à DF, ainſi BG à CD : Donc la raiſon d'icelle BG à CD eſt donnee. Mais CD eſt donnee : Donc [e] le ſera auſsi BG. Mais la toute AB eſt donnee : Donc le ſera auſsi [f] le reſte AG. Et puis que comme BE à DF ainſi BG à CD, & auſsi [d] la toute GE à la toute CF; la raiſon d'icelle GE à CF ſera pareillement donnee. Mais AG eſt donnee : Donc la grandeur AE eſt plus grande que la grandeur CF d'vne donnee, qu'en raiſon.

c 1. p.
d 12. 5.
e 2. p.
f 4. p.

PROP. XXII.

Si deux grandeurs ont à quelque autre vne raiſon donnée, auſſi leur compoſée aura à la meſme vne raiſon donnée.

Que les deux grandeurs AB, BC ayent à quelque autre grandeur D vne raiſon donnée : Ie dis que la compoſée AC a auſſi à la meſme D vne raiſon donnée.



Car puis que chaque grandeur AB, BC a vne raiſon donnée à D, la raiſon [g] de

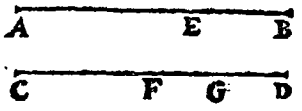
g 8. p.

AB à BC eſt donnée: & en compoſant [h] la raiſon de AC à BC eſt donnée. Mais celle de BC à D eſt auſſi donnée: donc [g] la raiſon d'icelle AC à D ſera pareillement donnée.

h 6. pr.
g 8. pr.

PROP. XXIII.

Si le tout eſt au tout en raiſon donnée, & que les parties ſoient aux parties en raiſons données, iaçoit que ce ne ſoient les meſmes: les toutes ſeront aux toutes en raiſons données.



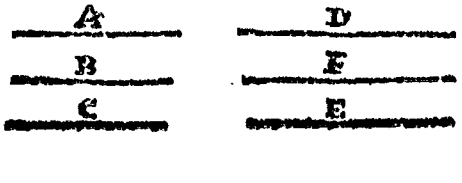
Que le tout AB ait au tout CD vne raiſon donnée; mais les parties AE, EB ſoient aux parties CF, FD en raiſons donnees, bien qu'elles ne ſoient les meſmes: Ie dis que toutes ces grandeurs ſeront auſſi entr'elles en raiſons donnees, c'eſt à dire qu'vne chacune d'icelles AB, AE, BE, CD, CF, FD ſera à chacune des autres en raiſon donnee.

Car puis que AE eſt à CF en raiſon donnee, ſoit faicte la meſme de AB à CG: Donc la raiſon d'icelle AB à CG eſt donnee, & conſequemment auſſi celle [i] du reſte EB au reſte FG. Mais la raiſon de FD à la meſme EB eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de FD à FG [l] eſt pareillement donnee: & partant [m] celle de FD au reſte GD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de AB à chacune d'icelles CD, CG eſt donnee: Donc le ſera auſſi [l] celle de CD à CG, & encore [m] celle de CD au reſte GD. Mais la raiſon de FD à DG eſt donnee: Donc le ſera auſſi [l] celle de la meſme CD à FD, & conſequemment celle de [m] CD au reſte FC: Donc auſſi ſera donnee la raiſon de CF à FD. Mais la raiſon de EB à FD eſt poſee donnee: Donc la raiſon de CF à EB ſera donnee. Derechef, pource que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & auſſi celle de CD à chacune d'icelles FC, FD; la raiſon de la meſme AB à chacune deſdites FC, FD [l] ſera pareillement donnee. Mais la raiſon d'icelle FD à EB eſt donnee: Donc auſſi ſera donnee la raiſon de AB à BE, & conſequemment au reſte [m] AE. Parquoy en diuiſant, [n] la raiſon de AE à EB ſera pareillement donnee. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnee. Donc le ſera auſſi [l] celle de AE à FD. Semblablement pour ce que la raiſon de CD à AB eſt donnee, & celle de AB à chacune de ſes parties AE, EB: auſſi la raiſon d'icelle CD à chacune deſdites AE, EB [l] ſera donnee. Parquoy chacune des grandeurs AB, CD, AE, EB, CF, FD eſt à chacune des autres en raiſon donnee.

i 19. 5.
l 8 p.
m 5. p.
n ſch. 5. p.
l 8. pr.

PROP. XXIV.

Si de trois lignes droictes proportionnelles, la premiere a à la tierce vne raiſon donnée; elle aura auſſi à la ſeconde vne raiſon donnée.

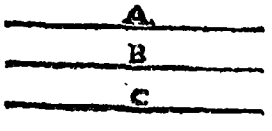


Soient trois lignes droictes proport. A, B, C, & ſoit A à B, ainſi que B à C: mais A ait à C vne raiſon donnee: Ie dis que A aura auſſi à B vne raiſon donnee.

Car ſoit expoſee vne autre ligne droicte D; & puis que la raiſon de A à C eſt donnee ſoit faite la meſme de D à F: Donc la raiſon de D à F eſt donnee. Mais D eſt donnee: donc F eſt auſſi donnee. Entre les deux lignes droictes D, F ſoit priſe [o] la moyenne proportionnelle E. Donc le rectangle faict ſous D, F eſt eſgal [p] au quarré de E. Mais iceluy rectangle de D, F eſt [q] donné: (car tous les angles d'iceluy rectangle ſont donnez, eſtans droicts, & les raiſons qu'ont les coſtez entr'eux ſont auſſi donnees) donc le quarré de E [r] eſt donné, & conſequemment icelle ligne droicte E eſt auſſi donné: (car on en peut trouuer vne egale à icelle [s], puis que le rectangle de D, F eſt dõné.) Mais D eſt donnee: Donc [t] la raiſon de D à E eſt donnee; & comme A eſt à C, ainſi D à F. Mais comme A à C, [u] ainſi le quarré de A au rectangle de A, C; & auſſi comme D à F, ainſi le quarré de D au rectangle de D, F. Donc comme le quarré de A eſt au rectangle de A, C, ainſi le quarré de D eſt au rectangle de D, F. Mais le rectangle de A, C eſt eſgal au quarré de B, (puis que A, B, C ſont proportionnelles) & celuy de D, F, au quarré de E. Donc comme le quarré de A eſt au quarré de B, ainſi le quarré de D eſt au quarré de E. Parquoy [x] comme A à B, ainſi D à E. Mais la raiſon de D à E eſt donnee: donc [y] auſſi la raiſon de A à B eſt donnée.

o 13.6. p 17.6. q 3.d. r 1.d. s 14.2. t 1.p. u 1.6. x 22.6. y 2.d.

AVTREMENT.

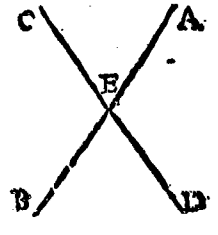


D'autant que la raiſon de A à C eſt donnee, & que comme A eſt à C, ainſi le quarre de A au rectangle de A, C: la raiſon d'iceluy quarré de A au rectangle de A, C eſt auſſi donnee. Mais à iceluy rectangle de A, C eſt eſgal le quarré de B (puis que A, B, C ſont proport.) donc la raiſon du quarré de A au quarré de B eſt donnee, & par conſequent eſt auſſi donnee la raiſon de la ligne A à la ligne B: Car à chacune d'icelles A, B, nous en auons exhibé vne egale au propre quarré de chacune.

PROP. XXV.

Si deux lignes données par poſition s'entrecouppent, le poinct auquel elles ſe couppent eſt donné par poſition.

Soient deux lignes AB, CD donnees par poſition, qui ſe couppent l'vne l'autre au poinct E: Ie dis que le poinct E eſt donné par poſition: Car s'il changeoit de lieu l'vne ou l'autre des lignes AB, CD changeroit ſa poſition: Or eſt-il que par l'hypotheſe elle ne change point: Donc [a] le poinct E eſt donné par poſition.

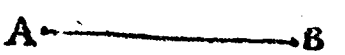


a 4.d.

PROP. XXVI.

Si les extremitez d'vne ligne droicte ſont données par poſition: icelle ligne droicte eſt donnée par poſition, & par grandeur.

De la ligne droicte AB les extremitez A, B ſoiẽt donnees par poſition : Ie dis que la ligne droicte AB eſt donnee par poſition, & par grandeur.

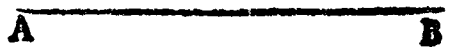


Car ſi le poinct A demeurant en ſon lieu ; la poſition, ou la grandeur de la ligne droicte AB change, le poinct B tombera ailleurs : Or eſt-il que par l'hypotheſe il n'y tombe point. Donc la ligne droicte AB eſt donnee par poſition, & par grandeur.

PROP. XXVII.

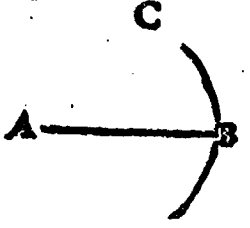
Si d'vne ligne droicte donnée par poſition, & par grandeur vne extremité eſt donnée, auſſi l'autre extremité ſera donnée.

De la ligne droicte AB donnee par poſition, & par grandeur ſoit donnee vne extremité, ſçauoir A : Ie dis que l'autre extremité B eſt donnée.



Car ſi le poinct A demeurant en ſon lieu le poinct B change & tombe en vn autre lieu, ou la poſition de la ligne droicte AB, ou ſa grãdeur changeroit : or eſt-il que ſelon l'hypotheſe l'vne ny l'autre ne chãge. Donc le poinct B eſt dõné.

AVTREMENT.

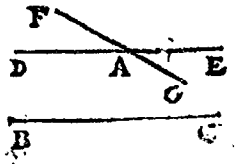


Du centre A, & de l'interualle AB ſoit deſcritte la
b 6.d. circonference BC. Donc [b] icelle circonference BC
c 25 p. eſt donnee par poſition. Mais la ligne droicte AB eſt auſſi donnee par poſition : Donc le poinct B [c] eſt donné.

PROP. XXVIII.

Si par vn poinct donné eſt tirée vne ligne droicte vis à vis d'vne ligne droicte donnée par poſition, la ligne droicte menée eſt donnée par poſition.

Que par le poinct donné A ſoit menee vis à vis d'vne ligne droicte BC donnee par poſion, vne ligne droicte DAE : Ie dis que la ligne droicte DAE eſt donnee par poſition.



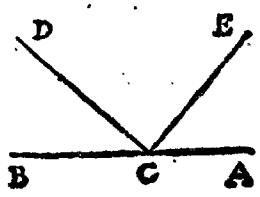
Car ſi elle n'eſt donnee, le poinct A demeurant en ſon lieu, la poſition de la ligne droicte DAE changera. Qu'elle change donc s'il eſt poſſible, & tombe ailleurs demeurant parallele à
d 13.d. BC, & ſoit FAG. Donc BC eſt parallele à icelle FAG. Mais [d] la meſme BC
e 30.1. eſt auſſi parallele à DAE : Donc [e] DAE eſt parallele à icelle FAG : Ce qui eſt abſurde, veu qu'elles ſe ioignent & rencontrent en A. Donc la poſition de la ligne droicte DAE ne tombe pas ailleurs. Parquoy icelle ligne DAE eſt donnée par poſition.

PROP. XXIX.

Si à vne ligne droicte donnée par poſition, & à vn poinct don-

né en icelle eſt menée vne ligne droicte qui faſſe angle donné ; la ligne menée eſt donnee par poſion.

Qu'à vne ligne droicte donnee AB, & à vn poinct donné en icelle C, ſoit menee la ligne droicte CD, qui fait l'angle donné ACD : Ie dis que la ligne droicte CD eſt donnée par poſition.

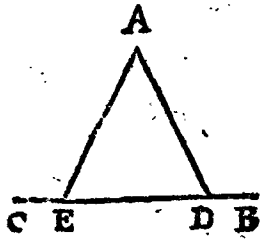


Car ſi elle n'eſt donnee par poſition, le poinct C demeurant en ſon lieu, la poſition de la ligne CD obſeruant la grandeur de l'angle ACD tombera ailleurs : Qu'elle y tombe donc, s'il eſt poſſible ; & ſoit CE. Donc l'angle ACD eſt egal à l'angle ACE, le grand au moindre. Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droicte CD ne tombera ailleurs : & partant icelle ligne CD eſt donnee par poſition.

PROP. XXX.

Si d'vn poinct donné eſt tiree à vne ligne droicte donnee par poſition vne ligne droicte faiſant vn angle donné : la ligne tiree eſt donnee par poſition.

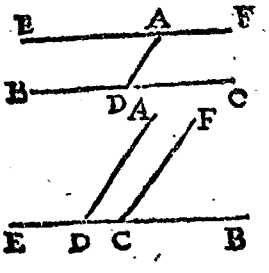
D'vn poinct donné A ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, vne ligne droicte AD faiſant l'angle ADB donné : Ie dis que la ligne AD eſt donnee par poſition.



Car ſi elle n'eſt donnee, le poinct A ne bougeart de ſon lieu la poſition de la ligne droicte AD gardant la grandeur de l'angle ADB changera. Qu'elle change donc ; & ſoit la ligne droicte AE. Donc l'angle ADB eſt egal à l'angle AEB, le grand au moindre : Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droicte AD ne change point : & partant icelle ligne AD eſt donnee par poſition. f 16.1.

AVTREMENT.

Par le poinct A ſoit tirée la ligne EAF parallele à la ligne droicte BC. Donc puis que par le poinct donné A, vis à vis & contre vne ligne droicte BC donnee par poſition, eſt tirée la ligne droicte EF ; icelles lignes EF, BC ſont paralleles, mais auſſi ſur icelles tombe la ligne droicte AD : Donc g l'angle FAD eſt egal à l'angle donné ADB ; & partant il eſt auſſi donné. Parquoy à la ligne droicte EF donnee par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tiree la ligne droicte AD faiſant l'angle donné FAD : Donc h icelle AD eſt donnee par poſition.



g 29.1.

h 29.1.

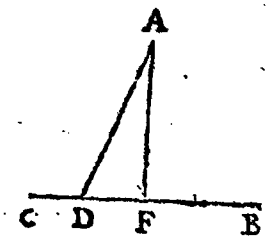
AVTREMENT.

En la ligne BCE ſoit pris vn poinct donné C, & par iceluy ſoit menee CF pa-

rallele à icelle DA. D'autant que AD, FC ſont paralleles & que ſur icelles tombe la ligne droicte BCE : l'angle FCB eſt egal[g] à l'angle donné ADB: & partant il eſt auſſi donné. Et puis que à la ligne droicte BC donnee par poſition, & à vn poinct C donné en icelle eſt tiree la ligne droicte FC faiſant vn angle donné FCB; icelle ligne FC[h] eſt donnee par poſition. Mais par le poinct donné A, eſt tiree vis à vis de la ligne FC donnee par poſition, la ligne AD : Donc icelle AD[i] eſt donnee par poſition.

g 29.1.
h 29 p.
i 28. p.

AVTREMENT.

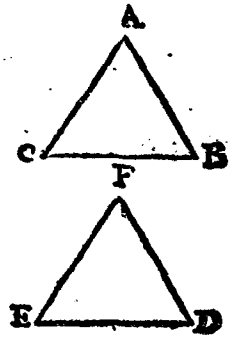


Soit pris en la ligne droicte BC quelque poinct F, & ſoit tiree AF. D'autant que chaque poinct A, F eſt donné, la ligne AF eſt donnee[l] par poſition. Mais la ligne BC eſt auſſi donee par poſition: Donc † l'angle AFD eſt donné. Mais par l'hypotheſe l'angle ADF eſt donné: Donc DAF (qui eſt le reſte[n] de deux droicts) eſt donné. Et puis que à la ligne droicte AF donnee par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tiree la ligne droicte DA faiſant l'angle donné DAF, [m] icelle ligne DA eſt donnee par poſition.

l 26 p.
n 32.1.
m 29.p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que deux lignes droictes eſtans donnees par poſition, & inclinees entr'elles ſont vn angle donné; ce qu'aucuns demonſtrent ainſi. D'autant que les deux lignes droictes donnees par poſition ſont inclinees entr'elles, l'inclination d'icelles lignes eſt donnee : Mais l'angle eſt l'inclination des lignes : Donc l'angle que font les lignes droictes donnees par poſition, & inclinees entr'elles eſt donné.*



Mais le ſieur Hardy le demonſtre preſque ainſi. Soient deux lignes droictes inclinees AB, CB donnees par poſition, & en AB ſoit pris quelque poinct donné A, & en BC auſſi quelque poinct C, & ſoit tiree la ligne droicte AC. Puis que tant le poinct B, que chacun des poincts A & C eſt donné, [o] les trois lignes droictes AB, BC, AC ſont donnees par grandeur. Parquoy de trois lignes directes egales à icelles, on pourra conſtituer vn triangle : ſoit donc fait le triangle FDE ayant le coſté FD egal au coſté AB, le coſté FE egal au coſté AC, & la baſe DE egale à la baſe BC. Veu donc que les angles compris des lignes droictes egales ſont eſgaux, nous auons trouué l'angle FDE egal à l'angle ABC: & partant icelluy[d] angle ABC eſt donné.

o 26.p.
d 1.def.

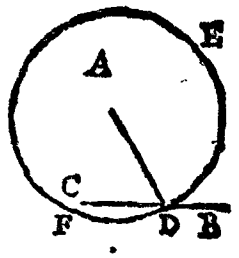
PROP. XXXI.

Si d'vn poinct donné, on tire à vne ligne droicte donnée par poſition, vne ligne droicte donnée par grandeur: elle ſera auſſi donnée par poſition.

Que d'vn poinct donné A, ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, la ligne droicte AD donnee par grandeur: Ie dis qu'icelle AD eſt donnée par poſition.

Car

Car du centre A, & de l'interualle AD ſoit deſcrit le cercle DEF. D'autant que le centre A eſt donné par poſition, & le ſemidiam. AD par grandeur; le cercle DEF [p] eſt donné par poſition. Mais la ligne droicte BC eſt auſſi donnee par poſition : Donc le poinct d'interſection D [q] eſt donné. Et puis que le poinct A eſt auſſi donné : [r] la ligne droicte AD eſt donnee par poſition.



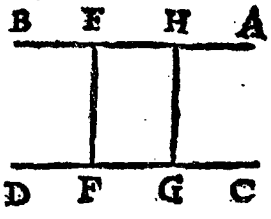
p 6.d.
q 25.p.
r 26.p.

PROP. XXXII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, on tire vne ligne droicte, faiſant des angles donnez; la ligne tiree ſera donnée par grandeur.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, ſoit tiree la ligne droicte EF faiſant les angles donnez BEF, EFD : Ie dis que la ligne EF eſt donnee par grandeur.

Car ſoit pris en la ligne CD vn poinct donné G, & d'iceluy ſoit tiree GH parallele à FE. D'autant que les lignes EF, HG ſont paralleles, & que ſur icelles tombe la ligne CD [s] l'angle EFD eſt egal à l'angle FGH. Mais l'angle EFD eſt donné : donc l'angle FGH eſt auſſi donné. Et d'autant qu'à la ligne droicte CD donnee par poſition, & au poinct G donné en icelle eſt tirée la ligne droicte GH faiſant l'angle donné FGH; [t] icelle ligne GH eſt donnee par poſition. Mais AB eſt auſſi donnee par poſition : Donc [u] le poinct H eſt donné. Mais le poinct G eſt auſſi donné: Donc [x] la ligne GH eſt donnee par grandeur, & eſt [y] egale à EF. [z] Parquoy icelle ligne EF eſt donnee par grandeur.



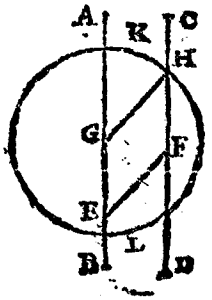
s 29. 1.
t 29.p.
u 25.p.
x 26.p.
y 34.1.
z 1.d.

PROP. XXXIII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, on tire vne ligne droicte donnée par grandeur, elle fera les angles donnez.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, ſoit tiree vne ligne droicte EF donnee par grandeur : Ie dis qu'elle fera les angles BEF, DFE donnez.

Car ſoit pris en la ligne droicte AB le poinct G, & par iceluy ſoit tiree GH parallele à EF. Donc EF eſt egale à icelle [y] GH. Mais EF eſt donnee par grandeur: Donc GH eſt auſſi donnee par grandeur. Mais le poinct G eſt donné, & partant ſi d'iceluy, & de l'interualle GH eſt deſcrit vn cercle [a] il ſera donné par poſition. Qu'il ſoit donc deſcrit, & ſoit HKL. Iceluy cercle HKL eſt donc donné, par poſition:

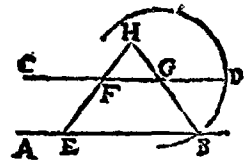


y 34.1.
a 6.d.

Mais la ligne CD qui couppe la circonference KHL en H eſt auſſi donnee par
b 25.p. poſition: donc iceluy point d'interſection H[b] eſt donné. Mais le poinct G
c 26.p. eſt donné: donc[c] la ligne droicte GH eſt donnée par poſition. Mais la ligne
d ſch. droicte CD eſt auſſi donnee par poſition: Donc[d] l'angle GHF eſt donné.
30.pr. Mais à iceluy eſt egal[e] l'angle EFD: Donc l'angle EFD eſt donné; & partant
e 29.1. auſſi l'angle BEF, car c'eſt le reſte de la ſomme de deux[e] droits.

AVTREMENT.

Soit pris en la ligne droicte CD le poinct G; & ſoit poſee GD egale à EF: puis du centre G & interualle GD ſoit deſcrit vn cercle DBH, & tiré GB. D'autant que le centre G eſt donné par poſition, & le ſemidiametre GD par grandeur, le cercle BDH[a] eſt donné par poſition. Mais la ligne AB eſt auſſi donnee par poſition: Donc[b] le poinct B eſt donné. Mais le poinct G eſt auſſi donné: Donc[c] la ligne droicte GB eſt donnee par poſition. Mais la ligne droicte CD eſt auſſi donnee par poſition: Donc[d] l'angle BGD eſt donné. Parquoy ſi EF eſt parallele à BG, l'angle EFD,[e] ſera donné, & conſequemment auſſi l'autre angle BEF. Mais les lignes droictes BG, EF n'eſtans paralleles, qu'elles ſe rencontrent au poinct H. D'autãt que EB eſt parallele à FG, & EF eſt egale à GD,

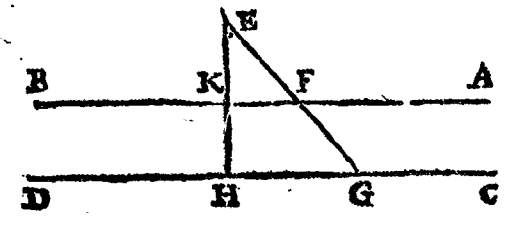


f 14.5. c'eſt à dire à BG; auſſi FH[f] ſera egale à GH. (car EH, BH eſtans couppees pro-
g 2.6. portionnellement[g] par la parallele FG, comme EF à FH ainſi BG à GH, & en
h 5.1. permutant, cõme EF à BG ainſi FH à GH.) Donc[h] l'angle HFG eſt egal à l'an-
i 15.1. gle HGF. Mais iceluy HGF eſt donné: (car il eſt egal[i] au donné BGD.) Donc l'angle HFG eſt auſſi donné. Mais à iceluy eſt egal l'angle BEF; & partant eſt donné, comme auſſi le reſtant EFG.

PROP. XXXIV.

Si d'vn poinct donné on tire à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, vne ligne droicte; elle ſera couppée en raiſon donnee.

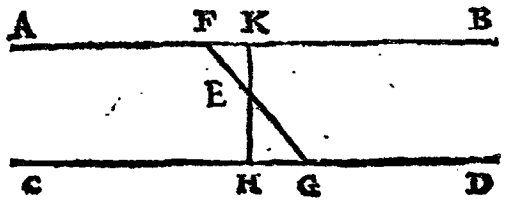
Qu'aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, ſoit tiree du poinct donné E, la ligne droicte EFG: Ie dis que la raiſon de EF à FG eſt donnée.



Car du poinct E ſoit tiree EH perpendiculaire à la ligne CD. D'autant que du poinct donné E eſt tiree à CD
l 30.p. la ligne droicte EH, faiſant l'angle donné EHG,[l] icelle ligne EH eſt donnee par poſition. Mais l'vne & l'autre ligne AB, CD eſt auſſi donnee par poſition.
m 25.p. n 26.p. Donc[m] les poincts d'interſection K, H ſont donnez. Mais le poinct E eſt auſſi
o 1.p. donné: Donc[n] chaque ligne EK, KO eſt donnee. Parquoy[o] la raiſon d'icelle EK à KO eſt donnée. Mais comme EK à KO, ainſi EF à FG: (car au triangle GEH, la ligne KF eſtant parallele à HG, les coſtez EH, EG ſont couppez proportionnellement.) Donc la raiſon d'icelle EF à FG eſt donnée.

AVTREMENT.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par position, soit tiree du poinct donné E la ligne droicte FEG: Ie dis que la raison de GE à EF est donnee. Car du poinct E soit tiree à CD la perpendiculaire EH, & produicte iusques au poinct K. Puis donc que du poinct E à la ligne droicte CD donnee par position, est tiree la ligne EH faisant l'angle donné EHG; [l] icelle EH est donnee par position. Mais chaque ligne AB, CD est aussi donnee par position: Donc [m] chaque poinct d'intersection H, K est donné. Mais le poinct E est aussi donné. Donc [n] chacune des lignes EH, EK est donnee par grandeur: & partant [o] la raison d'icelle EH à EK est donnee. Mais [p] comme EH à EK ainsi EG à EF: (car les angles opposez du poinct E estans egaux, & les lignes AB, CD paralleles, les triangles EHG, EKF sont equiangles, & partant comme EH à EG ainsi EK à EF; & en permutant comme EH à EK ainsi EG à EF.) Donc la raison d'icelle EG à EF est donnee.

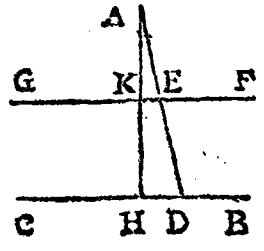


l 30 p.
m 25. p.
n 26. p.
o 1. p.
p 4. 6.

PROP. XXXV.

Si d'vn poinct donné à vne ligne droicte donnee par position, est tiree vne ligne droicte, laquelle soit couppée en vne raison donnee, & que par le poinct de section soit menée vne ligne droicte vis à vis de la ligne droicte donnee par position: la ligne menee sera donnee par position.

Que d'vn poinct donné A soit tiree à vne ligne droicte BC donnee par position, la ligne droicte AD, & soit couppee en E selon vne raison donnee, c'est à sçauoir de AE à ED, mais par le poinct E soit menee FEG parallele à BC: Ie dis que FG est donnee par position.



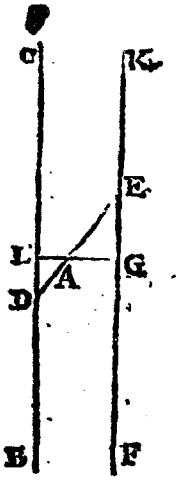
Car du poinct A soit tiree AH perpendiculaire à BC. D'autant que du poinct donné A est tiree à BC donnee par position, la ligne droicte AH faisant l'angle AHD donné; [q] icelle AH est donnee par position. Mais BC est aussi donnee par position: Donc [r] le poinct H est donné. Mais le poinct A est aussi donné: Donc [s] la ligne AH est donnee par grandeur, & par position. Et d'autant que [t] comme AE à ED, ainsi AK à KH, & que la raison de AE à ED est donnee; aussi la raison de AK à KH est donnee: & en composant, [u] la raison de AH à AK est donnee. Mais AH est donnee par grandeur: Donc [x] aussi AK est donnee par grandeur. Mais AK est aussi donnee par position, & le poinct A est donné: Donc [y] le poinct K est aussi donné. Et puis que par iceluy poinct K donné est menee la ligne droicte FG, vis à vis de la ligne droicte BC donnée par position; icelle ligne FG [z] est donnee par position.

q 30. p.
r 25. p.
s 26. p.
t 2. 6.
u 6. p.
x 2. p.
y 27. p.
z 28. p.

PROP. XXXVI.

Si d'vn poinct donné on tire à vne ligne droicte donnee par position vne ligne droicte, & qu'à icelle on adiouſte quelque ligne droicte ayant vne raiſon donnee à la meſme; mais que par l'extremité d'icelle adiouſtee, on mene vne ligne droicte vis à vis de la ligne donnee par poſition: icelle ligne menee ſera donnee par poſition.

Que du poinct donné A ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, la ligne droicte AD, à laquelle ſoit adiouſtee la ligne droicte AE qui ait à AD vne raiſon donnee; mais par le poinct E ſoit menee FEK parallele à icelle BC: Ie dis que FK eſt donnée par poſition.



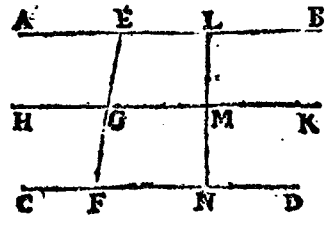
Car du poinct E ſoit menee à BC la perpendiculaire AL, & prolongee iuſques au poinct G. D'autant que du poinct donné A eſt tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition la ligne droicte GL, qui fait vn angle GLD donné; [q] icelle ligne GL eſt donnée par poſition. Mais BC eſt auſſi donnee par poſition: [r] Donc le poinct L eſt donné. Et puis que le poinct A eſt auſſi donné, [f] la ligne AL eſt donnee. Mais d'autant que la raiſon [a] de AE à AD eſt donnee, & que comme icelle AE à AD, ainſi [&] AG à AL; (à cauſe que les triangles ALD, AGE ſont equiangles) la raiſon de AG à AL eſt auſſi donnee. Mais AL eſt donnee par [b] grandeur: Donc AG eſt donnee par grandeur. Mais elle l'eſt [c] auſſi par poſition, & le poinct A eſt donné: Donc le poinct G eſt auſſi donné. Et puis que par iceluy poinct donné G, eſt menee [d] la ligne FK, vis à vis de la ligne droicte BC donnee par poſition; icelle ligne FK eſt donnee par poſition.

q 30. p. r 26. p. f 26. p. a 4. 6. & 16. 5. b 2. p. c 27. p. d 28. p.

PROP. XXXVII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, eſt tiree vne ligne droicte, qui ſoit couppee en raiſon donnee: mais par le poinct de ſection ſoit menee vis à vis des lignes droictes donnees par poſition, vne ligne droicte: icelle ligne menee ſera donnee par poſition.

Soient des lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, & à icelles ſoit tiree la ligne droicte EF couppee en la raiſon donnee de EG à GF; & par le poinct G ſoit menee HGK parallele à laquelle on voudra d'icelles AB, CD: Ie dis que KH eſt donnee par poſition.



Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné L, & d'iceluy poinct ſoit tiree LN perpendiculaire à CD. Et puis que du poinct

donné L, eſt tiree à la ligne droicte GD, la ligne LN faiſant l'angle LND donné icelle LN [c] eſt donnee par poſition. Mais CD eſt auſſi donnee par poſition. Donc le poinct N [f] eſt donné. Mais le poinct L eſt auſſi donné: Donc [g] la ligne LN eſt donnee. Et veu que la raiſon de FG à GE eſt donnee, & que † comme FG à GE, ainſi NM à ML; la raiſon d'icelle NM à ML eſt donnee: Et en compoſant [h], la raiſon de LN à LM eſt auſſi donnee. Mais LN eſt donnee par grandeur: Donc ML eſt [i] donnee par grandeur. Mais elle l'eſt auſſi par poſition, & le poinct L donné: Donc le poinct M [l] eſt auſſi donné. Et attendu que par iceluy poinct M eſt menee la ligne droicte KH vis à vis de la ligne droicte CD donnee par poſition: icelle ligne KH eſt auſſi donnee par poſition.

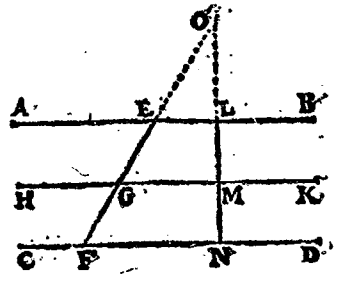
c 30. p.
f 25. p.
g 26. p.
h 6. p.
i 2. p.
l 27. p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que comme FG eſt à GE, ainſi NM eſt à ML, mais le ſieur Hardy l'a demonſtré ainſi. Les lignes EF, LN ſont paralleles, ou non: Qu'elles ſoient donc premierement paralleles. Et d'autant que par l'hypotheſe les lignes EL, FN, EF, LN, ſont paralleles, EN ſera vn parallelogramme; & partant le coſté EF eſt egal au coſté LN. Derechef, veu que MG eſt parallele à FN: & GF à MN; GN ſera auſſi parallelogr. & partant le coſté GF eſt egal au coſté MN. Parquoy les egales EF, LN, auront aux egales FG, MN [m] vne meſme raiſon: Donc comme EF à FG, ainſi LN à MN; & en diuiſant, [n] comme GE à GF, ainſi LM à MN.*

m 7. 5.
n 17. 5.

Maintenant que les lignes EF, LN ne ſoient paralleles, mais qu'elles ſe rencontrent au poinct O: D'autant qu'au triangle OFN eſt menee HK parallele à vn des coſtez FN; [o] les coſtez OF, ON ſont couppez proportionnellement; & partant comme FG à GO ainſi NM à MO. Derechef, veu qu'au triangle OGM eſt menée EL parallele au coſté GM, les coſtez OG, OM ſont couppez proportionnellement: Parquoy [p] comme OE à EG, ainſi OL à LM; & en compoſant, [q] comme OG à EG, ainſi OM à LM. Mais il a eſté demonſtré que comme FG à GO, ainſi NM à MO: Donc par raiſon egale, [r] comme FG à GE ainſi NM à ML.



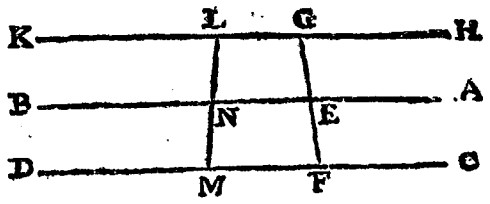
o 2. 6.
p 18. 5.
q 22. 5.

PROP. XXXVIII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, on tire vne ligne droicte, & qu'à icelle on adiouſte quelque autre ligne droicte qui ait vne raiſon donnee à la meſme; mais par l'extremité de l'adiouſtee ſoit menee vne ligne droicte vis à vis des paralleles donnees par poſition: la ligne menee ſera auſſi donnee par poſition.

Soient des lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, & à icelles ſoit tiree la ligne droicte EF, à laquelle ſoit adiouſtee la ligne droicte EG ayant vne raiſon donnee à la meſme EF, mais par le poinct G ſoit menee la ligne droicte HK parallele à l'vne ou à l'autre des lignes AB, CD: Ie dis qu'icelle ligne HK eſt donnee par poſition.

Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné N, & d'iceluy ſoit tiree à CD la perpendiculaire NM, & ſoit prolongee iuſques au poinct L. D'autant que du poinct donné N eſt tiree à la ligne droicte CD donnee par poſition, la ligne droicte NM faiſant vn angle donné NMF; icelle NM[r] eſt donnee par poſition. Mais la ligne CD eſt auſſi donnee par poſition: Donc[s] le poinct M eſt donné. Mais le poinct N eſt auſſi donné: Donc[t] la ligne NM eſt donnee. Et pour ce que la raiſon de EG à EF eſt donnee, & que (par les choſes demonſtres au Scholie prec.) comme EG à EF ainſi LN à NM; la raiſon de LN à NM eſt auſſi donnee. Mais NM eſt donnee: Donc LN[u] eſt auſſi donnee. Mais le poinct N eſt donné: Donc[x] le poinct L eſt auſſi donné. Veu donc que par le poinct donné L, eſt menee la ligne droicte HK vis à vis de la ligne AB donnee par poſition;[y] icelle HK eſt auſſi donnee par poſition.



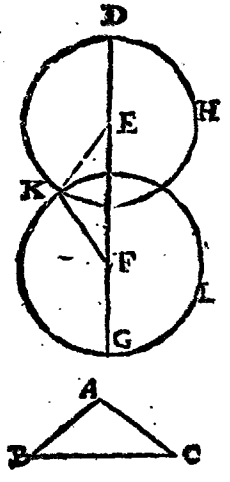
r 30. p.
s 25. p.
t 26. p.
u 2. p.
x 27. p.
y 28 p.

PROP. XXXIX.

Si chaques coſtez d'vn triangle ſont donnez par grandeur, le triangle eſt donné par eſpece.

Du triangle ABC ſoient donnez chaques coſtez par grandeur: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car ſoit expoſee vne ligne droicte DG donnee par poſition, & finie au poinct D, mais infinie vers l'autre partie G. En icelle ſoit priſe DE egale à AB. Or puis que icelle AB eſt donnee par grandeur, DE l'eſt auſſi, mais la meſme DE eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct D donné: Donc[z] le poinct E eſt donné. Derechef, ſoit poſee EF egale à BC. Et veu que BC eſt donnee par grandeur, EF le ſera auſſi. Mais icelle EF eſt ſemblablement donnee par poſition, & le poinct E eſt donné: Donc[z] le poinct F eſt donné. Soit encore priſe FG egale à AC. Or d'autant que icelle AC eſt donnee par grandeur, FG l'eſt auſſi. Mais FG eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct F eſt donné: Donc le poinct G eſt auſſi donné. Maintenant du centre E, & interualle ED ſoit deſcrit le cercle DHK,[a] & iceluy ſera donné par poſition. Derechef, du centre F & interualle FG ſoit deſcrit le cercle GLK: Donc[a] iceluy cercle GLK eſt donné par poſition; & partant[b] le poinct d'interſection K eſt donné. Mais chacun des poincts E, F eſt donné: Donc chaque ligne[c] EK, EF, FK eſt donnee par poſition & grandeur. Donc le triangle EKF eſt † donné par eſpece: Mais il eſt egal & ſemblable au triangle ABC; & partant le triangle ABC eſt auſſi donné par eſpece.



z 27. p.
a 6. d.
b 25. p.
c 26. p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy qu'vn triangle dont les coſtez ſont donnez par grandeur & poſition*

eſt donné par eſpece, mais l'ancien interprete le demonſtre preſque ainſi. D'autant que les lignes droictes KE, EF, ſont donnees [d] *la raiſon qu'elles ont entr'elles eſt donnée. Item les lignes droictes EF, FK eſtans donnees, leur raiſon eſt auſſi donnee. Et ſemblablement eſt donnee la raiſon d'icelles EK, FK. Derechef, pource que les meſmes lignes KE, EF ſont donnees par poſition* [e] *l'angle KEF eſt donné par grandeur: Item les lignes droictes EF, FK eſtans donnees par poſition, l'angle EFK eſt donné par grandeur; comme eſt auſſi le reſtant EKF. Par ainſi au triangle EKF tous les angles ſont donnez, & auſſi les raiſons des coſtez: Donc* [f] *iceluy triangle EKF eſt donné par eſpece.*

d 1. p.

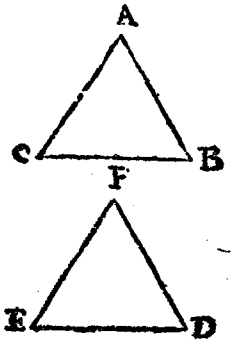
e ſch. 30. pr.

f 3. def.

PROP. XL.

Si les angles d'vn triangle ſont donnez par grandeur, le triangle eſt donné par eſpece.

Que chacun angle du triangle ABC ſoit donné: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car ſoit expoſee la ligne droicte DE donnee par poſition & par grandeur, & ſoit conſtitué au poinct D l'angle EDF egal à l'angle CBA, mais au poinct E l'angle DEF egal à l'angle BCA: Donc le troiſieſme angle BAC eſt egal au troiſieſme angle DFE. Or chacun des angles conſtituez aux poincts A, B, C eſt donné: Donc chacun de ceux qui ſont poſez aux poincts D, F, E eſt auſſi donné. Et puis que à la ligne droicte DE donnee par poſition, & au poinct D donné en icelle eſt tiree la ligne droicte DF, qui fait l'angle donné EDF; [g] la ligne DF eſt donnee par poſition. Et par meſme raiſon la ligne EF eſt donnee par poſition: Donc [h] le poinct F eſt donné par poſition. Mais chacun des poincts D, E eſt donné: Donc [i] chacune des lignes DF, DE, EF eſt donnee par grandeur. Parquoy le triangle DFE [l] eſt donné par eſpece; & eſt ſemblable au triangle ABC: Donc le triangle ABC eſt donné par eſpece.

g 29. p.

h 25. p.

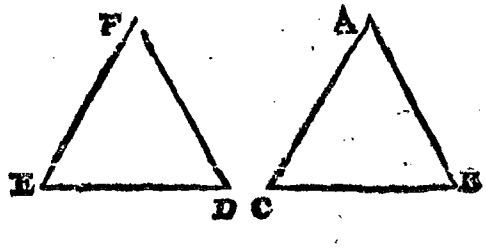
i 26. p.

l 39. p.

PROP. XLI.

Si vn triangle à vn angle donné, & que les deux coſtez qui le conſtituent ayent entr'eux vne raiſon donnee; le triangle eſt donné par eſpece.

Que le triangle ABC ait l'angle BAC donné, & que les coſtez BA, AC qui font iceluy angle ſoient entr'eux en raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



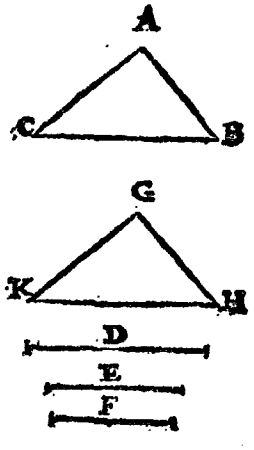
Car ſoit expoſee la ligne droicte DF donnee par grandeur & poſition; mais ſur icelle & au poinct donné F ſoit conſtitué l'angle DFE egal à l'angle BAC. Or l'angle BAC eſt donné: Donc auſſi eſt donné l'angle DFE. Et puis que à la li-

gne droicte DF donnee par position & du poinct F donné en icelle est tiree vne
m 29 p. ligne droicte FE faisant l'angle donné DFE; [m] icelle ligne FE est donnee par position. Mais veu que la raison de AB à AC est donnee, soit faicte la mesme de DF à FE, puis soit tiree DE. Donc la raison de DF à FE est donnee: Mais
n 2. pr. DF est donnee: Donc [n] FE est donnee par grandeur. Mais la mesme FE est
o 27 p. aussi donnee par position, & le poinct F est donné. Donc [o] le poinct E est aussi
p 26. p. donné. Mais chacun des poincts D, F est donné: Donc [p] chacune des lignes
q 39. p. droictes DF, FE, DE est donnee par position & grandeur. Parquoy [q] le triangle DEF est donné par espece. Et veu que les deux triangles ABC, DEF ont vn angle egal à vn angle, c'est à sçauoir l'angle BAC à l'angle DFE, & les costez
r 6. 6. qui constituent iceux angles egaux, proportionnaux; [r] le triangle ABC est semblable au triangle DEF. Mais le triangle DEF est donné par espece: Donc le triangle ABC est donné par espece.

PROP. XLII.

Si les costez d'vn triangle sont entr'eux en raisons donnees, le triangle est donné par espece.

Que les costez du triangle ABC soient entr'eux en raisons donnees: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece. Car soit exposee la ligne droicte D donnee par grandeur; & puis que la raison de BC à AC est donnee, soit faicte la mesme de D à E. Or D est donnee: Donc
s 3. pr. [s] E est aussi donnee. Derechef, veu que la raison de AC à AB est donnee, soit faicte la mesme de E à F. Or E est donnee: Donc [s] F est aussi donnee. Maintenant de trois lignes droictes egales aux trois donnees D, E, F, & desquelles deux en quelque façon qu'elles soient prises sont plus grandes que l'autre, soit constitué le triangle GHK, tellement que D soit egale à HK; mais E à KG, & GH à F. Donc chacune desdictes lignes HK, KG, GH est don-
t 39. p. nee par grandeur. Parquoy [t] le triangle HGK est donné par espece. Et d'autant que comme BC à CA, ainsi D à E, & que D est egale à HK, & E à KG: comme BC à CA ainsi HK à KG. Derechef, pour ce que comme CA à AB, ainsi E à F, & que E est egale à KG, & F à GH: comme CA à AB, ainsi KG à GH. Mais il a esté demonstré que comme BC à CA, ainsi HK à KG: Donc par egalité de raison, comme BC à AB,
u 5. 6. & 1. d. 6. ainsi HK à GH. Donc [u] le triangle ABC est semblable au triangle GHK. Mais le triangle GHK est donné par espece: Donc le triangle ABC est aussi donné par espece.

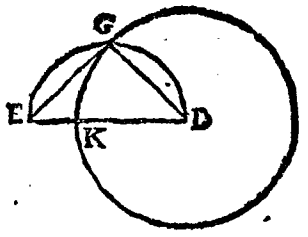


PROP. XLIII.

Si les costez d'autour vn des angles aigus d'vn triangle rectangle, ont entr'eux vne raison donnee; le triangle est donné par espece.

Soit

Soit vn triangle ABC ayant l'angle A droict, & les coſtez BC, BA d'allentour vn des angles aigus ſoient entr'eux en raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



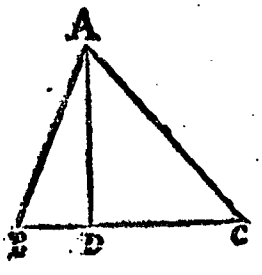
Car ſoit expoſee la ligne droicte DE donnee par grandeur & poſition, & ſur icelle DE ſoit deſcrit le demy cercle DGE. Donc[b] le demy cercle DGE eſt donné par poſition: (car la ligne DE eſtant donnee, & couppee en deux egalement, le centre dudit cercle eſt donné par poſition, & le ſemidiam. par grandeur.) Et d'autant que la raiſon de BC à BA eſt donnee, ſoit faicte la meſme de DE à F: Donc la raiſon de DE à F eſt donnee. Mais DE eſt donnee: Donc F eſt[c] auſſi donnee. Or BC eſt plus grande que[d] AB: Donc ED eſt[e] auſſi plus grande que F. Soit accommodee DG egale à F, & tiré EG; puis du centre D & interualle DG ſoit deſcrit le cercle GK. Or iceluy cercle[f] eſt donné par poſition, puis que le centre D eſt donné, & le ſemidiametre DG auſſi donné par grandeur. Mais le demy cercle DGE eſt auſſi donné par poſition: Donc[g] le poinct d'interſection G eſt donné. Mais les poincts D, E ſont auſſi donnez: Donc[h] chacune des lignes droictes DE, DG, EG eſt donnee par poſition & grandeur. Parquoy[i] le triangle DGE eſt donné par eſpece. Et puis que les triangles ABC, DGE ont vn angle egal à vn angle, ſçauoir l'angle droict BAC à l'angle droict DGE, & les coſtez d'allentour les angles CBA, EDG proportionnaux, mais chacun des autres ACB, DEG moindre qu'vn droict: iceux triangles ABC, DEG[l] ſont ſemblables. Mais le triangle DGE eſt donné par eſpece: Donc le triangle ABC eſt auſſi donné par eſpece.

b 6. def.
c 2. pr.
d 19. 1.
e 14. 5.
f 25. p.
g 26 p.
h 39 p.
i 31. 3.
l 7. 6. 4. 6. & 1 def. 6.

PROP. XLIV.

Si vn triangle a vn angle donné, & que les coſtez d'autour vn autre angle ayent entr'eux vne raiſon donnee; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC qui ait l'angle B donné, & les coſtez BA, AC d'autour vn autre angle BAC ayent entr'eux vne raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



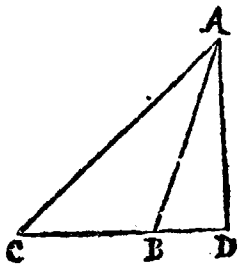
Or l'angle donné B eſt aigu ou obtus; (car il eſtoit droict à la prop. prec.) ſoit premierement aigu, & du poinct A ſoit tiree AD perpend. à BC: Donc l'angle ADB eſt donné: Mais l'angle B eſt auſſi donné; & partant le troiſieſme BAD eſt donné. Parquoy[m] le triangle ABD eſt donné par eſpece: & partant[n] la raiſon de BA à AD eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme BA à AC eſt auſſi donnee: Donc[o] la raiſon

m 40 p.
n 3 def. connex.
o 8 pr.

p 43. p. n 3. def. de AD à AC eſt donnee; & l'angle ADC eſt droict. Parquoy le triangle ACD eſt donné par eſpece: Donc l'angle C eſt donné. Mais l'angle B eſt auſſi donné; & partant l'autre angle BAC eſt donné: Donc le triangle ABC eſt donné par eſpece.

q 40. p.

Maintenant, l'angle ABC donné ſoit obtus, & ſur le coſté CB prolongé ſoit tiree la perpendiculaire AD. D'autant que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD qui eſt de ſuite ſera donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme DAB eſt donné. Parquoy le triangle ABD eſt donné par eſpece: & partant la raiſon de DA à AB eſt donnee. Mais la raiſon de AB à AC eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de DA à AC eſt donnee; & l'angle D eſt droict: Donc le triangle DAC eſt donné par eſpece; & partant l'angle ACB eſt donné. Mais l'angle ABC eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme angle BAC eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece.



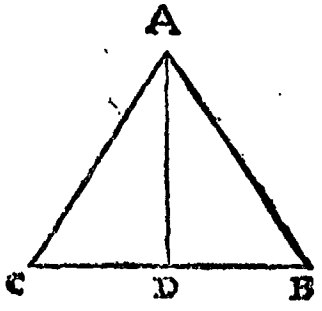
n 3. def. o 8. pr.

PROP. XLV.

Si vn triangle a vn angle donné, & que le compoſé des deux coſtez d'autour iceluy angle donné ait à l'autre coſté vne raiſon donnee: le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC, qui ait l'angle BAC donné, mais la ligne compoſee des deux coſtez AB, AC qui conſtituent iceluy angle BAC ait au troiſieſme coſté BC vne raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

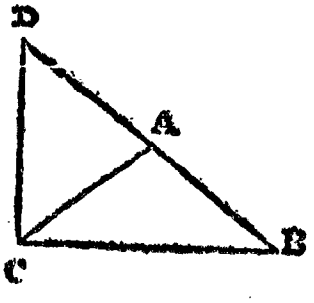
Car l'angle BAC ſoit couppé en deux egalement par la ligne AD. Donc l'angle CAD eſt donné. Et puis que comme AB à AC, ainſi BD à CD: en compoſant, comme la compoſee CAB eſt à CA, ainſi BC à CD; & en permutant, comme la compoſee CAB à CB, ainſi CA à CD. Mais la raiſon de la compoſee BAC à BC eſt donnee: Donc la raiſon de CA à CD eſt auſſi donnee; & l'angle CAD eſt donné: Donc le triangle ACD eſt donné par eſpece; & partant l'angle C eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme B eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece.



r 7. pr. ſ 3. 6. t 18. 5. u 44. p. x 40. p.

AVTREMENT.

Soit prolongee BA directement iuſques en D, tellement que AD ſoit egale à AC, puis ſoit ioincte CD. D'autant que la raiſon de la compoſee CAB à CB eſt donnee, & que AD eſt egale à AC; la raiſon de la toute BD à BC eſt donnee. Mais l'angle ADC eſt auſſi donné, car il eſt moitié de l'angle donné BAC: (pource qu'iceluy BAC eſt egal aux deux angles interieurs ACD, ADC qui ſont egaux en-



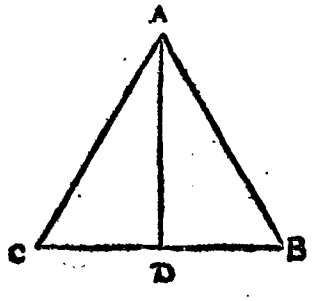
y 32. 1. z 5. 1.

tr'eux eſtans les coſtez AC, AD egaux.) Parquoy le triangle BDC[a] eſt donné par eſpece; & partant l'angle B eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le reſté ACB eſt donné Parquoy[b] le triangle ABC eſt donné par eſpece. a 44.p. b 40.p.

PROP. XLVI.

Si vn triangle a vn angle donné, & que la compoſee des deux coſtez d'autour vn autre angle ait à l'autre coſté vne raiſon donnée; le triangle eſt donné par eſpece.

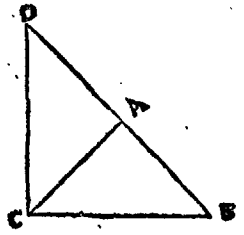
Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle B donné, mais la compoſee des deux coſtez d'autour vn autre angle BAC, c'eſt à dire CAB, ait à l'autre coſté BC vne raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car ſoit couppé l'angle BAC en deux egalement par la ligne AD: Donc (comme il a eſté demonſtré à la prec. prop.) la compoſee CAB eſt à CB, comme AB à BD. Mais la raiſon d'icelle compoſee CAB à CB eſt donnee: Donc auſſi la raiſon de AB à BD eſt donnee. Mais l'angle B eſt auſſi donné: Donc le triangle ABD[c] eſt donné par eſpece; & partant [d] l'angle BAD eſt donné. Mais l'angle BAC eſt double d'iceluy BAD; & partant il eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme angle C eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece. c 41.p. d 3.def. conu.

AVTREMENT.

Soit prolongee BA directement, & poſe AD egale à AC, puis ioinct CD. D autant que la raiſon de la compoſee CAB à CB eſt donnee, & que AD eſt egale à AC: la raiſon de BD à BC eſt dõnee; & l'angle B eſt auſſi donné: Donc le triangle CDB[c] eſt donné par eſpece; & partant[d] l'angle D eſt donné: Donc l'angle BAC, qui eſt double d'iceluy, eſt auſſi donné. Parquoy l'autre angle ACB eſt donné: Donc le triangle ABC eſt donné par eſpece.



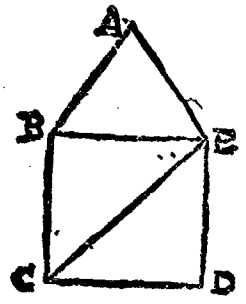
PROP. XLVII.

Les rectilignes donnez par eſpece, ſe diuiſent en triangles donnez par eſpece.

Soit vn rectiligne ABCDE donné par eſpece; Ie dis qu'il ſe diuiſe en triangles donnez par eſpece.

Car ſoient tirees les lignes droictes EB, EC. D'autant que le rectiligne ABCDE eſt donné par eſpece, l'angle [d] BAE eſt donné, & la raiſon du coſté AB à AE: Donc [e] le triangle BAE eſt donné par eſpece. Parquoy l'an- d 3.def. conuer. e 42.p.

gle ABE eſt donné. Mais tout l'angle ABC eſt auſſi donné : Donc [f] le reſte EBC eſt donné. Mais la raiſon du coſté AB à BE, & auſſi celle de AB à BC eſt donnee : donc [o] la raiſon de BC à BE eſt donnee ; & l'angle CBE eſt auſſi donné : partant [e] le triangle BCE eſt donné par eſpece. Par meſme diſcours on demonſtrera que le triangle CDE eſt donné par eſpece. Donc les rectilignes donnez par eſpece ſe diuiſent en triangles donnez par eſpece.

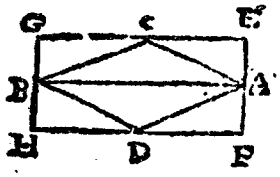


f 4. p.
o 8. pr.
e 41. p.

PROP. XLVIII.

Si ſur vne meſme ligne droicte ſont deſcris des triangles donnez par poſition, ils auront entr'eux vne raiſon donnee.

Sur la meſme ligne droicte AB ſoient deſcris deux triangles ACB, ABD donnez par eſpece : le dis que la raiſon de ACB à ABD eſt donnee.



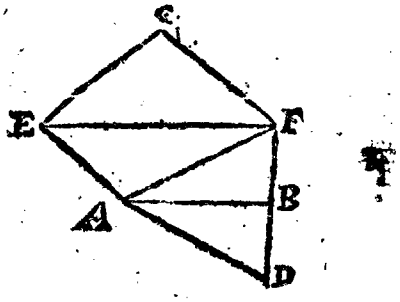
Car des poincts A B ſoient tirees à angles droicts ſur la ligne AB, les lignes AE, BG, & prolongees iuſques aux poincts F H : mais par les poincts C, D, ſoient menees ECG, FDH paralleles à AB. D'autant donc que le triangle ABC eſt donné par eſpece, [g] la raiſon de CA à BA eſt donnee, & l'angle CAB auſſi donné. Mais l'angle BAE eſt donné : Donc le reſte CAE eſt auſſi donné. Mais l'angle CEA eſt donné ; & partant l'autre angle ACE eſt auſſi donné. Parquoy [h] le triangle AEC eſt donné par eſpece. Or la raiſon de EA à AB [o] eſt donnee : (car [d] la raiſon de EA à AC, & celle de AC à AB eſt donnee.) Et ſemblablement eſt donnee la raiſon de FA à AB. Donc [o] la raiſon de EA à AF eſt donnee. Mais comme AE eſt à AF [i] ainſi le parallelogramme AH eſt au parallelogr. AG. Mais ACB eſt [l] moitié de AH, & ADB moitié de AG : Donc la raiſon du triangle ACB au triangle ADB eſt donnee ; car c'eſt la meſme raiſon que de [m] AH à AG, c'eſt à dire de EA à AF, qui eſt donnée.

g 3. def. conu.
h 40 p.
o 8 pr.
d 3. def.
i 1. 6.
l 41. 1.
m 15. 5.

PROP. XLIX.

Si ſur vne meſme ligne droicte ſont deſcris deux quelconques rectilignes donnez par eſpece ; ils auront entr'eux vne raiſon donnee.

Sur vne meſme ligne droicte AB ſoient deſcris deux quelconques rectilignes ALCB, ADB donnees par eſpece : Ie dis que la raiſon de AECFB à ADB eſt donnee.



Car ſoient menees FA, FE : Donc chacun des triangles [n] ABF, AFE, ECF eſt donné par eſpece. Et veu que ſur vne meſme ligne droicte EF ſont deſcris les triangles ECF, EAF donnee par eſpece ; la raiſon de ECF à EAF [o] eſt donnee. Donc en com-

n 47. p.
o 48. p.

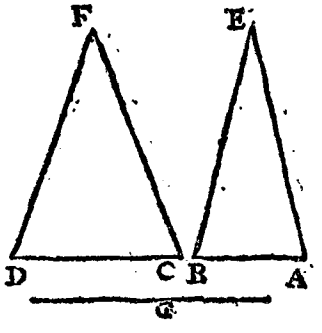
posant, [p] la raison de AECF à EAF est donnee. Mais la raison d'iceluy EAF à FAB est donnee, [o] puis que ce sont triangles donnez par espece descris sur vne mesme ligne droicte AF: Donc [q] la raison de AECF à FAB est donnee. Parquoy en composant, [p] la raison de AECFB à FAB est donnee. Mais la raison d'iceluy FAB à ABD [o] est donnee: Donc [q] la raison de AECFB à ABD est aussi donnee.

p 6. pr.
q 8. pr.
o 48. p.

PROP. L.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raison donnee, & que sur icelles soient descris des rectilignes semblables & semblablement posez; ils auront entr'eux vne raison donnee.

Soient deux lignes droictes AB, CD ayans entr'elles vne raison donnee, & sur icelles soient descris les rectilignes AEB, CFD semblables & semblablement posez: Ie dis que la raison qu'ils ont entr'eux est donnee.



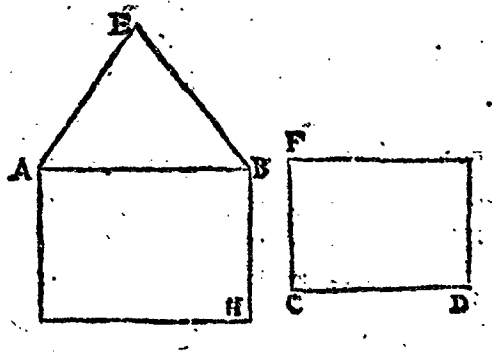
A icelles AB, CD soit prise vne troisiesme proport. G. Donc comme AB à CD, ainsi CD à G. Mais la raison de AB à CD est donnee: Donc la raison de CD à G est aussi donnee. Parquoy [q] la raison de AB à G est donnee. Mais [r] comme AB à G, ainsi AEB à CFD: Donc la raison d'iceluy AEB à CFD est donnee.

q 9 pr.
r corol. 19. ou 20. 6.

PROP. LI.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raison donnee, & sur icelles soient descris quelconques rectilignes donnez par espece; ils auront entr'eux vne raison donnee.

Soient deux lignes droictes AB, CD ayans entr'elles vne raison donnee, & soient descris sur icelles quelconques rectilignes AEB, CFD donnez par espece: Ie dis que la raison de AEB à CFD est donnee.



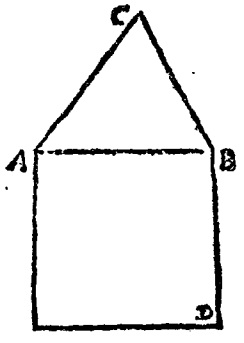
Car sur AB soit descrit le rectiligne AH semblable & semblablement posé à DF. Or DF est donné par espece: Donc aussi AH est donné par espece. Mais AEB est aussi donné par espece, & descrit sur la mesme ligne AB: Donc [s] la raison de AEB à AH est donnee: Et puis que la raison de AB à CD est donnee, & que sur icelles lignes sont descris les rectilignes AH, DF semblables & semblablement posez: la raison [t] d'iceluy AH à DF est donnee. Mais la raison de AEB à AH est aussi donnee: Donc la raison [u] de AEB à DF est donnee.

s 49. pr.
t 50. p.
u 8. pr.

PROP. LII.

Si ſur vne ligne droicte donnee par grandeur, eſt deſcrite vne figure donnee par eſpece: Icelle figure eſt donnee par grandeur.

Sur la ligne droicte AB donnee par grandeur ſoit deſcrite la figure ACB donnee par eſpece: Ie dis que la figure ACB eſt donnee par grandeur.



Car ſur la meſme ligne AB ſoit deſcrit le quarré AD. Donc AD eſt donné par eſpece † & par grandeur. Et veu que ſur la ligne droicte AB ſont deſcrits les deux rectilignes ACB, AD donnez par eſpece; x la raiſon de ACB à AD eſt donnee. Donc z ACB eſt donnee par grandeur.

x 49. p.
z 2. p.

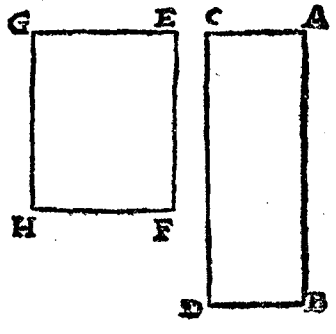
SCHOLIE.

† *L'ancien interprete à remarqué icy que tout quarré eſt donné par eſpece, pour ce que tous les angles en ſont donnez, eſtans tous droicts & egaux: Mais auſſi les raiſons des coſtez ſont donnees; car iceux coſtez eſtans tous egaux, auſſi les raiſons en ſont egales. D'auantage, toutesfois & quantes qu'vn quarré eſt expoſé, on en peut exhiber vn egal à iceluy; & partant le quarré eſt donné par grandeur, & auſſi chaque coſté d'iceluy.*

PROP. LIII.

S'il y a deux figures donnees par eſpece, & qu'vn coſté de l'vne ait à vn coſté de l'autre vne raiſon donnee: les autres coſtez auront auſſi aux autres coſtez raiſons donnees.

Soient deux figures AD, EH donnees par eſpece, & la raiſon de BD à FH ſoit donnee: Ie dis que la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez eſt donnee.



Car puis que la raiſon de BD à FH eſt donnee, & auſſi celle a de BD à BA: b la raiſon d'icelle AB à FH eſt donnee. Mais la raiſon d'icelle FH à FE a eſt auſſi donnee: donc b la raiſon de AB à EF eſt donnee: Auſſi eſt ſemblablement donnee la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez.

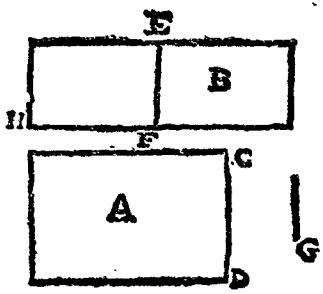
a 3. d.
b 8. p.

PROP. LIIII.

Si deux figures donnees par eſpece ont entr'elles vne raiſon donnee, auſſi les coſtez d'icelles ſeront entr'eux en raiſon donnee.

Soient deux figures A, B donnees par eſpece, qui ayent entr'elles vne raiſon donnée: Ie dis que leurs coſtez auront entr'eux vne raiſon donnee.

Car ou la figure A eſt ſemblable, & ſemblablement poſee à B, ou non. Qu'elle ſoit premierement ſemblable & ſemblablement poſee, & ſoit priſe G troiſieſme porportionelle aux lignes droictes CD, EF. Donc comme CD à G, [c] ainſi A à B. Mais la raiſon de A à B eſt donnee: donc auſſi la raiſon de CD à G eſt donnee. Et veu que CD, EF, G ſont proport. [d] auſſi la raiſon de CD à EF eſt donnee. Mais A & B ſont donnees par eſpece: donc [e] les autres coſtez auront raiſon donnee aux autres coſtez.



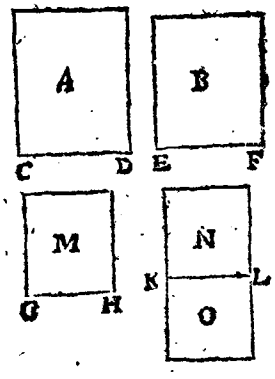
c *coroll. 19. ou 20. 6.*
d *24. p.*
e *53. p.*

Maintenant, la figure A ne ſoit ſemblable à la figure B; & ſoit deſcrite ſur EF la figure EH ſemblable & ſemblablement poſee à A: donc la figure EH eſt donnee par eſpece. Mais la figure B eſt auſſi donnee par eſpece: donc [f] la raiſon de B à EH eſt donnee; & partant la raiſon de A à icelle EH [g] eſt auſſi donnee. Mais A eſt ſemblable à EH: donc (par ce que deſſus) la raiſon de CD à EF eſt donnee: & ſemblablement la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez eſt donnee.

f *49. p.*
g *8. p.*

AVTREMENT.

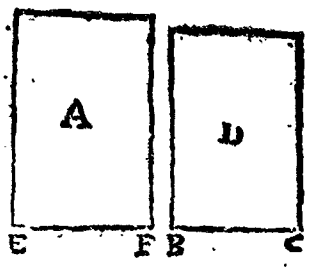
Soit expoſee vne ligne droicte donnee GH. Maintenant ou la figure A eſt ſemblable à la figure B, ou non. Soit premierement ſemblable; & ſoit fait comme CD à EF, ainſi GH à LK: puis ſur GH, LK ſoient deſcrites les figures M, N ſemblables & ſemblablement poſees à icelles A, B: leſquelles M, N ſeront conſequemment donnees par eſpeces. Donc puis que comme CD à EF, ainſi GH à LK, & que ſur icelles lignes CD. EF, GH, LK ſont deſcrites les figures A, B, M, N ſemblables & ſemblablement poſees: [h] comme A à B, ainſi M à N. Mais la raiſon de A à B eſt donnee: donc la raiſon de M à N eſt donnee. Mais [i] M eſt donnee, attendu que c'eſt vne figure donnee par eſpece deſcrite ſur vne ligne droicte donnee par grandeur: donc N eſt auſſi donnnee. Maintenant, ſur LK ſoit deſcrit le quarré O: donc [l] la figure O eſt donnee par eſpece. Parquoy la raiſon de K à N eſt donnee. Mais N eſt donnee: donc K eſt donnée; & conſequemment [m] auſſi KL. Mais GH eſt donnee: donc [n] la raiſon de GH à KL eſt donnee. Mais comme GH à LK, ainſi CD à EF: donc la raiſon de CD à EF eſt donnee; & partant les figures A & B eſtans donnees par eſpeces: [n] les autres coſtez d'icelles auront auſſi aux autres coſtez vne raiſon donnee. Mais ſi les figures ne ſont ſemblables, ſera procedé comme en la derniere partie de la demonſtration cy-deſſus.



h *22. 6.*
i *52. p.*
l *sch. 52. p.*
m *5. pri.*
n *53. p.*

PROP. LV.

Si vn eſpace eſt donné par eſpece & par grandeur, les coſtes d'iceluy ſeront donnez par grandeur.

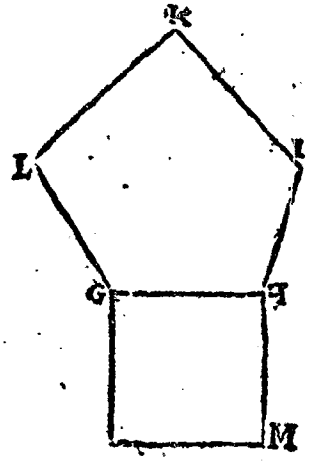


Soit vn eſpace A donné par eſpece & par grandeur: Ie dis que les coſtez d'iceluy ſont donnez par grandeur.

Car ſoit expoſee la ligne droicte BC donnee par poſition & par grandeur; & ſur icelle BC ſoit deſcrit l'eſpace D ſemblable & ſemblablemẽt poſé à A: partant iceluy eſpace D eſt donné par eſpece. Et pour ce qu'il eſt deſcrit ſur la ligne BC donnee par grandeur; il eſt auſſi donné [o] par grandeur. Mais la figure A eſt auſſi donnee: donc [p] la raiſon de A à D eſt donnee. Mais icelles figures A, D ſont donnees par eſpece: donc [q] la raiſon de la ligne EF à la ligne BC eſt donnee. Mais BC eſt donnee: donc [m] EF eſt auſſi donnee. Mais la raiſon d'icelle EF à FG eſt donnee: donc [r] FG eſt donnee. Et par meſmes raiſons on demonſtrera chacun des autres coſtez eſtre donné par grandeur.

o 52. p.
p 54 p.
m 3 p.
q 3. d. conu.
r 2. p.

AVTREMENT.



Soit l'eſpace GHIKL donné par eſpece & par grandeur: Ie dis que les coſtez d'iceluy ſont donnez par grandeur.

Car ſoit deſcrit ſur la ligne droicte GH le quarré GM: donc [f] GM eſt donné par eſpece. Mais l'eſpace GHIKL eſt auſſi donné par eſpece: donc [t] la raiſon d'iceluy eſpace GK à GM eſt donnee. Mais GK eſt donné par grandeur: donc [s] GM eſt auſſi donné par grandeur. Et veu que GM eſt le quarré de la ligne GH; [s] icelle ligne GH eſt donnee par grandeur. Parquoy ſemblablement chacune des autres lignes HI, IK, KL, LG eſt donnee.

f 5ch.
52. p.
t 49. p.
s 2. p.

PROP. LVI.

Si deux parallelogrammes equiangles ont entr'eux vne raiſon donnee, comme vn coſté du premier eſt à vn coſté du ſecond, ainſi l'autre coſté du ſecond eſt à celle à laquelle l'autre coſté du premier a la raiſon donnee que le parallelogramme a au parallelogramme.

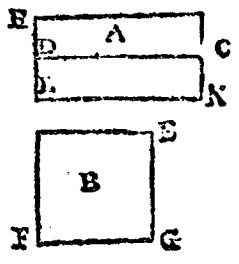
Soient deux parallelogrammes equiangles A, B ayans entr'eux vne raiſon donnee: Ie dis que comme CD eſt à FG ainſi GE eſt à celle à laquelle DH a la raiſon donnee que le parallelogr. A a au parallelogr. B.

Car ſoit prolongé directement HD iuſques en L, tellement que comme CD eſt à FG, ainſi HD ſoit à DL; & ſoit acheué le parallelogramme DK. D'autant que comme CD à FG, ainſi HD à DL, & que [a] CD eſt egal à KL: comme LK à FG, ainſi GE à DL; & par ainſi les coſtez d'autour les angles egaux DLK, EGF,

a 34. 1.

EGF, ſont reciproquement proportionnaux: parquoy [b] DK eſt egal à B. Et partant puis que la raiſon de A à B eſt donnee, & que B eſt egal à DK; la raiſon de A à DK eſt donnee. Mais comme [c] A à DK (c'eſt à dire B) ainſi HD à DL: donc la raiſon de HD à DL eſt auſſi donnee. Et veu que comme CD à FG, ainſi GE à DL, & que la ligne droicte HD a à DL raiſon donnee, ſçauoir celle qu'a l'eſpace A à l'eſpace B: comme CD eſt à FG, ainſi GE eſt à celle à laquelle HD à la raiſon donnee qu'a l'eſpace A à l'eſpace B, c'eſt à dire la raiſon de HD à DL.

b 14. 6.



c 1. 6.

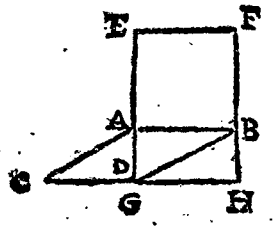
PROP. LVII.

Si vn eſpace donné eſt appliqué à vne ligne droicte donnee en angle donné, la largeur de l'application eſt donnee.

A la ligne droicte donnee AB ſoit appliqué l'eſpace donné AD, en angle donné CAB: Ie dis que CA eſt donnee.

Car ſur AB ſoit deſcrit le quarré AF: donc [d] iceluy AF eſt donné. Soient prolongees les lignes EA, FB CD aux poincts G, H. Veu donc que chaque eſpace AD, AF eſt donné, leur raiſon eſt auſſi donnee. Mais [e] AD eſt egal à AH: donc la raiſon de AF à AH eſt donnee. Parquoy la raiſon de EA à AG eſt donnee, (car [f] c'eſt la meſme que de AF à AH.) Mais EA eſt egale à AB: donc la raiſon de AB à AG eſt donnee. Maintenant puis que l'angle CAB eſt donné, & l'angle GAB auſſi donné; le reſte CAG eſt donné. Mais l'angle CGA eſt auſſi donné, pour ce qu'il eſt droict: donc le reſte ACG eſt donné. Parquoy le triangle [g] CAG eſt donné par eſpece. Donc la raiſon de CA à AG eſt donnee. Mais la raiſon de AB à la meſme AG eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de CA à AB eſt donnee; & icelle AB eſt donnee. Parquoy CA eſt auſſi donnee.

d ſch. 52. pr.



e 36. 1.

f 1. 6.

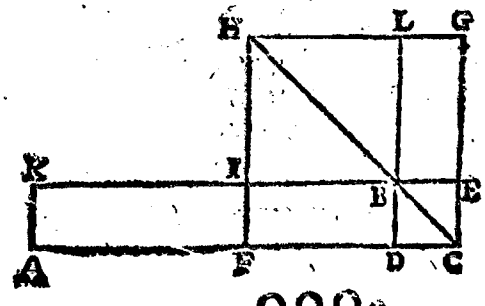
g 40. 1.

PROP. LVIII.

Si vn eſpace donné eſt appliqué à vne ligne droicte donnée, deffaillant d'vne figure donnée par eſpece; les largeurs du default ſont donnees.

Soit vn eſpace donné AB appliqué ſelon la ligne droicte donnee AC deffaillant de la figure DE donnee par eſpece: Ie dis que chacune des lignes droictes BD, DC eſt donnee.

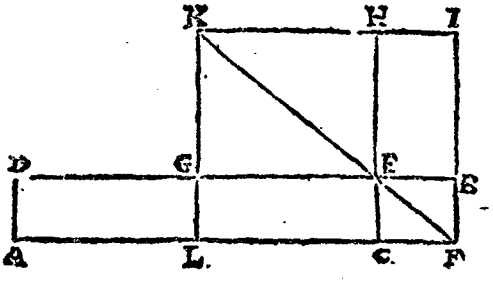
Car ſoit couppee AC en deux egalement au poinct F: donc tant AF, que FC eſt donnee. Sur icelle FC ſoit deſcrit le rectiligne FG ſemblable & ſemblablement poſé à DE, & ſoit conſtruite la figure. Donc FG eſt donné par eſpece: & puis qu'il eſt deſcrit ſur la ligne droi-



h 52.p. cte FC donnee par grandeur, iceluy rectiligne FG est h aussi donné par gran-
i 56.1. deur. Mais FG est egal à AB, IL; (car i AI, FE estans egaux, & l FB, BG aussi
l 43.1. egaux, le gnomon ICL est egal à AB, & partant leur adiouttant IL commun, FG sera egal à AB, IL:) Donc les figures AB, IL en semble sont donnees par
m 4.p. grandeur. Mais AB est donnee par grandeur: donc m la restante IL est aussi donnee par grandeur. Mais elle est aussi donnee par espece, puis qu'elle est
n 24.6. n semblable à DE: Donc o les costez d'icelle IL sont donnez. Parquoy IB est
o 55.p. donnee: & puis qu'elle est egale p à FD; icelle FD est aussi donnee. Mais FC
p 34.1. est donnee: Donc le reste DC m est donné; & q a raison donnee à BD: & par-
q 3.d. tant r BD est donnee.
r 2.pr.

PROP. LIX.

Si vn espace donné est appliqué selon vne ligne droicte donnee, excedant d'vne figure donnee par espece; les largeurs de l'excez sont donnees.

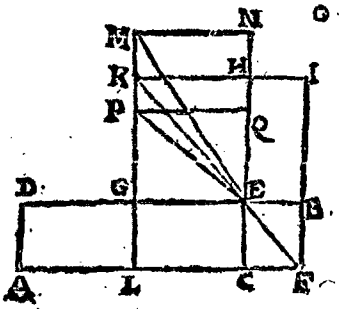


Soit vn espace donné AB appliqué selon la ligne droicte donnee AC, excedant de la figure CB donnee par espece: Ie dis que chacune des lignes CE, CF est donnee.

Car DE estant couppee en deux egalement en G, soit descrit sur GE le rectiligne GH semblable & semblablement posé à CB; & soit construite la figure. Or puis que CB est semblable à GH; iceux CB, GH † sont autour d'vn mesme diametre, & GH est donné par espece, tout ainsi que CB. Mais il est des-
q 2.p. crit sur la ligne donnee GE: Donc q iceluy GH est aussi donné par grandeur. Mais AB est donné: Donc AB, GH sont donnez par grandeur. Or iceux AB, GH sont egaux à LI: (car AG, LE, EI estans egaux, le gnomon GFH est egal à AB; & partant adiouſtant GH commun, LI sera egal à AB, GH.) Donc LI est donné par grandeur. Mais il est aussi donné par espece, attendu qu'il est
s semblable à CB: Donc x les costez d'iceluy LI sont donnez; & partant le
s 24.6. costé LF est donné Mais LC est aussi donné, veu qu'il est egal à GE: Donc y le
x 55.p. reste CF est donné, & a raison donnee z à CE. Parquoy a CE est donnee.
y 4. p.
z 3. d.
a 2. p.

SCHOLIE.

† *Euclide suppose icy que CB, GH sont allentour d'vn mesme diametre; mais nous le demonstrerons ainsi. Soient deux parallelogr. semblables CB, GH, disposez en la mesme sorte que dessus, c'est à dire que les angles egaux se conioignans en E le costé CE rencontre directement son homologue EH; & le costé BE son correspondant EG: Et soit tiré le diametre FE: Ie dis qu'iceluy diametre FE prolongé passera par le poinct K; c'est à dire les parallelogr. GH, CB consister allentour vn mesme diametre. Car s'ils n'y consistent.*

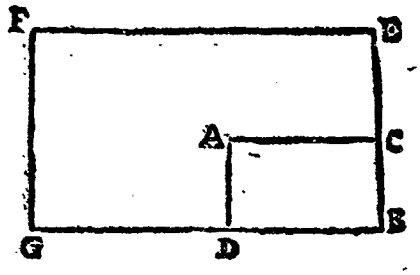


le diametre FE eſtant produit paſſera au deſſus du poinct K, ou au deſſous. Qu'il tombe premierement au deſſus, & couppe GK prolongé en M, & par le poinct M ſoit menee MN parallele à KH, laquelle rencontre EH prolongé en N & FB en O. D'autãt que les parallelogr. GN, CB ſont auec le parallelogr. LO autour d'vn meſme diametre, ils ſont [b] *ſemblables entr'eux. Parquoy comme FC à CE, ainſi EG à GM. Semblablement pource que les parallelog. CB, GH ſont ſemblables, comme FC à CE, ainſi EG à GK: Donc* [d] *comme EG à GM, ainſi EG à GK. Parquoy* [e] *GM & GK ſont egales; la partie au tout: Ce qui eſt abſurde. On demonſtrera par meſmes raiſons que le diametre prolongé ne tombera pas au deſſous du poinct K. Donc les parallelogrammes CB, GE conſiſtent allentour d'vn meſme diametre.*

b 24.6.
d 11.5.
e 9.5.

PROP. LX.

Si vn parallelogramme donné par eſpece & par grandeur eſt augmenté ou diminué d'vn gnomon les largeurs du gnomon ſont données.



Que le parallelogramme AB donné par eſpece & par grandeur, ſoit premierement augmenté du gnomon CFD. Ie dis que chacune des lignes droictes CE, DG eſt donnee.

Car puis que AB eſt donné, & le gnomon CFD auſsi donné, tout le parallelogramme BF eſt donné: Mais il eſt auſsi donné par eſpece, attendu qu'il eſt ſemblable à BA. Donc [f] les coſtez d'iceluy BF ſont donnez; & partant chacune des lignes BE, BG eſt donnee. Mais chacune des lignes BC, BD eſt donnee: Donc chacune des lignes reſtantes CE, DG eſt auſsi donnee.

f 55.1.

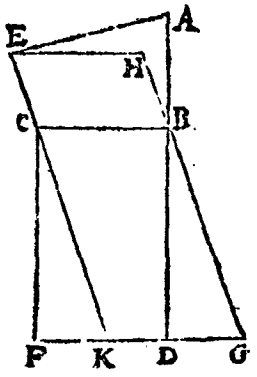
Maintenant que le parallelogramme BF donné par eſpece & par grandeur ſoit diminué du gnomon donné CFD: Ie dis que chacune des lignes CE, DG eſt donnee. Car d'autant que BF eſt donné, & le gnomon CFD donné; le reſte AB eſt auſsi donné. Mais il eſt auſsi donné par eſpece, veu qu'il eſt ſemblable à BF: Donc [f] les coſtez d'iceluy AB ſont donnez; & partant chacune des lignes CB, BD eſt donnee. Mais chacune des lignes BE, BG eſt donnee: Donc auſsi chacune des reſtees CE, DG eſt donnee.

PROP. LXI.

Si à vn coſté d'vne figure donnee par eſpece eſt appliqué vn eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure donnee ait au parallelogramme vne raiſon donnee: le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Qu'à vn coſté de la figure ABCE donnee par eſpece ſoit appliqué vn eſpace parallelogr. CD en angle donné BCF, & ſoit donnee la raiſon de la figure AC

au parallelogr. CD: Ie dis que CD eſt donné par eſpece.



Car par le poinct B ſoit tiree BH parallele à CE, & par le poinct E ſoit menee EH parallele à CB, & ſoient prolongees EC, HB aux poincts K, G. D'autant que g l'angle BCE eſt donné, & la raiſon de EC à CB, s le parallelogramme CH, eſt donné † par eſpece: Mais la figure ABCE eſt auſsi donnee par eſpece, & eſt deſcrite ſur la meſme ligne BC que le parallelog. CH donné par eſpece: Donc h la raiſon de la figure ABCE au parallelogr. CH eſt donnee. Mais par l'hypotheſe la raiſon d'icelle figure ABCE au parallelogr. CD eſt auſsi donnee; & CD eſt i egal à CG: Donc l la raiſon de CH à CG eſt donnee. Parquoy la raiſon de la ligne EC à la ligne CK eſt donnee: (car m comme CH à CG, ainſi EC à CK.) Mais la raiſon de EC à CB eſt auſsi donnee: Donc l la raiſon d'icelle CB à CK eſt donnee. Et veu que l'angle ECB eſt donné, auſsi l'angle de ſuitte BCK n eſt donné: Mais l'angle BCF eſt poſé donné: & partant le reſté FCK eſt donné. Item l'angle CKF eſt donné, attendu o qu'il eſt egal à l'angle BCK: Donc l'autre angle CFK eſt donné. Parquoy p le triangle FCK eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de FC à CK eſt donnee. Mais la raiſon de CB à la meſme CK eſt auſsi donnee: Donc l la raiſon de FC à CB eſt donnee; & l'angle BCF eſt auſsi donné. Parquoy le parallelogramme CD eſt donné par eſpece.

g 3. d.
h 49. p.
i 36. 1.
l 8. p.
m 1. 6.
n 13. 1. & 4. p i
o 29. 1.
p 40. p.

SCHOLIE.

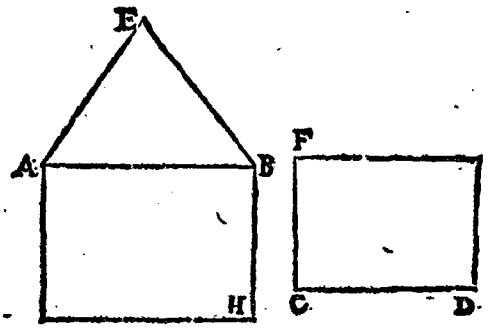
† *Encore qu'il ſoit manifeſte qu'vn parallelogramme qui a vn angle donné, & la raiſon des coſtez d'autour iceluy angle auſsi donnee, ſoit donné par eſpece ainſi que le dit icy Euclide, ſi eſt-ce que l'ancien interprette l'a voulu demonſtrer ainſi. Pource qu'au parallelogramme CH l'angle ECB eſt donné, auſsi l'angle CEH eſt donné: car la ligne droicte EC tombant ſur les paralleles EH, CB fait les deux angles interieurs d'vne meſme part egaux à deux droicts: Et partant puis que l'angle ECB eſt donné, les autres angles ſont donnez. Et pource que la raiſon de EC à CB eſt donnee, & que BH eſt egale à CE, & EH à BC. la raiſon des coſtez entr'eux eſt auſsi donnee.*

PROP. LXII.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raiſon donnee, & ſur l'vne d'icelles eſt deſcrite vne figure donnee par eſpece, mais ſur l'autre vn eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure ait au parallelogramme vne raiſon donnee; le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Que les deux lignes droictes AB, CD ayent entr'elles vne raiſon donnee, & ſur AB ſoit deſcrite la figure AEB donnee par eſpece, mais ſur CD le parallelogramme DF en angle donné DCF; & la raiſon d'icelle figure AEB au parallelogramme DF ſoit donnee: Ie dis que le parallelogramme DF eſt donné par eſpece.

Car ſur la ligne AB ſoit deſcrit le parallelogramme AH ſemblable & ſemblablement poſé à DF. Veu donc que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & ſur icelles lignes ſont deſcrits les rectilignes AH, FD ſemblables & ſemblablement poſez; [q] la raiſon de AH à FD eſt donnee. Mais la raiſon de FD à AEB eſt auſsi donnee: Donc [r] la raiſon de AH à AEB eſt donnee. Mais l'angle ABH eſt auſsi donné, eſtant egal à l'angle FCD: par ainſi la figure AEB eſt donnee par eſpece, & à A^n l'vn des coſtez d'icelles eſt appliqué le parallelogr. AH en angle donné ABH, & la raiſon de ladicte figure AEB à iceluy parallelogramme AH eſt donnee: Donc [s] le parallelogr. AH eſt donné par eſpece; & partant FD, qui luy eſt ſemblable, eſt auſſi donné par eſpece.



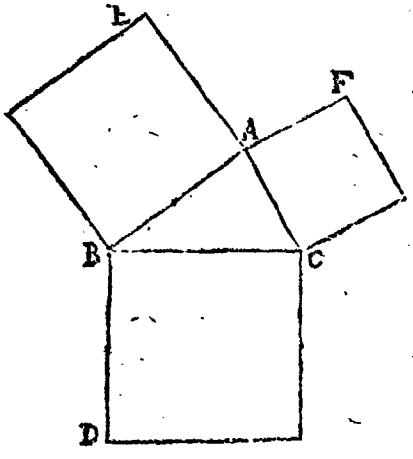
q 50. p.
r 8. p.
s 61. p.

PROP. LXIII.

Si vn triangle eſt donné par eſpece, le quarré qui eſt deſcrit ſur vn chacun des coſtez aura raiſon donnée au triangle.

Soit le triangle ABC donné par eſpece, & ſoient deſcris ſur chacun des coſtez d'iceluy les quarrez BE, CD, CF: Ie dis que chacun des quarrez EB, CD, CF aura vne raiſon donnee au triangle ABC.

Car puis que ſur vne meſme ligne droicte BC ſont deſcritts les deux rectilignes ABC, CD donnez par eſpece; [t] la raiſon d'iceluy ABC à CD eſt donnee: Et partant eſt auſſi donnee la raiſon de l'vn & l'autre des quarrez BE, CF au triangle ABC.



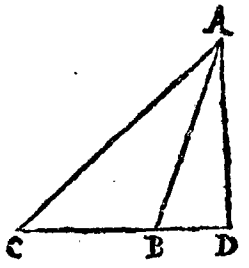
t 49. p.

PROP. LXIV.

Si vn triangle a vn angle obtus donné, cet eſpace là duquel le coſté ſouſtendant l'angle obtus peut plus que les coſtez comprenant iceluy angle, aura vne raiſon donnee au triangle.

Soit le triangle ambligone ABC ayant l'angle obtus ABC donné; & ayant prolongé directement CB, de A ſoit tiree la perpendiculaire AD: Ie dis que l'eſpace duquel le quarré de la ligne AC excede les quarrez des lignes AB,

BC, c'eſt à dire[x] le double du rectangle ſoubs CB, BD; aura vne raiſon donnee au triangle ABC. x 12.2.



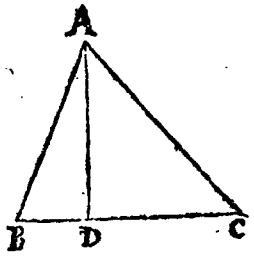
Car puis que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD eſt donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné: Donc l'autre angle BAD eſt donné. Parquoy[y] le triangle ABD eſt donné par eſpece: Donc[z] la raiſon de AD à DB eſt donnee. Mais comme AD à DB, ainſi[a] le rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Mais la raiſon de AD, DB eſt donnee: Donc auſſi eſt donnee la raiſon du rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Parquoy la raiſon du double d'iceluy rectangle de BC, BD au rectangle de AD, BC eſt auſſi donnee: Mais iceluy rectangle de AD, BC a auſſi raiſon donnee au triangle ABC: (c'eſt à ſçauoir la raiſon double, car le rect. eſt[b] double du triangle) donc la raiſon du double rect. de BC, BD[c] au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy double rectangle de CB, BD, eſt cet eſpace là duquel le quarré de la ligne AC, excede les quarrez des lignes AB, BC: Donc iceluy eſpacea raiſon donnee au triangle ABC.

y 40.
z 3. d.
a 1. 6.
b 41.1.
c 8. p.

PROP. LXV.

Si vn triangle a vn angle aigu donné, cet eſpace là duquel le coſté ſubtendant ledit angle aigu peut moins que les coſtez comprenans iceluy angle aigu, aura au triangle vne raiſon donnée.

Soit le triangle ABC ayant l'angle aigu ACB donné, & du poinct A ſoit menee AD perpendiculaire à BC: Ie dis que cet eſpace là duquel le quarré de la ligne droicte AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, CB, c'eſt à dire[d] le double du rectangle de BC, CD, à vne raiſon donnee au triangle ABC.



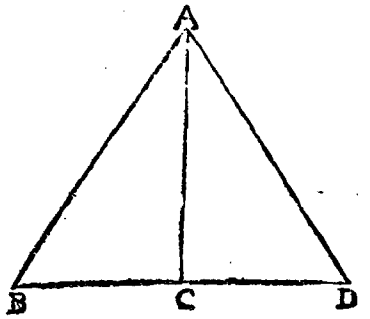
Car d'autant que l'angle C eſt donné, & l'angle ADC auſſi donné, l'autre angle DAC eſt donné: parquoy[e] le triangle ADC eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de AD à DC eſt donnee, & conſequemment auſſi[f] celle du rectangle de BC, CD au rectangle de BC, AD. Donc la raiſon du double rectangle de BC, CD au rect. de BC, AD eſt donnee. Mais eſt auſſi donnee la raiſon d'iceluy rectangle de BC, AD au triangle ABC: (car[g] le rect. eſt double du triangle) donc[h] la raiſon du double rectangle de BC, CD au triangle ABC eſt donnee. Et veu que iceluy double rectangle de BC, CD, eſt ce dont le quarré de la ligne AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC; cet eſpace là duquel le quarré de la ligne droicte AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC aura raiſon donnee au triangle ABC.

d 13.2.
e 40.p.
f 1.6.
g 41.1.
h 8.p.

PROP. LXVI.

Si vn triangle a vn angle donné, le rectangle des lignes comprenans iceluy angle aura vne raiſon donnee au triangle.

Soit le triangle ABD, qui ait l'angle B donné: Ie dis que le rectangle compris sous AB, BD a raison donné au triangle ABD.



Car du poinct A soit tiree AC perpendiculaire à BD. Donc puis que l'angle B est donné, & aussi l'angle ACB; l'autre angle BAC est pareillement donné. Parquoy le triangle ABD [i] est donné par espece: & consequemment est donnee la raison de AB à AC. Mais comme AB à AC, [l] ainsi le rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC: Donc la raison du rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC est donnee. Mais la raison d'iceluy rectangle de BD, AC au triangle ABD est aussi donnee: (car c'est la raison double, le rectangle estant double [m] du triangle) donc [h] la raison du rectangle de AB, BD au triangle ABD est donnee.

i 40. p.

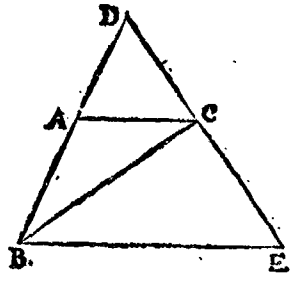
l 1. 6.

m 41. p.

PROP. LXVII.

Si vn triangle a vn angle donné, cet espace là duquel la composee des deux costez comprenans iceluy angle peut plus que l'autre costé, aura raison donnee au triangle.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle BAC donné: Ie dis que cet espace là duquel le quarré de la composee de BA, AC est plus grand que le quarré de BC, aura raison donnee au triangle ABC.



Car soit prolongee BA, tellement que AD soit egale à AC, puis estant tiree DCE indeterminement du poinct B soit menee BE parallele à AC rencontrant icelle DE en E. D'autant que AD est egale a AC; [n] DB est egale à BE: (car les deux triangles ADC, BDE sont semblables) & du sommet B est tiree à la base DE la ligne droicte BC. Donc † le rectangle de DC, CE auec le quarré de BC est egal au quarré de BD. Mais icelle BD est composée de BA, AC: Donc le quarré de la composee d'icelles AB, AC est plus grand que le quarré de BC du rectangle de DC, CE.

n 4. 6.

& 14. 5.

Maintenant, ie dis que le rectangle de DC, CE a raison donnee au triangle ABC. Car d'autant que l'angle BAC est donné, aussi est donné l'angle DAC. Mais chacun des angles ADC, ACD est dõné, car il est moitie de l'angle BAC, qui est donné: Donc [o] le triangle ADC est donné par espece; & partant la raison de DA à DC est donnee. Donc [p] aussi est donnee la raison du quarré d'icelle DA au quarré de DC. Et veu que comme BA à AD, [q] ainsi EC à CD, & aussi comme BA à AD [r] ainsi le rectangle de BA, AD au quarré de AD; & comme EC à CD [r] ainsi aussi le rectangle de EC, CD au quarré de CD: En permutant, comme le rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD, ainsi le quarré de AD au quarré de DC. Mais la raison d'iceluy quarré de AD au quarré

o 40. p.

p 50. p.

q 2. 6.

r 1. 6.

de DC eſt donnee: Donc la raiſon du rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD eſt auſſi donnee. Mais AD eſt egale à AC: Donc la raiſon du rectangle de BA, AC au rectangle de EC, CD eſt donnee. Mais la raiſon du rectangle de BA, AC au triangle ABC [f] eſt donnee, pour ce que l'angle BAC eſt donné: Donc [t] la raiſon du rectangle EC, CD au triangle ABC eſt donnee. Mais le rectangle de EC, CD eſt ce dont le quarré de la compoſee de BA, AC eſt plus grand que le quarré de BC: Donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee de BA, AC eſt plus grand que le quarré de BC, aura raiſon donnee au triangle ABC.

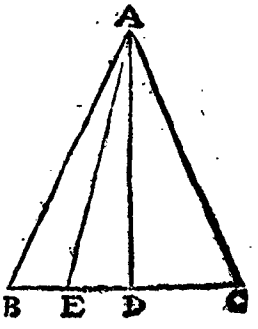
f 66. p.
t 8. pr.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que lors qu'en vn triangle iſoſcelle eſt tirée du ſommet à la baſe quelque ligne droitte; le quarré d'icelle ligne auec le rectangle contenu ſoubs les ſegmens de la baſe eſt egal au quarré de l'vne ou l'autre des iambes: Ce que l'ancien Interprete demonſtre ainſi.*

Soit le triangle iſoſcelle ABC, duquel les iambes ſoient AB, AC, & du ſommet A ſoit tirée à la baſe BC quelconque ligne droitte AD: ie dis que le quarré de AD auec le rectangle de BD, DC eſt egal au quarré de l'vne ou l'autre des iambes AB, AC. Or la ligne AD eſt perpend. à BD, ou non: Quelle ſoit premierement perpendiculaire: Donc [u] elle couppera la baſe BC en deux egalement au poinct D; & partant le rectangle ſoubs BD, DC eſt egal au quarré d'icelle BD, & leur adiouſtant le commun quarré de AD: le rectangle de BD, DC auec le quarré de AD ſera egal aux quarrez de DB, AD. Mais à iceux quarrez de AD, DB, eſt [x] egal le quarré de AB: donc le quarré de AB eſt egal au rectangle de BD, DC, & quarré de AD enſemble.

u ſch. 26. 1.
x 47. 1.



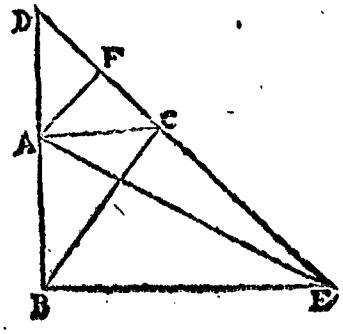
Maintenant AD ne ſoit perpendiculaire, mais que du poinct A tombe ſur BC la perpendiculaire AE: Cela eſtant ainſi, BC ſera couppée en deux egalement en E, & inegalement en D; parquoy le rectangle de BD, DC auec le quarré de DE [y] eſt egal au quarré de BE: & adiouſtant le commun quarré de AE, le rectangle de BD, DC auec les quarrez de DE, AE ſera egal aux quarrez de BE, AE. Mais [x] le quarré de AD eſt egal aux deux quarrez de DE, AE: Donc le rectangle de BD, DC auec le quarré de AD eſt egal aux quarrez de BE, AE. Mais à iceux quarrez de BE, AE eſt egal le quarré de AB; Donc le quarré de AD auec le rectangle de BD, DC, eſt egal au quarré de AB.

ÿ 5. 2.

AVTREMENT.

Ayant conſtruict comme en la demonſtration prec. du poinct A ſoit tirée AF perpendic. à CD, & ſoit menée AE. D'autãt que l'angle BAC eſt donné, [a] le ſera ACF moitié d'iceluy. Mais l'angle AFC eſt donné; & partant le triangle AFC eſt donné par eſpece: Donc la raiſon de AF à FC eſt donnée. Mais la raiſon de CD à la meſme FC eſt auſſi donnee, attendu que CD [a] eſt double de FC; Donc [b] la raiſon de CD à AF eſt donnée; & par-

a ſch. 26. 1.
b 8. p.



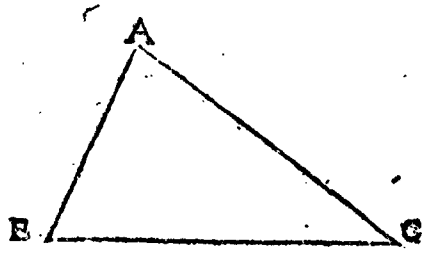
cant

tant eſt auſſi donnee la raiſon du rectangle de CD, EC au rectangle de AF, EC: (car c'eſt la meſme raiſon [c] que de CD à AF) Mais la raiſon du rectangle de AF, EC au triangle ACE eſt donnee, veu qu'il eſt double d'iceluy [d] triangle: donc la raiſon du rectangle de CD, CE au triangle ACE eſt auſſi donnée. Mais le triangle ACE eſt egal au triangle ABC [e], car l'vn & l'autre eſt conſtitué ſur vne meſme baſe AC, & entre meſmes paralleles AC, BE: donc [b] la raiſon du rectangle de CE, CD, au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy rectangle de CE, CD eſt l'eſpace duquel le quarré de la compoſee de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC, a raiſon donnee au triangle ABC.

c 1.6
d 41.1.
e 37.1.
b 8.8.

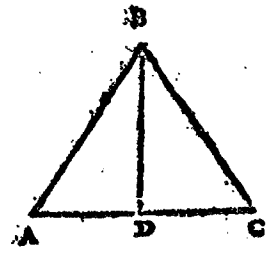
AVTREMENT.

Car l'angle donné A eſt ou droict, ou aigu, ou obtus. Qu'il ſoit premierement droict: donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC de deux fois le rectangle de BA, AC: (pource que [f] le quarré de BC eſt egal aux deux quarrez de BA, AC; & le quarré de la compoſee BAC [g] eſt egal à iceux deux quarrez de BA, AC, & deux fois le rectangle d'icelles BA, AC.) Parquoy la raiſon du double rectangle de BA, AC au triangle ABC eſt donnee.



f 47.1.
g 4.2.

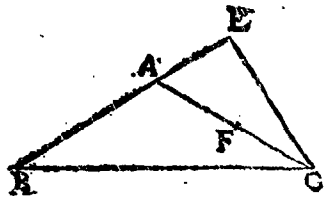
Maintenant, ſoit l'angle A aigu, & du poinct B ſoit tiree ſur AC la perpendic. BD. D'autant que le triangle ABC eſt oxigone, & eſt tiree la perpendic. BD, les quarrez de AB, AC ſont egaux [h] au quarré de BC auec deux fois le rectangle de AC, AD: adiouſtant donc le commun double rectangle de AB, AC; les quarrez de AB, AC, auec le double rectangle d'icelles AB, AC, c'eſt à dire [i] le ſeul quarré de la compoſee BAC, ſont egaux au quarré de BC auec le double rectangle de AD, AC, & en outre le double rectangle de BA, AC, c'eſt à dire le double rectangle ſoubs la compoſee BAD, AC: (car le rect. de BAD, AC eſt [l] egal aux rectang. de BA, AC, & de AD, AC.) Donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC, du double rectangle de BAD, AC. Et puis que l'angle BAC eſt donné, & l'angle ADB auſſi donné; l'autre angle ABD eſt donné: donc [m] le triangle ABD eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de AD à AB eſt donnee, & par conſequent la raiſon de la compoſee BAD à AB [n] eſt auſſi donnee. Parquoy eſt auſſi donnee la raiſon du rectangle d'icelles compoſee BAD, AC [o] au rectangle de BA, AC. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de BA, AC au triangle ABC [p] eſt donnee, pource que l'angle A eſt donné: donc la raiſon du double rectangle de la compoſee BAD, AC au triangle ABC eſt donnee.



h 13.2.
i 4.2.
l 1.2.
m 40.1.
n 6.1.
o 1.6
p 66.1.

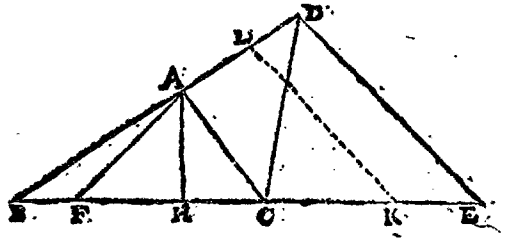
Finablement, ſoit l'angle BAC obtus, & ayant prolongé BA, du poinct C ſoit tiree ſur icelle la perpendicul. CE, puis ſoit poſee AF egale à AE D'autant

que l'angle BAC eſt obtus, & eſt tiree la perpendic. CE, les quarrez de AB, AC, & le double rectangle ſoubs BA, AE, ou AF, ſont enſemblement
q 12.2. egaux [q] au quarré de BC: & adiouſtant le commun double rectangle de BA, AC, les quarrez d'icelles AB, AC auec le double rectangle des meſ-
r 4.2. mes AB, AC, c'eſt à dire [r] le quarré de la compoſee BAC, & le double rectangle de BA, AF ſont enſemble egaux au quarré de BC auec le double rectangle de BA, AC. Soit oſté le commun double rectangle de BA, AF, & reſtera le quarré de la compoſee BAC egal au quarré de BC auec le rectangle de AB CF: (car
f 1.2. le rectangle de AB, AC eſt egal [f] aux deux rect. de AB, AE, & AB, CF) donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC du double rectangle de AB, CF. Et d'autant que l'angle BAC eſt donné, l'angle
t 13.1. CAE [t] eſt donné. Mais l'angle AEC eſt auſſi donné: donc l'autre angle ACE
u 40.p. eſt donné. Parquoy [u] le triangle ACE eſt donné par eſpece; & partant la
x 5.p. raiſon de CA à AE, c'eſt à dire à AF, eſt donnee: donc [x] la raiſon d'icelle CA à FC eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de la meſme CA à CE eſt donnee: donc [y] la raiſon de CE à CF eſt auſſi donnee. Parquoy la raiſon du
y 8.p. rectangle de EC, AB au rectangle de FC, AB eſt donnee; (car le rectan-
z 1.6. gle eſt au rect. [z] comme CE à CF) & auſſi celle du rectangle de AC, AB au rect. de EC, AB: donc [y] la raiſon du rectangle de FC, AB au rectang. de AC, AB eſt donnee. Mais la raiſon du rectangle de AC, AB au triangle
a 66.p. ABC [a] eſt donnee: donc auſſi la raiſon du double rectangle de FC, AB au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy double rectangle de FC, AB eſt ce dont le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC a raiſon donnee au triangle ABC.



AVTREMENT.

Soit prolongee la ligne BA iuſques au point D, en ſorte que AD ſoit egale à AC, & ſoit menee CD. D'autant que l'angle BAC eſt donné, auſſi chacun des angles ADC, ACD qui eſt moitié d'iceluy ſera donné; & partant l'autre angle DAC eſt auſſi donné: donc [u] le triangle ACD eſt donné par eſpece. Parquoy la raiſon de AC à CD eſt donnee.



Et d'autant que l'angle ADC eſt donné, ſoit fait chacun des angles DEC, AFC † egal à iceluy ADC. Donc puis que l'angle BDC eſt egal à l'angle DEC, & l'angle DBE eſt commun aux triangles DBE, DBC, l'autre angle BDE eſt egal à l'autre angle BCD; & partant le triangle BDE eſt equiangle
b 4.6. au triangle BDC. Donc [b] comme EB à BD, ainſi BD à CB: parquoy le
c 3.2. rectangle de EB, CB, c'eſt à dire [c] le rectangle de EC, CB [c] auec le quarré
d 47.6. de CB, eſt egal [d] au quarré de BD, c'eſt à dire au quarré de la compoſee BAC, car AD eſt egale à AC; & partant le rectangle de EC, CB auec le

quarré de CE, c'eſt à dire le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré du rectangle de BC, CE: Ie dis donc que la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au triangle ABC eſt donnee.

Car d'autant que l'angle BDE eſt egal à l'angle BCD, & l'angle ADC egal à l'angle ACD, l'autre angle CDE eſt egal à l'autre ACB: Mais l'angle DEC eſt auſſi egal à l'angle AFC; donc le reſte CAF eſt egal au reſte DCE. Parquoy le triangle AFC eſt equiangle au triangle DCE; & partant[b] comme CA à AF, ainſi CD à CE; & en permutant, comme AC à CD, ainſi AF à CE. Mais la raiſon de AC à CD eſt donnee: donc auſſi la raiſon de AF à CE eſt donnee. Du poinct A ſoit menee AH perpendiculaire à BC. D'autant que l'angle AFC eſt donné, & l'angle AHF auſſi donné, le troiſieſme HAF eſt donné. Parquoy[c] le triangle AHF eſt donné par eſpece; & par conſequent la raiſon de AF à AH eſt donnee. Mais la raiſon de AF à CE eſt auſſi donnee: donc[f] la raiſon de AH à CE eſt donnee; & partant la raiſon du rectangle de AH, BC[g] au rectangle de BC, CE eſt auſſi donnee. Mais la raiſon du rectangle de AH, BC au triangle ABC eſt pareillement donnee; (car le rectangle[h] eſt double du triangle) & le rectangle de BC, CE eſt-ce dont le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC à raiſon donnee au triangle ABC.

b 4. 6.
c 40. 6.
f 9. 5.
g 1. 6.
h 41. 1.

SCHOLIE.

† *L'ancien Interprete pretendant enſeigner à conſtruire l'angle DEB egal à l'angle ADC, dit qu'on faſſe ſur la ligne droiſte BD, & au poinct D, l'angle BDE egal à l'angle BCD, & qu'on tire les lignes BC, DE iuſques à ce qu'elles s'entrecouppent en E: tellement qu'il ſuppoſe l'angle BCD eſtre donné, & il ne l'eſt pas.*

Le meſme Interprete enſeigne puis apres comment on peut vniuerſellement d'vn poinct donné mener à vne ligne droicte donnee par poſition vne ligne droicte faiſant angle egal à vn angle donné, mais nous delaiſſons auſſi ce moyen là pource que nous en auons enſeigné vn autre beaucoup plus bref & aiſé au 44. de nos Probl. Geometriques. Car par exemple, voulant du poinct donné D mener à la ligne BC donnee par poſition vne ligne droicte faiſant angle egal à l'angle donné ADC, ainſi qu'il eſt icy requis; il n'y a qu'à prendre en icelle BC quelconque poinct K, & à iceluy faire l'angle CKL egal à l'angle donné ADC: Que ſi la ligne KL rencontre le poinct D, elle ſera la ligne requiſe, mais ne le rencontrant pas, ſoit menée d'iceluy poinct D la ligne DE parallele à icelle KL couppant BC prolongé en E, & l'angle DEC ſera egal au donné ADC. Car ſur les deux lignes paralleles LK, DE tombe la ligne BE, & partant l'angle DEC[i] eſt egal à l'angle LKC, qui a eſté fait egal au donné ADC; & par conſequent iceluy DEC eſt auſſi egal à ADC.

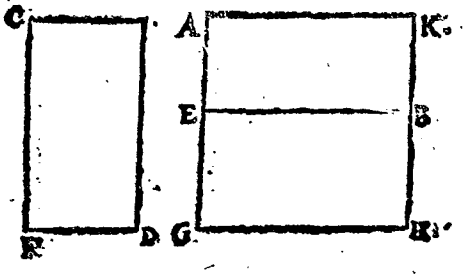
i 29. 1.

PROP. LXVIII.

Si deux parallelogrammes equiangles ont entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait auſſi vne raiſon donnee à vn coſté;

l'autre coſté aura pareillement vne raiſon donnee à l'autre coſté.

Soient deux parallelogrammes equiangles AB, CD ayans entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait à vn coſté vne raiſon donnee, & ſoit la raiſon de BE à FD donnee: Ie dis que la raiſon de AE à FC eſt auſſi donnee.



Car à la ligne droicte EB ſoit appliqué le parallelogramme EH egal à iceluy CD, & conſtitué de ſorte que AE & EG faſſent vne ligne droicte: † donc KB, BH feront auſſi vne ligne droicte. Et d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & que EH eſt egal à iceluy CD; la raiſon de AB à EH eſt donnee; & partant la raiſon de AE à EG [l] eſt auſſi donnee. Veu donc que EH eſt egal & equiangle à CD, comme [m] EB à FD, ainſi FC à EG. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnee: donc auſſi la raiſon de FC à EG eſt donnee. Mais la raiſon de AE à la meſme EG eſt auſſi donnee: donc la raiſon de AE à FC eſt donnee.

l 1. 6. m 14. 6

SCHOLIE.

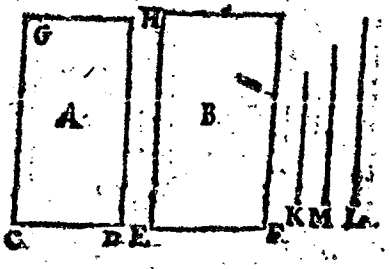
† *Euclide ayant poſé AE, EG directement en vne ſeule ligne droicte, conclud auſſi toſt que KB & BH ſeront auſſi vne ligne droicte, mais nous le demonſtrerons ainſi. D'autant que les lignes droictes AE, EG ſont poſees directement les angles AEB, BEG, [a] ſont egaux à deux droicts. Et puis que AB eſt vn parallelogramme, les lignes AK, EB ſont paralleles, ſur leſquelles tombe la ligne AE, & partant les deux angles interieurs A, BEA [b] ſont auſſi egaux à deux droicts; & oſtant l'angle commun BEA, demeurera l'angle A egal à l'angle BEG, & conſequemment leurs oppoſez EBK & H ſont auſſi egaux entr'eux. Derechef, puis que BG eſt vn parallelog. les deux lignes BE, HG ſont paralleles ſur leſquelles tombe BH: & partant les deux angles interieurs H, EBH [b] ſont egaux à deux droicts. Mais il a eſté demonſtré que H eſt egal à EBK: donc les deux angles EBK, EBH ſont auſſi egaux à deux droicts, & partant [c] les deux lignes KB, BH ſe rencontrent directement comme le dit Euclide.*

a 13. 1. b 29. 1. c 14. 1.

AVTREMENT.

Soit expoſee la ligne droicte donnee K: & puis que la raiſon de A à B eſt donnee, ſoit faicte la meſme de K à L: donc la raiſon de K à L eſt auſſi donnee. Mais K eſt donnee: donc [n] L eſt auſſi donnee. Derechef, puis que la raiſon de CD à EF eſt donnee ſoit faite la meſme de K à M: donc la raiſon de K à M eſt donnee. Mais K eſt donnee: donc [o] M eſt auſſi donnee: & partant la raiſon de L à M eſt donnee. Or d'autant que A eſt equiangle à B, [p] la raiſon d'iceluy A à B, eſt compoſee de celle des coſtez, c'eſt à dire de CD à EF, & de CG à EH. Mais auſſi la raiſon de K à L eſt compoſee de K à M, &

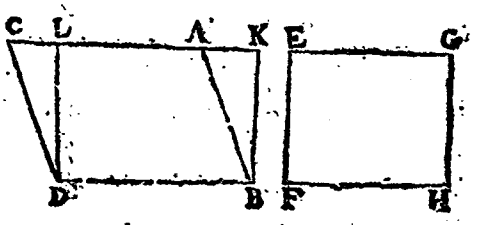
n 2. pr. o 1. pr. p 23. 6.



de M à L : donc la raiſon compoſee de CD à EF, & de CG à EH, eſt la meſme que la compoſee de K à M, & de M à L. (la raiſon de K à L eſtant la meſme que de A à B.) Mais la raiſon de CD à EF eſt la meſme que de K à M : donc l'autre raiſon de CG à EH eſt auſſi la meſme que de M à L. Mais icelle raiſon de M à L eſt donnee : donc auſſi la raiſon de CG à EH eſt donnee.

PROP. LXIX.

Si deux parallelogrammes ayans les angles donnez, ont entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait auſſi vne raiſon donnee à vn coſté ; pareillement l'autre coſté aura vne raiſon donnee à l'autre coſté.



Que les deux parallelogrammes CB, EH ayans les angles aux poincts D & F donnez, ayent entr'eux vne raiſon donnee, & que la raiſon de DB à FH ſoit auſſi donnee : Ie dis que la raiſon de AB à EF eſt donnee.

Car ſi CB eſt equiangle à HE, il eſt manifeſte par la prec. prop. Mais s'il n'eſt equiangle, ſoit conſtitué ſur la ligne droicte DB, & au poinct B donné en icelle l'angle DBK egal à l'angle EFH, & ſoit acheué le parallelogr. DK. D'autant que chacun des angles BKL, BAK, eſt donné, † l'autre angle KBA, eſt donné : Parquoy le triangle [r] ABK eſt donné par eſpece ; & partant la raiſon de AB à BK eſt donnee. Mais la raiſon de CB à EH eſt ſuppoſée donnee, & [t] CB eſt egal à DK : donc la raiſon de DK à EH eſt donnee. Et pour ce que DK eſt equiangle à EH, & la raiſon d'iceluy DK à EH eſt donnee, comme auſſi celle de DB à FH ; [u] la raiſon de BK à FE eſt donnee. Mais la raiſon d'icelle BK à BA eſt auſſi donnee : donc [x] la raiſon de AB à FE eſt donnee.

r 40. p.
t 35. p.
u 68. p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy qu'vn parallelogramme ayant vn angle donné, tous les autres angles ſont auſſi donnez : & tant l'ancien Interprete que le ſieur Hardy en deduiſent les raiſons, qui ſont que l'angle F eſtant donné, l'autre angle E ſera auſſi donné eſtant le reſte de deux droicts, pour ce que ſur les lignes droictes paralleles EG, FH tombe la ligne EF, qui fait* [x] *les deux angles interieurs de meſme part F & E egaux à deux droicts : Mais à iceux angles ſont egaux* [y] *les oppoſez G & H, & partant ils ſont auſſi donnez.*

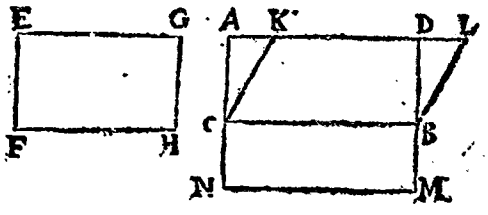
x 29. 1.
y 34. 1.

Dont s'enſuit que les angles BDC & F eſtans donnez par l'hypotheſe, tous les autres angles des deux parallelogr. CB, EH ſont auſſi donnez : partant l'angle DBK ayant eſté faict egal à l'angle F, l'angle K ſera egal à l'angle E, & donné comme iceluy : Mais l'angle BAL, qui eſt oppoſé au donné BDC eſt auſſi donné ; & partant BAK qui eſt le reſte de deux droicts ſera auſſi donné, tellement qu'au triangle ABK les deux angles BAK & BKA ſont donnez, ainſi qu'Euclide le dit icy.

PROP. LXX.

Si de deux parallelogrammes, les costez d'autour angles egaux, ou bien d'autour des inegaux, toutesfois donnez, ont entre eux vne raison donnee; aussi les mesmes parallelogrammes auront entr'eux vne raison donnee.

Soient deux parallelogrammes AB, EH desquels les costez d'autour les angles egaux des poincts F, C, ou d'autour des inegaux, toutesfois donnez ayent entr'eux vne raison donnee, c'est à dire que la raison de AC à EF soit donnee, & aussi celle de CB à FH: Ie dis que la raison de AB à EH est aussi donnee.



Car soit AB equiangle à EH, & sur la ligne droicte CB soit applicqué le parallelogramme CM egal au parallelogr. EH, tellement que AC soit directement à CN, & par consequent DB sera directement[a] auec BM. D'autant donc que CM est equiangle & egal à EH, les costez d'autour les angles egaux seront reciproquement[b] proportionnaux: Parquoy comme BC à HF, ainsi FE à NC. Mais la raison de BC à HF est donnee: donc la raison de FE à NC est aussi donnee. Mais la raison de AC à la mesme EF est donnee: donc[a] la raison de AC à NC est aussi donnee. Parquoy la raison de AB à CM est donnee: (car c'est la mesme[b] que de AC à CN.) Mais CM est egal à EH: donc la raison de AB à EH est donnee.

a *sch.* 68. *p.*

b 14. 6.

a 8. *p.*

b 1. 6.

Maintenant, AB ne soit equiangle à EH, & sur la ligne droicte CB, & au poinct C donné en icelle, soit constitué l'angle BCK egal à l'angle donné F, & soit acheué le parallelogramme CL. D'autant que l'angle ACB est donné, & l'angle BCK aussi donné, le reste ACK est donné: donc le triangle ACK[c] est donné par espece; & partant la raison de AC à CK est donnee: Mais la raison de AC à EF est aussi donnee: donc la raison de CK à EF est donnee. Mais la raison de BC à HF est aussi donnee, & l'angle BCK est egal à l'angle F: donc (par la premiere partie de ceste prop.) la raison de CL à EH est donnee. Mais à iceluy CL est egal AB: donc la raison de AB à EH est donnee.

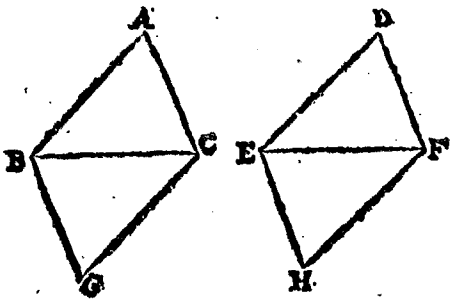
c 40. *p.*

PROP. LXXI.

Si de deux triangles les costez d'autour angles egaux, ou bien d'autour des inegaux, toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee: les mesmes triangles auront aussi entr'eux vne raison donnee.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels les costez d'autour les angles A & D egaux, ou bien inegaux, toutesfois donnez ayent entr'eux vne raison donnee, c'est à sçauoir que la raison de AB à DE soit donnee, & aussi celle de

AC à DF: Ie dis que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee.

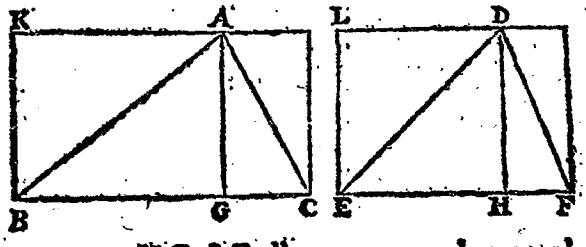


Car ſoient accomplis les parallelogram. AG, DH. Donc puis que des deux parallelog. AG, DH, les coſtez d'autour les angles egaux A & D, ou bien inegaux & toutesfois dõnez, ont entr'eux raiſon donnee; [d] la raiſon d'iceluy AG à DH eſt donnee: Mais le triangle ABC eſt moitié de AG, [e] & le triangle DEF moictié de DH: donc la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee. d 70.p. e 34.1.

PROP. LXXII.

Si de deux triangles, les baſes ſont en raiſon donnee, & que des angles ſoient tirées à icelles baſes des lignes droictes faiſans angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, leſquelles ayent entr'elles raiſon donnee: iceux triangles auront auſſi entr'eux raiſon donnee.

Soient deux triangles ABC, DEF, & ſoient tirées aux baſes les lignes droictes AG. DH, qui faſſent les angles AGC, DHF egaux, ou biẽ inegaux, mais toutesfois donnez; & ſoit la raiſon de BC à EF donnee; mais la raiſon de AG à DH auſſi donnee: Ie dis que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee.



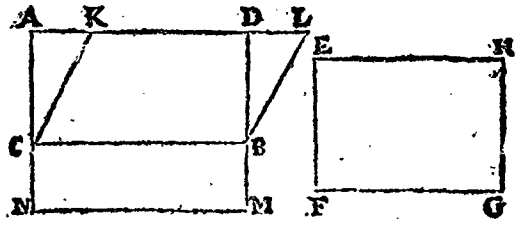
Car ſoient accomplis les parallelogrammes KC, LF. d'autant que les angles AGC, DHF ſont egaux, ou bien inegaux & toutesfois donnez, & que l'angle AGC [f] eſt egal à l'angle KBC, mais l'angle DHF à l'angle LEF: les angles aux poincts B, E ſont egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez. Et pour ce que la raiſon de AG à DH eſt donnee, & AG eſt egale à KB. mais DH à LE: auſſi la raiſon de KB à LE eſt donnee. Mais la raiſon de BC à EF eſt auſſi donnee, & les angles aux poincts B, E ſont egaux ou bien inegaux, & toutesfois dõnez: donc [g] la raiſon du parallelog. KC au parallelog. LF eſt donnee: & partant la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee, attendu qu'iceux triangles [h] ſont moitié des parallelogrammes. f 29. 1. g 70.p. h 41.1.

PROP. LXXIII.

Si de deux parallelogrammes les coſtez d'autour angles egaux, ou bien d'alentour des inegaux, mais toutesfois donnez, ſont tellement entr'eux, que comme le coſté du premier eſt au coſté du ſecond, ainſi l'autre coſté du ſecond, ſoit à quelque autre ligne droicte, mais que l'autre coſté du premier ait

aussi à la mesme ligne droicte vne raison donnee : iceux parallelogrammes auront aussi entr'eux vne raison donnee.

Soient deux parallelogrammes AB, EG, desquels les costez d'autour les angles des poincts C, F egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, soient tellement entr'eux que comme CB à FG, ainsi EF à quelque autre ligne droicte CN, mais la raison de AC à icelle CN soit donnee : Ie dis que la raison du parallellogramme AB au parallelog. EG est donnee.



Car le parallelogramme AB soit premierement equiangle à EG, & ayant posé CN directement à AC, soit acheué le parallelogr. CM. D'autant que comme CB ou NM son egale est à FG, ainsi EF à CN, & que les angles N & F sont egaux; (car N est egal à l'angle ACB qu'on a posé estre egal à F) les parallelogrammes CM, EG i sont egaux. Mais comme AC à CN l ainsi le parallelogr. AB à CM ou EG : partant puis que la raison de AC à CN est donnee; aussi la raison de AB à EG est donnee.

i 14. 6.
l 1. 6.

Maintenant, le parallelogramme AB ne soit equiangle au parallelog. EG, & soit constitué à la ligne droicte CB, & au poinct C donné en icelle, l'angle BCK egal à l'angle EFG, & soit paracheué le parallelog. CL. Donc puis que chacun des angles ACB, KCB est donné, le reste ACK est aussi donné. Mais m l'angle CAK est donné, comme aussi le restant AKC : donc n le triangle ACK est donné par espece; & partant la raison de AC à CK est donnee Mais la raison d'icelle AC à CN est aussi donnee : donc o la raison de CK à CN est donnee. Et puis que comme CB à FG, ainsi EF a la ligne droicte CN, à laquelle l'autre costé KC a raison donnee, & que l'angle BCK est egal à l'angle F, la raison du parallelog. CL au parallelog. EG est donnee, (par la premiere partie de cette prop.) Mais le parallelog. CL est egal au parallelog. AB : donc la raison du parallelog. AB au parallelog. EG est donnée.

m *sch. 69. pr.*
n 40. p.
o 8. p.

PROP. LXXIV.

Si deux parallelogrammes en angles egaux, ou bien en inegaux, mais toutesfois donnez ont vne raison donnee; comme vn costé du premier sera à vn costé du second, ainsi l'autre costé du second sera à celle à laquelle l'autre costé du premier à raison donnee.

Que les deux parallelogrammes AB, EG ayans aux poincts C, F angles egaux ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, soient entr'eux en raison donnee : Ie dis que comme CB à FG, ainsi EF à celle que AC a raison donnee.

Car ou AB est equiangle ou non : soit premierement equiangle, & à la ligne droicte BG soit appliqué le parallelog. CM egal à EG, & tellement posé que

AC

AC, CN soient directement: donc [p] DB, BM seront aussi directement. Et puis que la raison de AB à EG est donnee, & que CM est egal à EG; la raison de AB à CM est aussi donnee: & partant la raison de AC à CN est donnee: (attendu que AB est à CM [q] comme AC à CN.) Et pour ce que CM est egal & equiangle à EG: les costez d'autour les angles egaux d'iceux CM, EG [r] sont reciproquement proportionnaux; & partant comme CB à FG, ainsi EF à CN: Mais la raison de AC à CN est donnee: donc comme CB est à FG, ainsi EF est à celle que AC a raison donnee. (*voyez la figure precedente.*)

p *sch.* 68. 1.

q 1.6.

r 14.6.

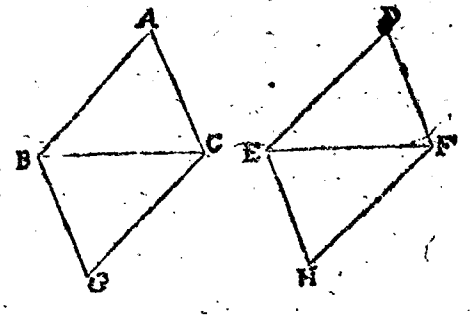
Maintenant, AB ne soit equiangle à EG, & soit constitué à la ligne droicte CB & au poinct C donné en icelle, l'angle BCK egal à EFG, & soit acheué le parallelog. CL. Donc puis que la raison de AB à EG est donnee, & [s] que AB est egal à CL; aussi la raison de CL à EG est donnee, & l'angle BCK est egal à l'angle F: & partant CL [t] est equiangle à EG. Donc (par la premiere partie de cette prop.) comme CB à FG, ainsi EF à celle à laquelle CK a raison donnee. Mais la raison de AC à CK est donnee: (ainsi qu'il appert par ce qui a esté demonstré à la derniere partie de la prec. prop.) donc comme CB à FG ainsi EF à celle que AC a raison donnee.

s 36.1.

t *sch.* 69. 1.

PROP. LXXV.

Si deux triangles en angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee; comme le costé du premier sera au costé du second, ainsi l'autre costé du second sera à cette ligne droicte-là à laquelle l'autre costé du premier a raison donnee.



Soient deux triangles ABC, DEF, qui ayent entr'eux vne raison donnee, & aux poincts A, D, soient angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez: Ie dis que comme AB est à DE, ainsi DF est à celle que AC a raison donnee.

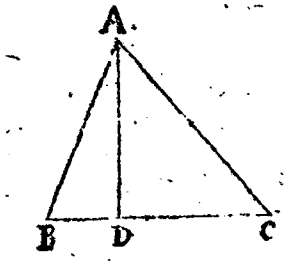
Car soient accomplis les parallelogrammes AG, DH. D'autant que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnee, aussi la raison du parallelog. AG au parallelog. DH est donnee. Veu donc que les deux parallelog. AG, DH en angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee; comme [x] AB est à DE, ainsi DF à celle à laquelle AC a raison donnee.

x 74. 1.

PROP. LXXVI.

Si du sommet d'vn triangle donné par espece est tirée à la base vne ligne perpendiculaire, elle aura à la base vne raison donnee.

Soit le triangle ABC donné par espece, & du poinct A soit tirée à la base BC la perpendiculaire AD: Ie dis que la raison d'icelle AD à BC est donnee.



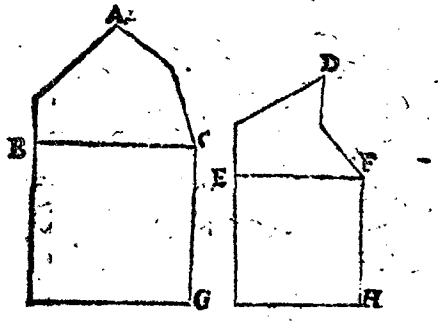
Car puis que le triangle ABC est donné par espece, la raison de AB à BC est donnee, & l'angle B aussi donné. Mais l'angle ADB est donné: Donc l'autre angle
a 40 p. BAD est donné. Parquoy a le triangle ABD est donné par espece; & partant la raison de AB à AD est donnée.
b. 8. pr. Mais la raison de AB à BC est donnee: Donc b la raison de AD à BC est donnee.

PROP. LXXVII.

Si deux figures donnees par especes ont entr'elles vne raison donnee; aussi sera donnee la raison duquel on voudra des costez de l'vne d'icelles figures auquel on voudra des costez de l'autre.

Que les deux figures ABC, DEF donnees par espece ayent entr'elles vne raison donnee: Ie dis que lequel que ce soit des costez de ABC a raison donnee auquel que ce soit des costez de DEF.

Car sur les lignes droictes BC, EF soient descris les quarrez BG, EH. D'autant que sur vne mesme ligne droicte BC sont descriptes deux
c. 49. p. figures ABC, BG donnees par espece c la raison d'icelle ABC à BG est donnee. Semblablement la raison de DEF à EH est donnee. Et puis que la raison de ABC à DEF est donnee, & aussi celle de la mesme figure ABC à BG; & encore la raison de DEF à EH; d la raison de BG à EH est donnee; & partant la raison de BG à EF est aussi donnee.
d. 8. pr.



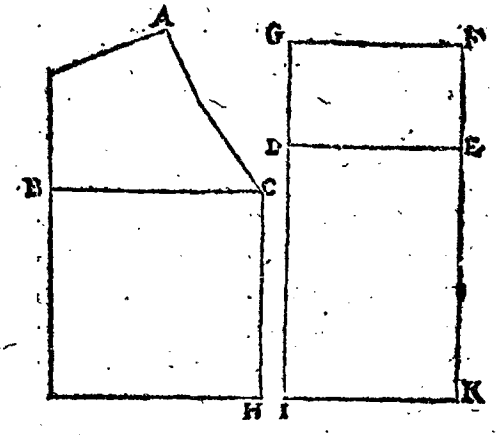
PROP. LXXVIII.

Si vne figure donnee a raison donnee à quelque rectangle, & qu'vn costé ait raison donnee à vn costé; le rectangle est donné par espece.

Que la figure donnee ABC ait raison donnee au rectangle DF, & soit donnee la raison de BC à DE: Ie dis que le rectangle DF est donné par espece.

Car sur la ligne droicte BC soit descrit le quarré BH, & à la ligne droicte DE soit appliqué le parallelogr. DK egal à BH, de telle sorte que GD, DI
e 44. pr. soient posees directement, e & par consequent FE, EK aussi directement.
68. pr. Donc puis que sur vne mesme ligne droicte BC sont descrits les deux rectili-
f 49. p. gnes ABC, BH donnez par espece, f la raison de ABC à BH est donnee. Mais la raison d'icelle ABC à DF est aussi donnee: Donc g la raison de BH à DF est donnee. Mais BH est egal à DK: Donc la raison de DK à DF est aussi

donnee. Et puis que BH eſt egal & equiangle à DK, l'vn & l'autre eſtant rectangle; [g] les coſtez d'iceux ſont reciproquement proportionnaux, & comme BC à DE, ainſi DI à CH. Mais par l'hypotheſe la raiſon de BC à DE eſt donnee: Donc auſſi la raiſon de DI à CH eſt donnee. Mais la raiſon de DI à DG eſt auſſi donnee: (car DI eſt à DG [h] cõme DK à DF) donc [i] la raiſon de DG à CH eſt donnee. Mais CH eſt egale à BC, attendu que BH eſt quarré: Donc la raiſon de BC à DG eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme BC à DE eſt auſſi donnee: Donc [i] la raiſon de DE à DG eſt donnee, & l'angle à D eſt droit: Donc [l] DF eſt donné par eſpece.



g 14.6.

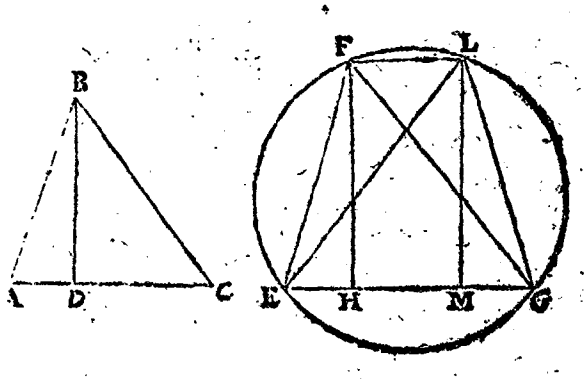
h 1.6.
i 8. pr.

l 5ch. 61. pr.

PROP. LXXIX.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, mais des angles egaux ſoient tirees des perpendiculaires aux baſes, & que comme la baſe du premier triangle eſt à la perpendiculaire, ainſi auſſi la baſe de l'autre ſoit à la perpendiculaire: iceux triangles ſont equiangles.

Soient les triangles ABC, EFG ayans les angles aux poincts B, F egaux, & d'iceux poincts B & F ſoient tirees les perpendiculaires BD, FH; & comme AC à BD, ainſi EG ſoit à FH: Ie dis que le triangle ABC eſt equiangle au triangle EFG.



Car allentour du triangle EFG ſoit deſcrit le cercle EFLG, puis ſur la ligne droicte EG, & au poinct E donné en icelle ſoit fait l'angle GEL egal à l'angle C, & ſoient tirees FL, LG, & la perpendiculaire LM. Veu donc que l'angle GEL eſt egal à l'angle C, & l'angle ELG eſt egal à l'angle EFG, [m] iceux eſtans en vn meſme ſegment de cercle: le troiſieſme angle EGL eſt egal au troiſieſme angle A. Parquoy le triangle ABC eſt ſemblable au triangle ELG, & ſont tirees les perpendiculaires BD, LM: Donc [n] comme AC à BD, ainſi EG à LM. Mais par l'hypoteſe comme AC à BD, ainſi EG à FH: Donc [n] LM eſt egale à FH. Mais icelle LM eſt [o] parallele à FH: Donc [p] FL eſt auſſi parallele à EG; & partant l'angle FLE [q] eſt egal à l'angle LEG. Mais l'angle C eſt auſſi egal à iceluy angle LEG; & l'angle FLE à l'angle [m] FGE: Donc auſſi l'angle C eſt egal à l'angle FGE. Mais par l'hypoteſe l'angle ABC eſt egal à l'an-

m 21. 3.
n 4. 6.
o 28. 1.
p 33. 1.
q 29. 1.

gle EFG: Donc le troiſieſme angle BAC eſt egal au troiſieſme angle FEG. Parquoy le triangle ABC eſt equiangle au triangle EFG.

SCHOLIE.

† *Or que comme AC à BD, ainſi EG ſoit à LM, le ſieur Hardy la demonſtré ainſi. D'autant que l'angle C eſt egal à l'angle GEL, & l'angle BDC à l'angle LME, chacun eſtant droict; l'autre angle CBD eſt egal à l'autre ELM: Donc* [t] *comme EM à ML, ainſi CD à DB. Derechef, pource que l'angle ABC eſt egal à l'angle ELG, & l'angle CBD à l'angle ELM, le reſte ABD eſt egal au reſte MLG: mais l'angle ADB eſt auſſi egal à l'angle LMG, & partant le troiſieſme angle A eſt egal au troiſieſme LGM: Donc* [u] *comme AD à DB, ainſi GM à ML. Mais il a eſté demonſtré que comme CD à DB, ainſi EM à ML: Donc* [ſ] *comme AC à BD, ainſi EG à LM.*

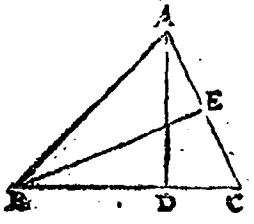
t 4. 6.

ſ 24. 5.

PROP. LXXX.

Si vn triangle a vn angle donné, & que le rectangle ſoubs les coſtez cõprenans iceluy angle donné ait vne raiſon donnee au quarré de l'autre coſté; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC ayant l'angle A donné, & que le rectangle contenu ſoubs AB, AC ait raiſon donnee au quarré de la ligne droicte BC: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car des poincts A & B ſoient menees les perpendiculaires AD, BE. D'autant que l'angle BAE eſt donné, & auſſi l'angle ABE, le triangle ABE eſt donné [x] par eſpece: & partant la raiſon de AB à BE eſt donnee: Donc la raiſon du rectangle de AB, AC, au rectangle de BE, AC eſt auſſi donnee. (Car c'eſt la meſme raiſon [u] que de AB à BE.) Mais le rectangle de AC, BE eſt egal au rectangle de BC, AD, pource que chacun d'iceux rectangles eſt [x] double du triangle ABC: Donc la raiſon du rectangle de AB, AC au rect. de BC, AD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon du rectangle de AB, AC au quarré de BC eſt donnee: Donc [y] auſſi la raiſon du rectangle de BC, AD au quarré de BC eſt donnee; & partant la raiſon de la ligne droicte BC à la ligne droicte AD eſt donnee. (Pource que [u] le rectangle eſt au quarré, comme AD à BC.) Maintenant ſoit expoſee la ligne droicte FG donnee par poſition & par grandeur, & ſur icelle ſoit deſcrit le ſegment de cercle FIG capable d'vn angle egal à l'angle A. Et puis que iceluy angle A eſt donné, auſſi ſera donné l'angle au ſegment FIG; & partant [z] iceluy ſegment eſt donné par poſition. Du poinct G ſoit erigee à angles droicts ſur FG la ligne GH; laquelle [a] eſt dont donnee par poſition. Soit fait que comme BC eſt à AD, ainſi FG ſoit à GH & puis que la raiſon de BC à AD eſt donnee, auſſi le ſera celle de IG à GH. Mais FG eſt donnee: Donc [b] GH eſt donnee par grandeur. Mais elle eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct G eſt donné: Donc le poinct H eſt [c] auſſi donné. Maintenant par le poinct H ſoit menee HI parallele à FG: & icelle ſera donnee [d] par poſition. Mais le ſegment de cercle FIG eſt auſſi donné par poſition: Donc [e] le

x 40. p.

u 1. 6.

x 41. 1.

y 8. p.

z 8. def.

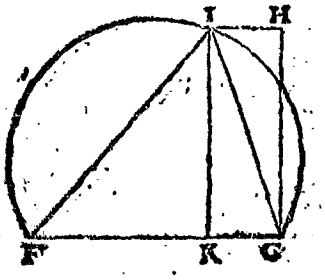
a 4. def.

b 2. p.

c 27. p.

d 28 p.

e 25. p.

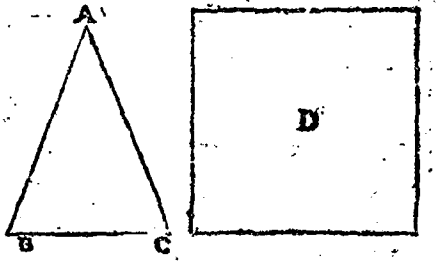


poinct I eſt donné. Soient tirées les lignes droictes IF, IG, & la perpendiculaire IK: Donc IK eſt donnee par poſition. Mais le poinct I eſt donné, comme auſſi chacun des poincts F, G: Donc[f] chacune des lignes, FG, FI, IG eſt donnée par poſition & par grandeur. Parquoy[g] le triangle FIG eſt donné par eſpece. Et puis que comme BC à AE ainſi FG à GH, & qu'[h] à icelle GH eſt egale IK; comme BC à EA, ainſi FG à IK; & l'angle A eſt egal à l'angle FIG: Donc[i] le triangle ABC eſt equiangle au triangle FIG. Mais iceluy FIG eſt donné par eſpece: Donc auſſi le triangle ABC eſt donné par eſpece.

f 26. p.
g 39. p.
h 34. 1.
i 79. p.

AVTREMENT.

Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle A donné, & la raiſon du rectangle ſoubs AB, AC au quarré de BC ſoit donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



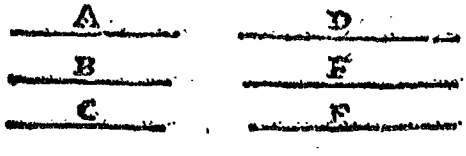
Car puis que l'angle A eſt donné, cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC[l] a raiſon donnee au triangle ABC: Or cet eſpace là ſoit D. Donc la raiſon d'iceluy D au triangle ABC eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy triangle ABC au rectangle de AB, AC eſt donnee, [m] veu que l'angle A eſt donné. Donc[n] la raiſon de l'eſpace D au rectangle de AB, AC eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de AB, AC au quarré de BC eſt auſſi donnee: Donc[o] la raiſon de l'eſpace D au quarré de BC eſt donnee: Parquoy en compoſant,[o] la raiſon de l'eſpace D auec le quarré de BC à iceluy quarré de BC eſt donnee: Donc la raiſon du quarré de la compoſee BAC au quarré de BC eſt donnee; (pource que l'eſpace D auec le quarré de BC eſt egal à iceluy quarré de la compoſee BAC) & parrant[p] la raiſon d'icelle compoſee BAC à BC eſt donnee. Mais l'angle A eſt auſſi donné: Donc[q] le triangle ABC eſt donné par eſpece.

l 67. p.
m 66. p.
n 8. pr.
o 6. pr.
p ſcho. 52. pr.
q 46. p.

PROP. LXXXI.

Si de trois lignes droictes proportionnelles à trois lignes droictes proportionnelles, les extremes ſont en raiſon donnee, auſſi les moyennes ſeront en raiſon donnee: Et ſi vn extreme a raiſon donnee à vn extreme, & la moyenne à la moyenne; l'autre aura auſſi à l'autre vne raiſon donnee.

Que les trois lignes droictes A, B, C, ſoient proportionnelles à trois lignes droictes proportionnelles D, E, F, & que les extremes ſoient en raiſon donnee, c'eſt à ſçauoir que A ſoit à D, & C à F en raiſon donnee. Ie dis que la raiſon de B à E eſt donnee.



Car d'autant que la raiſon de A à D, & de C à F eſt donnee, le rectangle de A, D[r] aura raiſon donnee au rectangle de C, F. Mais le rectangle de A, D, eſt egal[s] au quarré de B; & le rectangle de C, F au quarré de E: Donc la raiſon

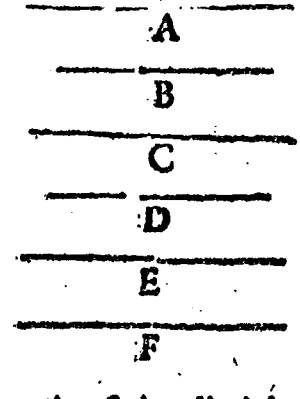
r 70. p.
s 17. 6.

du quarré de B au quarré de E eſt donnee, & partant [f] la raiſon de la ligne B à la ligne E eſt auſsi donnee. [f] 5ch. 52. pr.

Derechef, ſoit donnee la raiſon de A à D, & de B à E: Ie dis que la raiſon de C à F eſt auſſi donnee. Car puis que la raiſon de A à D, & de B à E eſt donnee; auſſi la raiſon du quarré de B [t] au quarré de E eſt donnee. Mais le quarré de B eſt egal au rectangle de A, C, & le quarré de E au rect. de D, F: Donc la raiſon du rectangle de A, C au rect. de D, F eſt donnee. Mais la raiſon d'vn coſté A à vn coſté D eſt donnee: Donc [u] la raiſon de l'autre coſté C à l'autre coſté F eſt auſſi donnee. [t] 50. p. [u] 68. p.

PROP. LXXXII.

S'il y a quatre lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à celle à laquelle la ſeconde a raiſon donnee, ainſi la tierce ſera à celle à laquelle la quatrieſme a raiſon donnee

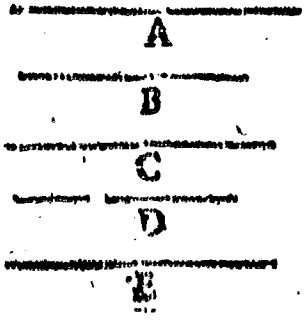


Soient quatre lignes droictes proport. A, B, C, D; & ſoit A à B, comme C à D: Ie dis que comme A eſt à celle que B a raiſon donnee, ainſi C eſt à icelle à laquelle D a raiſon donnee.

Car E ſoit celle à laquelle B a raiſon donnee; & ſoit faict que comme B eſt à E ainſi D ſoit à F. Or la raiſon de B à E eſt donnee: Donc eſt auſſi donnee la raiſon de D à F. Et puis que comme A à B, ainſi C à D, & en outre comme B à E ainſi D à F; par raiſon egale comme A à E, ainſi C à F. Mais E eſt celle à laquelle B a raiſon donnee, & F celle à laquelle D a auſſi raiſon donnee: Donc comme A eſt à celle à laquelle B a raiſon donnee, ainſi C eſt à celle à laquelle D a raiſon donnee.

PROP. LXXXIII.

Si quatre lignes droictes ſont tellemẽt entr'elles, que de trois d'icelles qu'elles ſoient, & d'vne quatrieſme priſe proportionnelle à laquelle celle qui reſte des quatre lignes ait vne raiſon donnee, ſe faſſent quatre lignes droictes proportionnelles: comme la quatrieſme ſera à la tierce, ainſi la ſeconde ſera à celle à laquelle la premiere a raiſon donnee.



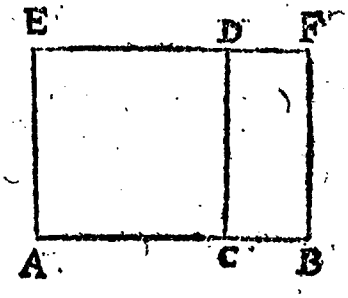
Soient quatre lignes droictes A, B, C, D, telles qu'ayãt pris E quatrieſme proportionnelle à trois quelconques d'icelles A, B, C, à laquelle D a raiſon donnee, icelles quatre lignes A, B, C, E ſont proportionnelles: Ie dis que comme D à C, ainſi B à celle que A a raiſon donnee.

Car d'autant que comme A à B, ainſi C à E, le rectangle contenu ſous A, E eſt [x] egal à celuy compris ſous B, C. Et puis que la raiſon de D à E eſt donnee, auſſi ſera [x] 16. 6.

donnee la raiſon du rectangle de A, D au rectangle de A E (car [b] c'eſt la meſme raiſon que de D à E.) Mais le rectangle de A, E, eſt egal à celuy de B, C. Donc la raiſon du rectangle de A, D à celuy de B, C eſt donnee. Parquoy [c] comme D eſt à C, ainſi B à celle à laquelle A a vne raiſon donnee. [b] 1. 6. [c] 74. p.

PROP. LXXXIV. [d] 74. p.

Si deux lignes droictes comprenent vn eſpace donné en angle donné, & que l'vne ſoit plus grande que l'autre d'vne donnee, auſſi chacune d'icelles ſera donnee.

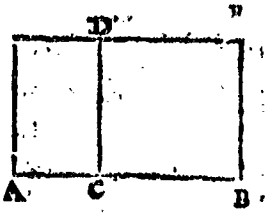


Que les deux lignes droictes AB, AE comprenent vn eſpace donné AF en angle donné BAE, & ſoit AB plus grande que AE d'vne donnee CB: Ie diſque chacune des lignes AB, AE, eſt donnee.

Car puis que AB eſt plus grande que AE de la donnee CB, le reſte AC eſt egal à AE: Soit accomply le parallelogr. AD. Donc puis que AE eſt egale à AC, la raiſon de AE à AC eſt donnee; & l'angle A eſt auſſi donné: Donc [e] AD eſt donné par eſpece. Parquoy l'eſpace donné AF eſt appliqué à la ligne droicte donnee CB, excedant de la figure AD donnee par eſpece; & partant [f] la largeur de l'excez eſt donnee: Donc AC eſt donnee. Mais CB eſt auſſi donnee: Donc la toute AB eſt donnee. Mais AE eſt auſſi donnee: Donc chacune des lignes droictes AB, AE eſt donnee. [e] ſcb. 61. p. [f] 59. p.

PROP. LXXXV.

Si deux lignes droictes comprenant vn eſpace donné en angle donné, la compoſee d'icelles eſt donnee; auſſi chacune d'icelles ſera donnee.

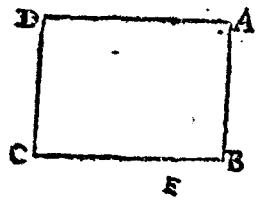


Soient deux lignes droictes AC, CD comprenant vn eſpace donné AD en angle donné ACD, & la compoſee d'icelles lignes ACD ſoit donnee: Ie dis que chacune deſdictes lignes AC, CD eſt donnee.

Car ſoit prolongee AC, iuſques au poinct B, & poſé CB egale à CD, puis par le poinct B ſoit menee BF parallele à CD, & acheué le parallelogramme CF. Veu donc que CB eſt egale à CD, & l'angle DCB eſt donné; car celuy qui eſt de ſuitte eſt le donné; & partant [g] le parallelogr. DB eſt donné par eſpece: & en outre puis que la compoſee ACD eſt donnee, & CB eſt egale à CD; auſſi AB eſt donnee. Par ainſi à la ligne droicte AE eſt appliqué l'eſpace donné AD defaillant de la figure DB donnee par eſpece; & partant [h] les largeurs du deffaut ſont donnees: Donc les lignes droictes DC, CB ſont donnees. Mais la compoſee ACD eſt auſſi donnee: Donc [i] chacune des lignes AC, CD eſt donnee. [g] 58. p. [h] 4. p.

PROP. LXXXVI.

Si deux lignes droictes comprenant vn eſpace donné en angle donné, le quarré de l'vne eſt plus grand que le quarré de l'autre d'vn donné, qu'en raiſon; auſſi chacune d'icelles ſera donnee.



Soient deux lignes droictes AB, BC comprenant l'eſpace donné AC en angle donné ABC, & le quarré de la ligne BC ſoit plus grand que le quarré de AB d'vn donné qu'en raiſon: Ie dis que chacune des lignes AB, BC eſt donnee.

Car puis que le quarré de BC eſt plus grand que le quarré de AB d'vn eſpace donné qu'en raiſon, ſoit oſté le donné, c'eſt à ſçauoir le rectangle ſous CB, BE: Donc[i] la raiſon du reſte,[d] qui eſt le rectangle ſous BC, CE au quarré de AB eſt donnee. Et d'autant que le rectangle, † ſous AB, BC eſt donné, & auſſi celuy de CB, BE;[m] leur raiſon eſt donnee. Mais comme le rectangle ſous AB, BC au rectangle ſous CB, EB,[n] ainſi AB à BE; & partant la raiſon de AB à BE eſt donnee: Parquoy eſt auſſi donnee la raiſon[o] du quarré de AB au quarré de BE. Mais la raiſon du quarré de AB au rectangle ſous BC, CE eſt donnee: Donc[p] auſſi eſt donnee la raiſon du rectangle ſous BC, CE au quarré de BE. Parquoy la raiſon de quatre fois le rectangle ſous BC, CE au quarré de BE eſt donnee; & en compoſant,[q] la raiſon de quatre fois le rectangle ſous BC, CE, auec le quarré de BE au quarré de BE eſt donnee. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE, auec le quarré de BE,[r] eſt le quarré de la compoſee BCE: Donc la raiſon du quarré de la compoſee BCE au quarré de BE eſt donnee: Parquoy[f] la raiſon de la compoſee de BC, CE à BE eſt donnee; & en compoſant,[q] la raiſon de la compoſee des lignes BC, CE, BE, c'eſt à dire le double de BC, à BE eſt donnee; & partant la raiſon[t] de la ſeule BC à BE eſt auſſi donnee. Mais comme BC à BE,[t] ainſi le rectangle ſous BC, BE au quarré de BE: Donc la raiſon du rectangle ſous BC, BE au quarré de BE eſt donnee. Mais le rectangle de BC, BE eſt donné: Donc[u] le quarré de BE eſt auſſi donné, & conſequemment la ligne BE eſt donnee. Parquoy BC eſt auſsi donnee[x], puis que la raiſon de BE à BC eſt donnee. Mais l'eſpace AC eſt donné, & auſsi l'angle B: Donc[x] AB eſt donnée. Parquoy chacune des lignes AB, BC eſt donnee.

i 11. d. d 2. 2. m 1. 6. n 2. 6. o 50. p. p 8. pr. q 6. pr. r 8. 2. f 54. p. q 2. 6. t 2. 6. u 2. pr. x 57. p.

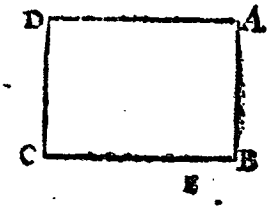
SCHOLIE.

† *Au lieu de dire icy* ce qui eſt ſous *&c. nous auons vſé du mot* rectangle, *eſtant manifeſte par la ſuite de ceſte demonſtration que l'intenſion d'Euclide eſt telle, puis qu'il ſe ſert en ladicte demonſtration des deux & huictieſmes propoſitions du deuzieſme element: & auſsi que l'eſpace ou parallelogramme donné n'eſtant rectangle, il y peut-eſtre reduit faiſant ſur BC, & au poinct de l'angle donné B, vn angle droict CBA, tellement qu'on auroit deux parallelogrammes conſtituez ſur vne meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles, ainſi qu'en la 69. prop. au moyen de laquelle ſe tireroit la concluſion de ceſte-cy.*

Cecy a auſsi lieu à la propoſition ſuiuante.

PROP. LXXXVII.

Si deux lignes droictes comprenant vn eſpace donné en angle donné, le quarré de l'vne eſt plus grand que le quarré de l'autre d'vn donné; auſſi chacune d'icelles ſera donnee.



Soient deux lignes droictes AB, BC, comprenant vn eſpace donné AC en angle donné B, & le quarré de BC ſoit plus grand que le quarré de AB d'vn donné: Ie dis que chacune d'icelles AB, BC eſt donnee.

Car puis que le quarré de BC eſt plus grand que le quarré de AB d'vn eſpace donné, ſoit oſté le donné, & ſoit le rectangle ſous BC, BE: Donc le reſte, [f] qui eſt le rectangle de BC, CE, eſt egal au quarré de AB. Et puis que le rectangle de BC, BE eſt donné, & auſſi l'eſpace ou rectangle AC; la raiſon d'iceluy rectangle de BC, BE à AC eſt donnee. Mais comme [a] le rectangle de BC, BE au rectangle de AB, BC, ainſi BE à AB: Donc la raiſon de BE à AB eſt donnee; & partant [b] eſt auſſi donnee la raiſon du quarré d'icelle BE au quarré de AB. Mais à iceluy quarré de AB eſt egal le rectangle de BC, CE: Donc la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE eſt donnee; & partant eſt auſſi donnee la raiſon du quadruple d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE. Et en compoſant, [c] la raiſon de quatre fois le rectangle de BC, CE auec le quarré de BE à iceluy quarré de BE eſt donnee. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE auec le quarré de BE [d] eſt le quarré de la compoſee BCE: Donc la raiſon du quarré d'icelle compoſee BCE au quarré de BE eſt auſſi donnee; & partant [e] la raiſon de la compoſee BCE à BE eſt donnee. Parquoy en compoſant, [f] eſt auſſi donnee la raiſon d'icelles BCE, EB, c'eſt à dire deux fois BC à BE: Donc la raiſon de la ſeule BC à BE eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme BE à AB eſt auſſi donnee: Donc [g] la raiſon de AB à BC eſt donnee. Et puis que la raiſon de BC à BE eſt donnee, & que comme icelle BC à BE, ainſi le quarré de BC [h] au rectangle de BC, BE; la raiſon du quarré de BC au rectangle de BC, BE eſt auſſi donnee. Mais iceluy rectangle de BC, BE eſt donné, car c'eſt ce qui a eſté oſté qui eſtoit donné: Donc le quarré de BC [b] eſt donné; & partant eſt donnee la ligne BC. Mais la raiſon d'icelle BC à BA eſt donnee. Donc AB eſt auſſi donnee.

f 2. 2.

a 1. 6.

b 50. d.

c 6. pr.

d 8. 2.

e 54. d.

f 6. pr.

g 8. pr.

h 2. pr.

PROP. LXXVIII.

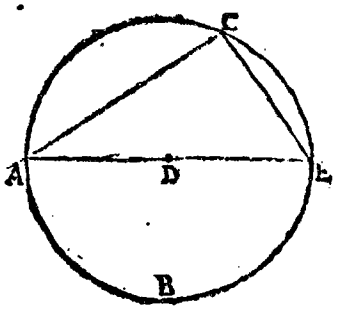
Si en vn cercle donné par grandeur eſt tiree vne ligne droicte laquelle oſte vn ſegment qui comprent vn angle donné; icelle ligne eſt donnee par grandeur.

Au cercle ABC donné par grandeur, ſoit tiree la ligne droicte AC oſtant le ſegment ABC qui comprent l'angle donné AEC: Ie dis que la ligne AC eſt donnee par grandeur.

Car ſoit pris le centre du cercle D, tiré le diametre ADE, & ioinct EC Donc

l angle ACE est donné, car l il est droit : Mais l'angle AEC est aussi donné ; & partant l'autre angle CAE est donné. Parquoy le triangle ACE m est donné par espece ; & partant la raison de EA à AC est donnee. Mais AE est donnee par grandeur, puis que le cercle ABC est donné par grandeur : Donc n AC est aussi donnee par grandeur.

l 31. 3.
m 40 p.
n 2. pr.



PROP. LXXXIX.

Si en vn cercle donné par grandeur, est tiree vne ligne droicte donnee par grandeur ; elle ostera vn segment comprenant vn angle donné.

Au cercle ABC donné par grandeur soit tiree la ligne droicte AC donnee par grandeur : *(voyez la figure precedente)* Ie dis qu'elle oste vn segment qui comprent vn angle donné.

Car ayant pris le centre du cercle D, soit tiré le diametre ADE, & la ligne droicte EC. D'autant que chacune des lignes droictes AE, AC est donnee, la raison d'icelle AE à AC o est donnee ; & l'angle ACE est droict : Donc p le triangle ACE est donné par espece, & partant l'angle AEC est donné.

o 1. pr.
p 41. p.

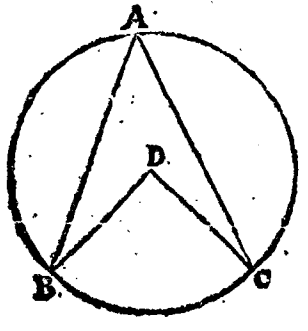
PROP. XC.

Si en la circonference d'vn cercle donné par position, & par grandeur on prend vn poinct donné, & que d'iceluy poinct à la circonference du cercle se flechisse vne ligne droicte faisant vn angle donné ; l'autre extremité d'icelle ligne flechie sera donnee.

En la circonference du cercle ABC donné par position & par grandeur soit pris vn poinct donné B, & d'iceluy poinct B soit flechie ou brisee à la circonference la ligne droicte BAC, qui face l'angle BAC donné : Ie dis que le poinct C est donné.

Car soit pris le centre du cercle D, & tirees les lignes BD, CD. D'autant que chaque poinct B, D est donné, la ligne droicte BD q est donnee par position : & veu que l'angle BAC est donné, l'angle BDC est aussi donné. Parquoy à la ligne droicte BD donnée par position, & au poinct D donné en icelle est menee la ligne droicte CD qui faict l'angle donné BDC : & partant r la ligne DC est donnee par position. Mais le cercle ABC est donné par position & grandeur : Donc s la ligne droicte DC est donnee par position, & par grandeur. Mais le poinct D est donné : Donc t le poinct C est aussi donné.

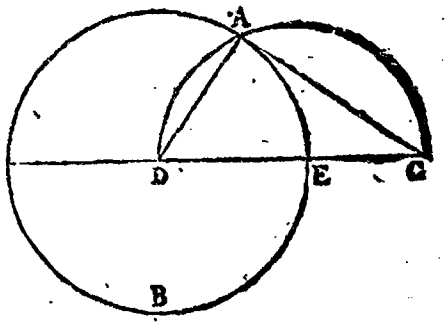
q 26. p.
r 29. p.
s def.
t 27. p.



PROP. XCI.

Si d'vn poinct donné est tiree vne ligne droicte qui touche vn cercle donné par position; icelle ligne est donnee par position & par grandeur.

D'vn poinct donné C soit menee la ligne droicte CA touchant le cercle AB donné par position: Ie dis qu'icelle ligne droicte AC est donnee par position & par grandeur.

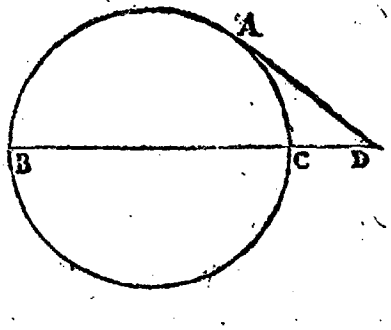


Car ayant pris le centre du cercle D, soient tirees les lignes droictes DA, DC. D'autant que chaque poinct C, D est donné, la ligne droicte CD [a] est donnee par position & par grandeur. Mais l'angle CAD [x] est droict; & partant [z] le demy cercle descrit sur CD passera par le poinct A: Qu'il y passe donc, & soit DAC: D'autant qu'iceluy DAC [y] est donné par position, & aussi le cercle ABE, [a] le poinct A est donné. Mais le poinct C est aussi donné: Donc [b] la ligne droicte AC est donnée par position & par grandeur.

a 26.p.
x 18.3.
z sch. 31.3.
y 6.def.
a 25.p.
b 26.p.

PROP. XCII.

Si hors vn cercle donné par position, on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct donné soit tiree quelque ligne droicte couppant le cercle; le rectangle compris sous toute la ligne & la partie d'entre le poinct & la circonference conuexe sera donné.



Hors le cercle ABC donné par position soit pris quelque poinct, c'est à sçauoir D, duquel soit menee la ligne droicte DB couppant le cercle: Ie dis que le rectangle soubs BD, DC est donné.

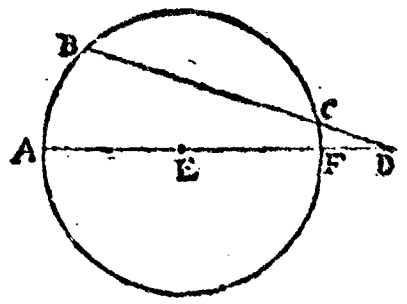
Car du poinct D soit menee la ligne droicte DA qui touche le cercle en A: Donc icelle DA [c] est donnee par position & par grandeur; & partant le quarré d'icelle DA [d] est donné. Mais iceluy quarré de DA est egal [e] au rectangle de BD, DC: Donc iceluy rectangle de BD, DC est aussi donné.

c 91.N
d 52.p.
e 36.3.

AVTREMENT.

Soit pris le centre du cercle E, & par iceluy soit tiree de D la ligne droicte

DA. D'autant que chaque poinct D, E eſt
f 26. p. donné, la ligne droicte DE f eſt donnee par poſition & par grandeur. Mais le cercle ABC eſt auſſi donné par poſition & par grandeur:
g 25. p. Donc chaque point A, F g eſt donné; & le poinct D eſt auſſi donné; & partant f chaque ligne AD, FD eſt donné. Parquoy le rectangle d'icelles AD, DF eſt auſſi donné. Mais iceluy rectangle de AD, DF eſt egal h au re-
h Cor. 36. 3. ctangle de DB, DC: Donc le rectangle de DB, DC eſt donné.

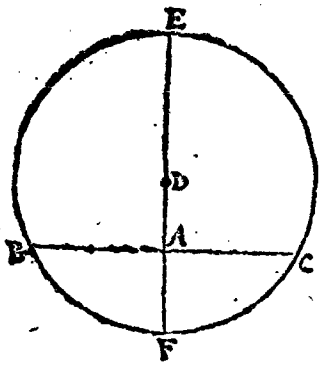


PROP. CXIII.

Si dans vn cercle donné par poſition on prend quelque poinct donné, & par iceluy on tire quelque ligne droicte au cercle; le rectangle compris ſoubs les ſegmens d'icelle ligne ſera donné.

Dans vn cercle donné par poſition ſoit pris quelque poinct donné A, & par iceluy ſoit tiree la ligne droicte BC: Ie dis que le rectangle contenu ſoubs AB, AC eſt donné.

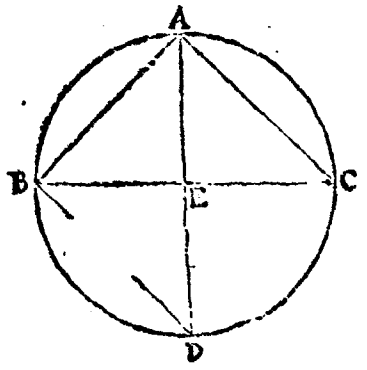
Car ſoit pris le centre du cercle D, & ayant tiré la ligne droicte AD ſoit prolongee iuſques aux poincts E, F. D'autant que chaque poinct A, D eſt donné,
i 28. p. la ligne droicte AD i eſt donnee par poſition. Mais le cercle BEC eſt auſſi donné par poſition: donc chaque poinct E, F eſt auſſi donné par poſition; & le poinct A eſt donné. Parquoy chaque ligne l AE, AF eſt donnee: Donc le rectangle d'icelles AE, AF eſt donné; & eſt egal au
l 35. 3. rectangle l de AB, AC; partant iceluy rectangle de AB, AC eſt donné.



PROP. XCIV.

Si dans vn cercle donné par grandeur eſt tiree vne ligne droicte, laquelle oſte vn ſegment qui comprenne vn angle donné, & qu'iceluy angle eſtant au ſegment ſoit couppé en deux egallement: la compoſee des lignes droictes qui comprenant l'angle donné aura raiſon donnée à la ligne qui couppe iceluy angle en deux également; & le rectangle contenu ſoubs la compoſee d'icelles lignes comprenant l'angle donné, & la partie d'icelle ligne couppante

qui eſt au deſſous du ſegment entre la baſe & la circonference ſera donné.



Au cercle ABC donné par grandeur ſoit tiree vne ligne droicte BC, laquelle oſte vn ſegment qui comprenne l'angle donné ABC, & iceluy angle ſoit couppé en deux egalement par la ligne droicte AD: Ie dis que la raiſon de la compoſee des lignes droictes BA, AC, c'eſt à dire BAC à AD eſt donnee; & auſſi que le rectangle contenu ſoubs la compoſee BAC & la ligne droicte ED eſt donné.

Soit menee BD. D'autant que dans le cercle ABC donné par grandeur eſt tiree la ligne droicte BC, qui oſte le ſegment BAC comprenant vn angle donné BAC; icelle ligne BC [m] eſt donnee: & partant BD eſt auſſi donnee: Donc la raiſon d'icelle BC à BD [n] eſt donnee. Et puis que l'angle donné BAC eſt couppé en deux egalement par la ligne droicte AD; [o] comme BA à CA, ainſi BE à CE; & en compoſant, comme BAC à CA, ainſi BC à CE: & en permutant, comme BAC à BC, ainſi CA à CE. Et veu que l'angle BAE eſt egal à l'angle CAE, & l'angle ACE [p] à l'angle BDE; l'autre angle AEC eſt egal à l'autre angle ABD; & partant le triangle ACE eſt equiangle au triangle ABD: Donc [r] comme AC à CE, ainſi AD à BD. Mais comme AC à CE, ainſi la compoſee BAC à BC: Donc comme la compoſee BAC à BC, ainſi AD à BD; & en permutant, comme la compoſee BAC à AD, ainſi BC à BD. Mais la raiſon d'icelle BC à BD eſt donnee: Donc la raiſon de la compoſee BAC à AD eſt auſſi donnee. Ie dis en outre que le rectangle ſoubs icelle compoſee BAC & ED eſt donné. Car d'autant que le triangle AEC eſt equiangle au triangle BDE, (car l'angle ACE [p] eſt egal à l'angle BDE, & l'angle AEC [q] à l'angle BED) comme BD à DE, ainſi AC à CE. Mais comme AC à CE, ainſi eſt auſſi la compoſee BAC à BC: Donc [r] comme la compoſee BAC eſt à BC, ainſi BD à DE. Parquoy le rectangle d'icelle compoſee BAC & DE [s] eſt egal au rectangle de BC, BD. Mais iceluy rectangle de BC, BD eſt donné: (pour ce qu'icelles lignes BC, BD ſont donnees) donc le rectangle ſous la compoſee BAC & ED eſt auſſi donné.

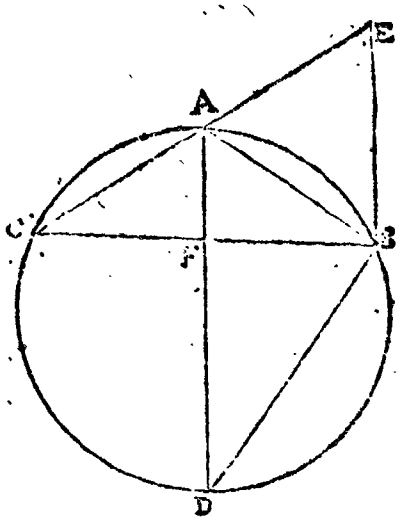
m 88. p.
n 1 pr.
o 3 6.
p 21. 3.
r 4. 6.
q 15. 1.
s 16. 6.

AVTREMENT.

Soit prolongee CA iuſques au poinct E, & poſé AE egale à BA, & ſoient conioincts BE, BD. D'autant que l'angle BAC eſt double de chacun des angles CAD, AEB; (car iceluy BAC eſt couppé en deux egalement par AD, & egal [t] aux deux angles ABE, AEB, qui ſont [u] egaux) l'angle ABE eſt egal à l'angle CAD, c'eſt à dire [x] à l'angle CBD: adiouſtant donc l'angle commun ABC, l'angle total ABD ſera egal au total FBE. Mais l'angle ACB [x] eſt egal à l'angle ADB: Donc le troiſieſme angle AEB eſt egal au troiſieſme BAD; & partant le triangle CEB eſt equiangle au triangle ABD: Parquoy comme CE à CB, ainſi AD à BD. Mais la ligne droicte CE eſt compoſee des deux CA,

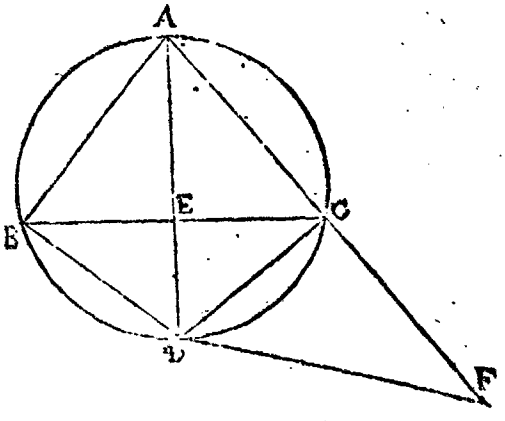
t 32. 1.
u 5. 1.
x 21. 3.

AB: Donc comme la composee BAC est à CB ainsi AD à BD; & en permutant, comme la composee BAC est à AD, ainsi CB à BD. Mais la raison de CB à BD est donnee, attendu que chacune d'icelles lignes est donnee: Donc la raison de la composee BAC à AD est aussi donnee. Et puis que le triangle CEB est equiangle au triangle FBD: (car
y 15. 1. l'angle AFC est egal y à l'angle BFD & l'an-
x 21. 3. gie ECB x à l'angle ADB) comme EC à CB ainsi BD à DF. Mais EC est egale à la composee BAC: Donc comme la composee BAC
z 16. 6. est à CB, ainsi BD à DF. Parquoy z le rectangle de la composee BAC & DF est egal au rectangle de CB & BD. Mais iceluy rectangle de CB, BD est donné, attendu que chacune des lignes CB, BD est donnee: Donc le rectangle de la composee BAC & DF est donné.



AVTREMENT.

Soit prolongee AC iusques en F, & pose CF egale à AB, & soient menees BD, DF. D'autant que BA est egale à
a 26. & 29. 3. CF, & a BD à DC; les deux costez AB, BD sont egaux aux deux CD, DF, chacun au sien, & l'angle ABD est egal à
b 22. 3. & 13. 1. l'angle DCF; b puis que le quadrilatere ABDC est dans le cercle: Donc la
c 4. 1. base AD est c egale à la base DF, & l'angle DAB à l'angle DFC. Mais iceluy angle BAD est donné: (car c'est la moitié du donné BAC.) Donc l'angle DFC l'est aussi. Mais DAF est aussi donné: Donc le triangle ADF est donné par espece. Parquoy la raison de FA à AD est donnee. Mais AF est la composee de BA, AC, attendu que CF est egal à AB: Donc la raison de la composee BAC à AD est donnee. Or par mesme raison que dessus nous demonstrerons que le rectangle contenu soubs la composee BAC & ED est donné.

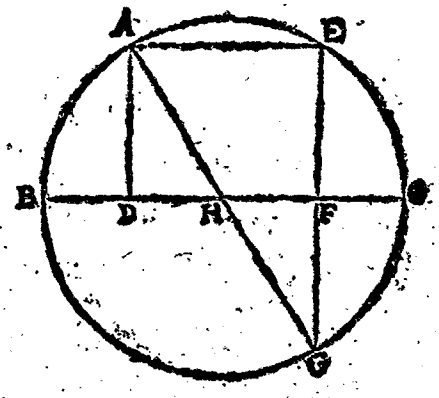


PROP. XCV.

Si au diametre d'vn cercle donné par position on prend vn poinct donné, & que d'iceluy poinct on tire quelque ligne droicte à la circonference du cercle, mais que de la section d'icelle on mene vne ligne droicte perpendiculaire à cette-là, & par le poinct auquel ceste perpendiculaire rencontre-

ra la circonference on mene vne parallele à la premiere ligne tiree: ce poinct là auquel la parallele rencontre le diametre eſt donné, & le rectangle contenu ſoubs les lignes paralleles eſt auſſi donné.

Soit le cercle ABC donné par poſition, & ſon diametre BC, auquel ſoit pris le poinct donné D, & d'iceluy ſoit tiree la ligne droicte DA couppant la circonference en A, duquel ſoit menee la ligne droicte AE perpendiculaire à DA, & par le poinct E où elle rencontre la circonference ſoit menee EF parallele à AD: Ie dis que le poinct F eſt donné, & auſſi le rectangle compris ſoubs AD, EF.



Car ſoit prolongee la ligne droicte EF iuſques au poinct G, & tiree la ligne droicte AG. D'autant que l'angle AEG eſt droict, la ligne droicte AG eſt diametre du cercle. Mais BC eſt auſſi diametre: Donc le poinct H eſt le centre du cercle. Or le poinct D eſt donné: & partant a la ligne DH eſt donnee par grandeur. Mais puis que AD eſt parallele à EG, & AH egale à GH; b DH eſt egale à FH & AD à FG: (car les angles AHD, FHG c ſont egaux, & DAH, FGH d auſſi egaux.) Mais la ligne DH eſt donnee: Donc FH eſt auſſi donnee. Mais vne chacune d'icelles lignes DH, HF eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct H eſt donné: Donc e le poinct F eſt auſſi donné. Et puis que dans le cercle ABC donné par poſition eſt pris vn poinct donné F, & par iceluy eſt tiree la ligne droicte EFG, le rectangle ſoubs EF, FG f eſt donné. Mais FG eſt egale à AD: Donc le rectangle compris ſoubs AD, EF eſt donné: Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 26. 3.
b 26. 1.
c 15. 1.
d 29. 1.
e 27. 3.
f 31. 3.

Fin des Donnez d'Euclide.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR *Priuilege du Roy, il eſt permis à D.* HENRION, *Profeſſeur és Mathematiques de faire imprimer toutes ſes œuures, ſçauoir eſt,* Les quinze Liures des Elements Geometriques d'Euclide, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur, auec le Liure des Donnez du meſme Euclide, traduict en François par ledit HENRION auparauant ſon decedz, *ſoit conioinctement ou ſeparément, cõme bon luy ſemblera, & l'impreſſion faite, les vendre & diſtribuer ainſi qu'il voudra, & ce iuſques au terme de neuf ans, à compter du iour que chacun de ſeſdicts liures ſera acheué d'imprimer, en vertu des preſentes: pendant lequel temps, defenſes ſont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque eſtat, qualité, ou condition qu'ils ſoient, d'imprimer, alterer, traduire, ny extraire aucune choſe des œuures dudit* HENRION, *d'achepter, eſchanger, vendre ny diſtribuer aucuns de ſeſdits liures, ſinon de ceux qu'il aura fait imprimer, ſur peine de ſix mille liures d'amende, & confiſcation des exemplaires qui ſe trouueront d'autres impreſſions que de celles qu'aura fait faire ledit* HENRION. *Voire meſme ſi aucun Imprimeur ou Libraire eſt trouué ſaiſi d'aucun exemplaire d'autre impreſſion que de celles dudit* HENRION, *ou faites de ſon conſentement, ſera procedé contre luy, extraordinairement, & condamné en pareille amende que s'il l'auoit imprimé ou fait imprimer. Voulant en outre ſa Majeſté, qu'en appoſant au cõmencement ou à la fin deſdits liures vn extraict des preſentes, elles ſoient teniües pour bien notifiees & ſignifiees, nonobſtant quelconque lettre au contraire: Car tel eſt le plaiſir de ſa Maieſté Donné à Paris, le 24. de Decembre. l'an de grace 1624. & de noſtre regne le quinzieſme. Par le Roy en ſon conſeil,* RENOVARD.

Acheué d'imprimer le 24. Iuillet 1632.