Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

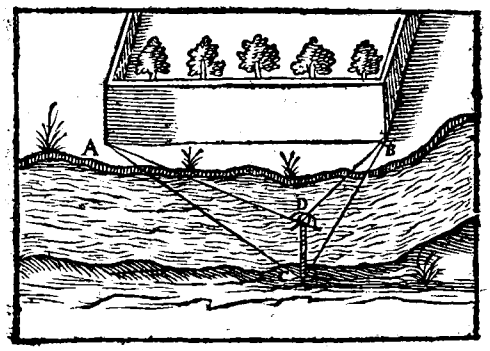
Bibliothèque nationale de France

LES QVINZE LIVRES

DES ELEMENTS GEOMETRIQVES D'EVCLIDE

Traduicts en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur: auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precedentes.

Plus le Liure des DONNEZ du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son viuant.



Mus—C.
Tab. 54
n° 29

A PARIS,
De l'Imprimerie d'Isaac Dedin.
Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S. Michel, par la veufue dudit Henrion.

M. DC. XXXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Com
Ma bonne Maman me la donne 1632.

L'IMPRIMEVR AV LECTEVR.

AMy Lecteur voicy le dernier des Oeuures du ſieur Henrion Profeſſeur és Mathematiques, contenant les quinze liures des Elements d'Euclide, traduicts en François, auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes: auſquels il a adiouſté le liure des Donnez du meſme Euclide, auſſi traduict en François; ce qui n'auoit point encores eſté faict iuſques icy, quoy que l'vſage de ce liure ſoit fort commun par toutes les Mathematiques, & particulierement en l'Analiſe, ſcience auiourd'huy tant eſtimee & recherchee, & qui a remis en ce temps la Geometrie en ſon luſtre autant qu'elle y fut iamais, auec eſperance d'vne perfection beaucoup plus grande. Cét œuure eſtoit imprimé dés le viuant de l'Autheur: & s'il ne l'a publiee, c'eſt que ſon intention eſtoit d'y adiouſter le reſte de ce qui ſe trouue des œuures d'Euclide, ſçauoir l'Optique, & Catoptrique, les Phenomenes, la Muſique, & vn fragment du leger & du peſant, toutes leſquelles parties il auoit deſia traduites, comme en font foy les manuſcripts qu'il a laiſſés, & qui ſont entre les mains de ſa veufue: ainſi il diuiſoit toutes les œuures d'Euclide en deux Tomes, deſquels le premier eſtoit celuy-cy, & le dernier deuoit contenir ce que nous auons dict maintenant, dont la pre-

miere feuille eſt deſia imprimee, & le reſte pourra eſtre imprimé cy-apres. Cependant reçoy cecy par aduance, & te ſouuiens de celuy qui te l'a preparé, lequel la mort à rauy en vn temps auquel il pouuoit & vouloit encore beaucoup ſeruir au public. Quant à l'impreſſion, ſa diligence accouſtumee à corriger ſes œuures te peut aſſeurer qu'il y aura peu ou point de fautes: ſi toutesfois tu en rencontres, il te ſera facile de les corriger ſans accuſer l'autheur qui t'auroit exempté de ceſte peine s'il euſt veſcu iuſques icy. C'eſt dequoy ie te ſupplie: t'aſſeurant que ie ſuis de tous les amateurs des Mathematiques

Le tres-humble & tres-affectionné
ſeruiteur I. DEDIN.

ELEMENT PREMIER.

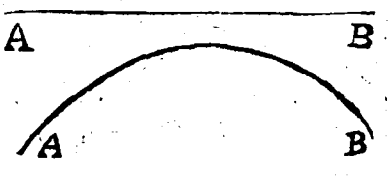
DEFINITIONS.

1. Le poinct, eſt ce qui n'a aucune partie.

LEs Phyſiciens diſent que le poinct eſt le moindre obiect de la veuë; & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe: Mais les Mathematiciens reiettans ceſte definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'intellect ſi ſubtil qu'il ne peut eſtre diuiſé en aucunes parties: Et iceluy ne ſe peut eſcrire, mais ſeulement entendre & imaginer: Bien eſt vray que pour le repreſenter à nos ſens exterieurs nous nous ſeruons du poinct Phyſique. Le poinct n'a donc aucunes des dimenſions geometriques, c'eſt à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny eſpoiſſeur, mais bien eſt-il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt vne longueur ſans largeur.

Apres le poinct, Euclide vient à la ligne, qui n'eſt autre choſe que le flux ou coullement d'iceluy poinct d'vn lieu en vn autre: car par ainſi l'interualle compris entre ces deux lieux-là, ſera vne longueur ſans largeur, puis que le poinct du coullement duquel elle eſt produite n'en a aucune: & par conſequent la ligne (qui eſt la premiere eſpece de magnitude ou quantité continue) a ſeulement vne dimenſion, ſçauoir eſt longueur, car n'ayant aucune largeur, il eſt certain qu'elle n'aura auſſi aucune eſpoiſſeur ou profondeur. Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le poinct A eſtre meu ou coullé depuis A iuſques en B, & auoir laiſſé par ſon flux ou coullement la trace & veſtige AB: or ceſte trace AB ſera appellee ligne: car l'interualle



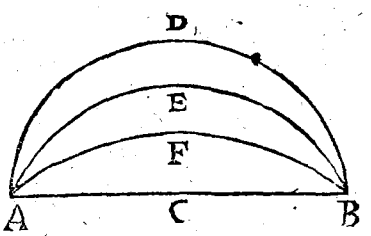
compris entre les deux poincts A & B eſt vrayement vne longueur ſans largeur & eſpoiſſeur, puis que le poinct A, par le coullement duquel elle eſt produicte, eſt priué de toute dimenſion.

3. Les extremitez de la ligne, ſont poincts.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminees commencent à vn poinct, & acheuent auſſi à vn poinct, comme les lignes precedentes AB, qui ont pour leurs extremitez les poincts A & B: car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt également compriſe & eſtendue entre ſes poincts.

Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, c'eſt aſçauoir la ligne droicte, la ligne circulaire, qu'ils appellent auſſi ligne courbe, & la ligne mixte: Euclide definit icy la droicte, laquelle il dit eſtre celle là qui eſt eſgalement eſtendue entre ſes poincts: ainſi la ligne ACB eſt dicte ligne droicte, pource que tous les poincts entremoyens d'icelle ligne, comme C, ſont eſgalement poſés entre les extremes A & B, l'vn n'eſtant plus eſleué ou abaiſſé que l'autre: ce qui n'aduient aux trois autres lignes ADB, AEB, AFB, car il eſt manifeſte que les poincts entremoiens D, E, F ſont bien plus eſleuez que les extremes A & B. Quelques autres Autheurs ont diuerſement definy la ligne droicte: car Campanus dit, que c'eſt le plus court chemin d'vn poinct iuſqu'à vn autre: &, ſelon Archimede, la ligne droicte eſt la plus courte de toutes celles qui ont meſmes extremitez. Mais Platon dit que c'eſt celle-là dont les poincts du milieu ombragent les extremes: comme par exemple, ſi en la ligne ACB, le poinct extreme A auoit la vertu d'illuminer, & le poinct du milieu C la force de cacher: iceluy poinct C empeſcheroit que le poinct extreme B fuſt illuminé de l'autre extreme A: Et auſſi l'œil eſtant au poinct extreme A, il ne pourroit voir l'autre extreme B, à cauſe du poinct C poſé entre iceux extremes: ce qui n'arriueroit pas aux lignes non droictes, comme le demonſtrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

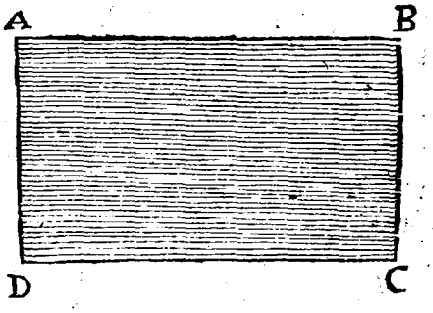


Or tout ainſi que les Mathematiciens conçoiuent la ligne eſtre deſcripte par le flux & mouuement imaginaire du poinct, ainſi auſſi entendent-ils la qualité de la ligne deſcripte par la qualité d'iceluy mouuement: car ſi on entend que le poinct coulle droict par le plus court chemin ne ſe deſtournãt çà ne là, la ligne ainſi deſcrite ſera appellee ligne droicte: mais ſi le poinct fluant vacille en ſon mouuement, & s'eſcarte çà & là; la ligne deſcripte ſera appellee mixte: & finalement ſi le poinct fluant ne vacille en ſon mouuement,

mais eſt porté en rond d'vn certain mouuement vniforme & regulier, gardant touſiours vne eſgale diſtance à quelque certain poinct à l'entour duquel il eſt porté; ceſte ligne deſcripte ſera appellee circulaire. Or Euclide ne traicte icy que des deux ſimples lignes, ſçauoir eſt de la droicte & de la circulaire. Il a defini celle-là cy-deſſus, & il definira ceſte-cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la definition, pource qu'elle n'a aucun vſage en ſes elemens Geometriques: il y en a de pluſieurs ſortes, & d'icelles traictent amplement Apollonius, Pergeus, Nicomedes, Archimedes & autres Autheurs.

5. Superficie, eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité continue, & qui a vne ſeule dimenſion, Euclide definit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece de quantité, & a deux dimenſions: car on n'y trouue pas la ſeule longitude comme en la ligne, mais auſſi latitude, ſans toutesfois aucune profondité: comme la quantité A B C D compriſe entre les lignes AB, BC, CD, DA, & conſideree ſelon la lõgitude AB, ou DC, & ſelon la latitude AD, ou BC, ſans aucune eſpoiſſeur ou profondité, eſt appellee ſuperficie. Quelques vns deſcriuans la ſuperficie diſent, que c'eſt l'extremité du corps. Et comme dit Proclus, la ſuperficie nous eſt fort naïfuement repreſentee par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuuent penetrer au dedans de la terre, elles ſeront ſeulement longues & larges. Dauantage comme les Mathematiciens entendent que la ligne eſt produicte par le flux ou coullement du poinct, ainſi diſent-ils que la ligne ſe mouuant en trauers, produict la ſuperficie: comme par exemple, ſi on entend que la ligne AB ſe meuue vers la ligne DC, elle fera la ſuperficie A B C D, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'eſt la trace & veſtige du mouuement de la ligne AB qui n'a aucune profondité.



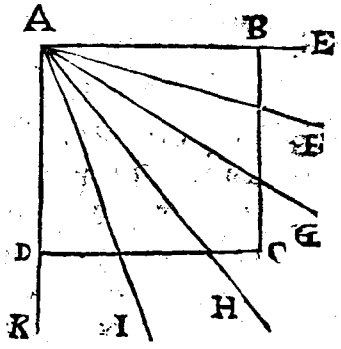
6. Les extremitez de la ſuperficie, ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornees, & terminees par lignes droites, cõme la ſuperficie ABCD cy deſſus, de laquelle les extremitez ſont les lignes AB, BC, CD, & DA: car il y a bien pluſieurs ſuperficies encloſes d'vne ſeule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mẽtion en ces Elemens-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la ſuperficie ſpherique, qui circuit & enuironne vn corps entierement rond & ſpherique. Comme donc la ligne terminee commence à vn poinct, & finit à vn autre poinct, ainſi auſſi la ſuperficie terminee commence par vne ligne, &

finit par vne ligne, tant selon sa longueur, que selon sa largeur.

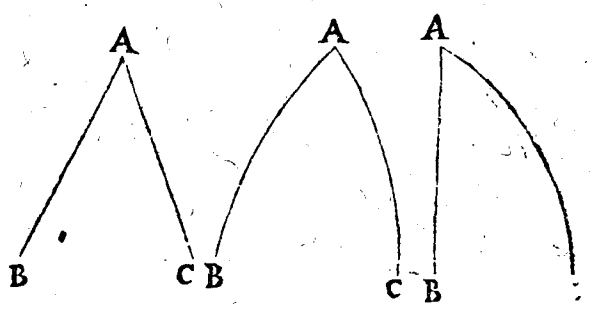
7. Superficie plane, est celle qui est également compriſe entre ſes lignes.

Ceſte definition de la ſuperficie plane a quelque ſimilitude & rapport à celle de la ligne droicte: car comme la ligne qui eſt également eſtendue entre ſes poincts, eſt appellee ligne droicte, ainſi auſſi la ſuperficie qui eſt également eſtendue entre ſes lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne ſont plus eſleuees ny abaiſſees que les extremes, eſt appellee ſuperficie plane. Et derechef, comme la ligne droicte eſt la plus courte d'entre ſes extremitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt la plus courte, ou briefue de toutes celles qui ont meſmes extremitez. C'eſt encore pour la méme raiſon que quelques autres deſcriuans la ſuperficie plane, diſent que c'eſt celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ſes extremes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle vne ligne droicte peut eſtre accommodee. Comme par exemple, la ſuperficie ABCD ſera dicte plane, ſi la ligne droicte AE ſemouuant à l'entour du poinct immobile A, en ſorte qu'elle vienne à eſtre la meſme que AF, puis la meſme que AG, & puis encore la meſme que AH, en apres la meſme que AI, & finalement la meſme que AK; elle ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abaiſſé l'vn que l'autre, ains que tous les poincts de ladite ſuperficie ſoient touchez d'icelle ligne mouuante AE, & en quelque ſorte raclez par icelle. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les vns plus eſleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroicts d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade, ou bien l'exterieure d'vn globe, ou d'vne colomne ronde, & auſſi d'vn cone, &c. ſont appellees ſuperficies courbes: & icelles ſont de pluſieurs ſortes, c'eſt à ſçauoir conuexe, comme la ſuperficie exterieure d'vne ſphere, ou d'vne colomne ronde: & concaue, comme la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade: mais la contemplation de toutes ces choſes appartient à la Stereometrie dont traicte Euclide és cinq derniers liures: c'eſt pourquoy il explique ſeulement icy la ſuperficie plane, de laquelle il traicte és ſix premiers liures. Et cependant eſt à noter que ceſte ſuperficie eſt ſouuentesfois appellée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut touſiours entendre vne ſuperficie plane.



8. Angle plan, eſt l'inclination de deux lignes, l'vne à l'autre ſe touchant en vn plan non directement.

Euclide enſeigne icy que quand deux lignes conſtituees en quelque ſuperficie plane concurrent en vn poinct d'icelle ſuperficie, & ne ſe rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pour ce que les deux lignes A B, & A C, concurrent en A, & ne ſe rencontrent pas directement; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au poinct A, s'appelle angle: Et d'autant qu'iceluy angle eſt conſtitué au meſme plan qu'icelles deux lignes A B & A C, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les vns ſont nommez angles ſolides, deſquels traicte cy apres Euclide en la Stereometrie; & les autres ſont appellés angles ſpheriques, deſquels traictent amplement Menelaus & Theodoſe en leurs elemens ſpheriques, comme nous auons auſſi faict en nos triangles ſpheriques.

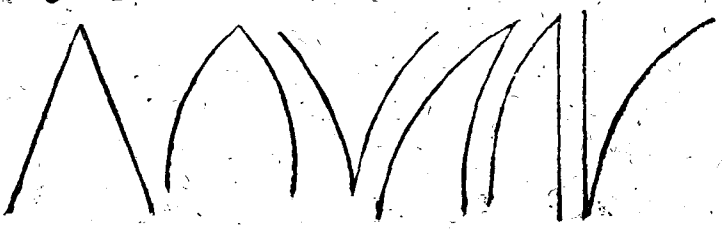


Or quant à l'angle plan cy-deſſus deffiny eſt à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan conſiſte en la ſeule inclination des lignes qui le conſtituent, & non pas en la longueur d'icelles lignes; car le prolongement deſdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conſequent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont eſtimé qu'afin que deux lignes faſſent angle, il eſtoit neceſſaire qu'eſtans continuées du poinct de leur rencontre, elles s'entrecoupaſſent en iceluy, dont s'enſuiuroit que deux cercles s'entretouchans en vn plan, ou qu'vne ligne droicte touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui eſt contre l'intention d'Euclide, ainſi qu'il appert, tant par ceſte definition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a auſſi bien demonſtré Clauius ſur la meſme propoſition, où il refute Pelletier, qui diſoit que la ligne droicte touchant le cercle, ne faiſoit angle; c'eſt pourquoy ceux qui tiennent encore ceſte opinion, ſe mocquent bien d'Euclide, de Clauius, & autres Geometres, qui diſent qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, fait vn angle contigent, ou d'attouchement.

9. Que ſi les lignes comprenant l'angle ſont droictes, l'angle ſera appelé rectiligne.

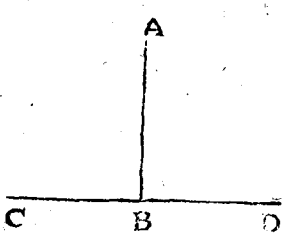
Tout angle plan eſt faict, ou de deux lignes droictes, & alors il ſe nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, &

alors on l'appelle angle curuiligne; ou bien d'vne ligne droicte & d'vne courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curuilignes peuuent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cauſe de la diuerſe inclination ou habitude des lignes courbes, ainſi qu'il appert manifeſtement aux angles plans de la figure cy appoſee.



10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, fait les angles de part & d'autre eſgaux entr'eux, les angles ſont droicts; & la ligne tombante, eſt perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.

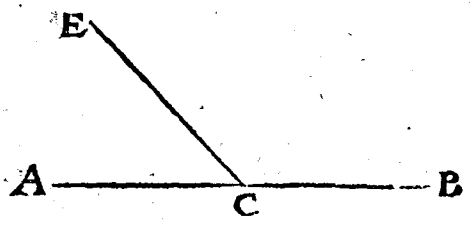
Il y a de trois ſortes d'angles rectilignes, ſçauoir eſt droict, obtus & aigu: le premier deſquels Euclide definit icy auec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres, il les definit aux deux definitions prochainement ſuiuantes. Il dit donc icy que ſi vne ligne droicte tombe ſur vne autre ligne droicte, en ſorte qu'elle faſſe les angles de part & d'autre eſgaux, ce qui aduient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'vn coſté que de l'autre; chacun d'iceux angles eſt appellé angle droict, & la ligne ainſi tombante, eſt ditte perpendiculaire à celle-là ſur laquelle elle tombe. Comme par exemple, ſi la ligne droicte AB tombe ſur la ligne droicte C D, en ſorte qu'elle ne s'incline pas plus d'vn coſté que de l'autre, les deux angles, quelle faict au poinct B ſeront eſgaux entr'eux, & chacun d'iceux ſera nommé angle droict; mais la ligne A B ſera dicte perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Par meſme raiſon, la ligne droicte C B ſera auſſi dicte perpendiculaire à la ligne droicte A B, encore qu'icelle C B faſſe vn ſeul angle droict auec A B; Et ce d'autant que ſi ladicte ligne A B eſtoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit vn autre angle eſgal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle eſt droict, ou que la ligne qui le conſtitue eſt perpendiculaire à vne autre, il faut ſeulement prouuer que ledit angle eſt eſgal à celuy de l'autre coſté. Semblablement, ſi quelque angle eſt dict droict, ou que l'vne des lignes qui le conſtitue ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra auſſi conclurre que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre coſté; car ſi ces angles-là n'eſtoient égaux, ils ne ſeroient nommez angles droicts, ainſi qu'il appert



tant par la susdite definition, que par les deux suiuantes.

11. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'vn droict.
12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne autre s'incline ou panche plus d'vn costé que de l'autre, elle fait consequemment deux angles inégaux, dont l'vn est plus grand que l'angle droict, & se nomme angle obtus; mais l'autre est plus petit, & s'appelle angle aigu. Ainsi pource qu'en cette figure, la ligne droicte EC tombant sur la ligne droicte AB, s'incline & panche plus du costé de AC que de la part de BC, les deux angles du poinct C seront inégaux, & celuy vers B, qui est plus grand & ouuert que le droict sera dit angle obtus: mais celuy de la part de A, qui est plus petit & fermé que l'angle droict, sera nommé angle aigu.



Et d'autant que souuentefois en vn plan concurrent plus de deux lignes à vn mesme poinct, & par consequent y constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour euiter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu denotte le poinct auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extremes signifient les commancemens d'icelles lignes qui font iceluy angle: tellement qu'en la figure cy-dessus l'angle obtus que nous auons dit estre celuy de la part de B, sera exprimé & entendu par ces trois lettres ECB ou BCE, à cause qu'il est constitué au poinct C, & contenu par les deux lignes droictes EC, & BC, qui commançant en E & B, se vont rencontrer au susdit poinct C. Mais l'angle aigu que nous auons dit estre de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres ECA ou ACE, par ce qu'il est constitué au poinct C, & fait par les deux lignes droictes EC & AC, qui commencent en E & A, & se vont rencontrer au susdict poinct C. Ce qu'on doit bien notter, afin de connoistre & discerner facilement les angles, dont sera faict mention és demonstrations suiuantes.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainsi les poincts sont termes ou extremitez des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris & enuironné d'vn, ou de plusieurs termes.

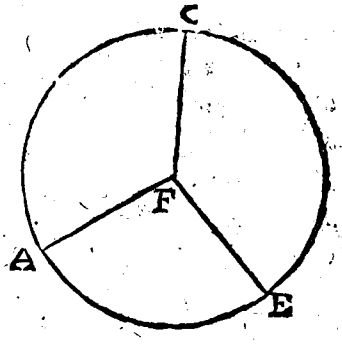
Toute quantité ayant termes, n'est pas dicte figure: mais seulement celles

que les termes enuironnent : ainsi la ligne terminee par deux poincts, n'est pas dite figure : mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont enuironnez d'vn seul, ou de plusieurs termes: d'vn seul, comme le Cercle, l'Ellipse, & la Sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, est vne figure plane, contenue par vne seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn seul poinct de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entr'elles.

6. Et ce poinct-là est appellé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaicte est le cercle, lequel, selon que le definit icy Euclide, est vne figure plane contenue & enuironnee d'vne seule ligne, à laquelle toutes celles menees d'vn seul poinct de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles: & ceste ligne-là s'appelle periphere, ou circonference du cercle; & le susdict poinct, centre du cercle: Comme par exemple, si vne superficie ou espace est enuironnee d'vne seule ligne ACE, & que de quelque poinct d'au dedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droictes menees au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, sont égales entr'elles: telle figure plane sera appellee cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & enuironne icelle figure, s'appelle periphere, ou circonference du cercle: mais ledit poinct F, est nommé centre du cercle.

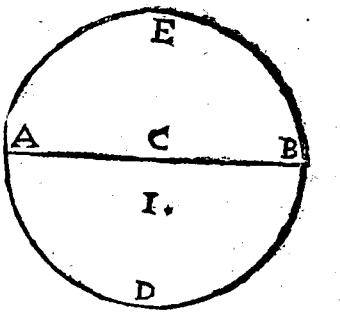


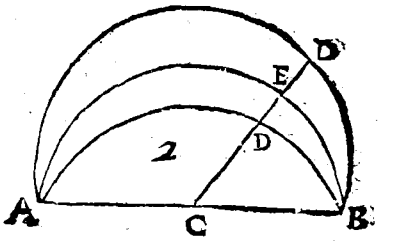
Quelques Geometres definissent autrement le cercle, & disent, que c'est vne figure plane, descrite par vne ligne droicte finie, laquelle ayant vn des poincts extremes fixe, est meuë à l'entour d'iceluy iusques à ce qu'elle retourne au mesme lieu où elle a commencé à mouuoir: comme si la ligne droicte AF ayant le poinct F fixe, est entendue se mouuoir à l'entour d'iceluy poinct F, tirant de A vers C, E, iusques à ce qu'elle reuienne au mesme lieu FA, où elle a commencé son mouuement; elle descrira par iceluy mouuement le cercle ou espace ACE, duquel la circonference est descrite & traſſée par le poinct mobile A; & le poinct fixe F, est le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droictes menées à la susdite circonference ACE, sont égales entr'elles, puis qu'elles prouiennent toutes d'vne seule & mesme mesure, c'est à sçauoir de la ligne FA.

17. Diametre du cercle, est vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circon-

circonference d'iceluy cercle, le diuiſe en deux également.

Si dans vn cercle on mene vne ligne droicte par le centre, qui aille de part & d'autre iuſques à la circonference ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en ceſte premiere figure, la ligne droicte A B, qui eſt tiree par le centre C, & va de part & d'autre iuſques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adiouſte Euclide, couppe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie A E B eſt égale à la partie A D B. Ce qui eſt aſſez manifeſte, puiſque ledit diametre A B paſſe par le milieu du cercle, c'eſt à ſçauoir par le centre C : car s'il ne diuiſoit le cercle en deux parties éſgales, les lignes droictes tirées du centre à la circonference, ne ſeroient pas égales, contre la definition du cercle : Neantmoins pluſieurs interpretes d'Euclide rapportent en cet endroict la demonſtration que Proclus dit, en auoir eſté faite par Thales Mileſien, qui eſt telle : Imaginons nous que la partie de cercle A D B ſoit ſuperpoſée & accommodée à l'autre partie du cercle A E B, en ſorte que le diametre A B ſoit commun à l'vne & à l'autre partie. Or la circonference A D B ſe rencontrera totallement auec la circonference A E B, ou bien elle tombera au deſſus d'icelle, ou au deſſoubs : Si elles ſe rencontrent & conuiennent l'vne à l'autre, il eſt euident que ces deux parties là faictes par le diametre A B, ſont égales entr'elles, puiſque l'vne n'excede l'autre. Mais ſi on dit que la circonference A D B ne ſe rencontre pas auec la circonference A E B, ains qu'elle tombe au deſſus ou au deſſoubs d'icelle, comme en la 2. figure, ſoit tiree du centre C vne ligne droicte, laquelle couppe la circonference A D B en D, & la circonference A E B en E ; les deux lignes droictes C D & C E, qui ſont tirées du centre à la circonference d'vn meſme cercle, ſeront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui eſt abſurde, car l'vne n'eſt que partie de l'autre. Donc l'vne de ces circonferences là ne tombera pas au deſſus ny au deſſoubs de l'autre ; mais ſe rencontreront & conuiendront totallement l'vne auec l'autre, & par conſequent ſeront égales : ce qu'il falloit demonſtrer.



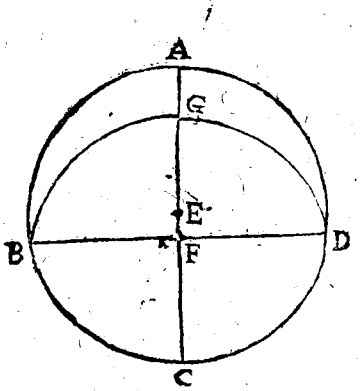


De ceſte demonſtration il appert que le diametre ne couppe pas ſeulement la circonference en deux egallement, mais auſſi toute l'aire & ſuperficie du cercle : Car puiſque les demyes circonferences conuiennent & s'accordent entr'elles, comme il a eſté demonſtré ; les ſuperficies contenuës & encloſes entre le diametre & chacune d'icelles demy circonferences conuiendront auſſi entr'elles, puiſque l'vne n'excede l'autre ; & par conſequent elles ſeront égales entr'elles.

18. Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & de moitié de la circonference.

19. Portion ou ſegment de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë ſoubs le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, eſt ditte demy cercle; car il a eſté demonſtré cy deſſus qu'icelle figure eſt moitié du cercle AEBD, & ce à cauſe que le diametre, ou ligne droicte AB, qui le diuiſe en deux parties, paſſe par le centre C: Mais quant vne ligne droicte, qui ne paſſe pas par le centre du cercle, le diuiſe en deux parties; chacune d'icelles parties contenuë ſoubs ladite ligne droicte, & vne partie de la circonference, eſt nommée ſegment ou portion de cercle; & ces deux parties ſont inegales, car celle où eſt le centre eſt plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoit vne ligne droicte BFD, qui couppe ledit cercle en deux parties ſans paſſer par ledit centre E; la partie BAD, compoſee ſoubs la ligne droicte BD, & la partie de circonference BAD, s'appelle ſegment ou portion de cercle, comme auſſi BCD, qui eſt contenuë ſoubs la meſme ligne droicte BD, & la circõference BCD. Or il eſt aſſés euident que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, attendu que ſi de B par le centre E on menoit vn diametre, il coupperoit le cercle en deux moitiez, chacune deſquelles ſeroit plus grande que la portion BCD, & moindre que l'autre portion BAD: Neantmoins Clauius & quelques autres interpretes d'Euclide le demonſtrent ainſi. Soit conceu ou imaginé que par le centre E, ſoit mené le diametre AC perpendiculaire à BD: donc ſi les ſuſdites portions BAD, & BCD, ſont dictes eſgales, & que la portion BCD, ſoit entendue ſe mouuoir à l'entour de la ligne droicte BD, en ſorte qu'elle tombe ſur l'autre portion BAD; ceſte portion là conuiendra auec ceſte-cy, & la ligne droicte CF à la ligne droicte AF, à cauſe que par la 10. defin. les angles du poinct F ſont droicts & egaux: Parquoy la ligne droicte FC, qui eſt maintenant la meſme que FA, ſera plus grande que EA, qui n'eſt que partie d'icelle FA. Mais d'autant que EC, eſt égale à EA, eſtans toutes deux menees du centre E à la circonference; FC ſera pareillement plus grande que EC, la partie que le tout: Ce qui eſt abſurde. Donc la portion BCD ne conuiendra pas à la portion BAD; ains elle tombera dedans icelle, comme eſt la portion BGD, de ſorte que la ligne droicte FG, qui ſera lors la meſme que FC ſera moindre que EA ou EC; car ſi on diſoit qu'elle tombe dehors, comme ſi le cercle eſtoit BCDG, duquel le centre fuſt E; auſſi la portion

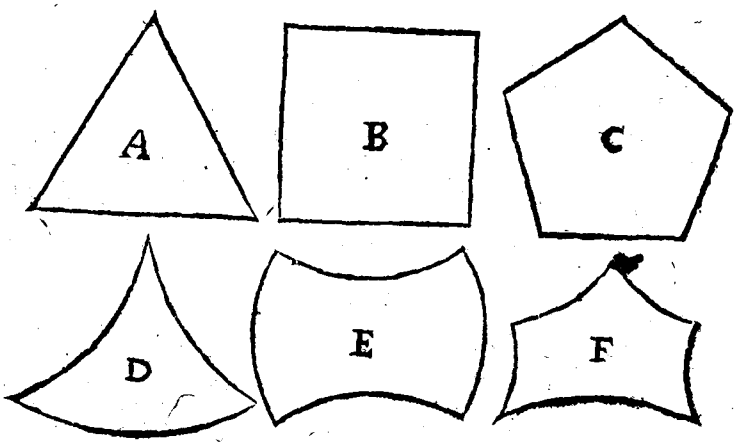


BCD tomberoit dehors BGD, ainsi que la portion BAD : Derechef FA, qui seroit lors la mesme que FC, seroit plus grande que EG, c'est à dire que EC; & partant la partie FC seroit derechef plus grande que le tout EC : Ce qui est absurde. Il est donc manifeste que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, puis que ceste-cy est égale à la portion BGD, qui est partie de la portion BAD. Car puisque il a esté demonstré que la portion BCD, meüe à l'entour de la ligne droicte BD, ne peut conuenir sur la portion BAD, ne tomber hors icelle; elle tombera totalement au dedans comme BGD.

Or ces deux definitions n'estoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne sont employées en ce premier liure, mais bien au troisiesme, auquel la derniere est repetée.

20. Figure rectiligne, est celle qui est compriſe de lignes droictes.

Apres auoir defiy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide passe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce sont celles contenues & encloses de lignes droictes, & telles sont les trois figures cy dessous cottees A, B, C; par consequent les figures planes compriſes & enuironnees de lignes courbes, comme celles cottees D, E, F, sont appellees figures courbelignes, ou curuilignes : mais les figures qui sont circuites & encloses en partie de lignes droictes, & en partie de lignes courbes, sont nommees figures mixtes.



21. Figure de trois costez, est celle qui est compriſe de trois lignes droictes.

Euclide voulant descrire diuers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilateres, ou de trois costez, & dit que ce sont celles qui sont contenues & enuironnees de trois lignes droictes : & d'autant que telles figures ont touſiours trois angles, on les appelle communement triangles. Ainsi la figure A cy dessus, laquelle est contenue soubs trois lignes droictes,

qui constituent trois angles, sera nommee figure trilatere, ou plustost triangle rectiligne ; & y en a de diuerses especes, qui seront declarees cy apres : mais la figure D, circuite & enclose de trois lignes courbes, sera dicte triangle curuiligne.

22. Figure de quatre costez, est celle qui est compriſe de quatre lignes droictes.

Apres les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres, ou de quatre costez, c'est à sçauoir les figures contenues soubs quatre lignes droictes lesquelles constituent aussi quatre angles; & pour ce sont elles souuent appellees quadrangles : ainsi entre les figures precedentes celle cottée B, compriſe & encloſe de quatre lignes droictes qui constituent quatre angles, sera appellee quadrilatere, ou quadrangle rectiligne ; & y en a de diuerses especes cy apres declarees : mais la figure cottee E encloſe de quatre lignes courbes sera dicte quadrangle curuiligne.

23. Figures multilateres, ou de plusieurs costez, sont celles qui sont compriſes de plus de quatre lignes droictes.

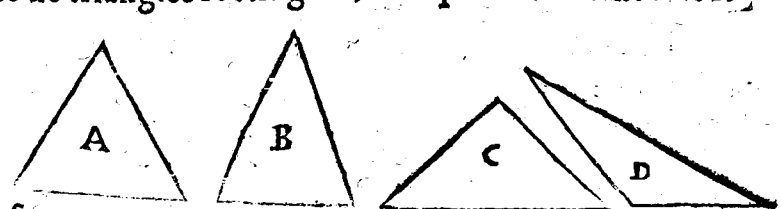
Le nombre des especes de figures rectilignes estant infiny, Euclide s'est contenté de definir, & particulierement denommer les deux premieres especes cy-dessus declarees, c'est à sçauoir celles contenues soubs trois & quatre lignes droictes: & quant aux autres especes de figures, qui sont contenues & encloſes par plus de quatre lignes droictes, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulierement quelqu'vnes de ces figures multilateres, prenent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainsi les figures cy deuant cottees C, & F, lesquelles sont compriſes & enuironnées de cinq lignes, qui constituent cinq angles, sont appellées *Pentagones* : Et celles contenues de six lignes, sont nommées *Hexagones* ; de sept, *Heptagones* ; de huict, *Octogones* ; de neuf, *Enneagones* ; de dix, *Decagones* ; de vnze, *Endecagones* ; de douze, *Dodecagones*, &c.

24. Or des figures de trois costez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.

25. Triangle Isoscele, qui a deux costez egaux seulement.

26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.

Il y a diuerses especes de triangles rectilignes, soit qu'on les considere selon les costez, soit qu'on ait esgard à leurs angles : considerant les costez il y en a de trois especes,



lesquelles Euclide expoſe par ces trois definitions ; & dit premieremẽt que

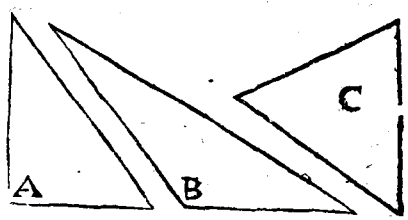
le triangle qui a tous les trois costez egaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral: Mais les triangles qui n'ont que deux costez egaux, comme B & C, s'appellent triangles Isoscelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois costez inégaux, comme D, est nommé triangle scalene. Or les triangles Equilateraux sont touſiours vniformes & d'vne meſme ſorte: mais les Isoscelles, & les Scalenes ſont diuerſifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.

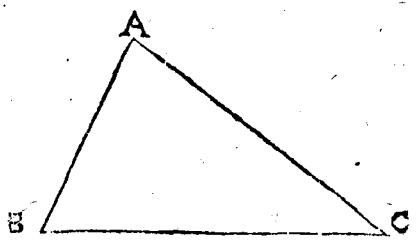
28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide considere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, lesquels triangles sont de trois sortes, c'est à sçauoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles sont ceux qui ont vn angle droict; & tel est icy le triangle A: mais les triangles ambligones, sont ceux qui ont vn angle obtus, comme est icy le triangle B: & les triangles oxigones, sont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel est icy le triangle C.

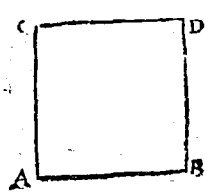


Or est à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes des trois qui le contiennent estans prises pour deux costez, la troisiesme restante a accoustumé d'estre appellée par les Geometres, la base du triangle, soit qu'icelle ligne soit le costé infime du triangle, ou non: tellement que chacune desdites trois lignes qui constituent & enferment le triangle peust estre prise pour base: Ainsi au triangle A B C, les lignes A B, & A C estans prises pour les deux costés, la troisiéme lig. B C sera la base: mais si on prend A B, & B C pour les deux costés, A C sera la base du triangle.



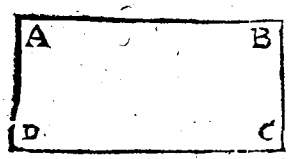
30. Mais des figures de quatre cõstez; celle qui a les quatre costés égaux, & les quatre angles droicts s'appelle quarré.

Apres les figures trilateres, Euclide expose les quadrilateres, qui sont de cinq sortes: la premiere d'icelles, qui est equilaterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainsi la figure quadrilatere A B C D, ayant tous les quatre costez égaux, & tous les quatre angles droicts sera appellee quarré.



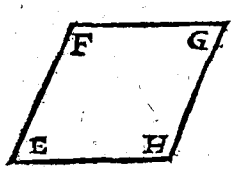
31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les costez égaux.

La seconde figure quadrilatere s'appelle quarré long, à cause qu'estãt plus long d'vne part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droicts. Ainsi la fig. quadrilatere A B C D sera appellée quarré lõg, car elle a les quatre angles droicts & non pas tous les costés égaux entr'eux, ains seulement les costés opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez A D, B C, qui sont aussi egaux entr'eux.



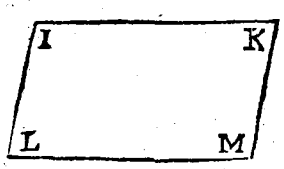
32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

La troisiesme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez egaux entr'eux, ainsi que le quarré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droicts; ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costés sont esgaux entr'eux, & les quatre angles non droicts, ains obtus & aigus; sera appellé Rhombe.



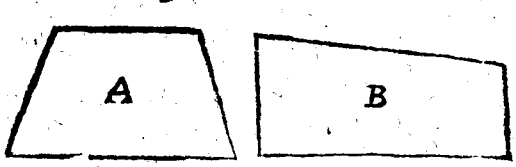
33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les costez opposez aussi egaux entr'eux, sans estre equilateral, ny rectangle.

La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais à les costés opposés egaux entr'eux, & les angles opposés aussi égaux entre eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costés opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costés opposés I L, K M, qui sont pareillement egaux entr'eux, mais les angles opposés I, M, egaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi egaux entr'eux.

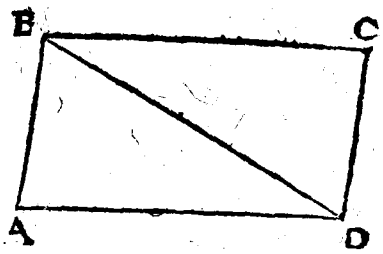


34. Toutte autre figure de quatre costez, est appellée trapeze.

Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçauoir qui n'est ny quarré, ny quarré long, ny Rhombe, ny Rhomboide, s'appelle trapese; & telles sont ces deux figures A & B; car l'vne ny l'autre n'est equilatere ny rectangle, ny n'a les angles opposez egaux, ny tous les costez opposez aussi égaux.

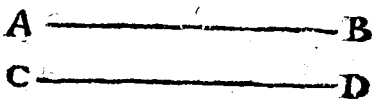


Or eſt icy à notter que quand d'vn angle de quelconque figure quadrilatere on tire vne ligne droicte à l'angle oppoſé, cette ligne eſt appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainſi au quadrilatere ABCD la ligne BD, menee de l'angle B à ſon oppoſé D eſt dicte diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droictes paralleles, ſont celles qui eſtans ſur vn meſme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne ſe rencontrent iamais.

Afin que les lignes droictes ſoient dictes paralleles, ou equidiſtantes, il ne ſuffit pas qu'eſtans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à ſe rencontrer; mais il eſt auſſi neceſſaire qu'elles ſoient en vne meſme ſuperficie plane: Car pluſieurs lignes droictes n'eſtans en vne meſme ſuperficie, pourroient bien eſtre prolongées à l'infiny & ne ſe rencontrer iamais, leſquelles toutesfois ne ſeroient dites paralleles. Comme par exemple, ſi deux lignes droictes poſées de trauers au milieu de l'air ne ſe touchent point, bien qu'elles ſoient prolongées tant qu'on voudra, elles ne ſe rencontreront iamais, & toutesfois elles ne ſeront pas dittes paralleles. Parquoy les deux lig. droictes AB, & CD, leſquelles ſont en vne meſme ſuperficie plane, & qui eſtans prolongees à l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne ſe rencontrent iamais, ſeront dictes lignes paralleles.



Or icy finiſſent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce meſme liure eſt ſouuent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, leſquels Euclide n'a point definy, nous adjouſterons icy leurs definitions.

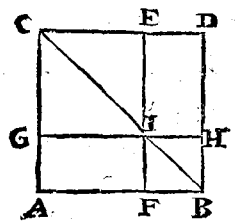
36. Parallelogramme, eſt vne figure quadrilatere qui a les coſtez oppoſez parallels, ou equidiſtans.

Telle figure eſt touſiours l'vne de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, & Rhomboide, car elles ont toutes leurs coſtez oppoſés parallels.

37. Mais quand en vn parallelogramme on mene vn diametre, & deux lignes droictes paralleles aux coſtez leſquelles couppant iceluy diametre à vn méme poinct, diuiſent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes; ces deux là par leſquels le diametre ne paſſe

point, ſont appellez complemens; mais les deux autres par leſquels le diametre paſſe, ſont dicts eſtre à l'entour du diametre.

Soit vn parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & la ligne EF couppant iceluy diametre au poinct I, ſoit parallele aux coſtez AC, BD; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au meſme poinct I, ſoit parallele aux coſtés AB, CD. Il eſt manifeſte que tout le parallelogramme eſt diuiſé par leſdites 2 lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrãmes, deux deſquels, ſçauoir AGIF, & DEIH, par leſquels le diametre BC ne paſſe point, ſont appellez par les Geometres complemens, ou ſupplemens des deux autres parallelogrammes BFIH, CEIG, leſquels ſont dits eſtre à l'entour du diametre, à cauſe que par iceux paſſe le diametre



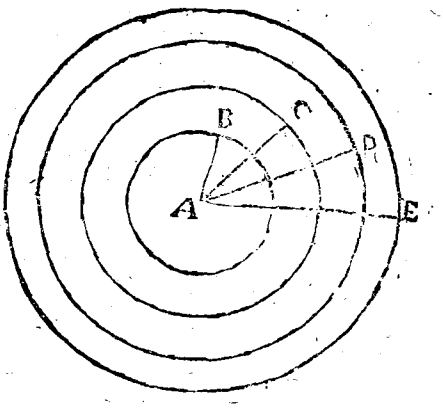
PETITIONS OV DEMANDES.

1. D'vn poinct donné à vn autre poinct mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnée & terminée.
3. Deſcrire vn cercle de quelque centre & interualle que ce ſoit.

Euclide ne ſe ſert en ces Elemens-cy que de deux ſortes de lignes ſimples, ſçauoir eſt de la droicte & de la circulaire, la deſcription deſquelles eſtant fort facile, il demande icy qu'on là luy concede & accorde, ſans qu'il ſoit contrainct de demonſtrer qu'elle eſt poſſible: ce qui eſt toutefois manifeſte; car puiſque la ligne eſt vn flux & coullement imaginaire du poinct, & partant la ligne droicte eſtre vn flux procedant de droict chemin, & le plus court qui puiſſe eſtre d'vn lieu à vn autre, il eſt certain que ſi on entend quelque poinct ſe mouuoir directement à vn autre, vne ligne droicte ſera menee d'vn poinct à l'autre. Parquoy on ne peuſt pas nier que depuis le poinct A iuſques à quelconque poinct B, on ne puiſſe mener vne droicte ligne, comme AB, ainſi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere des trois petitions ſuſdictes. Et ſi on entend le meſme poinct ſe mouuoir encore plus outre directement & ſans aucunement decliner çà ne là, la ligne droicte terminee ſera prolongee; & ce prolongement

A B C D

gement ſe pourra faire à l'infiny, veu que nous pouuons entendre ce poinct là ſe mouuoir infiniment : Et partant perſonne ne pourra nier que la ligne droicte AB cy-deſſus ne puiſſe eſtre continuée iuſques en C, puis encore iuſques en D, & ainſi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais ſi on conçoit quelconque ligne droite terminee ſe mouuoir à l'entour d'vn de ſes poincts extremes qui demeure fixe, iuſques à ce qu'elle retourne au meſme lieu où elle a commencé ſon mouuement, ſera deſcrit vn cercle, & fait ce qui eſt requis par la 3. petition, comme il appert en ces quatre lignes droictes AB, AC, AD, AE, chacune deſquelles eſtant menée à l'entour du centre A, deſcrit vn cercle ſelon la grandeur & interualle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clauius a adiouſté la ſuiuante.

4. Eſtant donné quelconque grandeur, on en peuſt prendre vne autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continue peuſt eſtre infiniment augmentee par additition, & diminuée par diuiſion, il ne ſe peut donner quantité continue ſi grande, qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus grande; ny vne ſi petite qu'il ne s'en puiſſe encore donner vne plus petite. Ce qui eſt dit icy touchant l'addition, eſt auſſi veritable aux nombres; car chaque nombre peut eſtre augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'vnité, jaceoit qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuiſible.

AXIOMES OV *communes ſentences.*

1. Les choſes eſgales à vne meſme, ſont egales entr'elles.

A ce premier axiome, Clauius a adjouſté, qu'vne choſe qui eſt plus grande ou plus petite qu'vne des egales, eſt auſſi plus grande ou plus petite que l'autre : Et ſi l'vne des choſes egales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre eſt pareillement plus grande ou plus petite que la meſme grandeur.

2. Si à choſes egales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont egaux.

3. Si de choſes egales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont egaux.

4. Si à choſes inegales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont inegaux.

A cet axiome Clauius a adjouſté, que ſi à choſes inegales on adiouſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite; les touts ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & ceſtuy-cy plus petit.

5. Si de choſes inegales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont inegaux.

A ceſte notion Clauius adiouſte auſſi, que ſi de choſes inegales on oſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les reſtes ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & ceſtuy-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choſes ou quantitez egales, il faut auſſi entendre vne meſme commune à pluſieurs; Car ſi à choſes égales on y en adiouſte vne meſme commune, les touts ſeront égaux. Et ſi de choſes égales on en retranche vne commune, les reſtes ſeront auſſi égaux. Et ſi a choſes inegales on en adjouſte vne commune; où à vne meſme choſe commune, on adjouſte choſes inegales, les tous ſeront inegaux. Et ſi de choſes inegales; on en retranche vne meſme commune, ou d'vne meſme choſe, on en retranche d'inegales, les reſtes ſeront inegaux.

6. Les choſes doubles d'vne autre ſont egales entr'elles.

Clauius adjouſte à cet axiome, que ce qui eſt double d'vne des choſes égales eſt pareillement double de l'autre: Mais il eſt auſſi manifeſte que les choſes qui ſont triples d'vne meſme, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. ſont égales entr'elles.

7. Les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont egales entr'elles.

Il eſt auſſi euident que les choſes égales entr'elles ſont moitiés d'vne meſme: Et ſemblablement que les choſes qui ſont tierces parties d'vne meſme, ou quartes, ou cinquieſmes, &c. ſont auſſi egales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par vne meſme quantité on doit auſſi entendre les quantitez egales, car les choſes doubles, triples, quadruples, &c. de choſes egales, ſont auſſi egales entr'elles; item, les choſes qui ſont moitiez, ou tierces parties &c. de choſes egales, ſont pareillement egales entr'elles.

8. Les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux grandeurs ſeront egales entr'elles, ſi eſtans poſees l'vne ſur l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux enſemble s'adjuſtent entr'elles: cõme deux lignes droictes, ſeront dictes eſtre egales entr'elles, ſi l'vne eſtant poſee ſur l'autre, celle qui eſt poſée deſſus s'adjuſte à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne ſoit excedee d'icelle. Ainſi auſſi deux angles rectilignes ſeront egaux entr'eux quand le ſommet de l'vn, eſtant poſé ſur le ſommet de l'autre, l'vn n'excede l'autre, mais les lignes de l'vn tombent totalement ſur celles de l'autre: car par ainſi les inclinations des lignes ſeront, egales combien que ſouuentefois icelles lignes ſoient inegales entr'elles. Ainſi auſſi deux ſuperficies ſeront eſgales entr'elles, quand l'vne eſtant poſee ſur l'autre, elle ne l'excede, ny n'eſt excedee par icelle, mais s'adjuſtent totalement entr'elles. Quelqu'vn expliquant cette notion a dit que conuenir, c'eſt auoir les extremitez ſur les extremitez: ce qui n'eſt pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple, vne ligne droicte peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne ligne courbe, laquelle neantmoins, ne luy ſera egale. Ainſi auſſi vne ligne courbe peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne autre ligne courbe, laquelle ne luy ſera pas pourtant egale. Or il eſt manifeſte que de cet axiome on peut bien conuertir & prendre pour principe, *que les lignes droictes egales conuiennent*: Auſſi *que les angles rectilignes egaux conuiennent*: Semblablement, *Que les ſuperficies planes egales & ſemblables conuiennent*. On peut bien encore tirer quelques autres conuerſes de cet axiome: mais de le vouloir conuertir vniuerſellement (comme quelques vns) c'eſt ſe moquer, veu que ſi on trouue vne ligne courbe egale à vne droicte, elles ne conuiendront pas pourtant: & auſſi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiligne egal, leſquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire meſme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne: leſquels pourtant ne peuuent iamais conuenir.

9. Le tout eſt plus grand que ſa partie.

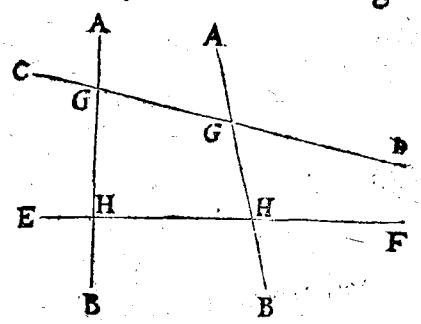
10. Tous les angles droicts ſont egaux entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn angle droict, eſt auſſi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles interieurs d'vn meſme coſté plus petits que deux droicts, icelles deux lignes eſtans continuées à l'infiny, ſe rencontreront du coſté où les angles ſont plus petits que deux droicts.

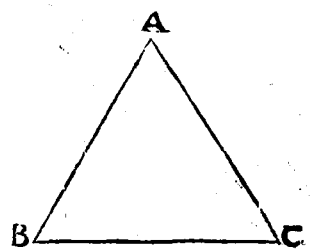
Comme par exemple, ſi la ligne droicte AB, tombant ſur les deux lignes

droictes CD, EF, & les couppant aux poincts G, H, faict les deux angles interieurs DGH, FHG, pris enſemble plus petis que deuxdroicts, icelles deux lignes CD, EF, eſtans continuees à l'infiny ſe rencontreront de la part de D, F, où les ſuſdits angles interieurs ſont faits moindres que deux droicts: Car il eſt manifeſte que de l'autre coſté, ſçauoir eſt vers C, E, l'eſpace d'entre leſdites deux lignes CD, EF, s'eſlargira touſiours de plus en plus; mais de ceſtuy cy, il s'eſtrecira en ſorte que finallement icelles lignes ſe rencontreront à vn poinct.



12. Deux lignes droictes n'enferment pas vn eſpace.

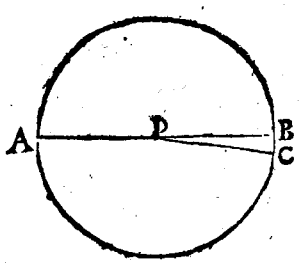
Vne ſeule ligne courbe enferme bien vn eſpace, comme font auſſi vne ligne droicte & vne courbe, mais deux droictes ne le peuuent faire, ains il en faut du moins 3 pour contenir & enclorre vne eſpace, cõme il appert en ceſte figure, en laquelle les 2 lignes droictes AB, & B C, qui font l'angle B, eſtans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne ſe joindront point, mais au contraire elles ſe dilateront touſiours de plus en plus; tellement que pour enclore l'eſpace d'entre icelles deux lignes, il ſera neceſſaire d'en mener vne troiſieſme, comme AC.



A ces 12 axiomes, Clauius & autres interpretes d'Euclide, ont encore adiouſté les 8 ſuiuans.

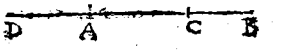
13. Deux lignes droictes ſe rencontrans indirectement n'ont pas vn meſme & commun ſegment.

Combien que par la nature de la ligne droicte, il ſoit aſſez manifeſte que deux lignes droictes, ſe rencontrans de trauers, ne peuuent auoir aucune partie commune tant petite qu'elle puiſſe eſtre, outre le poinct de leur rencontre; ſi eſt ce toutesfois que Proclus le demonſtre ainſi. Que deux lignes droictes ADB, ADC ayent, s'il eſt poſſible, vne partie commune AD. Du centre D, & de l'interualle d'icelle A D, ſoit d'eſcrit vn cercle couppant les deux lignes droictes propoſees aux poincts B & C. Donc les circonferences AB, & ABC ſeront égales entr'elles: (car elles ſont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC ſont poſez diametres)



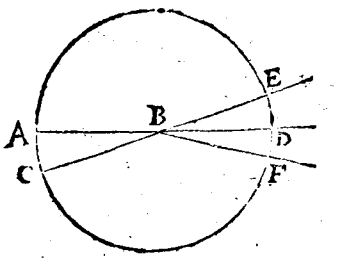
la partie & le tout : ce qui eſt abſurde. Donc deux lignes droictes, &c.

Or nous n'auons pas rapporté cet axiome, nyauſſi les ſept autres ſuiuans, tout de meſme qu'ils ſe trouuent dans Clauius & autres Interpretes d'Euclide, ains auons changé quelques mots aux vns, & adiouſté aux autres, afin d'oſter de ceux-là tout doubte & ambiguité, & ne laiſſer en ceux-cy aucune defectuoſité : comme par exemple, en ceſtuy-cy nous auons adiouſté *ſe rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droictes peuuent bien auoir vn commun ſegment, quand elles ſont poſees directement, & conſtituent comme vne ſeule ligne droicte, ainſi qu'il appert icy aux deux lignes droictes DC & BA, qui ont la partie ou ſegment AC commun : mais quand elles ſont poſees de trauers & indirectement, elles ne peuuent auoir aucune partie cõmune outre le poinct de leur rencontre.



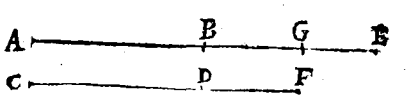
14. Deux lignes droictes ſe rencontrans à vn poinct indirectement, ſi elles ſont toutes deux prolongees, elles s'entrecoupperont neceſſairement en iceluy poinct.

Cet axiome depend auſſi de la nature de la ligne droicte, & toutesfois Clauius le demonſtre ainſi. Que deux lignes droictes AB, CB ſe rencontrent indirectement au poinct B : ie dis qu'icelles lignes eſtãs prolongees s'entrecoupperont à iceluy poinct B, ſçauoir eſt que CB prolongee tombera, comme en E, au deſſus de AB prolongee. Car ſi CB continuee ne tomboit au deſſus de AB prolongee, ou elle conuiendroit auec icelle AB continuee, de ſorte qu'elle paſſeroit par D ; & par ainſi les deux lignes droictes ABD, CBD auroient vn meſme ſegment BD commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au deſſoubs de AB prolongee, comme en F, tellement que CBF ſeroit vne ligne droicte : Donc du centre B, & de quelconque interualle ſoit deſcrit vn cercle ACFD, couppant les lignes droictes AB, CB prolongees en D, F. Or puis que l'vne & l'autre ligne droicte ABD, CBF, paſſe par le centre B, tant ACD que CF ſera demy cercle par la 18 def. & conſequemment les circonferences ABD & CF ſeront égales entr'elles, le tout & la partie : cequi eſt abſurde.



15. Si à choſes égales on adjouſte choſes inégales, lexcez des toutes ſera le meſme que l'excez des adiouſtees.

Aux grandeurs egales AB, CD, eſtans adiouſtees les inégales BE, DF, deſquelles la difference ou excés eſt G E ; il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE,

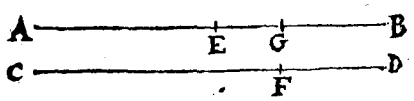


16. Si à choſes inégales on adiouſte choſes egales, l'excez des toutes ſera le meſme que l'excez de celles qui eſtoient au commencement.

Comme ſi (en la figure precedente) aux grandeurs inegales BE, DF, dont l'excez ou difference eſt GE, on adiouſte les grandeurs inegales AB, CD: il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE.

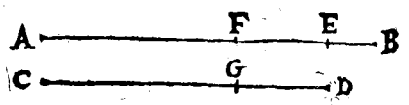
17. Si de choſes egales on retranche choſes inegales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excés des retranchees.

Des grandeurs égales AB, CD eſtans retranchees les inegales, BE, DF dont l'excez eſt EG, il eſt euident que le reſte CF excedera le reſte AE du meſme excez EG.



18. Si de choſes inegales on oſte choſes egales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excez des toutes.

Comme ſi des grandeurs inegales AB, CD, dont l'excez eſt BE, on retranche les grandeurs egales AF, CG, il eſt manifeſte que le reſte FB excedera le reſte GD du meſme excez BE.



19. Le tout eſt egal à toutes ſes parties priſes enſemble.

20. Si vn tout eſt double d'vn tout, & le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi double du reſte.

Comme par exemple, le nombre total 24, eſtant double du nombre total 12: & 18, retranché de celuy-là, double de 5, retranché de ceſtuy-cy; 14, reſte du premier tout, ſera auſſi double de 7, reſte du ſecond tout.

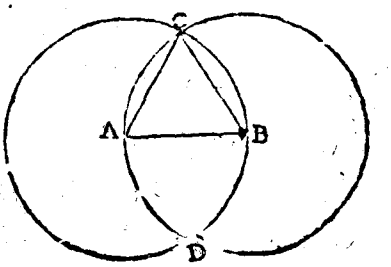
ELEMENT PREMIER.

PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interuale de AB, soit descrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'interualle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'vn desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

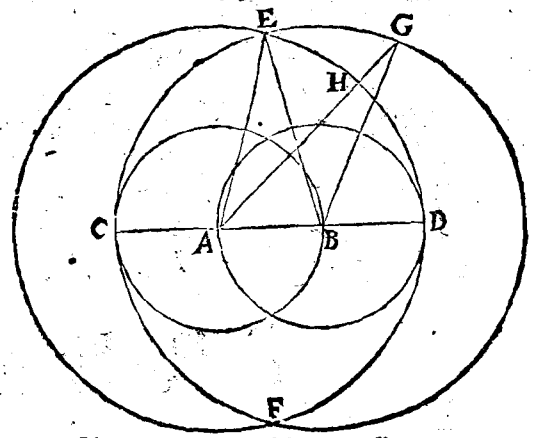


Car le costé AB, est egal au costé AC par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé BA est égal au coste BC. Dõc par la 1. com. sent. les costés CA, & CB seront égaux, chacun estant égal à AB: & partant le triangle ABC decrit sur AB, est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur vne ligne droicte donnee vn triangle Isoscelle, & vn Scalene, ce que nous ferons aussi en ceste maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient descrits deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'autre

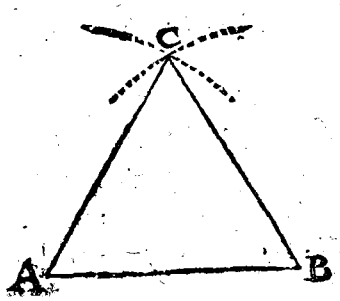
vers les circonferences iuſques en C & D: puis du centre A, & interuale AD, ſoit deſcrit le cercle DEF: Item, du centre B, & interuale BC, le cercle CEF, couppant le premier és poincts E & F, de l'un ou l'autre deſquels, ſçauoir de E, ſoient menees aux poincts A & B, les deux lignes EA, EB: Ie dis que le triangle AEB, fait ſur la ligne donnee AB, eſt Iſoſcelle, qui eſt que les deux coſtez AE, EB, ſont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15 def. AE, eſt egale à la ligne droicte AD, & icelle AD eſt double de AB, veu que BA, & DB, ſont egales entr'elles: auſſi AE ſera double de AB. Derechef, parce que BE eſt egale à BC, & icelle BC eſt double de AB, auſſi BE, ſera double d'icelle AB. Veu donc que l'vn & l'autre coſté AE & BE eſt double de la meſme AB, ils ſeront egaux entr'eux par la 6. com. ſent. & partant plus grands que la ligne AB. Donc le triangle AEB eſt Iſoſcelle. Maintenant, ſi du poinct A, on tire la ligne droicte AG à la circonference EGF, qui ne ſoit la meſme que AE, ou AD, couppant la circonference EHD en H, & de G on mene à B la ligne droicte GB, ſera conſtitué le triangle AGB ſur la ligne AB, lequel ie dis eſtre ſcalene. Car par la 15. def. tant AH, AD, que BG, BC ſont egales. Mais AD, BC ſont doubles de AB: d'icelle ſeront donc auſſi doubles AH, BG: & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG eſt plus grande que AH, ou que BG: le triangle AGB ſera ſcalene: ce qu'il falloit faire.



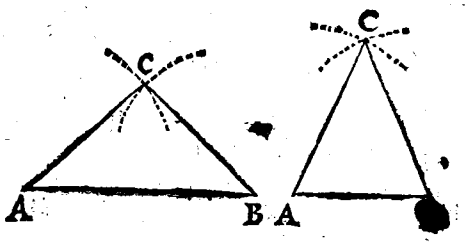
Or eſt icy à noter que pour briefueté nous mettons ſouuentesfois ce mot ligne au lieu de ligne droicte: & quelquesfois auſſi nous poſons ſimplement deux lettres capitales: comme par exemple AB, au lieu de dire la ligne droicte AB, c'eſt pourquoy quand on trouuera ledit mot ligne poſé ſimplement, ou bien deux lettres capitales de ſuite, il faudra entendre vne ligne droicte. Semblablement quand on trouuera ce mot angle, ou trois lettres capitales poſees ſimplement de ſuitte ſans aucune explication, il faudra entendre vn angle rectiligne, le lieu duquel ſera touſiours denotté par la lettre du milieu, ainſi que nous auons deſia remarqué à la 12. Def.

Et d'autant qu'en la conſtruction & demonſtration de la plus part des problemes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire pluſieurs lignes qui ne ſont neceſſaires pour pratiquer leſdits problemes, nous enſeignerons en ſuitte de leurs demonſtrations, comme on peut facilement & briefuement conſtruire leſdits problemes, & principalement ceux qui ſont les plus en vſage chez les Mathematiciens, & en la pratique deſquels on peut apporter quelque briefueté.

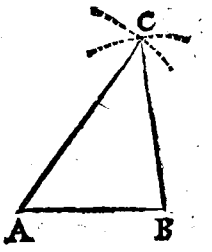
Premierement donc, pour deſcrire vn triangle equilateral ſur vne ligne droicte donnee AB, des centres A & B, mais de l'interualle d'icelle AB, ſoient deſcrits deux arcs de cercles s'entrecouppans en C: puis à iceluy poinct C, ſoient tirees les lignes droictes AC, BC, & ſera fait le triangle equilateral ACB.



Mais pour descrire vn triangle Isoscelle sur ladite ligne AB : des centres A & B, mais d'vn interuale plus grand qu'icelle AB, si on veut les costés plus grands que la ligne donnee, ou moindre (& toutesfois plus grand que la moitié d'icelle AB) si on veut les costez moindres: & soient descrits deux arcs s'entrecouppans en C, puis tirées les deux lignes AC, BC, lesquelles feront sur AB le triangle Isoscelle ACB.



Et pour construire vn triangle scalene sur ladite AB, du centre B, & d'vn interualle plus grand que BA soit descrit vn arc, puis du centre A, & d'vn interualle encore plus grand que le precedent, soit descrit vn autre arc qui couppe le premier en C, auquel poinct soient menees les deux lignes droictes AC, BC, & sera fait le triangle scalene ACB.



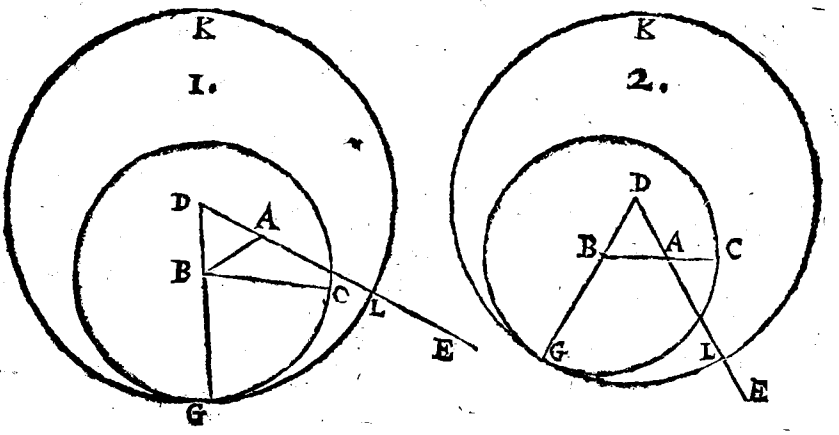
Voila donc comme il faut descrire sur vne ligne donnée vn triangle ou equilateral, ou Isoscelle, ou scalene, & sur la 22. prop. de ce liure nous enseignerons comme il faut construire quelconque triangle ayant les trois costez egaux à trois lignes droictes donnees.

PROB. 2. PROP. II.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee BC: & il faut du poinct A, mener vne ligne droicte egale à icelle donnee BC.

De l'vn ou l'autre extreme de la ligne donnee BC, sçauoir est de B, comme centre, & de l'interualle d'icelle BC, soit descrit le cercle CG: puis du poinct donné A, au centre B, soit menee la ligne droicte AB (sinon que le poinct A fut donné en la ligne BC, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne AB par la precedẽte proposition soit descrit le triangle equilateral ADB, & soit continué le costé DB, iusques à ce qu'il rencon-



tre la circonference en G: mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'interualle de la ligne droicte DG, soit d'escrit le cercle GkL couppant la ligne DE en L: Ie dis que la ligne AL, qui est menee du poinct donné A, est egale à la ligne droicte donnee BC.

Car les lignes droictes DG & DL sont egales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles lignes si on oste DA & DB, qui sont egales, estant DAB triangle equilateral: les restantes BG & AL seront aussi egales par la 3. com. sent. Mais BG est egale à BC, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc AL sera egale à BC, parce que les choses egales à vne mesme sont egales entr'elles. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte AL egale à la ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Ce probleme peut auoir diuers cas: car où le poinct donné est posé en la mesme ligne droicte donnee, ou hors icelle: & selon chacune de ces positions il y peust encor auoir diuers cas, deux desquels seulement nous auons rapporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a tousiours vne mesme construction & demonstration.

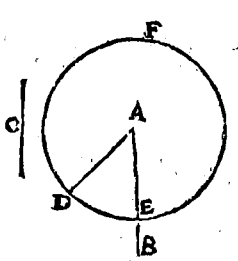
Que si en la construction on fait sur la ligne droicte AB le triangle ABD Isosceelle au lieu qu'il a esté fait equilateral, on demonstrera en la mesme maniere la ligne droicte AL estre egale à la ligne droicte BC.

Quant a la practique de ce probleme, elle est fort facile: car il n'y a qu'à prendre la ligne donnee BC, & de son interualle descrire vn arc du centre A, & quelconque ligne droicte menée d'iceluy centre à cet arc, sera egale à la ligne droicte donnee BC.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estans donnees, oster de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient les deux lignes droictes inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne egale à C.



A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne AB, sçauoir est au poinct A, soit posee par la precedente prop. la ligne droicte AD egale à la moindre C: puis du centre A, & de l'interualle AD, soit descrit vn cercle couppant AB en E. Ie dis que la ligne AE est egale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droictes AD, AE sont egales: & par la construction AD est egale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi egale à C. Nous auons donc osté de AB la ligne AE egale à C, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Il y peut bien auoir diuers cas en ce probleme, à cause des diuerses positions ausquelles se peuuent rencontrer les deux lignes donnees, mais en tous ces cas-là on

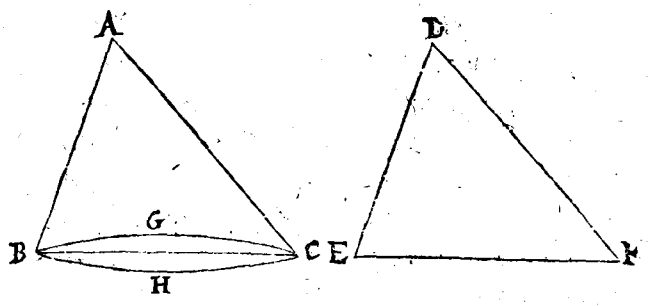
peut tousiours faire la meſme conſtruction & demonſtration que cy-deſſus, comme Proclus a fort bien remarqué ſur ceſte prop.

Quant à la pratique de ce probleme, elle eſt tres-aiſee, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnee, & de l'interuälle d'icelle, deſcrire de l'vn ou l'autre extreme de la plus grande ligne vn petit arc, qui couppera d'icelle, vne ligne egale a la moindre donnee.

THEOREME 1. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la baſe ſera egale à la baſe; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, deſquels le coſté AB ſoit egal au coſté DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que la baſe BC ſera egale à la baſe EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC egal au triangle DEF.

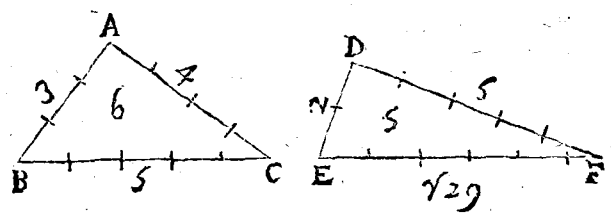


Qu'il ne ſoit ainſi; ſi on entend le triangle DEF, eſtre poſé ſur le triangle ABC, en ſorte que le poinct D ſoit ſur le poinct A, & que DE tombe ſur AB, auſſi DF tombera ſur AC: autrement l'angle A ne ſeroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les coſtez AB & AC ſont egaux aux coſtez DE & DF, chacun au ſien, ils conuiendront par la 8. com. ſent. conuertie, & partant les extremitez E & F tomberont ſur les extremitez B & C: ainſi la baſe EF conuiendra auec la baſe BC: car ſi elle ne conuenoit, elle tomberoit ou au deſſus d'icelle BC, comme BGC, ou au deſſous, comme BHC: ce qui eſt impoſſible, attendu que deux lignes droictes ne peuuent enclore vne eſpace par la 12 com. ſent. Donc les deux baſes BC, & EF conuiendront, & partant ſeront egales entr'elles par la ſuſdite 8. com. ſent. Et par ainſi tout le triangle DEF conuiendra auec tout le triangle ABC, conſequemment egal à iceluy, & l'angle B conuiendra auſſi auec l'angle E, & l'angle C auec l'angle F; partant egaux. Si donc deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

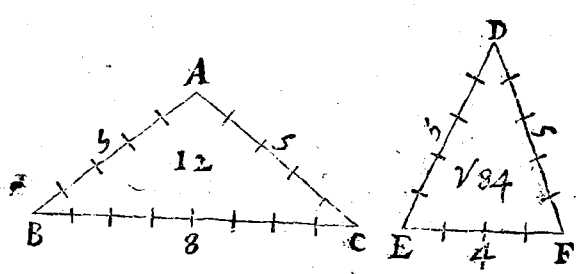
SCHOLIE.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y ſont du tout neceſſaires; la premiere deſquelles eſt que deux coſtez d'vn triangle ſoient egaux aux deux coſtez de l'autre chacun au ſien: & la ſeconde, que les deux angles contenus d'iceux coſtez egaux, ſoient auſſi egaux. Car defaillant l'vne ou l'autre de ces deux conditions, ny les baſes, ny les autres angles ne pourroient iamais eſtre egaux: & la derniere defaillant, les triangles peuuent bien eſtre quelquefois egaux, mais le plus ſouuent ils ſont inegaux: ce que nous pourrions facilement demonſter icy n'eſtoit que pluſieurs choſes à ce requiſes n'ont encore eſté demonſtrees: neantmoins afin de rendre aucunement euidente la neceſsité des ſuſdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus ſur ceſte propoſition, & Clauius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, ſoient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D egaux, ſçauoir droicts; & les deux coſtez AB, AC egaux aux deux coſtez DE, DF, non chacun au ſien, mais ces deux-là pris enſemble egaux à ces deux-cy auſſi pris enſemble: & ſoit AB 3, & AC 4, qui adiouſtez enſemble font 7, mais DE ſoit 2, & DF 5, qui font auſſi enſemble 7. Ce qu'eſtant ainſi, la baſe BC ſera 5, & la baſe EF, racine quarree de ce nombre 29, laquelle eſt plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou ſuperficie du triangle ABC ſera 6: mais l'aire du triangle DEF ne ſera que 5. Finalement les angles ſur la baſe BC ne ſeront pas egaux aux angles de deſſus la baſe EF, chacun au ſien. Toutes leſquelles inegalitez aduiennent à cauſe de ce que les coſtez AB, AC ne ſont pas egaux aux coſtez DE, DF chacun au ſien.



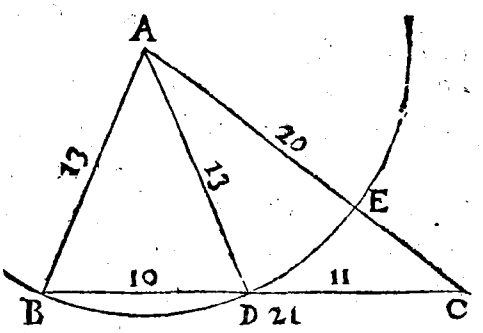
Quant a la ſeconde condition: Les coſtez AB, AC du triangle ABC ſoient egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & chacun d'iceux ſoit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux coſtez ſoient inegaux, & ſoit A plus grand que D. Toutes leſquelles choſes eſtans ainſi, la baſe BC ſera plus grande que la baſe EF, comme il ſera demonſtré en la 24. prop. de ce liure.



Que ſi nous poſons la baſe BC eſtre 8, & la baſe EF 4, l'aire du triangle ABC ſera 12; mais l'aire du triangle DEF ſera la racine quarree de ce nombre 84, laquelle eſt plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui eſt tres-bien cognen des Geometres.

Et afin qu'on n'eſtime pas que ceſte inegalité aduienne à raiſon de ce que tous les quatre coſtez des triangles ſont egaux, & rendre tant plus manifeſte la neceſsité de

la seconde condition de ce theoreme, soit vn triangle ABC duquel le costé AB soit moindre que le costé AC, & aussi que la base BC. Du centre A, & de l'interualle du petit costé AB, soit descrit vn cercle BDE qui couppera tant le plus grand costé AC, que la base BC: Car autrement il passeroit ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy; ce qui est absurde, veu que toutes les lignes droictes tirées du centre A à la circonference du cercle BDE, doiuent estre egales entr'elles par la 15. def. Qu'il couppe donc la base BC en D, & soit tiree la ligne AD. Par la mesme 15. def. AB est egale à AD, & AC est commune à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux costez AB, AC egaux aux deux costez AD, AC, chacun au sien; mais l'angle DAC, contenu des deux costez AD, AC, n'est que partie de l'angle BAC, contenu des costez egaux à ceux-là; & partant la base DC ne sera aussi que partie de la base BC, & pareillement le triangle ADC partie du triangle ABC. Ce qui est aussi manifeste par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres sçauent tres-bien que le costé AB estant 13, le costé AC 20, & la base BC 21; le costé AD sera aussi 13, & la base DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle ABC sera 126, & celuy du triangle DAC ne sera que 66. Donc afin que de deux triangles les bases soient egales entr'elles, & leurs angles aussi egaux entr'eux, & pareillement les triangles egaux; il est du tout necessaire que non seulement chaque costé de l'vn soit egal à chaque costé de l'autre, mais aussi que les angles contenus d'iceux costez soient egaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.



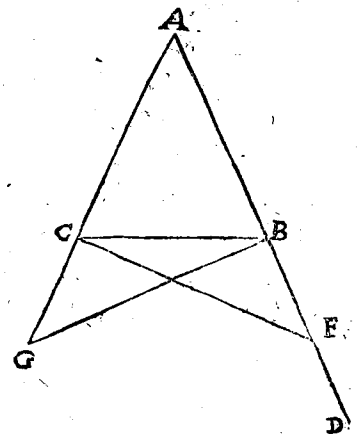
Finallement, nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generales estans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'aduient pas en toutes propositions, comme on peut voir en nostre traicté des triangles spheriques, c'est pourquoy nous estendrons toutes ses propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les specifie pas.

Les triangles Isosceles, ont les angles sur la base egaux: & les costez egaux estans continuez, les angles exterieurs sous la base sont egaux.

Soit le triangle Isoscele ABC: Ie dis premierement que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC, costez egaux iusques en D & G: & soit fait AF egale à AG par la 3. prop. & soient menees les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AB. & AG egaux aux deux costez AC, & AF, chacun au sien; & par 4. proposition, la base BG sera egale à la base CF, & l'angle ABG egal à l'angle ACF, & l'angle G egal à l'angle F. Item les triangles GCB,

FBC, ayant l'angle G egal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC egaux aux deux costez CF & FB: (Car CF a esté prouué tantost egal à BG; & AG, AF estans egaux; & AC, AB aussi egaux; les restes CG, & BF seront aussi egaux) par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir est l'angle GBC, egal à l'angle FCB. Et qui des angles egaux ABG & ACF, oste les angles egaux CBG & BCF; les demeurans ABC & ACB, seront egaux.



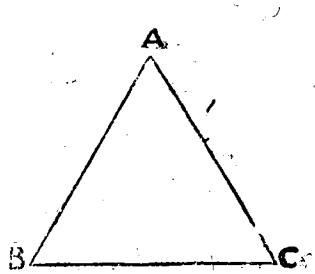
Pour la seconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont egaux, sçauoir FBC à BCG, elle a esté suffisamment demonstrée, lors qu'on a prouué que les triangles GBC, & CFB auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Isosceles, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

SCHOLIE.

Ceste proposition est aussi vraye ès triangles equilate-raux. Car les deux costez AB, AC du triangle ABC estans egaux entr'eux, ou l'autre costé CB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral, ou bien inegal, comme il arriue au triangle Isoscele: Il s'enfuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il appert par la demonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De ceste 5. proposition il s'ensuit que tout triangle equilateral est aussi equiangle, c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle equilateral sont egaux entr'eux. Car soit vn triangle equilateral A B C: *Donc par ce que les deux costez* A B, A C *sont egaux, par la 5 prop. les deux angles* B & C *seront egaux. Semblablement, pour ce que les deux costez* AB, BC *sont egaux, les deux angles* A & C *seront aussi egaux. Donc par la* 1. *com. sent. tous les trois angles* A, B, C, *seront egaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonstrer.*

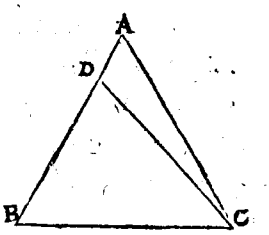


THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles, seront aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle A B C, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base

Bc ſont egaux : Ie dis que les deux coſtez AB & AC qui ſouſtendent les ſuſdits angles egaux, ſont auſſi egaux.



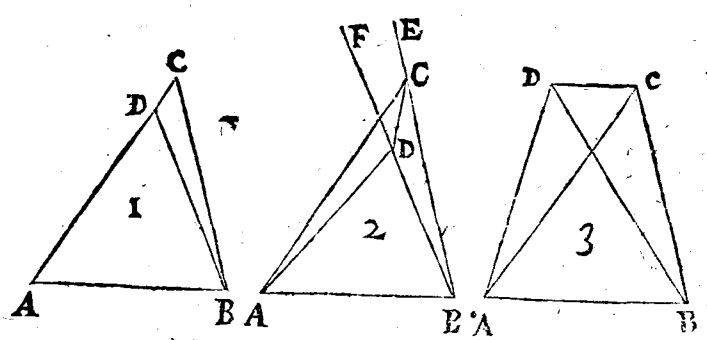
Autrement, ſoit AB plus grand que AC, s'il eſt poſſible : on en pourra donc retrancher vne partie egale à AC par la 3. prop. laquelle partie ſoit BD, & ſoit menee la ligne DC: les deux triangles DBC, & ACB, ont deux coſtes egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles compris d'iceux coſtez auſſi egaux; car les deux coſtez BD & BC du triangle BDC ſont egaux aux deux coſtez AC, & CB du triangle ACB, & l'angle B egal à l'angle ACB; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, ſeront egaux; ce qui eſt impoſſible: car l'vn eſt partie de l'autre, Donc les coſtez AB, & AC n'eſtoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

CORROLAIRE.

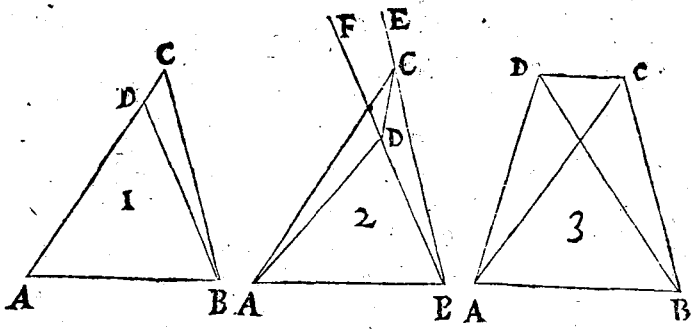
Il s'enſuit de cette propoſition, que tout triangle equiangle, c'eſt à dire qui a tous les angles egaux, eſt equilateral: car par ce qui a eſté icy demonſtré, les angles ABC, ACB eſtans egaux, les deux coſtez AB, AC, ſeront pareillement egaux: Mais ſi les deux angles A & B eſtoient encore egaux, auſſi les coſtez CA, CB ſubtendans iceux angles, ſeroient auſſi egaux: & partant tous les trois coſtez AB, AC, BC egaux entr'eux, puis que les choſes egales à vne meſme, ſont egales entr'elles.

Si des extremitez de quelque ligne droicte, on mene deux autres lignes droictes, ſe rencontrans à vn poinct; des meſmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres egales à icelles, chacune à la ſienne, & de meſme part, ſe rencontrans à vn autre poinct.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle ſoient menées deux lignes droictes AC & BC ſe rencontrant à quelconque poinct C. Ie dis que des meſmes extremitez A & B, & de la meſme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales à icelles AC, BC, chacune à la ſienne, qui ſe rencontrent à vn autre poinct que C; c'eſt à dire que ſi de l'extremité A on mene la ligne AD egale à AC, & de l'extremité B la ligne BD egale à BC; il ne peut eſtre que le poinct de rencontre D, ſoit autre que le poinct de rencontre C.



Car si faire se peut, que le poinct de rencontre D, tombe ailleurs qu'au poinct C: où iceluy poinct D tombera sur l'vne ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.



Premierement iceluy poinct de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent egales entr'elles, sçauoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D, ne se fera point sur AC, ny aussi sur BC, à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy poinct de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure: & apres auoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posees egales, le triangle ACD sera Isoscele, & par la 5. proposition les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront egaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE: (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE: & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE. Derechef, puis que les lignes BC, BD, sont posees egales, le triangle BCD doit estre Isoscele, & partant les angles CDF & DCE sous la base DC, seront egaux par la mesme 5. prop. Mais il a esté demonstré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le mesme angle CDF est moindre que l'angle DCE, & aussi egal à iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD, il s'ensuiura que les deux triangles ADC & BCD seront Isosceles; & partant qu'ils auront les angles sur la base CD egaux: sçauoir est ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, est plus grand que ACD: donc aussi BDC sera plus grand que ADC, c'est à dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC: Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C: Parquoy si des extremitez de quelque ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

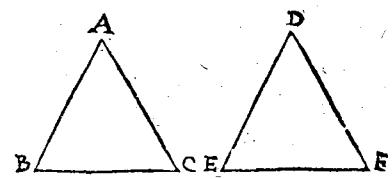
Il est manifeste que si AD, BD *prises ensemble estoient faictes egales à* AC, BC *aussi prises ensemble, le poinct de leur rencontre* D, *seroit autre que le premier poinct* C; *comme il seroit encore si on faisoit* AD *égale à* BC, *&* BD *egale à* AC, *mais en l'vne ny l'autre maniere, icelles lignes* AD, BD *ne seroient pas selon l'intention d'Euclide: car il veut que non seulement les lignes* AD, BD, *soient egales aux lignes* AC, BC, *chacune à la*

ne à la ſienne, mais auſsi que les lignes egales ſoient menees d'vn meſme poinct, & de plus que ce ſoit de meſme part. Car il eſt tres euident qu'icelles AD, B D, *peuuent bien eſtre tirées de l'autre coſté de* C, *c'eſt à ſçauoir au deſſoubs de la ligne* AB. *Donc fort à propos Euclide met en ce theoreme que les lignes ſoient egales chacune à la ſienne, & menees de meſme part, &c.*

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux coſtés égaux à deux coſtés, chacun au ſien, & la baſe egale à la baſe; ils auront auſſi l'angle compris d'iceux coſtez egaux, egal à l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, deſquels le coſté AB, eſt egal à DE; AC à DF, & la baſe BC à la baſe EF: Ie dis que les angles A & D compris d'iceux coſtez egaux, ſont egaux.



Car puis que la baſe BC eſt egale à la baſe EF; ſi on entend icelles eſtre poſees l'vne ſur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct E ſur le poinct B, & F ſur C: & par la 7. prop. les deux lignes ED, & FD, qui ſont egales à BA & CA, ſe rencontreront au poinct A, & conuiendront auec icelles lignes BA & CA: partant conuiendront auſſi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par conſequent ſeront egaux par la 8. com. ſent. Donc ſi deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

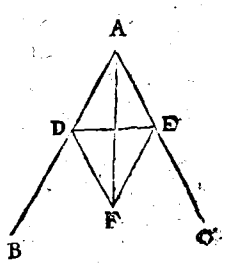
Puis que la baſe EF conuient auec la baſe BC, & les coſtez DE, DF, conuiennent auſsi auec les coſtez AB, AC, il s'enſuit que non ſeulement l'angle A eſt egal à l'angle D; mais auſsi que l'angle E eſt egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Coupper en deux egalement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut coupper en deux egalement; c'eſt dire en deux angles egaux entr'eux.

Soient de AB & AC retranchées deux parties egales AD, AE: & apres auoir mené la ligne DE, ſur icelle ſoit deſcrit le triangle equilateral DEF par la premiere propoſition, & ſoit menée la ligne AF: Ie dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux egalement.



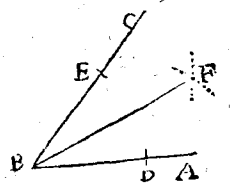
Car puiſque les lignes AD, AE ont eſté priſes egales, & AF eſt commune aux deux triangles DAF, EAF; les deux coſtez AD & AF, du triangle DAE, ſeront egaux

aux deux costez AE & AF du triangle EAF, & la base D F egale à la base E F: (estant D F E triangle equilateral) donc par la 8. prop. l'angle D A F sera egal à l'angle E A F: & partant l'angle B A C est couppé en deux egalement par la ligne AF. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Que si au lieu du triangle equilateral cy-dessus construit, on en faict vn Isoscelle, la demonstration sera tousiours la mesme: Ce qu'on peut aussi faire aux trois propositions suivantes.

Quant à la practique de cette proposition nous l'auons enseignée en nostre Geometrie practique Probl. 5. Et neantmoins nous ne laisserons de la repeter icy; Et pource soit vn angle rectiligne ABC, qu'il faut coupper en deux egalement. Du centre B & de tel interualle qu'on voudra, soient couppees BD, BE egales; puis des poincts D & E soient descrits deux arcs s'entrecouppans en F, & d'icelle intersection soit tirée par le poinct B, la ligne droicte F B, laquelle diuisera l'angle donné A B C en deux egalement.



Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi coupper vn angle rectiligne en quatre parties egales, en huict, en seize, en trente deux, & ainsi consecutiuement, en procedant tousiours par augmentation double: Car apres qu'vn angle rectiligne est couppé en deux egalement, si on diuise derechef chasque partie en deux egalement, on aura quatre angles egaux. Que si on couppe derechef chacun d'iceux en deux egalement, nous aurons huict angles egaux, & ainsi consequemment.

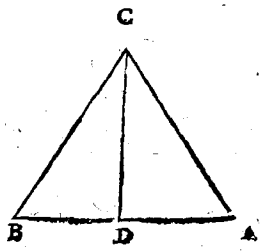
PROBL. 5. PROP. X.

Coupper en deux egalement vne ligne droicte donnée & terminée.

Soit la ligne droicte donnée & terminée AB: laquelle il faut coupper en deux egalement.

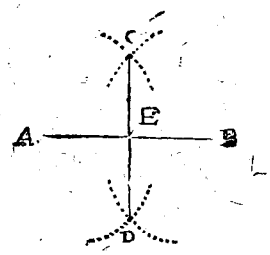
Sur icelle ligne AB soit construit le triangle equilateral ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C soit couppé en deux egalement par la ligne C D, tirée iusques à ce qu'elle coupe AB en D. Ie dis qu'icelle AB est couppée en deux egalement en D.

Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle ACB, est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez A C, C D, egaux à deux costez BC, C D, chacun au sien, & les angles du poinct C, qu'ils comprennent aussi egaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera egale à la base DB. Donc AB est couppee en deux egalement en D. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de cette propoſition en noſtre Geometrie practique Prob. 1. & ce faict ainſi: Pour diuiſer la ligne droicte AB en deux parties egales, du centre A, & de quelque interualle que ce ſoit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) ſoient deſcrits deux arcs de cercle, l'vn au deſſus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au deſſous, comme D, puis du centre B, & du meſme interualle ſoient deſcris deux autres arcs qui couppent les precedens eſdicts poincts C & D, puis d'vne interſection à l'autre, ſoit tiree la ligne droicte CD, laquelle couppera AB en deux egalement au poinct E. Eſt à noter que ſi de part ou d'autre de AB on ne pouuoit deſcrire deux arcs comme D, il faudroit ayant deſcrit les deux arcs C, ouurir le compas d'vn plus grand interualle, & en deſcrire deux autres arcs au deſſus de C, & la ligne menee d'vne interſection à l'autre, & continuee iuſques à AB, la couppera en deux egallement.



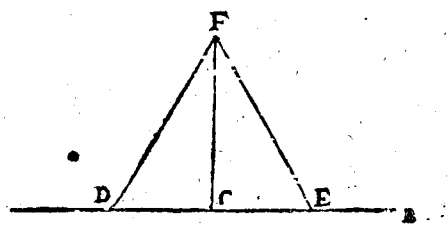
Or il appert par ce que deſſus, qu'on peut auſſi couppper vne ligne droicte finie en quatre parties egales, en 8, en 16, en 32. &c. ainſi que nous auons dit, en la precedente prop. de la diuiſion de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiſer vne ligne droicte terminee en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enſeigné en noſtre Geometrie pratique Probl. 7: & ce tant Geometriquement que Mechaniquement auec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnee, & d'vn poinct en icelle, eſleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

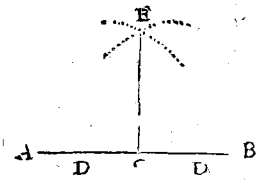
Soit vne ligne droicte donnee AB, & le poinct en icelle C: d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du poinct C prinſes les deux lignes egales CD & CE par la 3. propoſition, & ſur DE ſoit faict le triangle equilateral DFE, & de C à F ſoit menée la ligne CF: Ie dis qu'icelle CF eſt la ligne perpendiculaire demandée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, ſçauoir DC à CE par la conſtruction, & CF commun, & la baſe DF egale à la baſe EF, à cauſe que le triangle DFE eſt equilateral; par la 8. prop. les angles au poinct C, contenus des coſtez egaux, ſeront egaux; & partant par la 10. def. ils ſont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainſi qu'il falloit faire.

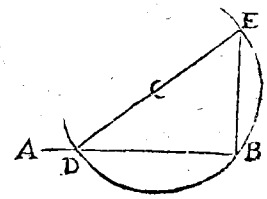


SCHOLIE.

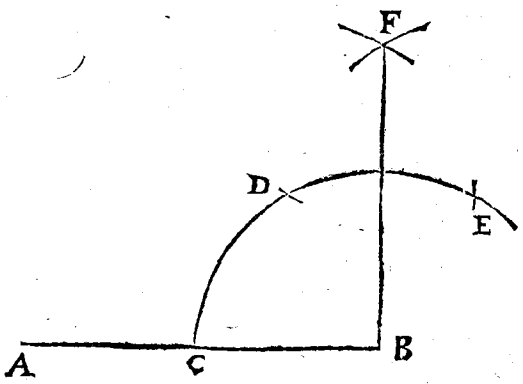
La pratique de cette proposition est enseignee en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neantmoins nous la repeterons encore icy. Pour esleuer sur A B vne ligne perpendiculaire du poinct C, soient marquees en icelle A B deux poincts comme D, egalemens distans de C, & d'iceux poincts, soient descrits deux arcs d'vn mesme interualle s'entrecouppans en E, de laquelle intersection soit tiree à C la ligne droicte EC, qui sera perpendiculaire à ladite A B.



Que si le poinct donné estoit B à l'extremité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle estant continuee faire comme dessus: ou bien nous prendrons vn poinct au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus prez du poinct donné B, que de l'autre extremité A; puis d'iceluy poinct C, & de l'interualle C B, nous descrirons la circonference D B E, qui couppe la ligne donnée en D, & d'iceluy poinct D par C, nous tirerons la ligne droicte D C E couppant la susdite circonference en E, duquel poinct E soit tiree la ligne droicte E B, laquelle sera perpendiculaire à A B.



Autrement, du poinct donné B, & de quelque interualle que ce soit B C, moindre toutesfois que la ligne donnee, soit descrit vn arc C D E plus grand que le tiers de la circonference entiere du cercle, puis sur iceluy arc C D E soient pris deux interualles C D, D E, chacun egal au semidiametre B C, & des poincts D; E, soient descrits deux arcs de cercle s'entrecouppans au poinct F, duquel soit tiree au poinct B la ligne droicte F B, qui sera perpendiculaire à A B.



Est à noter qu'encore que le poinct donné B ne fut l'extremité de la ligne, on pourroit neantmoins mener la perpendiculaire par l'vne ou l'autre des deux manieres cy-dessus.

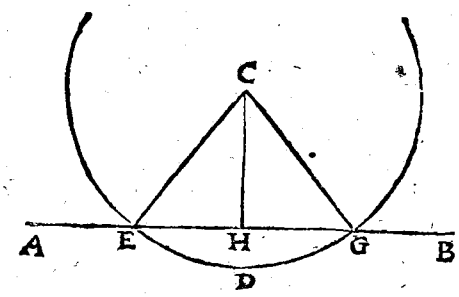
PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminee, & d'vn poinct hors icelle.

Soit la ligne droicte donnée & interminee A B, & le poinct hors icelle C,

duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

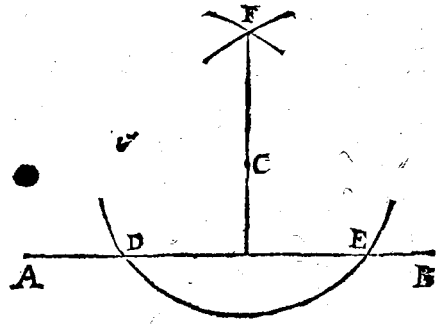
Soit pris audelà de la ligne AB quelconque poinct D; puis du centre C, & de l'interualle CD, soit descrit le cercle EDG, couppant la ligne AB és poincts E & G, puis par la 10. prop. soit couppee EG en deux egalement au poinct H, & soit menee la ligne CH, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.



Car estans tirées les lignes droictes CE, CG; les deux costez EH & HC; du triangle EHC, seront egaux aux deux costez GH & HC du triangle GHC, vn chacun au sien, & la base CE est egale à la base CG, estans icelles tirees du centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du poinct H seront egaux; & partant par la 10. definit. ils seront droicts, & la ligne CH perpendicul. à AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique de ce probleme est enseignée en nostre Geometrie practique probl. 3. & est telle qu'il ensuit. Pour mener à vne ligne donnee AB vne perpendiculaire d'vn poinct donné hors icelle, comme C; d'iceluy poinct C soit d'escrit vn arc qui couppe la ligne donnee en D & E, puis d'iceux poincts, comme centres, soient d'escrits deux arcs de cercles d'vn méme interualle, qui s'entrecouppent au poinct F: (il n'importe pas de quel costé ce soit, au dessus ou au dessoubs de la ligne AB) puis d'iceluy poinct F par celuy donné C, soit tiree vne ligne droicte FCG, qui rencontre la donnee en G, & icelle FCG sera perpendiculaire à AB.

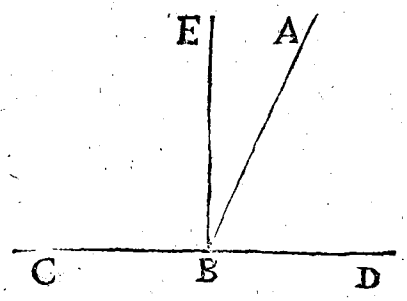


THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles, ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD, fait les angles CBA, & DBA: Ie dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne AB eſt perpendiculaire à CD, ou elle ne l'eſt pas: Si elle eſt perpendiculaire, les deux angles ſont droicts par la 10. def. Si elle ne l'eſt pas, ſoit leuee la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE ſeront droicts par la ſuſdite deff. mais par la 19. com. ſent. le ſeul angle droict DBE eſt egal aux deux angles DBA, ABE enſemble: parquoy ſi on leur adiouſte le commun CBE, les trois angles DBA, ABE & CBE ſeront egaux aux deux droicts DBE, CBE. Derechef, d'autant que par la meſme 19. com. ſent. les deux angles CBE, ABE enſemble ſont egaux au ſeul ABC: ſi on adiouſte le commun DBA, les deux angles ABC, DBA ſeront egaux aux trois CBE, ABE, DBA: mais ces trois cy ont eſté demonſtrez egaux à deux droicts: donc ces deux-là ABC, ABD ſeront auſſi egaux à deux droicts. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Ceſte demonſtration de Theon eſt ſuiuie par la plus part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayans monſtré comme deſſus, que les deux angles CBE & DBE ſont droicts, concluent incontinent par la 8. com. ſent. que les deux ABC, & ABD enſemble, ſeront donc auſſi egaux à deux droicts, veu qu'ils occupent autant d'eſpace, voire le meſme, que les deux droicts CBE, DBE, & conuiennent auec eux.

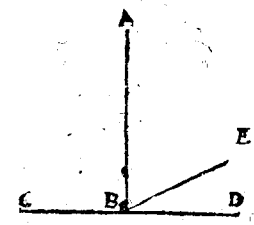
Auſſi Clauius a remarqué, que cette propoſition ſemble dependre de quelque commune notion de l'eſprit: car de ce que l'angle ABC excede l'angle droict EBC, l'angle reſtant ABD eſt excedé par l'angle droict EBD; car comme en celuy-là l'excez eſt l'angle ABE, ainſi en ceſtuy-cy le defaut eſt le meſme angle ABE. Parquoy l'on pourra conclurre, que les angles ABC, ABD ſont egaux à deux droicts, attendu que l'excez de l'angle obtus ABC, eſt le defaut de l'aigu ABD.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte ſe rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faiſant deux angles egaux à deux droicts: icelles deux lignes ſe rencontreront directement.

Soit la ligne droicte AB, & en icelle le poinct B, auquel ſe rencontrent deux autres lignes droictes CB & DB de part & d'autre d'icelle AB, faiſant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: ie dis que CB & DB ſe rencontrent directement, c'eſt à dire que CBD eſt vne ligne droicte.

Autrement, si CBD n'est ligne droicte, soit continuee CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombra ou au dessus de BD, ou au dessous: quelle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme B E, en sorte que CBE soit ligne droicte. D'autant que A B tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, seront egaux à deux droicts par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droicts, & par la 10. com. sent. tous les angles droicts sont egaux entr'eux: donc par la 1. com. sent. ces deux angles A B C, & ABD seront egaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ostant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront egaux, le tout & la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte C B estant prolongee, ne tombera pas au dessus de B D; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité: donc CB, & DB se rencontroient directement. Ce qu'il falloit demonstrer.

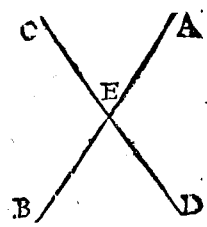


THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se couppans l'vne l'autre au poinct E: Ie dis que les angles opposez au sommet, sçauoir AEC, & DEB, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne C E, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. prop. Item, pour la mesme raison, CEB, & DEB, seront egaux à deux droicts: partant les deux angles A E C & CEB, sont egaux aux deux C E B & D E B. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut aussi dire des deux angles opposez AED, & C E B. Parquoy si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonster.



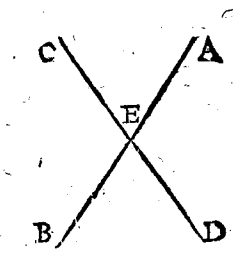
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'entrecouppans, font au poinct de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'vn seul & mesme poinct, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts: car si de E, en la precedente figure, on meine tãt d'autres lignes droictes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituez au poinct E, en plusieurs parties; toutes lesquelles parties prinses ensemble, seront egales aux quatre angles d'iceluy poinct E, par la 19. com. sent. c'est à dire à quatre angles droicts.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy la conuerſe de cette 15. prop. qui, ſelon Proclus, eſt telle.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte ſe rencontrent deux autres lignes droictes, non de meſme part, faiſant les angles au ſommet egaux: icelles deux lignes ſe rencontreront directement.

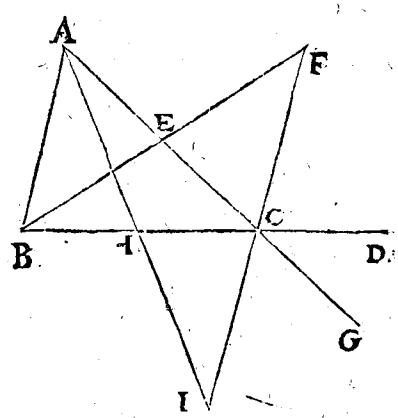


Soit la ligne droicte AB, & vn poinct en icelle E, auquel ſoient menees les deux lignes droictes CE, DE de part & d'autre de AB faiſant les angles CEA, DEB egaux entr'eux. Ie dis qu'icelles lignes CE, DE ſe rencontrent directement. Car adiouſtant aux angles egaux CEA, DEB, l'angle commun CEB: les deux angles CEA, CEB ſeront egaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB ſont egaux à deux droicts par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB ſeront auſſi egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les lignes droictes CE, DE ſe rencontreront directement. Ce qui eſtoit propoſé.

Pelletier a aucunement changé ceſte conuerſe: car il dit que ſi quatre lignes droictes AE, CE, BE, DE ſe rencontrans au poinct E y font quatre angles dont les oppoſez AEC, BED ſoient egaux entr'eux, & les oppoſez BEC, AED, auſſi egaux entr'eux: les deux lignes oppoſites AE, BE ſe rencontreront directement, comme auſſi les deux CE, DE. Ce qui eſt manifeſte, car ſi aux angles egaux AEC, BED, on adiouſte les egaux CEB, AED, par le 2. axiome les deux angles AEC, CEB ſeront egaux aux deux angles BED, AED. Donc tant les deux là que ces deux-cy ſont moitié des quatre angles faicts au poinct E, leſquels par le Corol. prec. ſont egaux à quatre droicts. Parquoy les deux angles AEC, CEB ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes, AE, BE ſe rencontreront directement. Et pour meſme raiſon CE, DE feront auſſi vne ſeule ligne droicte CD.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn coſté de quelconque triangle eſtant prolongé, l'angle exterieur eſt plus grand que l'vn ou l'autre des oppoſés interieurs.



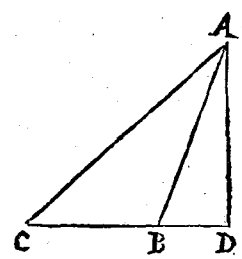
Soit le triangle A B C, duquel le coſté B C ſoit continué iuſques à D. Ie dis que l'angle exterieur A C D eſt plus grand que l'oppoſé interieur B A C: Et encore plus grand que A B C autre oppoſé interieur.

Qu'ainſi ne ſoit: Apres auoir couppé A C en deux egalement en E, ſoit menee la ligne B E, & continuee iuſques en F: en ſorte que E F ſoit faicte egale à B E, & ſoit menee F C. Les deux triangles A E B, & C E F, auront les deux coſtez A E & E B, egaux aux deux coſtez C E & E F, chacun au ſien par la conſtruction

construction, & par la precedente prop. l'angle AEB eſt egal à l'angle CEF: donc par la 4. prop. les baſes AB & FC ſeront egales; & les autres angles egaux, chacun au ſien: & partant l'angle BAE, ſera egal à l'angle ECF qui n'eſt que partie de l'angle ACD, lequel pour ceſte raiſon ſera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que ſi le coſté AC eſt prolongé en G, & BC couppé en deux egalement en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI ſoit egale à AH, & ſoit menee CI: On demonſtrera par meſme raiſon que deſſus, que l'angle externe BCG eſt plus grand que l'interne & oppoſé ABC. Mais par la propoſition precedente à iceluy BCG, eſt egal l'externe ACD: donc iceluy ACD, eſt auſſi plus grand que l'interne & oppoſé ABC. Parquoy en tout triangle, vn coſté eſtant prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ceſte propoſition il s'enſuit (dit Proclus) que d'vn meſme poinct on ne peut mener à vne meſme ligne droicte plus de deux lignes droictes egales entr'elles. Car ſi faire ſe peut, ſoient menees du poinct A à la ligne BC, trois lignes droictes AB, AC, AD, egales entr'elles: d'autant que les coſtez AB, AD, ſont egaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB ſur la baſe BD ſeront egaux. Derechef, pource que les coſtez AB, AC ſont egaux, par la meſme 5. prop. les angles ABC, ACB ſur la baſe BC ſeront egaux. Parquoy veu que chaſque angle ADB & ACB, eſt egal à l'angle ABD, par la 1. com. ſent. l'angle ABC ſera egal à l'angle ADC, c'eſt à dire l'exterieur à l'oppoſé interieur: ce qui eſt abſurde, puis que par ceſte 16. p. l'externe eſt plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droictes egales entr'elles. Ce qui eſtoit propoſé.

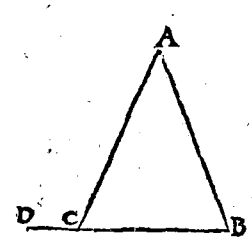


THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils ſoient pris.

Soit le triangle ABC: Ie dis que les deux angles B, & ACB ſont enſemble plus petits que deux droicts; comme auſſi les deux A, & ACB: item les deux A, & B.

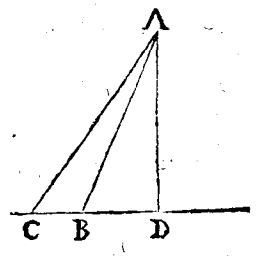
Car apres auoir continué le coſté BC, iuſques en D, il eſt euident par la 16 prop. que l'angle exterieur ACD eſt plus grand que l'oppoſé interieur B: & par la 4. com. ſent. ſi on leur adiouſte l'angle commun ACB, les deux ACD & ACB ſeront plus grãds que les deux B & ACB. Mais les deux ACD & ACB, ſont egaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant ABC & ACB, ſont plus petits que deux droicts.



On demonſtrera pareillement que les deux angles A & ACB: Item les deux angles A & B, en prolongeant vn autre coſté, ſont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonſter.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que d'vn meſme poinct on ne peut mener plus d'vne ligne perpendiculaire ſur vne ligne droicte. Car ſi faire ſe peut, ſoient menees de A ſur la ligne droicte BD, les deux perpendic. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB, ſeront egaux à deux droicts, puis que chacun eſt droict. Ce qui eſt impoßible: car il a eſté demonſtré cy-deſſus que deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux angles droicts.



Il s'enſuit auſſi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle eſt droict, ou obtus, que les autres ſont aigus. Car puis qu'il a eſté demonſtré que deux angles quels qu'ils ſoient, ſont moindres que deux droicts, il eſt neceſſaire que s'il y en a vn droict ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres ſoit aigu: car autrement en vn triangle ſeroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'enſuit encore de cette prop. que ſi vne ligne droicte AB, fait auec vne autre ligne droicte CD, angles inegaux, ſçauoir eſt ABD, aigu, & ABC, obtus, & de quelconque poinct d'icelle AB, on tire vne perpendiculaire ſur CD, comme AD: icelle perpendiculaire AD, tombera de la part de l'angle aigu ABD: car qu'elle tombe, s'il eſt poßible, du coſté de l'angle obtus ABC, comme AC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB, obtus & droict, ſont plus grands que deux droicts; mais auſſi moindres que deux droicts par cette prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tiree de A, ne tombera donc pas du coſté de l'angle obtus, & partant tombera du coſté de l'angle aigu.

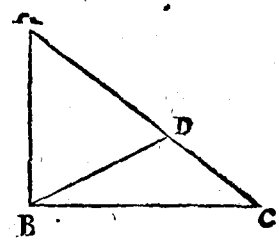
Eſt encore manifeſte par cette prop. que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles de deſſus la baſe d'vn triangle Iſoſcelle, ſont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils ſoient, d'vn triangle equilateral, & les deux de deſſus la baſe d'vn Iſoſcelle ſont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy enſemble, que ces deux-là, ſont moindres que deux droicts par cette prop. chacun d'iceux ſera moindre qu'vn droict, c'eſt à dire aigu: car s'il eſtoit droict, ou obtus, tous les deux enſemble ſeroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle.

Soit vn triangle ABC, ayant le coſté AC plus grand que le coſté AB. Ie dis que l'angle ABC, eſt plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne ſoit ainſi : Puis que AC eſt plus grãd que AB, d'iceluy ſoit retranchée AD, egale à AB, & ſoit menee BD. Le triangle ABD eſt Iſoſcele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & ADB, ſur la baſe BD, ſeront egaux. Or l'angle exterieur ADB, eſt plus grand que l'oppoſé interieur C, par la 16. prop. Mais ABC eſtant plus grand que ABD, il ſera auſſi plus grãd que ſon egal ADB: & à plus forte raiſon ABC ſera plus grand que C. Par meſme raiſon, ſi on poſe le coſté AC, plus grand que le coſté BC; on demonſtrera l'angle ABC eſtre plus grand que l'angle BAC, ſçauoir eſt, ſi de CA on couppe vne ligne egale à BC, &c. Parquoy le plus grand coſté de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



CORROLAIRE.

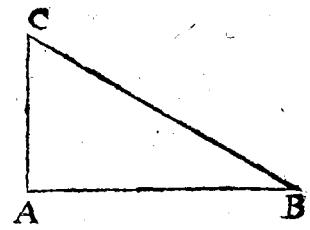
Il eſt donc manifeſte par cette demonſtration que tous les trois angles d'vn triangle ſcalene ſont inegaux.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A eſt plus grand que l'angle C. Ie dis que le coſté BC, qui ſouſtient le plus grand angle A, eſt plus grand que le coſté AB, qui ſouſtient vn moindre angle C.

Autrement, il ſera egal, ou plus petit : Il ne peut eſtre egal, d'autant que le triangle ſeroit Iſoſcelle, & par la 5. prop. les deux angles A & C ſeroient egaux contre l'hypotheſe. Il ne peut auſſi eſtre plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C, ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Il ſera donc plus grand. Par meſme raiſon on prouuera le coſté BC, eſtre plus grãd que le coſté AC, ſi on poſe l'angle A, eſtre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté. Ce qu'il falloit demonſtrer.



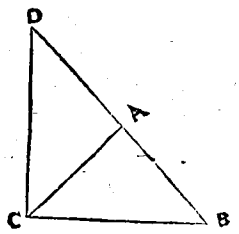
COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ceſte propoſition, que ſi de quelconque poinct on tire ſur vne ligne droicte tant d'autres lignes droictes qu'on voudra, l'vne deſquelles ſoit perpendiculaire, icelle perpendiculaire ſera la plus petite de toutes, puis qu'elle ſera touſiours oppoſee à vn angle aigu, & les autres à l'angle droict fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux coſtez de quelle façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit le triangle A B C : Iedis que deux coſtez d'iceluy, leſquels on voudra, ſçauoir eſt AB & A C, ſont plus grands enſemble, que le troiſieſme coſté BC.

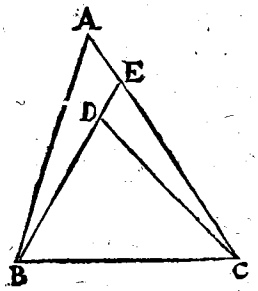


Qu'il ne ſoit ainſi : apres auoir prolongé BA iuſques en D, & fait AD egale à AC, ſoit menee la ligne DC. Le triangle DAC ſera Iſoſcelle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD ſur la baſe D C, ſeront egaux. Mais par le 9 ax. DCB eſt plus grand que D C A : il ſera donc auſſi plus grand que ſon egal ADC: & partant par la 19. prop. BD ſera plus grand coſté que B C. Mais BD eſt egal aux deux coſtez AC & BA : donc auſſi iceux AC & BA ſeront plus grands que BC. On demonſtrera en la meſme maniere que deux autres coſtez tels qu'e l'onvoudra ſont plus grands enſemble que l'autre. Parquoy deux coſtez d'vn triangle pris en quelque ſorte que ce ſoit, ſont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremités d'vn coſté de quelconque triangle, on meine deux lignes droictes ſe rencontrans au dedans d'iceluy: icelles ſeront plus petites que les deux autres coſtez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.

Soit le triangle ABC, & des extremitez du coſté B C, ſoient menees interieurement deux lignes droictes BD, CD, ſe rencontrans au poinct D : Ie dis qu'icelles lignes B D, & C D enſemble, ſont plus petites que les coſtez BA & CA enſemble : Mais que l'angle D, eſt plus grand que l'angle A.



Qu'ainſi ne ſoit : ſoit continuee BD, iuſques au poinct E. Donc par la 20. prop. les deux coſtez BA, & AE, du triangle BAE, ſeront plus grands que le troiſieſme BE: Et ſi on leur adiouſte choſe commune EC, par la 4. com. ſent. les tous CE, EB ſeront touſiours plus petits que les tous CE, EA, AB, c'eſt à dire CA, AB. Pareillement les deux coſtez CE & ED, du triangle CED, ſont plus grãds que le troiſieſme

CD, auſquels ſi on adiouſte choſe egale, ſçauoir DB; les tous CE, ED, DB, ou CE, EB, ſeront touſiours plus grands que les tous CD & DB. Mais il a eſté demonſtré que CA, AB ſont plus grands que CE, EB: donc CA, AB ſeront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui eſtoit propoſé en la premiere partie.

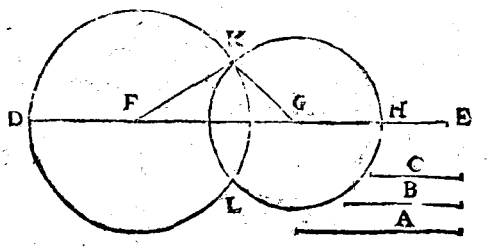
Pour la ſeconde partie, ſçauoir que l'angle BDC eſt plus grand que l'angle A. D'autant qu'il eſt exterieur du triangle CED, il ſera plus grand que ſon oppoſé interieur CED par la 16. prop. Mais pour la meſme raiſon, iceluy angle CED eſt auſſi plus grand que ſon oppoſé interieur A: donc à plus forte raiſon BDC ſera ſera plus grand que A. Si donc des extremitez d'vn coſté de quelconque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes egales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles ſoient priſes, ſoient plus grandes que l'autre; d'autant que de tout triangle, deux coſtez de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, deſquelles deux de quelle façon qu'elles ſoient priſes ſont plus grandes que la troiſieſme: car autrement d'icelles on ne pourroit pas conſtituer vn triangle, comme il appert de la 20. prop. en la quelle il a eſté demonſtré que de tout triangle deux coſtez ſont touſiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle ayant les trois coſtez egaux à icelles trois lignes donnees.

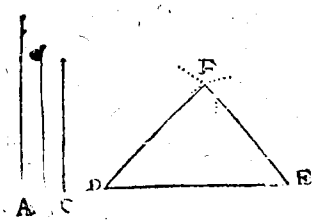
Soit priſe vne ligne droicte, tant grande qu'il ſera de beſoin, comme DE, de laquelle ſoit retranchee DF, egale à A; & puis du reſte ſoit priſe FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'interualle FD, ſoit deſcrit vn cercle DKL: Item vn autre cercle HkL du centre G, & de l'interualle GH, couppant le premier cercle au poinct K duquel ſoient menées les deux lignes KF, KG. Ie dis que les coſtés du triãgle FKG ſont egaux aux trois lig. donnees A, B, C.



Car d'autant que FD, FK ſont egales par la def. du cercle: item GK & GH; les trois coſtez du triangle FKG, ſont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, leſquelles eſtans egales aux trois donnees par la conſtruction; auſſi les coſtez du triangle FKG ſeront egaux à icelles lignes donnees A, B, C. Nous auons donc faict vn triangle de trois lignes droictes egales aux trois lignes droictes donnees A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

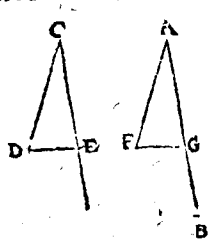
La pratique de ce probl. eſt enſeignee en noſtre Geometrie practique Prob. 11, *& eſt telle: Soit priſe la ligne droicte DE egale à quelconque des donnees comme à A, puis du poinct D, & interualle de la ligne B, ſoit deſcrit vn arc F: ſemblablement du poinct E, & de l'interualle de l'autre ligne C, ſoit deſcrit vn autre arc qui coupe le premier au poinct F: puis à ladite interſection ſoient tirees les deux lignes droictes DF, EF; & ſera fait le triangle DEF, ayant les trois coſtez egaux aux trois lignes droictes donnees A, B, C.*



PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

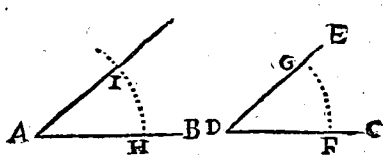
Soit la ligne donnée AB; & le poinct en icelle A; ſur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné C.



Ayant pris és lignes CD, CE, qui conſtituent l'angle donné C quelcõques poincts D, E, ſoit menee la ligne DE: & ſur AB ſoit conſtruict par la prop. precedente le triangle AFG, ayant les trois coſtez egaux aux trois coſtez du triangle CDE, ſçauoir eſt les deux coſtez AF, AG, egaux aux deux coſtez CD, CE, & la baſe FG à la baſe DE. Il eſt donc euident par la 8. prop. que l'angle A ſera egal à l'angle C donné. Nous auons donc faict ſur AB, & au poinct A, l'angle FAG egal à vn donné DCE, ainſi qu'il eſtoit requis.

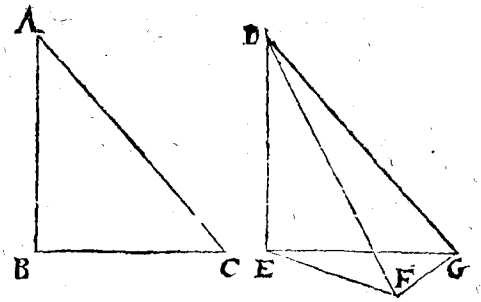
SCHOLIE.

Combien que la practique de ce probleme ſoit enſeignee en noſtre Geometrie pratique, neantmoins nous l'enſeignerons encore icy. Soit vne ligne donnee AB, & vn poinct en icelle A, auquel il faut faire vn angle rectiligne egal au donné CDE. Du centre D ſoit fait de tel interualle qu'on voudra vn arc FG, qui coupe les lignes de l'angle donné és poincts F, G: puis du meſme interualle, ſoit d'eſcrit du centre A vn arc interminé HI: En apres, ſoit priſe la diſtance FG, & icelle portee ſur l'arc HI, puis du poinct A par I, ſoit tiree la ligne droicte AI, & ſera fait l'angle HAI egal à l'angle donné EDF.



THEOR. 15. PROP. XXIV.

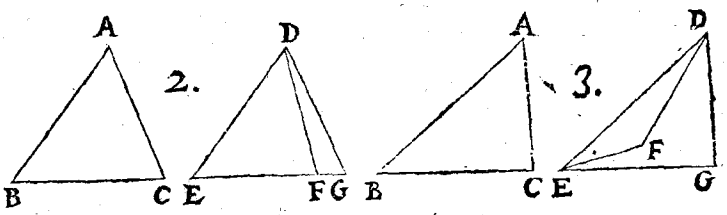
Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux coſtez plus grand que l'angle, ils auront auſſi la baſe plus grande que la baſe.



Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels deux coſtez AB, AC ſont egaux aux coſtez DE, DF, chacun au ſien: mais l'angle A eſt plus grand que l'angle EDF. Ie dis que la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF.

Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne DE, & au poinct D, ſoit fait par la precedente prop. l'angle EDG, egal à l'angle A, (& la ligne droicte DG, tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF a eſté poſé moindre que l'angle A) & ſoit poſee DG, egale à DF, c'eſt à dire à AC: Soit tiree puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au deſſus de la ligne EF, ou ſur icelle, ou au deſſous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au deſſus de EF, & ſoit tiree la ligne FG. D'autant que les deux coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux coſtez DE, DG, vn chacun au ſien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la conſtruction: la baſe BC ſera egale à la baſe EG, par la 4. prop. Et puis que les deux coſtez DF, DG, ſont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF ſeront auſſi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF eſt plus grand que l'angle EGF, par la 9. com. ſent. donc auſſi l'angle DFG ſera plus grand que le meſme angle EGF: parquoy tout l'angle EFG ſera beaucoup plus grand que le meſme angle EGF: donc au triangle EFG le coſté EG ſera plus grand que le coſté EF par la 19. prop. Mais il a eſté demonſtré que EG eſt egale à BC: donc BC ſera plus auſſi grande que EF: Ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, que EG tombe ſur icelle EF: ainſi qu'en la 2. fig. d'autant que comme deſſus la baſe EG, ſera egale à la baſe BC par la 4. prop. & GE eſt plus grande que EF par la 9. com. ſent. auſſi BC ſera plus grande que EF: Ce qui eſtoit propoſé.



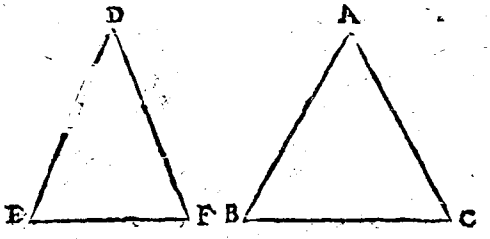
En troiſieſme lieu, que EG tombe au deſſous de EF. Il eſt euident que les deux lignes interieures DF, EF ſont plus petites que les deux coſtez

DG,EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF : donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC: donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez égaux,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux costez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien : Mais la base BC est plus grande que la base EF. Ie dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



Autrement, il sera égal, ou plus petit. Mais il ne peut estre égal : d'autant que par la 4. prop. les bases BC & EF seroient égales contre l'hypothese. Pareillement il ne peust estre plus petit; d'autant que par la 24. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a esté posee plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust estre egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

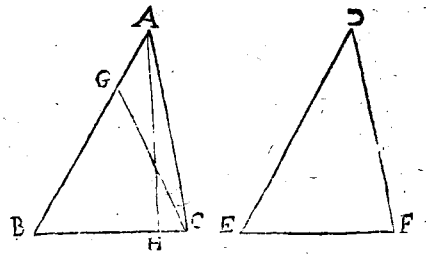
THEOR. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux, ou bien celuy qui soustient l'vn d'iceux angles egaux : ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B & ACB, sont egaux aux deux E & F, chacun au sien,& soit premierement le costé BC, aux extremitez duquel sont les angles B & ACB, egal au costé EF, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Ie dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez DE, DF, chacun au sien, sçauoir est AB à DE,

à D E, & A C à D F, & l'autre angle B A C egal à l'autre angle D.

Car si A B n'est egal à D E, l'vn d'iceux sera plus grand: Soit donc A B plus grand, s'il est possible, & d'iceluy soit retranchee B G egale à D E: puis soit tirée la ligne droicte C G. Donc puis que les costez B C, B G, sont egaux aux costez E F, D E, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. prop. la base C G sera egale à la base F D, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien, c'est à sçauoir que l'angle B C G sera egal à l'angle F, auquel est aussi egal l'angle A B C par l'hypothese. Partant les deux angles A C B & G C B seroient egaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé A B n'estoit pas inegal au costé D E, mais egal. Parquoy veu que les costez A B, B C sont egaux aux costez D E, E F, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E; la base A C sera egale à la base D F, & l'autre angle B A C egal à l'autre angle D, par la 4. prop. de ce liure. Ce qui estoit proposé.



Soient maintenant egaux deux autres costez sçauoir est A B à D E soustendans angles egaux A C B & F. Ie dis derechef que les deux autres costez A C, B C sont egaux aux deux autres costez D F, E F, chacun au sien, c'est à dire A C à D F, & B C à E F: & l'autre angle B A C egal à l'autre angle D. Car si le costé B C n'est egal au costé E F, soit le plus grand B C, duquel soit couppé B H egal à E F, puis tiré la ligne A H. Donc puis que les costez A B, B H sont egaux aux costez D E, E F, vn chacun au sien, & l'angle B est egal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçauoir, que l'angle A H B sera egal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle A C B, est aussi egal à l'angle F. Donc l'angle A H B sera aussi egal à l'angle A C B, l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde: car il est plus grand par la 16. prop. Le costé B C n'estoit donc pas plus grand que le costé E F, ains egal. Parquoy les deux costez A B, B C, sont egaux aux deux costez D E, E F, chacun au sien, & par la 4. prop. l'angle B estant egal à l'angle E, les bases A C, D F, seront egales, & les autres angles B A C & D aussi egaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de cette proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

SCHOLIE.

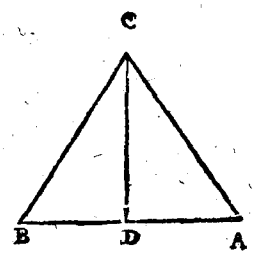
Nous demonstrerons icy deux theoremes assez vtils & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou Isoscelle, estant menee vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egalement, ou l'angle, ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle couppe l'angle en deux egalement, elle couppera aussi la base en deux egalement:

Mais si elle couppe en deux egalement la baſe, elle couppera pareillemẽt l'angle en deux egalement. Et au contraire eſtant tiree vne ligne droicte perpendiculaire à la baſe, elle diuiſera en deux egalement, tant la baſe que l'angle.

Au triangle A B C ſoient deux coſtez egaux A C, B C, & la ligne droicte C D diuiſe premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne C D eſt perpendiculaire à la baſe A B, & la diuiſe en deux egalement. Car puis que les deux coſtez A C, C D, ſont egaux aux deux coſtez B C, C D, & les angles qu'ils contiennent auſſi egaux, par la quatrieſme prop. les baſes A D, B D ſeront auſſi egales, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts.

Que ſi la ligne droicte C D diuiſe en deux egalement la ligne A B: Ie dis que la ligne droicte C D eſt perpendiculaire à la ligne A B, & que l'angle C eſt couppé en deux egalement. Car puis que les deux coſtez A D, D C, ſont egaux aux deux coſtez B D, D C, & la baſe A C egale à la baſe B C, par la 8. prop. les angles du poinct D ſeront egaux, & partant droicts, & la ligne C D perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui ſont en C ſeront auſſi egaux.



Maintenant ſoit la ligne droicte C D perpendiculaire à A B: Ie dis qu'elle couppe auſſi la baſe B A, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B ſeront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle A C D, ſont egaux aux deux angles B & D, du triangle B C D, vn chacun au ſien, & le coſté C D oppoſé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres coſtez A D, B D, ſeront auſſi egaux, & les autres angles du poinct C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Le ſecond Theoreme eſt tel.

Le triangle auquel vne ligne droicte tiree de l'vn des angles perpendiculaire à la baſe, diuiſe ou la baſe ou l'angle en deux egalement, a les deux coſtez comprenant iceluy angle egaux: Et ſi la baſe eſt diuiſee en deux egalement, l'angle ſera auſſi diuiſé en deux egalement: Mais ſi l'angle eſt diuiſé en deux egalement, auſſi ſera la baſe diuiſee en deux egalement.

Au meſme triangle A B C, ſoit C D perpendiculaire à la baſe A B, & la diuiſe en deux egalement. Ie dis que les coſtez A C & B C ſont egaux, & les angles à C auſſi egaux. Car puis que les deux coſtez A D, D C, ſont egaux aux deux coſtez B D, D C, & les angles qu'ils comprennent auſſi egaux, ſçauoir droicts par la 4. prop. les baſes A C, B C, & les angles à C ſeront pareillement egaux.

Maintenant, que la perpendiculaire C D couppe en deux egalement l'angle C: ie dis que les coſtez A C, B C ſont egaux; & les lignes A D, B D auſſi egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle A C D, ſont egaux aux deux angles D, C du triangle B C D, & le coſté C D eſt commun, par la 26. prop. les deux coſtez A C, B C, ſeront egaux; & les coſtez A D, B D, auſſi egaux: Ce qu'il falloit demonſtrer.

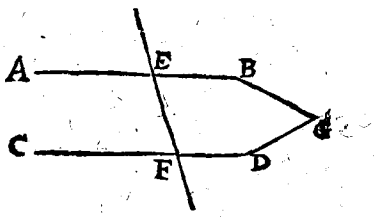
THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes faict

les angles opposez alternatiuement egaux ; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, lur lesquelles tombant la ligne droicte EF, faict les angles BEF, & EFC alternatiuement egaux. Ie dis que AB & CD sont paralleles.

Car si elles ne sont paralleles, estans continuées elles se rencontreront. Que si elles se rencontroient, comme au poinct G, elles feroient vn triangle auec le coste EF, & l'angle exterieur CFE seroit plus grand que l'opposé interieur FEB par la 16. prop. ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB, & CD ne se rencontreront iamais; & par la 25. def. icelles lignes seront paralleles entr'elles. Parquoy si vne ligne droicte tombante sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

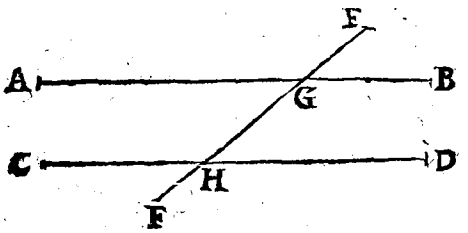


THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, faict l'angle exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé; ou bien les deux interieurs de méme costé, egaux à deux droicts; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, sur lesquelles tombant vne autre ligne droicte EF, fasse l'angle exterieur EGA egal à GHC son opposé interieur de méme costé. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car puis que l'angle GHC est posé egal à l'angle EGA, auquel est aussi egal l'angle BGH par la 15. prop. les angles alternes BGH, GHC, seront egaux par la premiere commune sentence: partant les lignes droictes AB, CD seront paralleles par la proposition precedente. Ce qui estoit proposé.



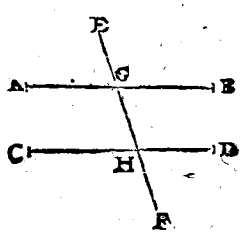
Pour la seconde partie. Ie dis que si les deux angles interieurs de mesme costé AGH, & CHG sont egaux à deux droicts, aussi AB & CD seront paralleles. Car par la 13. proposition, les deux angles GHC & GHD sont egaux à deux droicts; partant aussi egaux aux deux AGH & GHC. Que si d'iceux angles egaux, on oste le commun GHC, les demeurans AGH & GHD se trouueront alternatiuement egaux, & par la 27. prop. AB & CD seront paralleles. Si donc vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, &c. Ce qui falloit demonstrer.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles opposez alternatiuement egaux; & l'exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, sur lesquelles tombe la ligne droicte EF. Ie dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont egaux.

Autrement, s'ils ne sont egaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre: Soit donc AGH plus petit, s'il est possible, que GHD: & si à iceux angles inegaux on adiouste chose comm. sçauoir l'angle GHC, les deux angl. AGH & GHC seront plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13. prop. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles: ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust egal à l'angle GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle exterieur EGB est egal à son opposé interieur de mesme costé GHD: ce qui est manifeste par ce qui a esté demõstré cy-dessus, sçauoir que les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. proposition; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront egaux, estans tous deux egaux au mesme AGH.

Pour la troisiesme partie: ie dis que les deux angles interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts: car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

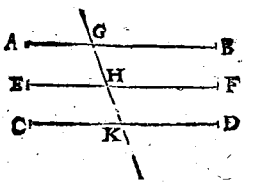
THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à vne mesme ligne droicte EF. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posees en vn mesme plan, soit tiree la ligne droicte GHK, qui les couppe toutes trois, sça-

uoir eſt AB en G ; EF en H; & CD en K. Et puis que AB eſt poſee parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, ſeront egaux entr'eux par la precedente propoſition. Derechef, puis que CD eſt auſſi poſee parallele à la meſme EF; l'angle DKH ſera auſſi egal au méme angle GHF c'eſt à ſçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH ſeront egaux entr'eux, leſquels eſtans alternes, les lignes AB & CD ſont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne meſme ligne droicte ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demonſtrer.



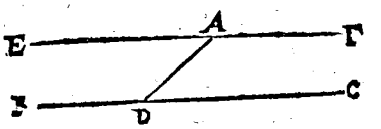
SCHOLIE.

Si quelqu'vn diſoit que AG & BG ſont paralleles à EF, & toutesfois elles ne ſont paralleles entr'elles, il faudroit reſpondre qu'icelles AG & BG ne ſont pas deux lignes, mais ſeulement les deux parties d'vne ſeule & meſme ligne: Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, ſoient infiniment produites ſans ſe rencontrer: mais il appert que AG eſtant prolongee ſe rencontre auec BG.

THEOR. 22 PROP. XXXI.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte parallele à la dõnee BC.

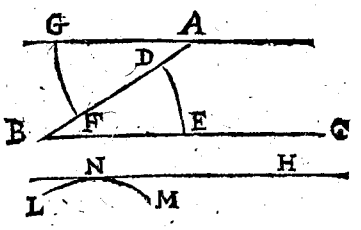


Soit menee la ligne AD faiſant auec la ligne donnee BC, quelconque angle ADC, & ſur icelle AD, & au poinct A ſoit fait l'angle DAE egal à l'angle ADC. Ie dis que la ligne EA tiree tant qu'on voudra vers F, eſt parallele à BC. Car puis que par la conſtruction les angles alternes ADC, DAE ſont egaux, les lignes BC, FE ſeront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous auons donc d'vn poinct donné A, mené vne ligne droicte EF parallele à vne ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

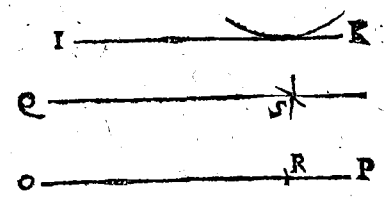
SCHOLIE.

Il eſt manifeſte par cette conſtruction, que le poinct donné doit eſtre tellement ſitué hors la ligne donnee, qu'icelle eſtant continuee directement ne rencontre iceluy. Quant à la prattique de cette propoſition, nous l'auons enſeignee en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geometrie prattique, laquelle toutesfois nous repeterõs ici. Du poinct donné A ſoit menee la ligne droicte AB faiſant auec la ligne donnee BC, l'angle ABC; puis de A & B comme centres, & d'vn meſme interualle, ſoient deſcrits les deux arcs DE, FG, & fait FG egal à DE, puis par les poincts A & G ſoit menee la ligne droicte AG ſi grande qu'on voudra, & icelle ſera parallele à BC.

Autrement, *si du poinct H on veut mener vne parallele à la ligne droicte IK, du centre H ſoit fait vn arc qui touche ſeulement la ligne donnee IK, puis du centre I (qui eſt l'extremité de la ligne le plus eſloigné de l'arc ia fait) & du meſme interualle ſoit deſcrit vn autre arc LM, puis du poinct H ſoit tiree la ligne droicte HN, qui touche l'arc LM, & icelle ligne HN ſera la parallele requiſe.*



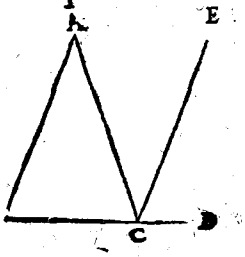
Encore autrement: *Si du poinct Q, il faut tirer vne ligne parallele à vne ligne donnee OP, ſoit pris en icelle ligne quelconque diſtance, comme OR, auec laquelle ſoit deſcrit du centre Q vn arc S; puis ſoit pris la diſtance ou interualle QO, & d'iceluy ſoit auſſi deſcrit du centre R vn arc qui coupe le precedent en S, & d'icelle interſection ſoit tiree par le poinct donné Q la ligne droicte QS, laquelle ſera parallele à OP, ainſi qu'il eſtoit requis.*



THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'vn des coſtez eſtant prolongé, l'angle exterieur eſt egal aux deux oppoſez interieurs; & de chacun triangle les trois angles interieurs ſont egaux à deux droicts.

Soit le triangle ABC, duquel le coſté BC, ſoit prolongé iuſques en D: Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, eſt egal aux deux oppoſez interieurs A & B.



Qu'il ne ſoit ainſi: qu'on meine CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe ſur les paralleles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, ſeront alternatiuement egaux: item l'exterieur ECD, ſera egal à ſon oppoſé interieur ABC. Partant il eſt manifeſte que le total ACD, eſt egal aux deux A & B, oppoſez interieurement.

Pour la ſeconde partie, que les trois angles A, B & C, interieurs du triangle ABC ſont egaux à deux droicts, il eſt euident, eſtant ACD egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, ſont enſemble egaux à deux droicts par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs A, B, & ACB, ſeront auſſi egaux à deux angles droicts. Si donc de tout triangle, l'vn des coſtez eſt prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

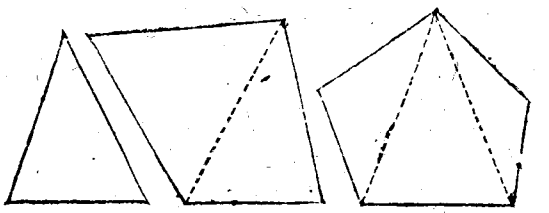
SCHOLIE.

De ceſte propoſition nous pouuons colliger à combien d'angles droicts ſont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe

& ce par deux manieres, dont la premiere eſt telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle eſt entre les figures rectilignes.

C'eſt à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne ſont egaux à deux fois vn droict, c'eſt à dire, à deux droicts: Mais les angles de la ſeconde figure rectiligne, ſont egaux à deux fois deux droicts, ſçauoir eſt à quatre droicts: Mais ceux de la troiſieſme figure, ſont egaux à deux fois trois droicts, c'eſt à dire à ſix droicts, & ainſi des autres. Or le lieu qu'obtient chaſque figure rectiligne entre les figures rectilignes, eſt monſtré par le nombre des coſtez, ou des angles, deux d'iceux oſtez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas vne ſuperficie, & par conſequent ne conſtituent vne figure: mais ſont requiſes au moins trois lignes droictes pour conſtituer vne figure rectiligne: d'où vient que le triangle eſt la premiere figure rectiligne: Car de ſes coſtez, en eſtans oſtez deux, reſte vn: ainſi la figure ayant douze coſtez, ou douze angles, ſera la dixieſme figure, puis que deux eſtans oſtez de douze reſtent dix: & ainſi faut il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de douze coſtez, eſt la dixieſme, elle aura auſſi douze angles equiuallans à vingt angles droicts, c'eſt à ſçauoir à deux fois dix angles droicts: Ainſi auſſi tous les dix angles de la figure contenue de dix coſtez, equiuallent à ſeize angles droicts, puis qu'icelle figure eſt la huictieſme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raiſon de cecy eſt, que toute figure rectiligne ſe diuiſe en autant de triangles, qu'elle eſt quantieſme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de coſtés, deux eſtans oſtez: Car de quelconque angle d'vne figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles oppoſez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure ſera diuiſee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux eſtans oſtez. Ainſi il eſt euident que le triangle ne ſe peut diuiſer en autres triangles: mais le quadrangle ſe couppe en deux: le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles conſtituent tous les angles de la fig. propoſee, & tous les angles de quelconque triangle rectiligne ſont egaux à deux droicts: il eſt manifeſte que tous les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'eſt le nombre des triangles eſquels elle ſe diuiſe, c'eſt à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure eſt quantieſme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifeſtement és figures cy deſſus appoſees.

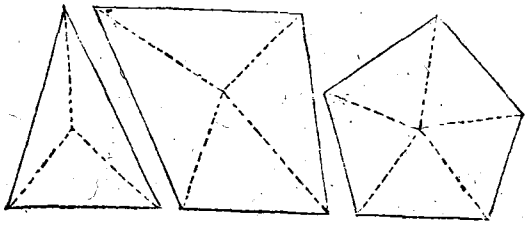


Le ſecond moyen par lequel on ſçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, eſt ceſtuy-cy.

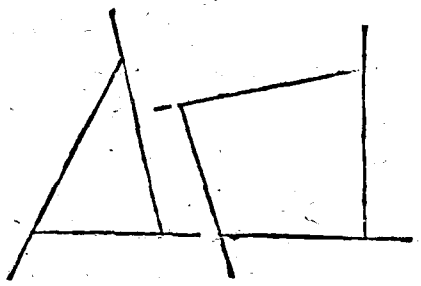
Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre eſtans oſtez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de coſtez.

C'eſt à dire, que les angles de chaſque triangle ſont egaux à deux fois trois droicts, quatre oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droicts: Ainſi auſſi les angles de la figure de douze coſtés, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, ſçauoir eſt vingt angles droicts, &c. Or la demonſtration de cela eſt telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en

ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chasque triangle par la 32. prop. sont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles, sont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de costez en la figure. Mais il est euident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du poinct pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposee: & partãt si on oste ces angles-là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposee, seront aussi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le poinct pris estans ostez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le poinct pris, sont seulement egaux à quatre droicts, ainsi que nous l'auons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles ou de costez.



Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé dequelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles interieurs, est prolongé par ordre vers vne mesme part; tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la 13. prop. les angles interieurs pris auec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons monstré cy dessus: partant les exterieurs sont tousiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droicts: comme il appert en cette figure. Mais par la 32. prop. les internes seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls exterieurs seront egaux à quatre droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs, & les interieurs ensemble, sont egaux à huict droicts. Mais les interieurs seuls sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstré: les exterieurs seuls seront donc aussi egaux à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuuent estre veuës ez figures apposees cy dessus. Il y a la mesme raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.



COROLLAIRE.

Il resulte de cette 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris ensemble, sont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble. Pource que tant ces trois-là, que ces trois-cy, sont egaux a deux droicts: d'où vient que si deux angles d'vn triangle sont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troisiesme angle de l'vn sera aussi egal au troisiesme angle de l'autre; & de plus, si les deux angles de ce triangle-là sont egaux aux deux angles de cestuy-cy, chacun au sien, les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscelle, duquel l'angle compris des costez egaux est droict, à chacun des autres angles demy droict: car ces deux ensemble font vn droict, puis que par la 32. prop. les trois sont egaux à deux droicts, & que le troisieme est

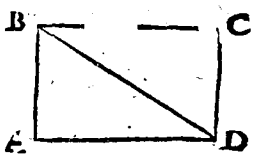
me est posé droict : Parquoy puis que par la 5. prop. les deux restans sont egaux entr'eux : chacun d'iceux sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'vn demy droict : car les deux ensemble seroient moindres qu'vn droict, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'vn demy droict : pource que les deux ensemble seroient plus grands qu'vn droict, &c. D'où resulte derechef que les triangles Isoscelles, qui ont les angles du sommet egaux, sont equiangles ; attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droicts.

Il est pareillement manifeste, que chasque angle d'vn triangle equilateral, est les deux tierces parties d'vn droict, ou la tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, ausquels sont egaux les trois angles d'vn triangle equilateral par cette 32. proposé estans diuisez en trois angles egaux, chacun d'iceux sera necessairement la tierce partie de deux droicts, ou bien les deux tierces parties d'vn droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de mesme part, sont aussi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, qui conioignent de mesme part deux autres lignes droictes AD & BC egales & paralleles. Ie dis que AB & CD, sont aussi egales & paralleles.



Qu'il ne soit ainsi : soit menee la diagonalle BD : Icelle tombant sur les deux paralleles AD & BC, fera les angles A D B & C B D alternatiuement egaux par la 29. prop. Item A D & BC estans egales, les deux triangles ABD & CBD, auront deux costez egaux à deux costez chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, & par la 4. prop. la base AB sera egale à la base C D, & l'angle A B D sera egal alternatiuement à l'angle CDB, & par la 27. prop. icelles lignes egales A B & C D, seront aussi paralleles. Donc les lignes droictes qui conioignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

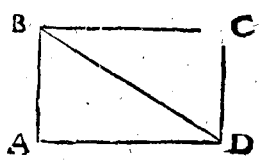
Euclide a dit que les lignes egales & paralleles doiuent estre conioinctes de mesme part, afin que celles qui les ioindront soient aussi egales & paralleles.

pource que si on les conioignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D il est manifeste que les lignes qui les ioindroient ainsi, ne seroient iamais paralleles, ains s'entrecoupperoient tousiours, & ne seroient que rarement egales.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les costés & les angles opposez, sont egaux entr'eux ; & la diagonalle le couppe en deux egalement.

Soit le parallelogramme ABCD, auquel soit menee la diagonalle BD. Ie dis que le costé AB est egal à son opposé CD ; & aussi le costé AD egal au costé BC: Item que l'angle A est egal à son angle opposé C, & encore l'angle ABC egal à l'angle ADC: finalement qu'iceluy paralellelogramme ABCD, est couppé en deux egalement par la diagonalle BD.



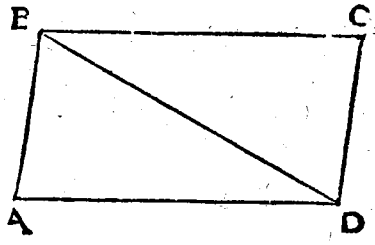
Car puis que la figure quadrilatere ABCD est vn parallelogramme, le costé AB sera parallele au costé CD, & le costé AD au costé BC, & par la 29. propos. l'angle ABD sera alternatiuement egal à BDC. Item l'angle ADB alternatiuement egal à l'angle CBD: Ainsi les deux triangles BAD & DCB auront les angles ABD & BDA, egaux aux angles BDC & CBD, chacun au sien : & le costé BD commun à tous les deux susdits triangles: Et partant par la 26. prop. les autres costez AB & AD, seront egaux aux autres costez CD & BC, chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'autre angle C. Et de plus il est euident que les deux angles du poinct B ensemble, seront egaux aux deux ensemble du poinct D. Encores par la 4. propos. les triangles ABD & CDB seront egaux ; & partant le parallelogramme AB CD est couppé en deux egalement par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Euclide a bien dit icy que la diagonalle couppe le parallelogramme en deux egalement, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les couppe quelquesfois en deux egalement, & d'autresfois inegallement, ainsi qu'il est demonstré au 3. Theoreme suiuant.

1. Tout quadrilatere ayant les costez opposez egaux est parallelogramme.

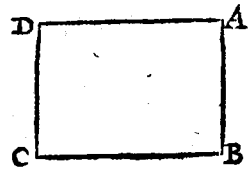
Au quadrilatere A B C D, les costez opposez A B, C D soient egaux, & aussi les opposés A D, B C. Ie dis qu'iceluy quadrilatere A B C D est vn parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle, B D, les deux costez A B, B D du triangle A B D seront egaux aux deux costez D C, B D du triangle B C D, chacun au sien, & la base B D, egale à la base B C. Donc par la 8. propos. l'angle A B D sera egal à l'angle C D B, qui luy est alterne, & encore A D B à son alterne C B D par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes A B, C D seront paralleles; comme aussi B C, A D: & par la 36. def. le quadrilatere A B C D est vn parallelogramme. Ce qui estoit proposé.



De cecy resulte que les Rhombes, & les Rhomboides sont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs costez opposez egaux.

2. Tout quadrilatere qui a les angles opposez egaux, est parallelogramme.

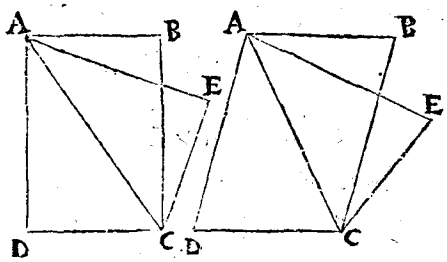
Au quadrilatere A B C D, les angles opposez A & C soient egaux, comme aussi les opposez B & D. Ie dis que A B C D est vn parallelogramme. Car si aux angles egaux A & C, on adiouste les angles egaux B & D: par le 2. Ax. les deux angles A & B seront egaux aux deux angles C & D: partant les deux A & B seront la moitié des quatre angles A, B, C & D. Mais ces quatre cy sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstré au Scholie de la 32 prop. Donc les deux A & B seront egaux à deux droicts, & par la 28. prop. le costez A D, B C seront parallels. Par mesme raison les costez A B, D C seront aussi parallels. Parquoy le quadrilatere A B C D est vn parallelogramme. Ce qui estoit proposé.



De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les angles droicts est parallelogramme, attendu que les deux angles A & B seront egaux à deux droicts, comme aussi les deux D & C, &c. Consequemment tant le quarré, que le quarré long, sont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous leurs angles droicts.

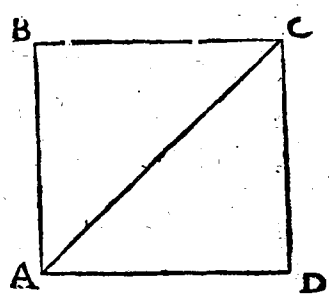
Or par les deux Theoremes precedents sont conuerties les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la 3. partie, on ne la peut pas conuertir, veu que tout quadrilatere qui est couppé en deux egalement par

la diagonalle, n'eſt pas parallelogramme. Car ſoit A B C D vn quarré long, ou bien vn Rhomboide, lequel ſera parallelogramme, & conſequemment eſtant tiree la diagonalle A C, elle le couppera en deux egalement: & ſur icelle ſoit cõſtruict le triangle A E C, en ſorte que le coſté A E ſoit egal au coſté A D, & le coſté C E egal au coſté C D: & ſera faict le trapeſe A D C E, duquel la diagonalle ſera A C, qui le couppera en deux egalement, puis que les deux triangles A D C, A E C ayans tous leurs coſtez egaux chacun au ſien, ſont conſequemment egaux.

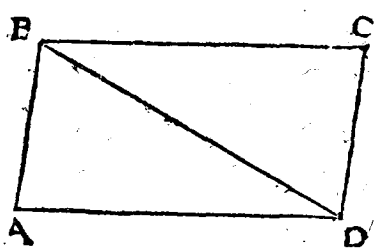


3. Si vn parallelogramme eſt equilateral, la diagonalle couppera les angles en deux egalement: mais inegalement s'il n'eſt equilateral.

Soit vn parallelogramme A B C D, duquel tous les coſtez ſoient egaux entr'eux, & ſoit menee la diagonalle A C: Ie dis qu'elle couppe les angles A & C en deux egalement. Ce qui eſt manifeſte par la 8. propoſ. veu que les deux triangles A B C, A D C ont tous les trois coſtez egaux, chacun au ſien.



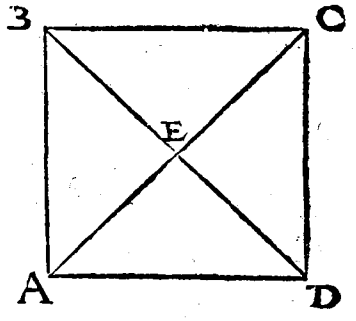
Soit derechef le parallelogramme A B C D, auquel le coſté A D ſoit plus grand que le coſté A B, & ſoit tiree la diagonalle B D: Ie dis qu'elle couppe inegalement les angles B & D. Car puis que au triangle A B D le coſté A D eſt plus grand que le coſté A B, par la 18. propoſ. l'angle A B D ſera plus grand que l'angle A D B. Mais par la 29. prop. l'angle A B D eſt egal à ſon alterne B D C, car A D eſt parallele à B C, puis que A B C D eſt vn parallelogramme. Donc auſſi l'angle B D C ſera plus grand que l'angle A D B: & partant tout l'angle D eſt couppé inegalement par la diagonalle B D. Il y a meſme raiſon des autres angles. Parquoy appert ce qui eſtoit propoſé.



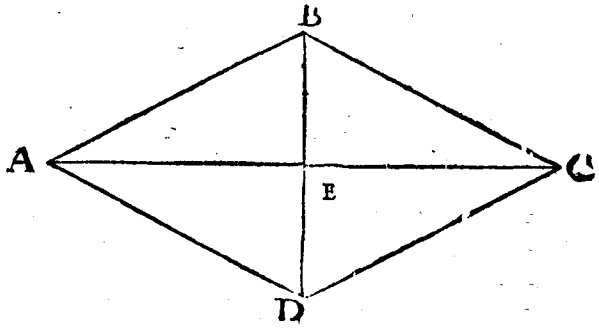
4. Si vn parallelogramme a tous les angles egaux, les deux diagonalles ſeront egales entr'elles: mais inegales, ſi les angles ſont inegaux.

Soit premierement vn parallelogramme A B C D, duquel tous les angles ſoient egaux, & ſoient menees les deux diagonalles A C, B D: Ie dis qu'i-

celles diagonalles ſont egalles entr'elles. Car attendu que les deux coſtez A B, B C du triangle A B C ſont egaux aux deux coſtez D C, C B du triangle B C D, chacun auſien, & l'angle B egal à l'angle C, par la 4. propoſ. la baſe A C ſera egale à la baſe B D : ce qui eſtoit propoſé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres ſont egaux, puis que l'vn & l'autre a tous les angles egaux, ſçauoir droicts.



Maintenant au parallelogramme A B C D, duquel l'angle A B C ſoit plus grand que l'angle B A D, & ſoient les deux diagonalles A C, B D. Ie dis que la diagonalle A C, qui ſouſtient le plus grand angle B, eſt plus grande que la diagonalle B D, qui ſouſtient le moindre angle A. Car d'autant qu'au triangle A B C les deux coſtez A B, B C, ſont egaux aux deux coſtez A B, A D du triangle B A D, chacun au ſien, & l'angle B plus grand que l'angle A, par la vingt-quatrieſme propoſiton, la baſe A C ſera plus grande que la baſe B D. Ce qui eſtoit propoſé.



De cecy reſulte qu'au Rhombe, ou Rhomboide les diagonalles ſont inegales: car il ont les angles obliques, & par conſequent inegaux.

5. En tout parallelogramme, les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement: & tout quadrilatere auquel les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement, eſt parallelogramme.

Au parallelogramme A B C D cy-deſſus, ſoient les deux diametres A C, B D qui s'entrecouppent au poinct E: Ie dis que chacun d'iceux diametres eſt couppé en deux parties egales en E, c'eſt à dire que A E, C E ſont egales, & B E, D E auſſi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles E A B, E B A du triangle A B E, ſont egaux aux alternes E C D, E D C du triangle C D E, vn chacun au ſien, & le coſté A B egal au coſté oppoſé C D par la 34. prop. le coſté A E ſera egal au coſté C E, & le coſté B E au coſté E D par la 26. prop. Ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant, au quadrilatere A B C D ſoient les deux diagonalles A C, B D, qui s'entrecouppent en deux egalement en E : Ie dis qu'iceluy quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Car puis que les coſtez A E, B E du triangle A E B ſont egaux aux coſtez C E, D E du triangle C E D, chacun au ſien, & que par la quinzieſme propoſition les angles au ſommet E ſont auſſi

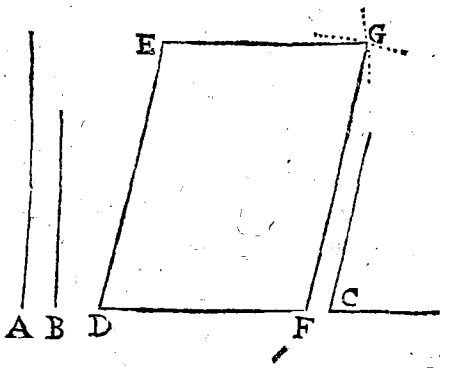
egaux; par la quatrieſme propoſit. les baſes A B, C D ſeront egales, & l'angle A B E egal à l'angle alterne C D E: Donc les lignes droictes A B, C D ſeront paralleles par la 27. propoſition. Par meſme raiſon A D, B C ſeront demonſtrées paralleles. Parquoy A B C D eſt vn parallelogramme.

De cecy appert que ſi on veut promptement conſtruire vn parallelogramme, il faut tirer deux lignes droictes interminees A C, B D, qui s'entrecouppent comme que ce ſoit en E; puis prendre A E, E C egales, & B E, E D auſſi egales, puis ſoient tirees les lignes A B, B C, C D, D A: & ſera faict le parallelogramme A B C D: lequel ſera vn Rhombe, ſi les angles du poinct E ſont faicts droicts, & s'ils ſont obliques, ce ſera vn Rhomboide: Mais les ſuſdicts angles eſtans droicts, ſi on faict toutes les quatre lignes E A, E B, E C, E D egales entr'elles; le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré: Finalement leſdits angles du poinct E eſtans obliques, & toutes les quatre ſuſdites lignes egales, le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré long; le tout comme il appert des choſes demonſtrees cy-deſſus.

A ce que deſſus nous adiouſterons encore ce probleme.

6. Conſtruire vn parallelogramme qui ait vn angle egal à vn angle donné, & les coſtez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droictes donnees.

Soient donnees deux lignes droictes A, B, & vn angle C: Il faut conſtruire vn parallelogramme ayant vn angle egal au donné C, & les deux coſtez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes donnees A & B.



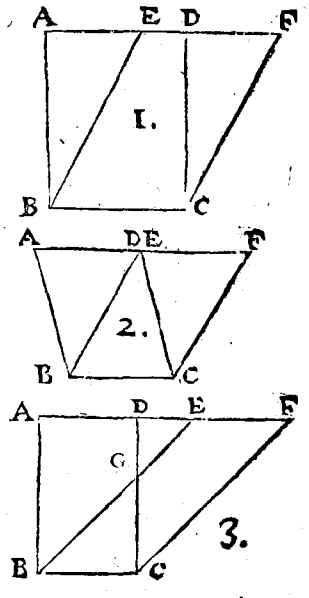
Soit priſe D E egale à A, puis à l'extremité D, ſoit faict l'angle E D F egal au donné C, faiſant D F egale à B: en apres du centre E, & du meſme interualle B ſoit deſcrit vn arc de cercle G, puis du centre F & interualle A ſoit deſcrit vn autre arc qui couppe le precedent G, & de l'interſection ſoient tirees les lignes droictes E G, F G: & le quadrilatere D E G F, ſera le parallelogramme requis, ainſi qu'il eſt manifeſte par leſchoſes cy-deſſus demonſtrees.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes conſtituez ſur vne meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes A B C D & B C F E, tous deux ſur meſme baſe B C, & entre meſmes paralleles A F, & B C: Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

Or le poinct E tombera, ou entre A & D, ou au poinct D, ou entre D & F : qu'il tombe premierement entre A & D, comme en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme A B C D, le costé A D est egal au costé B C qui luy est opposé, & qu'au mesme B C est aussi egal E F costé du parallelogramme B E F D, par la 1. com. sent. les costez A D, E F seront egaux entr'eux : ostant donc d'iceux la partie commune E D, les restes A E & D F seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la mesme 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez opposez AB, DC sont aussi egaux; & puis qu'estans parallels, sur iceux tombe la ligne droicte FA, l'angle exterieur CDF sera egal à l'angle interieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprenent aussi egaux; & partant iceux triangles A B E, D C F seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur adiouſtant donc le trapeze commun B E D C, sera faict le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme B E F C. Ce qui estoit proposé.



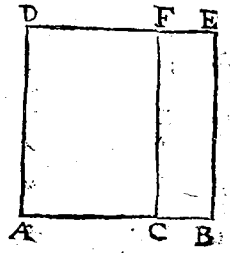
Maintenant, que le poinct E tombe auec le poinct D, comme en la deuxiesme figure, d'autant que comme dessus les lignes A D, E F seront egales entr'elles, & l'angle exterieur FEC egal à l'interieur DAB; les triangles B A D & C E F seront egaux par la quatriesme proposition. Adjoustant donc à chacun le triangle commun B D C, seront faicts egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisiesme lieu, que le poinct E tombe entre D & F, comme en la troisiesme fig. D'autant que par la 34 propos. les costez opposez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF; & partant A D & E F egaux, ausquels si on adjouste la ligne commune D E; la toute A E sera egale à la toute D F. Item A B est egale à D C, lesquelles estans paralleles, l'angle exterieur CDE sera egal à l'opposé interieur E A B : & par la quatriesme proposition les triangles B A E & C D F, seront egaux : desquels si on oste le triangle commun G D E, les demeurans trapezes B A D G & C G E F, seront egaux : ausquels si on adiouste le triangle commun B G C, le parallelogramme A B C D sera egal au parallelogramme B C F E : Donc les parallelogrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux : Ce qui estoit à demonstrer.

SCHOLIE.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de paralle-

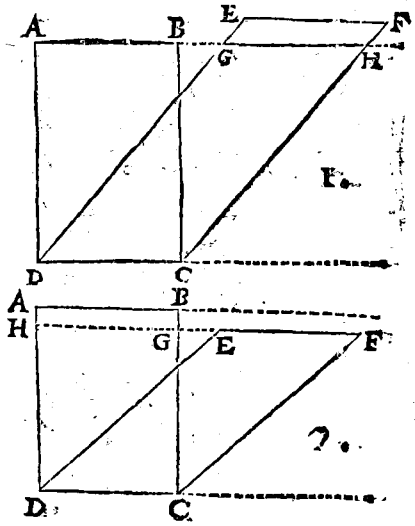
logrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes par alleles, il sentendent que ladite base soit en l'vne d'icelles paralleles comme aux exemples cy-dessus: Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre faulce, comme a fort bien remarqué le sieur Dounot, & ainsi qu'il appert en ces deux parallelogrammes A D F C, C F E B, lesquels sont tous deux constituez sur la base C F, & entre mesmes paralleles A B, D E: & toutesfois il est euident, qu'ils ne sont pas egaux: Ce qui aduient à cause de ce que leur base commune C F, n'est pas en l'vne ne l'autre des paralleles A B, D E. Le mesme se doit aussi entendre des parallelogrammes, & des triangles mentionnez aux propositions suiuantes, c'est à dire, qu'ils doiuent tous auoir leur bases en l'vne des paralleles.



Clauius a conuerty cette 35. prop. ainsi:

Les parallelogrammes egaux constituez sur vne mesme base, & de mesme part, seront entre mesmes paralleles.

Soient deux parallelogrammes egaux A B C D, C D E F, sur vne mesme base C D, & d'vne mesme part: Ie dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire que prolongeant la ligne droicte A B elle rencontrera directement E F. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombera, ou au dessus d'icelle E F ou au dessoubs. Premierement qu'elle tombe au dessoubs, s'il est possible, comme est A H, en la premiere figure. Donc par la 35. proposition le parallelogramme C D G H sera egal au parallelogramme A B C D: Mais à iceluy parallelogramme A B C D est posé egal le parallelogr. C D E F. Parquoy les parallelogrammes C D E F, C D G H seront egaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de A B ne tombera donc pas au dessous de E F.



Secondement, que A B prolongee tombe s'il est possible, au dessus de E F, comme en la 2. figure: donc E F prolongee tombera au dessoubs de A B. Parquoy comme dessus les parallelogrammes A B C D, C D H G seront egaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que A B produite ne tombera pas au dessus de E F, ny au dessoubs, elle la rencontrera directement. Ce qui estoit proposé.

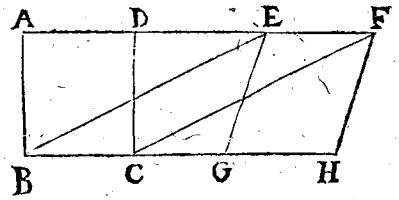
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes A B C D & E F G H, ayans les bases B C & G H egales, & entre mesmes paralleles A F & B H. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il

Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menees les deux lignes BE, CF: d'autant que BC eſt poſee egale à GH, & que par la 34. prop. la meſme GH eſt egale à ſon oppoſee EF; les deux lignes BC, EF, ſeront egales entr'elles par la 1. com. ſent. Mais elles ſont auſſi paralleles par l'hypotheſe: Donc les lignes BE, CF, qui les conioignent ſeront auſſi egales & paralleles: par la 33. propoſ. & par conſequent BEFC ſera vn parallelogramme conſtitué ſur meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles BH, AF que le parallelogram. ABCD, & par la 35. prop. ils ſeront egaux; & par la meſme prop. il ſera auſſi egal au parallelog. EFGH, eſtant ſur meſme baſe EF, auec iceluy, & entre meſmes paralleles AF, BH; Et par la 1. com. ſent. les parallelog. ABCD, & EFGH, ſeront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes conſtitués ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

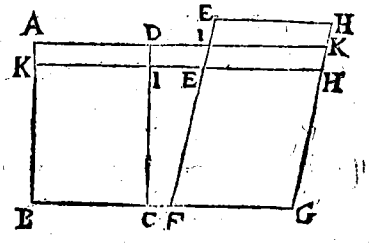


SCHOLIE.

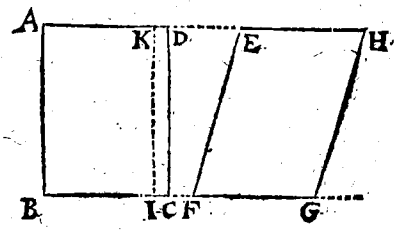
Clauius a conuerty cette 36. propoſ. ainſi qu'il enſuit.

Les parallelogrammes egaux conſtituez ſur baſes egales: & de meſme part ſont entre meſmes paralleles. Et ſi les parallelogrammes egaux conſtituez entre meſmes paralleles, n'ont vne meſme baſe, ils ſeront ſur baſes egales.

Premierement, ſoient deux parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, conſtituez ſur baſes egales BC, FG, & de meſme part: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que AD prolongee ſe rencontrera directement auec EH. Car autrement elle tomberoit ou au deſſoubs d'icelle EH, ou au deſſus; & il s'enſuiuroit le tout eſtre egal à la partie: comme il a eſté dit en la conuerſe de la precedente propoſition.



Secondement, ſoient les parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, entre meſmes paralleles AH, BG: Ie dis que leurs baſes BC, FG ſont egales: car autrement l'vne ſera plus grande que l'autre, & ſoit BC la plus grande, s'il eſt poſſible, & d'icelle ſoit retranchee BI egale à FG: puis ſoit menee IK parallele à AB. Donc par la 36. prop. le parallelogramme ABIK ſera egal au parallelogramme EFGH; & puis auſſi egal au parallelogramme ABCD, la partie au tout. Ce qui eſt abſurde. La baſe BC n'eſt donc pas plus grande que la baſe FG: Et par meſme raiſon elle ne ſera pas plus petite. Parquoy les baſes BC, FG ſont egales.



Clauius demonſtre encore icy ceſt autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes conſtituez entre meſmes paralleles, ont leurs baſes inegales; celuy-là ſera le plus grand, qui aura la plus grande baſe. Et au contraire, ſi deux parallelogrammes inegaux ſont entre meſmes paralleles; le plus grand aura vne plus grande baſe que l'autre.

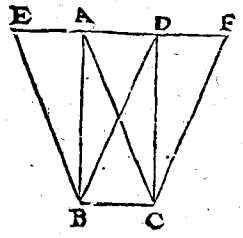
Soient les deux parallelogrammes ABCD, EFGH *de la figure precedente, entre les paralleles* AH, BG, *& ſoit la baſe* BC *plus grande que la baſe* FG: *Ie dis que le parallelogramme* ABCD, *qui eſt ſur la plus grande baſe* BC, *eſt plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Car de* BC *ſoit retranchee* BI *egale à* FG, *& ſoit tiree* IK *parallele à* AB *par la 31. propoſ. de ce liure. Donc par la 36. propoſ. les parallelogrammes* ABIK, EFGH *conſtituez ſur baſes egales, ſeront egaux: & puis que par le 9. ax. le parallelogramme* ABCD *eſt plus grand que le parallelogramme* ABIK, *le meſme parallelogramme* ABCD *ſera auſſi plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Ce qui eſtoit propoſé.*

Soient derechef les parallelogrammes ABCD, EFGH *inegaux, &* ABCD *le plus grand: Ie dis que la baze* BC *eſt plus grande que la baſe* FG. *Car ſi elle eſtoit egale, les parallelogrammes ſeroient egaux par la 33. propoſition de ce liure. Ce qui eſt abſurde, puis que* ABCD *a eſté poſé plus grand que* EFGH. *Mais ſi ladite baſe* BC *eſtoit moindre, le parallelogramme* EFGH *ſeroit plus grand que le parallelogramme* ABCD, *comme il a eſté demonſtré cy deſſus: Ce qui eſt encore abſurde. Donc puis que la baſe* BC *ne peut eſtre egale, ny moindre que la baſe* FG, *elle ſera plus grande. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles conſtituez ſur vne meſme baſe; & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC, tous deux conſtituez ſur la meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles EF, & BC. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car ſi on meine BE parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'accomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux ſeront egaux par la 35. prop. attendu qu'ils ſont conſtituez ſur meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles BC, EE. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, ſont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils ſont couppez en deux egalement par les diagonales AB, DC: donc auſſi les triangles ABC, & DBC ſeront egaux, par la 7. com. ſent. Parquoy les triangles conſtituez ſur vne meſme baſe, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

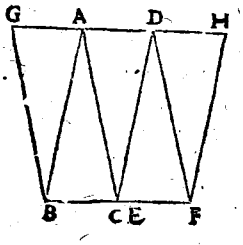
THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, &

entre meſmes paralleles GH & BF. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

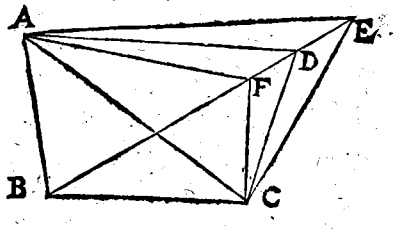
Car apres auoir mené BG, parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accompliſſent les deux parallelogram. ACBG, DEFH : iceux eſtans conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux par la 36. prop. auſſi egales ſeront leurs moitiez, ſçauoir le ſtriangles propoſez ABC, & DEF par la 34. prop. eſtans les parallelogrammes couppez en deux egalement par les diagonales BA & DF. Donc les triangles conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangles egaux A B C, & BCD conſtituez ſur vne meſme baſe BC, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire, que ſi on meine la lig. droicte AD, elle ſera parall. à BC.



Autrement, du poinct A, on en pourra mener vne autre qui ſera parallele à BC (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au deſſus de AD, ou au deſſous. Qu'elle tombe premierement au deſſus, & ſoit icelle AE, s'il eſt poſſible ; & apres auoir continué BD iuſques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux. Mais par l'hypotheſe les deux triangles BEC, & BDC ſont auſſi egaux : donc par la 1. com. ſent. les triangles BEC & BDC ſeroient auſſi egaux, la partie & le tout ; partant la parallele menee du poinct A, ne tombera pas au deſſus de AD. Le meſme inconuenient s'enſuiura ſi on la fait tomber au deſſous de AD, comme AF : car ayant mené CF, les triangles BFC & BDC ſe trouueroient egaux, ce qui ne peut eſtre : donc du poinct A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles egaux conſtituez ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

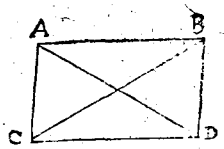
SCHOLIE.

Par cette prop. qui eſt la conuerſe de la 37. il eſt aiſé de demonſtrer comme a fait Commandin le Theor. ſuiuant.

Tout quadrilatere qui eſt couppé en deux egalement par l'vn & l'autre diametre, eſt parallelogramme.

Le quadrilatere A B D C ſoit diuiſé en deux egalement par l'vn & l'autre dia-

metre AD, BC : Ie dis qu'iceluy eſt parallelogramme. Car d'autant que les triangles ACD, BDC ſont chacun moitié du quadrilatere ABDC, ils ſont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont vne meſme baſe CD, & ſont de meſme part, ils ſont entre meſmes paralleles par la 39. prop. & partant AB eſt parallele à CD. Semblablement veu que les triangles ABC, ACD ſont egaux & ſur meſme baſe AC, icelle ligne AC ſera auſſi parallele à BD: donc le quadrilatere ABDC eſt parallelogramme, puis que les coſtez oppoſez d'iceluy ſont parallels. Ce qui eſtoit propoſé.

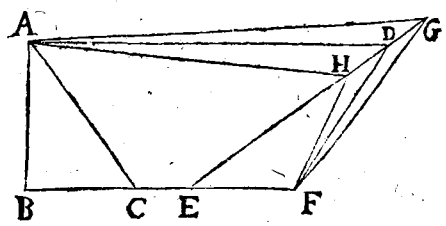


THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont auſſi entre meſmes paralleles; c'eſt à dire, que ſi on meine vne ligne droicte de A en D, qu'icelle ſera parallele à BF.

Autrement, du poinct A on en pourra mener vne autre qui ſera parall. à BF (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. la quelle tombera, ou au deſſus de AD, ou au deſſous. Soit donc premierement au deſſus, & ſoit icelle AG, s'il eſt poſſible, & apres auoir continué ED iuſques à ce qu'il rencontre AG en G, & mené FG, les deux triangles BAC, & EGF ſeront egaux par la 38. prop. mais par l'hypotheſe les triangle BAC & DEF ſont auſſi egaux: donc par la 1. com. ſent. le triangle EDF ſera egal au triangle EGF, la partie au tout; ce qui eſt impoſſible: Partant la parallele menee du poinct A ne tombera point au deſſus de AD. Le meſme inconuenient s'enſuiura ſi on la fait tomber au deſſoubs, comme AH, car les triangles EHF & EDF, ſe trouueroient egaux: donc du poinct A ne pourra eſtre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

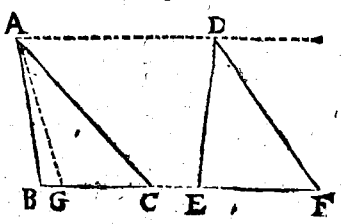


SCHOLIE.

Commandin & Clauius apres luy, demonſtrent en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si les triangles egaux conſtituez entre meſmes paralleles, n'ont vne meſme baſe, ils ſeront ſur baſes egales.

Soient les triangles egaux ABC, DEF, entre meſmes paralleles AD, BF, & ſur les baſes BC, EF: Ie dis qu'icelles baſes ſont egales entr'elles. Car ſi elles ne ſont



égales soit BC la plus grande, & d'icelle soit retranchée CG, egale à EF, & tirée AG. Donc par la 38. proposit. le triangle ACG sera egal au triangle DEF: Mais à ce mesme triangle a esté posé egal le triangle ABC. Donc par le 1. axiome les triangles AGC, ABC seront egaux, la partie & le tout: Ce qui est absurde. Donc les bases BC, EF, ne sont pas inegales, mais egales. Ce qui estoit proposé.

En suitte de ce theoreme Clauius demonstre encore le suiuant.

Si deux triangles constituez entre mesmes paralleles, ont leurs bases inegales, celuy-là sera le plus grand, duquel la base sera la plus grande. Et au contraire, si deux triangles inegaux sont entre mesmes paralleles, la base du plus grand sera la plus grande.

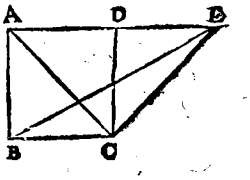
En la figure precedente soient entre mesmes paralleles AD, BF, les triangles ABC, DEF, & soit la base BC plus grande que la base EF: Ie dis que le triangle ABC, est plus grand que le triangle DEF. Car ayant pris CG egale à EF, & tiré AG, les triangles AGC, DEF, seront egaux par la 38. proposition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC est plus grand que le triangle AGC, le mesme triangle ABC sera plus grand que le triangle DEF.

Soient derechef les triangles inegaux ABC, DEF, & le plus grand soit ABC. Ie dis que la base BC est plus grande que la base EF. Car si on dit qu'elle est egale, le triangle ABC sera egal au triangle DEF: ce qui est absurde, attendu qu'il a esté posé plus grand. Et si on l'estime estre moindre, le triangle DEF sera plus grand que le triangle ABC, comme il a esté demonstré. cy-dessus: Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a esté posé plus grand que DEF. Donc la base BC sera plus grande que la base EF, puis qu'elle ne peut estre ny egale, ny moindre. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes paralleles AE & BC. Ie dis que le parallelogramme ABCD est double du triangle BEC.

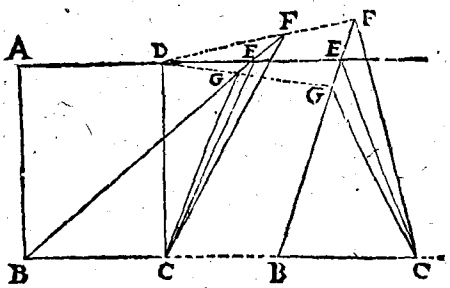


Car si on meine la diagonalle AC, le triangle ABC sera la moitié du parallelogramme ABCD par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le mesme triangle ABC sera egal au triangle BEC. Donc par la 6. com. sent. le parallelogramme ABCD, qui est double de l'vn, sera aussi double de l'autre. Si donc vn parallelogramme & vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Si les bases estoient egales, on demonstreroit encore la mesme chose, & en la mesme maniere que dessus, tirant le diametre du parallelogramme. Car d'autant que les tri-

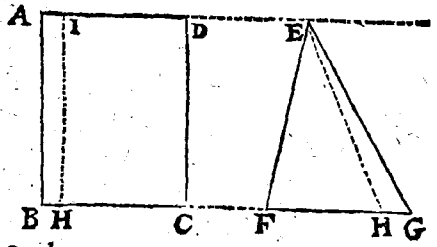
angles constituez sur baſes egales, & entre meſmes paralleles ſont egaux entr'eux, le parallelogramme qui eſt double de l'vn, ſeroit auſsi double de l'autre.
Clauius a demonſtre apres Commandin la conuerſe de cette 41. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si vn parallelogramme double d'vn triangle eſt conſtitué ſur vne meſme baſe qu'iceluy, ou ſur vne baſe egale, & de meſme part, ils ſeront entre meſmes paralleles. Et ſi vn parallelogramme eſt double d'vn triangle, & entre meſmes paralleles, leurs baſes ſeront egales, ſi elles ne ſont vne meſme.



Soit le parallellogramme ABCD double du triangle EBC, ſur vne meſme baſe, ou ſur baſes egales: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que AD qui eſt parallele à BC, eſtant prolongée directement tombera au poinct E. Car autrement elle tombera ou au deſſus de E, ou au deſſous. D'où aduiendra comme il a eſté demonſtré en la 39. ou 40. prop. la partie eſtre egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme ſera pareillement double du triangle BFC, ou BGC: & par le 6. axiom. les triangles EBC, FBC, ou les triangles FBC, GBC ſeront egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde.

Soit maintenant le parallelogramme ABCD double du triangle EFG, & entre meſmes paralleles. Ie dis que la baſe BC eſt egale à la baſe FG. Car ſi l'vne d'icelles ſçauoir BC eſt plus grande, ayant pris CH egale à FG & tiré HI *parallele à* BA, *on demonſtrera les parallelogrammes* ABCD, IHCD *eſtre egaux, le tout & la partie: (pour ce que chacun eſt double du triangle EFG, celuy-là par l'hypotheſe, & ceſtuy cy par la 41. prop.) ce qui eſt abſurde.*

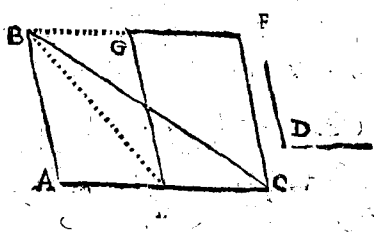


On demonſtrera encore le méme, ſi on dit la baſe FG eſtre plus grande que la baſe BC: Car ayant faict FH egale à BC, & tiré la ligne droicte HE, les triangles EFH, EFG ſeront egaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun eſt moitié du parallelogramme ABCD, celuy-là par la 41. prop. & ceſtuy-cy par l'hypotheſe) Ce qui eſt abſurde.

PROBL. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D: il faut faire vn parallelogramme egal au triangle donné ABC, & qui ait vn angle egal à l'angle donné D.



L'vn des coſtez du triangle, ſçauoir, AC ſoit couppé en deux egalement en E, par la 10. prop puis ſoit fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. ſoit

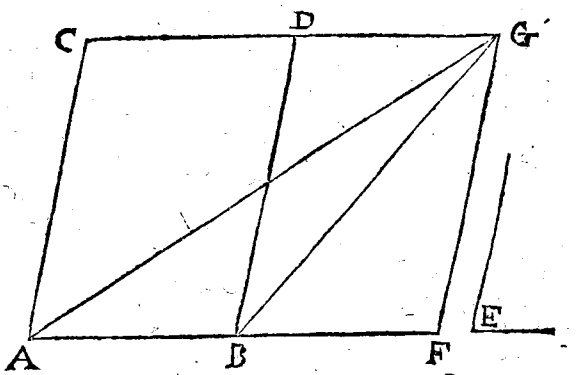
menee de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle couppe E G en G. Derechef, de C ſoit menee C F parallele à E G, rencontrant B F en F : & ſera conſtitué vn parallelogramme EGFC, ayant l'angle CEG egal au donné D, lequel parallelogramme ie dis eſtre egal au triangle donné ABC. Car eſtant tiree la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC ſera double du triangle E B C par la propoſition precedente, duquel eſt auſſi double le triangle ABC, iceluy eſtant egal aux deux A B E, EBC, qui ſont egaux entr'eux par la 38. propoſ. Donc le parallelogramme E G F C, & le triangle ABC ſeront egaux entr'eux par la ſixieſme commune ſentence, & puis qu'iceluy parallelogramme a l'angle C E G egal au donné D par la conſtruction, nous auons conſtruict vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme eſt enſeignee au 13. de noſtre Geometrie practique : Et eſt ſi facile à entendre par la conſtruction cy-deſſus, qu'il n'eſt beſoin d'en dire autre choſe : mais nous adiouſterons icy (apres Pelletier) la conuerſe de cette 42. propoſition, qui eſt telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme ABDC, & l'angle rectiligne E : il faut faire vn triangle egal au parallelogramme donné AD, ayant vn angle egal au donné E. Soient prolongees CD, tant qu'il ſera de beſoin, AB en ſorte que BF ſoit egale à icelle AB ; puis au poinct A ſoit faict l'angle FAG egal au donné E, tirant AG iuſques à ce qu'elle rencontre CD prolongee, & eſtant ioinct FG, le triangle AGF ſera le requis : Car l'angle FAG eſt egal au donné E, & eſtant tiree BG, les triangles AGB & BGF ſeront egaux par la 38. prop. & partant le total AGF ſera double de AGB : Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD eſt auſſi double d'iceluy triangle ABG. Donc le triangle AGF, & le parallelogramme ACDB ſeront auſſi egaux entr'eux. Ce qu'il falloit faire.



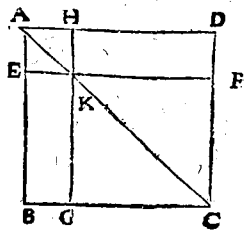
COROLLAIRE.

Il eſt euident par les deux demonſtrations cy-deſſus, qu'vn triangle qui a la baſe double de celle d'vn parallelogramme conſtitué entre meſmes paralleles qu'iceluy, eſt egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les ſupplemens des parallelogrãmes qui ſont à l'entour du diametre, ſont egaux entr'eux.

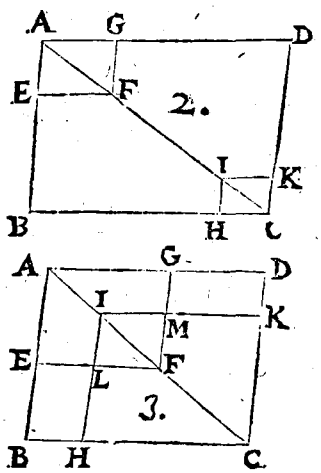
Soit le parallelogramme ABCD, son diamerre AC, à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Ie dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle supplements, sont egaux entr'eux.



Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux : Item les triangles CKG, CFK aussi egaux ; si on oste ceux cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK : Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK ; partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les supplements, &c. Ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Si les deux parallelogrammes d'al'entour le diametre n'estoient conioincts au poinct K, ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'vn fut éloigné de l'autre, comme en la deuxiesme figure, ou bien qu'ils s'entrecouppassent ainsi qu'en la troisiesme, on demonstreroit en la mesme maniere que dessus, estre aussi egaux, les complemens ou restes, sçauoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFIK, & en la 3. les parallelogrãmes BELH, DGMK : Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'vne & l'autre fig. sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF ; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome. Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront encore egaux les pentagones BEFIH, DGFIK. Mais adiousstant aux trapezes de la troisiéme fig. les triangles egaux LIF, MIF, les figures BELIC, DGMIC seront egales entr'elles, desquelles si on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront aussi egaux les parallelogrammes BELH, DGMK. Ce qui estoit proposé.



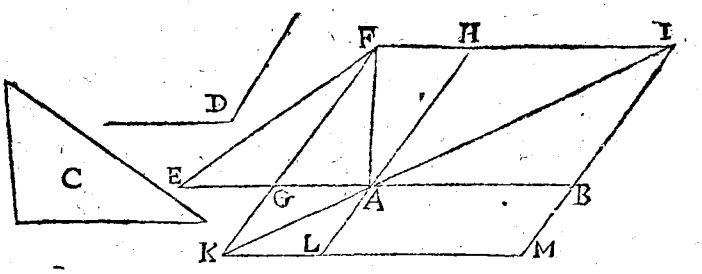
PROB. 12. PROP. XLIV.

Sur vne ligne droicte donnee, d'escrire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donné C, & l'angle rectiligne donné D. Il faut sur AB descrire vn parallalogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

Soit pro-

Soit prolongee la ligne donnee A B iuſques en E, tellement que AE ſoit egale à quelconque des coſtez du triangle C, & ſoit acheué de conſtruire par la 22. prop. le triangle AFE, ayant les coſtez egaux auxcoſtez dudit triangle donné C, lequel luy ſera auſſi egal par le Corol. de la 8. propoſ. Soit maintenant conſtruit par la 42. prop. le parallelogr. AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D: & apres auoir continué la ligne FH iuſques en I, tellement que HI ſoit egale à AB, ſoit menee IA iuſques à ce qu'elle rencontre FG prolongee en K: (ce qui doit arriuer, n'eſtant IA parallele à FG par la 11. com. ſent.) Puis du poinct K, ſoit menee KM parallele à GB, iuſques à ce qu'elle rencontre IB tiree en M: & finalement ſoit prolongee HA iuſques à ce qu'elle rencontre KM en L. Ie dis que le parallelogramme ABML eſt le requis.



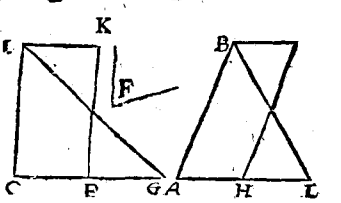
Car il eſt conſtitué ſur la ligne droicte donnee AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il eſt egal à l'angle GAH, qui a eſté fait egal à l'angle D: Finalement il eſt egal au triangle donné C, puis que par la 45. propoſ. il eſt egal au parallelogramme AHFG, lequel a eſté faict egal au triangle AFE, ou C. Nous auons donc deſcrit ſur la ligne donnee AB vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de ce Probl. en nos Memoires Mathematiques Probl. 15. de la Geometrie practique, & ne differe de la conſtruction cy deſſus. C'eſt pourquoy nous n'en dirons autre choſe, mais nous adiouſterons icy la conuerſe de cette propoſ. laquelle eſt telle.

Sur vne ligne droicte donnee, conſtruire vn triangle egal à vn paralelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut deſcrire vn triangle egal au parallelogramme CDKE, & qui ait vn angle egal à l'angle donné F. Soit prolongée CE iuſques en G, tellement que CE, EG ſoient egales, & ſoit menee DG, qui fera le triangle CDG. En apres, par la prec. propoſ. ſoit conſtruit ſur AB le parallelogramme BH egal au triangle CDG, ayant l'angle BAH egal au donné F: puis ſoit prolongee AH iuſques en L, de ſorte que HL ſoit egale à AH, & ayant tiré BL, le triangle ABL, ſera le requis. Car par

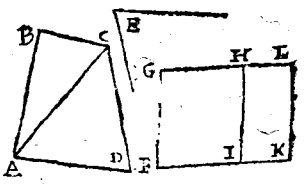


le corol. de la 42. prop. iceluy triangle A B L eſt egal au parallelogramme B H. Mais iceluy parallelog. eſt egal par la conſtruction au triangle D C G, lequel eſt egal au parallelog. C K par le meſme corol. Donc le triangle A B L ſera auſsi egal à iceluy parallelogramme C K: mais il a l'angle A egal au donné F, & eſt faict ſur la ligne donnee A B parquoy appert eſtre faict ce qui eſtoit propoſé.

PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée A B C D, & l'angle donné E: Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne A B C D, qui ait vn angle egal au donné E



Soit reſoluë la figure rectiligne donnee en triangles, ſçauoir eſt menant la ligne droicte A C: puis par la 42. propoſ. ſoit fait le parallelogramme F G H I egal au triangle A D C, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item ſur H I ſoit fait le parallelogramme H I K L, egal au triangle A B C, ayant vn angle H I K egal au donné E, & ſera fait ce qui eſt requis. Car les deux parallelogrammes F H & I L, ſont conſtruicts egaux à la figure rectiligne A B C D, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes enſemble en font vn ſeul. Car d'autant que chacun des angles G F I, H I k, eſt eſgal à l'angle donné E, ils le ſeront auſſi entr'eux: auſquels ſi on adiouſte l'angle commun F I H, les deux angles G F I, H I F, qui ſont egaux à deux droicts par la 29. prop. eſtant F H parallelogramme; ſeront egaux aux deux angles H I K, H I F, leſquels partant ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes F I, K I, ſe rencontreront directement. Pareillement les deux angles G H I, H L K eſtans egaux par la 34. prop. car ils ſont oppoſez à angles egaux G F I, H I K, ſi à iceux on adiouſte l'angle commun I H L, par le meſme diſcours que cy deſſus les deux lignes G H & L H ſe rencontreront directement: ainſi F K & G L eſtans lignes droictes, & conioignant de meſme part les egales & paralleles F G & K L; elles ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. prop. & partant F G L K ſera parallelogramme; lequel nous auons conſtruict egal à la figure rectiligne donnee A B C D, & à l'angle F egal au donné E, ainſi qu'il eſtoit requis.

SCHOLIE.

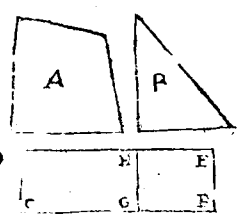
S'il y euſt eu dauantage de triangles en la figure donnee, il euſt fallu con

ſtruire ſur K L vn troiſieſme parallelogramme egal au troiſieſme triangle: puis ſur le coſté oppoſé à K L, vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainſi proceder de triangle en triangle iuſques à la fin. Et quant à la demonſtration, ce ſera touſiours la meſme que deſſus, repetee autant de fois qu'il ſera de beſoin. Or comme on deſcrira ſur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné; il eſt aſſez manifeſte par les choſes cy deſſus dictes: car pour exemple, ſi la ligne droicte F G euſt eſté donnee, nous euſſions par la precedente prop. deſcrit ſur icelle le parallelogramme F G H I: puis ſur la meſme ligne F G, ou pluſtoſt ſur vne egale à icelle H I, le parallelogramme H I K L, & ainſi conſecutiuement s'il y auoit d'auantage de triangle en la figure rectiligne donnee.

Pelletier a adiouſté en ce lieu vn Probleme fort vtile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus briefuement qu'il n'a fait.

Eſtans donnees deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus grande par deſſus la moindre.

Soient donnees deux figures rectilignes A & B, dont A eſt la plus grande: il faut trouuer l'excez de A par deſſus B. Par la 45. prop. ſoit faict le parallelogramme C D E F egal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis ſur la ligne C D ſoit fait le parallelogrâme C D H G egal au rectiligne B, ayant l'angle C commun, & le parallelogramme G H E F ſera l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B.

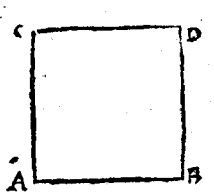


Car d'autant qu'iceluy parallelogramme G E eſt l'excez du parallelogramme C E egal à A, par deſſus le parallelogramme C H egal à B; le meſme parallelogramme G E ſera auſſi l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee A B, ſur laquelle il faut deſcrire vn quarré. Du poinct A, ſoit menee A C ligne perpendiculaire à A B par la 11. prop. laquelle ſoit faicte egale à icelle A B, & apres auoir mené C D parallele à A B, & B D parallele à A C, par la 31. prop. Ie dis que le quadrilatere A B D C eſt vn quarré.



Car d'autant que par la conſtruction il eſt parallelogramme, les coſtez & les angles oppoſez ſont egaux par la 34. propoſ. partant le coſté A B eſt egal à C D, & A C à B D: mais A C eſtant egal à A B par la conſtruction; il eſt euident que les quatre coſtez ſont egaux entr'eux. Item l'angle A eſtant droict par la

construction, auſſi ſon oppoſé D ſera droict. Et la ligne A C tombant ſur les deux lignes paralleles A B, C D, les deux angles interieurs A & C, ſont egaux à deux droicts par la 29. prop. Mais l'angle A eſt droict: donc l'angle C ſera auſſi droict: partant auſſi droict ſon oppoſé B. Ainſi les quatre angles A, B, C, D ſeront droicts: & par la def. du quarré la figure A B D C ſera quarree. Nous auons donc deſcrit vn quarré ſur la ligne droicte donnee A B. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

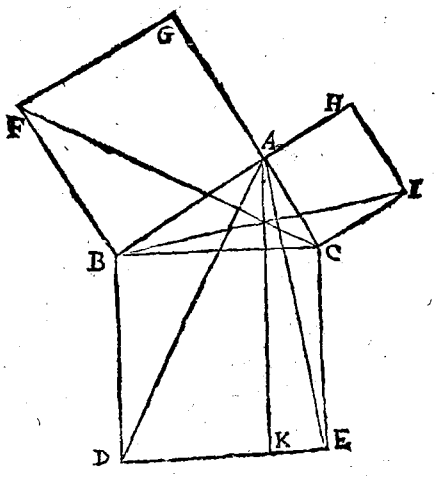
Nous auons enſeigné la practique de cette propoſ. en noſtre Geometrie practique Probl. 12. laquelle ne differe guere de la conſtruction cy deſſus: car ayant mené la perpendiculaire A C, & icelle faict egale à A B, du meſme interualle A B ſoient deſcrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecouppent en D, duquel eſtans tirees les lignes C D, B D, ſera faict le quarré requis.

Proclus demonſtre icy: Que les quarrez de lignes egales ſont egaux entre-eux: & que des quarrez egaux les lignes ſont egales. *Ce qui eſt aiſé à prouuer par la ſuperpoſition d'vn quarré ſur l'autre: Car les lignes eſtans egales, ſi l'vne eſt poſee deſſus l'autre, elles conuiendront entr'elles; & les angles eſtans auſſi egaux, c'eſt à ſçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que ſi les quarrez ſont egaux, il conuiendront entr'eux, à cauſe de l'egalité des angles: dont auſſi les lignes; autrement vn quarré ſeroit plus grand que l'autre. Nous auons laiſſé la demonſtration de Proclus qui eſt tres-longue, pour ſuiure celle-cy qui eſt briefue & facile.*

THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle A B C, ſur les coſtez duquel ſoient deſcrits les trois quarrez B C E D, A B F G, A H I C. Ie dis que le quarré B C E D deſcrit ſur le coſté B C, qui ſouſtient l'angle droict B A C, eſt egal aux deux quarrez A B F G & A C I H, deſcrits ſur les deux autres coſtez A B & A C.



Car ſoit menee la ligne A K parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, C F & B I. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A ſont droicts, les lignes droictes A B, A H ſe rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item C A, A G par la 14. prop. Derechef, puis que les angles A B F, C B D ſont egaux, car ils

ſont droicts, ſi on leur adjouſte le commun ABC, le total FBC ſera egal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux coſtez AB, BD, egaux aux deux coſtez FB, BC du triãgle CBF, chacun au ſien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux coſtez, egaux, & par la 4. p. les triangles ABD, CBF ſeront egaux. Mais le quarré AF eſt double du triangle FBC par la 41. prop. car ils ſont ſur meſme baſe BF, & entre meſmes paralleles BF, GC: il ſera donc auſſi double de ſon egal ABD, duquel le parallelogramme BK eſt auſſi double par la meſme 41. prop. & par conſequent le quarré AF ſera egal au parallelogramme BK: car les choſes doubles d'vne meſme ſont egales entr'elles. Par meſme diſcours on prouuera que le parallelog. CK eſt egal au quarré AI: partant les deux parallelogrammes enſemble BK & CK, ſeront egaux aux deux quarrez enſemble AF & AI. Donc le quarré BE qui eſt compoſé d'iceux parallelogrammes BK, CK, ſera auſſi egal aux meſmes quarrez AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, le quarré du coſté, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambligones le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus, eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des d'vnx autres coſtez: Et qu'en tout triangle le quarré d'vn coſté oppoſé à vn angle aigu eſt moindre que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez. Car ſi l'angle obtus eſt reſſerré iuſques à ce qu'il vienne à eſtre droict, les coſtez qui le comprennent demeurans les meſmes, le coſté oppoſé viendra moindre par la 24. propoſition. Mais ſi l'angle aigu eſt ouuert & eſlargy iuſques à ce qu'il vienne droict, les coſtez qui le contiennent demeurans les meſmes, le coſté oppoſé à iceluy angle ſera faict plus grand par la meſme 24. prop. veu donc qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le quarré du coſté oppoſé à l'angle droict, eſt egal aux deux quarrez enſemble des deux autres coſtez; il eſt euident que le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus, eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez; & que le quarré du coſté oppoſé à vn angle aigu, eſt moindre que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez: Mais de combien celuy-là eſt plus grand, & de combien ceſtuy-cy eſt moindre, Euclide le demonſtrera ez 12 & 13. prop. du ſecond liure.

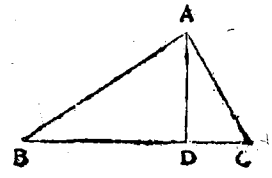
Or l'inuention de ce celebre & tant renommé Theoreme eſt attribuee à Pythagoras, lequel en fut ſi content & ioyeux, que pour en rendre grace aux dieux, pluſieurs diſent qu'il ſacrifia vn Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur ſacrifia qu'vn bœuf; ce qui eſt plus vray-ſemblable, que non pas qu'il en ait immolé 100, *veu que ce Philoſophe faiſoit tres-grand ſcrupule d'eſpandre le ſang des animaux. Mais quoy qu'il en ſoit, ce Theoreme eſt vn des plus vtiles aux choſes Geometriques, encore qu'il ne ſemble pas ſi admirable que la 31. prop. du 6. liu. où Euclide demonſtre qu'aux triangles rectangles, la figure deſcripte ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux ſi-*

gures semblables, descriptes & semblablement posees sur les deux costez qui contiennent iceluy angle droict.

Par le moyen de cette 47. prop. il est fort aisé de demonstrer cet autre Theoreme suiuant.

Si de l'angle d'vn triangle compris de deux costez inegaux, est tiree vne perpendiculaire à la base, laquelle tombe dans le triangle; elle couppera la base en deux parties inegales, la plus grande desquelles sera vers le plus grand costé: Et au contraire, si la base est couppee inegalement par la perpendiculaire, les deux costez seront inegaux, & le plus grand sera celuy adjaceant au plus grand segment.

Au triangle ABC, duquel le costé AB est plus grand que le costé AC, soit la ligne AD perpendiculaire à la base BC, laquelle tombe dedans le triangle: ce qui aduient tousiours quand l'vn & l'autre angle d'icelle base est aigu, ainsi qu'il appert du Cor. de la 17. prop. Ie dis que la partie BD est plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, BD; & le quarré de AC, egal aux deux de AD, CD: Mais le quarré de AB est plus grand que celuy de AC, puis que le costé AB est plus grand que le costé AC; donc aussi les deux quarrez de AD, BD, seront plus grands que les deux quarrez de AD, DC; parquoy ostant le commun quarré de AD, restera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD; & partant la ligne droicte BD sera plus grande que la ligne droicte CD.



Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD face le segment BD plus grand que le segment CD. Ie dis que le costé AB est plus grand que le costé AC. Car le quarré de BD sera plus grand que le quarré de CD, & adioustant le cõmun quarré de AD, les deux quarrez de BD, AD, seront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. prop. le quarré de AB est egal aux deux de BD, AD, & celuy de AC egal aux deux de CD, AD. Donc aussi le quarré de AB sera plus grand que le quarré de AC, & par consequent le costé AB sera plus grand que le costé AC. Ce qu'il falloit prouuer.

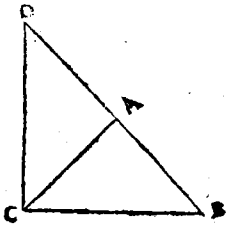
THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'vn des costez d'vn triangle, est egal aux quarrés des deux autres costez; l'angle sousstenu d'iceluy costé est droict.

Au triangle ABC, le quarré du costé BC soit egal aux quarrez des deux autres costez BA & AC. Ie dis que l'angle BAC, sousstenu d'iceluy costé BC, est droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. &

faict icelle AD egale à AB, soit menee CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA & AD, lesquels sont egaux aux quarrez de BA & AC, estant leurs lignes egales ; & par la 1. com. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD: partant la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC egale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droict CAD : partant il sera aussi droict. Si donc le quarré de l'vn des costez d'vn triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

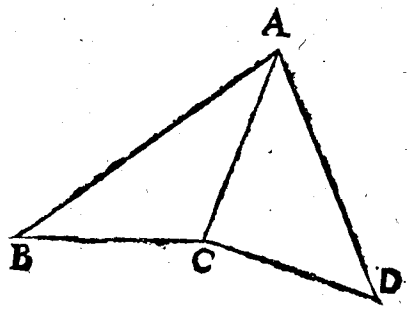


SCHOLIE.

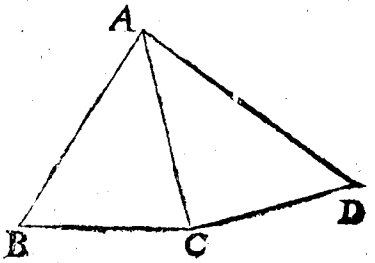
A cette proposition, qui est la conuerse de la precedente, nous adiousterons cet autre theoreme.

Si le quarré d'vn costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez ; l'angle soustenu d'iceluy costé est obtus : Et s'il est moindre, aigu.

Au triangle ABC, le quarré du costé AB, soit plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez AC, CB : Ie dis que l'angle ACB opposé au costé AB est obtus. Car soit tiré de C perpendiculairement à AC, la ligne droicte CD egale à BC, & soit ioinct AD. D'autant que par la 47. prop. le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, c'est à dire AC, CB, & le quarré de AB a esté posé plus grand que les quarrez de AC, CB, le quarré de AD, sera moindre que le quarré de AB ; & partant la ligne AD moindre que ladite ligne AB. Parquoy veu que les costez BC, AC, du triangle ABC, sont egaux aux costez CD, AC, du triangle ACD, vn chacun au sien, & la base AB plus grande que la base AD, par la 25. prop. l'angle ACB sera plus grand que l'angle ACD : Mais iceluy ACD est droict. Donc ACB est plus grand qu'vn droict ; & partant obtus. Ce qui est proposé.



Maintenant, soit le quarré de AB moindre que les deux quarrez des deux autres costez AC, CB : Ie dis que l'angle ACB soustenu d'iceluy costé AB, est aigu. Car ayant fait comme au parauant le triangle rectangle ACD, on prouuera par les mesmes raisons que dessus, que la base AD est plus grande que la base AB, & l'angle droict ACD plus grand que l'angle ACB, qui partant est aigu. Ce qui est proposé.



Or d'autant que l'application des nombres

aux costez des triangles rectangles est vtile à plusieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle est rectangle, duquel le plus grand costé contenant 5 parties egales, le moindre contient trois des mesmes parties, & l'autre 4: ou bien selon trois autres nombres, doubles, ou triples ou quadruples, &c. des trois susdits 5, 4, 3, comme 10, 8 & 6: ou 15, 12 & 9; ou 20, 16 & 12; ou 50, 40, & 30; &c. Car il appert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, est tousiours egal aux quarrez des deux autres nombres.

Mais si sans auoir egard aux nombres cy dessus, on vouloit faire vn triangle rectangle, ayant tous les trois costez en nombre de parties egales sans fraction, on pourroit trouuer lesdits nombres en deux manieres; dont la premiere qu'on attribue aussi à Pythagoras est telle. Soit pris pour le moindre costé vn nombre de parties nompair, & iceluy nombre estant quarré, soit ostee l'vnité de sondit quarré, & la moitié du reste d'iceluy quarré, sera le moyen nombre, auquel adiousstant l'vnité viendra le plus grand nombre: Comme par exemple, prenant 5 pour le nombre des parties du moindre costé, son quarré est 25, duquel ostant l'vnité restent 24, dont la moitié est 12, pour le nombre des parties du moyen costé; mais adiousstant l'vnité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand costé.

La deuxiesme maniere est attribuee à Platon, & est telle: Soit pris vn nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy soit ostee l'vnité, & restera l'vn des deux autres nombres; mais adiousstant ladite vnité au mesme quarré, viendra le troisiesme nombre: comme par exemple, prenant 6 pour l'vn des nombres, le quarré de la moitie d'iceluy est 9, dont l'vnité estant ostee, restent 8, pour l'vn des deux autres nombres; mais adiousstant ladite vnité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troisiesme nombre.

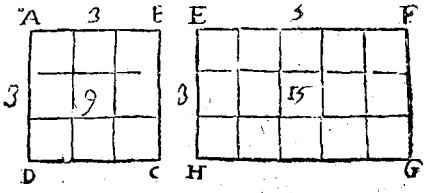
Fin du premier Element.

ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre contenu ſoubs deux lignes droictes qui font l'angle droict.

Il a eſté dit en la 36. def. 1. que c'eſt que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre ſortes: mais maintenant il faut entendre qu'vn parallelogramme eſt dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par conſequent il y a ſeulement le quarré, comme A B C D, & le quarré long, comme E F G H, qui ſoient rectangles: car il n'y a que ces deux ſortes de parallelogrammes qui ayent les angles droicts. Et eſt à noter, qu'en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt donné droict, il eſt neceſſaire que les trois autres ſoient auſſi droicts: comme par exemple, ſi l'angle E du parallelogramme EFGH eſt droict. Ie dis que les trois autres F, G, H, ſont auſſi droicts. Car d'autant que les lignes E F, GH ſont paralleles, les angles internes E & H, ſont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais l'angle E eſt droict par l'hypotheſe: donc auſſi l'angle H ſera droict: & par la 34. p. 1. leurs oppoſez G & F ſeront auſſi droicts. Et puis que par la 34. p. 1. tout parallelogramme a les coſtez oppoſez egaux, il n'y peut auoir en vn parallelogramme que deux coſtez inegaux, leſquels conſtituent chaque angle d'iceluy: C'eſt pourquoy Euclide dit icy, tout parallelogramme rectangle eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui comprennent vn angle droict; tellement que le parallelog. rectangle E F G H ſera dict eſtre contenu ſous les deux lignes droictes, EF, EH: ou ſous les deux EF, FG: ou ſous FG, GH: ou finalement ſous GH, HE: ainſi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'vn parallelogramme rectangle: ſçauoir l'vne comme EF, ou HG, ſa lon-

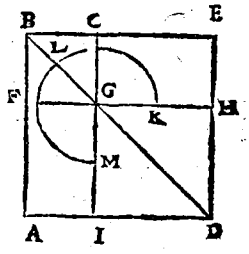


gueur : & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur : & par le mouuement imaginaire de l'vne de ces deux lignes en l'autre, se faict iceluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meuue en trauers, tellement qu'elle face tousiours angle droict auec icelle EH, iusques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F au poinct G; sera descrit tout le parallel. rectangle E F G H. Le mesme sera faict, si on pose EH se mouuoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallelogramme rectangle on multiplie vn costé d'iceluy par l'autre : comme par exemple, le costé EF estant de 5. pieds, & l'autre costé EH de trois : si on multiplie vn nombre par l'autre, seront produict 15 pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme E F G H. Pareillement au parallelogramme rectangle A B C D, le costé AB estant de 3 pieds, & le costé AD aussi de trois pieds : multipliant l'vn par l'autre, seront produicts neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy-dessus.

Or est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suiuans, Euclide appelle les parallelogrammes rectangles, simplement rectangles; ce qu'obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tousiours entendre parallelogr. rectangle. Derechef, que pour briefueté, & afin de ne repeter souuentesfois toutes les lettres apposees aux parallelogrammes, les Geometres ont de coustume d'exprimer chaque parallelogramme soit rectangle ou non par deux lettres seulement, sçauoir celles qui sont diametralement opposees : tellement que pour denotter le parallelogramme A B C D, on dira seulement le parallelogramme AC ou BD.

2. En tout parallelogramme, l'vn des parallelogrammes descrits à l'entour du diametre, auec les deux supplemens, est appellé Gnomon.

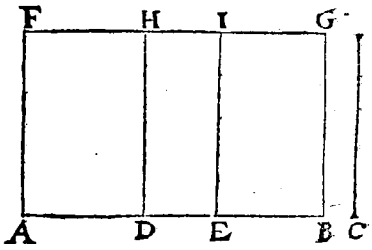
Au parallelogramme A B E D, soit menée la diagonalle B D; & CGI parallele à AB couppant icelle diagonalle en G, & par iceluy poinct G soit menée FGH parallele à AD : & le parallelogramme ABED sera diuisé en quatre parallelogrammes, deux desquels F C & H I, sont dicts estre descrits à l'entour du diametre ou diagonalle, mais les autres deux E G, A G, sont appellez supplemens, ainsi que nous auons dict à la 37. def. du premier liure. Or la figure composee d'iceux supplemens & de l'vn ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonalle, sera dit Gnomon : comme la figure CED AFG, laquelle est composee des deux supplemens AG, GE, & du parallelogramme HI, qui est alentour le diametre; sera appellee Gnomon. Pour mesme raison la figure ABEHGI, qui est composee des deux supplemens I F, G E, & du parallelog. F C, qui est alentour le diametre, sera aussi dit Gnomon. Et est à noter que pour briefuement exprimer telles figures, les Geometres y descriuent quelques fois vne circonference, comme le Gnomon susd. ABEHGI, auquel est descrite la circonference K L M, sera exprimé & denotté par icelle circonference K L M.



THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droictes l'vne eſt couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſoubs les deux toutes, eſt egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'vne chacune partie de celle qui eſt couppee.

Soient deux lignes droictes AB & C, dont la premiere AB eſt couppee à l'aduanture en pluſieurs parties, ſçauoir eſt en AD, DE, EB. Ie diſque le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C, ſera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'vne chacune partie de la couppee AB.



Qu'il ne ſoit ainſi : qu'on meine AF perpendiculaire à AB, par la 11. p. 1. laquelle ſoit faite egale à C, & du poinct F ſoit menee FG parallele à AB; & BG parallele à AF par la 31. prop. 1. Il eſt euident que le quadrilatere AFGB, ſera vn parallelog. rectangle, & qu'iceluy ſera compris des deux lignes donnees AB & C, puis que AF eſt egale à C. Item ſoient menees les deux lignes DH & EI paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallelog. les trois quadrilateres AH, DI, EG, ſeront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois ſegmens AD, DE, EB, c'eſt à dire de la ligne C, & d'iceux trois ſegmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles enſemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. ſent. ils luy ſont egaux. Parquoy ſi de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propoſe en lignes aux dix premiers Theoremes de ce ſecond liure, nous l'auons appliqué & demonſtré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neantmoins i'eſtime qu'il ne ſera inutile de les expliquer des icy par nombres, comme a fait Clauius: Car d'autant que ce qui prouient de la multiplication d'vn nombre par vn autre reſpond au produit d'vne ligne en vne autre, on peut facilement & briefuement monſtrer par nombres ce qui eſt icy demonſtré en lignes auec beaucoup de paroles.

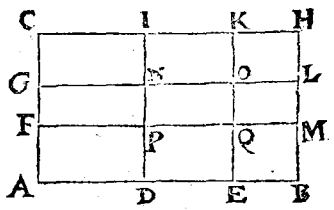
Soient donc propoſez deux nombres, comme 10 & 6, le premier deſquels ſoit diuiſé en trois autres nombres ou parties, 5, 3 & 2. Or multipliant les deux nombres propoſez entr'eux, c'eſt à ſçauoir 10 & 6, ſera produict le nombre 60, auquel ſera egale la ſomme de ces trois nombres 30, 18 & 12, leſquels ſont procreez multipliant chaque partie du nombre diuiſé 10, c'eſt à ſçauoir 5, 3, 2, par le nombre non diuiſé 6: ainſi qu'il appert en l'operation cy-deſſoubs:

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	60.

Or Commandin demonſtre icy deux autres Theoremes, dont le premier eſt tel.

S'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre deſquelles ſoit couppee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, eſt egal aux rectangles contenus de chaque ſegment de l'vne, & d'vn chacun des ſegmens de l'autre.

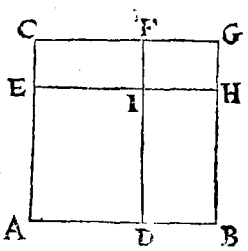
Soient deux lignes droictes AB, AC, contenant vn angle droict A, & AB ſoit couppée és poincts D & E, mais AC és poincts F & G. Ie dis que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles cõpris de chaque partie AD, DE, EB, & d'vn chacun ſegment AF, FG, GC, c'eſt à dire egal aux rectangles contenus de AD, AF; AD, FG; AD, GC: DE, AF; DE, FG; DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. Car eſtant accomply le rectangle AH, ſoient tirees DI, EK paralleles à AC: Item FM, GL paralleles à AB, qui couppent les premieres és poincts P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle AP eſt contenu ſous AD, AF: & NF ſous AD, FG: & GI ſous AD, GC, (pource que par la 34. prop. 1. les lignes FP, GN ſont egales à icelle AD.) Item que les rectangles DQ, PO, NK, ſont contenus ſous DE, AF: DE, FG: DE, GC: (car DP, PN, NI ſont egales à icelles AF, FG, GC; & PQ, NO, à icelle DE, par la 34. prop. 1.) Et par la meſme raiſon les rectangles EM, QL, OH, ſont compris ſous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il eſt euident que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles compris ſous chacune des parties AD, DE, EB, & vn chacun des ſegmens AF, FG, GC: ce qui eſtoit propoſé.



Nous rendrons auſſi manifeſte ce Theoreme par nombres: & pource ſoient deux nombres 12 & 8, le premier deſquels ſoit diuiſé en trois parties 6, 4 & 2: mais le dernier ſoit ſeulement diuiſé en deux parties 5 & 3. Or le produict de ces deux nombres propoſez multipliez entr'eux eſt 96, auquel eſt manifeſtement egale la ſomme de ces ſix nombres, 30, 20, 10, 18, 12 & 6, leſquels ſont produicts par la multiplication de chacune des parties 6, 4, 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quant au ſecond il eſt tel qu'il enſuit.

S'il y a deux lignes droictes couppées comme on voudra, le rectangle compris ſous icelles, auec celuy compris ſous vne partie de l'vne d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, eſt egal aux rectangles contenus ſous les lignes totales, & les ſuſdictes parties reciproquement, auec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC, faiſant l'angle droict A, leſquelles ſoient couppees comme on voudra en D & E. Ie dis que le rectangle compris ſous AB, AC, auec celuy compris ſous les parties AD, EC, eſt egal aux rectangles contenus ſous AB, EC: AC, AD: DB, AE. Car ayant accomply le rectangle AG, ſoit menee DF parallele à AC; & EH à AB, s'entrecouppans en I. Veu donc que le rectangle AG eſt egal aux rectangles EG, AI, DH: ſi on leur adiouſte le commun rectangle EF: les rectangles AG, EF, qui ſont compris ſous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, ſeront egaux aux



rectangles EG, AF, DH, compris sous AB, EC: AC, AD: DB, AE: ce qui estoit proposé.

Afin que ce theor. de Commandin soit aussi manifeste par nombres, soient proposez deux quelconques nombres 9 & 5, le premier desquels soit diuisé en deux parties 5 & 4: mais l'autre soit diuisé en 3 & 2: Or le produit de ces deux nombres proposez est 45, & celuy de la partie 5, multipliee par la partie 3 est 15, & la somme de ces deux produicts est 60, auquel nombre est manifestement egale la somme & addition de ces trois nombres 27, 25 & 8, qui sont produicts de 9 par 3, des par 5, & de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

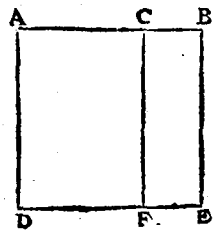
Parce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppee comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera egal au rectangle compris sous vne totalle, & vn segment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de l'autre segment de ceste-cy, & d'vn chacun segment de celle-là. Car le rectangle AG, qui est compris des deux toutes AB, AC, est egal au rectangle EG, contenu de la toute EH, c'est à dire AB, & du segment EC, & aux deux rectangles AI, DH, compris de l'autre segment AE, & des segmens AD, DE. Iceluy rectangle AG est aussi egal aux trois rectangles AH, EF, IG. Pareillement aux trois AF, DH, IG, comme aussi aux trois autres DG, AI, EF.

Le mesme se doit aussi entendre des nombres: car il est euident que les deux nombres cy dessus proposez, c'est assauoir 9 & 5, estans multipliez entr'eux produisent 45, auquel sont egaux ces trois nombres 27, 10 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3: & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainsi de toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra: les rectangles compris de la toute & d'vne chascune partie, sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte AB, couppee en deux parties telles qu'on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle de la toute AB, & de la partie AC, auec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, sont ensemble egaux au quarré de la toute AB.

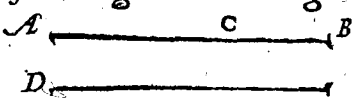


Qu'ainsi ne soit: Sur AB soit descrit le quarré AE; puis de C soit menee CF parallele à AD, laquelle CF sera egale à icelle AD, c'est à dire à AB: car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré. Il est donc euident que les deux rectangles AF & CE, sont compris de la toute AB, ou son egale CF, & des deux parties AC & CB, & si ils conuiennent auec le quarré AE, & par conse-

quent luy sont egaux. Si donc vne ligne droicte est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Clauius demonstre encore ce Theoreme ainsi. Soit prise vne ligne droicte D egale à AB: Or puis que AB est coupee en C, le rectangle contenu soubs la non couppee D, & la couppee AB (qui est le quarré de la toute AB) sera egal aux deux rectangles compris soubs la non couppée D (c'est à dire soubs AB) & vn chacun des segmens AC, CB par la prec. prop. Ce qui estoit proposé.



Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 diuisé en deux nombres 7 & 5: il est euident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui est 144, sont egaux les deux nombres 84 & 60, qui sont produicts du mesme nombre 12 multiplié par chacune des parties 7 & 5: car ils font aussi 144, comme monstre l'addition d'iceux.

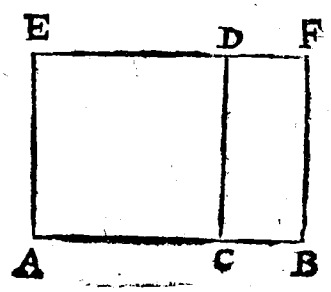
Or encore qu'en ce second Theoreme Euclide propose d'vne ligne diuisee en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la mesme maniere sera demonstré le mesme, si la ligne est diuisee en tant de parties qu'on voudra. Ce qui se peut aussi voir par nombres, ainsi qu'il ensuit. Soit le nombre 12 diuisé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre 12 sera 144; auquel sont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, lesquels sont produicts d'iceluy nombre proposé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera aussi demonstré comme dessus, que si vne ligne droicte est couppee en tant de parties qu'on voudra; le quarré de la toute est egal aux rectangles contenus soubs chaques segmens & vn chascun segment. Ce que nous rendrons aussi manifeste par nombres: & pour ce soit le nombre 10 diuisé en trois parties 5, 3 & 2: Il est euident que le quarré du nombre total 10 est 100, & qu'à iceluy sont egaux ces neuf nombres 25, 15, 10, 15, 9, 6, 10, 6 & 4, lesquels sont produicts par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, est egal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement prise.

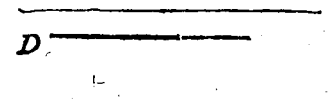
Soit la ligne droicte AB couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'vne ou l'autre partie, comme AC, est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle auoit esté premierement prise.



Qu'il ne ſoit ainſi : Sur la partie AC ſoit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis ſoit menee BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongee en F. Il eſt donc euident que AD eſt le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle des parties AC & CB ; (car CD eſt egale à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, ſur laquelle a eſté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF enſemble, conuiennent auec le rectangle AF ; & par conſequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore ce Theor. ainſi. Soit priſe la ligne droicte D egale à la partie AC. D'autant que la ligne droicte AB eſt diuiſee en C, par la 1. pr. de ce liure, le rectangle contenu ſoubs D & AB (c'eſt à dire ſoubs AC & AB) ſera egal au rectangle compris ſoubs D & CB (c'eſt à dire ſoubs AC, CB) & au rectangle contenu ſoubs D & BC, c'eſt à dire au quarré de la partie AC. Ce qui eſt propoſé.

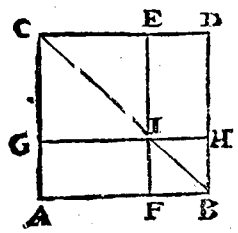


Pour accommoder ce Theor. aux nombres, ſoit quelconque nombre 12 diuiſé en deux parties telles qu'on voudra 7 & 5. Or multipliant ledit nombre propoſé 12 par ſa partie 7, viendront 84, auquel produit ſont egaux ces deux nombres 35 & 49, leſquels ſont produits de 7 multipliez par 5, & de 7 par ſoy meſme. Mais multipliant le meſme nombre 12 par l'autre partie 5, ſera produit le nombre 60, auquel ſont auſſi egaux ces deux nombres 35 & 25, qui ſont les produits des deux parties 7 & 5, multipliees entr'elles, & de la partie 5 en ſoy meſme: Et partant appert ce qui a eſté propoſé.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra ; le quarré de la toute eſt egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

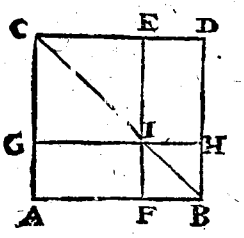
Soit la ligne donnee AB, couppee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez deſcrits ſur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB ſont enſemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne totale AB ſoit deſcrit le quarré AD ; & apres auoir mené la diagonalle BC ; du poinct F, ſoit menee la ligne droite FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy poinct I ſoit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. prop. 1. Ie dis premierement que les quadrilateres HF & EG ſont quarrez.

Car deſia il appert qu'ils ſont parallelogrammes, eſtans deſcrits entre

lignes paralleles. Item puis que A D eſt quarré, les deux coſtez AB & AC ſeront egaux, & le triangle A B C eſt Iſoſcelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles ſur la baſe B C, ſçauoir eſt A B C & A C B ſeront egaux. Pareillement la ligne B C tombant ſur les deux paralleles A C & F E fera l'angle exterieur F I B egal à l'oppoſé interieur A C B par la 29. propoſ. 1. lequel eſtant egal à A B C par la 1. com. ſent. A B C & F I B ſeront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux coſtez B F & F I ſeront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme H F aura les quatre coſtez egaux: & partant il ſera quarré; car l'angle F B H eſtant droict, les trois autres ſeront auſſi droicts, comme nous auons demonſtré à la 1. def. de ce liure. Par meſme diſcours on monſtrera G E eſtre auſſi quarré. Maintenant, d'autant que A I & I D ſont deſcrits entre lignes paralleles, & les angles A & D ſont droicts, il appert qu'ils ſont parallelogrammes rectangles, & egaux entr'eux par la 43. prop. 1. & ſont compris des deux parties AF, F B, eſtant E I egale à A F, & H I, I F à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant A I & I D ſont deux fois le rectangle de AF & F B, leſquels auec les deux quarrez F H & G E conuiennent auec le quarré total A D, & par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le quarré de la toute eſt egal, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration cy deſſus, que les parallelogrammes deſcrits à l'entour de la diagonalle d'vn quarré, & qui ont vn angle commun auec iceluy, ſont auſſi quarrez. Et de plus, il eſt euident que la diagonalle couppe en deux egalement les angles du quarré: Ce que nous auons auſſi demonſtré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainſi. D'autant que la ligne droicte A B eſt couppee en F, par la 2. prop. 2. le quarré de la toute A B ſera egal aux rectangles compris ſoubs la toute A B, & chacune des parties A F, F B. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu ſoubs A B, A F eſt egal au rectangle compris ſoubs A F, F B auec le quarré de la partie A F. Item le rectangle de A B, F B eſt egal au rectangle de F B, A F, auec le quarré de la partie F B. Donc le quarré de A B eſt auſſi egal aux quarrez des parties A F, F B, & aux rectangles contenus ſoubs A F, F B, & ſoubs F B, A F. Ce qui eſt propoſé.

A F B

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres: Soit le nombre 10 diuiſé en deux parties 6 & 4: Il eſt manifeſte que le nombre 100, qui eſt le quarré du nombre total 10, eſt egal à 36 & 16, qui ſont les quarrez des parties 6 & 4, auec deux fois 24, nombre produit deſdites parties 6 & 4 multipliees entr'elles: car tous ces quatre nombres 36,

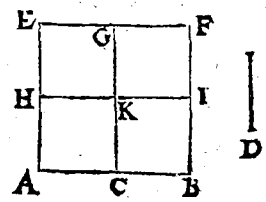
bres 36, 16, 24 & 24, font enſemble 100, ainſi qu'il appert en l'operation ſuiuante.

10	6	4	6	36
10	6	4	4	16
100.	36.	16.	24.	24
				24
				100.

Clauius demonſtre auſſi en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si vne ligne droicte eſt double d'vne autre, le quarré de celle là eſt quadruple du quarré de ceſte-cy: & ſi vn quarré eſt quadruple d'vn autre quarré, le coſté de celuy-là eſt double du coſté de ceſtuy-cy.

Soient deux lignes droictes AB & D, deſquelles AB eſt double de D. Ie dis que le quarré de AB eſt quadruple du quarré de D. Car ayant diuiſé AB en deux egalement en C, ſi on fait telle conſtruction qu'en ceſte 4. propoſ. il eſt euident que les 4. paralellogrammes AK, CI, HG, KF. ſeront quarrez, & egaux entr'eux. Mais le quarré AF eſt egal à iceux quatre quarrez: donc le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, c'eſt à dire de D, qui luy eſt egale: car AB eſt double de l'vne & de l'autre.



Pour la ſeconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dis que AB eſt double de D. Car AB eſtant couppee en deux egalement en C, le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, comme il a eſté demonſtré cy deſſus. Mais le quarré de AB a eſté poſé auſſi quadruple du quarré de D: donc les quarrez des lignes AC & D ſont egaux, & partant icelles lignes AC & D auſſi egales. Mais AB eſt double de AC: donc auſſi double de D.

Ce Theoreme eſt auſſi manifeſte en nombres: Car ſoient deux quelconques nombres 10 & 5, dont le premier eſt double de l'autre. Il appert que 100, quarré du premier nombre 10, eſt quadruple de 25, quarré du dernier nombre 5.

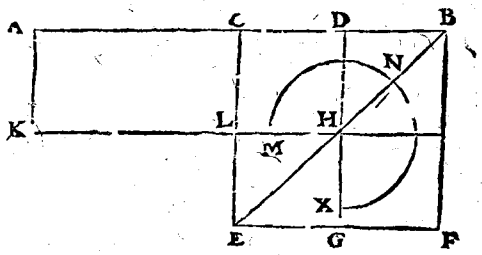
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & en deux inegales: le rectangle contenu d'icelles parties inegales auec le quarré de la partie du milieu, ſont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnee AB couppee en deux parties egales au poinct C, & en deux inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, auec le quarré de la partie du milieu CD, ſont egaux au quarré de la moitié CB.

Car ſur la ligne CB ſoit deſcrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres

auoir mené DG parallele à BF soit menee la diagonalle BE couppant DG au poinct H, par lequel soit menee interminement IK parallele à AB, couppant CE en L: puis du poinct A, soit aussi menee AK parallele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. prop. DI, LG seront quarrez; & partant la ligne DH sera egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH est aussi egale à CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & LG sera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, auec le quarré GL, est egal au quarré CF, faict sur la ligne CB, moitié de la toute AB.



Or le rectangle AL est egal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant qu'ils sont sur baſes egales AC & CB, & entre meſmes paralleles AB & KI. Pareillement les supplemens CH & HF sont egaux par la 43 prop. 1. ausquels si on adiouste le quarré commun DI, les tous CI & DF seront egaux: & par la 1. com. sent. DF sera egal à AL, ausquels si on adiouste aussi le supplement commun CH, le Gnomon MNX sera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le quarré GL, conuiennent auec le quarré CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & le quarré GL seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. Parquoy si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous adiousterons tant en ce Theor. qu'aux 5. suiuans les demonstrations qu'en a fait le docte Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le quarré de CB est egal aux quarrez de CD & DB, A C D B *auec deux fois le rectangle d'icelles; & que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB est egal au rectangle de CD, DB, auec le quarré de DB: le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CD, auec le rectangle de CB, DB, & celuy de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des toutes AD, DB, est egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le quarré de CB sera egal au quarré de CD, auec le rectangle de AD, DB. Ce qui estoit proposé.*

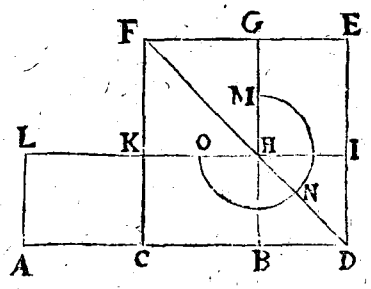
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 diuisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainsi la plus grande partie 8 excede la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est euident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, auec 4 qui est le quarré de 2, est egal à 36, qui est le quarré de 6, moitié du nombre proposé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, &

qu'on luy adiouſte directement quelque autre ligne droicte: le rectangle de la toute & de l'adiouſtee comme d'vne, & de l'adiouſtee, auec le quarré de la moitié, eſt egal au quarré qui eſt faict de la moitié & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement au poinct C; & à icelle AB ſoit adiouſtee directement la ligne B D. Ie dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'adiouſtee B D, auec le quarré de la moitié C B, eſt egal au quarré de la ligne C D, laquelle eſt compoſee de la moitié CB, & de l'adiouſtee BD.



Qu'ainſi ne ſoit: ſur la ligne C D ſoit deſcrit le quarré CE, & tiré ſa diagonalle DF; & apres auoir du poinct B, mené B G parallele à D E, laquelle couppe la diagonalle au poinct H; par iceluy poinct H ſoit menee interminement I K L parallelle à A D par la 31. prop. 1. Item A L parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle A I eſt compris de la toute & adiouſtee comme d'vne A D, & de l'adiouſtee D I (car icelle D I eſt egale à l'adiouſtee BD eſtant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce liure.) Item KG, qui eſt quarré par le meſme Cor. eſt faict ſur H K egale à la moitié C B par la 34. prop. Ie dis donc que le rectangle AI, & le quarré K G ſont enſemble egaux au quarré CE. Car les deux ſupplemens CH & H E eſtans egaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles A K & C H auſſi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles: & par la 1. com. ſent. AK ſera egal à HE, & en adiouſtant à chacun d'iceux le rectangle commun C I, le Gnomon M N O ſera egal au rectangle A I. Mais iceluy Gnomon auec le quarré G K, ſont egaux au quarré C E: donc le rectangle AI auec le quarré KG ſera egal au meſme quarré CE. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt coupee en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD eſt egal aux deux quarrez de CB, BD auec deux fois le rectangle d'icelles C B, BD; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des toutes AD, BD eſt egal aux trois rectangles de DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui eſt le quarré de DB) le quarré de CD ſera egal à l'autre quarré de CB auec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

A C B D

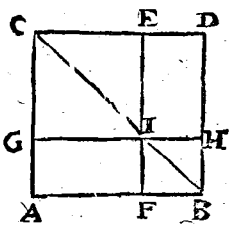
Pour appliquer ce Theor. aux nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 ſoit adiouſté 3. Il eſt euident que le nombre 45 produict de tout le nombre compoſé 15 multiplié par l'adiouſté 3, auec 36 quarré de

la moitié 6, font 81, tout ainsi que le quarré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'adiousté 3.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra; le quarré de la toute, & le quarré de l'vne des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.



Qu'il ne soit ainsi: sur AB soit descrit le quarré AD auec sa diagonalle BC: & apres auoir mené du poinct F, la ligne FE parallele à AC, laquelle couppe la diagonalle BC au poinct I; d'iceluy poinct soit menee GH parallele à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE seront quarrez par le Cor. de la 4. prop. de ce liu. & puis que par la 34. pr. 1. GI est egale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Derechef pource que AC est egale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm. AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont egales à AB, AF, à cause des quarrez AD, GE.) Veu donc que les rectangles AE & ID, auec le quarré FH sont egaux au quarré AD: si on leur adiouste le commun quarré EG, les quarrez AD, EG seront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) auec le quarré FH. Parquoy si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; si on adiouste le quarré commun de AF, les quarrez de AB, AF*

A F B

seront egaux aux trois quarrez de AF, AF, FB, auec deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF est egal au rectangle de AF, FB, auec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, est egal à deux fois le rectangle de AF, FB, auec deux fois le quarré de AF: donc les quarrez de AB, AF, sont egaux à l'autre quarré de FB, auec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui estoit à demonstrer.

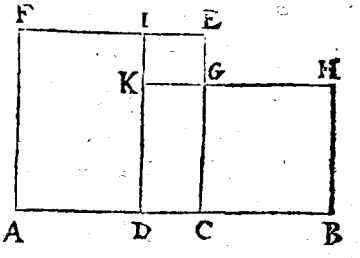
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit diuisé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il est euident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, sont ensemble egaux à 193, qui est fait de 25 nombre quarré de

l'autre partie 5, & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarrez de 12 & 5, ſont enſemble egaux à 169, fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie 5.

Commandin demonſtre en ce lieu le Theor. ſuiuant.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties inegales, les quarrez d'icelles parties ſont egaux au rectangle contenu deux fois ſous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droicte A B couppee en deux parties inegales AC, CB, deſquelles AC eſt la plus grande, & d'icelle AC ſoit priſe AD egale à B C, afin que DC ſoit l'excez de la partie AC par deſſus B C. Ie dis que les quarrez des parties AC, C B ſont egaux au rectangle contenu deux fois ſoubs AC, CB, & au quarré de D C. Car ſoient conſtruicts les quarrez AE, CH, & mené D I parallele à CE: puis prolongée H G iuſques à ce qu'elle rencontre D I en K. Or d'autant que les lignes B C, A D ſont egales, leur adiouſtant la commune DC, la toute AC, c'eſt à dire CE, ſera egale à la toute D B. Mais CG eſt auſſi egale à C B: donc auſſi le reſte GE ſera egal au reſte DC: & partant puis qu'auſſi IE eſt egale à DC par la 34. pr. 1. GE, IE ſeront egales: & partant IG ſera le quarré de l'excez DC. Et



d'autant que les rectangles AI, DH ſont contenus ſous les parties AC, CB; (car AC eſt egale à l'vne & à l'autre ligne AF, DB: & CB à l'vne & à l'autre AD, BH.) Il eſt manifeſte que les quarrez AE, CH, des parties A C, C B ſont egaux aux rectangles AI, DH, qui ſont contenus ſous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez D C. Ce qui eſtoit propoſé.

Le meſme eſt auſſi manifeſte par nombres: car le nombre 12 eſtant diuiſé en deux parties inegales 7 & 5, dont la plus grande excede la moindre de 2: les quarrez d'icelles parties ſeront 49 & 25, qui ſont enſemble 74, auquel nombre ſont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5, auec 4 quarré de l'excez 2.

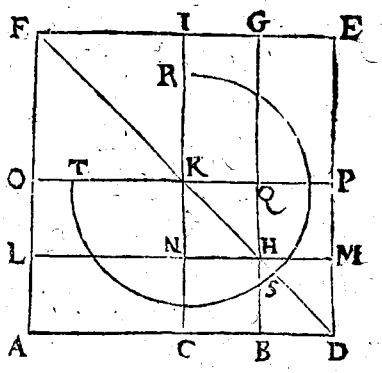
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra: quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'vne des parties, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement priſe comme d'vne ſeule ligne.

Soit la ligne donnee AB couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'vne ou l'autre partie, ſçauoir B C, auec le quarré de l'autre partie A C, ſont enſemble egaux au quarré de AD compoſee de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne ſoit ainſi: Soit prolongee A B vers D, & pris B D egale à B C,

puis sur la totale AD soit fait le quarré AE auec sa diagonale FD, & des deux poincts B & C, soient menees BG & CI paralleles à DE. Item des poincts H & K, ausquels elles couppent la diagonalle FD, soient menees LM & OP paralleles à AD, par la 31. prop. 1. lesquelles couppent les premieres paralleles en N & Q.



Premierement, par ce qui resulte de la 4. prop. de ce liure les rectangles OI, NQ, BM au long de la diagonalle seront quarrez. Item d'autant que CB est egale à BD: CH, & BM, seront egaux & quarrez: (estant l'vn d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrez; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrez, & egaux: & par la 43. p. 1. les deux supplemens LK & KG seront aussi egaux entr'eux, & par la 36. pr. 1. LK est egal à AN; & KG à QE: & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il est euident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui est vn des quatre rectangles auec vn des quatre petits quarrez egaux: donc iceux quatre rectangles auec iceux quatre quarrez faisant le Gnomon RST seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD; lequel Gnomon auec le quarré de OK, (egale à AC par la 34. p. 1.) sçauoir est OI, conuiennent auec le quarré AE: & partant par la 8. com. sent. ils luy seront egaux: Si donc vne ligne droicte est couppee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Autrement, *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AB, BD, & à deux fois le rectangle d'icelles AB, BD, c'est à dire, aux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle de AB, BC: & que par la precedente les quarrez de AB, BC sont egaux au quarré de AC auec deux fois le rectangle de AB, BC: le quarré de AD sera egal à quatre fois le rectangle de AB, BC, auec le quarré de AC. Ce qu'il falloit demonstrer.*

A C B D

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, soit le nombre 12, diuisé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, faict 84, qui pris quatre fois auec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui est le nombre quarré de 19, composé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui est faict du nombre proposé 12 multiplié quatre fois par la partie 5, estant adiousté auec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainsi que le quarré de 17, nombre composé du donné 12, & de la partie 5.

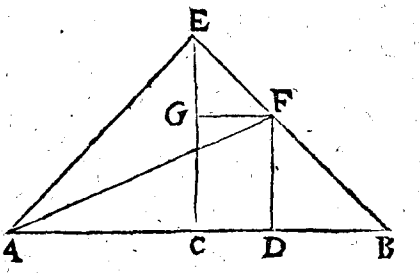
THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales: les quarrés d'icelles parties inegales seront

doubles des quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppee en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement en D. Ie dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, ſont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne ſoit ainſi : au poinct C ſoit leuee la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres auoir mené AE & BE, ſoit leuee la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel poinct ſoit menee FG parallele à AB, couppant CE en G : & finalement ſoit menee AF.



Premierement, les triangles ACE, & ECB ſeront Iſoſcelles, & feront les angles ſur les baſes AE & EB egaux par la 5. prop. 1. eſtant l'angle ECB droict pour eſtre CE perpendiculaire. Item FDB eſtant droict, & DBF demy droict, auſſi par la 32. pr. 1. DFB ſera demy droict, & par la 6. pr. 1. les coſtez DB & DF, du triangle BDF, ſeront egaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera demonſtré que les coſtez GF, GE du triangle FGE, ſont egaux entr'eux. Item il eſt euident que l'angle AEB ſera droict, eſtant compoſé des deux demy droicts AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt double du quarré de AC ; eſtant egal à tous les deux de AC & CE. Par meſme diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou de CD ſon egal par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF eſtant egal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC & CD. Mais par la meſme 47. pr. 1. le quarré de AF eſt egal aux deux de AD & DF, ou DB ſon egale : donc les deux quarrez de AD & DB ſeront doubles des deux de AC & CD. Si donc vne ligne droicte eſt couppee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD eſt egal aux deux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : ſi on adiouſte le commun quarré de DB, les deux quarrez de AD, DB, ſeront egaux aux trois quarrez de AC, CD & DF, auec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarrez de BC ou AC, & de CD, ſont egaux au quarré de DB auec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD : & partant doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

A C D B

Commandin demonſtre encore cette propoſition autrement, ainſi qu'il enſuit. D'autant que AC eſt egale à CB, & icelle CB excede CD de DB, auſſi AC excedera la

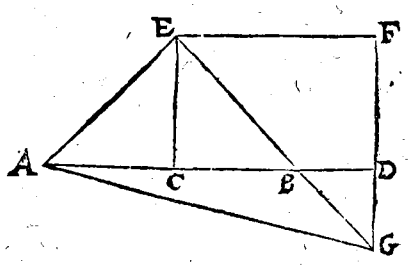
meſme CD de DB. Parquoy comme il a eſté demonſtré à la 7. propoſit. 2. les quarrez de AC, CD, ſont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, auec le quarré de DB, & partant les trois quarrez de AC, CD, DB, auec deux fois le rectangle de AC, CD, ſont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. propoſit. 2. le quarré de AD eſt egal aux quarrez de AC, CD, auec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont doubles des quarrez de AC, CD.

Pour auſſi rendre manifeſte ce Theoreme par nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux parties egales, 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4: de ſorte que la partie du milieu ſera 2. Or il eſt euident que 64 & 16, qui ſont les quarrez des parties inegales 8 & 4, ſont enſemble doubles de 36 & 4, qui ſont les quarrez de la moitié 6, & de la partie du millieu 2, comme vouloit la propoſition.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & on luy adiouſte directement quelque autre ligne droicte; le quarré de la toute auec l'adjouſtee comme d'vne, & le quarré de l'adiouſtee, ſont doubles des quarrez de la moitié, & de celle qui eſt faite de la moitié, & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement au poinct C, à laquelle ſoit adiouſtee directement BD. Ie dis que les quarrez de AD & BD, ſont doubles des quarrez de AC & CD. Qu'ainſi ne ſoit: au poinct C ſoit leuee la perpendiculaire CE par la 11. prop. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, ſoient menees par la 31. prop. 1. EF parallele à CD, & DF à CE ſe rencontrant en F, & ſoient continuees EB & FD, iuſques à ce qu'elles ſe rencontrent au poinct G: (elles s'y rencontreront puis que les deux angles BEF, EFD, ſont moindres que les deux droicts CEF, EFD.) Finalement ſoit tiree la ligne AG.



Premierement, puis que AC & CE ſont egaux; auſſi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA ſont egaux, & demy droicts par la 32. prop. 1. eſtant l'angle ACE droict. Par meſme diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droicts; & l'angle AEB droict, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droict: & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. prop. 1. l'angle BEF ſera egal à CBE, c'eſt à dire demy droict, & l'angle F eſtant droict par la 34. pr. 1. (car il eſt oppoſé à vn droict C) BGD ſera auſſi demy droict par la 32. p. 1. & par

& par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDC seront Isoscelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict C, est egal aux deux quarrez des deux autres costez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par méme discours EG se trouuera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy est egale par la 34. prop. 1. ainsi les deux quarrez de AE & EG, ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. prop. 1. sera double des deux de AC, CD. Mais par la mesme 47. p. 1. il est egal aux deux quarrez de AD & D G, ou B D son egal, & par consequent les deux quarrez de AD & BD, seront doubles des deux de AC & DC. Si donc vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CD, ou de BC, CD : Si on adiouste le commun quarré de BD, les deux quarrez de AD, BD seront egaux aux trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de BC, CD. Mais par la 7. p. 2. le quarré de BD auec deux fois le rectangle de BC, CD est egal aux quarrez de CD, BC, c'est à dire de AC, CD. Donc les quarrez de AD, BD, sont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD : & partant ils sont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.*



Commandin demonstre encore cette prop. ainsi. D'autant que AC est egale à CB, & CD excede icelle CB de BD, aussi la mesme CD excedera AC du mesme excez BD: Parquoy comme il a esté demonstré à la 7. prop. de ce liure, les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD auec le quarré de BD : & partant les trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. p. 2. le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : Donc les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC, CD.

Ce Theoreme est aussi euident en nombres : car le nombre 8 estant diuisé en deux parties egales 4 & 4, si on luy adiouste quelconque nombre 5, le nombre composé sera 13, duquel le quarré 169 auec 25 quarré du nombre adiousté 5, faict 194, qui est double du nombre 97, somme de ces deux nombres 16 & 81, qui sont les quarrez de la moitié 4, & de 9 composé de ladite moitié & du nombre adiousté 5.

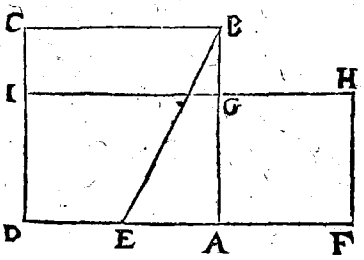
PROBL. 1. PROP. XI.

Couppper vne ligne droicte donnee, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droicte donnee AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la proposition.

Apres auoir conſtruict ſur icelle AB le quarré AC, ſoit diuiſée AD en deux egalement au poinct E, & apres auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF ſoit egale à EB, ſur AF ſoit faict le quarré AH; & ſoit continuée HG iuſques en I. Ie dis que la ligne AB eſt couppee au poinct G, en ſorte que le rectangle CG, compris de BC egale à BA, & de BG partie de BA, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçauoir eſt à GF.

Car la ligne AD eſtant couppee en deux egalement en E, & on luy adiouſte directement AF, le quarré de la moitié & de l'adiouſtée comme d'vne, ſçauoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainſi les deux quarrez de BA & AE, ſeront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: oſtant donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, ſçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, ſçauoir FI, ſeront egaux; deſquels AC & FI, ſi on oſte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous auons coupé la ligne droicte AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB eſt egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Nous auons enſeigné en nos Memoires Mathematiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à couppper vne ligne droicte, non ſeulement comme enſeigne icy Euclide, mais auſſi en ſorte que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties ſoit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie: bref qu'iceluy rectangle ſoit au quarré, ſelon quelconque raiſon donnee.

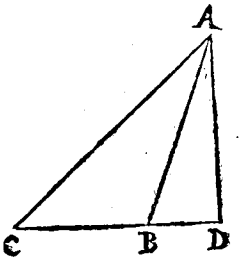
Quant aux nombres, ils ne ſe peuuent accommoder à ce probleme, ſinon qu'on y employe les nombres irrationaux: Car aucun nombre abſolu ne peut eſtre diuiſé en deux autres tels que le nombre produict du tout, multiplié par l'vne des parties ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il ſera demonſtré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens ſeront demonſtrez en nombres: Neantmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & ſuperfices mentionnez en la demonſtration cy-deſſus. Que la ligne AB ſoit 8: donc ſa moitié AE ſera 4, & leurs quarrez ſeront 64 & 16, qui ſont enſemble 80, pour le quarré de BE, ou EF, qui par conſequent ſera irrationelle, c'eſt à ſçauoir √80: & d'icelle EF, oſtons EA 4, & reſteront pour AF, ou AG, √80—4, qui oſtez de la toute AB 8, reſteront pour l'autre partie BG 8—√80—4, c'eſt à dire 12—√80, qui multipliez par le nombre total 8, feront 96—√5120 pour le rectangle GC, & autant eſt le quarré AH; car la partie AG, qui eſt √80—4, multipliee par ſoy-meſme fait auſſi 96—√5120, comme vouloit ce probleme.

THEOR. 11. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient

l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des deux autres coſtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'vn des coſtez contenant l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

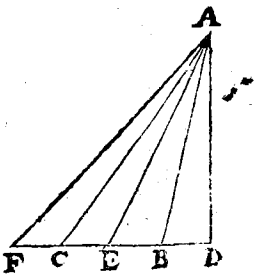
Soit le triangle ambligone ABC, duquel ſoit prolongé le coſté CB iuſques en D, & du poinct A ſoit menee la perpendiculaire AD par la 12 prop. 1. Ie dis que le quarré du coſté AC, qui ſouſtient l'angle obtus ABC, eſt plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, ſçauoir CB, qui eſt l'vn des coſtez faiſant l'angle obtus, celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD priſe dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'eſt à dire que le quarré du coſté AC eſt egal aux deux quarrez des coſtez AB, BC, auec deux fois le rectangle de CB, BD.



Qu'il ne ſoit ainſi: Puis que la ligne CD eſt couppee en B, le quarré d'icelle CD ſera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD, par la 4. prop. de ce liure: Adiouſtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, ſeront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de AC eſt egal aux quarrez de CD, DA: donc auſſi le quarré de AC ſera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB eſt egal aux quarrez de BD, DA; le quarré de AC ſera egal aux quarrez de CB, AB, & deux fois le rectangle de CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

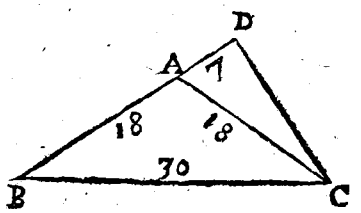
Or que la perpendiculaire tiree de A, doiue tomber ſur le coſté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demonſtrerons ainſi: Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le coſté CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendic. tiree de A tombe hors le triangle ſur le coſté CB prolongé, comme eſt la ligne droicte AD. Car ſi elle tomboit dans le triangle, comme eſt la ligne AE, les deux angles ABE, AEB ſeroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais ſi elle tomboit hors le triangle ſur le coſté BC prolongé de la part de C, comme eſt AF; derechef, au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB ſeroient plus grands que deux droicts: ce qui eſt abſurde.



Or afin de pouuoir par le moyen des nombres faire paroiſtre la verité de ce theoreme, nous enſeignerons icy certaines regles, par leſquelles on pourra conſtruire diuers triangles ambligones, ayans les coſtez commenſurables en nombre entier, & auſsi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

REGLE I.

Pour conſtruire vn triangle ambligone Iſoſcelle, ayant les coſtez, & la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commenſurables en nombre entier, ſoit faict le ſegment exterieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties ſe puiſſe diuiſer exactement par 7, comme de 7, ou de 14, ou de 21, ou de 28, ou 35, &c. puis apres ſoit poſé pour chaſque coſté egal, le double d'iceluy ſegment, & outre cc $\frac{1}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand coſté, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit ſegment exterieur: comme au triangle ABC, ou le ſegment AD eſt poſé de 7, & l'vn & l'autre des coſtez AB, AC de 18, qui eſt double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais le plus grand coſté BC de 30, qui eſt le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC compoſé comme deſſus ſoit ambligone, il eſt euident: Car le quarré du coſté BC eſt 900, & ceux des coſtez AB, AC ſont ſeulement enſemble 648, chacun d'iceux eſtant 324: & partant parce que nous auons demonſtré au Scholie de la 48. p. 1. l'angle BAC ſera obtus. Donc le triangle ABC duquel les coſtez & la ligne exterieure AD ſont commenſurables en nombre entier, eſt ambligone. Parquoy le quarré dudit coſté BC, qui eſt 900 ſera egal à la ſomme des quarrez des deux autres coſtez AB, AC, & de deux fois BA en DA, c'eſt à dire à la ſomme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui font auſsi 900, comme veut cette 12. prop.



REGLE II.

Pour conſtruire vn triangle Ambligone ſcalene duquel non ſeulement les coſtez & la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire tombant ſur le moindre coſté prolongé & l'angle obtus, mais auſsi ladite perpendiculaire, ſoient commenſurables en nombre entier; ſoit poſé le ſegment exterieur d'autant de parties qu'on voudra qui ſe puiſſent exactement diuiſer par 5; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties adiouſtez $\frac{1}{5}$ pour auoir le petit coſté, $\frac{3}{5}$ pour auoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour auoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit ſegment ſera le plus grand coſté. Ou bien poſez le ſegment exterieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui ſe puiſſe partir exactement par 9: puis pour le petit coſté prenez $\frac{7}{9}$ dudit ſegment; pour auoir le moyen, adiouſtez à iceluy ſegment $\frac{2}{3}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{3}$, & pour le grand coſté adiouſtez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy ſegment: comme ſi nous poſons que le ſegment exterieur ſoit de 9 parties egales, le plus petit coſté ſera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand coſté 20. Or le quarré d'iceluy coſté eſt 400, auquel eſt egale la ſomme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui ſont les quarrez des deux coſtez 15 & 7, & deux fois le produict de 9 multiplié par 7, c'eſt à dire le ſegment exterieur par le moindre coſté: Parquoy appert que le triangle ainſi conſtruict eſt ambligone, & cette 12. prop. eſtre veritable.

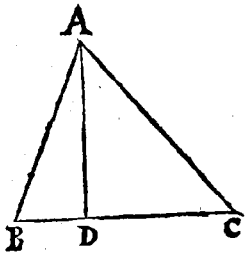
REGLE III.

Pour construire vn triangle ambligone Scalene, duquel les costez & le segment exterieur du moyen costé prolongé iusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier: Soit pris ledit segment exterieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit adiousté $\frac{1}{5}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais multipliant ledit segment par 8, nous aurons le plus grand costé: comme si nous posons le segment exterieur de 5 parties, adiousians $\frac{1}{5}$ d'iceluy segment à son triple 15, nous aurons 16 pour le moindre costé, & doublant iceluy costé viendront 32 pour le moyen costé: & finalement multipliant ledit segment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand costé du triangle: lequel sera ambligone, veu que le quarré d'iceluy costé 40, est 1600, & la somme des quarrez des deux autres costez 16 & 32 n'est que 1280; mais ces deux quarrez estant adioustez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen costé 32 par le segment exterieur 5, font aussi 1600, comme veut Euclide en ceste 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui sousti ent l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Ie dis que le quarré du costé AB, qui sousti ent l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AC & CB, de deux fois le rectangle de BC & CD: sçauoir BC, l'vn des costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarrez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce liure, ausquels si on adiouste le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB: & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la

47: prop. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC: ce qui estoit proposé à prouuer. On demonstrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu, B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'Euclide propose ce Theoreme des triangles oxigones seulement: toutesfois le mesme est aussi veritable ez triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droict ou obtus: Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus: & partant la perpendiculaire tombera tousiours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demostration cy-dessus: Ce qui est aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'vn angle aigu seroit plus grand que le droict. Ce qui est absurde.

Et comme au precedent Scholie nous auons enseigné à construire diuers triangles ambligones ayans les costés & le segment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus cõmensurables en nomb. entiers, afin de pouuoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demonstré en la 12. prop. aussi enseignerons nous icy quelques reigles pour construire diuers triangles oxigones ayant les costez & les segmens de la base commensurables en nombres entiers, afin de faire aussi paroistre en nombre la verité de cette 13. prop.

REGLE I.

D'autant qu'au triangle equilateral, & à l'Isocelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux costez egaux fait les segmens de la base egaux, ainsi qu'il a esté demonstré sur la 26. prop. 1. il sera fort aisé de construire tels triangles qui ayent les costez & les segmens commensurables en nombre entier, c'est pourquoy il n'est pas besoin de nous y arrester: Mais quand est requis vn triangle Isoscelle, auquel la base soit plus grande que chaque costé, & que la perpendiculaire tombe sur l'vn d'iceux costez egaux; elle le couppera en deux segmens inegaux, comme nous auons demonstré à la 47. prop. 1. le moindre desquels segmens il faut poser d'autant de parties qu'on voudra, & icelles estans multipliees par 8, produiront le plus grand segment, mais les multipliant par 12, sera produit la base, & les deux segmens estans adioustez, l'on aura l'vne & l'autre des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moindre segment par 9. Comme par exemple, ayant posé le moindre segment de 4 parties, nous les multiplierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand segment: mais les multipliant par 12, viennent 48 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque costé. Or que ce triangle Isoscelle soit oxigone, il est manifeste parce que nous auons demonstré au Scholie de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la base 48 n'est que 2304, & la somme des quarrez des deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296, l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par consequent les autres seront

aussi aigus, puis qu'ils sont plus petits par la 18. prop. 1. Et si à iceluy quarré 2304, nous adiousstons 288, qui sont deux fois 144, nombre produit de 36, costé sur lequel tombe la perpendiculaire, par 4, segment compris entre la perpendiculaire & l'angle opposé à ladite base, viendront aussi 2592. Pareillement 1296, quarré de l'vne des iambes est moindre que 3600, somme des quarrez de la base & de l'autre iambe, de deux fois 1152, nombre produit du costé 36 multiplié par le grand segment 32: car ces trois nombres 1296, 1152, 1152 font ensemble le mesme nombre 3600. Parquoy appert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE II.

Que s'il est requis que le triangle soit Isoscelle, ayant la base moindre que chacune iambe, & que sur l'vne d'icelle tombe la perpendiculaire: il faudra poser le moindre segment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand segment, mais multipliant ledit moindre segment par 3, on aura la base, & finalement la somme des deux segmens fera chacune des iambes: qu'on aura aussi multipliant la moitié du moindre segment par 9. Parquoy ayant posé le moindre segment de 4, ie multiplie sa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre segment, tellement que toute la iambe sera 18, & multipliant ledit segment 4 par 3, viennent 12 pour la base. Or que ce triangle soit oxigone, il est euident, attendu que le quarré du costé 18 n'est que 324, & la somme des quarrez des deux autres costez est 468: Et de plus, iceluy quarré 324 est moindre que ladite somme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 4, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à l'autre iambe: partant il appert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE III.

Que s'il est requis que le triangle soit scalene, & la perpendiculaire tombe sur le moindre costé, il faudra poser le moindre segment de 70 parties, ou de 140, ou de quelque autre nombre qui se puisse diuiser exactement par 70; puis adiousster à iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand segment, & la somme de ces deux segmens sera le moindre costé; mais ayant doublé le moindre segment, & à iceluy double adiousté $\frac{42}{70}$ c'est à dire $\frac{3}{5}$ dudit segment, sera procreé le moyen costé; & finalement si à ce double du moindre segment on adiouste $\frac{55}{70}$, c'est à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand costé. Comme si nous posons le moindre segment de 70, & à iceluy adiousstons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand segment, & par consequent le moindre costé sera 169; mais adiousstant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre segment, viendront 182 pour le moyen costé; & adiousstant au mesme double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand costé. Or que ce triangle soit oxigone, il est euident, attendu que le quarré du plus grãd costé 195 n'est que 38025, & la somme des quarrez des deux autres costez est 61685: parquoy le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres sont aussi aigus. Que si à iceluy quarré 38025, on adiouste deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre segment 70, viendra le méme nõbre 61685. Parquoy apert encore estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. p.

REGLE IV.

Que si au triangle scalene il est requis que la perpendiculaire tombe sur le moyen costé, soit posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de quelqu'autre nombre qu'on puisse exactement diuiser par 5, puis à iceluy segment soient adioustez $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand segment; & la somme d'iceux sera le moyen costé: mais adioustant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre costé, & le plus grand sera le triple dudit segment. Parquoy si nous posons le moindre segment de 10 parties, adioustant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre segment, & consequement tout le moyen costé sera 28. Mais adioustant 6, qui sont les $\frac{3}{5}$ du moindre segment 10, au double d'iceluy segment, viennent 26 pour le moindre costé; & le plus grand sera 30, triple dudit moindre segment. Or qu'iceluy triangle soit oxigone, il est manifeste: car le quarré du plus grad costé 30, n'est que 900, & la somme des quarrez des deux autres costez 26 & 28 est 1460: & partant le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres angles sont aussi aigus. Maintenant si nous multiplions le costé sur lequel tombe la perpendiculaire, sçauoir 28 par le moindre segment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui adiousté au susdit quarré de 30 sçauoir 900, font le mesme nombre 1460, somme des deux quarrez des deux autres costez 26 & 28, qui sont 676 & 784. Pareillement le quarré du moindre costé 26, n'est que 676, & la somme des quarrez des deux autres costez est 1684: tellement qu'il est moindre que cette dite somme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 18, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Parquoy appert derechef estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. proposition.

REGLE V.

Et finalement, s'il estoit requis que la perpendiculaire tombe sur le plus grand costé, soit encore posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy segment soit adiousté $\frac{1}{5}$, & viendra le plus grand segment, tellement que la somme d'iceux segmens sera le plus grand costé: mais adioustant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre costé, & le moyen sera le quadruple dudit segment. Par ainsi le moindre segment estant posé de 5 parties, le plus grand sera de 16, & le plus grand costé 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand costé 21, n'est que 441, & la somme des deux quarrez des deux autres costez 20 & 13 est 569: parquoy l'angle opposé à iceluy costé, qui est le plus grand par la 18. prop. 1. est aigu, & consequemment le triangle susdit est oxigone. Dauantage le quarré du moindre costé 13, sçauoir 169, est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez 20 & 21, sçauoir est 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 16, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Pareillement le quarré du moyen costé 20, sçauoir 400, est moindre que 610, somme des quarrez des deux autres costez 13 & 21, de deux fois 105, nombre produict de 21 multiplié par le moindre segment 5. Parquoy appert encore par ce 5 triangle estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

Mais il est aussi euident tant par la demonstration d'Euclide, que par l'applicatoin

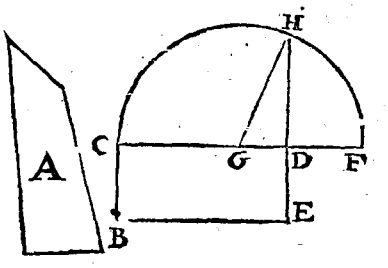
cation des nombres cy-deuant faicte, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, est aussi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du costé qui soustient vn angle aigu est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu du costé sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne comprise entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme B D egal à la figure donnee A, ayant vn angle droict par la 45. prop. 1. puis soit prolongé vn costé, comme C D, iusques en F, & fait D F egale à l'autre costé D E: & apres auoir couppé C F en deux egalement au poinct G, & d'iceluy poinct G & interualle G C ou G F, descrit le demy cercle C H F, soit continuee E D iusques à ce qu'elle rencontre la circonference du demy cercle en H. Ie dis que le quarré de D H est egal à la figure rectiligne A.



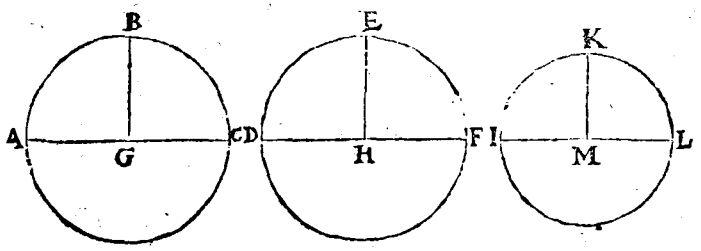
Car puis que C F est couppee en deux egalement au poinct G, & en deux inegalement au poinct D; le rectangle de C D & D F, sçauoir B D, auec le quarré de la partie du milieu G D, est egal au quarré de la moitié G F par la 5. prop. de ce liure, ou de son egale G H, lequel est egal aux deux quarrez de G D & D H par la 47. prop. 1. Que si on oste le quarré commun de G D, le demeurant quarré de D H se trouuera egal au demeurant rectangle B D: & par consequent à la figure rectiligne donnee A. Nous auons donc trouué le costé d'vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du second Element.

ELEMENT
TROISIESME.
DEFINITIONS.

CERCLES egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux, ou deſquels les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont egales.

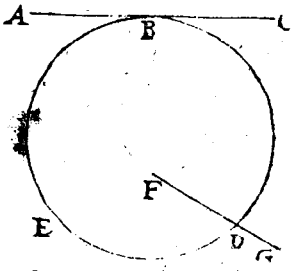
D'autant qu'Euclide demonſtre en ce 3. liure diuerſes proprietez & affections du cercle, il explique auparauant quelques termes dont l'vſage ſera fort frequent en iceluy: Il dit donc premierement que ces cercles-là ſont egaux, deſquels les diametres ou ſemidiametres ſont egaux. Car puis que le cercle eſt deſcrit par le mouuement & reuolution du demy diametre à l'entour d'vne de ſes extremitez fixe & immobile, comme nous auons dit à la 15. def. du 1. liure; il eſt euident que ces cercles-là ſont egaux deſquels les demy diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences ſont egales entr'elles: ou bien deſquels les diametres entiers ſont egaux entr'eux. Comme ſi les diametres AC, DF, ou les lignes droictes GB, HE, menees des centres G & H, ſont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF ſeront egaux entr'eux. Et au contraire, ſi les cercles ſont egaux, leurs diametres ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſeront auſſi egales.



De cecy il appert, que les cercles ſont inegaux quand les diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont inegales; & que celuy eſt le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre eſt le plus grand. Comme ſi les diametres DF, IL, ou les lig. droictes HD, MK, menees des centres aux circonfer. ſont inegales, les cercles DEF, IKL ſeront inegaux; & ſi le diametre DF eſt le plus grand, auſſi

le cercle DEF ſera le plus grand. Et au contraire; des cercles inegaux, les diametres ou ſemidiametres ſeront inegaux, c'eſt à ſçauoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre, plus petit.

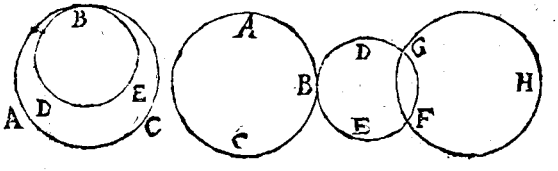
2. Vne ligne droicte eſt dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuee ne le coupe point.



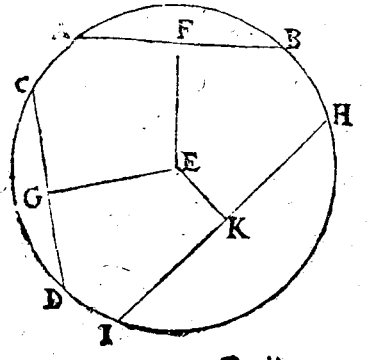
Comme la ligne droicte A B ſera dicte toucher le cercle B D E en B, ſi elle l'y touche, en ſorte qu'eſtant prolongee vers C, elle ne le couppe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droicte G D atteint le meſme cercle au poinct D, en telle ſorte qu'eſtant prolongee iuſques à F, elle couppe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne ſera pas dicte toucher le cercle, mais le coupper.

3. Les cercles ſont dicts ſe toucher l'vn l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe coupent point.

Ainſi les deux cercles A B C, D B E ſeront dicts ſe toucher l'vn l'autre en B, s'ils s'y touchent en ſorte qu'ils ne s'entrecouppent point. Or cet attouchement des cercles eſt de deux ſortes; Car les cercles s'entretouchent ou en dedans, ou en dehors: Ils ſe touchent en dedans, quand l'vn eſt poſé dedans l'autre; & en dehors, quand l'vn eſt conſtitué hors de l'autre, comme il appert icy. Mais ſi deux cercles s'atteignent de telle ſorte que l'vn couppe l'autre, comme font icy les deux cercles D G E, F G H, ils ſeront dicts ſe coupper, & non pas ſe toucher.



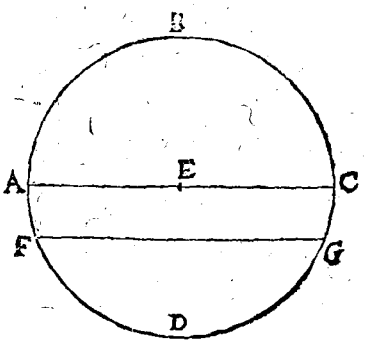
4. Au cercle, les lignes droictes ſont dictes eſtre egalement diſtantes du centre, lors que les perpendiculaires tirees du centre ſur icelles, ſont egales. Mais celle-là eſt dicte eſtre plus eſloignee du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.



Comme au cercle A B D C, les lignes droictes A B, C D, ſeront dites eſtre egalement diſtantes & eſloignees du centre E, ſi les perpendiculaires E F, E G, ſont egales: Mais la ligne droicte A B ſera dicte eſtre plus eſloignee du centre E que la ligne H I, ſi la perpendiculaire E F eſt plus grande que la perpendiculaire E K.

5. Segment, ou portion de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Si dans vn cercle, comme ABCD, on mene vne ligne droicte qui couppe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droicte FG; tant la figure FBG contenue ſoubs ladite ligne droicte FG, & la partie de circonference FBG, que la figure FDG compriſe ſoubs la meſme ligne droicte FG, & la partie de circonference FDG, ſera dicte ſegment ou portion de cercle. Mais eſt icy à noter qu'il y a de trois ſortes de ſegmens de cercle. Car ſi la ligne droicte paſſe par le centre du cercle, comme AEC, elle diuiſera le cercle en deux ſegmens egaux ABC, ADC, chacun deſquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a eſté dit au premier liu. Mais quand la ligne ne paſſe point par le centre, comme FG, elle diuiſe le cercle en deux parties inegales FBG, FDG, l'vne deſquelles, ſçauoir FBG, dans laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou ſegment maieur: mais l'autre portion FDG, eſt plus petite que le demy cercle, & s'appelle ſegment mineur. Dauantage, la ligne droicte FG eſt appellee chorde par pluſieurs Geometres, & la partie de circonference FBG, ou FDG, arc.

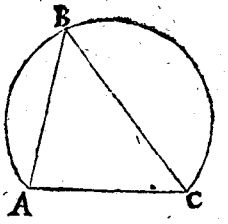


6. L'angle du ſegment, eſt celuy compris d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois ſortes d'angles que l'on conſidere aux cercles, & commence par l'angle du ſegment, diſant que l'angle mixte BFG, ou BGF, qui en la figure prec. eſt contenu ſous la ligne droicte FG, & la circonference FBG, s'appelle angle du ſegment. Que ſi le ſegment eſt vn demi cercle, l'angle d'iceluy ſera appellé angle du demi cercle, & tel eſt l'angle EAB, ou ECB. Mais ſi le ſegment eſt plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG, ou BGF, ſera dict angle du ſegment maieur: Et ſi le ſegment eſt plus petit que le demy cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG, ou DGF, ſera appellé angle du ſegment mineur.

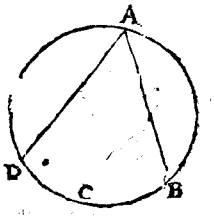
7. Vn angle ſe dit eſtre au ſegment, ou en la portion, lors qu'à vn poinct pris en la circonference du ſegment, ſont menees deux lignes droictes des extremitez de la ligne qui ſert de baſe au ſegment; & cet angle-là eſt celuy compris d'icelles deux lignes.

Soit vn ſegment de cercle A B C, duquel la baſe eſt la ligne droicte A C, des extremitez de laquelle ſoient menees au poinct B, pris en la circonference les deux lignes droictes A B, C B, qui conſtituent l'angle rectiligne A B C; iceluy angle eſt dit eſtre au ſegment A B C.

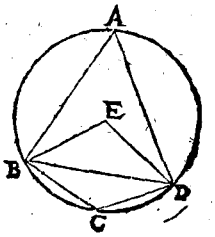


8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embraſſent quelque circonference, l'angle eſt dit eſtre, ou s'appuyer ſur icelle.

En la circonference du cercle A B C D ſoit pris quelconque poinct A, & d'iceluy à deux autres poincts B & D d'icelle circonference, ſoient menees deux lignes droictes A B, A D, qui conſtituent l'angle rectiligne D A B, & embraſſent la circonference B C D: Iceluy angle B A D ſera dit eſtre ou s'appuyer ſur icelle circonference B C D.

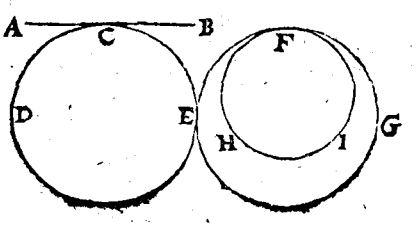


Eſt icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune difference entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour vn meſme: & toutesfois ſi on les conſidere bien, on y trouuera vne grande diſcrepance: Car celuy-là ſe refere au ſegment auquel il eſt conſtitué, & cettuy-cy ſe rapporte à la circonference qui luy ſert de baſe: Comme par exemple, ſi au cercle A B C D on prend quelque ſegment de cercle B C D, l'angle qui eſt en ce ſegment ne ſera pas le meſme que celuy qui inſiſte, ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy ſegment: car l'angle qui eſt en iceluy ſera B C D, & l'angle qui inſiſte ou s'appuye ſur la circonference d'iceluy, ſera l'angle B A D.



Vne autre choſe eſt encore à remarquer icy, c'eſt que les angles qui s'appuyent ſur la circonference, peuuent eſtre non ſeulement conſtituez en la circonference, comme il a eſté dit cy-deſſus, mais peuuent auſſi eſtre conſtituez au centre du cercle; comme par exemple, l'angle B E D conſtitué au centre E par les deux lignes droictes B E, D E, ſera auſſi dit s'appuyer ſur la circonference B C D, tellement qu'il y a icy deux angles appuyez ſur ladite circonference B C D, ſçauoir B A D conſtitué en la circonference, & B E D conſtitué au centre.

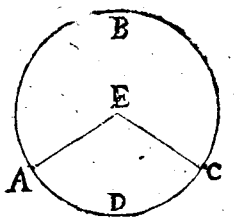
Or outre les trois ſortes d'angles cy-deſſus definis & expliquez, les Geometres en conſiderent encore vn autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'attouchement: ceſt angle eſt contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle, & de la circonference d'iceluy cercle, ou bien de deux circonferences ſe touchant l'vne l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, ſi la ligne droicte A B tou-



che le cercle C D E au poinct C, l'angle mixte ACD, ou BCE sera dit angle de contingence ou d'attouchement. Derechef, si le cercle E F G touche le cercle C D E au dehors en E, & le cercle H F I au dedans en F, tant l'angle curuiligne C E F, que E F H ou G F I, sera appellé angle de contingence, ou d'attouchement.

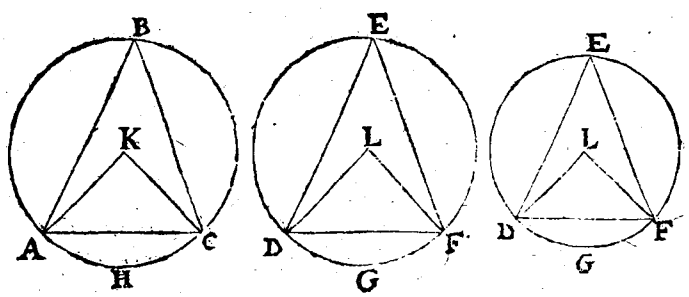
9 Secteur de cercle, est vne figure contenue soubs deux lignes droictes qui font vn angle au centre, & la circonference comprise entre icelles lignes.

Si au cercle A B C D, duquel le centre est E, les deux lignes droictes A E, C E, constituent au centre E, l'angle A E C; la figure A E C D, contenue des deux lignes droictes A E, E C, & de la circonference A D C comprise entre icelles lignes, sera appellée secteur de cercle. Item la figure A B C E, comprise des mesmes lignes droictes A E, E C, & de la circonference A B C, sera aussi dicte secteur de cercle.



10. Semblables portions de cercle, sont celles qui reçoiuent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

Comme si aux cercles A B C, D E F, les angles rectilignes B, E, sont egaux; les segmens A B C, D E F, qui reçoiuent iceux angles egaux, ou esquels sont les susdicts angles egaux, seront dicts segmens semblables: Et les circonferences A B C, D E F, seront pareillement dites semblables, c'est à dire que le segment A B C sera telle partie de tout le cercle A B C H, que le segment D E F est partie de tout le cercle D E F G: & la circonference A B C sera aussi telle partie de toute la circonference A B C H, que la circonference D E F est de toute la circonference D E F G. Par mesme raison, les arcs ou circonferences A H C, D G F, sur lesquelles s'appuient angles egaux, sont aussi dictes semblables: Comme si aux mesmes cercles A B C, D E F, les angles A B C, D E F ou A K C, D L F sont egaux; les arcs ou circonferences A H C, D G F, sur lesquelles s'appuient les susdits angles, seront dicts arcs semblables.



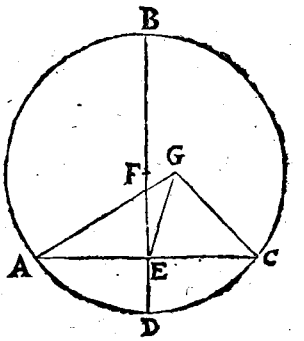
Des choses susdites, l'on peut colliger que les semblables portions d'vn mesme cercle, ou de cercles egaux, sont aussi egales entr'elles, attendu qu'elles sont parties egales d'vne mesme chose, ou de choses egales.

PROBL. 1. PROP. I.

Trouuer le centre d'vn cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tiree en iceluy la ligne droicte AC, qui coupe la conference, comme que ce soit, és poincts A & C: puis par les 10. & 11. prop. 1. soit icelle AC couppee en deux egalement, & à droicts angles par la ligne droicte B D, se terminant à la periphere és poincts B & D: & finalement icelle BD soit aussi couppee en deux egalement en F, par la susdite 10. prop. 1. Ie dis que F est le centre du cercle proposé.



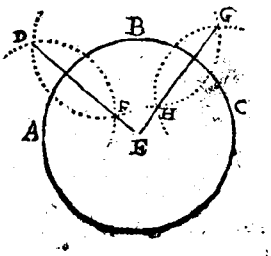
Car en icelle ligne droicte B D, vn autre poinct que F ne sera pas le centre, veu que tout autre poinct la diuise inegalement. Si donc le poinct F n'est pas le centre, le poinct G hors la ligne B D soit le centre, (s'il est possible) duquel soient menees les trois lignes droictes G A, G E & G C. D'autant que G estant le centre, par la def. du cercle les lignes droictes A G & G C seront egales: mais par la construction AE & E C sont aussi egales, & GE est commune aux deux triangles GEA & GEC: donc iceux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base AG egale à la base C G, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & C E G seront egaux: & partant droicts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la construction est droict, & tous les angles droicts sont egaux par la 10. com. sent. donc les deux angles AEG & BEA seront egaux, sçauoir le tout à sa partie: ce qui est absurde. Donc le poinct G n'est pas le centre. Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre poinct hors la ligne B D. Partant le poinct F sera le centre du cercle A B C, requis à trouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si au cercle vne ligne droicte couppe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts, le centre du cercle sera en icelle couppante. Car il a esté demonstré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au poinct F, milieu de la ligne B D, laquelle couppe la ligne A C en deux egalement, & à angles droicts en E.

SCHOLIE.

Combien que la practique de ce Probleme soit aisee par la construction d'iceluy, si est-ce toutesfois qu'elle est encore plus briefue & facile, ainsi qu'il ensuit. Pour trouuer le centre du cercle ABC, soient pris en la circonferẽce d'iceluy les trois poincts A, B, C, comme on voudra: puis des deux poincts A & B, soient descrits d'vn

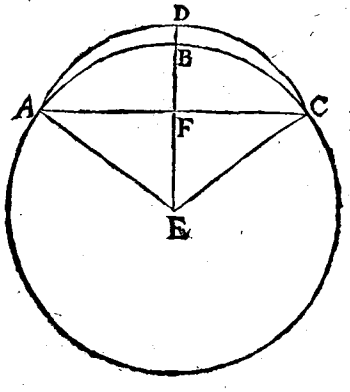


meſme interualle, deux arcs qui s'entrecouppent és poincts D & F, par leſquels ſoit menee la ligne droicte DFE interminement: en apres, des poincts B & C, ſoient auſſi deſcrits d'vn meſme interualle deux autres arcs s'entrecouppans ez poincts G & H, par leſquels ſoit menee la ligne droicte GH, qui couppe DF en E, & iceluy poinct ſera le centre requis.

THEOR. 1. PROP. II.

Si en la circonference d'vn cercle, on prend deux poincts comme on voudra; la ligne droicte menee de poinct à autre, tombera dans le cercle

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra A & C: le diſque la ligne droicte menee du poinct A au poinct C tombera dedans le cercle: car ſi elle ne tombe au-dedans, elle tombera, ou ſur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il eſt poſſible, comme la ligne ADC: & ayant trouué le centre E par la prec. prop. d'iceluy ſoient menees aux poincts A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque poinct D de la ligne ADC, ſoit auſſi menee ED, qui couppe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux coſtez EA, EC ſont egaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, ſur la baſe ADC, egaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le coſté AD eſt prolongé, l'angle exterieur EDC ſera plus grand que ſon oppoſé interieur EAD, par la 16. p. 1. Donc le meſme angle EDC ſera auſſi plus grand que l'angle ECD, qui eſt egal à EAD. Parquoy EC oppoſé au plus grand angle EDC ſera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB egale à EC, ſera auſſi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte menee de A à C ne tombera pas hors le cercle. On demonſtrera par meſme raiſon qu'elle ne peut pas auſſi tomber ſur la circonference ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droicte AFC. Parquoy ſi en la circonference d'vn cercle, &c. Ce qu'il alloit demonſtrer.



SCHOLIE.

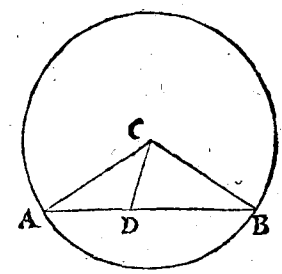
Ce meſme Theoreme peut auſſi eſtre demonſtré affirmatiuement ainſi qu'il enſuit.

En la circonference du cercle AB, dont le centre eſt C, ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra A & B. Ie dis que la ligne droicte AB menee d'vn poinct à l'autre tombe dans iceluy cercle.

Car ſoit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinct comme D, entre ſes extremes A & B, puis du centre C, ſoient menees les lignes droictes CA, CD, CB.

D'autant

D'autant que les deux costez AC, BC, du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC seront egaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. prop. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. prop. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tiree du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra pas iusques à icelle circonference, & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstré de tout autre poinct qu'on voudra prendre en icelle AB. Donc toute la ligne droicte AB tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il falloit prouuer.



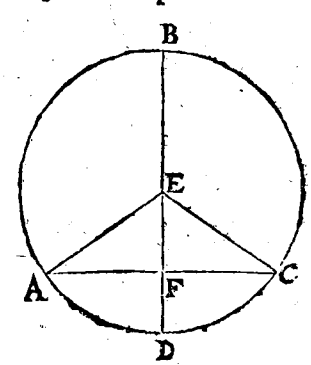
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, le touche seulement à vn poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle coupperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, & couppe en deux egalement vne autre ligne droicte, qui ne passe point par le centre; elle la couppera à angles droicts: & si elle la couppe à angles droicts, elle la couppera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droicte BD, laquelle passant par le centre E, couppe en deux egalement la ligne droicte AC, laquelle ne passe point par le centre; Ie dis que BD couppe aussi AC en angles droicts au poinct F.



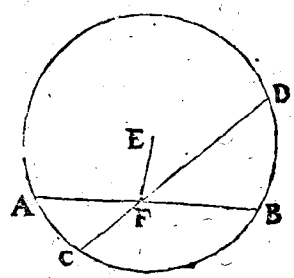
Car estans menees les deux lignes droictes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au poinct F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

Ie dis pareillement, que si BD couppe AC à angles droicts au poinct F; qu'elle la couppera aussi en deux egalement. Car les deux angles au poinct F estans droicts, ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. prop. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droictes ne passans point par le centre, s'entrecouppent; elles ne se coupperont pas l'vne l'autre en deux egalement.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes AB & CD, s'entrecouppans au poinct F, & desquelles ny l'vne ny l'autre ne passe par le centre E. Ie dis que l'vne ou l'autre est couppee inegalement. Car du centre E estant menee la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entrecouppent en deux egalement au poinct F, la ligne EF les couppera au mesme poinct aussi en deux egalement, & à droicts angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB seront droicts, & egaux à CFE, EFD, aussi droicts, & egaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes droictes AB, CD ne s'entrecouppoient pas en deux egalement. Parquoy si dans le cercle deux lignes droictes ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

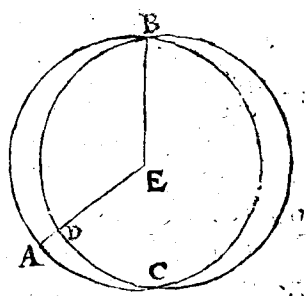


THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se couppent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se couppans l'vn l'autre en B & C. Ie dis qu'ils ne sçauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirees deux lignes droictes, sçauoir EB à la section B: Mais EA couppant l'vne & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du cercle ABC, la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: parrant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre. Ce qu'il falloit demonstrer.

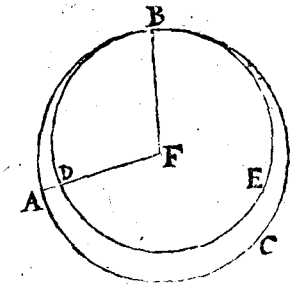


THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & D B E se touchans l'vn l'autre au dedans en B. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menees les deux lignes F A & F B: sçauoir est FB à l'attouchement B; & F A, couppant l'vn & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle A B C, les lignes droictes FA, FB seront egales: derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera egale à la ligne FB, à laquelle a esté demonstré estre aussi egale FA: donc FA, FD seront egales entr'elles; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy F ne pouuoit estre centre commun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demonstrer.



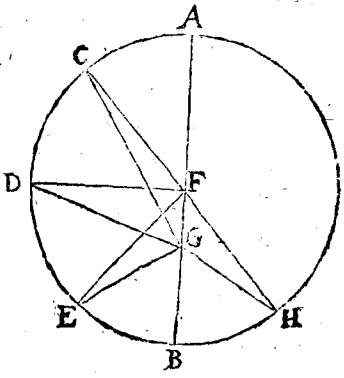
SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont diuers: veu qu'vn des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque poinct qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droictes à la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus proche de celle qui est menee par le centre, est plus grande que la plus esloignee: Et du mesme poinct ne peuuent estre menees à la circonference que deux lignes droictes egales, de part & d'autre de la plus petite.

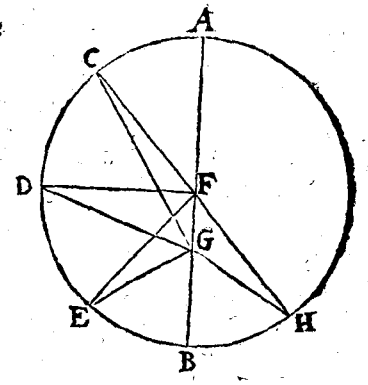
Au diametre AB du cercle A C D EB, duquel le centre est F, soit pris quelque poinct G outre le centre; & d'icelui poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes G C, G D, GE, en la circonference. Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference; GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menees à C, D & E, les lignes FC, FD & FE: le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. pr. 1.



Mais les lignes droictes GF, FC ſont egales aux ligne droictes GF, FA, c'eſt à dire à toute la ligne GA: donc GA ſera auſſi plus grande que GC. Par meſme raiſon GA ſera auſſi plus grande que GD, & que GE: parquoy la ligne GA eſt la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB eſt plus petite que GD, ou autre quelconque: car au triangle DFG, les deux coſtez DG & GF, ſeront plus grands que le troiſieſme DF par la 20 prop. 1. ou que ſon egale BF. Que ſi on oſte la ligne commune GF, le demeurant GD ſera plus grand que le demeurant GB. Par meſme raiſon GB, ſera auſſi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, eſt plus grande qu'icelle GD: & pour la meſme raiſon GD plus grande que GE, & ainſi des autres s'il y en auoit dauantage de tirees de G à la circonference. Car les deux coſtez GF, FC du triangle GFC, ſont egaux aux deux coſtez GF, FD du triangle GFD, chacun au ſien: mais l'angle CFG eſt plus grand que l'angle DFG; & partant par la 24. p. 1. la baſe GC ſera plus grande que la baſe GD. Pour meſme raiſon GC ſera auſſi plus grande que GE: Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui eſt menee par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.



Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, ſont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les coſtez EF, FG du triangle EFG, ſont egaux aux coſtez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG auſſi egaux: les lignes GH, GE, qui ſont de part & d'autre du diametre, ſont egales entr'elles. Et il eſt euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA, tombant de coſté ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a eſté monſtré cy deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du poinct G à la circonference ne ſe peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui ſoient egales entr'elles. Parquoy ſi au diametre d'vn cercle on prend quelconque poinct qui ne ſoit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

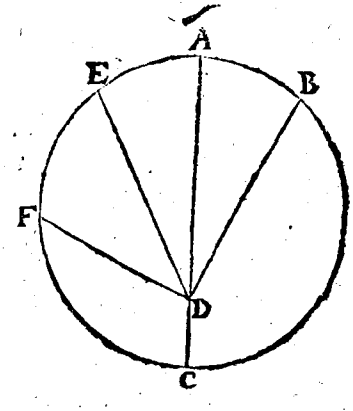
SCHOLIE.

Iaçoit qu'Euclide ait ſeulement demonſtré que des lignes droictes tirees de meſme part du diametre, la plus proche de celle tiree par le centre eſt plus grande que la plus eſloignee, toutesfois cela eſt auſſi vray, ſi elles ſont tirees de diuerſe part: comme ſi la ligne droicte GD eſt plus proche de GA que la ligne droicte GH; Icelle GD ſera plus grande que GH: car ſi de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH ſeront egales, attendu qu'elles ſont egalement diſtantes de GA, & le

poinct E tombera entre B & D, puis que GD a eſté poſee plus proche de G A que GH. Mais par ceſte prop. GD eſt plus grande que GE: donc la meſme GD ſera auſſi plus grande que GH. Quelques interpretes veulent conuertir cette 7. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si on prend vn poinct dedans le cercle, & d'iceluy poinct tombent des lignes droictes à la circonference, entre leſquelles ſoient la plus grande & la plus petite qui puiſſent eſtre menees de ce poinct-là à ladite circonference: mais des reſtantes, les vnes ſoient inegales, & les autres egales: la plus grande paſſera par le centre du cercle, & la plus petite ſera le reſte du diametre: mais des autres les plus grandes ſeront les plus proches du centre, & les egales en ſeront egalement diſtantes.

Au cercle ABC ſoit pris le poinct D, duquel tombent en la circonference tant qu'on voudra de lig. droictes DA, DB, DC, DE, DF, deſquelles DA ſoit la plus grande qui puiſſe eſtre tiree d'iceluy poinct à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres, DE ſoit plus grande que DF, & egale à DB. Ie dis premierement que DA paſſe par le centre du cercle: Car ſi elle n'y paſſe, eſtant tiree quelque ligne droicte de D par ledit centre, elle ſera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. prop. 3. Ce qui eſt abſurde, puis que DA eſt poſee la plus grande. Donc DA paſſe par le centre.



En ſecond lieu, ie dis que DC eſt le reſte du diametre, c'eſt à dire qu'elle eſt directement à DA: Car autrement icelle DA eſtant prolongee directement, ſon prolongement ſera autre que DC, & la plus petite ligne qui puiſſe tomber de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Ce qui ne peut eſtre, puis que DC a eſté poſee la plus petite: donc DC eſt l'autre partie du diametre.

Tiercement, ie dis que DE eſt plus proche de DA que DF. Car elle n'y pourroit pas eſtre egalement diſtante, attendu que par la ſuſdite prop. elles ſeroient egales, & elles ont eſté poſees inegales. Mais DE ne peut pas auſſi eſtre plus eſloignee de la meſme DA que DF: car elles ſeroient plus petites qu'icelle DF, par la meſme propoſition, & elle a eſté poſee plus grande.

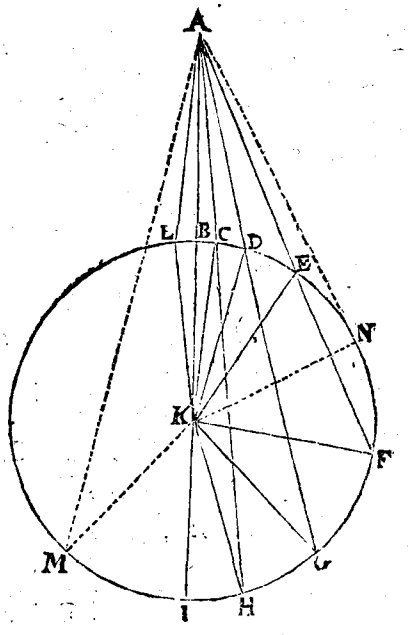
En dernier lieu, ie dis que DB, DE ſont egalement diſtantes de DA: Car ſi l'vne en eſtoit plus proche elle ſeroit plus grande que l'autre par la meſme 7. prop. & elles ont eſté poſees egales.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy poinct ſoient menees quelques lignes droictes dans iceluy cercle, deſquelles l'vne paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande

de toutes celles qui seront menees en la circonference concaue. Quant aux autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignee. Mais de celles qui tombent à la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est compriſe entre le poinct & le diametre: Quant aux autres, la plus esloignee de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche: Et d'iceluy poinct ne peuuent tomber à la circonference que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite.

Du poinct A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menees les lignes droictes AF, AG, AH & AI couppans ledit cercle, desquelles lignes AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Ie dis premierement que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes icelles lignes tirees à la circonference concaue: puis apres, que AH qui est la plus proche d'icelle AI est plus grande que AG, qui en est plus esloignee: Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB compriſe entre le poinct A & la circonference conuexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle: puis apres, que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD, qui en est plus esloignee: Et par mesme raison, icelle AD moindre que AE. Finalement, ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.



Car du centre K estans menees aux poincts C, D, E, F, G & H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG & KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & aussi que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez AK & KH du triangle AKH sont egaux aux costez AK, KG du triangle AKG, chacun au sien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que

la baſe AG, par la 24. prop. 1. Par meſme raiſon AH ſera plus grande que AF; item AG plus grande que la meſme AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK eſt moindre que les deux AC, CK; ſi on oſte les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par ſemblable raiſon AB ſera plus petite que AD, & auſſi que AE. Parquoy la ligne AB eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menees de A à la circonference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitez du coſté AK, icelles AC, CK ſeront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. deſquelles ſi on oſte les egales CK, DK, reſtera encore AC moindre que AD. Par meſme raiſon on prouuera que AC eſt moindre que AE: Item AD moindre que la meſme AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, eſt moindre que la plus eſloignee.

Finablement, ſoit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, tirant KL iuſques à ce qu'elle rencontre la periphere en L, & ſoit menee la ligne AL. D'autant que les coſtez AK, KC du triangle AKC, ſont egaux aux coſtez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL auſſi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, ſeront egales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puiſſe eſtre egale à icelles, il eſt euident; car ſi on en mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle ſoit plus proche ou plus eſloignée de AB; & parce qui a eſté demonſtré cy-deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont ſeulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy ſi on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon de A ne peuuent tomber en la circonference concaue que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus grande AI. Car ayant faict l'angle AKM egal à l'angle AKG, & mené AM, les triangles AKM, AKG auront les baſes AG, AM egales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonference concaue d'autre ligne egale à icelle AG, AM, attendu qu'elle ſeroit plus proche ou plus eſloignee de AI, & par conſequent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainſi qu'il appert par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus.

Il appert auſſi que quand l'vne des lignes tombantes de A, touche le cercle, comme AN, qu'icelle touchante eſt plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonference concaue: Car eſtant tiree du centre à l'attouchement la ligne droicte KN, les deux coſtez AK, KF du triangle AKF, ſeront egaux aux deux coſtez AK, KN du triangle AKN, chacun au ſien, & l'angle AKF eſt plus grand que l'angle AKN, & par la 24. pr. 1. la baſe AF ſera plus grande que la baſe AN: Et par meſme raiſon toute autre ligne tombante en la circonference concaue ſera plus grande qu'icelle AN.

Mais la meſme ligne touchante AN ſera la plus grande de toutes les autres li-

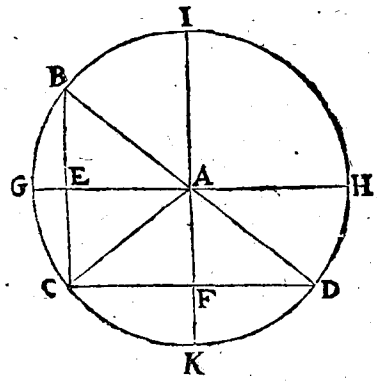
gnes qui tombent de A en la circonference conuexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux costez AE, EK sont moindres que les deux costez AN, NK, si on en oste les lignes egales KE, KN, restera AE moindre que AN; & ainsi des autres.

Au reste ce qu'Euclide a demonstré en cette 8. prop. aduenir aux lignes menees d'vne mesme part de la plus grande ou plus petite, aduiendra encore, les lignes estans menees de diuerses parts, c'est à dire, que si AH est plus proche de AI que AM: Icelle AH sera aussi plus grande que ladite AM, iaçoit qu'elles ne soient toutes deux d'vne mesme part: & si AD est plus esloignee de AB que AL, elle sera aussi plus grande qu'icelle AL. Ce qu'on peut demonstrer procedant, ainsi qu'au precedent Scholie pour les lignes tirees de diuerse part.

THEOR. 8. PROP. IX.

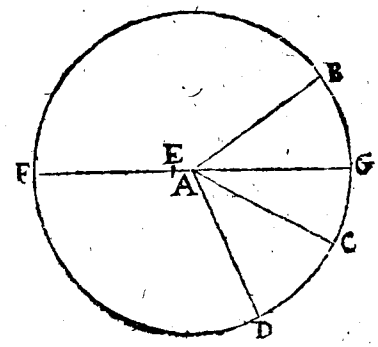
Si on prend quelque poinct au dedans d'vn cercle, & d'iceluy poinct tombent à la circonference plus de deux lignes droictes egales, le poinct pris est le centre du cercle.

Soit pris le poinct A au cercle B C D, & d'iceluy poinct tombent à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC, AD. Ie dis que le poinct pris A, est le centre du cercle.



Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes droictes BC & CD, & apres les auoir couppees en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, soient menees les deux lignes droictes EA, FA, & prolongees de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au poinct E seront egaux, & partant droicts, & par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre du cercle sera en la ligne droicte GAH, puis qu'elle diuise la ligne droicte BC en deux egalement, & à angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant poinct d'autre poinct commun. Parquoy si on prend quelque poinct dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Autrement. Si le poinct A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au poinct E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG, est pris le poinct A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droictes AD, AC; icelle AD qui est plus proche de AF tiree par le centre E, sera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles



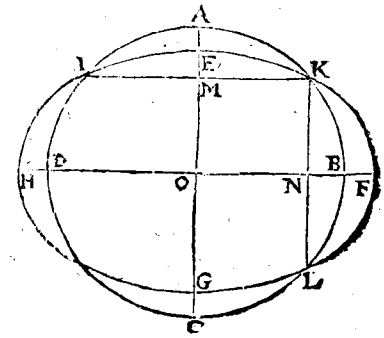
AB, AC

AB, AC ont esté posees egales. La mesme absurdité s'ensuiura tousiours si on pose le centre estre à vn autre poinct que A: parquoy iceluy poinct A sera le centre du cercle ABC. Ce qu'il falloit prouuer.

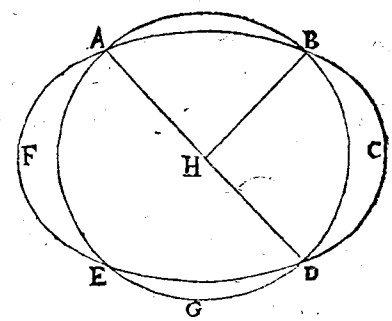
THEOR. 9. PROP. X.

Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se couppans aux trois poincts I, K & L, s'il est possible. Item soient menees les deux lignes droictes IK & KL, lesquelles soient couppees en deux egalement aux poincts M & N par la 10. prop, 1. & soient menees les lignes droictes MC, NH à droicts angles sur IK & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce liure que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au poinct de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. prop. de ce liure. Donc les cercles ABCD & EFGH ne se pouuoient pas couppper en plus de deux poincts: Ce qu'il fallloit demonstrer.



Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se couppent, s'il est possible, en plus de deux poincts c'est à sçauoir en A, B, D: & soit trouué le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menees les lignes droictes HA, HB, HD, lesquelles seront egales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le poinct H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes egales, iceluy poinct H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecouppans ont mesme centre. Ce qui est absurde.

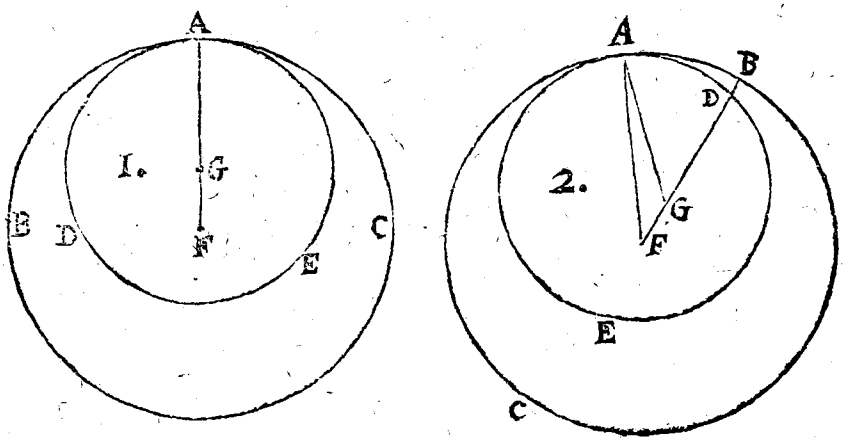


THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'vn l'autre au dedans, on conjoinct iceux centres par vne ligne droicte; icelle ligne estant prolongee tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans interieurement au

poinct A, & par la 1. pr. 3. ſoit trouué le centre du cercle ABC, lequel ſoit F; puis que par la 6. prop. 3 deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuuent auoir vn meſme centre, F ne ſera pas le centre du cercle ADE: Soit donc auſſi trouué ſon centre, qui ſoit G. Ie dis que la ligne droicte menee du centre F au centre G, & prolongee de ce coſté-là iuſques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au poinct de l'attouchement A, comme à la premiere figure. Car autrement il faudra qu'elle tombe à quelque autre poinct de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G ſont au dedans du cercle ABC, ladite ligne FG

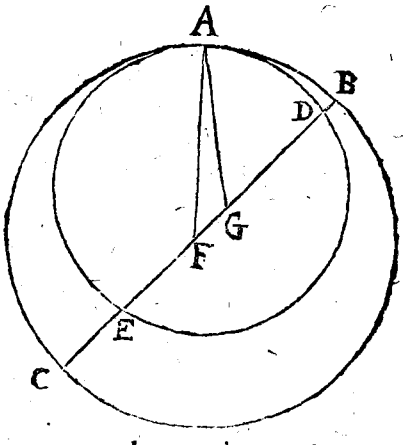


eſtant continuee, elle ira neceſſairement rencontrer la circonference d'iceluy cercle: & ſi quelqu'vn dit que ce n'eſt pas au poinct d'attouchement, ſoit, s'il eſt poſſible, à quelconque autre poinct, comme B en la 2. figure; tellement que la ligne FGB couppe la circonference du moindre cercle ADE au poinct D. D'autant donc que les centres F & G, & le poinct d'attouchement A ne ſont pas en vne ligne droicte, ſi dudit poinct A on mene des lignes droictes aux deux centres F & G, elles feront vn triangle auec la ligne FG, qui eſt la diſtance d'vn centre à l'autre, lequel triangle ſoit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux coſtez AG, FG dudict triangle AFG, ſont plus grands que l'autre coſté FA; & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, (pource que F eſt le centre du cercle ABC) auſſi les lignes AG, GF ſeront plus grandes que FB: oſtant donc FG commune, reſtera GA, plus grande que GB. Et partant, puis que GA eſt egale à GD; (car G eſt le centre du cercle ADE) GD ſera auſſi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte conioignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produicte, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy ſi deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

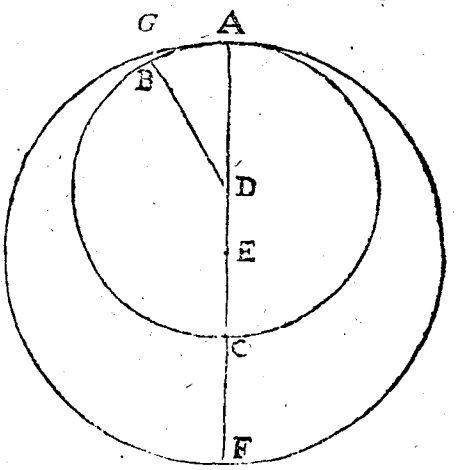
SCHOLIE.

Candalle, Errard & quelques autres Interprettes demonſtrent ceſte 11. *prop. ainſi qu'il enſuit. Soient deux circonferences ABC & ADE ſe touchans interieuremen*

au poinct A, & de la plus grande ABC, le centre ſoit F, duquel au poinct d'attouchement A ſoit menee la ligne droicte AF: Ie dis que le centre de la plus petite circonference ADE eſt en icelle ligne AF. Autrement, qu'il ſoit hors d'icelle, s'il eſt poßible, comme au poinct G, & ſoit conioinct FG, & prolongé de la part de G iuſques à ce qu'il couppe les deux circonferences aux poincts D & B, puis ſoit menee GA. D'autant que par la 20. prop. 1. les deux coſtez AG, FG du triangle AFG ſont plus grands que l'autre coſté FA, & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, puis que F eſt le centre du cercle ABC; außi AG, FG ſeront plus grandes que FB. Oſtant donc FG commune, reſtera GA plus grande que GB: mais GA eſt egale à GD (car G a eſté poſé centre du cercle ADE.) Donc außi GD ſera plus grande que GB; la partie que le tout; ce qui eſt abſurde. Parquoy le centre de l'autre circonference ADE ne ſera pas hors la ligne FA: & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE ſeront en ladite ligne FA. Donc la ligne conioignant iceux centres & prolongee tombera au poinct d'attouchement A.



Encore autrement ſelon Pelletier & Billingſley. Soient deux cercles ABC, AFG s'entretouchans au dedans en A, & par la 1. pr. 3. ſoit trouué le centre du cercle ABC, qui ſoit D, & außi le centre de AFG, lequel ſoit E: Ie dis que la ligne droicte menee du centre E à D & prolongee iuſques à la circonference du plus grand cercle tombera au poinct de l'attouchement A. Car autrement elle tombera de part ou d'autre d'iceluy attouchement A; qu'elle tombe donc, s'il eſt poßible, à vn autre poinct, comme G: tellement que FEDG ſoit diametre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & ſoit tiree DA. D'autant qu'au diametre FEDG, le poinct D eſt autre que le centre E, la ligne droicte DA ſera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB eſt egale à DA par la def. du cercle: donc DB ſera außi plus grande que DG, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Parquoy la ligne ED prolongee vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy poinct d'attouchement A.

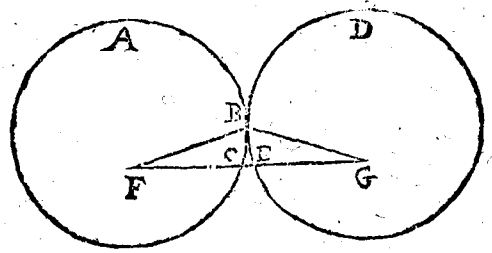


THEOR. 11. PROP. XII.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, paſſera par l'attouchement.

Soient deux cercles A B C, D B E ſe touchans l'vn l'autre au dehors au

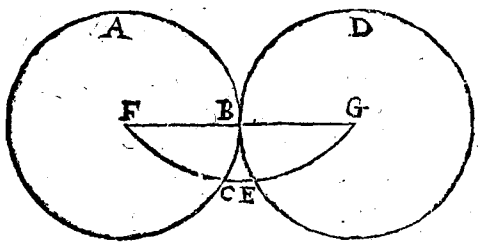
poinct B, desquels les centres soient F & G. Ie dis que si d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, qu'icelle passera par le poinct d'attouchement B.



Autrement, il s'ensuiura absurdité : car si icelle ligne ne passe par le poinct d'attouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçauoir aux poincts C & E, où elle coupe les deux circonferences, & du poinct d'attouchement B soient menees les deux lignes droictes FB, GB, lesquelles par la 20. prop. 1. seront plus grandes que FG, & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC, estant egale à FB, & GE à GB, que les deux lignes FC & GE, seront plus grandes que FG, la partie que le tout. La ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera donc par l'attouchement B. Parquoy si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

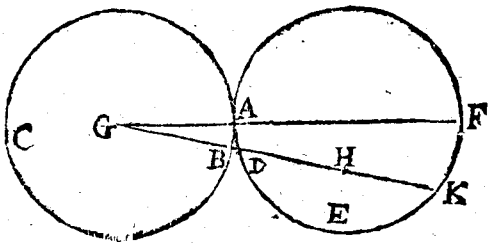
SCHOLIE.

D'autant qu'en cette demonstration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vrayes places, & que cela pourroit peut estre causer quelque doubte, Oronce & Schubelius en ont adiousté vne autre où les centres retiennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles ABC, DBE s'entretouchent au dehors en B, & d'iceux les centres soient F & G : Ie dis que la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre passera par le poinct d'attouchement B, c'est à dire que si on mene à iceluy poinct B les lignes droictes FB, GB, elles feront vne seule ligne droicte FBG. Car autrement elles feront vn angle à iceluy poinct B, & de F à G on pourra mener vne ligne droicte, laquelle soit (s'il est possible) FCEG, qui couppe les circonferences en C & E. Donc icelle ligne droicte FCEG constituera vn triangle auec les deux lignes FB, GB, puis qu'on a posé qu'elles s'inclinent & font angle au poinct B : & par la 20 p. 1. icelles FB, GB sont plus grandes que FCEG : Mais par la def. du cercle FC est egale à FB, & GE à GB : donc FC & GE seront aussi plus grandes que la mesme FCEG, la partie que le tout : (car icelle FCEG outre FC, GE contient encore la ligne droicte CE,) Ce qui est absurde.



Pelletier, & apres luy Billingsley demonstrent encore cette 12. pr. ainsi. Soient les deux cercles ABC & DEF qui s'entretouchent par dehors au poinct A; & que G soit le centre du cercle ABC, duquel soit tiree par l'attouchement des cercles, la ligne droicte GA iusques à ce qu'elle rencontre la circonference DEF au poinct F : Ie dis que le centre du cercle ADE est en icelle ligne droicte GAF. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au poinct H, & du centre G à iceluy centre H soit tiree la ligne droicte GHK iusques à ce qu'elle ren-

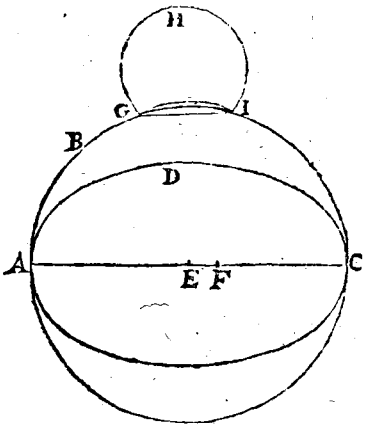
contre la circonference en K, couppant la periphere ABC en B, & la circonference ADE en D. D'autant que du poinct G, qui eſt hors le cercle ADE, ſont tirees à iceluy cercle les deux lignes droictes GK, GF, deſquelles GK paſſe par le centre H, par la 8. pr. 3. la partie exterieure GD ſera moindre que GA partie exterieure de GF. Mais AG eſt egale à GB par la def. du cercle : donc auſsi GD ſera moindre que GB, le tout que la partie : ce qui eſt abſurde. Donc le centre du cercle ADE ne ſera pas hors la ligne GAF, & partant les deux centres des cercles ABC, & ADE ſeront en icelle ligne GF ; parquoy la ligne conioignant iceux centres paſſera par l'attouchement des cercles.



THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC ſe touchans interieurement aux deux poincts A & C, s'il eſt poſſible : & d'autant qu'ils ne peuuent auoir vn meſme centre par la 6. pr. de ce liure, ſoient les deux centres diuers E & F, par leſquels eſtant tiree la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és poincts d'attouchement A & C par la 11. pr. de ce meſme liure : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes EA & EC ſoient egales. Item FA & FC. Mais FA eſt plus grande que EA Partant FC ſera auſsi plus grande que EC, la partie que le tout : ce qui eſt impoſſible. Donc les deux cercles ne ſe toucheront point en deux poincts au dedans.

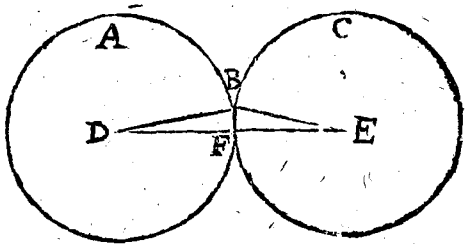


Pareillement, il eſt impoſſible qu'ils ſe touchent exterieurement à plus d'vn poinct : car ſi le cercle GHI pouuoit toucher en dehors le cercle ABC en deux poincts, comme G & I, il faudroit que la ligne droicte GI menee par leſdits deux poincts, tombaſt dedans l'vn & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui eſt impoſſible : car icelle ligne droicte GI tombant dedans le cercle ABC, elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI, puis qu'iceluy eſt tout dehors ABC. Parquoy les cercles ne ſe touchent point à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Cette ſeconde partie eſt encore demonſtree par pluſieurs Interprettes ainſi. Que les

deux cercles A B & C B, dont les centres ſont D & E, s'entretouchent par dehors au poinct F: Ie dis qu'ils ne ſe peuuent toucher à vn autre poinct. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droicte D E, elle paſſera par ledit attouchement F par la precedente prop. & ſi les cercles ſe touchoient encore à vn autre poinct, comme B, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre paſſeroit auſsi par iceluy attouchement B; & par ainſi les deux lignes droictes D F E, D B E enclorroient vne ſuperficie, ce qui eſt impoſsible.



Clauius demonſtre en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si au demy diametre d'vn cercle produict, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy poinct extreme du ſemy-diametre, & tombera tout dehors le meſme cercle.

Soit le cercle A B C, (voyez la derniere figure de la page 123.) duquel le centre eſt D, & au demy diametre A D prolongé, ſoit prins quelconque poinct comme E, duquel & de l'interualle E A ſoit décrit le cercle A F G, lequel ie dis toucher le cercle A B C au ſeul poinct A. Car ou le poinct E eſt dans le cercle A B C, ou dehors. S'il eſt dedans: d'autant que A E eſt plus grand que A D, c'eſt à dire que D C, & à plus forte raiſon que E C: la ligne E F qui eſt egale à E A ſera auſsi plus grande que E C: & partant le poinct F eſt hors le cercle A B C; & le cercle A F G hors le meſme cercle pres du poinct F. Iceluy poinct F tombera beaucoup dauantage hors le cercle A B C, ſi E eſt hors le meſme cercle A B C. Si donc le cercle A F G ne tombe tout dehors le cercle A B C, tellement qu'il le touche au ſeul poinct A, que le cercle A F G couppe ou touche le cercle A B C, en vn autre poinct B, ſi faire ſe peut, & ſoit tiree la ligne D B. Veu donc qu'au diametre du cercle A F G eſt pris le poinct D, outre le centre E, la ligne D A ſera la plus petite de toutes les lignes droictes tombantes de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Donc D A eſt moindre que D B, ce qui eſt abſurde; car D A, D B tombant du centre D en la circonference d'vn meſme cercle A B C, ſont egales. Donc le cercle A F G ne couppe ou touche le cercle A B C en vn autre poinct que A, mais tombe tout dehors iceluy: ce qui eſtoit propoſé.

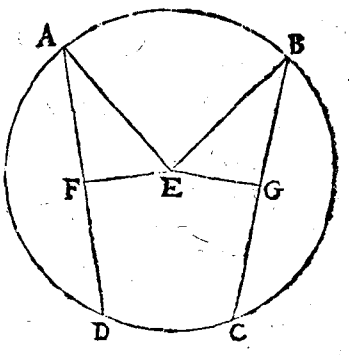
Que ſi au ſemy-diametre non produit, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du ſemy-diametre touchera pareillement le premier cercle au ſuſdit poinct extreme du demy-diametre, & tombera tout dedans le meſme cercle. Comme ſi au ſemy-diametre A E, du cercle A F G, on prend le poinct D, duquel & de l'interualle D A, on deſcriue le cercle A B C, iceluy tombera totalement dedans A F G, & le touchera au ſeul poinct A. Car puis qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le cercle A F G tombe tout dehors le cercle A B C, pareillement tout ceſtuy-cy tombera dedans celuy-là, tellement qu'ils s'entretouchent au ſeul poinct A: & par ainſi appert ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droictes egales, ſont egalement diſtantes du centre; & les egalement diſtantes du centre ſont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droictes egales AD & BC. Ie dis qu'elles ſeront egalement diſtantes du centre E.

Qu'ainſi ne ſoit, par la 12. prop. 1. du centre E ſoient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes droictes AD, BC: puis ſoient tirees les deux lignes AE & BE. Or les deux lignes droictes AD & BC, eſtans couppées en angles droicts par les perpendiculaires EF & EG, elles ſeront auſſi couppees en deux egalement par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD, BC ſont poſees egales, la moitié AF ſera egale à la moitié BG. Pareillement AE eſtant egale à BE par la def. du cercle; le quarré de AE ſera egal au quarré de BE. Mais iceluy quarré de AE eſt egal aux deux quarrez de AF, FE, par la 47. p. 1. & le quarré de BE eſt egal aux deux quarrez de BG, GE. Donc les deux quarrez de AF, FE ſeront egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG ſont egales, le quarré de AF eſt egal au quarré de BG, & par conſequent le quarré de FE, eſt egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE ſera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC ſeront egalement diſtantes du centre E.



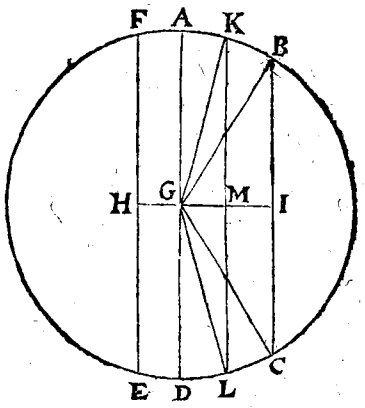
Quant à la ſeconde partie. Ie dis que ſi AD, BC ſont egalement diſtantes du centre E, qu'elles ſeront egales entr'elles: car ayant conſtruit, comme deſſus, les perpendiculaires EF & EG ſeront egales par la 4. def. de ce liu. & coupperont AD, BC en deux egalement par la 3 pr. de ce meſme liu. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-deſſus, AF ſe trouuera egale à BG, & par conſequent auſſi leurs doubles AD & BC ſeront egales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne eſt le diametre: quant aux autres touſiours la plus proche du centre eſt plus grande que la plus eſloignee.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre eſt G ſoit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus eſloignee. Ie dis que de outes ces lignes AD eſt la plus grande, & que FE eſt plus graude que BC.

Car ſoient tirees du centre G les lignes droictes G H, G I perpendiculaires aux lignes droictes FE, BC: & pource que BC eſt plus eſloignee du centre que FE; la perpendiculaire GI ſera plus grande que GH, par la 4. def. de ce liure Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M ſoit menee KML perpendiculaire à GI, & ſoient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH ſont egales, les lignes droictes KL, FE ſeront egalement diſtantes du centre par la 4. def. de ce liure, & partant egales entr'elles par la prop. precedente.



Derechef, puis que GK, GL, ſont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL ſont egales au diametre AD; iceluy diametre A D ſera auſſi plus grand que KL ou FE. Par meſme raiſon on demonſtrera que A D eſt plus grande que toutes les autres lignes.

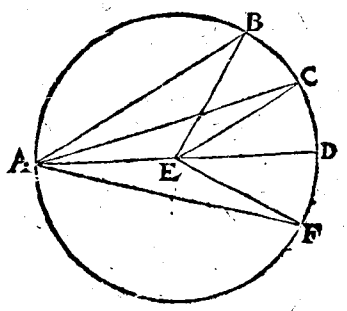
Item, d'autant qu'aux triangles GKL & G B C, les coſtez GK, GL, GB, GC ſont egaux par la definition du cercle, & l'angle GKL eſt plus grand que l'angle BGC, par la 24. prop. 1. la baſe K L, ou ſon egale F E, ſera plus grande que la baſe BC, & ainſi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne eſt le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre icy le Theoreme ſuiuant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend vn poinct, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droicte au cercle, l'vne deſquelles paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande de toutes: mais des autres les plus proches de celle là qui paſſe par le centre ſeront plus grandes que les plus eſloignees: & n'y en peut auoir que deux egales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle A B C D, ſoit pris le poinct A, & d'iceluy ſoient menees pluſieurs lignes droictes A B, A C, A D, deſquelles A D paſſe par le centre E: ie dis que A D eſt la plus grande de toutes, & A C eſtre plus grande que A B, qui eſt plus esloignee d'icelle A D. Car eſtans menees les lignes B E, C E; au triangle A E C les deux coſtez A E, E C ſeront plus grands que le coſté A C par la 20. pr. 1. Mais icelles lignes A E, E C ſont egales aux lignes droictes A E, E D, c'eſt à dire à la ligne droicte A D. Donc icelle A D ſera plus grande que A C: & par meſme raiſon elle ſera auſſi plus grande que A B, & ainſi des autres.



En apres, d'autant qu'au triangle A E C les deux coſtez A E, E C ſont egaux aux deux coſtez A E, E B du triangle A E B, chacun au ſien, & tout l'angle A E C plus grand que l'angle A E B, la baſe A C ſera plus grande que la baſe A B par la

24. *prop.*

14. prop. 1. Et par mesme raison A C sera plus grande que toute autre ligne plus éloignee du centre E.

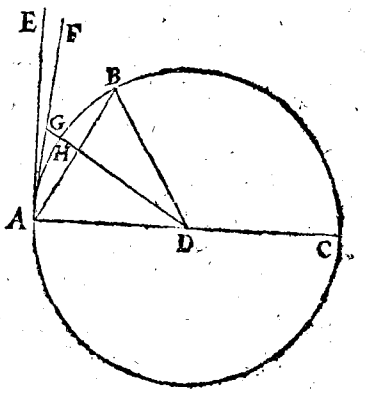
En troisiesme lieu: ie dis que du poinct A on ne peut mener au cercle que deux lignes droictes egales entr'elles de part & d'autre de la plus grande A D. Car ayant fait l'angle A E F égal à l'angle A E C, & ioinct A F, les deux costez A E, E C seront egaux aux deux costez A F, E F, & les angles A E C, A E F, contenus d'iceux costez, aussi egaux, & par la 4. prop. 1. les baſes A C, A F sont egales: & il est euident que du mesme poinct A on ne peut tirer dans le cercle vne autre ligne, qui ne s'approche ou esloigné de A D; & partant plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles A C, A F. Donc du poinct A ne se peuuent tirer dans le cercle que deux lignes droictes egales entr'elles.

Que si de A B, A F, tirees de diuerses parts du diametre A D, on dit que A F est plus proche d'iceluy diametre A D; on demonstrera, comme au Scholie de la 7. prop. de ce liure, que ladite A F est plus grande que A B.

THEOR. 15. PROP. XVI

Si à l'extremité du diametre d'vn cercle, on leue vne ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle: & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

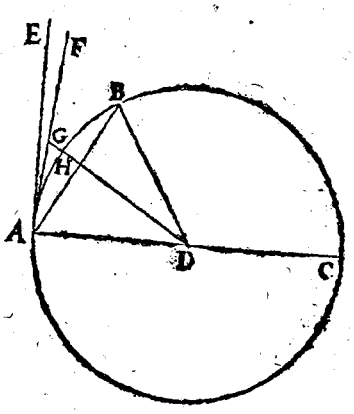
Du cercle A B C, soit le centre D, & le diametre A C, sur l'extremité duquel A, soit leuee la ligne perpendiculaire A E, par la 11. prop. 1. Ie dis premierement qu'icelle ligne A E tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que A B, estant tiree D B, les deux angles D A B, D B A, seront egaux par la 5. prop. 1. Mais D A B est droict par la construction: donc D B A sera aussi droict: ce qui est absurde, puis que par la 17. prop. 1. deux angles d'vn triangle sont moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison elle ne tombera pas aussi en la circonference, mais dehors, comme est A E.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire A E, & la circonference A B, vne autre ligne droicte. Car s'il est possible que quelque ligne droicte y tombe, comme A F, de D soit menee sur icelle la perpendiculaire D G, couppant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu D A F par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc que au triangle D A G, les deux angles D A G, D G A, sont moindres que deux droicts par la 17. prop. 1. & par la construction D G A est droict,

l'angle DAG ſera moindre qu'vn droict, & partant la ligne DA, ou ſon egale DH, ſera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.



Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diametre AC, & de la circonference AB, eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reſte BAE contenu de la ligne droicte AE, & de la circonference AB, eſt plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE eſt angle droict diuiſé par la ſeule circonference AB, & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droicte AE, ne peut tomber vne autre ligne droicte; l'angle BAE ne peut eſtre diuiſé par aucune ligne droicte, & par ainſi ne ſera diminué par aucune ligne droicte, ny par conſequent l'angle BAC ne ſera augmenté par aucune ligne droicte. Si donc à l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COLLAIRE.

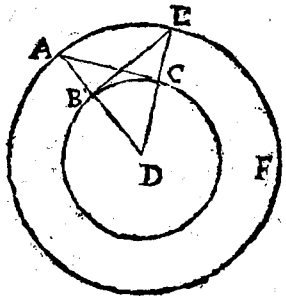
Par ces choſes eſt manifeſte qu'vne ligne droicte tiree perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn ſeul poinct. Car il a eſté demonſtré qu'elle tombe hors le cercle: & partant elle le touche ſeulement au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il eſtoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circonference du cercle, laquelle touchaſt le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD, & ſur icelle ſeroit éleuee la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a eſté demonſtré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC, dont le centre eſt D.

Soit menee la ligne AD couppant le cercle BC en B: puis du centre D, & interualle DA, ſoit deſcrit le cercle AEF: Et apres auoir leué au bout du demy diametre BD la perpendiculaire BE par la 11. p. 1. laquelle couppe la circonference AEF en E, ſoit menee la ligne ED couppant le cercle BC au poinct C, & du poinct donné A, à icelluy poinct C, ſoit menee la ligne AC: ie dis qu'elle touche le cercle donné BC au poinct C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux coſtez egaux, & l'angle D commun, la baſe AC ſera egale à la baſe EB, & l'angle droict ACD egal à

l'angle EBD, qui sera aussi droict. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul poinct C. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte AC, qui touche le cercle donné au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

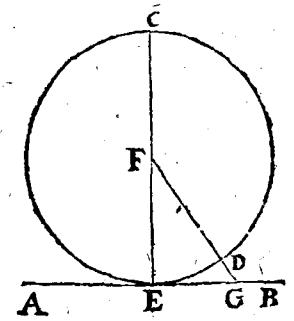
SCHOLIE.

La pratique de cette prop. est aisée à entendre par la construction d'icelle : mais nous auons enseigné en nostre Geometrie practique, Prob. 20. vne autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 31. prop. de ce liure.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cercle: & du centre à l'attouchement on mene vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct E, & d'iceluy poinct d'attouchement soit menée la ligne droicte EC passant par le centre F. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire à AB.



Car si elle ne l'est, soit menee FG perpendiculaire à AB, couppant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droicts, par la 17. prop. 1. & FGE est droict par la construction FEG sera moindre qu'vn droict, & par la 19. p. 1. la ligne FE, ou FD son egale, sera plus grande que FG, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc FE est perpendiculaire à AB. Parquoy si vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

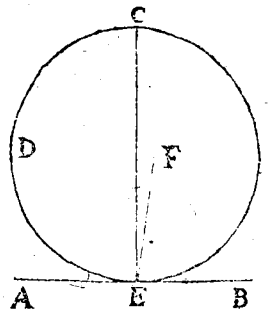
Clauius demonstre encore cette prop. ainsi. Si EC n'est perpendiculaire à AB, l'vn des angles qu'elle faict au poinct E sera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu ; & veu qu'il est plus grand que l'angle du demy cercle CED, l'angle du demy cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne aigu: ce qui est contre la 16. pr. 3. & partant absurde.

THEOR. 17 PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au poinct de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire ; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droicte AB, touchant le cercle CDE au poinct E: & d'iceluy soit leuee EC perpendiculaire à AB. Ie dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire EC.

Autrement, il ſera dehors icelle ligne; ſoit donc au poinct F, s'il eſt poſſible, & d'iceluy poinct ſoit menee la ligne droicte EF au poinct de l'attouchement E; icelle ligne EF ſera auſſi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui eſt impoſſible: car les deux angles AEC, AEF ſeroient droicts & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'eſtoit pas hors la ligne E C, ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

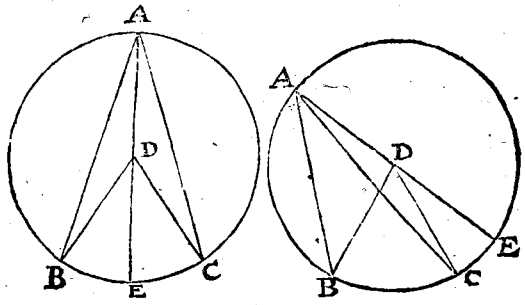


THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne meſme circonference pour baſe.

Au cercle ABC, duquel le centre eſt D, ſoient conſtituez les deux angles BAC & BDC, ſçauoir B A C en la circonference, & BDC au centre, ayant pour baſe vne meſme circonference B C. Ie dis que l'angle BDC ſera double de l'angle BAC.

Car premierement, ſi les lignes droictes AB, AC encloſent les lignes DB, D C, comme en la premiere figure; eſtant menee par le centre D la ligne droicte ADE, & les lignes DA, DB & DC, eſtans egales, les deux triangles ADB & ADC ſeront Iſoſceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles egaux ſur les baſes AB & AC. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. eſt egal aux deux angles interieurs DAB & DBA, qui ſont egaux: partant il ſera double du ſeul DAB: par meſme diſcours EDC ſe trouuera auſſi double de D A C, & par conſequent les deux enſemble BDC ſeront doubles des deux enſemble BAC.



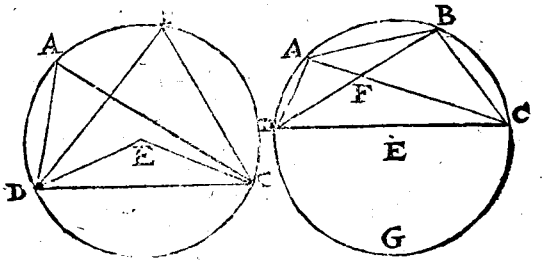
Que ſi l'angle de la circonference BAC eſt comme en la ſeconde figure, il s'enſuiura touſiours le meſme, ſçauoir que l'angle B D C ſera double de l'angle BAC.

Car apres auoir mené par le centre D la ligne ADE, par la 32. pr. 1 l'angle exterieur B D E ſera egal aux deux oppoſez interieurs ABD, DAB, & double du ſeul D A B, le triangle eſtant Iſoſcele: par meſme diſcours CDE ſera double de C A D, & par la 20. com. ſent. ſi de BDE double de BAE on oſte CDE, double de C A E, le demeurant BDC ſera double du demeurant BAC. Parquoy au cercle, l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui ſont en vne meſme portion, ſont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, eſt ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle A B C D, le centre duquel eſt E, vne plus grande portion D A B C, en laquelle ſoient les angles D A C & D B C. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car ſi du centre E on meine les deux lignes E D & E C, l'angle du centre D E C ſera double de l'angle en la circonference D A C par la prop. prec. & par la meſme prop. il ſera auſſi double de l'autre angle D B C. Mais les choſes qui ſont moitié d'vne meſme, ſont egales entr'elles: Donc auſſi les angles A & B ſeront egaux entr'eux.

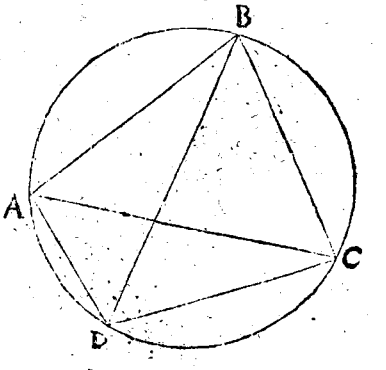
Soit maintenant vne portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Ie dis que les deux angles D A C, D B C, eſtans en la meſme portion D A B C ſont egaux.

Car ſi on meine la ligne droicte A B, il ſe ſera vne portion B G A, plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonſtré cy deſſus, les deux angles A D B & B C A, qui ſont en vne meſme portion A G B, ſeront egaux: pareillement aux deux triangles D A F & C B F, les angles oppoſez au poinct F ſont egaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a eſté demonſtré à la 32. pr. 1. le troiſieſme angle D A F ſera egal au troiſieſme angle C B F. Donc au cercle, les angles qui ſont, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre coſtez inſcrites au cercle, ont les angles oppoſez egaux à deux angles droicts.

Soit le cercle A B C D, auquel ſoit inſcrite la figure de quatre coſtez A B C D. Ie dis que les angles oppoſés A B C, A D C; item B A D, B C D, ſont egaux à deux droicts. Car ſi on meine les deux diagonales A C & B D, les deux angles A C D & A B D, eſtans en vne meſme portion A B C D, ſeront egaux par la pr. prec. Pareillement les deux angles D B C & C A D, eſtans en vne meſme portion D A B C, ſeront egaux; donc les deux angles ſous le poinct B, ſeront egaux aux deux D A C & D C A, leſquels auec les deux du poinct D, ſont egaux à deux droicts par la 32. pr. 1. partant auſſi les deux ſoubs le poinct B auec les



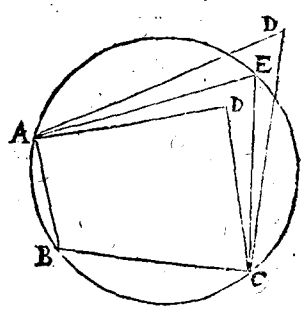
deux ſoubs le poinct D: c'eſt à dire le total A B C, auec le total A D C, ſeront egaux à deux droicts. Nous demonſtrerons en la meſme maniere que les deux angles B A D, B C D, ſont egaux à deux droicts. Car derechef les deux angles A B D, A C D, ſont egaux. Item les deux B C A, B D A; & partant tout l'angle B C D ſera egal aux deux A B D, A D B, leſquels auec B A D ſont egaux à deux droicts par la 32. p. 1 Donc auſſi les deux B C D, B A D, ſeront egaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre coſtez inſcriptes au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La conuerſe de cette 22. prop. peut eſtre demonſtree ainſi qu'il enſuit.

Si deux angles oppoſez d'vn quadrilatere ſont egaux à deux droicts, le cercle deſcrit par trois angles d'iceluy paſſera auſſi par le quatrieſme angle.

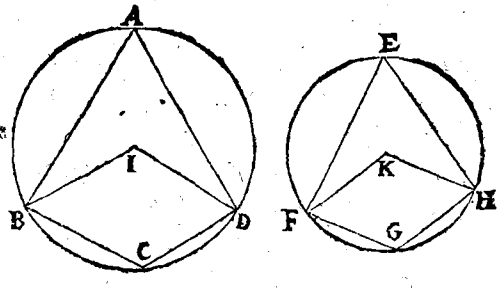
Au quadrilatere A B C D, les deux angles oppoſez B & D ſoient egaux à deux droicts, & par les trois angles A, B, C, ſoit deſcrit vn cercle: Ie dis qu'il paſſera auſſi par le 4. angle D. Car s'il n'y paſſe, il paſſera ou au deçà de D, ou au delà. Soient donc tirees les deux lignes droictes A E, C E, en telle ſorte que ne couppant les lignes droictes C D, A D, elles conſtituent au cercle vn quadrilatere A B C E. Donc par la 22. pr. 3. les deux angles oppoſez B, E ſont egaux à deux droicts: Mais par l'hypotheſe les deux angles B & D, ſont auſſi egaux à deux droicts; & partant les deux angles B & E ſeront egaux aux deux B & D. Parquoy en oſtant l'angle commun B, reſteront les angles D & E egaux: Ce qui eſt abſurde, car eſtant tiree la ligne droicte C A, l'angle D ſera plus grand que l'angle E par la 21. pr. 1. ou au contraire l'angle E ſera plus grand que l'angle D. Le cercle paſſera donc par le poinct D.



Nous demonſtrerons encore icy quatre theoremes non ſeulement vtils aux choſes Geometriques, mais auſſi neceſſaires aux Aſtronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'appuyent ſur arcs ſemblables ſont egaux entr'eux, ſoit qu'ils ſoient conſtituez aux centres ou aux circonferences: & au contraire, les arcs auſquels s'appuyent angles egaux conſtituez aux centres ou aux circonferences, ſont ſemblables.

Aux cercles A B C D, E F G H, deſquels les centres I & K, ſoient premierement les arcs ſemblables B C D, F G H, auſquels inſiſtent & s'appuyent les angles I & K aux centres; & les angles A & E aux circonferences. Ie dis que tant ces deux-là, que ces deux-cy ſont egaux entr'eux. Car eſtans conſtituez en iceux arcs les angles C, G, qui par la 10. d. 3. ſeront egaux: & par la 22. pr. 3. tant les deux angles C, A, que les deux G, E, ſont egaux à deux droicts. Oſtant donc les egaux C, G, les reſtans A, E ſeront auſſi egaux: Mais d'iceux ſont doubles les angles I, K, par la 20. prop. 3. & par conſequent ils ſont auſſi egaux. Ce qui eſtoit propoſé.

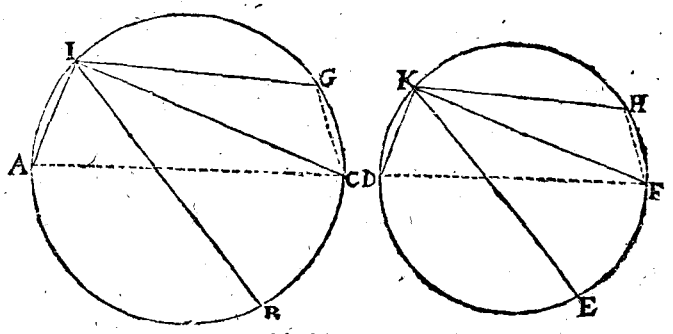


Secondement, ſoient egaux tant les angles I, K, que A, E, leſquels s'appuyent ſur les

arcs BCD, FGH : Ie dis qu'iceux arcs BCD, FGH ſont ſemblables. Car A & E ſont egaux, & par la 22. prop. 3. tant les deux angles A & C, que les deux E & G ſont egaux à deux droicts, les deux autres C & G ſeront auſsi egaux ; & partant les arcs BCD, FGH, auſquels inſiſtent les angles A, E aux circonferences, ſeront ſemblables par la 10. d. 3. Mais ſi les angles I & K aux centres ſont egaux, leurs moitiez A & E, ſeront auſsi egales. Parquoy comme deſſus, les arcs BCD, FGH ſont ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. Si aux demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, l'on adiouſte des ſegmens ſemblables ; les totals ſegmens ſeront auſſi ſemblables : & ſi des cercles, demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, on oſte des ſegmens ſemblables ; les ſegmens reſtans ſeront auſſi ſemblables.

Aux cercles ABC, DEF, ſoient les ſegmens ou arcs ſemblables ABC, DEF qui ſoient demy cercles ou non, & a iceux ſoient adiouſtez les arcs ſemblables CG, FH. Ie dis que tout l'arc ABG eſt ſemblable à tout l'arc DEH. Car eſtans pris aux arcs reſtans les deux poincts I, K, comme on voudra, ſoient menees les lignes droictes AI, CI, GI : DK, FK, HK. D'autant que les arcs ABC, DEF ſont ſemblables, les angles AIC, DKF, ſeront egaux par le prec. Theor. Et par meſme raiſon les angles CIG, FKH ſeront auſsi egaux, à cauſe des arcs ſemblables CG, FH. Donc tout l'angle AIG ſera egal à tout l'angle DKH : & par le meſme theor. prec. les arcs ABG, DEH ſeront ſemblables : ce qui eſtoit propoſé.



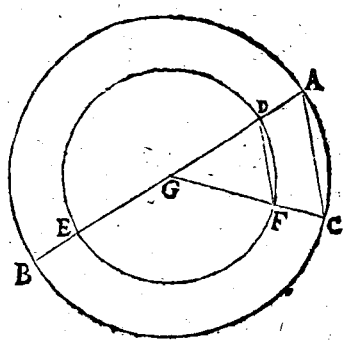
Maintenant, que des ſegmens ou arcs ſemblables ABC, DEF, ſoient retranchez les arcs ſemblables AB, DE. Ie dis que les arcs reſtans BC, EF, ſont auſsi ſemblables. Car eſtans pris derechef les deux poincts I, K, aux peripheres reſtantes des arcs donnez ſoient menees les lignes droictes AI, BI, CI : DK, EK, FK. Donc puis que tout l'arc ABC eſt ſemblable à tout l'arc DEF, tout l'angle AIC ſera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par meſme raiſon l'angle retranché AIB ſera egal à l'angle retranché DKE, à cauſe des arcs ſemblables AB, DE : donc auſsi l'angle reſtant BIC ſera egal à l'angle reſtant EKF ; & conſequemment les arcs BC, EF, ſeront ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Que ſi des cercles entiers on oſte les ſegmens ſemblables IAC, KDF, les ſegmens reſtans CGI, FHK ſeront auſsi ſemblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux ſegmens les poincts A, G, D, H, ſoient menees les lignes droictes IA, CA, IG, CG : KD, FD, KH, FH. D'autant que les ſegmens IAC, KDF ſont ſemblables, les angles IAC, KDF ſeront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. 3. tant les deux angles oppoſez A, G, que les deux D, H, ſont egaux à deux droicts ; en oſtant les deux angles egaux A & D, les deux reſtans G & H ſeront auſsi egaux, & partant les ſegmens IGC, KHF ſeront ſemblables par la meſme def. Ce qui eſtoit propoſé.

3. Si deux ou pluſieurs cercles ſont deſcris d'vn meſme centre, & d'iceluy ſoient menees deux ou dauantage de lignes droictes, qui couppent les circon-

ferences ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

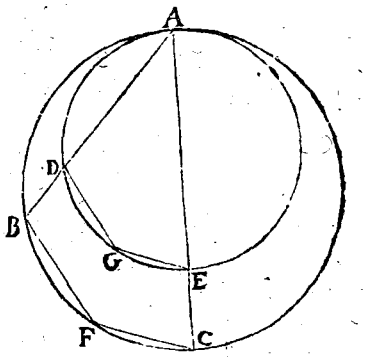
Soient deux cercles ABC, DEF, descrits d'vn mesme centre G, duquel soient menees les deux lignes droictes GB, GC, qui couppent les circonferences en B, C, & E, F : Ie dis que les arcs EF, BC, sont semblables. Car estant prolongee la ligne BG iusques en A, & tirées les lignes droictes AC, DF, l'angle G, constitué au centre sera double de chacun des angles A, D, en la circonference par la 20. pr. 3. Donc par le 1. de ces theor. les arcs BC, EF, sur lesquels ils s'appuient seront semblables. Ce qui estoit proposé.



Autrement. *D'autant que sur les arcs EF, BC s'appuient angles egaux au centre, ou plustost vn seul & mesme angle BGC ; iceux arcs EF, BC seront semblables par le theor. susdit.*

4. Si deux ou dauantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du poinct d'attouchement soient tirees deux ou dauantage de lignes droictes qui couppent les cercles ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes seront semblables ; comme aussi les arcs compris entre le poinct d'attouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC, ADE s'entretouchent en dedans au poinct A, duquel soient menees les deux lignes droictes AB, AC, qui couppent les cercles en B, C, & D, E : Ie dis que tant les arcs BC, DE, que AB, AD : & ACB, AED sont semblables. Car ayant pris les deux poincts F, G, & tiré les lignes droictes, BF, CF, DG, EG ; les deux angles DAE, DGE, seront egaux aux deux angles BAC, BFC, attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy sont egaux à deux droicts par la 22. pr. 3. & partant l'angle commun BAC estant osté, les deux autres angles DGE, BFC demeureront egaux : & par la 10. def. 3. les arcs DE, BC seront semblables. Et d'autant que si on conçoit estre tiree la ligne droicte AC par le centre du cercle, elle tombera en l'attouchement A par la 11. pr. 3. & en la mesme maniere que dessus les arcs DE, BC seront semblables, lesquels estans ostez des demy cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs AD, AB, qui ostez des circonferences entieres, resteront encores les arcs AED, ACB semblables, comme nous auons demonstré au 2. theor. Ce qui estoit proposé.



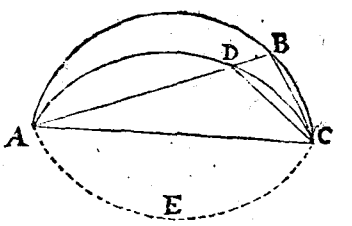
THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC & ADC, sur la la ligne droicte AC, & de mesme costé. Il est euident qu'elles s'entrecoupperont seulement és poincts A & C, puis que par la

10. pr. de

10. pr. ce liure vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts ; & partant la circonference d'vne portion ſera toute de hors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droicte A B couppant les circonferences en D & B, & tirees les deux lignes droictes B C & DC ; par la definition des ſemblables portions, les deux angles ABC & ADC ſeront egaux, ce qui eſt abſurde: car par la 16. prop. 1. l'angle exterieur ADC doit eſtre plus grand que l'oppoſe interieur B. Donc les deux portions ABC & ADC, eſtans ſemblables & inegales, ne ſe pouuoient mettre ſur vne meſme ligne droicte AC, & de meſme part. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

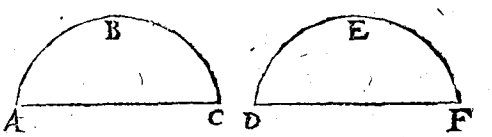
Encore qu'en ceſte 23. prop. & demonſtration d'icelle les portions de cercles ſoient conſtituees de meſme part, ſi eſt-ce toutesfois que la prop. ſera auſsi veritable, ſi leſdites portions ſont poſees de diuerſe part; comme ſont les portions ABC, AEC. Car ſi on conçoit que l'vne d'icelles portions, cõme AEC, ſoit meüe à l'entour de la ligne droicte AC, & vienne à eſtre de meſme part que ABC, il aduiendra touſiours la meſme abſurdité que deſſus, attendu qu'vne portion ne conuiendra point à l'autre, à cauſe de leur inegalité.

Dauantage, il eſt euident, que ce qui eſt dit icy de deux portions conſtituees ſur vne meſme ligne droicte, ſe doit auſsi entendre de celles conſtituees ſur lignes droictes egales: car l'vne d'icelles lignes eſtant ſuperpoſee à l'autre, elle luy conuiendra, & partant les deux portions ſeront lors poſees ſur vne meſme ligne droicte, ainſi que deſſus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles eſtans conſtituees ſur lignes droictes egales, ſont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles ſemblables A B C & D E F conſtituees ſur lignes droictes egales AC, & DF. Ie dis qu'icelles portions ſont egales entr'elles.



Autrement, ſi elles eſtoient inegales, il s'enſuiuroit que deux portions ſemblables & inegales, pourroient eſtre poſees ſur lignes droictes egales, ou bien ſur vne meſme, contre la prop. precedente: donc les deux portions ABC & DEF conſtituees ſur lignes droictes egales, ſeront egales ; Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

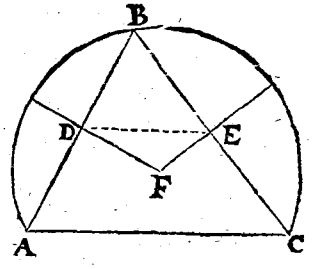
Il eſt aiſé de demonſtrer la conuerſe tant de cette prop. que de la precedente, c'eſt à

ſçauoir que les egaux ſegmens de cercles conſtituez ſur lignes droictes egales, ou ſur vne meſme, ſont ſemblables. Car à cauſe de l'egalité deſdits ſegmens, ou portions de cercles, l'vne conuiendra à l'autre: & partant tous les angles conſtituez en icelles ſont egaux: Parquoy icelles portions ſeront ſemblables. Que ſi quelqu'vn dit que leſdites portions ne conuiennent entr'elles, il faudroit ou que l'vne tombaſt toute hors de l'autre, & elles ne ſeroient egales entr'elles, contre l'hypotheſe; ou bien que la circonference de l'vne couppaſt la circonference de l'autre, & par ainſi vn cercle en coupperoit vn autre à plus de deux poincts, contre la 10. prop. 3.

PROB. 3. PROP. XXV.

La portion d'vn cercle eſtant donnee, deſcrire le cercle duquel elle eſt portion.

Soit vne portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.

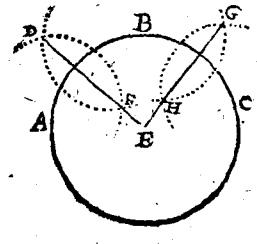


En la circonference d'icelle portion ſoient pris comme on voudra les trois poincts A, B, C, & apres auoir mené les deux lignes droictes A B & B C, & icelles couppees en deux egalement en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux poincts ſoient leuees par la 11. prop. 1. les perpendiculaires D F, & E F, ſe rencontrans au poinct F: (or elles ſe doiuent rencontrer, pource que ſi on menoit vne ligne droicte de D à E, comme D E, ſeroient faicts deux angles E D F, D E F, moindres que deux droicts.) Ie dis que le poinct F eſt le centre cherché.

Car par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre ſera en la ligne DF: Il ſera auſſi en EF: ce ſera donc au poinct F, qui leur eſt commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le ſegment donné ABC eſt portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'eſt differente à celle de la premiere, c'eſt à ſçauoir qu'ayant pris en la circonference les trois poincts A, B, C, il faut des poincts A & B, deſcrire d'vn meſme interualle deux arcs qui s'entrecouppent en D, F, & par iceux mener vne ligne droicte D F E: en apres, des poincts B & C, deſcrire encore d'vn meſme interualle deux autres arcs qui s'entrecouppent en G & H, par leſquels ſoit menee vne ligne droicte G H E, qui couppe la precedente D F en E, qui ſera le centre requis.



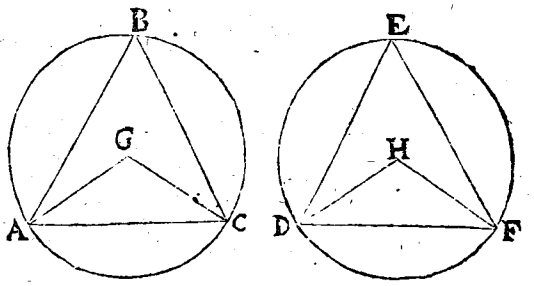
THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circon-

ferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

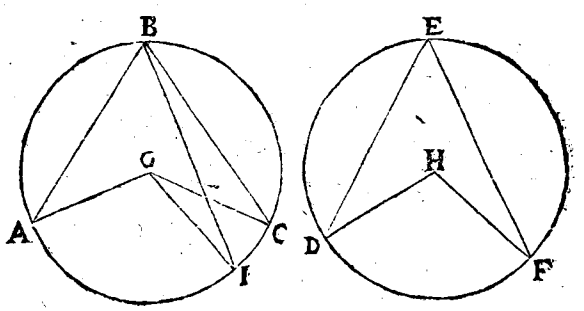
Soient les cercles egaux A B C & D E F, desquels les centres sont G & H, & à iceux soient constituez les angles egaux G, H: Item les angles B, E constituez aux circonferences, soient aussi egaux. Ie dis que les circonferences A C & D F, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.

Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirees du centre à la circonference seront egales par la 1. def. de ce liure. Parquoy ayant tiré les deux lignes droictes A C, D F, les deux triangles A G C & D H F, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H: & par la 4. prop. 1. la base A C sera egale à la base D F. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E, la portion A B C sera semblable à la portion D E F, par la 10. def. de ce liu. & par la 24. prop. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste portions egales, sçauoir A B C & D E F, le demeurant A C sera egal au demeurant D F: ainsi les angles egaux s'appuyeront dessus circonferences egales A C, D F. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Que si les susdits angles estoient inegaux, le plus grand s'appuyeroit sur vn plus grand arc que le moindre. Car aux cercles egaux A B C, D E F, soit l'angle A G C au centre G, plus grand que l'angle D H F au centre H. Item l'angle A B C en la circonference, plus grand que l'angle D E F en la circonference. Ie dis que l'arc A C est plus grand que l'arc D F. Car ayant fait l'angle A G I egal à l'angle D H F, & l'angle A B I egal à l'angle D E F; par ce qui a esté demonstré cy dessus, les arcs A I, D F seront egaux; & partant A C sera plus grand que D F. Or ce qu'Euclide dit des cercles egaux en ceste proposition, & aux trois prochaines suiuantes, se doit aussi entendre d'vn mesme cercle; c'est à dire qu'en vn mesme cercle, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car touſiours la mesme demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux, aura aussi lieu en vn mesme cercle.

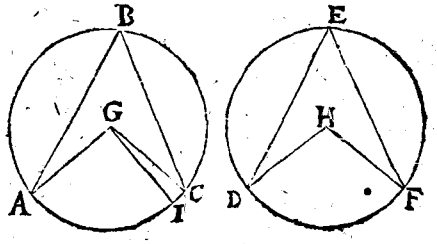


THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ilss'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre : ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHF, seront egaux.

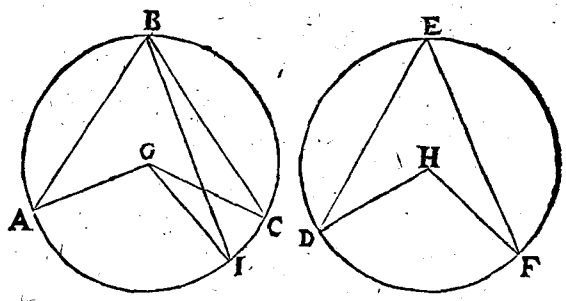
Autrement, l'vn d'iceux angles sera plus grand que l'autre: Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, & par la 23. pr. 1. sur AG soit fait l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales; ce qui est contre nostre hypothese; car nous auons posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales, contre la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal: ce qui estoit proposé.



Or l'egalité des angles du centre estant prouuee, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. proposition de ce liure. Donc aux cercles egaux les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si les arcs estoient inegaux, l'angle insistant sur le plus grand arc seroit plus grand que celuy du moindre. Comme en la figure du scholie precedent, soit l'arc AC plus grand que l'arc DF : Ie dis que l'angle AGC est plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC, plus grand que l'angle DEF. Car ayant faict l'arc AI egal à l'arc DF, & tiré les lignes droictes GI, BI; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront egaux, comme il a esté demonstré cy dessus : & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

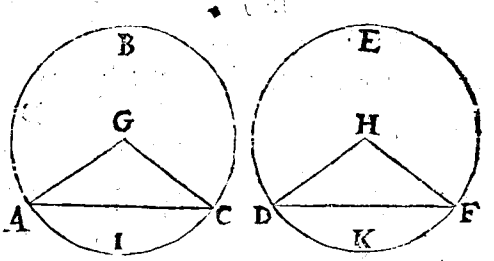


THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

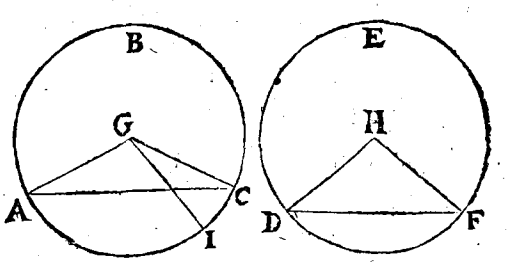
Soient deux cercles egaux A B C & D E F, deſquels les centres ſont G & H, & dans ces cercles ſoient deux lignes droictes egales AC & DF: Ie dis que les circonferences qu'elles couppent, ſont egales, ſçauoir la petite A I C à la petite D K F, & la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne ſoit ainſi; des centres G & H, ſoient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui ſeront egales par la 1. def. de ce liure, eſtans les cercles egaux; & la ligne droicte A C eſtant egale à la ligne droicte D F, les deux triangles A G C & D H F, auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien: & par la 8. pr. 1. l'angle G ſera egal à l'angle H, & par la 26. p. de ce liu. ils s'appuyeront deſſus circonferences egales AIC, DKF; & qui de cercles egaux oſte icelles circonferences egales, reſteront les circonferences ABC, DEF, auſſi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Que ſi les lignes droictes eſtoient inegales, la plus grande prendroit aux ſegmens mineurs vne plus grande circonference que la moindre: mais vne moindre aux ſegmens maieurs. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoit la ligne droicte AC, plus grande que la ligne droicte DF: Ie dis que la circonference AC moindre que le demy cercle, eſt plus grande que la circonference DF: & que la circonference ABC eſt moindre que la periphere DEF. Car eſtans tirees les lignes droictes AG, GC, DH & HF: les coſtez AG, GC du triangle AGC, ſeront egaux aux coſtez DH, HF du triangle DHF: & la baſe AC eſt poſee plus grande que la baſe DF: Donc l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy ſoit faict l'angle AGI egal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. p. 3. l'arc AI ſera egal à l'arc DF, & partant la circonference AIC ſera plus grande que la circonference DF, & conſequemment le reſte ABC ſera moindre que le reſte DEF.

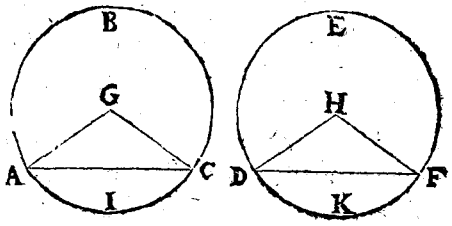


THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, souſtendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC & DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences ABC, DEF egales : item les circonferences AIC, DKF auſſi egales & ſouſtenduës des lignes droictes A C & D F. Ie dis qu'icelles lignes ſouſtendantes ſont egales.

Qu'ainſi ne ſoit ; des centres G & H ſoient menees les lignes droictes G A, GC, H D, HF Or d'autant que l'on poſe les circonferences A I C, D KF egales, les angles G & H qui s'appuyent deſſus icelles circonferences, ſeront egaux par la 27. pro. de ce liure : pareillement les coſtez G A & G C, eſtans egaux aux coſtez HD & HF par la 1. d. 3. la baſe AC ſera egale à la baſe DF par la 4. propoſ. 1. Donc aux cercles egaux les circonferences, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



SCHOLIE.

Mais ſi les circonferences eſtoient inegales, la plus grande ſeroit ſouſtendue d'vne plus grande ligne que la moindre, leſdites circonferences eſtans moindres que le demy cercle : Car ſi elles eſtoient plus grandes, la moindre d'icelles circonf. ſeroit ſouſtendue d'vne plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences AC, DF, chacune moindre que le demy cercle, & ſoit AC plus grande que D F, & partant ABC moindre que DEF : Ie dis que la ligne droicte AC eſt plus grande que la ligne droicte DF. Car eſtans tirees les lignes droictes AG, GC, DH, & HF, l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par le ſcholie de la 27. prop. de ce liure ; & puis que les coſtez AG, GC, du triangle AGC ſont egaux aux coſtez DH, HF du triangle DHF, par la 24. prop. 1. la baſe AC ſera plus grande que la baſe DF.

Clauius, apres Commandin, demonſtre en ce lieu les quatre Theoremes ſuiuants.

1. Les cercles, deſquels les lignes droictes egales retranchent ſemblables circonferences, ſont egaux.

Soient deux cercles ABC, DEF, *deſquels les lignes droictes egales* AC, DF, *couppent ſemblables circonferences* ABC, DEF : *Ie dis qu'iceux cercles ſont egaux. Car ſi les ſegmens* ABC, DEF *ſont ſemblables, les ſegmens reſtans* AIC, DKF, *ſeront auſſi ſemblables, cõme nous auons demonſtré au ſcholie de la 22. prop. de ce liure.* Derechef, *pour ce que ſur les lignes droictes egales* AC, DF, *ſont conſtituez les ſemblables ſegmens* ABC, DEF, *ils ſeront egaux par la 24. p. 3. Par meſme raiſon ſeront auſſi egaux les ſemblables ſegmens* AIC, DKF. Donc *les cercles entiers* ABC, DEF, *ſeront egaux : Ce qui eſtoit propoſé.*

2. Des cercles inegaux, les lignes droictes egales couppent circonferences diſſemblables.

En la meſme figure precedente les lignes droictes AC, DF *ſoient poſees egales, & les cercles* ABC, DEF, *inegaux. Ie dis que les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Car ſi elles eſtoient ſemblables, les cercles ſeroient egaux, comme nous auons demonſtré cy-deſſus, contre l'hypotheſe. Donc les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Par meſme raiſon les circonferences* AIC, DKF, *ſeront auſſi diſſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

3. Les lignes droictes, qui prennent circonferences ſemblables de cercles inegaux, ſont inegales.

En la meſme figure ſoient poſez les cercles inegaux, & les circonferences ABC, DEF ſemblables: Ie dis que les lignes droictes AC, DF ſont inegales. Car ſi elles eſtoient egales, les cercles ſeroient egaux par le 1. *Theor. cy-deſſus, contre l'hypoth. icelles lignes droictes AC, DF, ſont donc inegales.*

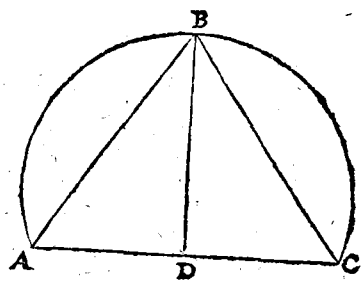
4. Les lignes droictes, qui de quelconques cercles prennent circonferences ſemblables & inegales, ſont inegales.

En la meſme figure, ſoient poſez les circonferences ABC, DEF ſemblables & inegales. Ie dis que les lignes droictes AC, DF ſont inegales. Car les cercles ſont ou egaux, ou inegaux: Soient premierement egaux. Si donc les lignes droictes AC, DF, ſont dictes egales, par la 28. *prop.* 3. *les circonferences ABC, DEF, ſeront egales: ce qui eſt contre l'hypoth. Icelles lignes droictes AC, DF, ne ſont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droictes AC, DF, eſtans les circonferences ABC, DEF, ſemblables, ſeront inegales, comme il a eſté demonſtré au precedent Theor. En la meſme maniere nous demonſtrerons les lignes droictes AC, DF eſtre inegales, ſi les circonferences AIC, DKF, ſont poſees ſemblables & inegales.*

PROB. 4. PROP. XXX.

Coupper vne circonference donnée en deux egalement.

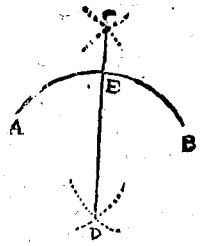
Soit la circonference donnée ABC, laquelle il faut couper en deux egalement.



Soit menee la ligne droicte AC, laquelle ſoit couppee en deux egalement au poinct D, duquel poinct ſoit eſleuee la perpendiculaire DB par la 11. prop. 1. qui rencontre la circonference en B. Ie dis que la circonference ABC eſt couppee en deux également en B.

Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menees les lignes droictes AB & BC. D'autant que les deux coſtez AD & DB du triangle ADB, ſont egaux aux deux coſtez CD & DB du triangle CDB, chacun au ſien, & les deux angles au poinct D egaux: par la 4. p. 1. la baſe AB ſera egale à la baſe BC, & par la 28. prop. de ce liure les circonferences AB & BC ſeront egales. Nous auons donc couppé la circonference donnee en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

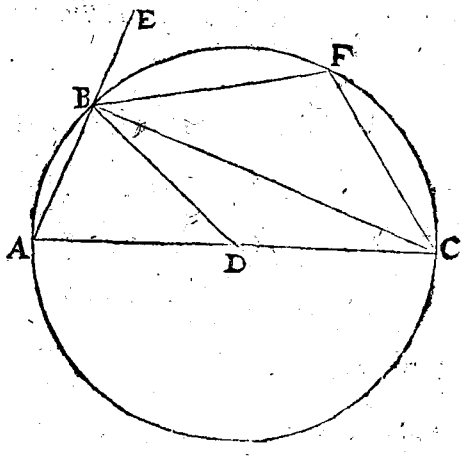


La practique de ceste proposition est fort aisee, car il n'y a qu'à descrire deux arcs de cercles de chaque extremité de la circonferenee donnée A & B, qui s'entrecouppent és poincts C & D, desquels poincts estant menee vne ligne droicte CD, elle couppera la circonference donnée A B en deux egalement au poinct E.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droict: & celuy qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'vn droict; mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'vn droict. Et d'auantage, l'angle de la plus grande portion, est plus grand qu'vn droict: mais l'angle de la plus petite portion est moindre qu'vn droict.

Au cercle ABC, duquel D est le centre, & AC le diametre, soit constitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC; & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC: mais en la moindre portion BFC, l'angle CFB. Ie dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, est droict.



Car apres auoir mené la ligne BD, & continué AB iusques en E: il est euident que les triangles ABD & CBD sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçauoir BAD à ABD, & CBD à BCD: & partant les deux ensemble ABD, CBD, seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au poinct B, faisant le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE, seront deux droicts.

Ie dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est en la plus grande portion CAB, est plus petit qu'vn droict: ce qui est aisé à prouuer par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC, l'angle ABC, estant droict, les deux autres ensemble ne vaudront qu'vn droict: & partant le seul angle BAC est plus petit qu'vn angle droict, & ainsi des autres.

Ie dis tiercement, que l'angle BFC, qui est en la petite portion CFB, est plus grand qu'vn droict: car par la 22. p. de ce liure la figure de quatre costez ABFC inscrite au cercle, a les deux angles opposez A & F, egaux à deux droicts.

droicts. Mais nous auons prouué A estre plus petit qu'vn droict, par consequent F sera plus grand.

Ie dis en quatriesme lieu, que l'angle de la plus grande portion, sçauoir CBA, compris de la ligne droicte BC, & de la periphere BAC, est plus grand qu'vn angle droict: ce qui est euident; car l'angle droict rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finalement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droicte BC & de la circonference BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF est moindre qu'vn droict, car iceluy n'est que partie de l'angle droict CBE. Donc au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droict, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ce que dessus, est manifeste qu'vn angle d'vn triangle estant egal aux deux autres, est droict.

SCHOLIE.

La conuerse de cette prop. est manifestement vraye, c'est à sçauoir, que

Le segment de cercle, auquel est constitué vnangle droict, est demy cercle; & celuy auquel est vn angle aigu, est segment maieur: mais celuy auquel est vn angle obtus, est segment mineur: Et le segment duquel l'angle est plus grand qu'vn droict est plus grand que le demy cercle; mais celuy duquel l'angle est moindre que le droict, est ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

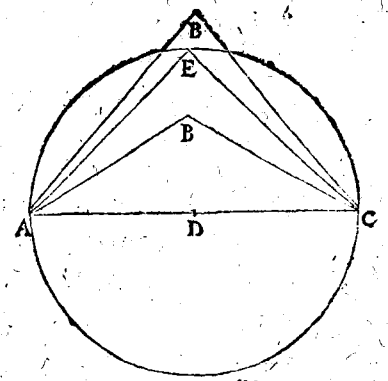
Car l'angle estant droict, si le segment n'est pas vn demy cercle, il sera ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu; ou moindre, & ainsi l'angle sera obtus: contre l'hypothese. Derechef, l'angle estant aigu, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droict: ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera obtus: Ce qui est aussi contre l'hypothese. Finalement, l'angle estant obtus, si le segment n'est moindre que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droict; ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu: Ce qui est semblablement contre l'hypothese. Dauantage, quand l'angle du segment est plus grand qu'vn droict, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle d'iceluy sera moindre qu'vn droict, contre la position. Et quand l'angle du segment est moindre qu'vn droict, si le segment n'est pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il sera plus grand, & par ainsi l'angle d'iceluy sera pareillement plus grand que le droict: Ce qui est contre l'hypothese.

Clauius demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

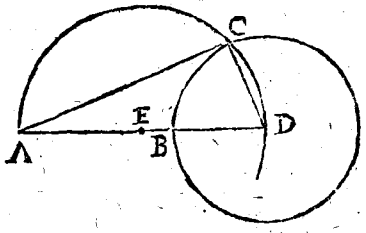
Si le costé opposé a l'angle droict d'vn triangle rectangle est couppé en deux egalement, & du poinct de la section est descrit vn cercle de l'interualle de la moitié d'iceluy costé; iceluy cercle passera par l'angle droict du triangle.

Au triangle rectangle ABC, le costé AC opposé à l'angle droict B, soit couppé en deux egalement au poinct D, duquel & de l'interualle DA, ou DC, soit descrit le cercle AEC, lequel ie dis passer par B. Car s'il passoit au dessus de B, ou au dessoubs, estans

tirees les lignes droictes AE, CE, tellement qu'elles ne couppent les lignes droictes AB, BC, ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle AEC au demy cercle sera droict par la 31. p. 3. & consequemment les angles B & E seront egaux, estans droicts: ce qui est absurde, veu que l'angle E par la 21. prop. 1. est necessairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B. Le cercle AEC passera donc par le poinct de l'angle droict B. Ce qui estoit proposé.



Or de la demonstration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons vn facile moyen pour d'vn poinct donné hors vn cercle mener vne, ou deux lignes droictes qui touchent iceluy cercle, ce qui se fait ainsi. Soit donné le poinct A hors du cercle BC, le centre duquel est D: & il faut mener de A vne ligne droicte, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne AD, soit couppee icelle en deux egalement en E par la 10. p. 1. & de E comme centre, & de l'interualle EA soit descrit vn cercle ACD qui couppe le donné en C, auquel poinct C soit menee la ligne droicte AC, & icelle touchera le cercle donné en C. Car estant tiree la ligne droicte CD, l'angle ACD au demy cercle sera droict par ladite 31. pr. 3. & partant la ligne droicte AC, touchera le cercle BC en C par le Cor. de la 16. p. 3. Et si du mesme poinct A, on vouloit encore tirer vne autre ligne qui touche semblablement ledit cercle BC, il n'y auroit qu'à descrire le cercle entier ACD, & il coupperoit encore la circonference BC à vn autre poinct au dessoubs de AD, &c.

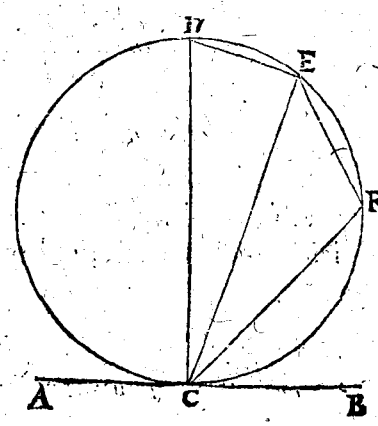


THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine vne autre ligne droicte coupant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct C, & d'iceluy poinct soit menee la ligne droicte CE, couppant le cercle en deux portions CDE, CFE. Ie dis que l'angle ECB, est egal à tout angle qui peut estre fait en la portion alterne CDE, & que l'angle ECA est aussi egal à tout angle qui peut estre fait en la portion alrerne CFE.

Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diametre CD, soient menees les lignes droictes DE, EF, FC. Maintenant par la prop. precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droict, & par la 32. p. 1. les deux autres D &



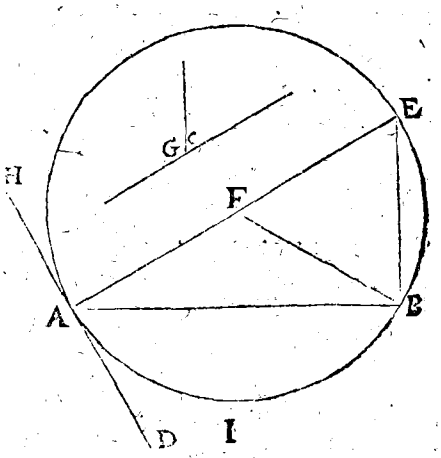
ECD ſont egaux à vn droict, c'eſt à dire à DCB, lequel eſt droict par la 18. prop. de ce liure, deſquels ſi on oſte l'angle commun ECD, le demeurant ECB ſera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre coſtez inſcrite au cercle CFED, aura les angles oppoſez F & D, egaux à deux droicts: c'eſt à dire aux deux ECA, ECB, deſquels ſi on oſte choſes egales, c'eſt à ſçauoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA ſeront egaux.

Que ſi la ligne couppant le cercle eſtoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui ſe feroient tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle, ſeroient droicts par la prop. prec. & partant appert ce qui eſt propoſé. Si donc quelque ligne droicte touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Deſſus vne ligne droicte donnee, deſcrire vne portion de cercle capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C: il faut ſur icelle ligne deſcrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.



Soit conſtruit ſur icelle ligne AB. & à l'extremité A, l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. prop. 1. & au poinct A ſoit leuee AE perpendiculaire à AD; puis ſur la ligne AB, & au poinct B, ſoit faict l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF iuſques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au poinct F: donc par la 6. p. 1. les coſtez FA, FB, ſeront egaux: Partant le cercle deſcrit du centre F & de l'interuale FA, paſſera auſſi par le poinct B; & apres auoir mené la ligne droicte BE, ie dis que l'angle E, qui eſt en la portion AEB eſt egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droicte AE paſſe par le centre F, & qu'à icelle AE, la ligne DA eſt perpendiculaire; par le Corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A. Par quoy par la preced. prop. l'angle BAD, qui par la conſtruction eſt egal à l'angle C, ſera egal à l'angle E, deſcrit dans la portion alterne AEB; par conſequent iceluy angle E ſera egal à l'angle C: Nous auons donc deſcrit vne portion de cercle ſur la ligne donnee AB, capable d'vn angle egal à vn angle donné C.

Que ſi l'angle donné euſt eſté obtus, comme G, il euſt fallu conſtruire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme deſſus, pour deſcrire le cercle AEBI, & par la prop. precedente la portion mineure AIB euſt compris vn angle egal à l'angle donné G.

Que ſi l'angle donné euſt eſté droict, il n'euſt fallu que deſcrire vn demy

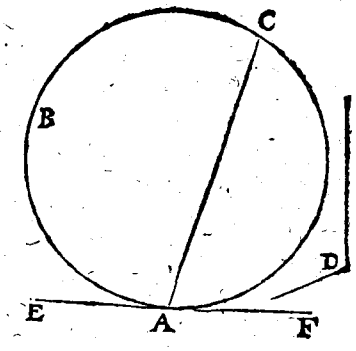
cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle faict au demy cercle est droict par la 31. p. 3. Or nous auons donc construit sur la ligne donnée AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 6. PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne portion capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC; duquel il faut oster vne portion capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

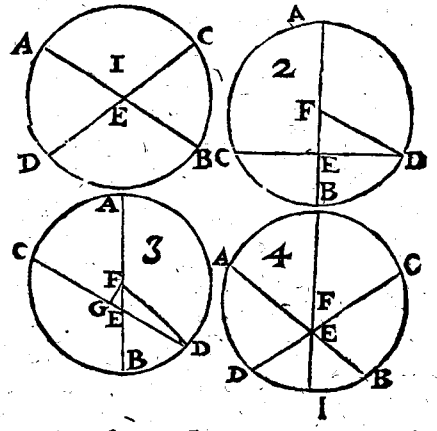
Soit menee la ligne droicte E F touchant le cercle en A: puis par la 23. prop. 1. soit faict sur icelle ligne, & au poinct A, l'angle rectilgne FAC egal au donné D, faisant que la ligne droicte AC coupe le cercle en deux portions. Ie dis que tout angle qui sera fait en la portion alterne ABC sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. pr. de ce liure, lequel est egal à D par la construction. Nous auons donc du cercle donné ABC couppé vne portion &c. Ce qu'il falloit faire.



THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle, deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre; le rectangle contenu des deux parties de l'vne, est egal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droictes A B, C D dans le cercle ACBD, s'entrecoupans en E. Ie dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est egal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.



Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & diuise D C en deux egalement, comme en la seconde figure, elle la diuisera aussi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD, il est euident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est couppee en deux egalement au poinct F,

& en deux inegalement en E) & pa la 47. prop. 1. le quarré de FD eſtant egal aux deux quarrez de FE & ED, en oſtant le quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, ſe trouuera egal au quarré de ED, c'eſt à dire au rectangle de CE & ED, puis que CD eſt couppee en deux egalement en E.

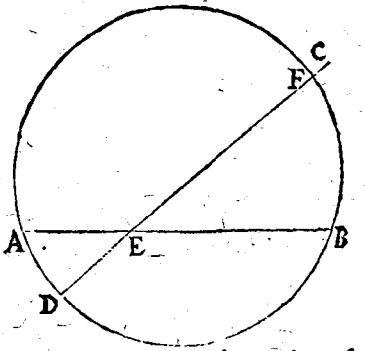
Que ſi la ligne AB paſſant par le centre F (comme en la troiſieſme figure) diuiſe inegalement CD, ne paſſant point par le centre, il s'enſuiura la meſme choſe. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD: pourautant que AB eſt couppee en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, auec le quarré de EF, ſera egal au quarré de FB, ou de ſon egale FD par la 5. prop 2. Mais le quarré de FE eſt egal aux deux de FG & GE par la 47 pr. 1. Pareillement le quarré de FD, eſt egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. 1. Dohc auſſi le rectangle de AE & EB, auec les deux quarrez de FG & G E, ſera egal aux deux quarrez de FG & GD: & partant en oſtant le quarré commun de FG, le demeurant quarré de GD, ſera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le meſme quarré de GD eſt auſſi egal au rectangle de CE & ED, auec le quarré de GE; par la 5. prop. 2. puis que CD eſt couppee en deux egalement en G, par la perpend. FG & en deux inegalement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED auec le quarré de GE ſera egal au rectangle de AE & EB auec le quarré de GE: en oſtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, ſe trouuera egal au rectangle de CE & ED.

Que ſi ny l'vne ny l'autre des deux lignes ne paſſe par le céntre F, (comme en la 4. figure) il s'enſuiura le meſme: car ſi on meine le diametre HI, paſſant par le poinct commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, ſera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-deſſus a eſté dit; & par meſme raiſon il ſera auſſi egal au rectangle de AE & EB; & par la 1. com. ſent. les deux rectangles de AE, EB; item de CE, ED, ſeront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons cette 35. prop. ainſi.

Si deux lignes droictes s'entrecouppent, tellement que le rectangle compris des ſegmens de l'vne ſoit egal au rectangle contenu ſous les ſegmens de l'autre, le cercle deſcrit par trois des poincts extremes d'icelles lignes quels qu'ils ſoient, paſſera auſſi par le 4. poinct.



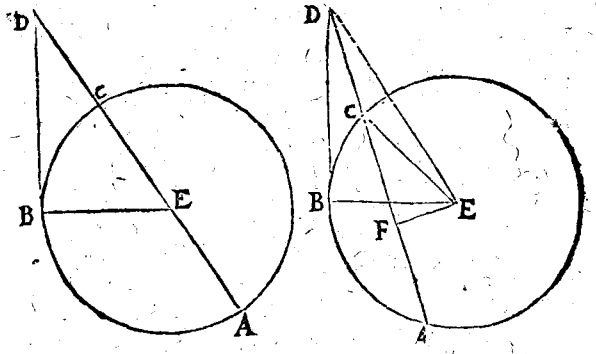
Que les lignes droictes AB, CD s'entrecouppent en E, & que le rectangle compris ſous AE, EB ſoit egal au rectangle compris des parties CE, ED. Ie dis que les quatre poincts A, D, B, C, tombent en la circonference d'vn cercle, c'eſt à dire qu'eſtant deſcrit vn cercle paſſant par les trois poincts A, D, B, il paſſera neceſſairement par l'autre poinct C. Car s'il n'y paſſe, il paſſera, ou au delà de C, ou au deçà, comme par le poinct F. D'autant que par la 35. prop. 3. le rectangle compris ſous FE, ED eſt egal au rectangle compris de AE, EB, & que le rectangle contenu ſous CE, ED eſt auſſi poſé egal au meſme rectangle de AE, EB; les rectan-

gles compris sous CE, ED, & sous FE, ED, seront egaux, la partie au tout : ce qui est absurde. Par mesme raison le cercle ne passera pas au delà du poinct C. Donc le cercle descrit par les trois poincts A, D, B, passera par le quatriesme poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la couppante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, duquel soit menee la ligne DA, coupant le cercle en C, & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Ie dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD, prise entre le poinct donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.



Premierement que la ligne AD, passe par le cente E, comme en la premiere figure, & d'iceluy centre E au poinct d'attouchement B, soit menee la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce liure sera perpendiculaire à icelle touchante BD: & pourautant que la ligne AC est couppee en deux egalement au poinct E, & à icelle est adioustee directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD auec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de ED par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrer en ceste sorte : du centre E soient menees les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle couppera AC en deux egalement par la 3. prop. de ce liure. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, auec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on adiouste le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, auec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend

quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'vn poinct pris hors le cercle, sont tirees plusieurs lignes droictes, coupant le cercle ; les rectangles compris sous chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'eux : pource que chacun de ces rectangles-là, sera egal au quarré de la ligne touchante.

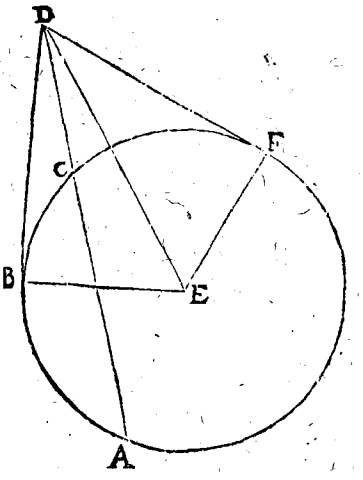
Appert aussi que deux lignes droictes tirees d'vn mesme poinct, & touchant le cercle, sont egales entr'elles : puis que le quarré de chacune d'icelles sera egal au rectangle de la ligne tiree du mesme poinct, & couppant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

Est aussi euident que d'vn mesme poinct pris hors le cercle, peuuent estre seulement tirees deux lignes droictes qui touchent le cercle : Car il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles : & partant du poinct D pourroient estre menees plus de deux lignes droictes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. prop. de ce troisiesme liure.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre l'atteint : Si le rectangle compris de toute la couppante, & de la partie prise entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de celle qui atteint ; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, & d'iceluy soit menee la ligne droicte DA qui couppe le cercle au poinct C, & la ligne DB qui atteint le cercle au poinct B : & soit le rectangle de la toute AD & de la partie CD, egal au quarré de DB. Ie dis que DB touche le cercle en B.



Car du poinct D, estant menee la ligne DF touchant le cercle au poinct F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition precedente, le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle : & partant les quarrez, & les lignes DF & BD, seront egales. Item EF & EB, sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme : ainsi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, les angles B & F, seront egaux par la 8. p. 1. & F estant droict par la 18. prop. de ce liure, aussi B sera droict ; & par le Cor. de la 16. prop 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin du troisiesme Element.

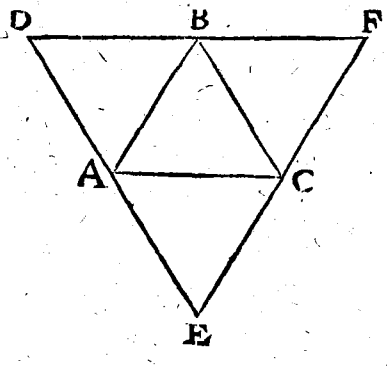
ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

VNe figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'vn chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement aussi vne figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chacun costé de la circonscrite touche vn chacun angle de l'inscrite.

Ainsi le triangle ABC, duquel chaque angle touche vn chacun costé du triangle DEF est dit estre inscrit en iceluy triangle DEF. Et au contraire, à cause que chaque costé d'iceluy triangle DEF touche chaque angle du triangle ABC, il est dit estre circonscrit à iceluy triangle ABC.



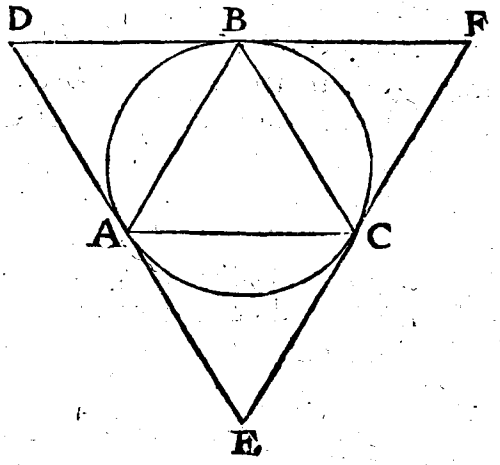
Il faut entendre le mesme des inscriptions & circonscriptions des autres figures rectilignes: & iaçoit qu'elles soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costés de l'inscrite est egal au nombre des costez de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal: si est-ce toutesfois qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire vn quarré, vn pentagone, &c. dedans vn triangle, &c.

3. Mais vne figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4. Et

4. Et vne figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle ABC sera dit estre inscrit au cercle ABC, à cause que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF sera dit estre circonscrit au cercle ABC, pource que chaque costé d'iceluy triangle DEF touche la circonference dudit cercle ez poincts ABC.



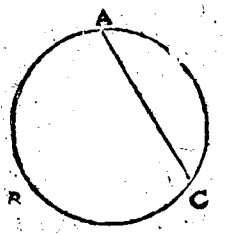
5. Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit estre circonscrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est descrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC est dit estre inscrit au triangle DEF, à cause qu'il touche chaque costé d'iceluy triangle és poincts A, B, C: mais le mesme cercle ABC est dit estre circonscrit au triangle ABC, pour ce qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodee au cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

Ainsi la ligne droicte AC sera dicte estre accommodee au cercle ABC, à cause que les extremitez d'icelle ligne AC sont en la circonference dudit cercle.



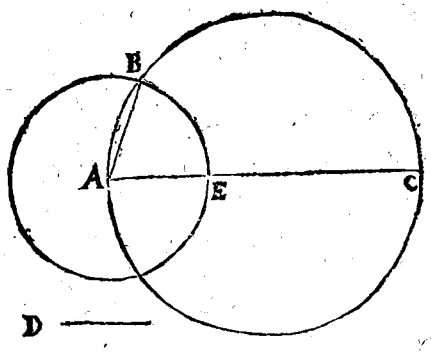
PROBL. 1. PROP. 1.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à

vne ligne droicte donnee, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnee D, qui n'est pas plus grande que le diametre d'iceluy cercle.

Soit mené le diametre AC, & si la ligne donnee est egale à iceluy diametre, on aura accommodé au cercle ABC la ligne AC egale à la donnee D. Mais si D est moindre que le diametre AC, d'iceluy soit retranchee la partie AE egale à ladite ligne D. En apres du centre A, & de l'interuale AE soit descrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & soit menee la ligne droicte AB: icelle sera accommodee au cercle, & egale à D.



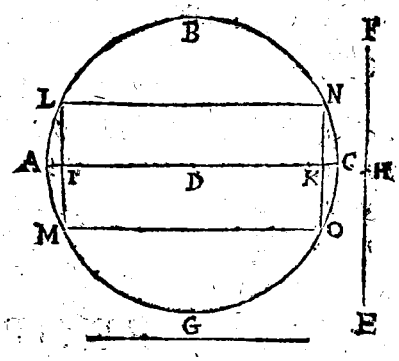
Car les extremitez d'icelle AB sont en la circonference du cercle ABC, estant menee de l'extremité du diametre A au poinct de l'intersection B. Mais par la def. du cercle les lignes droictes AB & AE sont egales, & par la construction, icelle AE est egale à D: donc par la 1. com. sent. AB & D seront egales entr'elles. Nous auons donc accommodé au cercle donné vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en cet endroit le probl. suiuant

En vn cercle donné accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, qui ne soit pas plus grande que le diametre du cercle, & parallele à vne autre ligne droicte donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre est D, auquel il faut accommoder vne ligne droicte egale à vne donnee EF, qui n'est pas plus grande que le diametre du cercle, & laquelle soit parallele à la ligne droicte donnee G. Par le centre D soit tiré le diametre ADC parallele à la ligne donnee G. Que si EF est egale au diametre AC, sera fait ce qui estoit requis: Mais si elle n'est egale à iceluy diametre, soit icelle couppee en deux egalement au poinct H, & soit prise DI egale à EH, & DK egale à HF, afin que la toute IK soit egale à la toute EF: puis par les poinctes I, K, soient tirees à angles droicts LM, NO, & soit ioinct MO: Icelle MO accommodee au cercle sera egale à EF, & parallele à G. Car puis que LM, NO sont egalement distantes du centre D, elles seront egales entr'elles par la 14. p. 3. & par la 3 prop. 3. elles seront couppees en deux egalement en I & K, estans couppees à angles droicts par le diametre AC; & partant IM, KO sont egales entr'elles; & pource qu'elles

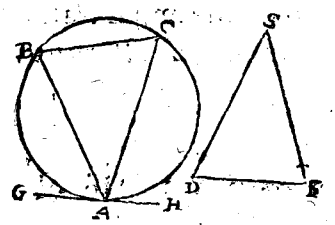


ſont auſſi paralleles par la 28. p. 1. ſemblablement IK, MO ſeront egales & paralleles par la 33. p. 1. Parquoy veu que IK eſt egale à EF & parallele à G, auſſi MO ſera egale à icelle EF, & parallele à G par la 30. p. 1. Par meſme raiſon, ſi on tire LN, elle ſera egale à EF, & parallele à G. Donc au cercle ABC, eſt accommodee la ligne droicte MO, ou LN, egale à EF & parallele à G. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné, inſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inſcrire vn triangle equiangle au donné DSF.



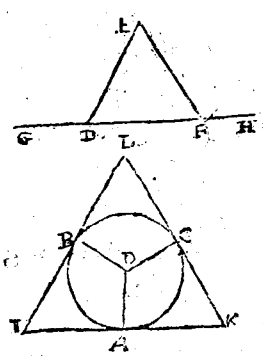
Soit menee la ligne droicte GH, qui touche le cercle au poinct A, auquel poinct ſoient faicts les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, iuſques à ce qu'elles rencontrent la circonference en B & C: puis ſoit menee BC. Ie dis que le triangle inſcrit ABC eſt equiangle au donné DSF.

Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le couppe en deux portions, l'angle C en la portion BCA ſera egal à l'angle de l'attouchement GAB, & par conſequent à l'angle D ſon egal par la 32. p. 3. & par la meſme raiſon, la ligne AC couppant le cercle, l'angle B ſera auſſi egal à l'angle E, & par la 32. p. 1. le troiſieſme angle A ſera auſſi egal à l'angle S: & par conſequent les triangles DSF, BAC ſeront equiangles. Au cercle donné nous auons donc deſcrit vn triangle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

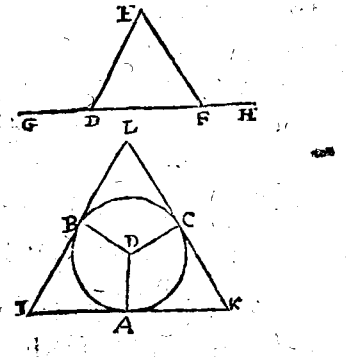
Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.



Soit prolongé le coſté DF de part & d'autre iuſques en G & H, & du centre D ſoit menee comme on voudra la ligne DA, ſur laquelle & au poinct D, ſoient conſtruits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, ſoient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, leſquelles toucheront le cercle és poincts A, B, C, par le Conol. de la 16. p. 3. & icelles ſe rencontrans aux trois poincts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis eſtre le triangle demandé.

Car il appert deſia qu'il eſt circonſcrit au cercle; puis que tous les coſtez

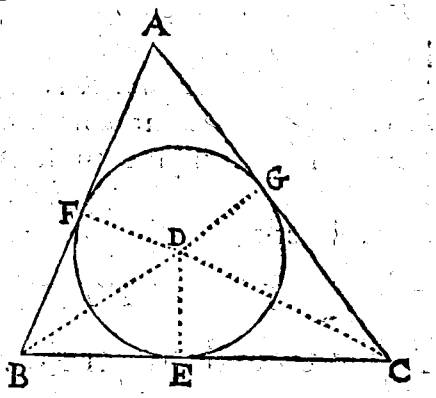
d'iceluy le touchent és poincts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1.) le trapeze A D B I aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. pr. 1. & par la construction ADB est egal à GDE : donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisiesme L sera egal au troisiesme E : ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF: Parquoy nous auons fait ce qui estoit requis.



PROB. 4. PROP. IV.

Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn cercle. Par la 9. pr. 1. les deux angles B & C soient couppez en deux egalement par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au poinct D : Item d'iceluy poinct de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & du centre D, & interualle DE soit descrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné A B C.



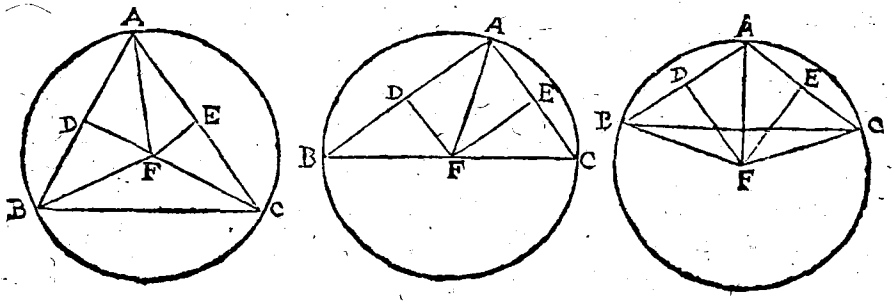
Car d'autant que l'angle DEB est droict, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillement droict, & le total B estant couppé en deux egalement, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egale à DE, & par la 1. com. sent. les trois lignes D E, DF, DG, seront egales entr'elles : ainsi le cercle EFG descrit de l'interualle DE, le sera aussi de l'interualle des deux autres : & partant il passera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Cor. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement les deux costez AB & AC aux poincts D & E par la 10, p. 1. & par la 11. pr. 1. d'iceux poincts D & E, soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au poinct F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle: & apres auoir mené les trois



lignes FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les costez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au poinct D egaux pour estre droicts: donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi egales: & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales entr'elles: & partant le cercle descrit de F, & de l'interuale FA, passera aussi par les poincts B & C. Nous auons donc descrit vn cercle à l'entour du triangle donné ABC: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus: car ils sont tous en vne grande portion de cercle: mais s'il tombe en l'vn des costez, l'angle opposé à iceluy sera droict, attendu qu'il sera au demy cercle: si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est euident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy: mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict: & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

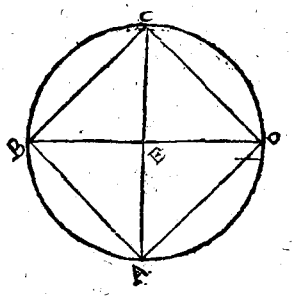
On peut aussi colliger de ce Probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droicte: car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel il faudra descrire vn cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Cecy se practique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie practique, Probl. 21.

PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres A C & B D se couppans au centre E en angles droicts, & soient menees les quatre lignes droictes AB, BC, DC & DA. Ie dis que le quadrilatere ABCD est vn quarré inscrit au cercle donné.



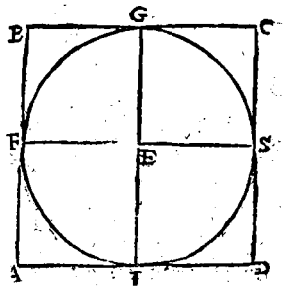
Car d'autant que les quatre angles au poinct E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs ausquels ils insistent seront egaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droictes qui soustendent iceux arcs seront aussi egales par la 29. p. 3 donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront egaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droicts, chcun d'iceux estant au demy cercle : donc le quadrilatere ABCD est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'vn cercle donné descrire vn quarré.

Soit le cercle donné FGSI à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres FS & GI se coupans à angles droicts au centre E, & par la 31. p. 1. des poincts G & I, soient menees les deux lig. B C, AD paralleles au diametre FS : Item par les poincts F & S; soient aussi menees les deux lignes AB, D C paralleles à G I : & icelles quatre lignes paralleles se rencontrans aux poincts A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est euident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre costez seront egaux, chacun d'iceux estant egal à l'vn des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34. prop. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinct E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du poinct E estant droict, aussi chacun des quatre A, B, C, D, sera droict; & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'vn cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B CD, (en la fig. prec.) dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement les quatre costez du quarré aux poincts F, G, S, I; & apres auoir mené les deux lignes F S & G I s'entrecouppans au poinct E, d'iceluy poinct E, & de l'interualle EF, soit descrit vn cercle FGSI, lequel sera le demandé.

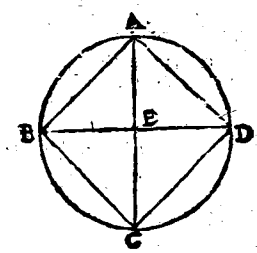
Car d'autant que AD, BC sont egales & paralleles, leurs moitiez AI, BG seront aussi egales & paralleles, & par la 33. prop. 1. A B sera egale & parallele à I G. Semblablement C D sera egale & parallele à la mesme I G: & par mesmes raisons on demonstrera que AD, B C sont egales & paralleles à FS. Donc le quarré donné sera aussi diuisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez esgaux: ainsi AF & IE seront egaux; Item FE & AI; FB & EG; ID & ES: mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egales entr'elles; partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du poinct E, & de l'interuale de l'vne d'icelles, comme EF, passera aussi par les poincts G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auons donc descrit vn cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il failloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient menees les deux diagonales A C & B D, s'entrecoupans au poinct E: puis du centre E, & de l'interuale EA, soit descrit le cerle ADCB. Ie dis qu'il sera le demandé, c'est a dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné ABCD.

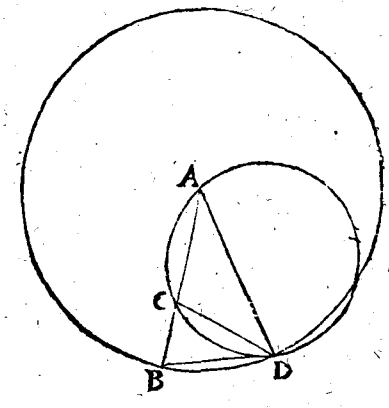


Car le costé A B estant egal au costé AD, le triangle BAD sera Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB, sur la base BD seront egaux, & chacun demy droict par la 32. prop. 1. estant l'angle BAD droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstrerons que tous les autres angles des poincts A, B, C, D, seront aussi demy droicts: & partant egaux entr'eux: ainsi au triangle AED les deux angles E AD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droictes E A, ED, aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours E D sera egale à EC, & EC à EB; comme aussi E B à E A: & partant les quatre lignes droictes E A, ED, EC & EB, seront egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du centre E, & de l'interualle de l'vne d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné A B C D. Nous auons donc d'escrit vn cercle à l'entour d'vn quarré donné: ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Isoscelle, ayant vn chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit prise quelconque ligne droicte AB, laquelle par la 11.p. 2. soit couppee en C, en sorte que le rectangle compris de AB, BC, soit egal au quarré de AC: puis du centre A, & de l'interualle AB soit descrit vn cercle, dans lequel soit accommodee la ligne droicte BD egale à AC: & apres soit menée la ligne AD. Ie dis que ABD est vn triangle Isoscelle ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainsi qu'il estoit requis.



Car en premier lieu, il appert assez qu'iceluy triangle ABD est Isoscelle, puis que les deux costez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD: & apres auoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, soit descrit le cercle ACD par la 5 p. 4. D'autant que par la construction le rectangle de AB & BC est egal au quarré de CA, ou de son egale DB; par la 37. pr. 3. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB sera egal à l'angle A, qui est au segment alterne CAD: & si à iceux angles on adiouste le commun ADC, les touts seront egaux; sçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, est aussi egal aux deux opposez interieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou à ABD, qui luy est egal par la 5. p. 1. puis que le triangle est Isoscele: & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé CD egal à DB: partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. prop. 1. & l'angle exterieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A; aussi sera son egal B, & partant aussi son autre egal ADB. Nous auons donc construict le triangle Isoscele ABD, ayant chacun des angles de dessus la base BD double du troisiesme: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle A B D, sont egaux à deux droicts, c'est à dire à cinq cinquiesmes de deux droicts: Il est euident que l'angle A est la cinquiesme partie de deux droicts, & chacun des autres B & D, les deux cinquiesmes parties: item A estre les deux quints d'vn droict; & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois sont egaux à deux droicts, c'est à dire à dix quints d'vn droict.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit construire vn triangle Isoscele, ayant vn chacun des angles de dessus la base, non seulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais aussi selon quelconque raison donnee, nous l'auons enseigné (apres Pappus & Clauius) en nostre Geometrie practique Prob. 37. & Scholie du 126.

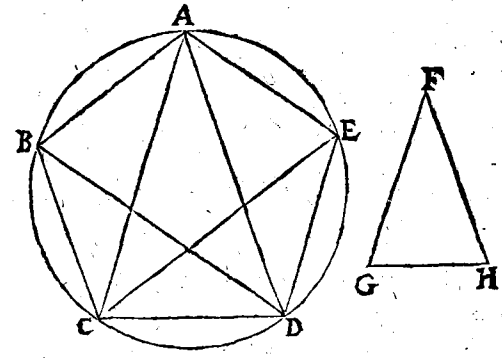
PROBL.

PROBL. II. PROP. XI.

Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Soit par la prec. prop. construit le triangle FGH Isoscelle, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F: puis au cercle donné soit inscrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH par la 2. p. 4. Et ayant couppé les angles ACD, ADC en deux egalement par les lignes droictes CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droictes CB, BA, AE, ED. Ie dis que le pentagone ABCDE inscrit au cercle donné, est equiangle & quilateral.



Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la base GH, double du troisiesme F; le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiéme A, lesquels estans couppez en deux egalement par les lignes droictes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE seront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour basses: mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB, BC, CD, DE & EA, estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi est-il manifeste par la 27. prop. 3. qu'il est equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy est soustenu de circonferences egales, sçauoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLARE.

De cecy il s'ensuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquiesmes parties de deux droicts, ou bien les 6 quints d'vn droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27. prop. 3, & CAD est le quint de deux droicts, ou les deux quints d'vn droict; le total BAE, qui est composé de ces trois, sera les trois quints de deux angles droicts, ou bien les six quints d'vn droict.

SCHOLIE.

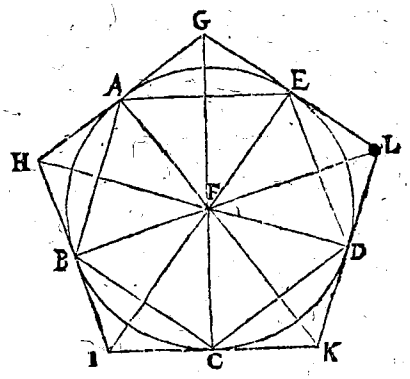
Clauius enseigne en ce lieu-cy deux manieres pour descrire vn pentagone equilateral, & equiangle sur vne ligne droicte donnee & terminee, la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie practique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 12. PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn Pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn pentagone equileteral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit descrit le pentagone ABCDE par la prec. prop. & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menees sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop. 1. se rencontrans aux cinq poincts G, H, I, K, L: (elles se doiuent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droicts, estans parties des angles droicts GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droictes AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Ie dis que GHIKL est le pentagone demandé.



Car il est euidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droictes GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és poincts A, B, C, D, E: En apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. prop. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarrez de FA, FE sont egaux (estans descrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux; & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux: & partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bases) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouueront egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

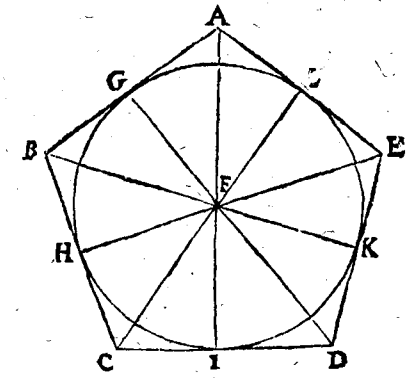
Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monstré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçauoir est, les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres:

donc les deux angles ſous le poinct G, ſeront egaux aux deux angles ſous le poinct H, & ainſi des autres: partant le pentagone ſera equiangle & equilateral. Nous auons donc deſcrit à l'entour d'vn cercle donné vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone donné equiangle, & equilateral, deſcrire vn cercle.

Soit donné vn pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inſcrire vn cercle.



Par la 9. prop. 1. ſoient couppez en deux egalement deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF ſe rencontrans au poinct F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy poinct F ſoient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires ſur les coſtez du pentagone; puis du centre F, & interuale FG ſoit deſcrit le cercle GHIKL. Ie dis qu'il eſt inſcrit au pentagone donné.

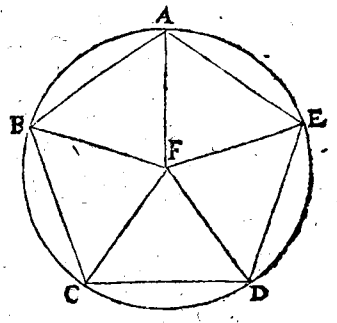
Car ayant mené les lignes droictes FC, FD & FE: dautant que les deux coſtez AB, BF, du triangle ABF ſont egaux aux deux coſtez CB, BF du triangle BFC, chacun au ſien, & les angles ABF, CBF, contenus d'iceux coſtez, egaux par la conſtruction; les baſes AF, CF ſeront egales, & les angles BAF, BCF auſſi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C ſont poſez egaux, & que par la conſtruction l'angle BAF eſt moitié de BAE; l'angle BCF ſera auſſi moytié de BCD, & conſequemment iceluy BCD, eſt diuiſé en deux egalement par la ligne FC. Par meſme raiſon nous monſtrerons que les deux autres angles du pentagone D & E, ſont diuiſés en deux egalement par les lignes FD & FE. Maintenant puiſque par la conſtruction les deux angles ſoubs le poinct A ſont egaux, ayant eſté le total coupé en deux egalement, & que l'angle droict G eſt egal à l'angle droict L, & le coſté FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres coſtez ſeront egaux, ſçauoir AG à AL, & FG à FL: par meſme diſcours FH, FI, FK, ſe trouueront egales: & partant le cercle deſcrit de F & interualle FG, paſſe par les poincts G, H, I, K, L, eſquels il touche les coſtez du pentagone propoſé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle GHIKL eſt donc inſcrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

A l'entour d'vn pentagone donné, lequel eſt equiangle, & equilateral, deſcrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut deſcrire vn cercle.

Soient couppez les deux angles A & B en deux egalement par la 9. p. 1. auec les lignes droictes AF & BF se rencontrans au poinct F, & d'iceluy poinct F, & interuale de l'vne d'icelles deux lignes, soit descrit le cercle ABCDE. Ie dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.



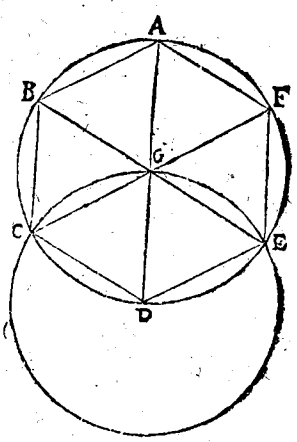
Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous demonstrerons comme au precedent Probl. qu'elles coupperont en deux egalement les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est couppé en deux egalement, au triangle AFB les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux: par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, & ainsi des autres couppantes; & par la 1. com· sent. il est euident qu'icelles cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE seront egales entr'elles, & partant que le cercle descrit de l'interuale de l'vne d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous auons descrit vn cercle à l'entour d'vn pentag. equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G; dans lequel cercle il faut inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & interuale DG, soit descrit le cercle GCE couppant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menées les deux lignes CGF, EGB: finalement soient menées les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EF, FA; & on aura descrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que ie dis estre equilateral, & equiangle.



Car il est euident (demonstrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG construicts sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts; & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE, EGF sont egaux à deux droicts, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droicts: donc tous les angles du poinct G seront egaux entr'eux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux: partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral: mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux

deux du poinct B, & ainsi des autres. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle; car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

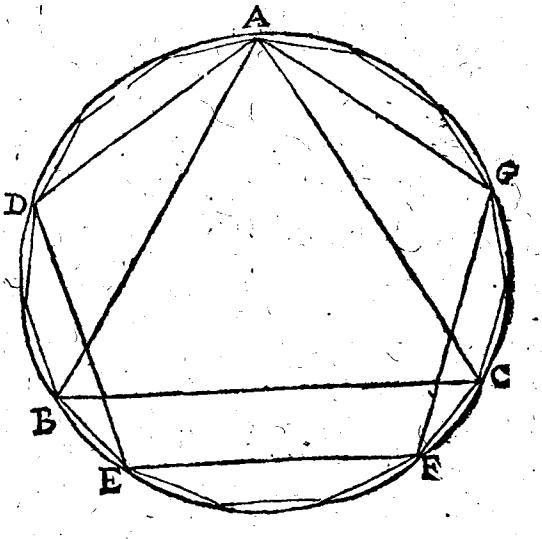
PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement descrit dans iceluy cercle le triangle equilateral ABC par la 2. p. de ce liure; les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisee en trois egalement par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce liure, ayant l'vn des angles au poinct A. Ie dis qu'ayant mené la ligne droicte BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de toute la circonference; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droicte AD, costé du pentagone, soustient l'arc AD, cinquiesme partie de la circonference: partant doit contenir trois costez du quindecagone: & consequemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq: donc l'arc BE sera la quinziesme partie de toute la circonference: & partant la ligne droicte BE sera le costé du quindecagone, & si par la 1. p. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelle BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, chacun d'iceux angles estant composé de 13 arcs egaux. Nous auons donc au cercle donné descrit vn quindecagone, &c. Ce qu'il falloit faire.



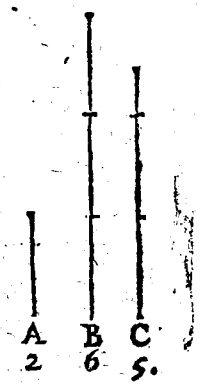
Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui le touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & dauantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suiuant la mesme methode practiquee au pentagone.

Fin du quatriesme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

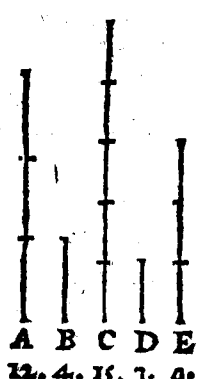
DEFINITIONS.

1. Partie, est vne grandeur tiree d'vne autre plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.



C'est à dire que lors qu'vne grandeur en mesure vne autre plus grande, elle est dicte partie d'icelle: Comme A qui est contenu 3 fois en B, est dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux sortes de partie: car il y en a vne qui mesure son tout; comme A, lequel repeté 3 fois constitue son tout B: & l'autre sorte ne mesure pas son tout: mais prise ie ne sçay combien de fois excede iceluy, ou deffaut au mesme, comme A lequel estant pris 3 fois excede C, mais estant pris seulement 2 fois, il est excedé par le mesme C: Or la premiere est dicte partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de ceste là seulement parle icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

2. Multiplice, est vne grandeur plus grande qu'vne autre plus petite, quand la plus grande est mesuree de la plus petite.



C'est à dire que si la grandeur A est mesuree par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle est dicte multiplice de B: Ainsi aussi la grandeur C, qui est mesuree 5. fois par D, est dicte multiplice d'icelle D.

Or quand deux petites grandeurs en mesurent egalement deux autres plus grandes, c'est à dire, qu'vne moindre est contenue autant de fois en vne plus grande, qu'vne autre moindre en vne autre plus grande, ces deux plus grandes là sont dictes equimultiplices d'icelles moindres: comme les grandeurs A & E sont dictes equimultiplices de B & D, pource que tout ainsi que A contient trois fois B, ainsi aussi E contient trois fois D. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres grandeurs en mesurent egalement plusieurs grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparees l'vne à l'autre ſelon la quantité.

C'eſt à dire que quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaiſon eſt appellée raiſon, & par quelqu'vns proportion : Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raiſon d'vne ligne à vne ſuperficie; ou d'vn nombre à vne ligne, puis que ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne, ne ſont pas quantitez de meſme genre. Semblablement ſi on confere vne ligne auec vne ligne ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt blanche, & l'autre noire; ou bien que l'vne eſt chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'vne & l'autre ſoient de meſme genre, ceſte comparaiſon n'eſt pas dicte raiſon, pource qu'elle n'eſt pas faicte ſelon la quantité.

Or iaçoit que la raiſon ſe trouue proprement és ſeules quantitez, ſi eſt-ce toutesfois que toutes autres choſes, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, comme ſont les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuemens, les pois, & les puiſſances, ſont auſsi dictes auoir raiſon, ſi leur habitude eſt conſideree ſelon la quantité, comme quand nous diſons vn temps eſtre plus grand qu'vn autre temps, ou moindre; ou deux temps eſtre egaux, &c. telle habitude ſera dite raiſon, pource qu'alors les temps ſont conſiderez ainſi que certaines quantitez.

En toute raiſon ceſte quantité-là, qui eſt referee à vne autre, eſt dicte par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raiſon; & celle-là à laquelle elle eſt referee, eſt dicte conſequent d'icelle raiſon : Comme en la raiſon de A à B; A eſt dict antecedant de la raiſon, & B conſequent : Que ſi au contraire B eſt comparé à A; B ſera appellé antecedant, & A conſequent.

A———
B———

Or ceſte raiſon definie par Euclide, eſt diuiſee en raiſon rationelle, & irrationelle.

La rationelle, eſt celle qui ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon d'vne ligne de 10 pieds à vne autre de 5 pieds, laquelle eſt exhibee par ces nombres 10 & 5. Mais l'irrationelle, eſt ceſte raiſon-là qui ne ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon du diametre d'vn quarré au coſté d'iceluy, laquelle ne ſe peut trouuer ny exprimer en nombre : comme eſt demonſtré par Euclide, en la derniere prop. du 10. liure.

Autres diſent que la raiſon ou proportion rationelle, eſt celle qui a les deux quantitez commenſurables, c'eſt à dire, qui ont vne commune partie aliquote, ou bien qui ſont meſurees par vne meſme commune meſure : comme la raiſon d'vne ligne de 20 pieds à vne autre de 8 pieds : car vne ligne de 4 pieds ou de 2, eſt partie aliquote de l'vne & l'autre de ces deux-là, & par conſequent meſure icelles. Mais la raiſon ou proportion irrationelle, eſt celle (diſent-ils) qui a les deux quantitez incommenſurables, c'eſt à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou deſquelles on ne peut trouuer aucune commune meſure. Comme la raiſon du coſté d'vn quarré à ſa diagonalle, & de pluſieurs autres lignes dont eſt traicté au 10. liure.

Ceſte raiſon ſe diuiſe auſsi en raiſon d'egalité, & d'inegalité : La raiſon d'egalité, eſt quand deux quantitez egales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 10; vne ligne de 12 pieds à vne autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raiſon d'i-

negalité, eſt quand deux quantitez inegales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 4 eſt raiſon d'inegalité; telle eſt auſsi celle de 5 à 9; celle d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 15 pieds, &c.

Ceſte raiſon d'inegalité, eſt ſubdiuiſee en raiſon d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raiſon d'inegalité maieure, eſt quand la plus grande quantité eſt comparee à la moindre: comme la raiſon de 8 à 5, eſt dicte raiſon d'inegalité maieure: item la raiſon d'vne ligne de 10 pieds à vne de 4, &c. Mais la raiſon d'inegalité mineure, eſt quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raiſon de 7 pieds à 9, s'appelle raiſon de moindre inegaleté: item celle d'vne ligne de 9 pieds à vne autre de 12 pieds, &c.

La raiſon rationelle d'inegalité maieure, eſt diuiſee en cinq genres, ſçauoir raiſon multiple, ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiple ſuperparticuliere, & multiple ſuperpartiente: les trois premieres deſquelles ſont ſimples, & les deux dernieres compoſees d'icelles premieres.

La raiſon multiple, eſt quand l'antecedant d'icelle contient le conſequent pluſieurs fois precisément: & ceſte raiſon contient ſous ſoy diuerſes eſpeces. Car ſi l'antecedant contient le conſequent deux fois preciſement, elle eſt ditte double: ſi trois fois, triple: ſi 4, quadruple: ſi dix, decuple, &c. Comme la raiſon de 20 à 4 eſt dicte quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le conſequent 4, cinq fois, & la raiſon d'vne ligne de 18 pieds à vne autre de 3 pieds, eſt dicte ſextuple, d'autant que 18 contient 3 ſix fois, & ainſi des autres.

La raiſon ſuperparticuliere, eſt quand l'antecedant contient le conſequent vne fois, & en outre vne partie aliquote d'icelluy conſequent: & ceſte raiſon a diuerſes eſpeces. Car ſi ceſte partie aliquote eſt moitié d'iceluy conſequent, eſt conſtituee vne raiſon ſeſquialtere, comme la raiſon de 3 à 2, en laquelle l'antecedant 3, contient le conſequent 2, vne fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy; ſi elle eſt tierce partie, ſeſquitierce: ſi vne quarte partie, ſeſquiquarte: ſi vne cinquieſme partie, ſeſquiquinte, &c. commençant touſiours le nom de ladite raiſon par ſeſqui, & ſe terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raiſon ſuperpartiente, eſt quand l'antecedant contient le conſequent vne fois, & en outre plus d'vne partie aliquote d'iceluy: & a auſsi ceſte raiſon pluſieurs eſpeces. Car ſi l'antecedant contient le conſequent vne fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, eſt conſtituee vne raiſon ſuperbipartiente tierces, comme la raiſon de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, vne fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy: ſi $\frac{3}{4}$, ſera conſtituée vne raiſon ſupertripartiente quarte, comme la raiſon d'vne ligne de 63 pieds à vne de 36, & ainſi des autres; le nom d'icelles commençant touſiours par ſuper, & prenant à ſon milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raiſon multiple ſuperparticuliere, eſt quand l'antecedant contient le conſequent pluſieurs fois, & encore vne partie aliquote d'iceluy: ceſte-cy eſt compoſee de la premiere & de la deuxieſme: & tout ainſi que chacune d'icelles contient pluſieurs eſpeces, auſsi fait celle-cy. Car ſi l'antecedant contient le conſequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, ceſte raiſon ſera appellee double ſeſquialtere, comme la raiſon de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2, deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy: ſi $\frac{1}{3}$, comme d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 3 pieds, ceſte raiſon s'appellera double ſeſquitierce: & la raiſon de 29 à 7 s'appellera quadruple ſeſquiſeptuple, d'autant qu'en 29, 7 eſt contenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainſi des autres.

La raiſon multiple ſuperpartiente, eſt quand l'antecedant contient le conſequent pluſieurs fois, & pluſieurs parties aliquotes d'iceluy: ceſte raiſon eſt compoſee de la premiere & troiſieſme; & tout ainſi que chacune d'icelles contient ſous ſoy pluſieurs eſpeces, auſſi faict ceſte-cy: comme ſi l'antecedant contient le conſequent, 2 fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, ceſte raiſon ſera appellee double ſuperbipartiente tierce, comme eſt la raiſon de 8 à 3: mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'icelluy, elle s'appellera triple ſuperpartiente quarte, comme eſt la raiſon de 15 à 4: s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{6}{7}$ d'icelluy, elle ſera dicte quadruple ſuperſextupartiente ſeptuple, comme eſt la raiſon de 34 à 7, & ainſi des autres.

Or tout ce qui a eſté dit cy-deſſus des cinq eſpeces de raiſon rationelle d'inegalité maieure, ſe doit auſſi entendre des cinq eſpeces de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut touſiours apposer ceſte ſyllabe ſub, *diſant ſubmultiple au lieu de multiple, ſubſuperparticuliere, au lieu de ſuperparticuliere, & ainſi des autres.*

Et pource que les denominateurs des raiſons rationelles cy-deſſus expoſees ſont aſſez vtiles, nous enſeignerons icy par quels nombres elles ſe denomment. Nous appellons denominateur d'vne raiſon, le nombre qui exprime diſtinctement & apertement la quantité de la grandeur antecedante au reſpect de la conſequente: comme le dominateur de la raiſon quintuple eſt 5, pource que ce nombre là monſtre que la grandeur ou quantité antecedante contient 5 fois la conſequente. Semblablement le denominateur de la raiſon ſeſquiquarte eſt 1 $\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre ſignifie que la quantité antecedante contient la conſequente vne fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: Item le denominateur de la raiſon ſubtriple, eſt $\frac{1}{3}$, car il demonſtre que l'antecedant eſt la tierce partie du conſequent: & ainſi des autres. C'eſt pourquoy, comme i'eſtime, Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raiſon la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous auons dit, combien vne grandeur eſt au reſpect d'vne autre auec laquelle elle eſt conferee, ainſi qu'il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, eſt le nombre entier, contenant autant d'vnitez, que l'antecedant de la raiſon contient de fois le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon double, eſt 2, de la ſextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt touſiours l'vnité: mais le denominateur eſt le nombre denommant la raiſon multiple correſpondante. Comme le denominateur de la raiſon ſubdouble eſt $\frac{1}{2}$: de la ſubſextuple $\frac{1}{6}$: de la ſubcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il eſt donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon multiple ou ſubmultiple, puis que la prolation monſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt euident par les exemples propoſez cy-deſſus.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere eſt l'vnité auec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon ſeſquialtere, eſt 1 $\frac{1}{2}$: de la ſeſquitierce $\frac{1}{3}$; &c. Il n'eſt donc pas difficile de trouuer le denominateur d'vne raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation d'icelle raiſon exprime le denominateur par ſa partie aliquote, comme il appert par les exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperparticuliere eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur ſeulement

d'vne vnité. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquialtere, eſt $\frac{2}{3}$: & celuy de la ſubſeſquitierce, eſt $\frac{3}{4}$ &c. Donc le denominateur de telle raiſon ſera aiſément trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquiquinte eſt $\frac{5}{6}$: & celuy de la raiſon ſubſeſquiſeptieſme eſt $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raiſon ſubſeſquineufieſme, eſt $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperpartiente, eſt vne vnité auec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le conſequant. Comme le denominateur de la raiſon ſupertripartiente quarte, eſt $1\frac{3}{4}$: celuy de la raiſon ſuperquadripartiente quintes, eſt $1\frac{4}{5}$; & ainſi des autres. Or les denominateurs de telles raiſons ſont faciles à trouuer, pource que la prolation meſme de la raiſon exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il appert és exemples cy-deſſus. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperpartiente, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez, que la quantité conſequente contient de parties aliquotes par deſſus l'antecedante. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quarte eſt $\frac{4}{7}$: celuy de ſubſuperquadripartiente quinte, eſt $\frac{5}{6}$ &c. On trouuera donc le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raiſon propoſee, auquel ſi on adiouſte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quinte eſt $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de ceſte fraction eſt le nombre denommant les quintes, ſçauoir 5, auquel eſt adiouſté le nombre 3, des trois parties, à fin de faire 8, denominateur de la fraction : mais le denominateur de la raiſon ſubſuperquadripartiente neufieſme eſt $\frac{9}{13}$: & ainſi des autres.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple propoſee auec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la conſequente. Comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptieſme eſt $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raiſon quadruple ſeſquiquinte, eſt $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raiſon eſt aiſé à exhiber, pource que la prolation de la raiſon exprime diſtinctement tant le denominateur de la multiple raiſon, que la partie aliquote, comme il ſe voit ez exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperparticuliere eſt vne fraction dont le numerateur eſt le nombre denommant les parties aliquotes contenues en la raiſon. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquiquarte, eſt $\frac{4}{13}$: de ſubquintuple ſeſquiſneufieme, $\frac{9}{46}$, &c. On trouuera le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, ſi on adiouſte 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il eſt manifeſte par les exemples cy-deſſus.

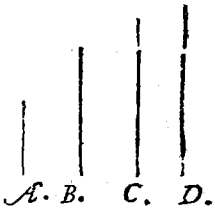
Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperpartiente, eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple obtenuë en icelle, auec les parties aliquotes que la quantité antecedante doit contenir de la conſequente. Comme le denominateur de la raiſon triple ſuperbipartiente tierces, eſt $3\frac{2}{3}$: de quadruple ſupertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il eſt facile de trouuer le denominateur de telles raiſons, pource que la prolation exprime diſtinctement, tant le denominateur de la raiſon multiple, que les parties aliquotes,

comme appert és exemples cy-dessus: & le denominateur d'vne raison submultiple superpartiente, est vne fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{17}$: de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{23}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produict adiousté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert ès exemples posez cy dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est tousiours l'vnité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'vne contient l'autre vne fois precisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dicte raison, ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dicte proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dicte proportion. Et c'est ce que les Grecs appellent analogie, *& quelques Latins* proportionalité: *Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils appellent* Medietez, *sont la proportion Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique: Mais Euclide ne traicte icy que de la Geometrique, laquelle est ou continue, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se faict nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedant & consequent, sçauoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit, que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrette ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entremoyenne est prinse seulement vne fois, tellement qu'il se faict interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedant ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.*



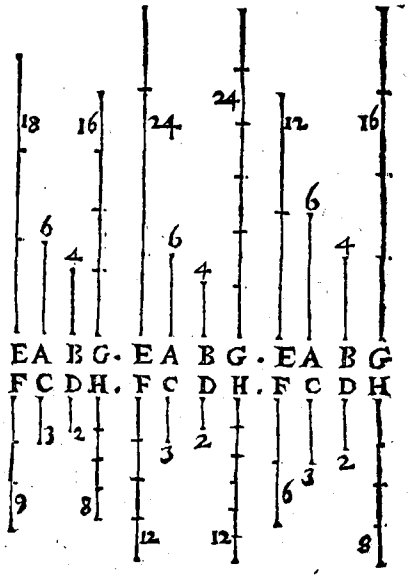
5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre, lesquelles estans multipliees se peuuent exceder l'vne l'autre.

Euclide ayant en la 3. def: appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste-cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dictes auoir raison, sçauoir est, que l'vne ou l'autre d'icelles estant multipliee, elles s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le coste d'vn quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent vn triangle Isoscelle, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'vn

cercle & le diametre d'iceluy, il y-a raiſon (laquelle toutesfois n'eſt encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'eſt a dire pris 4 fois, excede la circonference : car toute la circonference, comme il eſt demonſtré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'vne ſeptieſme partie d'iceluy diametre. Mais il s'enſuit de ceſte def. qu'vne ligne finie n'aura raiſon à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes ſoient de meſme genre de quantité : car en quelque ſorte que ſoit multipliée la ligne finie elle ne pourra ſurpaſſer l'infinie. s'enſuit auſsi qu'il n'y-a point de raiſon entre vn angle rectiligne, & vn angle contingent. Car il appert de la 16. pr. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais exceder vn angle rectiligne.

6. Les grandeurs ſont dites eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, quand les equimultiplices de la premiere & troiſiéme, aux equemultiplices de la ſeconde & quatriéme, en quelque multiplication que ce ſoit, deffaillent enſemble, ſont egaux, ou excedent, vn chacun à vn chacun, prenant ceux là qui s'entre reſpondent.

Ayant eſté dit par Euclide, que ceſt que raiſon, & quelles grandeurs ſont dites auoir raiſon l'vne à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour eſtre en meſme raiſon, ſçauoir eſt, que les equemultiplices de la premiere & troiſieſme grandeur excedent, ſoient egaux ou defaillent aux equemultiplices de la deuxieſ. & quatrieſme en quelque multiplication que ſoient pris iceux equemultiplices, comme appert en ces quatre quãtitez A, B, C, D, ou les equemultiplices de A & C, premiere & 3^e^, ſont E & F, & les equemultiplices de B & D, 2^e^ & 4^e^ quantitez ſont G & H : tellement qu'il ſe voit qu'ayant multiplié A & C, par vn meſme nombre ; & B, D, par quelconque meſme nombre, ſi le multiplice E excede le multiplice G qui luy correſpond, auſsi le multiplice F excede le multiplice H ; s'il eſt egal, l'autre ſera auſsi egal ; s'il defaut auſsi fera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiplices : & partant il y a meſme raiſon de A premiere quantité à B ſeconde, que de C troiſieſme à D quatrieſme.



Par la conuerſe de ceſte def. s'il y a telle raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuit que les equimultiplices de la premiere & troiſieſme excedent, ſont egaux, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme, engendrees de quelque multipliplication que ce ſoit.

Et auſsi s'il n'y a meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quatrieſme, il s'enſuiura que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme n'excederont, ne

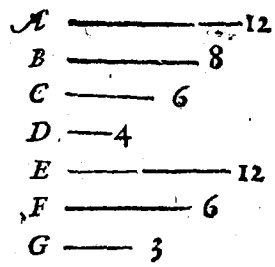
ſeront egaux, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme produictes de quelque multiplication que ce ſoit.

Or ce qui eſt dit icy de quatre grandeurs ſe doit auſſi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, a fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui ſont en meſme raiſon ſont appellees proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, icelles grandeurs ſont dites proportionnelles.

Et les grandeurs E, F, G, leſquelles ſont en proportion continue, ſont auſſi dites continuellement proportionnelles.



8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la ſeconde, & le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, lors il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare icy quelle condition doiuent auoir 4 grandeurs, à fin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la 4e, diſant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3e, & les equemultiplices de la deuxieſme & 4e, ſi la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2e mais la multiplice de la 3e n'excede la multiplice de la 4e il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la 3e à la 4e, comme il appert en l'exemple icy poſé, auquel ſont prinſes E & F, doubles de A & C, premiere & 3e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxieſme & 4e grandeurs: & pource que E multiplice de A premiere eſt plus grand que G multiple de B 2e, & F multiplice de C 3e n'eſt pas plus grand que H multiplice de D 4e, la raiſon de A premiere grandeur à B 2e, eſt dicte plus grande que la raiſon de C 3e à D 4.



Or afin que quatre grandeurs ſoient dictes eſtre en meſme raiſon, il eſt neceſſaire que les equemultiplices d'icelles, pris ſelon quelconques multiplications, excedent, ſoient egaux, ou defaillent, comme il a eſté expoſé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2e, que la 3e à la 4e: c'eſt aſſez que des equemultiplices pris ſelon quelque multiplication, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la deuxieſme: & le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, encore que ſelon pluſieurs autres multiplications ces equemultiplices ne ſoient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonſtration qu'il

y a plus grande raiſon d'vne grandeur à vne autre, que d'vne troiſieſme à vne quatrieſme. Il ſuffira de demonſtrer que ſelon quelque multiplication, le multiplice de la premiere grandeur excedant celuy de la ſeconde, le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme.

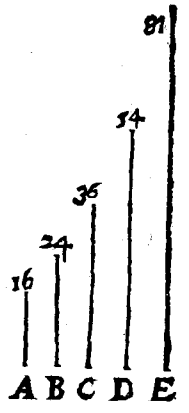
Et conuertiſſant cette 8. def. s'il y a plus grande raiſon de la premiere grandeur à la deuxieſme, que de la troiſieſme à la quatrieſme, le multiplice de la premiere excedant celuy de la deuxieſme, il ſe peut faire quelque multiplication par laquelle le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme.

Que ſi au contraire d'icelle def. le multiplice de la premiere grandeur ne ſurmonte celuy de la deuxieſme, & le multiplice de la tierce excede celuy de la quarte, la premiere grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la deuxieſme que la tiere à la quarte. La conuerſe a auſſi lieu.

9. Proportion ne peut eſtre conſtituée ſur moins de trois termes.

Puis qu'il a eſté dit en la 3. def. que raiſon eſt l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. eſt vne ſimilitude de deux ou pluſieurs raiſons : il s'enſuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en vne proportion, ſi elle eſt proportion continue, mais il en faut quatre au moins, ſi elle eſt proportion diſcrette.

10. Quand trois grandeurs ſont proportionnelles, la premiere eſt dicte auoir à la troiſieſme la raiſon doublee de la premiere à la ſeconde : mais s'il y en a quatre, la premiere eſt dicte eſtre à la quatrieſme, en raiſon triplee de la premiere à la ſeconde : & touſiours d'vn meſme ordre vne plus, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

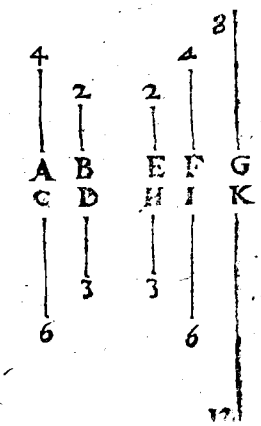


Comme ſi les grandeurs A, B, C, D, E, ſont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A eſt dicte auoir à la 3^e quantité C, la raiſon doublee de celle de A à la 2^e B, pource qu'entre A & C ſont deux raiſons, qui ſont egales à la raiſon de A à B, ſçauoir eſt la raiſon de A à B, & celle de B à C, tellement que la raiſon de A à C, prend par ce moyen la raiſon doublee de A à B, c'eſt à dire poſee deux fois d'ordre. Mais la raiſon de la premiere grandeur A à la 4^e D, eſt dicte triplee de celle de A à B, pource qu'entre A & D ſe trouuent trois raiſons, leſquelles ſont egales à celle de A à B; c'eſt à ſçauoir la raiſon de A à B, celle de B à C, & celle de C à D : & partant la raiſon de A à D encloſt par ce moyen la raiſon triplee de A à B, c'eſt à dire poſee trois fois d'ordre. Et ainſi pareillement la raiſon de A à E, eſt dicte quadruplee de la raiſon de A à B; pource qu'entre A & E ſont encloſes 4 raiſons, qui ſont egales à celle de A à B, &c.

11. Les grandeurs ſont dictes homologues, ou de ſemblables

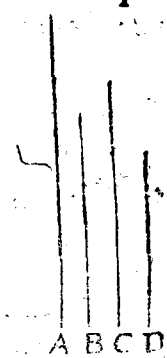
raiſons, les antecedans aux antecedans, & les conſequens aux conſequens.

C'eſt à dire que ſi pluſieurs quantitez ſont proportionnelles, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chaſque raiſon, ſeront dictes homologues, ou de ſemblable raiſon, comme auſſi les quantités conſequentes B & D. Ainſi pareillement, ſi les quãtitez E, F, G, ſont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E & H, ſeront dicts homologues, ou de ſemblable raiſon: comme auſſi le terme F ſera dict homologue au terme I: & auſſi G à K: ainſi les coſtez des figures eſtans comparez entr'eux, on entend quels coſtez doiuent eſtre antecedans des raiſons, & quels conſequens.



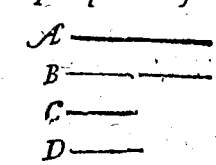
12. Raiſon alterne, eſt prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le conſequent au conſequent.

Euclide explique en ceſte def. & és ſuiuantes, aucuns moyens d'argumenter és proportions, deſquels l'vſage eſt fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raiſon alterne ou permutee, eſt quand de quatre grandeurs proportionnelles propoſees, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; on vient à conclurre qu'il y a meſme raiſon de l'antecedant A à l'antecedant C, que du conſequent B au conſequent D: & ceſte maniere d'argumenter (laquelle eſt demonſtree à la 16. p. de ce liu.) ſe couche ordinairement ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: Donc en permutant comme A ſera à C, ainſi B à D. Et eſt à noter qu'en ceſte maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doiuent eſtre de meſme genre.



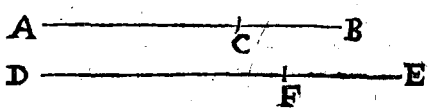
13. Raiſon inuerſe ou tranſpoſee, eſt lors qu'on prend le conſequent comme antecedant pour le comparer à l'antecedant, comme ſi c'eſtoit le conſequent.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, nous inferons que par raiſon inuerſe, comme B eſt à A, ainſi D eſt à C, c'eſt à dire les conſequens aux antecedans. En cette ſorte d'argumenter les autheurs parlent preſques touſiours ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: donc en changeant, ou au contraire, B ſera à A, comme D à C. Cette maniere d'argumenter ſera demonſtrée au Corrolaire de la 4. propoſition de ce liure.



14. Compoſition de raiſon, eſt lors qu'on prend l'antecedant auec le conſequent, comme vne ſeule choſe, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB eſt à CB, comme la toute DE à FE; c'eſt à dire que la compoſee de l'antecedant AC & du conſequent CB, eſt au meſme conſequent CB, comme la compoſee de l'antecedant DF, & du conſequent FE, eſt à iceluy conſequent FE; cette maniere d'argumenter ſera dicte compoſition de raiſon, & ſe prononce ainſi; comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE: donc en compoſant AB ſera à CB, comme DE à FE: laquelle ſorte d'argumenter ſera demonſtrée en la 18. pr. de ce liure.

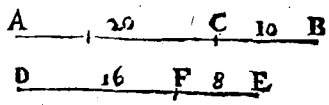


A ce moyen d'argumenter, par la compoſition de raiſon, en peuuent eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre dict compoſition conuerſe de raiſon: ſçauoir quand on prend l'antecedant & le conſequent comme vn ſeul, pour le comparer à l'antecedant. Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB compoſee de l'antecedant & du conſequent, eſt à l'antecedant AC, ainſi DE compoſee de l'antecedant & du conſequent eſt à l'antecedant DF: laquelle façon d'argumenter nous demonſtrerons eſtre vallable ſur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut eſtre dit compoſition contraire de raiſon; c'eſt à ſçauoir quand l'antecedant eſt comparé à l'antecedant & conſequent comme vn ſeul. Comme ſi AC eſt à CB, ainſi que DF à FE, & nous inferons par compoſition contraire de raiſon: donc comme AC antecedant ſera à la toute AB, compoſee de l'antecedant, & du conſequent, ainſi DF antecedant ſera à la toute DE, compoſee de l'antecedant & du conſequent. Nous demonſtrerons ſur la 18. p. de ce liure que cette forme d'argumenter eſt vallable.

15. Diuiſion de raiſon, eſt lors qu'on prend l'exçez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, pour le comparer à iceluy meſme conſequent.

Comme ſi on dit qu'il y a telle raiſon de AB à CB, que de DE à FE: donc auſſi AC, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, ſera à CB conſequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le conſequent, ſera à FE conſequent. Or les autheurs concluent ordinairement auec cette raiſon ainſi: comme AB eſt à CB, ainſi DE eſt à FE: donc en deuiſant AC ſera auſſi à CB, comme DF à FE. Ce qui ſera demonſtré en la 17. p. de ce liure.



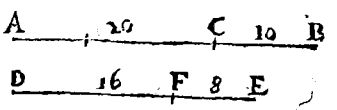
A ce moyen d'argumenter en peuuent auſſi eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre appellé diuiſion conuerſe de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand le conſequent eſt comparé à l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: Comme ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, & nous inferons: donc auſſi par diuiſion conuerſe de raiſon, comme CB conſequent ſera à AC, excez par lequel l'antecedant ſurmonte le conſequent, ainſi FE conſequent ſera à DF, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: laquelle maniere d'argumenter nous demonſtrerons pouuoir eſtre ſur la 17. pr. 5. Il eſt manifeſte qu'en l'vne & l'autre d'icelles argumentations par diuiſion de raiſon, l'antecedant doit eſtre plus grand que le conſequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conferé à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB, comme DF à DE: Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB, excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à EF, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonstrerons sur la 17. prop. de ce liure.

Il est euident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuersion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

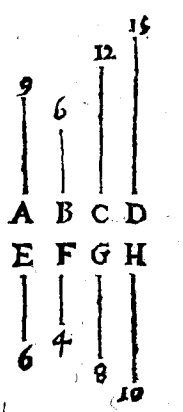
Comme si on dit, que comme AB est à CB, ainsi DE à FE: & on vient à conclurre, que AB antecedant sera aussi à AC, excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecedant sera à DF, excez par lequel l'antecedant excede le consequent, cela sera dit conuersion de raison. En ceste sorte d'argumenter les autheurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: Donc par conuersion de raison AB sera à AC, comme DE à DF: laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au Cor. de la 19. pr. de ce liure.



17. Raison egale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'vn costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement, c'est lors qu'on prend les extremes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y-a d'vn costé quatre quantitez, A, B, C, D: & autant d'vn autre E, F, G, H, lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B, comme E à F; & B à C, comme F à G; & C à D, comme G à H: si on infere que comme A est à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H, premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumenter est dicte raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçauoir est quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre: & quand l'ordre est peruerty: Euclide explique és deux def. suiuantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.



18. Proportion ordonnée, eſt quand l'antecedant eſt au conſequent, comme l'antecedant eſt au conſequent: & que le conſequent eſt à quelque autre, comme le conſequent eſt auſſi à quelque autre.

Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auons poſé A eſtre à B, comme E à F; & B à C, comme F à G, & C à D, comme G à H: Car ainſi les termes des 4 premieres quantitez ſont pris d'vn meſme ordre, que ceux des 4 dernieres; & partant ceſte proportion eſt dicte ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raiſon d'egalité, la proportion d'ordre eſtant obſeruee, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

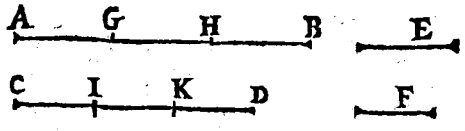
19. Proportion troublée, eſt quand trois grandeurs eſtans d'vn coſté, & autant d'vn autre, la premiere eſt à la ſeconde, comme la cinquieſme à la ſixieſme, & comme la ſeconde à la troiſieſme, ainſi la quatrieſme à la cinquieſme.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que E eſt à F; & comme B eſt à C, ainſi D à E: ceſte proportion ſera dicte troublee ou perturbée, d'autant qu'vn meſme ordre n'eſt pas gardé en la comparaiſon des premieres grandeurs entr'elles, qu'és ſecondes auſſi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere eſt comparée à la ſeconde, & ceſte-cy à la 3e: mais és ſecondes quantitez la 2e eſt comparée à la 3e, & la premiere à la ſeconde. Or que le moyen d'argumenter par raiſon egale, la proportion troublée eſtant gardée; ſoit bon, il ſera demonſtré en la 23. p. de ce liure.



THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la ſienne; comme l'vne ſera multiplice de l'vne, ainſi les toutes ſeront multiplices des toutes.



Soient tant de grandeurs qu'on voudra AB & CD, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs E & F. Ie dis que les grandeurs AB & CD enſemble, ſeront autant multiplices de E & F enſemble, comme AB l'eſt de E, ou CD de F.

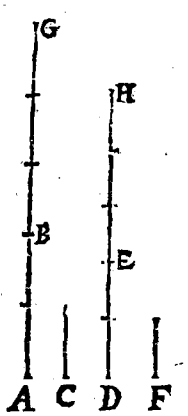
Car puiſque AB eſt multiplice de E; E meſurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la meſure donc trois fois, & ſoit icelle

AB couppee en trois parties egales, AG, GH, HB, chacune deſquelles ſera egale à E. Le meſme ſe peut dire de la grandeur CD, laquelle on coupera auſſi en trois parties egales, CI, IK, KD, eſtant chacune d'icelles egale à F: mais qui a choſes egales, ſçauoir à AG & E, adiouſte choſes egales, ſçauoir CI & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront egales aux toutes E & F enſemble. Par meſme raiſon GH & IK enſemble, ſeront egales à icelles E & F enſemble: pareillement HB & KD, aux meſmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales à E; & en CD d'egales à F: autant y en a-il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont egales à E & F priſes enſemble: Parquoy les deux AB & CD enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule AB eſt triple de la ſeule E, ou la ſeule CD de la ſeule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, & la cinquieſme autant multiplice de la ſeconde, que la ſixieſme de la quarte; la compoſee de la premiere & cinquieſme, ſera autant multiplice de la ſeconde, comme la compoſee de la troiſieſme & ſixieſme, le ſera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la ſeconde C, comme la 3e DE l'eſt de la 4e F: & ſoit la 5e BG autant multiplice de la 2e C, comme la 6e EH de la 4e F: Ie dis que AG compoſee de la premiere & cinquieſme AB & BG, ſera autant multiplice de la 2e C, comme DH compoſee de la tierce & ſixieſme DE & EH, le ſera de la quarte F.



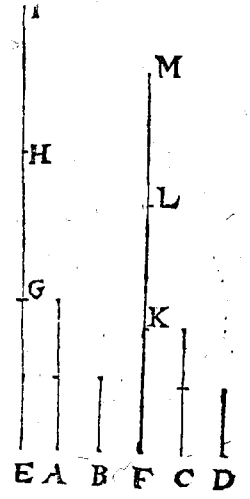
Car puis que AB eſt autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par meſme raiſon, il y aura auſſi en BG autant de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG compoſee de la premiere & cinquieſme eſt autant multiplice de la ſeconde C, comme DH compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de la quarte F. Parquoy ſi la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme

la tierce de la quarte ; & on prend des equimultiplices de la premiere, & troiſieſme : auſſi le multiplice de la premiere ſera autant multiplice de la ſeconde, que le multiplice de la tierce le ſera de la quarte.

Soit A autant multiplice de B, comme C l'eſt de D ; & de la premiere & tierce A, C, ſoient pris les equemultiplices E & F. Ie dis que E ſera autant multiple de B 2e, que F de D 4e.



Car puis que E eſt autant multiplice de A, que F l'eſt de C : E contiendra autant de parties egales à A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuiſee en EG, GH & HI, chacune egale à A : Item F diuiſee en FK, KL & LM, chacune egale à C : & d'autant que EG & FK ſont egales à A & C, leſquelles ſont equemultiplices de B & D par l'hypotheſe, auſſi EG & FK ſeront equemultiplices des meſmes B & D. Par meſme raiſon GH & KL : item HI & LM, ſeront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que EG premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FK tierce l'eſt de D quarte. Item GH cinquieſme autant multiplice de la meſme ſeconde B, que KL ſixieſme de la quatrieſme D ; auſſi EH compoſee de la premiere & cinquieſme ſera autant multiplice de la ſeconde B, que FL compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FL tierce l'eſt de D quarte, & HI cinquieſme eſt auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que LM ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D : EI compoſee de la premiere & cinquieſme ſera auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que FM compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de D quatrieſme par la 2. p. de ce liure. Si donc la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, en meſme raiſon que la tierce à la quarte : auſſi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront meſme raiſon aux equemultiplices de la ſeconde & quarte, en quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entrereſpondent.

Soit A à B en meſme raiſon que C à D, & ſoient priſes E & F equemulti-

plices de A premiere & C tierce: Item G & H equemultiplices de B seconde & D quarte, selon quelque multiplication que ce soit. Ie dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.



Car si on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere, est autant multiplice de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prinses equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce liure I & K, serõt equemultiplices de A & C, seconde & quarte. Par mesme raison L & M, seront aussi equimultiplices de B & D: & puis que A est à B comme C à D: & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont esté demonstrees I & K equemultiplices; mais de B & D seconde & quarte, autres equemultiplices L & M: par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si I deffaut, est egal, ou plus grand que L, aussi K deffaudra, sera egal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux equemultiplices. Et pour autant que I & K, sont equemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H: par la mesme 6. def. il y aura mesme raison de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste la preuue de la raison inuerse, qu'Euclide a expliquee en la 13. def. de ce liure, sçauoir est que si 4 grandeurs sont proportionelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté demonstré que si I defaut, est egal ou plus grand que L, aussi K defaudra, sera egal, ou plus grand que M, selon quelconques multiplices. Il appert aussi que si L defaut, est egal, ou plus grand que I, aussi M defaudra, sera egal, ou plus grand que K, selon quelconques multiplications: Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

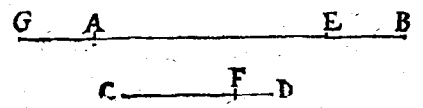
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur est autant multiplice d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee: aussi le reste sera autant multiplice du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF. Ie dis que le reste EB sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD.

Car A G estant faicte autant multiplice de FD comme AE l'est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD: d'autant que AE, AG sont

equemultiplices de CF, FD : par la 1. pr. de ce liure, la toute GE, ſera autant multiplice de la toute CD, comme AE de CF : Mais auſſi AB, eſt autant multiplice de CD comme AE de CF : donc GE, AB, ſont equemultiplices de CD, & partant egales entr'elles par la 6. com. ſent. Parquoy en oſtant ce qui eſt commun, ſçauoir AE, demeureront egales GA, EB; & partant ſeront equemultiplices de FD, puis que GA a eſté poſée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB l'eſt de CD : donc auſſi le reſte EB, ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD. Parquoy ſi vne grandeur eſt autant multiplice d'vne grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

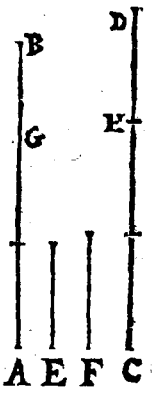


THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des equemultiplices : ou les reſtes ſeront egaux aux meſmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchees AG, CH auſſi equemultiplices des meſmes grandeurs E, F. Ie dis que les reſtes GB, HD, ſeront ou egaux aux meſmes E, F, ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, ſont equemultiplices de E & F ; en AB il y aura autant de grandeurs egales à E, comme en CD de grandeurs egales à F. Pareillement d'autant que la retranchee AG eſt autant multiplice de E, que la retranchee CH l'eſt de F ; AG contiendra autant de grandeurs egales à E, que CH de grandeurs egales à F, par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales multitudes de grandeurs AB & CD, on oſte egales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes reſtantes GB & HD ſeront egales : c'eſt à dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F ; ou bien ſi GB eſt egale à E, auſſi HD ſera egale à F : & par ainſi iceux reſtes GB, HD ſeront egales à E & F, chacune à la ſienne, ou bien ſeront equemultiplices d'icelles. Parquoy ſi deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

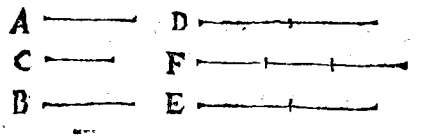


THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales, ont meſme raiſon à vne meſme grandeur ; & ceſtecy aura meſme raiſon aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle ſoit C. Ie

dis que A & B ont meſme raiſon l'vne que l'autre à C, & que C aura meſme raiſon à A qu'à B.



Qu'il ne ſoit ainſi ; ſoient pris D & E equemultiplices de A premiere, & B tierce, ſoit auſſi pris F quelconque multiplice de C, ſeconde & quarte : donc puis que D eſt autant multiplice de A, que E eſt multiplice de B ; & que A & B ſont poſees egales : auſſi D & E ſeront egales par la 6. com. ſent. Si donc D eſt plus grande, egale, ou plus petite que F, auſſi E ſera plus grande, egale, ou plus petite que la meſme F, & par la ſuſdite 6. def. de ce liure, il y aura telle raiſon de A à C, comme de B à la meſme C.

Quant à l'autre partie, elle ſe prouue tout de meſme par la ſuſdite def. en prenant les meſmes equemultiplices, & monſtrant l'excez, &c, ou bien plus facilement par la raiſon inuerſe. Car puis qu'il a eſté demonſtré que A eſt à C comme B à C, en changeant C ſera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce liure. Donc les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme, &c Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon à vne meſme grandeur, que la plus petite : & vne meſme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande, & vne troiſieſme quelle qu'elle ſoit D. Ie dis que AB a plus grande raiſon à la troiſieſme D, que non pas C : item, que D a plus grande raiſon à C, qu'à AB.



Qu'il ne ſoit ainſi : ſoit entendue AB premiere grandeur, D ſeconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB eſt plus grande que C, ſoit retranchee AE egale à icelle C, & ſoient pris des equemultiplices, à ſçauoir F G de BE, & GH de E A, en ſorte que chacune d'icelles FG & GH ſoit plus grande que D : & puis que les deux FG, GH, ſont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce liure, la toute HF ſera autant multiple de la toute AB, comme HG de AE, ou de C ſon egale : Maintenant ſoit priſe I K auſſi multiplice de D, en ſorte qu'elle ſoit plus petite que HF, mais plus grande que HG : (ce qui eſt facile, puis que D eſt plus petite que ny FG, ny GH : ſi bien qu'il faut ſeulement adiouſter tant de fois la grandeur D, iuſques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH, GH ſont equemultiplices de AB premiere, & C troiſieſme, ſi IK eſt priſe pour l'equemultiplice, tant de D ſeconde, que D quatrieſme, il eſt euident que HF multiplice de AB premiere, eſtant plus grande que IK multiplice de D ſeconde, HG

multiplice de C tierce, n'eſt pas plus grande que IK multiplice de D quarte: & partant par la huictieſme def. de ce liure, il y aura plus grande raiſon de AB à D, que de C à la meſme D.

Quant à la ſeconde partie: d'autant que IK multiplice de la premiere D, (car il faut maintenant poſer D premiere & troiſieſme, C ſeconde, & AB quatrieſme) eſt plus grande que HG multiplice de la ſeconde C; & IK multiplice de la troiſieſme D, eſt moindre que FH multiplice de AB quatrieſme: Il y aura plus grande raiſon de D à C, que de D à AB, par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles: & celles-là auſſi ſont egales, auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles ayent meſme raiſon l'vne que l'autre à la troiſieſme C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.



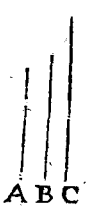
Car ſi elles n'eſtoient egales, il faudroit que l'vne ou l'autre fuſt plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raiſon a C, que la plus petite: ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc A & B ne ſont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune deſquelles C ait vne meſme raiſon. Ie dis qu'icelles A & B ſont auſſi egales entr'elles: car autrement il faudroit que l'vne fuſt plus petite que l'autre: & par la meſme 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raiſon qu'à la plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe: A & B ne ſont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont meſme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande: & celle là à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raiſon de A à C ſoit plus grande que de B à la meſme C. Ie dis que A ſera plus grande que B.



Autrement, ſi A n'eſtoit plus grande que B, elle ſeroit egale, ou plus petite, ce qui eſt impoſſible: car ſi elles eſtoient egales, elles auroient meſme raiſon l'vne que l'autre à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui ſeroit contre l'hypotheſe; ſi auſſi elle eſtoit plus petite, elle auroit plus petite raiſon à C

que

que non pas B, par la 8. prop. de ce meſme liure, ce qui eſt pareillement contre l'hypotheſe. Donc A ne ſera pas moindre ny egale à B : & par conſequent ſera plus grande.

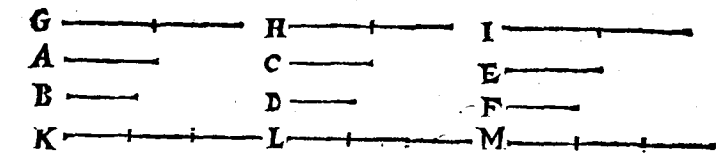
Maintenant que C aye plus grande raiſon à B, que non pas à A : Ie dis que B ſera plus petite que A. Autrement ſi B n'eſtoit moindre que A, elle ſeroit egale, ou plus grande, ce qui eſt impoſſible : car ſi A & B eſtoient egales, C auroit meſme raiſon à l'vne qu'à l'autre par la ſuſdite 7. prop. de ce liure : ce qui eſt contre noſtre hypotheſe : ſi auſſi elle eſtoit plus grande, C auroit plus grande raiſon à A qu'à B par la ſuſdite 8. pr. ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Donc B ſera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raiſons qui ſont de meſme à vne autre, ſont auſſi de meſme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainſi E à F : Ie dis que comme A eſt à B, ainſi E ſera à F.

Qu'il ne ſoit ainſi : de toutes les antecedantes A, C, E, ſoient priſes quelconques equemultiplices, G, H, I. Pareillement, des conſequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. D'autant que A eſt à B comme C à D, par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, ſi G multiplice de A, eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B : auſſi H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D. Item, puis que comme C eſt à D, ainſi E eſt à F, ſi H multiplice de C eſt egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D, auſſi I multiplice de E, ſera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F : Parquoy ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi I multiplice de E tierce, ſera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplice de F quarte, & par la ſuſdite 6 def. comme A ſera à B, ainſi E ſera à F. Parquoy les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Clauius demonſtre en ſuitte de ce, que les raiſons qui ſont de meſme à d'autres, ſont auſſi de meſme entr'elles : Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, & que E ſoit à F, comme A à B ; & G à H, comme C à D ; Auſſi comme E ſera à F, ainſi G ſera à H. Car d'autant que les raiſons de E à F, & de C à D ſont de meſme à la raiſon de A à B, par la 11. p. 5. comme E ſera à F, ainſi C à D. Derechef, pour ce que les raiſons de E à F, & de G à H ſont de meſme à la raiſon de C à D : auſſi par la meſme 11. prop. 5. comme E ſera à F, ainſi G ſera à H.

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
9.	6.	12.	8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, de C à D & de E à F ſont de meſme entr'elles; & que comme A eſt à B, ainſi G ſoit à H; & comme C à D, ainſi I à K &; comme E eſt à F, ainſi L ſoit à M: auſſi les raiſons de G à H, de I à K, & de L à M ſont de meſme entr'elles: Car ſuiuant ce que nous auons demonſtré cy-deſſus de quatre raiſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K, pour ce que ces raiſons ſont ſemblables aux raiſons de A à B, & de C à D. Et en la meſme maniere, cõme I ſera à K, ainſi L ſera à M, d'autant qu'icelles raiſons ſont de meſme aux raiſons de C à D, & de E à F, leſquelles ſont ſemblables. Item, comme G ſera à H, ainſi L à M; puis que ces raiſons ſont de meſme que les raiſons de A à B, & de E à F, qui ſont poſees egales: Le meſme ſeroit encores demonſtré s'il y auoit dauantage de raiſons.

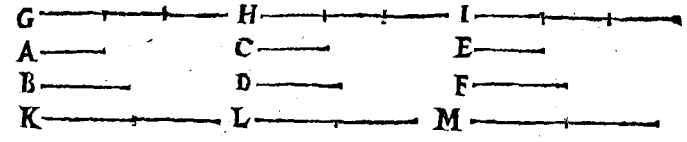
A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	8.	18.	12.	30.	20.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles: comme l'vne des antecedantes ſera à ſa conſequente, ainſi toutes les antecedantes ſeront à toutes les conſequentes.

Soient ſix grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, ſçauoir que A ſoit à B, comme C eſt à D, & E à F: Ie dis que comme l'vne des antecedantes eſt à ſa conſequente; ſçauoir eſt A à B, ainſi toutes les antecedãtes enſemble A, C, E, ſeront à toutes les conſequentes enſemble B, D, F.

Car eſtans priſes des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item des conſequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M; toutes les trois multiplices G, H, I enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs A, C, E enſemble, comme la ſeule G eſt multiplice de la ſeule A, par la premiere prop. de ce liure. Auſſi par la meſme raiſon toutes les trois multiplices K, L, M enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs B, D, F enſemble, comme K ſera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F ſont proportionnelles, ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi H multiplice de C troiſieſme, ſera plus grande, egale, ou plus petite que L, multiplice de D quatrieſme, par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, & ainſi des deux autres: Partant ſi G eſt plus grande, egale, ou plus petite que K, le compoſé des trois G, H, I, ſera auſſi plus grand, egal, ou plus petit que le compoſé des trois K, L, M. Donc par la meſme 6. def. comme A ſera à B, ainſi les trois A, C, E enſemble, ſeront aux trois B, D, F enſemble. Parquoy ſi tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.



THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde comme la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquieſme à la ſixieſme: auſſi la premiere aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit A premiere à B ſeconde, *(en la prec. fig.)* comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raiſon de C tierce à D quarte, que de E cinquieſme à F ſixieſme. Ie dis qu'il y aura auſſi plus grande raiſon de A premiere à B ſeconde, que de E cinquieſme à F ſixieſme.

Car eſtans priſes des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & des conſequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M: D'autant que A eſt à B, comme C à D, ſi G multiplice de A eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, auſſi par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raiſon de C premiere à D ſeconde, que de E tierce à F quatrieſme, ſi H multiplice de C, eſt plus grande que L multiplice de D, il n'eſt pas neceſſaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce liure conuertie: donc auſſi ſi G excede K, neceſſairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raiſon de A à B, que de E à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quatre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

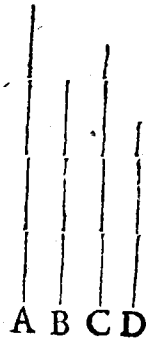
Que ſi la tierce C a moindre raiſon à la quarte D, que la cinquieſme E à la ſixieſme F: auſſi la premiere A aura moindre raiſon à la ſeconde B, que la cinquieſme E à la ſixieſme F. Car ſi la raiſon de C à D eſt moindre que celle de E à F, c'eſt à dire, que la raiſon de E premiere à F ſeconde eſtant plus grande que celle de C tierce à D quarte, ſi I excede M, il n'eſt pas neceſſaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou eſt egale à icelle par la 8. def. de ce liu. conuertie. Mais ſi H defaut, ou eſt egale à L, auſſi G defaudra, ou ſera egale à K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a poſé C 1. eſtre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy ſi I excede M, neceſſairement G n'excedera pas K: & partant par la ſuſdicte 8. def, il y aura plus grande raiſon de E à F, que de A à B, c'eſt à dire que la raiſon de A à B ſera moindre que de E à F: ce qui eſtoit propoſé.

En la meſme maniere ſera demonſtré, que s'il y a plus grande raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquiéme à la ſixiéme; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquiéme à la ſixiéme.

Que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte, & la tierce à moindre raiſon à la quatriéme que la cinquiéme à la ſixiéme: auſſi la premiere aura beaucoup moindre raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

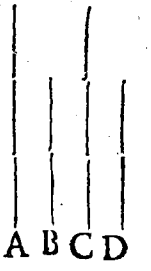
THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere ſoit plus grande que la tierce: auſſi la ſeconde ſera plus grande que la quarte; & ſi egale, egale: ſi plus petite, plus petite.

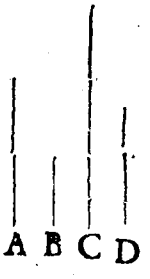


Soit A à B, comme C eſt à D, & que A premiere ſoit plus grande, egale, ou plus petite que C troiſieſme; Ie dis que B ſeconde ſera auſſi plus grande, egale, ou plus petite que D quatrieſme.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raiſon de A à B, que de C à la meſme B, par la 8. prop. de ce liure, & par conſequent plus grande raiſon de C à D, que de C à B, eſtant icelle la meſme raiſon que de A à B, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera plus grande que D.



Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce meſme liure A ſera à B, comme C à B: & puis que les raiſons de C à D, & C à B, ſont les meſmes que de A à B, les raiſons de C à D & de C à B, ſeront de meſme entr'elles, par la 11. pr. de ce liure, & partant par la 9. pr. B & D ſeront egales.



Finalement ſoit A moindre que C, & par la ſuſdite 8. prop. il y aura plus grande raiſon de C à D, que de A à D; & par conſequent plus grande raiſon de A à B, que de A à D, puis qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera moindre que D. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que ſi la ſeconde eſt plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: auſſi la premiere ſera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puis que A eſt à B comme C à D, en changeant B ſera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce liure. Donc ſi B eſt plus grande, ou egale, ou moindre que D, auſſi A ſera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la ſuſdite 14. prop.

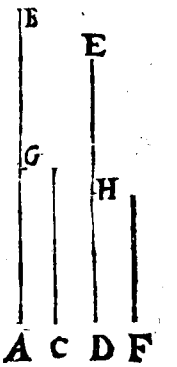
Or Euclide n'a pas demonſtré que ſi la premiere eſt plus grande, egale, ou plus petite que la ſeconde: auſſi la tierce ſera plus grande, egale, ou moindre que la

quarte, pource que cela eſt euident à cauſe de la ſimilitude des raiſons. Ce que nous pourrions neantmoins demonſtrer apres Commandin : mais d'autant que ſa demonſtration ne compete qu'aux grandeurs de meſme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monſtre, encore que les grandeurs ſoient de diuers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs ſont entr'elles, comme ſont leurs equemultiplices entr'elles, eſtans priſes comme elles s'entre-reſpondent.

Soit AB autãt multiplice de C comme DE eſt multiplice de F. Ie dis que AB ſera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE ſont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en AB autant de parties egales à C, comme DE contient de parties egales à F: ſoit donc diuiſee AB és parties AG, GB egales à C, & DE és parties DH, HD egales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de AB, ſera à vne chacune partie de DE, comme C eſt à F; & par la 12. prop. toutes les antecedentes AB, ſeront à toutes les conſequentes DE, comme AG l'vne des antecedantes, eſt à DH ſa conſequente, c'eſt à dire comme C à F, puis que c'eſt la meſme raiſon. Parquoy les grandeurs ſont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

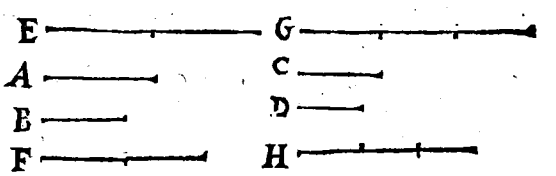


THEOR. 16 PROP. XVI.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans permutees.

Soit A à B, comme C à D. Ie dis qu'en permutant A ſera à C, comme B eſt à D.

Car ſi on prend E & F equemultiplices de A & B; item G & H equemultiplices de C & D; E ſera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par conſequent E eſtant à F, & C à D, en meſme raiſon que A à B, elles ſont de meſme entr'elles par la 11. prop. de ce liure. Derechef puis que les raiſons de E à F, & G à H ſont les meſmes que de C à D, elles ſeront auſſi de meſme entr'elles par la ſuſdite 11. prop. c'eſt à dire, que comme E premiere eſt à F ſeconde, ainſi ſera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce meſme liure ſi, E premiere eſt plus grande, egale, ou moindre que G tierce, auſſi F ſeconde ſera plus grande, egale, ou moindre que H quatrieſme, en quelconque multiplication que ſoient priſes les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquieſme liure A ſera à C, comme B à D: (puiſque



E & F ſont equemultiplices de A premiere, & B troiſieſme; & G & H equemultiplices de C ſeconde & D quatrieſme, & celles-là defaillent, ſont egales, ou excedent celles cy, &c.) Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

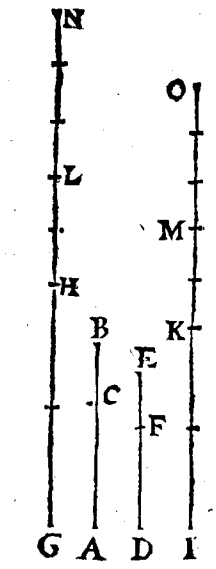
Or la demonſtration de ceſte propoſition a ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi les deux A & B eſtoient d'vn genre, & les deux C & D d'vn autre: auſsi les equemultiplices E & F ſeroient d'vn genre, c'eſt à ſçauoir duquel ſont A & B, & les equemultiplices G & H d'vn autre genre, c'eſt à ſçauoir de celuy duquel ſont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E eſtre plus grande, egale, ou moindre que G: & partant rien ne ſe concluroit par la 6. def. de ce liure. La raiſon permutée a donc ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont d'vn meſme genre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs compoſees ſont proportionnelles; icelles eſtans diuiſees, ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs compoſees AB, CB, & DE, FE, proportionnelles, c'eſt à dire, que AB ſoit à CB, comme DE à FE. Ie dis que les meſmes grandeurs eſtans diuiſees ſont auſſi proportionelles, c'eſt à dire que comme AC eſt à CB, ainſi DF eſt à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE ſoient priſes les equemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce liure GL ſera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'eſt à dire comme IK de DF. Mais icelle IK eſt autant multiplice de DF, que IM de DE par la meſme 1. prop. donc GL, IM ſont equemultiplices de AB, DE. Derechef ſoient priſes IN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere eſt autant multiplice de CB ſeconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquieſme autant multiplice de CB ſeconde, que MO ſixieſme de la quarte FE, par la 2. p. de ce liure, HN ſera autant multiplice de CB ſeconde, que KO de FE quatriéme. Et puis que AB eſt à CB, comme DE à FE: & ont eſté priſes GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. conuertie ſi GL multiplice de AB premiere excede, eſt egale, ou moindre que HN multiplice de CB ſeconde, auſſi IM, multiplice de DE tierce, excedera, ſera egale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: oſtant donc les choſes communes HL, KM, ſi GH excede LN, auſſi IK excedera MO; & ſi egale, egale; & ſi moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK ſont equimultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB ſeconde & FE quarte, & il a eſté demonſtré (en quelconque multiplication qu'ayent eſté priſes icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la



premiere & troiſieſme excedent, ſont egales, ou moindres, que les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, par la ſuſdite 6. def. de ce cinquieſme liure AC ſera à CB, comme DF à FE: ce qui eſtoit propoſé. Si donc les grandeurs compoſees ſont proportionnelles. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ce moyen là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerſe de la raiſon diuiſee: c'eſt à dire que ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, auſſi CB ſera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainſi DE à FE, en diuiſant par la 17. p. 5. comme AC ſera à CB, ainſi DE à FE: & en changeant, comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF: ce qui eſtoit propoſé.

Par meſme maniere, ſera demonſtré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la meſme 15. def. nous auons appellé contraire diuiſion de raiſon: c'eſt à dire que ſi AC eſt à AB, comme DF à DE: auſſi AC ſera à CB, ainſi que DF à FE. Car puis que AC eſt à AB, comme DF à DE: en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF: donc en diuiſant par la 17. p. 5. comme CB à AC: ainſi FE à DF: & en changeant derechef, comme AC à CB, ainſi DF à FE: ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diuiſees ſont proportionnelles; icelles eſtans compoſees ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuiſees AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Ie dis qu'en compoſant, AC eſt à CB, comme DF à EF.

Car ſi comme AC eſt à BC, ainſi DF n'eſt pas à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en meſme raiſon que AC à BC, s'il eſt poſſible: & en diuiſant par la precedente propoſition, DG ſera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainſi DE eſt à EF: donc auſſi comme DG ſera à GF, ainſi DE ſera à EF par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere eſt plus grande que DE troiſieſme: donc par la 14. propoſition de ce meſme liure GF ſeconde, ſera auſſi plus grande que EF quatrieſme, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, meſme raiſon que de AC à BC.



Par meſme diſcours on demonſtrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Donc comme AC eſt à BC, ainſi DF eſt à EF, puiſque DF ne peut eſtre à vne grandeur moindre, ou plus grande que EF, en meſme raiſon que AC à BC. Parquoy ſi les grandeurs diuiſées ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter és proportions, leſquels

nous auons descrits en la 14. def. de ce liure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EF. Ie dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. p. cy dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouuer.

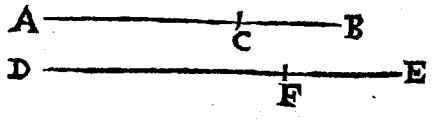
Quant à l'autre moyen que nous auons appellé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à BC, ainsi DE à EF : Ie dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la mesme prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui estoit proposé à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le tetranché au retranché; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Ie dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi en permutant par la 16. prop. de ce liure AB sera à AC, comme DE à DF; & par la 17. prop. de ce mesme liure, en diuisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: parquoy en permutant derechef par la susdicte 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est à dire comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont esté posees en mesme raison. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SOCHLIE.

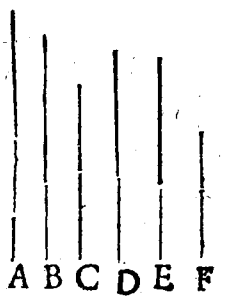
Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter és proportions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis par conuersion de raison, AB estre aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en diuisant par la 17. prop. de ce liure, comme AC à CB, ainsi DF à FE : donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF : & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme liure, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : ce qui estoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, estans prise

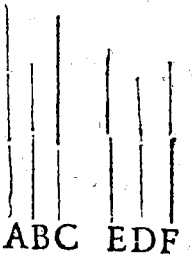
prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme; aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme; & si egale, egale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A premiere soit plus grande que C troisiesme. Ie dis que D 4e sera aussi plus grande que F 6e.



Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquiesme liure. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puis que B est à C, comme E à F, en changeant comme C sera à B, ainsi F à E.) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est egale à C; ie dis aussi que D sera egale à F. Car puis que A est egale à C, par la 7. p. de ce liure, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E: & par la 11. pr. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E: & partant D & F seront egales par la 9. prop. de ce mesme liure.



En troisiesme lieu, si A est moindre que C, ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E: il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquiesme liure. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

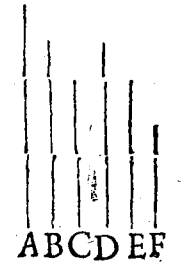


THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme; aussi la quatriesme sera

plus grande que la ſixieſme; & ſi egale, egale; ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquelles priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublée, ſçauoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Ie dis que comme A ſera egale, plus grande, ou plus petite que C, auſſi D ſera egale, plus grande, ou plus petite que F.



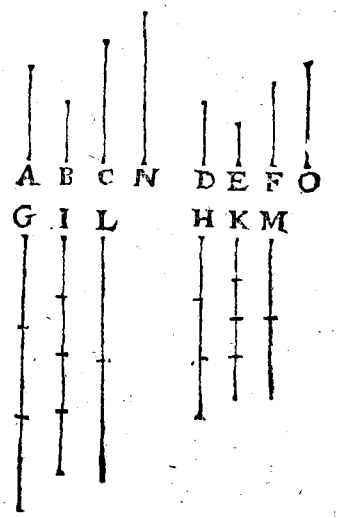
Car ſi A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce liure. Mais comme A à B, ainſi E à F; il y aura donc plus grande raiſon de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquieſme liure. Et d'autant que comme B eſt à C, ainſi D eſt à E, en changeant comme C ſera à B, ainſi E à D. Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D ſera plus grande que F.

On peut prouuer comme en la precedente, ſi A eſt egale, ou plus petite que C; auſſi D eſtre egale, ou moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles eſtans priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon; icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & ſoit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale comme A eſt à C, ainſi D à F.



Car eſtans priſes G, H equemultiplices de A, D: Item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M, equemultiplices de C, F: puiſque A eſt à B, comme D à E, auſſi G multiplice de A premiere ſera à I multiplice de B deuxieſme, comme H multiplice de D troiſieſme à K multiplice de E quatrieſme par la 4. p. de ce cinquieſme liure. Par meſme raiſon I ſera à L, comme K à M. Veu donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, par la 20. pr. 5. ſi G excede L, auſſi H excedera M; & ſi egale, egale; & ſi plus petite, plus petite: & partant puis que G, H, equemultiplices de A & D defaillent, ſont egales, ou excedent L, M, equemultiplices quelcon-

ques de C & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F : ce qu'il falloit prouuer.

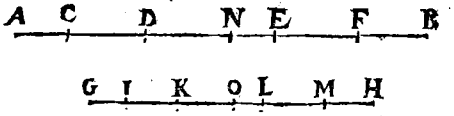
Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Ie dis que A est encore à N comme D à O. Car puisque nous venons de demonstrer que A est à C, comme D à F; & on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquelles sont prises de deux en deux en mesme raison. Donc comme il a esté demonstré és trois grandeurs cy dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la mesme maniere sera demonstré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer..

SCHOLIE.

Le docte Steuin en la 19. def. de ses Probl. Geomet. explique vne sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduicte en vn tel theoreme que le suiuant.

S'il y-a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppée en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles : la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en mesme raison que la composée, d'autant de parties de la derniere grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'vne est couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie-là, est aussi couppée en deux autres parties proportionnelles â ces deux-là: les totales grandeurs seront aussi couppées proportionnellement.

Soit vne grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD; DE, EF, FB; & vne autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, sçauoir és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles là de AB. Ie dis que AD composée des deux parties AC, CD, est à DB composée des trois parties restantes, comme GK composée des deux parties GI, IK, est à KH composée des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, en composant par la 18. p. de ce liure AD sera à CD, comme GK à IK.

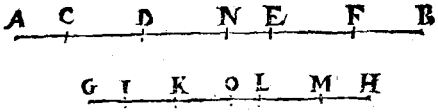


Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. prop. de ce mesme liure, en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera à ED comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à IK; & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demonstré que AD est à DE, comme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la susdicte 22. prop. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.

Nous demonstrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI à KI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH.

Veu donc que comme AC eſt à CD, ainſi GI eſt à IK, & comme CD à CB, ainſi IK à IH: en raiſon egale, comme AC ſera à CB, ainſi GI ſera à IH.

Par meſme raiſon, comme AF ſera à FB, ainſi GM ſera à MH: Car derechef en compoſant, & par egalité de raiſon, comme AF ſera à EF, ainſi GM ſera à LM, par les ſuſdictes 18, *&* 21. *prop. de ce liure. Mais auſſi comme EF eſt à FB, ainſi LM à MH: Donc en raiſon egale, comme AF eſt à FB, ainſi GM eſt à HM, & ainſi des autres: appert donc ce qui eſtoit premierement propoſé.*

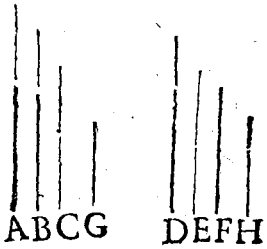


Maintenant ſoit couppée, (comme pour exemple) la troiſieſme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & auſſi la troiſieſme KL en deux parties KO, OL proportionnelles à celle-là. Ie dis que comme AN à NB, ainſi GO à OH. Car en changeant, comme EN ſera à ND, ainſi LO à OK: & en compoſant par la 18. *prop.* 5. *comme ED ſera à DN, ainſi LK à KO. Parquoy puis que comme CD eſt à DE; ainſi IK à KL: & comme DE à DN, ainſi KL à KO: par la* 22. *prop.* 5. *en raiſon egale, comme CD ſera à DN, ainſi IK à KO: donc les parties AC, CD, DN, ſont proportionnelles aux parties GI, IK, KO. Derechef, pource qu'en changeant, comme FE eſt à ED, ainſi ML à LK: & en compoſant, comme DE à NE, ainſi KL à OL, en raiſon egale, comme FE ſera à EN, ainſi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainſi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB, ſont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a eſté demonſtré en la premiere partie, AN ſera à NB comme GO à OH: appert donc ce qui eſtoit propoſé en ſecond lieu.*

A ce Theoreme nous en ioindrons deux autres, le premier deſquels eſt tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles priſes de deux en deux, ſoient en meſme raiſon: toutes les grandeurs d'vn ordre, ſeront à laquelle on voudra d'icelles en meſme raiſon, que toutes les grandeurs de l'autre ordre ſeront à la correſpondante.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F: ie dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C enſemble, ſeront à laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la derniere C, ainſi toutes les grandeurs D, E, F enſemble, ſeront à la derniere F. Car puiſque comme A eſt à B, ainſi D à E, en compoſant A, B ſont à B, comme D, E, à E. Mais B eſt à C, comme E à F: donc en raiſon egale A, B, ſeront à C, comme D, E à F: & en compoſant A, B, C, ſeront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouuer.



Que s'il y auoit dauantage de grandeurs, la demonſtration ne ſeroit diſſemblable à celle-cy deſſus: car il n'y auroit qu'à repeter la compoſition & egalité de raiſon autant de fois qu'il ſeroit de beſoin: Comme par exemple, ſoient encore G & H, tellement que C ſoit à G, comme F à H. D'autant que A, B eſt à C, comme D, E eſt à F, & C à G, comme F à H: en raiſon egale A, B, ſont à G, comme D, E à H: & en compoſant A, B, G, ſont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C eſt à G, ainſi F à H, en chan-

geant, comme G ſera à C, ainſi H à F: donc en raiſon egale, comme A, B, G ſont à C, ainſi D, E, H à F; & en compoſant comme toutes les grandeurs A, B, G, C enſemble, ſeront à la ſeule C, ainſi toutes les grandeurs D, E, H, F enſemble, ſeront à la ſeule F.

Mais ſi on vouloit prouuer, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, ſont à la derniere G, ainſi les quatres autres D, E, F, H, ſont à la derniere H, il ſeroit bien plus bref: Car puisque nous auons demonſtré, que comme A, B, C, ſont à C, ainſi D, E, F à F, & que comme C eſt à G, ainſi F eſt à H en raiſon egale, comme A, B, C ſeront à G, ainſi D, E, F à H: donc en compoſant, toutes les grandeurs A, B, C, G, ſeront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H ſeront à H.

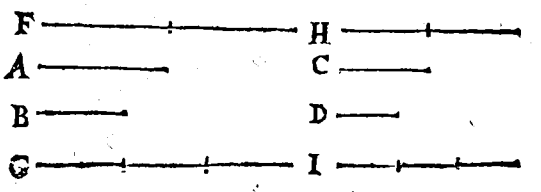
En la meſme ſorte on demonſtrera, que toutes leſdites grandeurs A, B, C, G ſeront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, ſeront à D, n'y ayant autre difference, ſinon qu'il faut prendre au contraire de ce que deſſus.

Et de ce eſt manifeſte, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, eſt à ſa correſpondante du ſecond ordre, ainſi toutes les grandeurs du premier ordre ſeront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le ſecond Theoreme eſt demonſtré par Clauius au Scholie de cette 22. prop. & eſt tel.

Si la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troiſieſme auront auſſi vne meſme raiſon à la ſeconde & quatrieſme. Item les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, auront vne meſme raiſon à la premiere & troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & quatrieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la premiere & troiſieſme. Item la premiere & troiſieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme.

Soit A à B, comme C à D, & ſoient F, H, equemultiplices de A, C: item G, I equemultiplices de B, D. Ie dis que F eſt à B, comme H à D: item que G eſt à A, comme I à C. Et au contraire que B eſt à F, comme D à H: item A à G, comme C à I. Car puis que F eſt autant multiplice de A, que H l'eſt de C, comme F eſt à A, ainſi H à C, & par l'hypotheſe A eſt à B, comme C à D; donc en raiſon egale par la 22. pr. 5. comme F ſera à B, ainſi H ſera à D. Derechef, pource que G eſt à B, comme I à D, & comme B à A, ainſi D à C: (car puis que A eſt à B comme C à D par l'hypotheſe, en changeant comme B à A, ainſi D à C) en raiſon egale, comme G ſera à A, ainſi I à C par la ſuſdicte 22. prop. 5.



Maintenant pource que B eſt à A, comme D à C par raiſon inuerſe: & comme A à F, ainſi C à H: en raiſon egale, comme B ſera à F, ainſi D à H. Derechef, puis que A eſt à B, comme C à D: & comme B eſt à G, ainſi D à I; en raiſon egale, comme A ſera à G, ainſi C à I, par ladicte 22. pr. 5. Ce qui eſtoit propoſé.

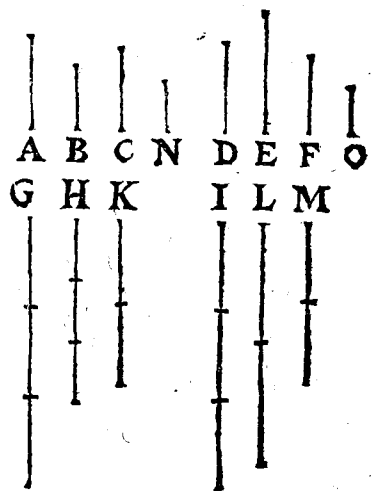
Par cecy eſt manifeſte vn moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident ſouuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres: ſçauoir eſt comme A à B, ainſi C eſt à D: donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de

A eſt à B, ainſi auſſi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C eſt à D : Item comme A eſt à B, ainſi C à D: donc comme A eſt au double, triple, ou quadruple, &c. de B, ſçauoir à G ; ainſi auſſi C ſera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D, ſçauoir à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee : icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & ſoient priſes de deux en deux en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublee, ſçauoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.



Car eſtans priſes G, H, I, equemultiplices de A, B, D : item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par la 15. p. de ce liure comme A ſera à B, ainſi G à H, puis que G, H, ſont equemultiplices d'icelles A, B, Mais comme A eſt à B, ainſi eſt E à F : donc par la 11. p. 5. comme G eſt à H, ainſi E eſt à F. Mais comme E eſt à F, ainſi auſſi L eſt à M, par la ſuſdite 15. pr. 5. pource que L, M, ſont equemultiplices d'icelles E, F : donc auſſi comme G eſt à H, ainſi L eſt à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B eſt à C, ainſi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplice de la premiere B, ſera à K multiplice de la ſeconde C, ainſi I multiplice de la troiſieſme D, ſera à L multiplice de la quatrieſme E : donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & la proportion d'icelles ſans ordre, puis qu'il a eſté demonſtré, que comme G eſt à H, ainſi L eſt à M, & comme H eſt à K, ainſi I à L ; & partant par la 21. p. 5. ſi G eſt plus grande, egale, ou moindre que K, auſſi I ſera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A ſera à C, ainſi ſera D à F. Parquoy ſi trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

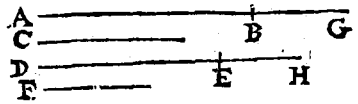
Que s'il y auoit plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublee, ſçauoir eſt que comme A eſt à B, ainſi F ſoit à O, & comme B eſt à C, ainſi E ſoit à F, & comme C à N, ainſi D à E. Ie dis que A ſera à N, comme D à O. D'autant qu'il a eſté demonſtré en trois grandeurs que comme A eſt à C, ainſi F eſt à O, & que par l'hypotheſe comme C eſt à N, ainſi D eſt à E, il y aura trois grandeurs d'vn coſté A, C, N, & trois d'vn autre D, E, O, leſquelles priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee. Donc dere-

chef en raiſon egale demonſtree en trois grandeurs A ſera à N, comme D à O. Le meſme ſera auſſi demonſtré en cinq grandeurs par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi ſemblablement de dauantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, & la cinquieſme à la ſeconde, comme la ſixieſme à la quatrieſme; la compoſée de la premiere & cinquieſme, ſera à la ſeconde, comme la compoſée de la troiſieſme & ſixieſme, ſera à la quatrieſme.

Soit la premiere AB à la ſeconde C, comme la troiſieſme DE eſt à la quatrieſme F; & la cinquieſme B G à la deuxieſme C, comme la ſixieſme EH à la quatrieſme F. Ie dis que la toute AG, ſera à C, comme la toute DH à F.



Car puiſque comm BG à C, ainſi EH à F, auſſi en changeant, comme C ſera à B G, ainſi F à E H. Veu donc que A B eſt à C, comme D E à F, & C à BG, comme F à EH, en raiſon egale, A B ſera à B G, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en compoſant, comme la toute AG ſera à BG, ainſi la toute DH ſera à EH, par la 18. pr. d'iceluy 5. liure: & derechef puis que A G eſt à B G, comme D H à E H, & BG à C, comme EH à F, en raiſon egale, AG ſera à C, comme DH à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Preſque en la meſme maniere ſera demonſtré en tout genre de proportion, ce qui a eſté demonſtré à la 6. pr. de ce 5. liure, tant ſeulement aux grandeurs multiplices, ſçauoir eſt,

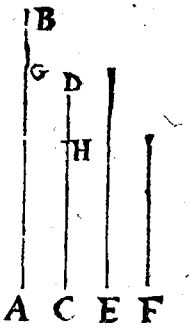
Si deux grandeurs ont meſme proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchees ayent meſme proportion à icelles; les reſtantes auront auſſi meſme proportion à icelles.

Que AG & DH ayent meſme proportion à C & F, c'eſt à dire que comme AG eſt à C, ainſi DH ſoit à F. Item les retranchez AB & DE ayent meſme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB eſt à C, ainſi DE ſoit auſſi à F: Ie dis que les reſtantes BG, EH ont meſme proportion à icelles C, F, c'eſt a dire que comme BG eſt à C, ainſi EH eſt à F. Car d'autant que comme AB eſt à C, ainſi DE eſt à F, par raiſon inuerſe, comme C à AB, ainſi F à DE: donc puis que A G eſt à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à D E, en raiſon egale AG ſera à AB, comme DH à DE: & en diuiſant comme BG ſera à AB, ainſi DH à DE. Et derechef, puis que BG eſt à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raiſon egale BG ſera à C, comme EH à F. Ce qui eſt propoſé.

THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, ſont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, deſquelles AB ſoit la plus grande & F la plus petite. Ie dis que AB & F enſemble, ſont plus grandes que les deux autres CD & E enſemble.



Car ſi de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retranche CH egale à E: AG ſera à CH, comme E à F, c'eſt à dire comme AB à CD. Et puiſque la toute AB eſt à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce liure, comme la toute AB ſera à la toute CD, ainſi le reſte GB ſera au reſte HD: Parquoy iceluy reſte GB ſera plus grand que le reſte HD, comme la toute AB eſt plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E ſont egales, ſi on adiouſte à icelles, les grandeurs egales F & CH, c'eſt à ſçauoir, F à icelle AG, & CH à E; viendront AG & F enſemble, egales à E & CH enſemble. Et adiouſtant à ces choſes egales, les inegales GB, & HD, ſeront faictes AB & F enſemble plus grandes que GE & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que HD. Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il failloit demonſtrer.

SCHOLIE.

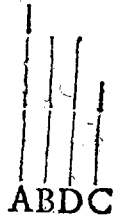
Or il s'enſuit neceſſairement que ſi la grandeur antecedante d'vne raiſon, eſt la plus grande de toutes celles de la propotion, que la conſequente de l'autre raiſon, ſera la plus petite de toutes, comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi E à F; & que AB premiere eſt plus grande que E tierce, par la 14. p. 5. CD ſeconde ſera auſſi plus grande que F quatrieſme.

Semblablement, pource que AB eſt plus grande que CD, auſſi E ſera plus grande que F a cauſe de la ſimilitude des raiſons, comme nous auons dit au Scholie de la meſme 14. prop. Que ſi au contraire la grandeur antecedante d'vne raiſon eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi on dit que F eſt à E, comme CD à AB.

Commandin adiouſte en ce lieu, le theoreme ſuiuant.

Si trois grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite d'icelles, ſeront plus grandes que le double de l'autre.

Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C, tellement que comme A eſt à B, ainſi B à C, & ſoit A la plus grande, & D la plus petite: Ie dis que A & D enſemble, ſont plus grandes que le double de B. Car ayant pris D egale à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & partant A & C enſemble, ſeront plus grandes que B & D enſemble par la 25. prop. 5. c'eſt adire que le double de B. Ce qui eſt propoſé.

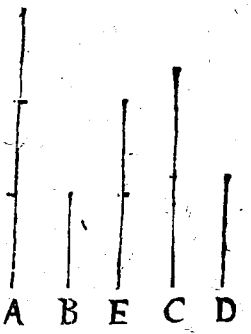


Euclide finit icy ſon 5. liure des Elemens; mais d'autant que Campanus, Commandin

Commandin & Clauius y adiouſtent quelques autres propoſitions, dont les bons Autheurs s'aident fort ſouuent, & les citent, comme ſi elles eſtoient d'Euclide, nous les adiouſterons auſſi icy.

THEOR. 26. PROP. XXVI.

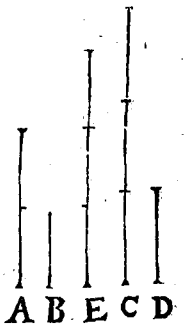
Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: en changeant, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatrieſme à la tierce.



Que A ait plus grande raiſon à B que C à D: Ie dis que la raiſon de B à A eſt moindre que la raiſon de D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C eſt à D. Donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que celle de E à B; & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que E; & partant B aura moindre raiſon à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeãt D à C. Donc auſſi la raiſon de B à A eſt moindre que celle de D à C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons preſque en la meſme maniere que ſi la premiere à moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en changeant, la ſeconde aura plus grande raiſon à la premiere, que la quarte à la tierce.



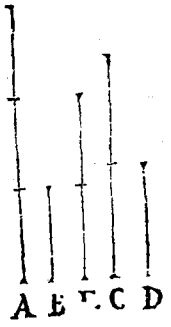
Que A ait moindre raiſon à B, que C à D: Ie dis qu'en changeant B a plus grande raiſon à A, que D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D: & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que celle de E à B, parce que nous auons demonſtré au ſcholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: & par la 8. prop. 5. la raiſon de B à A ſera plus grande que de B à E. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeant D à C: Donc auſſi la raiſon de B à A ſera plus grande que de D à C.

Autrement. *Dautant que la raiſon de A à B, eſt moindre que de C à D: la raiſon de C à D ſera plus grande que celle de A à B: donc en changeant par la 26. prop. 5. la raiſon de D à C, ſera moindre que de B à A: & partant il y aura plus grande raiſon de B à A que de D à C. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXVII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte; auſſi en permutant la premiere aura plus grande raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

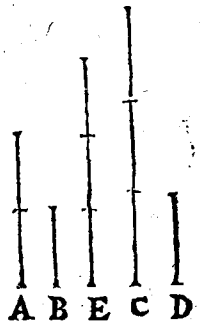
Que A ait plus grande raiſon à B que C à D. Ie dis qu'en permutant A aura plus grande raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D: & la raiſon de A à B ſera auſſi plus grande que de E à B: & partant A ſera plus grande que E par la 10 prop. 5. donc la raiſon de A à C ſera plus grande que de E à C par la 8. prop. 5. Mais pour ce qu'en changeant comme E eſt à C, ainſi B eſt à D. (car E eſt poſée à B, comme C à D,) il y aura auſſi plus grande raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.



SCHOLIE

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en permutant la premiere aura moindre raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Car ſoit la raiſon de A à B moindre que de C à D: Ie dis qu'en permutant A aura moindre raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D, & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que de E à B: & par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: parquoy la raiſon de A à C ſera moindre que de E à la meſme C par la 8. prop. 5. Et puis que E eſt poſée eſtre à B, comme C à D: en permutant comme E à C, ainſi B a D. Donc auſſi la raiſon de A à C ſera moindre que de B à D. Ce qui eſt propoſé.

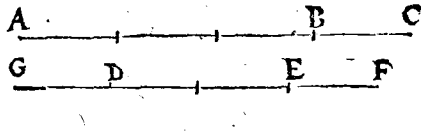


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de A à B, que de C à D, il y aura plus grande raiſon de C à D que de A à B: donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura auſſi plus grande raiſon de C à A que de D à B: & par la 26. prop. 5. en raiſon inuerſe, il y aura moindre raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.*

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte: la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce & de la quarte à la quarte.

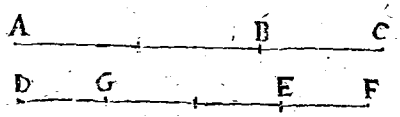
Que AB premiere ait plus grande raiſon à BC ſeconde, que D E tierce à EF quarte: Ie dis qu'en compoſant A C aura plus grande raiſon à B C, que DF à EF. Car ſoit entendu comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE ſoit à EF; & il y aura auſſi plus grande raiſon de



GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE sera plus grande que DE. Donc puis que comme AB est à BC, ainsi GE est à EF: en composant comme AC sera à BC, ainsi GF sera à EF: Mais il y a plus grande raison de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF est plus grande que DF) Donc aussi AC aura plus grande raison à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si AB a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en composant AC aura moindre raison à BC que DF à EF. Car derechef si cõme AB est à BC, ainsi quelque autre GE est à EF: Icelle GE sera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en composant AC sera à BC, comme GF, à EF. Mais GF a moindre raison à EF que DF à EF par la 8. pr. 5. attendu que GF est moindre que DF: donc aussi AC aura moindre raison à CB, que DF à EF.

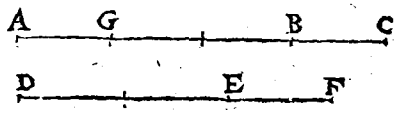


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raison de AB à BC, que de DE à EF, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AB à BC; & par la 28. p. 5. en composant il y aura aussi plus grande raison de DF à EF, que de AC à BC: & partant il y aura moindre raison de AC à BC, que de DF à EF.*

THEOR. 29. PROP. XXIX.

Si la composee de la premiere & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composee de la tierce & quarte à la quatriesme: Aussi en diuisant, la premiere aura plus grande raison à la deuxiesme, que la troisiesme à la quatriesme.

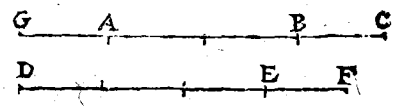
Que AC ait à BC plus grande raison que DF à EF: Ie dis qu'en diuisant AB, aura aussi à BC plus grande raison que DE à EF. Car soit entendu que comme DF est à EF, ainsi quelque autre GC soit à CB; & il y aura aussi plus grande raison de AC à BC que de GC à BC: & partant AC sera plus grande que GC par la 10. p. 5. Ostant donc BC commun, restera AB plus grande que GB: & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raison de AB à BC, que de GB à BC. Mais en diuisant par la 17. p. 5. comme GB est à BC, ainsi DE est à EF: (car on a posé GC estre à BC, comme DF à EF.) Donc aussi la raison de AB à BC sera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Que si AC a moindre raison à BC que DF à EF, aussi en diuisant AB aura

moindre raiſon à BC que DE à EF. Car ſi on entend GC eſtre à BC, comme DF à EF, la raiſon de AC à BC ſera pareillement moindre que celle de GC à BC: & par la 10. p. 5. AC ſera moindre que GC. Oſtant donc BC commune, reſtera AB moindre que GB; & par la 8. pr. 5. la raiſon de AB à BC ſera moindre que de GB à BC: Mais puis que GC eſt à BC comme DF à EF, en diuiſant GB ſera à BC comme DE à EF: Il y aura donc auſſi moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF.

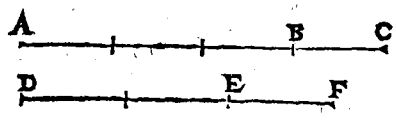


Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF, que de AC à BC: donc auſſi en diuiſant, il y aura plus grande raiſon de DE à EF, que de AB à BC par la 29. p. 5. & partant la raiſon de AB à BC ſera moindre que de DE à EF.*

THEOR. 30. PROP. XXX.

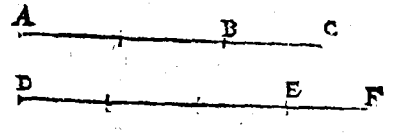
Si la compoſee de la premiere & ſeconde a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſee de la tierce & quarte à la quarte: par conuerſion de raiſon, la premiere & ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

Que AC ait plus grande raiſon à BC que DF à EF: Ie dis par conuerſion de raiſon, que AC a moindre raiſon à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raiſon à BC que DF à EF, en diuiſant AB aura plus grande raiſon à BC que DE à EF par la 29. p. 5. Donc par raiſon inuerſe, il y aura moindre raiſon de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en compoſant, il y aura auſſi moindre raiſon de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui eſtoit à demonſtrer.



SCHOLIE.

Semblablement ſi AC a moindre raiſon à CB que DF à EF, auſſi par conuerſion de raiſon AC aura plus grande raiſon à AB que DF à DE. Car puis qu'il y a moindre raiſon de AC à BC que de DF à EF, par la 29. p. 5. en diuiſant il y aura moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF, & en changeant par la 26. p. 5. il y aura pareillement moindre raiſon de BC à AB, que de EF à DE: donc en compoſant par la 28. p. 5. il y aura plus grande raiſon de AC à AB que de DF à DE.

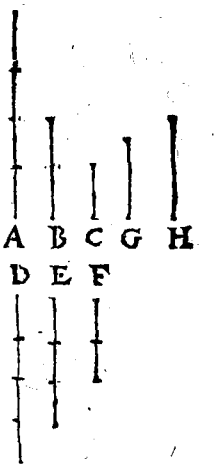


Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que celle de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF que de AC à BC: donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de DF à DE, que de AC à AB, c'eſt à dire qu'il y aura plus grande raiſon de AC à AB, que de DF à DE.*

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde, & auſſi plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: En raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E: Item, la raiſon de B à C ſoit auſſi plus grande que de E à F: Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura plus grande raiſon de A à C que de D à F.



Car ſoit entendu G eſtre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raiſon de B à C, que de G à C: Donc par la 10. p. 5. B ſera plus grande que G; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raiſon de A à G, que de A à B: Mais la raiſon de A à B eſt poſee plus grãde que de D à E: Il y aura donc beaucoup plus grande raiſon de A à G, que de D à E. Soit derechef poſée H eſtre à G, comme D à E: Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: & partant A aura plus grande raiſon à C, que H à la meſme C, par la 8. p. 5. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F, (pource que comme D eſt à E, ainſi H à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons en la meſme maniere, que ſi la raiſon de A à B eſt la meſme que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F: ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de D à E, & celle de B à C la meſme que de E à F: en raiſon egale, il ~~y aura~~ pareillement plus grande raiſon de A à C, que de D à F: car ſoit premierement A à B, comme D à E, mais la raiſon de B à C plus grande que de E à F. Soit poſee G à C comme E à F; & la raiſon de B à C ſera plus grande que de G à C, & conſequemment B plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à G que de A à B. Mais A eſt poſee à B, comme D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit poſee derechef H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A à G que de H à G; & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: Parquoy la raiſon de A à

C ſera plus grande que de H à C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F: (attendu que comme D à E, ainſi H à G, & comme E à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſsi plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Maintenant la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E, mais B ſoit à C, comme E à F. Soit poſée G à C, comme E à F; & B ſera auſsi à C, comme G à C: & par la 9. p. 5. B ſera egale à G. Parquoy A ſera à G, comme A à B par la 7. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt poſée plus grande que de D à E. Donc auſsi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit derechef poſée H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & partant A ſera plus grande que H par la 10. p. 5. & il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à C. Mais comme H eſt à C, ainſi en raiſon egale D eſt à F: (car comme D à E, ainſi H à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc pareillement plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Nous demonſtrerons ſemblablement que ſi A a moindre raiſon à B, que D à E; & B à C moindre raiſon que E à F: auſsi en raiſon egale A aura moindre raiſon à C, que D à F. Et le meſme aduiendra encore, ſi A eſtant à B comme D à E, la raiſon de B à C eſt moindre que de E à F: Ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſtant moindre que de D à E, B eſt à C comme E à F: Car il eſt manifeſte que la demonſtration ſera touſiours la meſme que deſſus.

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la ſeconde: En raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.



Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & que A ait plus grande raiſon à B, que E à F, & B à C que D à E: Ie dis qu'en raiſon egalle, A aura plus grande raiſon à C, que D à F.

Car ſoit entendu que G eſt à C, comme D à E; & il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de G à C: partant B ſera plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy la raiſon de A à G ſera plus grande que de A à B, par la 8. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt plus grande que de E à F: il y aura donc encore beaucoup plus grande raiſon de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H eſtre à G, cõme E eſt à F, & il y aura auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G. &

par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: parquoy il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à la meſme C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F: (car comme D eſt à E, ainſi G eſt à C, & comme E eſt à F, ainſi H à G.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

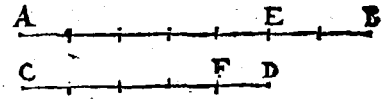
On demonſtrera ſemblablement, que ſi A a meſme raiſon à B que E à F, & B à C plus grande que D à E: Ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de E a F, mais celle de B à C la meſme que de D à E; en raiſon egale, la raiſon de A à C ſera plus grande que de D à F.

Par meſme raiſon on demonſtrera auſsi, que ſi les raiſons des premieres grandeurs ſont moindres; auſsi la raiſon des extremes ſera moindre; c'eſt à dire, que ſi A a moindre raiſon à B que E à F, & B à C que D à E: auſsi A aura moindre raiſon à C, que D à F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF: Ie dis que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD.



Car d'autant qu'il y a plus grande raiſon de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de AB à AE, que de CD a CF par la 27. p. 5. & par conuerſion de raiſon il y aura moindre raiſon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. p. 5. Donc en permutant, il y aura auſſi moindre raiſon de AB à CD, que de EB à FD par la 27. p. 5. c'eſt à dire, que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB, à la toute CD. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

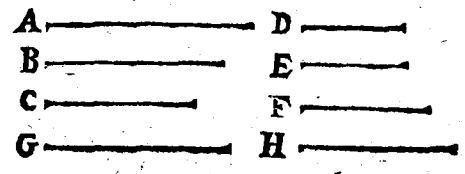
Que ſi la toute AB a moindre raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF: auſsi le reſte EB aura moindre raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD, comme il appert par la demonſtration cy-deſſus.

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'vn coſté, & autant d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſecon-

de à la seconde; & ceste cy soit aussi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainsi de suitte: Toutes les premieres ensemble auront plus grande raison à toutes les dernieres ensemble, que toutes les premieres, la premiere ostée, à toutes les dernieres, la premiere aussi ostée; mais moindre raison que la premiere des premieres à la premiere des dernieres; & finalement aussi plus grande raison que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F; & la raison de A à D soit plus grande que celle de B à E, & celle-cy plus grande que celle de C à F: Ie dis que A, B, C ensemble, ont plus grande raison à D, E, F ensemble, que B, C ensemble à E, F ensemble: mais moindre que A à D, & aussi plus grande que C à F.



Car puis qu'il y a plus grande raison de A à D que de B à E, en permutant, il y aura aussi plus grande raison de A à B que de D à E par la 27. p. 5. Donc en composant A & B ensemble, auront plus grande raison à B, que D & E ensemble à E par la 28. p. 5. Et en permutant derechef, A & B ensemble, auront plus grande raison à D & E ensemble que B à E. Et puis que la toute A, B, à plus grande raison à la toute D, E, que la retranchée B à la retranchée E, la restante A aura aussi plus grande raison à la restante D, que la toute A, B, à la toute D, E, par la prec. prop. Par mesme raison, il y aura plus grande raison de B à E, que de la toute B, C, à la toute E, F. Il y aura donc encore bien plus grande raison de A à D, que de la toute B, C à la toute E, F. Donc en permutant, il y aura plus grande raison de A à B, C ensemble, que de D à E, F ensemble par la 27. p. 5. Et en composant, il y aura plus grande raison de A, B, C à B, C, que de D, E, F à E, F, par la 28. p. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raison des toutes A, B, C ensemble, aux toutes D, E, F ensemble, que de B, C â E, F: ce qui est premierement proposé.

Et puis qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C à la toute D, E, F, que de la retranchee B, C à la retranchee E, F, il y aura aussi plus grande raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, par la prop. prec. Ce qui est secondement proposé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B à E, que de C à F: en permutant il y aura aussi plus grande raison de B à C, que de E à F par la 27. prop. 5. Et en composant, la toute B, C aura plus grande raison à C, que la toute E, F, à F par la 28. p. 5. Donc en permutant derechef, il y aura plus grande raison de B, C à E, F, que de C à F. Mais il a esté demonstré que

A, B, C,

A,B,C ensemble ont plus grande raison à D,E,F, ensemble, que B,C, à E,F: Il y aura donc encore bien plus grande raison des toutes A,B,C, aux toutes D,E,F, que de la derniere C à la derniere F. Ce qui est tiercement proposé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, auec la mesme hypothese, c'est à dire, que la raison de C tierce à F tierce soit plus grande, que de G quarte à H quatriesme: Ie dis que la mesme chose s'ensuit. Car comme il a desia esté demonstré en trois grandeurs, il y a plus grande raison de B à E que de B,C,G ensemble à E,F,H ensemble. Donc il y aura encore plus grande raison de A à D, que de B,C,G, à E,F,H. Et en permutant il y aura plus grande raison de A à B,C,G que de D à E,F,H. Parquoy en composant il y aura aussi plus grande raison de A,B,C,G à B,C,G, que de D,E,F,H à E,F,H: & en permutant il y aura plus grande raison de A,B,C,G à D,E,F,H, que de B,C,G à E,F,H,. Ce qui est premierement proposé.

Et veu qu'il y a plus grande raison de la toute A,B,C,G, à la toute D,E,F,H, que de la retranchee B,C,G, à la retranchee E,F,H, la restante A aura plus grande raison à la restante D, que la toute A,B,C,G, à la toute D,E,F,H. Ce qui est secondement proposé.

Mais comme il a esté demonstré en trois grandeurs, B,C,G ont plus grande raison à E,F,H, que G à H: & A,B,C,G plus grande à D,E,F,H que B,C,G,à E,F,H: Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A,B,C,G à D,E,F,H, que de la derniere G à la derniere H: ce qui est tiercement proposé.

En la mesme maniere on conclurra le mesme en 5 grandeurs par 4: & en 6 par 5, &c. tout ainsi qu'il est demonstré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

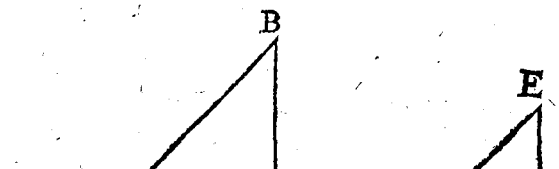
Fin du cinquiesme liure.

ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

EMBLABLES figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au ſien, & les coſtez qui contiennent les angles egaux, proportionnaux.

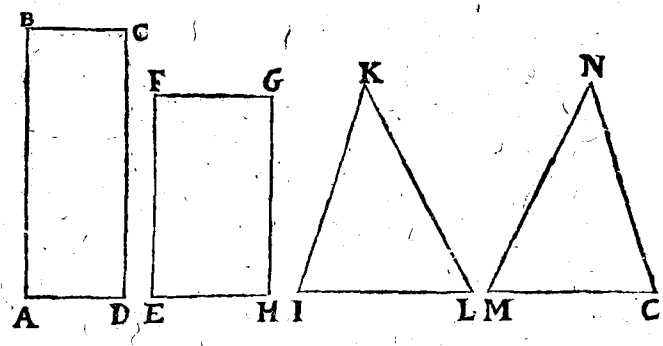
C'eſt à dire, que toutes figures rectilignes ſont dittes ſemblables, ſi eſtans equiangles elles ont les coſtez d'alentour leurs angles egaux proportionnaux : comme les deux triangles ABC, DEF, ſeront dits ſemblables, ſi l'angle A eſtant egal à l'angle D, l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; les coſtez qui ſont & conſtituent iceux angles egaux, ſont proportionnaux; c'eſt à ſçauoir, que comme AB eſt à AC, ainſi DE ſoit à DF, & comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF, & comme AC eſt à BC, ainſi DF ſoit à EF.



Que ſi l'vne ou l'autre des deux conditions ſuſdites manque, c'eſt à dire, que chacun des angles de l'vne des figures eſtant egal à chacun des angles de l'autre, ſi les coſtez d'alentour leurs angles egaux ne ſont proportionnaux; ou au contraire : telles figures ne ſeront dittes ſemblables, comme ſont le quarré, & le quarré long : car ces deux figures ont bien les angles egaux, ſçauoir droicts : mais les coſtez de l'vne ne ſont pas en meſme raiſon que les coſtez de l'autre : car ceux du quarré ſont en raiſon d'egalité, & ceux d'alentour l'angle droict du quarré long, ſont en raiſon d'inegalité, puis que l'vn eſt plus grand que l'autre. D'où eſt manifeſte, que toutes figures rectilignes equiangles & equilaterales, leſquelles ont les angles & les coſtez egaux en nombre, ſont ſemblables, combien qu'elles ſoient inegales.

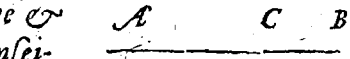
2. Les figures ſont reciproques, quand les termes antecedans & conſequens des raiſons, ſont en l'vne & en l'autre figure.

C'eſt à dire, que s'il y a deux figures ſemblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux ſoient en l'vne des figures, & le ſecond & troiſieſme terme en l'autre; icelles figures ſeront dictes reciproques. Comme ſi aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH, les coſtez AB, BC, ſont proportionnaux aux coſtez EF, FG; tellement qu'il y ait meſme raiſon de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB ſoit à FG comme EF à BC: Iceux parallelogrammes ſeront dicts figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux eſt le terme antecedant de l'vne des raiſons, & le conſequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, ſeront auſſi dicts reciproques, ſi IK eſt à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.



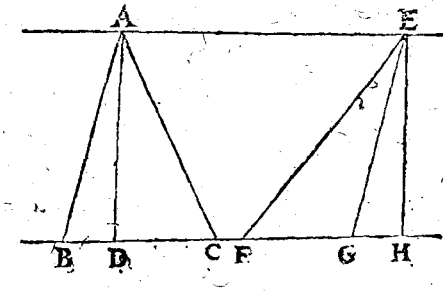
3. Vne ligne droicte eſt dicte eſtre diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, quand la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

Quand quelque ligne droicte, comme AB, eſt couppee inegalement en C, de telle ſorte que la toute AB, ſoit au plus grand ſegment AC, comme iceluy plus grand ſegment AC, eſt au moindre ſegment BC: ceſte ligne AB ſera dicte eſtre couppee en C ſelon la moyenne & extreme raiſon. Or comme cela ſe fait, Euclide l'enſeignera en la 30. p. de ce liure, combien que ſous autres paroles il l'ait deſia enſeigné à la 11. p. 2.



4. La hauteur d'vne chacune figure, eſt la perpendiculaire tirée du ſommet à la baſe.

Si de A ſommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la baſe BC, icelle perpendiculaire ſera la hauteur d'iceluy triangle ABC; tellement que ledict triangle ſera dict auoir autant de hauteur qu'eſt icelle perpendiculaire AD: ſemblablement la perpendiculaire EH tiree de E, ſommet du triangle EFG, ſur la baſe FG, prolongee de la part de G, ſera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy ſi les perpendiculaires de deux figures menees des ſommets d'icelles ſur leurs baſes (ſoit qu'icelles baſes ſoient prolongees, ou non) ſont



egales; icelles figures seront dictes auoir mesme hauteur. Or telles perpendiculaires seront egles, quand les bases des figures & leurs sommets seront constituez en mesmes paralleles: Comme sont les perpendiculaires AD, EH, des triangles ABC, FEG, constituez entre mesmes paralleles. Car puis que les deux angles ADH, EHD, interieurs, & de mesme part, sont droicts, les lignes AD, EH, seront paralleles par la 28. p. 1. Mais AE, DH, sont aussi paralleles, puis que les triangles ABC, EFG, sont posez estre constituez entre mesmes paralleles: Donc le quadrilatere ADHE, sera parallelogramme, & partant les costez opposez AD, EH, seront egaux par la 34. prop. 1. Ce qui estoit à prouuer.

5. Vne raison est dicte estre composee de raisons, quand les quantitez des raisons multipliées entr'elles font quelque raison.

C'est à dire, que quand les quantités de deux ou plusieurs raisons multipliées entr'elles, produisent quelque quantité de raison: icelle raison est dicte estre composee de celles-là. Or la quantité d'vne raison est le denominateur d'icelle, comme nous auons ia dit sur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raison triple est 3: mais de la subtriple c'est $\frac{1}{3}$, & c. Ainsi la raison double se dit estre composee de la sesquialtere, & de la sesquitierce, pource que les quantitez ou denominateurs d'icelles, sçauoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, estans multipliés entr'eux produisent 2, denominateur ou quantité de la raison double.

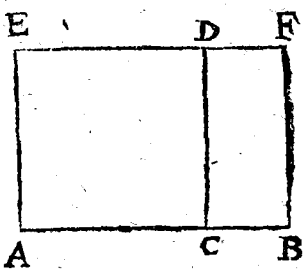
Derechef, la mesme raison double sera dicte estre composee de la double sesquialtere, & de la subsesquiquarte: car les quantitez ou denominateurs de ces deux raisons, estans multipliez entr'eux, produisent encore 2, denominateur de la mesme raison double. Pareillement la raison trigecuple se dit estre composee des raisons double, triple & quintuple; d'autant que les denominateurs d'icelles raisons, sçauoir est 2, 3, & 5, estans mmltipliez entr'eux produisent 30, denominateur d'icelle raison trigecuple. Parquoy estans posees tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extremes sera composee des raisons entre-moyennes, pource que le denominateur ou quantité de la raison de la premiere grandeur a la derniere, est produite & procreée par les denominateurs des raisons entre-moyennes multipliés entr'eux: comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double; & C à D en raison superbipartiente tierce: la raison des extremes AD, qui est quintuple, est composee des trois raisons susdites. Car il est euident que multipliant le denominateur de la raison de A à B, par celuy de B à C, sçauoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3: & partant A est à C en raison triple, & multipliant le denominateur d'icelle, sçauoir est 3 par le denominateur de la raison de C à D, qui est $1\frac{2}{3}$ prouiennent 5; & partant A qui est à D en raison quintuple, est produite & composee des raisons entremoyennes. A. B. C. D. 30. 20. 10. 6.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27, 28 & 29 prop. de ce liure, que plusieurs du 10. adiouſtent icy ceste def.

6. Vn parallelogramme estant appliqué selon quelque ligne droicte donnee, est dict defaillir d'vn parallelogramme,

lors qu'il n'occuppe pas toute ladicte ligne: mais il eſt dit exceder, quand il en occuppe vne plus grande; en ſorte toutesfois qu'iceluy parallelogramme defaillant, ou excedant ait deux angles communs auec le parallelogramme appliqué ſur toute la ligne propoſee; & la difference de ces deux parallelogrammes eſt dicte defaut, ou excez.

Soit vne ligne droicte AB ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme ACDE, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB, ains laiſſe CB; & ſoit acheué le parallelogramme ABFE tirant BF parallele à CD iuſques à ce qu'elle rencontre ED prolongee en F. Or le parallelogramme AD appliqué ſelon la ligne droicte AB, ayant les deux angles A, E communs auec le parallelogramme AF, appliqué & deſcrit ſur toute ladite ligne AB, eſt dict defaillir du parallelogramme CF; & iceluy parallelogramme CF ſera appellé le defaut.

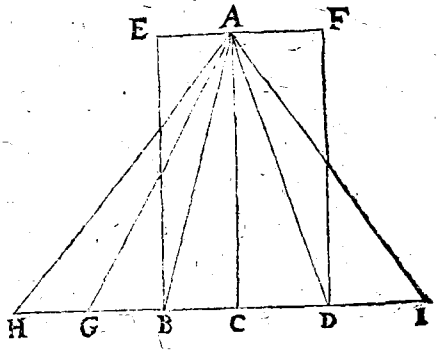


Derechef, ſoit vne ligne droicte AC, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme AF, ayant le coſté AB plus grand que la ligne propoſee AC, & ſoit tiree CD parallele à BF. Donc le parallelogramme AF appliqué ſelon la ligne droicte AC, & qui auec le parallelogramme AD deſcrit ſur toute ladicte ligne AC a les deux angles A, E communs, ſera dit exceder AD du parallelogramme CF, tellement qu'iceluy CF eſt dit l'excez.

THEOR. 1. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrammes de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux triangles ABC & ACD de meſme hauteur, ſur les baſes BC & CD: ſoient auſſi deux parallelogrammes CE, CF de meſme hauteur, les baſes deſquels ſoient les meſmes BC, CD. Ie dis premierement que le triangle ABC, eſt au triangle ACD, comme la baſe BC, eſt à la baſe CD: c'eſt à ſçauoir que ſi on poſe pour premiere grandeur la baſe BC, pour ſeconde la baſe CD, pour troiſieſme le triangle ABC, & pour quatrieſme le triangle ACD; les equemultiplices de la premiere & troiſieſme ſeront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, ainſi que le requiert la 6. definition du 5. liure.



Qu'il ne ſoit ainſi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres auoir

pris d'vn costé BG & GH, chacune egale à BC: item de l'autre costé, DI egale à CD, soient menees les lignes droictes AG, AH, AI. Donc par la 38. pr. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux: aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la base CI contiendra la base CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy si la base CH, est egale à la base CI, le triangle ACH sera aussi egal au triangle ACI, par la 38. p. 1. Mais si la base est plus grande, consequemment le triangle sera plus grand; si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la base BC sera à la base CD, ainsi le triangle ABC sera au triangle ACD: ce qui estoit à demonstrer pour la premiere partie.

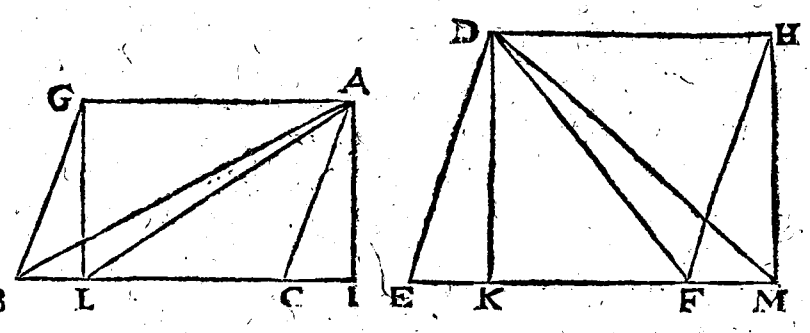
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le mesme se peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. prop. 1 & par la 15. pr. 5. ce qui est prouué d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont egales, ou vne mesme, sont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les bases BC, EF egales: Ie dis que le triangle ABC est au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI est à la hauteur DK. Car si on prend les lignes IL, KM egales aux bases BC, EF, & on tire les lignes LA, MD, le triangle ALI sera egal au triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils sont sur bases egales LI, BC, & entre mesmes paralleles AG, IB: Par mesme raison le triangle DKM sera egal au triangle DEF. Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC sera à DEF, ainsi ALI sera à DKM. Mais par la 1. p. 6. comme ALI est à DKM, ainsi AI à DK. (car si AI, DK sont posees les bases, les lignes droictes egales LI, KM seront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF, comme AI à DK.



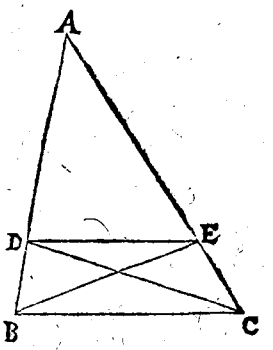
Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC est à DEF, ainsi le parallelogr. AGBC au parallelogramme DEFH: (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par la 41. p. 1.) aussi AGBC sera à DEFH, comme AI à DK. Le mesme s'ensuiura si les triangles, & les parallelogrammes ont vne mesme base.

THEOR. 2. PROP. II.

Si on meine vne ligne droicte parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, laquelle couppe les deux autres coſtés ; elle les couppera proportionnellement : & ſi deux coſtés d'vn triangle ſont couppez proportionnellement, la ligne couppante ſera parallele à l'autre coſté.

Soit le triangle ABC, dans lequel ſoit menee la ligne droicte DE parallele au coſté BC, couppant les deux autres coſtez AB & AC aux poincts D & E. Ie dis que les coſtez AB, AC ſont couppez proportionnellement aux poincts D & E, c'eſt à dire que AD ſera à DB, comme AE eſt a EC.

Car eſtans menees les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront meſme raiſon l'vn comme l'autre au troiſieſme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, eſtans de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme la baſe BD à la baſe DA : & par la meſme propoſition, le triangle CDE, eſtant de meſme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils ſeront auſſi l'vn à l'autre, comme CE eſt à EA : & partant par la 11. p. 5. BD ſera à DA, comme CE à EA : (puiſque ces deux raiſons ſont les meſmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au meſme triangle DEA.) Ce qui eſtoit propoſé.



Pour la ſeconde partie : ie dis que ſi DB eſt à DA, comme CE à EA, la ligne couppante DE ſera parallele au coſté BC.

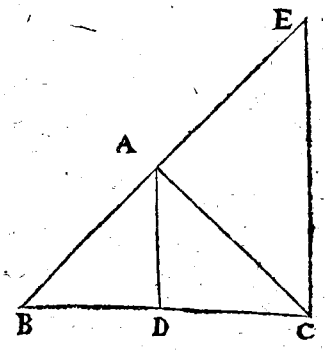
Car les triangles DEB & DEA, ſeront par la 1. p. 6. l'vn à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, ſeront auſſi l'vn à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB ſera au triangle DEA, comme le triangle CDE eſt au meſme triangle DEA : & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC ſeront egaux, leſquels eſtans ſur meſme baſe DE, par la 39. p. 1. ils ſeront entre meſmes paralleles : & partant DE ſera parallele à BC. Parquoy ſi l'on meine vne ligne parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement par vne ligne droicte, laquelle couppe auſſi la baſe ; les ſegmens de la baſe ſeront l'vn à l'autre comme les autres coſtez du triangle : Et ſi les ſegmens de la baſe ſont l'vn à l'autre comme les autres coſtez du triangle : la ligne droicte

tiree du ſommet à la ſection de la baſe, couppe l'angle en deux egalement.

Au triangle ABC, ſoit l'angle BAC couppé en deux egalement par la ligne AD, laquelle couppe auſſi la baſe BC au poinct D : ie dis premierement, que BD eſt à DC, comme AB à AC.



Qu'il ne ſoit ainſi: apres auoir du poinct C mené CE parallele à DA, ſoit continué BA directement iuſques à ce qu'il rencontre CE en E; (Or BA, CE ſe rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE ſont moindres que deux droicts, eſtans egaux aux deux B & BDA, qui ſont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE ſont paralleles, l'angle CAD ſera egal à ſon alterne ACE par la 29. p. 1. Et ſi l'exterieur DAB ſera egal à l'oppoſé interieur AEC. Mais BAD, CAD eſtans egaux par l'hypotheſe, auſſi par les com. ſent. AEC, ACE ſeront egaux : & partant par la 6. p. 1. les coſtez AE & AC ſeront egaux. Mais par la precedente prop. BA eſt à AE, comme BD à DC; (eſtant AD parallele à CE) & par conſequent BA ſera auſſi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la ſeconde partie : ie dis que ſi BA eſt à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB ſera couppé en deux egalement par la ligne droicte AD.

Car apres auoir conſtruit comme deſſus, BA ſera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA ſera à AE, comme le meſme BA eſt à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC ſeront egaux ; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, ſeront auſſi egaux; & par la 29. p. 1. ils ſont egaux, l'vn à DAB, & l'autre à DAC, leſquels par ce moyen ſeront auſſi egaux; ce qui eſtoit propoſé. Parquoy ſi l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

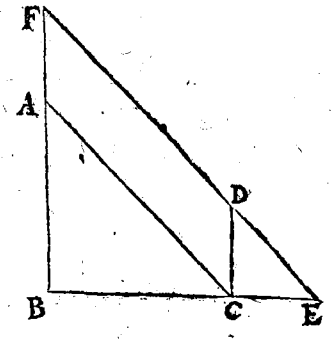
THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles equiangles, les coſtez qui ſont au long des angles egaux, ſont proportionnaux; & les coſtez qui ſouſtiennent les angles egaux, ſont de meſme raiſon.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles : c'eſt à dire, que l'angle ABC ſoit egal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troiſieſme au troiſieſme. Ie dis que comme AB eſt à BC, ainſi DC à CE; & comme BC à CA, ainſi CE à ED; & finablement comme AB à AC, ainſi DC à DE. Car ainſi les coſtez d'alentour les angles egaux, ſont les proportionnaux, & les coſtez homologues, ou de meſme raiſon, ſont ceux-là qui ſouſtiennent les angles egaux, c'eſt à dire, que tous les antecedans, & ſemblablement les conſequens regardent les angles egaux.

Soient

Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE soit egal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal à l'angle ACB, aussi les angles B & E seront moindres que deux droicts: & partant les lignes BA & ED estans produittes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennent en F. Il est euident que l'angle exterieur ECD, estant par l'hypothese egal à son opposé interieur CBA; DC sera parallele à FB par la 28. p. 1.



Pareillement l'angle exterieur ACB estant egal à son opposé interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez opposez egaux. Mais AC estant parallele à EF, par la 2. p. 6. AB sera à AF, ou CD son egale, comme BC à CE; & en permutant par la 16. p. 5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD estant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son egale, sera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.

Veu donc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison egale AB sera à AC, comme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

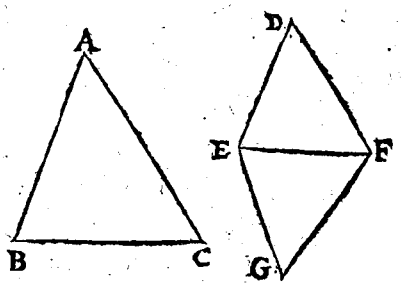
De cecy resulte, que si vne ligne droicte parallele a vn costé d'vn triangle, couppe les deux autres costez d'iceluy; elle ostera vn triangle semblable au tout. Comme au triangle BFE estant menée la ligne droicte AC parallele au costé FE, qui couppe les deux autres costez en A & C: Ie dis que le triangle ABC retranché par icelle ligne AC, est semblable au triangle BFE. Car d'autant que par la 29. p. 1. l'angle externe BAC est egal à l'interne de mesme costé F, & que l'angle B est commun à tous les deux triangles BAC, BFE, ils seront equiangles par le Corol. de la 32. p. 1. Parquoy, comme il a esté demonstré cy-dessus, ils ont les costez autour des angles egaux proportionnaux: & partant selon la 1. def. 6. iceux triangles BAC & BEF seront semblables.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, soubs lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA, comme EF à FD, & encore AB à AC comme DE à DF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir l'angle A estre egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F: car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.

Qu'il ne ſoit ainſi : ſur la ligne EF, & aux deux poincts E & F ſoient conſtruits deux angles, ſçauoir FEG egal à l'angle B, & EFG egal à l'angle C, tirant les lignes EG, & FG iuſques à ce qu'elles ſe rencontrent en G : Et par la 32. p. 1. le troiſieſme angle G ſera egal au troiſieſme angle A. Parquoy les triangles ABC, GEF ſont equiangles : & par la 4. prop. 6. comme AB eſt à BC, ainſi GE à EF. Mais comme AB eſt à BC, ainſi auſſi a eſté poſé DE à EF. Donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainſi DE à la meſme EF : & partant par la 9. p. 5. GE, DE ſeront egales. Et d'autant que par la propoſition precedente, comme BC eſt à CA, ainſi EF eſt à FG ; & par l'hypotheſe comme BC eſt à CA, ainſi EF eſt à FD : par la 11. p. 5. comme EF ſera à FG, ainſi la meſme EF ſera à FD : & par la 9. p. 5. FG, FD ſeront egales. Veu donc que les coſtez EG, FG du triangle GEF, ſont egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & la baſe EF commune aux deux triangles, les angles G & D ſeront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE ſeront auſſi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au ſien. Parquoy l'angle G eſtant egal à l'angle A, auſſi l'angle D ſera egal au meſme angle A ; & ainſi l'angle DEF ſera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainſi qu'il eſtoit propoſé. Si donc deux triangles ont les coſtez proportiõnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux ; ils ſeront equiangles, & auront les angles egaux ſous leſquels les coſtez de meſme raiſon ſont ſubtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainſi DE ſoit à EF. Ie dis que les triangles ſont equiangles, ſçauoir que l'angle A eſt egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainſi les angles egaux ſont ſubtendus des coſtez homologues.

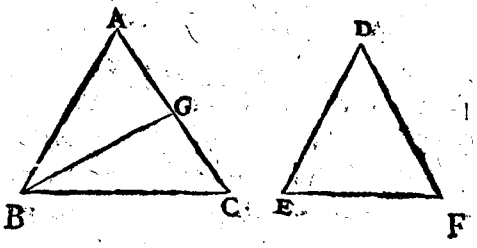
Qu'il ne ſoit ainſi ; ſur la ligne EF ſoit conſtruit, comme en la propoſit. & fig. precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC : & par la 4. p. 6. GE ſera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils ſont en la meſme raiſon) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne meſme raiſon à EF) ſeront egaux ; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux coſtez egaux à deux coſtez, ſçauoir GE, EF, à DE, EF, chacun au ſien, & les deux angles au poinct E, egaux (car ils ſont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la baſe egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien : & partant iceux triangles ſeront equiangles. Mais l'vn d'iceux triangles, ſçauoir GEF, eſt equiangle au triangle ABC par la conſtruction. Donc l'autre triangle DEF ſera auſſi equiangle au meſme trian-

gle ABC. Parquoy si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn autre angle, proportionnaux, estans les troisiesmes angles de mesme espece : Iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF : mais les autres angles C & F soient de mesme espece, c'est à dire aigus, droicts, ou obtus : & soient premierement aigus. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir est, que les angles ABC & E, à l'entour desquels sont les costez proportionnaux, & les angles C & F, sont egaux.



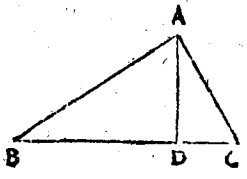
Car si l'angle B est egal à l'angle E, il appert par la precedente prop. que les triangles seront equiangles. Mais si lesdits angles ne sont egaux, soit B plus grand que E, & soit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. Donc le troisiesme angle AGB, sera egal au troisiesme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG & DEF seront equiangles ; & par la 4. p. 6. comme AB sera à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB est à BC, ainsi DE à EF : donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi le mesme AB sera à BC ; & partant par la 9. p. 5. BG, & BC seront egaux, & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG serõt egaux, & tous deux aigus, & par consequent l'angle BGA sera plus grand qu'vn droict, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droicts : Mais l'angle AGB a esté demonstré egal à l'angle F : donc F seroit aussi plus grãd qu'vn droict, & on l'a posé aussi moindre : ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera egal à l'angle BGC ; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droicts, mais egaux, ou plus grands que deux droicts : ce qui est absurde : car par la 17. p. 1. ils sont moindres que deux droicts. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisiesme C sera aussi egal au troisiesme F : ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle rectangle on tire vne per-

pendiculaire sur labase ; elle couppera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droict A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Ie dis que les triangles ABD & ADC, ausquels est diuisé iceluy triangle ABC par la perpendicul. AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.



Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droict, & egal à l'angle droict BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. p. 1. le troisiesme angle BAD, sera egal au troisiesme ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC, seront equiangles ; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD ; & comme BA à AC, ainsi BD à DA ; & comme BC à CA, ainsi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce liure les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours, on prouuera que les deux triangles ABC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables : car l'angle C estant commun à tous les deux triangles, & l'angle droict BAC egal à l'angle droict ADC, le troisiesme angle CAD sera egal au troisiesme angle B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA à CD : & comme CA à AB, ainsi CD à DA, & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On demonstrera en la mesme maniere, les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puisque les angles au poinct D sont droicts, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont esté de monstrez egaux : & partant par la 4. p. 6. comme BD sera à DA, ainsi DA à DC : & comme DA à AB, ainsi DC à CA : & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'vn triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'vn triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base : & chacun des costez comprenant l'angle droict, estre aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

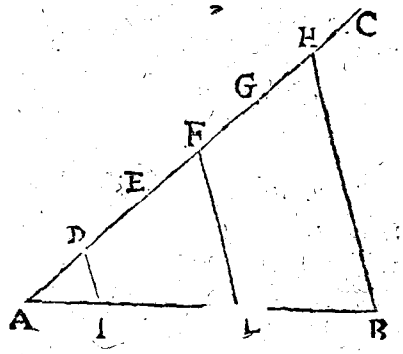
Car il a esté demonstré, que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC : & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB est à BA, ainsi BA à BD : & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC est à CA, ainsi CA à CD : & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnée, oster vne partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oster la cinquiesme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du poinct A ſoit menée la ligne droicte AC interminement, faiſant quelconque angle auec AB, comme BAC, & en icelle AC, ſoient priſes à l'aduanture autant de parties egales que denotte la partie qu'on veut oſter, comme en l'exemple propoſé, il faut prendre cinq parties egales AD, DE, EF, FG, GH: & apres auoir conjoinct les poincts B & H par la ligne BH, du poinct D ſoit menée DI, parallele à HB: Ie dis que AI eſt la cinquieſme partie requiſe de AB.



Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI eſt parallele au coſté HB, par la 2. p. 6. comme HD ſera à DA, ainſi BI à IA: & en compoſant par la 18. p. 5. comme HA ſera à DA, ainſi BA à IA: mais par la conſtruction HA eſt quintuple de AD: donc auſſi BA ſera quintuple de AI: & partant AI ſera la cinquieſme partie de la ligne droicte AB, laquelle auoit eſté demandée. Donc d'vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

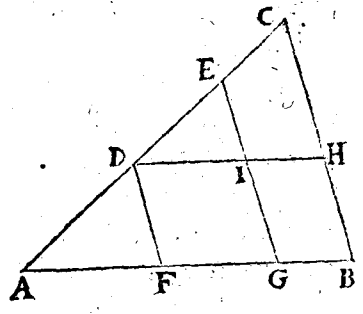
Que ſi de AB il falloit coupper pluſieurs parties, comme pour exemple les trois cinquieſmes, il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, qu'eſtant tirée la ligne FL parallele à HB, le ſegment AL ſera les trois cinquieſmes de AB, tout ainſi que AF eſt les trois cinquieſmes de AH. Et pour promptement practiquer cecy, il faut deſcrire du centre F, & de l'interualle HB vn arc au deſſous de la ligne donnée AB, mais de B & de l'interualle FH, d'eſcrire vn autre arc qui coupe le precedent, puis tirer vne ligne droicte de la ſection d'iceux arcs à F, & icelle couppera la partie requiſe AL.

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper vne ligne droicte donnée non couppée, ſemblablement à vne autre ligne droicte donnée & couppée.

Soient données les lignes droictes AB, AC, deſquelles AC eſt couppée en D & E: & il faut coupper AB en parties ſemblables & proportionnelles à celles de AC.

Soient accommodees icelles lignes données en ſorte qu'elles facent quelconque angle BAC; & apres auoir mené BC, des poincts D & E, ſoient menees DF, EG, paralleles à icelle BC, par la 31. p. 1. Ie dis que la ligne AB eſt ſemblablement couppée en F & G, comme la ligne AC eſt couppée en D & E. Car par la 2. p. 6. comme AD eſt à DE, ainſi AF à FG. Que ſi on tire DH parallele à AB couppãt EG en I. Derechef, par la ſuſdicte 2. p. 6. comme DE ſera à EC, ainſi DI à IH, c'eſt à dire, ainſi FG à GB, pource que par la 34. p. 1. FG eſt



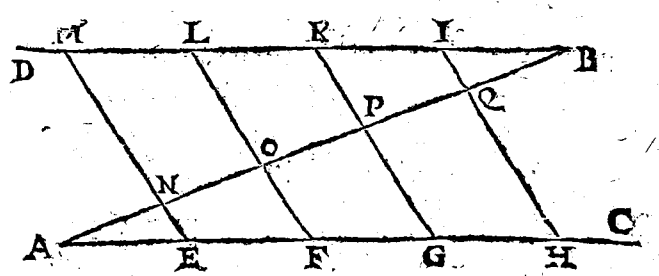
egale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB ſeront auſſi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, ſont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC: & partant AB eſt couppée ſemblablement à AC, ainſi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons icy deux Probl. fort vtiles, & neceſſaires aux choſes geometriques.

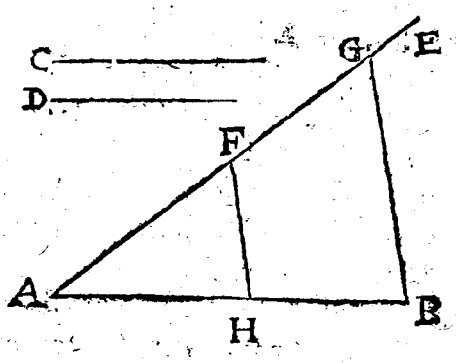
1. Eſtant donnée vne ligne droicte, la coupper en tant de parties egales qu'on voudra.

Soit la ligne donnée AB, qu'il faut coupper en cinq parties egales. De l'extremité A, ſoit menée la ligne AC, tant qu'il ſera de beſoin, faiſant quelconque angle auec AB; puis de l'extremité B, ſoit menée BD parallele à AC, & d'icelle AC ſoient couppées quatre parties egales AE, EF, FG & GH, qui eſt vne partie moins que le nombre des parties eſquelles il faut coupper la ligne donnée; en apres, du poinct B en BD, ſoient auſſi priſes les quatre parties BI, IK, KL, & LM egales a celles de la ligne AC; puis eſtans menées les lignes EM, FL, GK, & HI, elles coupperont la ligne donnée AB en cinq parties egales. Car puis que par la cõſtruction les lignes EF, ML, ſont egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. ME, LF, ſeront auſſi paralleles entr'elles: Et par meſme raiſon LF, KG, HI, ſeront pareillement paralleles. Veu donc que AH eſt couppée en quatre parties egales, AQ le ſera auſſi. Par meſme raiſon BN ſera encore diuiſée en quatre parties egales, parce que BM a eſté couppée en autant de parties egales. Parquoy veu que tant AN que BQ ſont egales à chaſque partie NO, OP, PQ; toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ, & QB, ſeront egales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.



2. Coupper vne ligne droicte donnée en deux parties, qui ſoient entr'elles ſelon vne raiſon donnée.

Soit la ligne droicte donnée AB, qu'il faut coupper en deux parties, qui ayent telle raiſon entr'elles que C à D: Du poinct A, ſoit menée AE faiſant quelconque angle auec AB; & d'icelle AE, ſoit couppée AF egale à C, & puis FG egale à D: en apres ſoit menée BG, & du poinct F tirée FH parallele à icelle BG, laquelle coupe AB en H: & icelle AB ſera couppée à iceluy poinct H, ſelon la raiſon de C à D, puis que par la 2. prop. de ce liure, AH eſt à HB, comme AF à FG, qui ſont egales à C & D. Ce qu'il falloit faire.

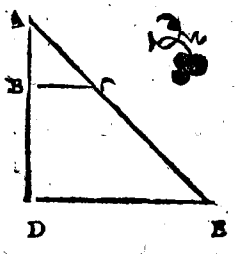


PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, en trouuer vne troisieſme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC, auſquelles il en faut trouuer vne troiſieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé AB interminement, ſoit faicte BD egale à AC, & mené CB; puis du poinct D, ſoit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Ie dis que CE eſt la troiſieſme proportionnelle requiſe, c'eſt à dire que comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droicte BC eſt parallele au coſté DE, par la 2. p. 6. comme AB ſera à BD, ainſi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB eſt à BD, ainſi la meſme AB eſt à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troiſieſme proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

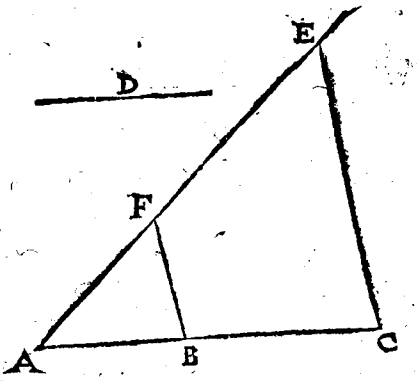


PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes donnees, en trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient les trois lignes droictes données AB, BC, & D, auſquelles il en faut trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées les deux premieres AB, BC, ſelon vne ligne droicte AC; & ayant tiré de A vne ligne droicte interminée AE, faiſant auec la premiere AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, ſoit couppée AF egale à D, & menée BF: en apres, de C, ſoit menée CE parallele à icelle BF, rencontrant AE en E. Ie dis que FE eſt la quatrieſme proportionnelle requiſe. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF eſt parallele à CE, par la 2. p. 6. comme AB eſt à BC, ainſi AF, où D ſon egale eſt à FE. Nous auons donc trouué vne quatrieſme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

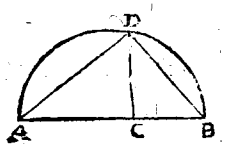


PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, disposées en vne ligne droicte AB, sur laquelle soit descrit vn demy cercle ADB : & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D : Ie dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car estans menées les deux lignes droictes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, sera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

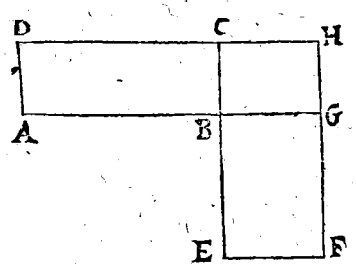
SCHOLIE.

De cecy est euident qu'vne ligne droicte tirée perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'vn cercle, iusques à la circonference d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car dequelconque poinct pris au diamettre AB, estant leuée vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne prop. entre les deux segmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal à vn angle ; les costez au long des angles egaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : Ie dis que les costez qui sont autour d'iceux angles egaux, sont reciproques : c'est à dire, que AB est à BG, comme EB à BC.



Car les parallelogrammes AC, BF, estans disposez de telle façon que les deux costez AB & BG, facent vne ligne droicte AG ; les deux costez EB, BC, feront aussi vne ligne droicte EC, à cause des angles egaux ABC, EBG, comme il est euident par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soient prolongez DC, FG, iusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogramme BH, par la 7. p. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelog. BH, est par la 1. p. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, est comme celle de EB à BC :

à BC: & partant par la 11. p. 5. comme AB à BG, ainsi EB à BC. Ce qui estoit proposé.

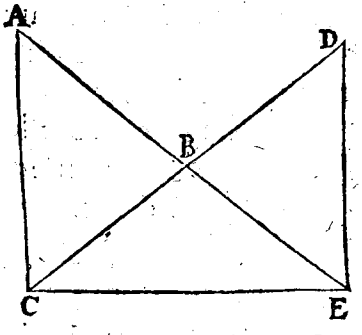
Pour la seconde partie; si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient egaux: Ie dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi egaux.

Car ayant fait la mesme construction que deuant, on prouuera par la 1. p. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la base AB à la base BG: pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raisons des bases sont posees semblables: donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG, au troisiesme BH seront semblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils seront egaux. Parquoy des parallelogrammes egaux, &c, Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux triangles egaux ABC, & DBE, ayans les angles au poinct B egaux: Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques: c'est à dire, que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.



Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & facent vne seule ligne droicte AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi vne ligne droicte CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBE sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC au triangle BEC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE: pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB est à BC: & partant par la 11. p. 5. AB sera à BE, comme DB à BC. Ce qui a esté proposé.

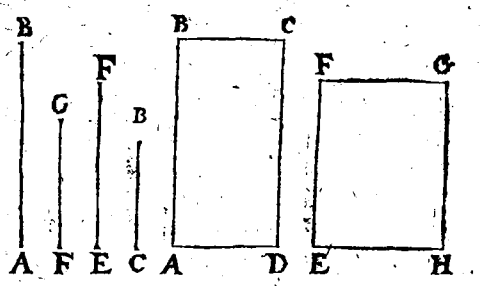
Pour la seconde partie: soient les costez d'alentour les angles egaux au poinct B, reciproques, c'est à scauoir, que comme AB est à BE, ainsi DB à BC. Ie dis que les triangles ABC, DBE, sont egaux. Car ayant fait la mesme construction que cy-dessus, par la 1. p. 6. comme AB sera à BE, ainsi le triangle ACB au triangle BCE, & comme DB à BC, ainsi le triangle BED au mesme triangle BEC: mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables: donc aussi les raisons des triangles ACB, BED, au troisiesme CBE seront semblables par la 11. p. 5. & partant ils seront egaux par la 9. pr. 5. Donc

les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes droictes sont proportionnelles; le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes: & si le rectangle compris des extremes, est egal au rectangle compris des moyennes; les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, FG, EF, BC, scauoir est que AB soit à FG, comme EF à BC, & soit le rectangle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EFGH compris sous les moyennes EF, FG. Ie dis qu'iceux rectangles AC, EG, sont egaux.



Car puis que les angles droits B & F sont egaux, & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC; les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

Quant à la seconde partie: soient les rectangles AC, EG egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles: c'est à dire, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, scauoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux, reciproques par la 14. p. 6. scauoir est, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

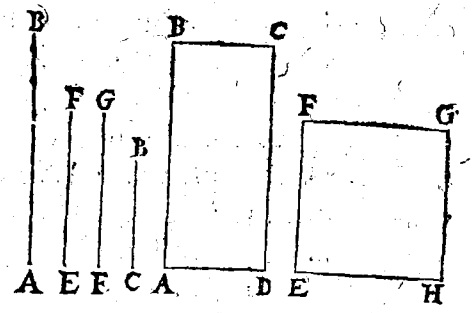
THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droictes proportionnelles AB, EF, BC, & soit le rectangle ABCD compris soubs les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Ie dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.

Car estant prise FG egale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris soubs les moyennes EF, FG, à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle

AC compris des deux extremes AB, BC, eſt egal au rectangle des moyennes EF, FG, c'eſt à dire au quarré EG. Ce qui eſtoit propoſé.



Pour la ſeconde partie; le rectangle AC ſoit egal au quarré EG: Ie dis que comme AB eſt à EF, ainſi EF à BC. Car puis que les rectangles AC, EG ſont egaux, par la 16. pr. 6. comme AB ſera à FE, ainſi FG à BC: mais par la 7. pr. 5. comme FG eſt à BC, ainſi EF, egale à icelle FG, eſt à la meſme BC: & partant comme AB eſt à EF, ainſi EF eſt à BC. Si donc trois lignes droictes ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit de monſtrer.

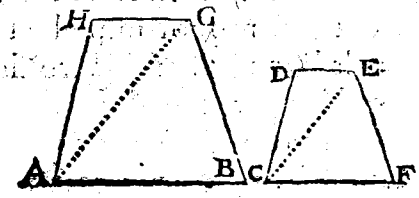
COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la derniere partie de ce Theoreme, qu'vne ligne droicte eſt moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent vn rectangle egal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC eſt egal au quarré de EF, il a eſté demonſtré, que comme AB à EF, ainſi EF à BC; & partant EF eſt moyenne prop. entre AB & BC.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

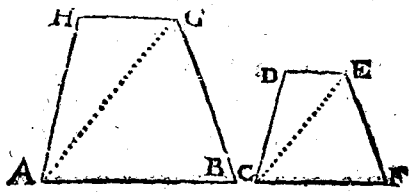
Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſee à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vne figure ſemblable, & ſemblablement poſee à la figure rectiligne donnee CDEF.



De quelque angle que ce ſoit de la figure donnee ſoient menees des lignes droictes à chacun des angles oppoſez, afin de diuiſer icelle figure en triangles; comme icy de l'angle C, ſoit menee à l'angle oppoſé E, la ligne droicte CE, laquelle diuiſe la figure donnee en deux triangles CEF, CDE: en apres par la 23. p. 1. ſoit deſcrit ſur la ligne AB, & aux poincts extremes A & B, les deux angles BAG & ABG, egaux, ſçauoir l'vn à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il eſt euident par la 32. p. 1. que le troiſieſme AGB ſera egal au troiſieſme CEF, & les triangles CEF, AGB ſeront equiangles, & auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement ſur la ligne AG, & aux deux poincts A & G, ſoient deſcrits les deux angles GAH & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au ſien: auſſi par la 32. p. 1. le troiſieſme H ſera egal au troiſieſme D, & les triangles CDE & AHG ſeront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux: ainſi l'angle D eſtant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de G

aux deux de A, & les deux de E aux deux de G: les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles: & pourautant qu'elles sont composées de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG: item comme CF est à CE, ainsi AB à AG; & comme CE à CD, ainsi AG a AH: & en raison egale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH; par ainsi les costez au long des angles egaux F,B, & FCD,BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites. Nous auons donc faict ce qui estoit requis.



SCHOLIE.

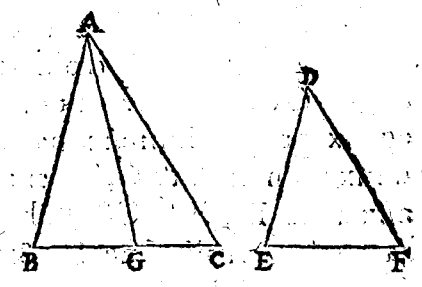
Il est euident par ce que nous auons dit sur la 32. pr. 1. que si la figure donnee auoit plus de quatre costez, elle seroit diuisee en plus de deux triangles: & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis apres proceder de triangle en triangle iusques à la fin, descriuant tousiours sur & aux extremitez de la derniere ligne deux angles egaux aux deux de dessus la diagonalle correspondante, ainsi qu'il a esté fait icy sur AG, homologue & correspondante à la diagonale CE.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF, ayans les angles B & E egaux: item C & F; mais cõme AB est à BC ainsi DE à EF, &c. Ie dis qu'ils seront l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison AB & DE, ou AC & DF, ou BC & EF, c'est à dire que si à deux quelconques de ces costez de mesme raison, comme par exemple BC & EF, on trouue la troisiesme proportionnelle BG; le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisiesme proportionnelle BG: car telle est la raison doublee par la 10. def. 5.

Car estant tiree la ligne AG: d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF, en permutant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF, auront les costez au long des angles egaux B & E, reciproques: & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, serõt egaux entr'eux: & partant comme le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le mesme triangle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC à la ba-



se BG par la 1. p. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG, estans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublee de BC à EF par la 10. def. 3. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublee du costé BC au costé EF. Donc les triangles semblables &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

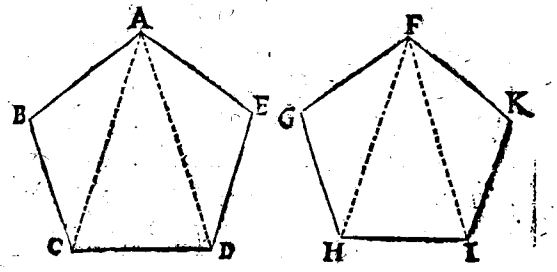
De cecy est manifesté, qu'estans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la troisiesme, ainsi le triangle descrit sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté demonstré, que comme BC 1. est à BG 3. ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14 PROP. XX.

Les polygones semblables peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout : & les polygones sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

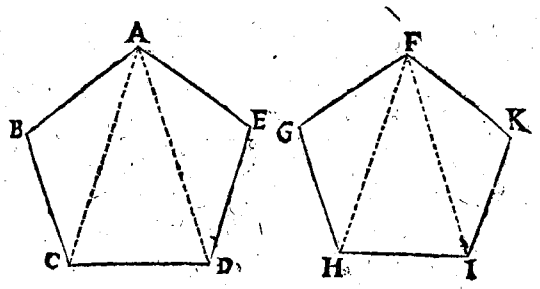
Soient deux polygones semblables ABCDE, & FGHIK, ayans les angles A, F, egaux. Item B, G, &c. Ie dis premierement qu'iceux polygones peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables.

Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est euident que l'vne des figures est diuisee en autant de triangles que l'autre. Et d'autant que l'angle B est posé egal à l'angle G, & que comme BA est à BC, ainsi GF à GH: par la 6. pr. de ce liure, les triãgles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. pr. de ce mesme liure, ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, & par consequent ils seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG: mais BC est à CD comme GH à HI: car ce sont costez de figures semblables: donc en raison egale par la 22. p. 5. AC sera à CD, comme FH à HI: & d'autant que les angles BCD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; ceux-cy estans ostez de ceux-là, les restans ACD, FHI, seront pareillement egaux: & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD, & FHI, seront equiangles, & par consequent semblables.



Ie dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tout: c'est à dire, que chasque triangle de l'vn des polygones a telle raison à son triangle correspondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'vne des figures sont semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & que par la prop. pre-

ced. ils ſont l'vn à l'autre, en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon: les triangles ABC & FGH, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH: auſſi en la meſme raiſon doublée ſeront les triangles ACD, FHI: & le troiſieſme AED eſtant au troiſieſme FKI en raiſon doublée de AD à FI, qui eſt la meſme que de AC à FH, eſtans coſtez de triangles ſemblables: auſſi les triangles ACD, FKI, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, ſeront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'vn des triangles de l'vn d'iceux, ſera à ſon reſpondant de l'autre.



Ie dis tiercement, que le polygone eſt au polygone en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon, comme CD & HI: car puiſque toute la figure ABCDE, eſt à toute la figure FGHIK, comme l'vn des triangles de l'vne, ſcauoir ACD, eſt à l'vn des triangles de l'autre, ſcauoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. p. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des meſmes coſtez CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

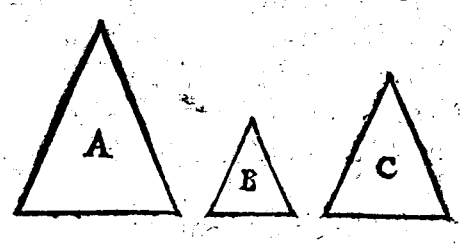
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte, qu'eſtans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi le polygone deſcrit ſur la premiere ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde; puis qu'il a eſté demonſtré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon, c'eſt à dire, comme le coſté du premier a vne troiſieſme proportionnelle auſdits coſtez de meſme raiſon.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à vne meſme figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne B, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la meſme B: Ie dis que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.

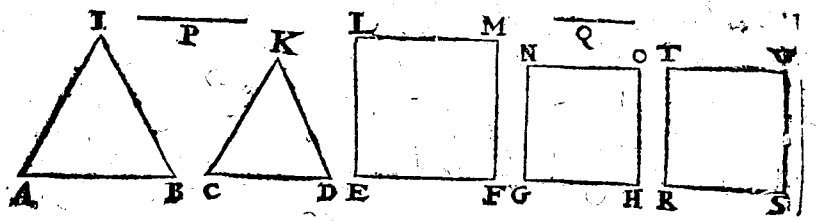


Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles egaux aux angles de B, & les coſtez d'autour iceux angles egaux, proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi egaux aux angles de C; & par la 11. prop. 5. les coſtez au long des angles egaux ſeront proportionnaux: & par la 1. def. 6. A & C ſeront ſemblables: donc les figures rectilignes ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droictes ſont proportionnelles; les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront auſſi proportionnelles: & ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportionnelles, icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, CD, EF, GH: & ſur AB, CD, ſoient conſtituees deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK ſemblables, & ſemblablement deſcrites: item ſur EF & GH deux autres quelconques figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites EFML, GHON. Ie dis premierement que ces quatre figures rectilignes ſont proportionnelles, c'eſt à dire, que comme ABI eſt à CDK, ainſi EFML eſt à GHON.



Qu'il ne ſoit ainſi: aux deux lignes AB & CD, ſoit trouuée P troiſieſme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF & GH, ſoit trouuée Q auſſi troiſieſme proportionnelle: & d'autant que AB eſt à CD, comme EF eſt à GH: Item CD à P, comme GH à Q: en raiſon egale AB ſera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB eſt à P, ainſi le rectiligne ABI eſt au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF eſt à Q, ainſi le rectiligne EM eſt au rectiligne GO. Donc comme ABI eſt à CDK, ainſi EM eſt à GO par la 11. p. 5.

Ie dis pour la ſeconde partie, que ſi icelles figures ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſont proportionnelles, que les lignes ſur leſquelles elles ſont deſcrites, ſeront auſſi proportionnelles, c'eſt à ſcauoir, que comme AB eſt à CD, ainſi EF eſt à GH.

Car ayant trouué RS quatrieſme proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. p. 6. ſur icelle RS ſoit deſcrit le rectiligne RV ſemblable, & ſemblablement poſé au rectiligne EM par la 18. p. 6. & partant auſſi ſemblable au rectiligne GO par la prop. prec. & d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi EF eſt à RS, par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, comme le rectiligne ABI ſera au rectiligne CDK, ainſi le rectiligne EM ſera au rectiligne RV. Mais comme ABI eſt à CDK, ainſi auſſi à eſté poſé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM ſera à RV, ainſi EM ſera à GO; & partant par la 9. p. 5. les rectilignes RV, GO ſeront egaux: leſquels eſtans ſemblables, & ſemblablement deſcrits, conſiſtent neceſſairement (comme nous demonſtrerons incontinent) ſur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7. p. 5. comme EF ſera à RS, ainſi EF ſera à GH, Mais par l'hypotheſe EF eſt

à RS, comme AB à CD: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV: & GH ayant esté posée plus grande que RS, par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV: & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cestuy cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

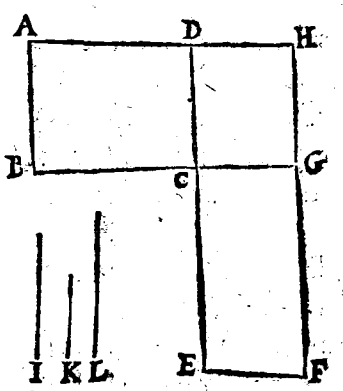
Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles: donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus demonstré. Veu donc que le rectiligne qui sera descrit sur la seconde ligne, sera egal à celuy descrit sur la troisiesme; est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en la raison composee de celles de leurs costez.

Soient deux parallelogrãmes equiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG egaux: Ie dis que la raison du parallelogr. AC au parallelogramme CF est composee de celles de leurs costez, scauoir est composée de la raison qui est de BC à CG, & de celle qui est de DC à CE.

Car soient disposez les deux parallelogrammes l'vn contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne facent qu'vne seule ligne droicte, & alors DC & CE feront aussi vne ligne droicte, puis que les angles BCD, ECG sont egaux, comme il est euident par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. Soient prolongez les costez AD, FG, qui se rencontrant en H, facent le parallelogramme DCGH; puis soit prise quelconque ligne droicte I; & aux trois BC, CG & I, soit trouuuée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC, CE & K, la 4. prop. L. Veu donc que par la 1. p. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothese: pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K, par la 11. p. 5. Mais par mesme raison DG est à CF, comme K à L, (attendu que comme DG à CF, ainsi DC à CE,



par la

par la 1. p. 6. qui est la mesme raison que de K à L.) Donc en raison egale, comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L est composee de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce liure. Donc aussi d'icelles raisons est composee la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes equiangles sont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

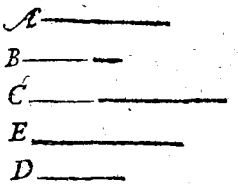
SCHOLIE.

Le mesme sera encore demonstré plus briefuement, ainsi qu'il ensuit, Les parallelogrammes AC, CF estans disposez comme auparauant, AC sera à CH, comme BC à CG; & CH à EG comme DC à EC par la 1. p. 6. Mais la raison de AC à EG, est composee des raisons entre-moyennes, sçauoir de AC à CH, & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composée des raisons de BC à CG, & de DC à CE, qui sont egales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dittes & demonstrees par Euclide en cette 23. p. comment on compose en lignes, ou en nombres vne raison de deux ou de dauantage de raisons. Car des raisons de BC à CG, & de DC à CE, a esté composée la raison de I à L en lignes: mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer vne raison de trois autres proposees; ayant trouué celle composee de deux, d'icelle & de la troisiesme nous en composerons vne autre en la mesme maniere, laquelle sera composee de trois: & ainsi consequemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi veritable en nombres, comme le demonstre Euclide au 8. l. p. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouuer la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs costez, estans cognues en nombres. Comme par exemple, si la raison de BC à CG est la mesme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la mesme que de 3 à 5, nous trouuerons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la premiere raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la derniere raison) ainsi 2 soit à vn autre nombre, qui sera trouué estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposees, & consequemment en delaissant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composee d'icelles: & telle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la mesme maniere que dessus oster vne raison d'vne autre raison plus grande: comme par exemple, soit la raison de A à B, qu'il faut oster d'vne plus grande raison C à D. Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre, sçauoir E, qui soit posée moyenne entre C & D: & la raison de E à D sera la raison restante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composee de celle de C à E, & de E à D; si on en oste celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy est egale, restera la susdite raison de E à D.



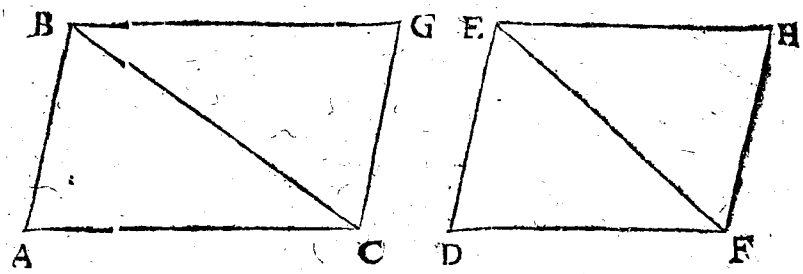
Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3, de celle de 6 à 2, soit fait que comme 4 est à 3, ainsi 6 soit à vn autre nombre, sçauoir $4\frac{1}{2}$: & la raison de $4\frac{1}{2}$ à 2, sera le reste requis. Car il est euident que la raison de 6 à 2, est composee de celles de 6 à $4\frac{1}{2}$, & de $4\frac{1}{2}$ à 2: & partant en ostant de ces deux raisons celle de 6 à $4\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3,

qui luy eſt egale, reſtera la ſuſdite raiſon de $4\frac{1}{2}$ à 2, qui eſt double ſeſquiquarte.

Commandin demonſtre en ce lieu les trois Theor. ſuiuans.

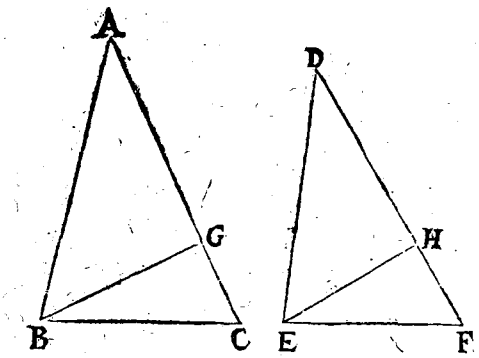
1. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en raiſon compoſee des coſtez, qui comprennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon compoſee des coſtez comprenans les angles egaux B & E. Car ayant acheué les parallelogrãmes AG, DH, ils ſeront equiangles; & partant par la 23. p. 6. la raiſon d'iceux ſera compoſee de celle de leurs coſtez: Veu donc que les triangles ABC, DEF, deſquels ils ſont moitiez par la 34. p. 1. ſont en la meſme raiſon qu'iceux par la 15. p. 5. auſſi iceux triangles ſeront l'vn à l'autre en icelle raiſon compoſee des coſtez.



2. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont l'vn à l'autre, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez, qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Car eſtans tirees ſur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH; les triangles ABG, DEH, ſeront equiangles, comme appert par le Corol. de la 32. p. 1. Donc par la 4. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que poſant GB, BA, baſes, la hauteur d'iceux rectangles ſera vne meſme, ſçauoir AC. Semblablement comme HE à ED ainſi eſt le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de AB, AC, comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF; & en permutant le rectangle de BG, AC ſera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de EH, DF, ainſi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. p. 5. pource que ces triangles ſont moitiez d'iceux rectangles, par la 41. p. 1. (Car ils ont meſmes baſes qu'iceux AC, DF, & meſmes hauteurs BG, EH: & partant entre meſmes paralleles) donc auſſi le triangle ABC ſera au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Ce qui eſtoit propoſé.

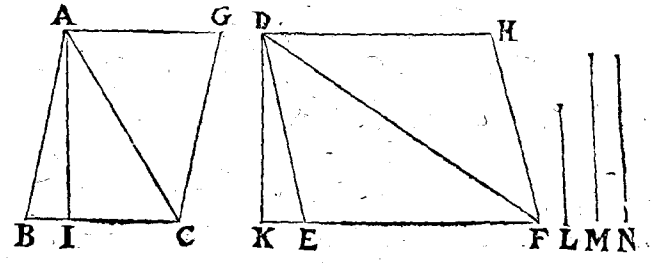


COROLLAIRE.

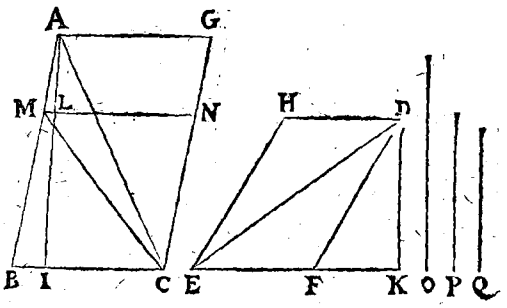
De cecy resulte que les parallelogrammes equiangles sont aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composée de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes BG, EH; & les hauteurs d'iceux soient AI, DK. Ie dis que la raison tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, est composee de la raison de la base BC à la base EF, & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK. Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases, ou aussi egales, ou inegales: & soit faict comme BC à EF, ainsi L à M: & comme AI à DK, ainsi M à N, lesquelles seront egales, puis que AI, DK, sont posees egales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N, comme L à M, c'est à dire comme BC à EF. Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF, ainsi est le triangle ABC au triangle DEF; & le parallelogramme BG au parallelogramme EH: Donc par la 11. p. 5. comme L sera à N, ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M, c'est à dire de la raison de BC à EF, & de la raison de M à N, c'est à dire de AI à DK: donc la la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme EH, est aussi composee des mesmes raisons.



Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande: mais les bases BC, EF, egales, ou aussi inegales. Soit fait que comme AI est à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: puis ayant couppé IL egale à DK, par L, soit tiree MN parallele à BC, & iointe CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC, & le parallelogramme BG au parallelogramme BN, comme la hauteur AI a la hauteur IL ou DK qui luy est egale, c'est à dire comme O à P, par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle MBC est au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainsi est la base BC à la base EF. (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q; en raison egale ABC sera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est à dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est à dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit proposé.

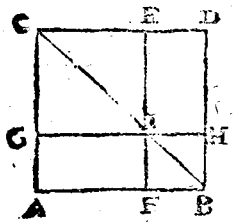


On peut demonſtrer en la meſme maniere, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, eſt au triangle ABC, & le parallelogramme FH au parallelogramme BG en la raiſon compoſee de celle de la baſe EF à la baſe BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faiſant que comme EF à BC ainſi Q à P; & puis comme DK à AI, ainſi P à O; & tout le reſte comme deſſus. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, ſont ſemblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & à l'entour d'iceluy diametre ſoient les deux parallelogrammes GE & FH, ayans les angles B & C communs auec le total: Ie dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH ſont ſemblables entr'eux, & au total ABDC.



Car d'autant que les lignes AB & GH ſont paralleles, ſur leſquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. p. 1. l'angle externe CIG ſera egal à l'interne IBF, & l'externe CGI à l'interne A, auquel eſt auſſi egal l'externe IFB, attendu que BA tombe ſur les deux paralleles EF & CA. Parquoy les trois triangles CAB, CGI & IFB ayans chacun deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, les troiſieſmes angles ſeront auſſi egaux, & conſequemment iceux triangles ſeront equiangles entr'eux. Et par meſme raiſon les trois autres triangles CDB, CEI & IHB, qui par la 34. pr. 1. ſont egaux aux trois precedents ſeront auſſi equiangles entr'eux: Donc les parallelogr. compoſez d'iceux triangles, ſçauoir AD, GE & FH, ſeront pareillement equiangles entr'eux. Dauantage, puis que le triangle CAB eſt equiangle au triangle CGI, & le triangle CDB au triangle CEI, par la 4. pr. 6. comme CA ſera à AB, ainſi CG à GI: & par ainſi les coſtez d'autour les angles egaux A & G, ſont proportionnaux. Derechef, comme AB eſt à BC, ainſi GI eſt à IC, & comme CB eſt à BD, ainſi CI eſt à IE. Donc en raiſon egale, comme AB ſera à BD, ainſi GI ſera à IE: & partant les coſtez d'alentour les angles egaux ABD, GIE ſont proportionnaux. On prouuera en la meſme maniere que les coſtez d'al'entour les autres angles egaux d'iceux parallelogrammes AD & GE ſont auſſi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6. le parallelogramme GE ſera ſemblable au parallelogramme total AD. Et par meſmes raiſons, le parallelogramme FH ſe prouuera auſſi ſemblable au meſme parallelogramme AD. Donc par la 21. p. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH ſeront ſemblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

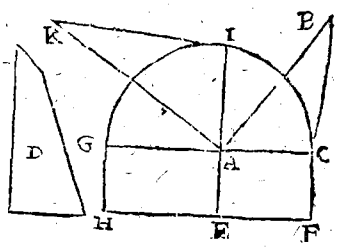
PROB. 7. PROP. XXV.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne figure re-

ctiligne donnee, & egale à vne autre proposee.

Soient deux figures rectilignes A B C & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC (qui est l'vn des costez du rectiligne ABC, auquel on en doit faire vn semblable) soit faict le rectangle ACFE egal à ladite figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit le rectangle GE egal à la figure donnee D, le tout par les 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posee à la figure ACB, par la 18. p. 6. Ie dis qu'icelle figure AKI sera aussi egale à la figure donnee D.

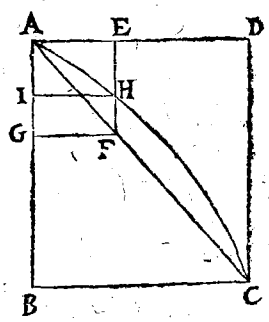


Car par la construction le rectangle GE est egal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. pr. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Mais les deux figures semblables ABC & AKI sont l'vne à l'autre en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. p. 6. attendu qu'icelles figures sont descrites sur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB estant egal à AF : aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D : & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable, & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous auons donc descrit vne figure rectiligne semblable à vne autre donnee, & egale à vne proposee. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'vn parallelogramme on oste vn parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun auec le tout ; l'osté sera auec le tout à l'entour d'vn mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogramme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun auec iceluy : Ie dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'vn mesme diametre, c'est à dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC.



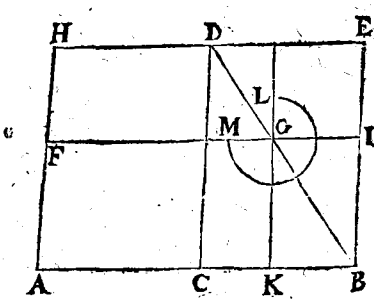
Autrement, soit (s'il est possible) vn autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG : ains couppe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à AE, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE estant à l'entour d'vn mesme diametre auec le total DB

ſera ſemblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total, GE eſt auſſi ſemblable par l'hypotheſe: & partant par la 21. p. 6. les parallelogrammes GE & IE ſeront ſemblables entr'eux: & par le 1. def. 6. AE ſera à EF comme AE à EH: mais AE eſtant egal à ſoy meſme, il faudroit auſſi par la 14. prop. 5. que EF 2e fuſt egale à EH 4e, c'eſt à ſçauoir le tout à la partie, ce qui eſt abſurde: donc le parallelogramme total BD, & le retranché GE, eſtoient conſtituez à l'entour d'vn meſme diametre: car il aduiendra touſiours la meſme abſurdité, ſi on dit que le diametre de BD couppe à quelconque autre poinct, ſoit le coſté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'vn parallelogramme on oſte vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, & defaillans de parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſez à vn autre deſcrit ſur la moitié de la meſme ligne; le plus grand eſt celuy-là qui eſt deſcrit ſur l'autre moitié de la ligne, & ſemblable au defaut.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement en C, & ſur CB moitié d'icelle, ſoit conſtitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diametre eſt BD: Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD conſtitué ſur la moitié AC, ſera appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & ſemblable à iceluy defaut CE. Ie dis que de tous les parallelogrammes qui peuuent eſtre appliquez ſelon icelle ligne AB, & defaillans d'vne figure ſemblable & ſemblablement poſée à CE, le plus grand eſt AD, qui eſt deſcrit ſur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.



Car eſtant pris au diametre BD quelconque poinct G, & tirees par iceluy poinct les lignes droictes FGI, KG, paralleles aux lignes droictes AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué ſelon la ligne AB, ſera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. eſt ſemblable & ſemblablement poſé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, ſont egaux, ſi on leur adiouſte KI commun; auſſi CI, KE ſeront egaux. Mais CI, CF, eſtans ſur baſes egales, ſont pareillement egaux par la 36. prop. 1. donc auſſi CF, KE ſeront egaux, & leur adiouſtant CG commun, le parallelogramme AG ſera egal au gnomon LM. Parquoy puis que CE eſt plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) auſſi AD qui eſt egal à CE, par la 36. prop. 1. ſera plus grand que le parallelogram-

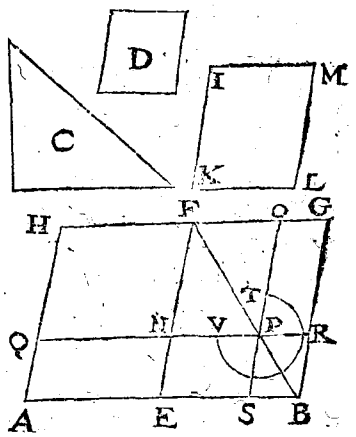
me AG, du meſme parallelogramme DG. Et en la meſme maniere ſera demonſtré que AD eſt plus grand que tous autres parallelogrammes, qui ſeront appliquez ſelon la meſme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſees à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 8. PROP. XXVIII.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnee ne ſoit plus grande que le parallelogramme, qui eſtant appliqué à la moitié de la ligne donnee, eſt ſemblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnee C, defaillant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux egalement en E, ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable & ſemblablement poſé à iceluy D, par la 18. pr. 6. & ſoit accomply le parallelogramme AHGB.



Maintenant, ſi AF eſt egal à C, on a ce que l'on demande: car il eſt appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui eſt fait ſemblable à D. Mais ſi C eſt plus petit que AF, (car par l'hypotheſe il ne peut eſtre plus grand) il ſera auſſi plus petit que EG egal à iceluy AF: ſoit donc trouué l'excez de EG par deſſus C, (ceſte egalité ou inegalité, & excez ſera cogneu par ce que nous auons dit à la 45. p.1.) lequel excez par la 25. p.6. ſoit reduit en parallelogramme IKLM, ſemblable & ſemblablement poſé à EG: & veu que EG eſt plus grand que KM, il eſt euident que les coſtez EF, FG, ſeront auſſi plus grands que les coſtez homologues KI, IM: parquoy d'iceux EF, FG ſoient couppez FN, FO, egaux à iceux KI, IM, à fin qu'eſtant accomply le parallelogramme NFOP, il ſoit egal à KM, & ſemblable & ſemblablement poſé au meſme KM; & partant auſſi à EG: & par conſequent qu'eſtant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, ſoient autour d'iceluy diametre par la 26. p.6. & apres auoir continué de part & d'autre les coſtez NP, OP, tant qu'il ſera de beſoin, ſera conſtitué le parallelogramme AP, lequel ie dis eſtre le parallelogramme demandé.

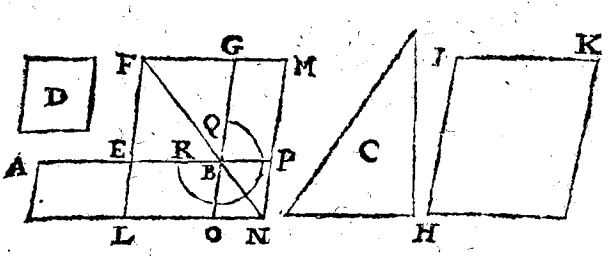
Car il eſt appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. p. 6. eſt ſemblable à EG, partant auſſi à D. Item puis que IL eſt l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez eſt egal NO: Il eſt euident que le gnomon TV ſera egal à la figure C. Mais il eſt auſſi egal à AP, comme il a eſté prouué à la precedente: donc auſſi AP ſera egal à C: Mais il eſt appliqué à la ligne donnée AB, & defaillant du parallelogramme SR ſemblable au donné D. Nous auons donc à vne ligne droicte donnée appliqué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

A vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, excedant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excedant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB ſoit couppée en deux egalement au poinct E, & ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable, & ſemblablement poſé à D par la 18. p. 6. En apres, ſoit deſcrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & ſemblable, & ſemblablement poſé à EG par la 25. p. 6. & partant à cauſe de la ſimilitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI ſera à IK, ainſi EF ſera à FG; & par conſequent HK eſtant plus grand que EG, auſſi les coſtez HI, IK ſeront plus grands que les coſtez EF, FG: eſtans donc prolongez les coſtez FE, FG, tellement que FL, FM, ſoient egales aux lignes IH, IK, & acheué le parallelogramme LFMN, il ſera ſemblable, & ſemblablement poſé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. les parallelogrammes LM, & EG ſeront conſtituez à l'entour d'vn meſme diametre, lequel ſoit FN. Maintenant eſtant prolongez AB & GB iuſques en P & O; & acheué le parallelogramme LA: le parallelogramme AN ſera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Mais ie dis auſſi qu'iceluy parallelogramme AN eſt egal au rectiligne C; car puiſque par la 36. p. 1. AL, EO ſont egaux, & par la 43. p. 1. EO eſt egal au complement BM, auſſi AL ſera egal à iceluy BM: leur adiouſtant donc LP commun; le parallelogr. AN ſera egal au gnomon QR, lequel eſt egal au rectiligne C: (car puiſque HK, c'eſt à dire LM, eſt egal aux rectilignes C & EG enſemble: ſi on oſte EG commun, reſteront egaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc auſſi le parallelogramme AN ſera egal au rectiligne C. A la ligne droicte AB, nous auons donc appliqué le parallelogramme AN



egal

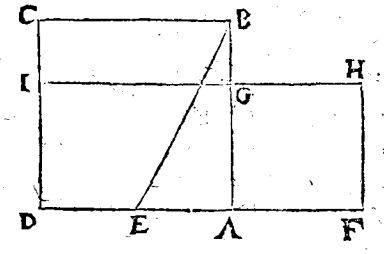
egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à vn autre donné D : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

Coupper vne ligne droicte donnée & terminée, ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte donnée AB, laquelle il faut coupper ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Ayant deſcrit ſur icelle ligne AB, le quarré AC, au coſté DA ſoit appliqué par la 29. p. 6. le rectangle DH egal à iceluy quarré AC, excedant du parallelogramme AH, ſemblable à iceluy AC; & la ligne AB ſera couppée en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon.



Car premierement l'exceds AH ſera quarré, puis qu'il eſt ſemblable au quarré AC; & d'autant que DH eſt fait egal à AC, ſi d'iceux on oſte le parallelogramme commun AI, reſteront egaux les parallelogrammes CG & AH, leſquels ont auſſi les angles au poinct G egaux. Donc par la 14. p. 6. les coſtez d'alentour iceux angles ſeront reciproques; tellement que comme IG eſt à GH, ainſi AG eſt à GB. Mais par la 34. p. 1. IG eſt egale à BC, c'eſt à dire à AB; & GH à AG : Donc comme AB ſera à AG, ainſi AG ſera à GB. Et puiſque AB 1. eſt plus grande que AG 3. par la 14. p. 5. AG 2. eſt auſſi plus grande que GB 4. Veu donc que la toute AB eſt au plus grand ſegment AG, comme iceluy plus grand ſegment AG eſt au plus petit GB; icelle AB eſt couppée en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB ſoit couppée en G, par la 11. p. 2. en ſorte que le quarré de la partie AG ſoit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Ie dis que AB ſera couppée ſelon la moyenne & extréme raiſon au poinct G.

Car puis que le quarré de AG eſt egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, ſeront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'eſt à dire que la toute AB ſera au plus grand ſegment AG, comme iceluy ſegment AG eſt au plus petit ſegment GB; & par la 3. d. 6. AB eſt couppée en G, ſelon la moyenne & extréme raiſon. Ce qu'il falloit faire.

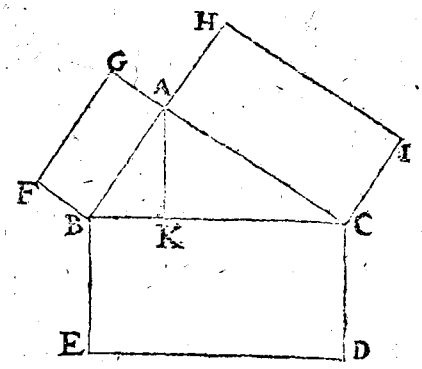
THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure deſcrite ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux autres figures qui luy ſont ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur les deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droict, & ſur le co-

ſtés BC, qui ſouſtient iceluy angle, ſoit deſcrite quelconque figure rectiligne BD, & ſur les deux autres coſtez AB, AC, ſoient conſtituees les deux figures AF, AI ſemblables, & ſemblablement poſees à BD : Ie dis qu'icelle figure BD eſt egale aux deux autres AF, AI.

Car ſi du poinct A, on meine ſur BC la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles ſemblables entr'eux, & au total ; & par ainſi les trois triangles BAK, ABC, CAK, ſeront ſemblables entr'eux, & par la 19. p. 6. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA. Mais par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI, eſtans ſemblables, & ſemblablement poſees, elles ſeront auſſi l'vne à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA, qui ſont les meſmes coſtez des triangles : donc par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, ſeront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'eſt à dire, que comme le triangle BAK eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AF eſt au rectiligne BD, & comme le triangle CAK eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AI eſt au rectiligne BD : Donc par la 24. p. 5. comme le compoſé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, ſera au triangle ABC, 2. grandeur, ainſi le compoſé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, ſera au rectiligne BD, 4. grandeur : mais le triangle BAC, eſt egal aux deux autres ABK, ACK : donc la figure BD ſera auſſi egale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



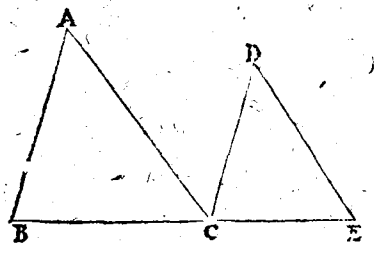
Autrement. D'autant que par la 20. p. 6. les figures ſemblables ſont en raiſon doublee de leurs coſtez homologues, comme le quarré de AB 1. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AF 3. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur : Mais auſſi comme le quarré de AC 5. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AI 6. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. p. 5. le compoſé de la 1. & 5. grandeur, ſçauoir le quarré de AB auec celuy de AC, ſera à la 2. grandeur BC, comme le compoſé de la 3. & 6. grandeur, ſçauoir la figure AF auec la figure AI, ſera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. p. 1. les deux quarrez de AB, AC, ſont egaux au ſeul quarré de BC ; donc auſſi les deux figures AF, AI enſemble, ſeront egales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux coſtez proportionnaux à deux coſtez, ſont diſpoſez ſelon vn angle, tellement que les coſtez de meſme raiſon ſoient parallels ; les deux autres coſtez ſe rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les coſtez BA & AC pro-

portionnaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: Ie dis que les deux autres costez BC & CE se rencontreront directement.

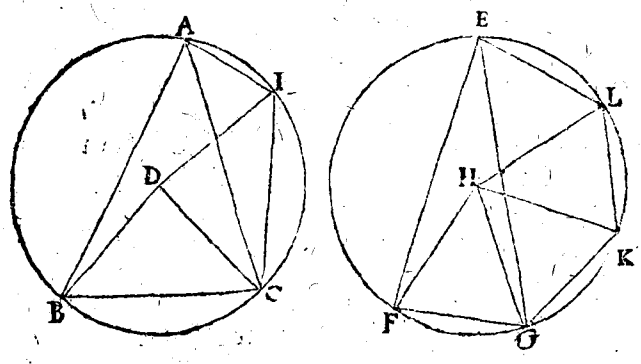


Car puisque BA & CD sont paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD: parquoy l'angle D sera egal à l'angle A. Mais par l'hypothese les costez qui constituent iceux angles egaux, sont proportionnaux: donc par la 6. p. 6. les deux triangles ABC, DCE, seront equiangles; & auront les angles B & DCE egaux: leur adiouſtant donc les egaux A & ACD, les deux B & A ensemble, seront egaux aux deux DCE, & ACD ensemble; c'est à dire au seul angle ACE: parquoy adiouſtant derechef à ces angles egaux, le commun ACB; les deux angles ACE, ACB, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droicts par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC & CE se rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux costez proportionnaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux, comme les circonferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.

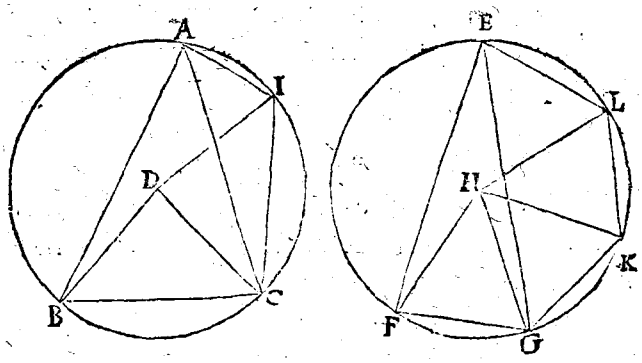
Soient deux cercles egaux ABC & EFG, desquels les centres sont D & H; & soient les deux angles BDC, FHG aux centres; mais les deux BAC, FEG, aux circonferences. Ie dis premierement, que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.



Car ayant mené les deux lignes droictes BC, FG, soient accommodees aux cercles des lignes droictes, sçauoir CI egale à BC; & GK, KL chacune egale à FG: puis soient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droictes BC & CI sont egales, les arcs BC & CI seront aussi egaux par la 28. p. 3. & partant les angles BDC & CDI, seront egaux par la 27. p. 3. Pour mesmes raisons, tant les trois arcs FG, GK & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL sont egaux en-

tr'eux : donc l'arc FGKL eſt autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL eſt multiplice de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle BDI, eſt multiplice de l'angle BDC, puiſque les angles BDI, FHL ſont diuiſez chacun en autant de parties egales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils s'appuient : partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit : donc puiſque BCI, BDI, ſont equemultiplices de B C, B D C, premiere & troiſieſme grandeur ; & F G K L, F H L equemultiplices de FG, FHG 2^e & 4^e grandeur ; par la 6. d. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. p. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG ; (car ceux-là ſont doubles de ceux cy par la 20 p. 3.) il eſt euident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC eſt auſſi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG. Ce qu'on peut encore demonſtrer par les meſmes raiſons, & argumens employez pour les angles du centre, ſi on tire les lignes droictes IA, KL, LE, &c.



Secondement, Ie dis que le ſecteur BDC eſt au ſecteur FHG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG. Car (demeurant la meſme conſtruction que deſſus) il eſt manifeſte que les cordes BC & CI eſtans egales, & leurs arcs auſſi egaux, les angles BAC, & CAI ſeront pareillement egaux par la 27. p. 3. & conſequemment que les ſegmens ſur leſquels ils inſiſtent & s'appuient, ſont ſemblables & egaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, ſont auſſi egaux par la 4. p. 1. leur adiouſtant donc les deux ſegmens egaux, les deux ſecteurs BDC, CDI ſeront egaux : Parquoy l'arc BCI ſera autant multiplice de l'arc BC, que le ſecteur BDI le ſera du ſecteur BDC : & par meſme diſcours, l'arc FGKL ſera monſtré autant multiplice de l'arc FG, que le ſecteur FHL l'eſt du ſecteur FHG. Partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI ſera egal au ſecteur FHL ; & ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, auec les deux ſecteurs BDC, FHG, ſont quatre grandeurs, de la 1. & 3^e deſquelles BCI, BDI, ſont equimultiplices, mais de la 2^e & 4^e ſont auſſi equimultiplices FGKL, FHL. Et puis que nous auons prouué que ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI eſt egal au ſecteur FHL ; & ſi plus grand, plus grand ; & ſi moindre, moindre : par la 6. def. 5. comme l'arc BC ſera à l'arc FG, ainſi le ſecteur BDC, ſera au ſecteur FHG. Parquoy aux cercles egaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences ; &c. Ce qu'il falloit de monſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy il s'enſuit que comme le ſecteur eſt au ſecteur, ainſi l'angle eſt à l'angle. Car l'vne & l'autre raiſon eſt la meſme que de l'arc à l'arc ; & partant par la 11. *p.* 5. *ils ſeront auſſi entr'eux en la meſme raiſon.*

Il eſt auſſi euident que comme vn angle au centre, eſt à quatre angles droicts, ainſi eſt l'arc ſouſtendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire, que comme quatre angles droicts ſont à vn angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre eſt à l'angle droict au centre, ainſi l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſouſtient l'angle droict par la 33. *p.* 6. *Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droict, c'eſt à ſçauoir à quatre angles droicts, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, c'eſt a dire à toute la circonference, par les choſes demonſtrées à la fin du Scholie de la* 22. *p.* 5. *Puis apres, d'autant qu'vn angle au centre eſt à quatre angles droicts, comme l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt à toute la circonference ; auſſi en permutant, comme quatre angles droicts ſeront à vn angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle au centre : Ce qui a eſté propoſé.*

Fin du ſixieſme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

L'VNITE, eſt ſelon laquelle vne chacune des choſes qui ſont, eſt appellee vne.

Euclide ayant traicté és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçauoir eſt de celle-là qui conſidere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traicte des ſolides, il explique en ce ſeptieſme liure & és deux ſuiuants, les proprietez & affections des nombres, pour puis apres traicter au 10. liure des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour auoir entiere & parfaicte cognoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide commençeant donc ſelon ſa couſtume par les principes, il definit premierement que c'eſt que l'vnité, & dit que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme vne: & ſelon ceſte vnité nous auons de couſtume de dire vne pierre, vn animal, vn corps, &c. Mais eſt à noter que tout ainſi qu'en la Geometrie le poinct n'a aucune partie eſtãt indiuiſible, auſſi és nombres l'vnité ne reçoit aucune diuiſion, mais eſt indiuiſible ſelon noſtre autheur, lequel n'a eſgard en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers: mais nous y ioindrons auſſi quelque choſe des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enſeignees en noſtre Arithmetique practique, ne ſont moins veritables & certaines, que ſi elles eſtoient reſtraintes ſeulement aux nombres entiers dont traicte icy Euclide.

2. Nombre, eſt vne multitude compoſee de pluſieurs vnitez.

C'eſt à dire qu'eſtans aſſemblees pluſieurs vnitez enſemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre: dont s'enſuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'vnitez qui le conſtituent: de ſorte que l'vnité eſt la partie de chaque nombre deſnommée par le meſme nombre duquel elle eſt partie: comme le nombre 4 compoſé de quatre vnitez, ſe diuiſe en autant de parties, ſçauoir eſt en quatre vnitez, chacune deſquelles eſt dicte quatrieſme partie du nombre 4. Ainſi auſſi le nombre 20 compoſé de vingt vni-

tez se diuise en autant de parties, chacune desquelles est dicte vingtiesme partie d'icceluy nombre 20, &c. D'où resulte que tous les nombres sont commensurables entr'eux, puis qu'ils sont tous mesurez par vne mesme & commune mesure, sçauoir par l'vnité, comme il est dit: ce qui ne peut pas conuenir à toutes les grandeurs, puis que pluſieurs d'icelles n'ont point de commune mesure, mais sont incommensurables, comme il sera demonstré au 10. liure.

3 Vn nombre est partie d'vn autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit mesure le plus grand.

C'est à dire, que lors qu'vn nombre en mesure ou diuise exactement vn plus grand, sans qu'il reste rien, il est dit partie d'iceluy: comme 4 est dit partie de 12, d'autant qu'iceluy nombre 12 est diuisé exactement par 4 sans qu'il reste rien: semblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 & 9, est partie du nombre 18, puis que chacun le mesure ou diuise exactemcnt. Or toute partie, cõme nous auons dit à la 1. def. 5. est appellee aliquote, & prend son nom du nombre par lequel elle en mesure vn autre; tellement que 2 est dit partie aliquote de 4; & se nomme $\frac{1}{2}$; pource que 2 mesure 4 par 2: & cinq est dit partie aliquote de 15, c'est à sçauoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 mesure 15 par 3: ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais vn nombre est dit parties d'vn autre plus grand, lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'vn petit nombre n'en mesure pas vn plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 est dict parties de 9: car il ne le mesure pas precisément, mais est deux parties d'iceluy, sçauoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12 est parties de 16, sçauoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'vn & l'autre nombre, est 3 fois en 12, & 4 fois en 16: auſsi 15 est parties de 24, sçauoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 est parties de 7, sçauoir est $\frac{5}{7}$: & 4 est parties de 9, sçauoir est $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais vn grand nombre est dit multiple d'vn petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dict partie d'vn plus grand, ains seulement de celuy là qu'il mesure precisément; ainsi auſsi tout grand nombre n'est pas dit multiple, ou le pluſieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux-là qui le peuuent precisément mesurer: tellement que de deux nombres inegaux, si le petit mesure precisément le grand, ce moindre est dict partie du grand, mais celuy-cy est auſsi dict multiple de ceſtuy-là: Ainsi 4 est bien dict partie de 12, mais auſsi iceluy 12 est dict multiple de 4 Pareillement 30 est dict multiple tant de 5 que de 6, qui sont parties d'iceluy, puis que l'vn & l'autre le mesure.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre diuisé en deux egalement.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, sont appellez nombres pairs, pource que cha-

cun d'iceux peut estre diuisé en deux egalement, c'est à dire en deux parties egales, car leurs moitiez sont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut estre diuisé en deux egalement: ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, sont nommez impairs, pource qu'ils ne peuuent estre diuisez en deux egalement: Ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'vnité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50. &c.

8. Nombre pairement pair, est celuy qu'vn nombre pair mesure par vn nombre pair.

C'est à dire, que si vn nombre pair en mesure vn autre par vn nombre qui soit aussi pair, le nombre mesuré sera dit pairement pair: comme 32, lequel 8 mesure par 4, est dict nombre pairement pair: Semblablement 24 sera dit nombre pairement pair, pource que 6 nombre pair le mesure par 4 nombre pair, &c.

9. Et pairement impair, est celuy qu'vn nombre impair mesure par vn nombre pair.

C'est à dire, que si vn nombre pair en mesure vn autre par vn nombre impair, le mesuré sera dit pairement impair: comme 42 est dit nombre pairement impair, pource que 6, nombre pair le mesure par 7, nombre impair. Semblablement 24 sera dit nombre pairement impair, d'autant que 3, nombre impair le mesure par 8, nombre pair. Et est à noter, qu'il y-a plusieurs nombres qui sont pairement pair, & pairement impair, comme 12, 24, 48, 96, &c. Et que ce soit l'intention d'Euclide, les 32, 33, & 34. prop. 9. le monstrent assez.

10. Mais nombre impairement impair, est celuy qui est mesuré d'vn nombre impair par vn nombre impair.

Comme 15, lequel est mesuré de 5 par 3, est dict nombre impairement impair: & tels sont aussi les nombres suiuans, 9, 21, 25, 27, 33, 35, &c.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule vnité.

C'est à dire, que si vn nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par soy-mesme, & l'vnité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux-cy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre, mais par la seule vnité.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'vnité.

C'est à dire, que si deux ou dauantage de nombres n'ont autre commune mesure

que

que l'vnité, ils ſeront dits premiers entr'eux, iaçoit que chacun d'iceux puiſſe eſtre meſuré par quelque nombre outre l'vnité. Comme ces deux nombres 15 & 8, ſont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y-a que l'vnité qui les puiſſe meſurer tous deux: car encore que le premier ſoit meſuré par 5 & 3; & le dernier par 4 & 2, ſi eſt-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut meſurer l'vn & l'autre des propoſez, ains la ſeule vnité eſt leur commune meſure.

13. Nombre compoſé, eſt celuy qui eſt meſuré par quelque autre nombre.

Comme 15 eſt appellé nombre compoſé, pource qu'il eſt meſuré par 5 & 3: Auſſi 27 eſt nombre compoſé, d'autant qu'il eſt meſuré par 9 & 3. &c.

14. Mais les nombres compoſez entr'eux, ſont ceux-là qui ont autre commune meſure que l'vnité.

C'eſt à dire, que ſi deux ou dauantage de nombres ſont meſurez par quelque nombre outre l'vnité, comme par leur commune meſure, ils ſeront dicts nombres compoſez entr'eux: ainſi les nombres 9 & 15 ſont compoſez entr'eux; d'autant que 3 meſure l'vn & l'autre d'iceux, comme leur commune meſure. Auſſi 7, 21, & 28, ſont compoſez entr'eux, pource que le premier d'iceux meſure ſoy-meſme, & les deux autres.

15. Vn nombre eſt dict multiplier vn nombre, lors qu'il en eſt procreé vn autre, qui eſt autant de fois compoſé de celuy qui eſt multiplié qu'il y-a d'vnitez au multiplia nt.

Comme 4 ſera dit multiplier 6, ſi iceluy nombre 6 eſt prins ou compoſé quatre fois, c'eſt à ſçauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez au multipliant 4; & le nombre procreé, qu'on appelle vulgairement produict, *ſera 24. Auſſi le nombre 6 ſera dit multiplier le nombre 4, ſi nous prenons iceluy nombre 4, ſix fois; c'eſt aſſauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez en 6 nombre multipliant; & en ſera procreé le meſme nombre 24. Ainſi vn nombre ſera dit eſtre procreé ou produict de deux nombres, quand il ſera produict en multipliant l'vn d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 ſera dit eſtre le produict de ces deux nombres 4 & 9, pource qu'il eſt procreé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9, ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.*

Or de ce que deſſus il s'enſuit que le nombre produict de la multiplication d'vn nombre par vn autre, a meſme raiſon auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'vnité. Car puis que ſelon la def. d'Euclide, pour auoir le produict de deux nombres il faut prendre autant de fois l'vn d'iceux, qu'il y-a d'vnités en l'autre, iceluy produict contiendra autant de fois l'vn ou l'autre des nombres multiplians qu'il y-a d'vnitez en l'autre: & partant il y aura meſme raiſon du nombre produict à l'vn ou l'autre des multiplians, que de l'autre multipliant à l'vnité: parquoy la multiplication d'vn nombre en vn autre peut eſtre definie ainſi:

La multiplication d'vn nombre par vn autre, eſt l'inuention d'vn nombre

qui ait meſme raiſon auquel on voudra des nombres multiplians, que l'autre à l'vnité.

Ainſi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, eſt produict le nombre 35, lequel eſt à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A ceſte definition Clauius adiouſte la ſuiuante.

Vn nombre eſt dict diuiſer vn nombre, quand on en prend vn autre, qui contient autant d'vnitez que le nombre diuiſant eſt contenu de fois au nombre diuiſé.

Comme le nombre 6 ſera dit diuiſer le nombre 24, ſi on prend le nombre 4; qui monſtre par ſes quatre vnitez, que le nombre 6 eſt contenu 4 fois au nombre diuiſé 24. Ainſi le nombre 4 ſera dit diuiſer le meſme nombre 24, ſi on prend le nombre 6, lequel denotte par ſes ſix vnitez, que le nombre diuiſant eſt contenu ſix fois au diuiſé 24.

De cecy il aduient que le nombre prouenant de la diuiſion, lequel on appelle vulgairement quotient, *a meſme raiſon à l'vnité, que le nombre diuiſé au diuiſeur. Car puis que, comme nous auons dit en la def. le quotient doit monſtrer & indiquer par ſes vnitez, combien de fois le nombre diuiſeur eſt contenu au diuiſé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'vnité, que le nombre diuiſé contient le diuiſeur; & partant il y aura meſme raiſon du quotient à l'vnité, que du nombre diuiſé au diuiſeur. Parquoy la diuiſion d'vn nombre par vn autre ſe peut auſſi definir ainſi.*

La diuiſion d'vn nombre par vn nombre, eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité, que le nombre diuiſé au diuiſant.

Ainſi appert que de la diuiſion du nombre 24 par ſix, eſt prouenu le nombre 4, lequel eſt à 1, comme 24 à 6. Item de la diuiſion du meſme nombre 24, par 4, eſt produict le nombre 6, qui eſt à 1, comme 24 à 4.

De cecy il aduient qu'eſtant diuiſé vn nombre par vn nombre, le nombre diuiſé ſera procreé de la multiplication du nombre trouué, c'eſt à dire du quotient, par le nombre diuiſeur. Car ayant diuiſé le nombre A par B, le quotient ſoit C. Ie dis que le nombre A ſera produict de la multiplication du nombre C par le nombre B. D'autant que par la def. de la multiplication le nombre procreé de C multiplié par B, eſt à B, comme C à l'vnité D; & que par la def. de la diuiſion A eſt auſſi à B, comme C à l'vnité D; il eſt manifeſte que le nombre procreé par la multiplication de C en B eſt le nombre A, veu que tant iceluy nombre procreé, que le diuiſé A, a meſme raiſon à B, que C à l'vnité D.

A.	B.	C.	D.
48.	8.	6.	1.

Or ce que nous auons dict cy-deſſus touchant la multiplication & diuiſion des nombres entiers, conuient auſſi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ ſera dit multiplier le nombre 20, ſi le nombre 20 eſt pris autant de fois qu'il y a d'vnitez en $\frac{1}{2}$, & ſera procreé le nombre 10: car d'autant que l'vnité eſt ſeulement par ſa moitié en $\frac{1}{2}$, il faut auſſi prendre le nombre 20 par ſa moitié, qui eſt 10. Semblablement le nombre 20, ſera dit multiplier $\frac{1}{2}$, ſi $\frac{1}{2}$ eſt pris vingt fois, c'eſt à ſçauoir autant de fois que l'vnité eſt en 20; & le produict ſera le meſme nombre 10. Item, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſeront dits s'entremultiplier, ſi on prend la troiſieſme partie de $\frac{1}{2}$, tout ainſi que $\frac{1}{3}$ contient ſeulement la troiſieſme partie de l'vnité: ou bien ſi on prend la

moitié de $\frac{1}{3}$, parce que $\frac{1}{2}$ contient seulement la moitié de l'vnité: & par ainsi le produict sera $\frac{1}{6}$; car c'est la troisiesme partie du nombre $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{3}{6}$, & la moitié du nombre $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ sera dit diuiser le nombre 10, si on prend le nombre 20, qui monstre que le nombre diuisant $\frac{1}{2}$ est contenu vingt fois au nombre diuisé 10; tellement qu'il y ait la mesme raison du nombre procreé 20 à 1, que du nombre diuisé 10 au diuisant $\frac{1}{2}$. Ainsi aussi $\frac{1}{2}$ sera dit diuiser $\frac{1}{6}$, si on prend le nombre $\frac{1}{3}$, lequel monstre que le nombre diuisant $\frac{1}{2}$, n'est pas tout contenu au diuisé $\frac{1}{6}$, ains seulement la troisiesme partie d'iceluy: car puis que le nombre $\frac{1}{2}$ est le mesme que $\frac{3}{6}$, il est euident que la troisiesme partie d'iceluy, c'est à sçauoir $\frac{1}{6}$, est contenu en $\frac{1}{6}$. Or comme il faut faire & prattiquer non seulement la multiplication & diuision en nombres rompus, mais aussi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique, nous l'auons enseigné en nostre Pratique d'Arithmetique, & à la fin de ce 7. liure d'Euclide nous en ferons les demonstrations.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé plan; & les nombres multiplians sont dicts costez d'iceluy plan.

C'est à dire que tout nombre produict de la mutuelle multiplication de deux nombres est appellé nombre plan: d'autant que chaque vnité de l'vn d'iceux nombres estant posée & estendue d'ordre autant de fois qu'il y-a d'vnité en l'autre nombre, est representé vn parallelogramme rectangle, duquel les costez sont les deux nombres se multiplians, comme il a esté dict au 2. liure. Ainsi le nombre 20 produict de 5 par 4 est dict nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 sont dicts costez diceluy plan.

5

4

17. Mais quand trois nombres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé solide, & les multiplians sont dicts costez d'iceluy.

Comme si on multiplie 6 par 5, & leur produict 30 par 4, sera procreé le nombre 120; lequel s'appellera nombre solide, & les trois nombres multiplians 6, 5 & 4, seront dicts costez d'iceluy solide.

18. Nombre quarré, est celuy qui est egalement egal: ou bien c'est le produict de deux nombres egaux.

Comme le nombre plan 16 est appellé quarré, pource qu'il est procreé de la multiplication de 4 par 4, & consequemment egal de tous costez. Ainsi aussi 49, produict de la multiplication de 7 par 7, sera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, est celuy qui est egalement egal egalement: ou bien c'est le produict de trois nombres egaux.

Comme si le nombre 4 est multiplié par 4, & puis leur produict 16 encore

par 4, sera procreé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres sont proportionnaux, quand le premier est autant multiple, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, comme le troisiesme du quatriesme.

C'est à dire, que quand vn nombre est mesme partie, ou mesmes parties d'vn nombre, qu'vn autre d'vn autre, iceux quatre nombres sont dits proportionnaux. Ainsi pource que le nombre A est mesme partie du nombre B, que le nombre C du nombre D, c'est à sçauoir la moitié, iceux quatre nombres A, B, C, D, sont proportionnaux. Aussi les quatre nombres E, F, G, H sont proportionnaux, puis que E est mesmes parties de F, que G de H, c'est à sçauoir deux troisiesmes parties. Item les quatre nombres I, K, L, M, sont aussi proportionnaux, d'autant que comme I est quadruple de K, aussi L est quadruple de M; ou bien pource que M est telle partie de L que K de I: Car il est euident que si le premier nombre I est autant multiple du second K, que le troisiesme L, l'est du quatriesme M: en prenant les mesmes nombres par ordre contraire, M sera telle partie de L, que K de I, c'est à sçauoir le quart. Parquoy on peut asseurément conclurre que quatre nombres sont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers est mesme partie, ou mesmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers est de l'autre, moyennant qu'ils soient pris d'vn mesme ordre, c'est à dire que si le moindre nombre des deux premiers est antecedant, le moindre des deux derniers soit aussi antecedant; & si consequent, consequent. Et c'est à mon aduis ainsi qu'il faut entendre ceste 20. def. pour la rendre vniuerselle, car autrement on ne pourroit pas conclurre par icelle la proportionnalité de plusieurs nombres, comme par exemple de ces quatre N, O, P, Q, veu que les prenant selon l'ordre qu'ils sont posez, le premier N n'est pas multiple du second O, ny aussi partie ou parties, puis qu'il est plus grand qu'iceluy; & neantmoins ils sont proportionnaux, veu que le moindre des deux premiers, c'est assauoir O, contient autant de parties de l'autre N, que le moindre des deux autres, qui est Q, en contient de l'autre P, c'est assauoir quatre cinquiesmes parties. Semblablement ces quatre autres nombres R, S, T, V, sont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T, que S en contient de R; ou bien à cause que S est mesmes parties de R, que V de T, c'est à sçauoir les trois quarts.

A	B	C	D
5.	10.	4.	8.

E	F	G	H
6.	9.	4.	6.

I	K	L	M
20.	5.	8.	2.

N	O	P	Q
15.	12.	25.	20.

R	S	T	V
36.	27.	24.	18.

Clauius estimant que ceste def. a esté corrompue, pour la restituer y-a adiousté ces mots: Ou bien quand le premier contient egalement le second, & le troisiesme le quatriesme, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy. Mais ie n'estime pas que cette addition y soit necessaire, puis que le moindre nombre de chaque raison estant conferé à l'autre ladite def. conuient à toutes sortes de proportions: & que ce soit l'intention, d'Euclide, il appert assez par les demonstrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. liure.

Or Euclide definit seulement icy les nombres proportionnaux, qui ont vne mes-

me raiſon d'inegalité: Car de la raiſon d'egalité, il eſt euident que le premier nombre eſtant egal au ſecond, auſſi le troiſieſme doit eſtre egal au quatrieſme, afin qu'ils ſoient dits proportionnaux.

De ceſte 20. def. reſulte appertement, que les nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme nombre; & au contraire qu'vn meſme nombre a auſſi meſme raiſon à des egaux: Ce qui a eſté demonſtré en toutes grandeurs à la 7. p. 5. Il en reſulte encore que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme nombre, ou auſquels vn meſme nombre a meſme raiſon, ſont egaux entr'eux. Ce qui a auſſi eſté demonſtré en toutes ſortes de grandeurs en la 9. p. 5.

De ceſte meſme def. on collige auſſi que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raiſon à vn meſme nombre, que le plus petit; & au contraire qu'vn meſme nombre a plus grande raiſon à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celuy qui a plus grande raiſon à vn meſme, eſt le plus grand: & celuy auquel vn meſme nombre a plus grande raiſon, eſt le plus petit: Toutes leſquelles choſes ſont claires, & euidentes, ſi ceſte def. eſt bien entenduë. Cecy a auſſi eſté demonſtré és grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

Or cette definition, & tout ce que nous auons dit cy-deſſus, conuient auſſi aux nombres rompus: Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ſont proportionnaux, attendu que le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir double; ainſi qu'il appert en reduiſant les deux premiers en meſme denomination, ſçauoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, ſont proportionnaux, puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir la moitié, &c.

21. Les nombres ſemblables plans, ou ſolides, ſont ceux qui ont les coſtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, ſont nombres plans ſemblables, pource que 6 & 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proportionnaux à 3 & 2, coſtez de celuy-cy: ainſi auſſi 192 & 24, ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8, 6, 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proport. à 4, 3, 2, coſtez de celuy-cy. Et eſt à noter que ces nombres plans, & ſolides ſemblables peuuent bien eſtre auſſi compris ſous des coſtez non proportionnaux; mais toutesfois nous ne les conſiderons icy qu'entant qu'ils ſont contenus ſous leurs coſtez proportionnaux.

22. Nombre parfaict, eſt celuy qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

Comme 6 eſt dict nombre parfaict, pource que les parties aliquotes d'iceluy, ſçauoir 1, 2, 3, priſes enſemble, luy ſont egales. Ainſi auſſi 28, duquel les parties aliquotes, ſçauoir eſt 1, 2, 4, 7, 14, eſtans priſes enſemble, luy ſont egales; ſera dict nombre parfaict: & tels ſont auſſi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'vn nombre priſes enſemble, ſont plus grandes qu'iceluy, il eſt dict abondant; & quand elles ſont moindres, il eſt appellé diminué.

A ces definitions d'Euclide, Clauius en adiouſte quelques autres, touchant les

raiſons & proportions des nombres, comme de la raiſon egale, de l'alterne, de l'inuerſe, & autres dont eſt traicté en general au 5. liure: Mais pource que nous les auons tellement expliquees en ce lieu-là, qu'on les peut entendre & adapter, non ſeulement aux lignes, ſuperficies & ſolides, mais auſsi aux nombres, & en general à toutes ſortes de grandeurs & quantitez ſoient continues ou diſcrettes; ie n'eſtime pas qu'il ſoit beſoin de les repeter icy, c'eſt pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OV DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre tant qu'on voudra d'egaux ou multiples.

2. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre vn plus grand.

Combien que ſelon noſtre Autheur le nombre ne puiſſe eſtre diminué infiniment, ains ſeulement iuſques à l'vnité qu'il fait indiuiſible, ſi eſt-ce toutesfois qu'il peut eſtre augmenté infiniment par la continue addition de l'vnité: Parquoy eſtant propoſé quelconque nombre, on en peut trouuer vn plus grand, c'eſt aſſauoir celuy qui eſt produict de l'addition d'vne ou de pluſieurs vnitez au nombre donné.

AXIOMES OV COMMVNES SENTENCES.

1. LEs nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Et ceux deſquels vn meſme nombre eſt equemultiplice, ou deſquels les equemultiplices ſont egaux, ſont auſſi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui ſont vne meſme partie, ou meſmes parties de nombres egaux, ou d'vn meſme, ſont egaux entr'eux.

4. Et ceux deſquels vn meſme nombre, ou nombres egaux, ſont meſme partie, ou meſmes parties: ſont auſſi egaux entr'eux.

5. L'vnité meſure tout nombre par les vnitez qui ſont en iceluy, c'eſt à dire par le meſme nombre.

6. Tout nombre meſure ſoy-meſme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produict quelqu'vn, le multipliant meſurera le produict par le mul-

tiplié: mais le multiplié mesurera le mesme produict par le multipliant.

8. Si vn nombre mesure vn nombre; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produict celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou dauantage, mesure aussi le composé d'iceux.

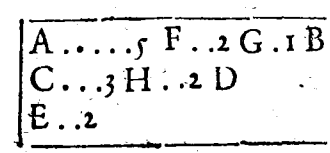
11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le plus petit reste ne mesure iamais le precedant iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB & CD, tels que si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand; le plus petit reste ne mesure iamais le precedant, iusques à ce qu'on paruienne à l'vnité: Ie dis qu'iceux nombres AB & CD, seront premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils ont pour commune mesure la seule vnité.



Autrement, s'ils ne sont premiers, il seront composez, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux: ainsi CD plus petit nombre estant soustraict de AB, soit le reste FB plus petit que CD: item FB estant soustraict de CD, soit le reste HD plus petit que FB: Pareillement HD estant soustraict de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son egal AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent son egal FG: mais il mesure aussi le tout FB;

E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie: ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuuent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement: & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12 def. de ce liure. Si donc de deux nombres inegaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la proposition suiuante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustraict touſiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra pas iusques à l'vnité.

Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en la prop. cy-dessus: & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognoistrons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car estant faicte la soustraction, comme dit est, si on paruient iusques à l'vnité, lesdicts nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on n'y paruient pas, ils seront composez.

PROBL. 1. PROP. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux; trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux A B & C D, desquels C D soit le moindre: il faut trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

Soit soustraict le plus petit nombre C D, tant de fois que faire se pourra du plus grand A B: s'il reste quelque chose, comme E B, iceluy soit osté de C D, tellement qu'il reste encor F D; & ainsi soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que F D mesurant E B, il ne reste rien. Ie dis que F D est la plus grande commune mesure de A B & C D.

A .....9 E ...6 B
C .....6 F ...3 D
G 4

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouuerons ainsi. D'autant que F D mesure E B, & E B mesure C F, par la 11. com. sent. F D mesurera aussi le mesme C F; & mesurant soy mesme, il mesurera le tout C D, composé des deux C F, F D par la 10. com. sent. Mais iceluy C D mesure A E: donc F D mesurera aussi A E: Et puis qu'il mesure aussi E B; il mesurera le tout A B composé d'iceux A E, E B. Par ainsi F D mesure tous les deux nombres A B & C D.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible)

eſt poſſible) vne autre plus grande, comme G. Veu donc que G meſure CD, il meſurera auſſi AE; & meſurant le tout AB, par la 12. com. ſent. il meſurera auſſi le reſte EB; & par conſequent il meſurera CF. Mais il meſure auſſi le tout CD; il meſurera donc auſſi le reſte FD, ſcauoir le plus grand nombre le plus petit: cequi eſt impoſſible. Donc vn plus grand nombre que FD ne meſure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD eſt leur plus grande commune meſure.

A .....8 B
C....4 D

Que ſi le moindre nombre CD meſuroit le plus grand AB; il eſt manifeſte qu'il ſeroit la plus grande commune meſure, attendu qu'il meſure ſoy-meſme, ainſi qu'il appert icy. Nous auons donc trouué la plus grande commune meſure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy eſt euident que qui meſure deux nombres, il meſure auſſi leur plus grande commune meſure, puis qu'il a eſté demonſtré que ſi G meſure AB, & CD, il meſurera auſſi FD leur plus grande commune meſure.

SCHOLIE.

Par les choſes cy-deſſus dictes, nous cognoiſtrons facilement ſi trois ou dauantage de nombres propoſez ſont premiers entr'eux, ou non. Car ſoient donnez les trois nombres A, B, C. Premierement donc ſoit veu par ce qui eſt dict à la 1. prop. ſi les deux nombres A & B ſont premiers entr'eux, ou non: Que s'ils ſont premiers, il eſt euident que les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux. Mais ſi A & B eſtoient compoſez entr'eux, ſoit trouuée par la 2. prop. leur plus grande commnune meſure D; que ſi elle meſure auſſi le nombre C, il eſt manifeſte que les trois nombres A, B, C, ſont compoſez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune meſure.

A 12
B 9
C 6
D ...3

Que ſi D plus grande commune meſure de A & B, ne meſure C; C & D ſeront premiers entr'eux, ou non: s'ils ſont premiers, les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux, mais premiers: Car s'ils eſtoient compoſez, ils auroient vne commune meſure, laquelle meſureroit auſſi le nombre D plus grande commune meſure de A & B, par le Corol. de ceſte prop. & partant C & D ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Mais ſi C & D ne ſont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, ſeront compoſez entr'eux. Car eſtant trouuee par la 2. p. 7. E la plus grande commune meſure de C & D; iceluy nombre E meſurera auſſi A & B par la 11. com. ſent. puis que D les meſure. Parquoy veu que le meſme E meſure auſſi C; il meſurera les trois A, B, C: & partant iceux ſeront compoſez entr'eux. Ce qui eſtoit propoſé.

A 9
B 6
C 5
D ...3

A 12
B 8
C 6
D ....4 E..2

En la meſme maniere ſera examiné & cogneu ſi plus de trois nombres ſont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra eſprouuer premierement trois; ſi cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres propoſez.

PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux; trouuer leur plus grande commune mesure.

A	12	D	4.
B	8	E	2
C	6	F	3

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C; desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit trouué par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: car si vn plus grand nombre que D mesuroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, scauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Cor. de la 2. prop. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure de C & D. Il est euident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D; lequel D mesure B & A. Ie dis dauantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, scauoir F, s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le mesme Corol. de la 2. prop. & par la mesme raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçauoir le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres donnez A, B, C; & partant iceluy nombre E sera leur plus grande commune mesure. Parquoy nous auons troqué la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy il est manifeste qu'vn nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

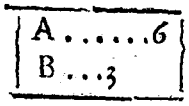
SCHOLIE.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure; C'est à dire, que s'il y-a quatre nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune mesure de trois: si 5, de quatre: si 6, de cinq, &c. puis acheuer, comme il a esté dict de trois nombres donnez. Et aura aussi lieu le Corol. precedent; tellement que le nombre qui en mesure quatre, mesurera aussi leur plus grande commune mesure, &c.

THOR. 2. PROP. IV.

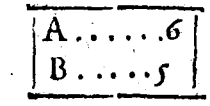
Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inegaux, desquels A soit le plus grand. Ie dis que le plus petit B, est ou partie ou parties du plus grand A.

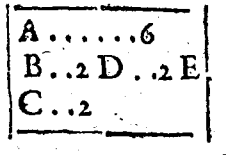


Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie par la 3. def. de ce liure : s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombres premiers, ou composez.

Premierement qu'ils soient premiers : d'autant que chaque vnité de B est partie de A, il est euident que B est parties de A, assauoir autant de parties qu'il y-a d'vnitez en B.



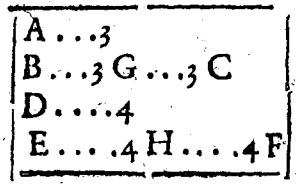
Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouuée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit diuisé B, en parties BD, DE, chacune egale à C. Veu donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A ; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, assauoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

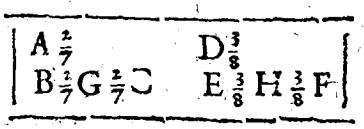
Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Ie dis que A & D ensemble font telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.



Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF ; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc diuisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC ; EF se diuisera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF : & d'autant que BG est egal à A, & EH à D, si à choses egales A & BG, on adiouste choses egales, D & EH : A & D ensemble, seront egaux à BG & EH ensemble : semblablement A & D ensemble, seront egaux à GC & HF ensemble, & ainsi de suitte, s'il y auoit dauantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble : Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

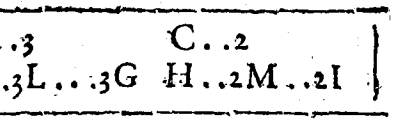
Le meſme eſt auſſi veritable en nombres rompus, ainſi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A eſt telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF: & partant ſera demonſtré comme deſſus A, D, enſemble eſtre la meſme partie de BC, EF enſemble que A de BC: ſçauoir eſt, ſi BC, EF ſont diuiſez és parties BG, GC; EH, HF, egales à iceux nombres A & D, &c.



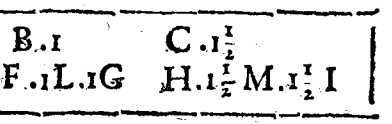
Or ceſte 5. prop. peut eſtre transferée à tant de nombres qu'on voudra ainſi:

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient meſme partie d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant; auſſi les touts ſeront meſme partie des touts, que l'vn ſera de l'vn ſon correſpondant.

Soient les nombres A, B, C, vne meſme partie des nombres DE, FG, HI, chacun de ſon correſpondant: Ie dis que tous les nombres A, B, C, enſemble ſont la meſme partie de tous les nombres DE, FG, HI enſemble, que A de DE. Car eſtans diuiſez les nombres DE, FG, HI en parties egales à iceux A, B, C; il y aura en DE autant de parties egales à A qu'en FG d'egales à B, & qu'en HI d'egales à C. Veu donc que A & DK, ſont egaux, ſi on leur adiouſte les egaux B & FL; A, B enſemble ſeront egaux à DK, FL enſemble; & ſi à iceux on adiouſte encores les egaux C & HM; auſſi A, B, C enſemble, ſeront egaux à DK, FL, HM, enſemble. Par meſme raiſon A, B, C enſemble ſeront egaux à KE, LG, MI enſemble; & ainſi de ſuitte, s'il y auoit dauantage de parties en DE, FG, HI: donc l'aggregé des nombres A, B, C ſera autant de fois egal à l'aggregé des parties des nombres DE, FG, HI, que A ſera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C enſemble, ſeront la meſme partie de DE, FG, HI enſemble, que A de DE.



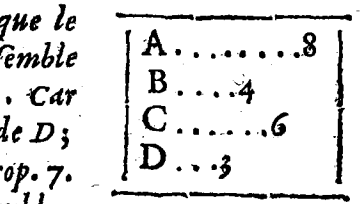
Or cecy conuient auſſi aux nombres rompus, ſoit qu'ils le ſoient tous, ſoit qu'auec iceux il y ait auſſi quelque nombre entier, voire meſme l'vnité, ainſi qu'en ceſte autre figure. Car il eſt euident que ceſte diuerſité de nombres ne peut apporter aucun changement en la demonſtration cy-deſſus.



Commandin a demonſtré en ce lieu le theoreme ſuiuant.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre qu'vn autre l'eſt d'vn autre; l'vn & l'autre enſemble ſera autant multiple de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'eſt du nombre D: Ie dis que A & C enſemble ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Car puis que A eſt multiple de B, & C autant multiple de D; B ſera telle partie de A, que D de C: & par la 5. prop. 7. B & D enſemble ſera telle partie de A & C enſemble, que A de B: partant A & C enſemble ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Ce qu'il falloit demonſtrer.



Ce qui eſt icy demonſtré de deux nombres, ſe doit auſſi entendre de dauantage; tellement que la prop. ſe peut rendre vniuerſelle diſant ainſi:

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant; les touts ſeront autant multiple des touts, que l'vn ſera multiple de l'vn, ſon correſpondant.

Ce qui correſpond à ce qui a eſté demonſtré en toutes ſortes de grandeurs à la 1. p. 5. Et neantmoins nous le demonſtrerons encor ainſi. Soient trois nombres A, B, C, equemultiplices de trois autres D, E, F, chacun de ſon correſpondant: Ie dis que les touts A, B, C, enſemble, ſont autant multiples des touts D, E, F enſemble, que A eſt multiple de D. Car puis que A eſt autant multiple de D, que B de E, & C de F: au contraire D ſera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choſes cy-deſſus demonſtrees, D, E, F enſemble, ſeront telle partie de A, B, C enſemble, que D de A: & par le contraire les toutes A, B, C enſemble, ſeront autant multiples des toutes D, E, F enſemble, que A de D. Et n'importe que les nombres propoſez ſoient nombres entiers, ou nombres rompus car il eſt euident que la demonſtration des vns eſt la meſme que des autres.

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart: le premier & tiers enſemble, ſeront telles parties du ſecond & quart enſemble, que le premier du ſecond.

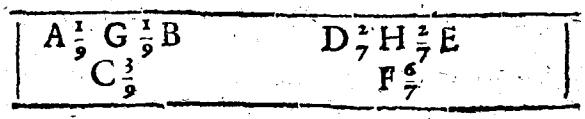
Soient quatre nombres AB, C, DE & F, deſquels le premier AB contient autant de parties du ſecond C, que le troiſieſme DE en contient du quatrieſme F. Ie dis que AB & DE enſemble, contiennent autant de parties de C & F enſemble, que AB de C.

A...3 G...3 B	
C.....9	
D....4 H....4 E	
F.....12	

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; eſtans AB & DE diuiſez en AG, GB; & DH, HE, ſelon qu'ils ſont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. preced. AG & DH enſemble ſera telle partie de C & F enſemble, que AG de C. Item GB & HE enſemble, ſera telle partie de C & F enſemble, que GB de C; & ainſi de ſuite, s'il y auoit dauantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE enſemble, ſeront telles parties de C & F enſemble, que AB de C. Donc ſi de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte meſme prop. auec ſa demonſtration a auſſi lieu en nombres rompus, comme il appert en cet exemple.



Mais ceſte 6. prop. peut auſſi eſtre eſtendue à tant de nombres qu'on voudra, ſoient entiers, ou rompus, ainſi qu'il enſuit.

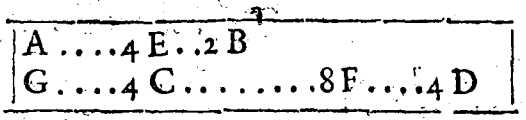
S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient meſmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'vn chacun; auſſi les touts ſeront meſmes parties des touts, que l'vn de l'vn ſon correſpondant.

Car c'eſt la meſme demonſtration que deſſus; obſeruant ſeulement qu'au lieu de la 5. prop. il ſe faut ſeruir icy de l'vniuerſelle demonſtree au Scholie d'icelle 5. prop.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi telle partie du reſte, comme le tout eſt du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE eſt du retranché CF. Ie dis que le reſte EB, ſera telle partie du reſte FD, que le tout AB eſt du tout CD.



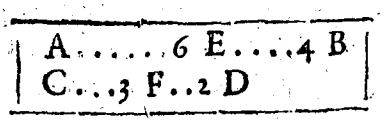
Car eſtant pris le nombre GC, en ſorte que telle partie qu'eſt le retranché AE du retranché CF, telle partie le reſte EB ſoit d'iceluy GC; par la 5. pr. les deux nombres AE & EB enſemble ſeront telle partie des nombres GC & CF enſemble, qu'eſt AE de CF, c'eſt à dire qu'eſt le tout AB du tout CD: & partant puis que le nombre AB eſt telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD ſeront egaux entr'eux par la 4. com. ſent. en oſtant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD ſeront egaux: & partant le reſte EB ſera telle partie du reſte FD, que de GC: c'eſt à dire que le tout AB du tout CD puis que EB a eſté poſé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypotheſe eſt la meſme que AB de CD. Si donc vn nombre eſt telle partie d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte prop. auec ſa demonſtration conuient auſſi aux nombres rompus: Et encore le theoreme ſuiuant, lequel Commandin demonſtre en ceſt endroict.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn autre nombre que le retranché du retranché; auſſi le reſte ſera autant multiple du reſte, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis auſſi que le reſte EB eſt autant multiple du reſte FD, que le tout AB l'eſt du tout CD. Car puis que AB, AE ſont equemultiplices de CD, CF, par le contraire le tout CD ſera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par



la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce qui estoit proposé à demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

G..2 A.....6 E..2 B
C.....9 F...3 D

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'vn que l'autre, ils seront egaux: parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD: Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'on substitue des nombres rompus, tu demonstreras en la mesme maniere ceste 8. prop. estre aussi veritable en fractions; & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier sera telle, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A soit telle partie de BC, que D est de EF. Ie dis qu'en permutant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF, chacun au sien; car ainsi se doit entendre ceste proposition.

A...3
B...3 G...3 C
D....4
E....4 H....4 F

Qu'ainsi ne soit: d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF: BC contiendra autant de parties egales à A que EF en contient d'egales à D: soit donc diuisé le nombre BC és parties BG, GC,

chacune egale à A ; & le nombre E F és parties E H, H F chacune egale à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. prop. de ce liure, A est partie ou parties de D, & ainsi consequemment des autres, sçauoir BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG est egale à GC, & EH à HF ; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC ensemble ; c'est à dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensemble, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart ; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, desquels AB contienne telle parties de C, que DE de F. Ie dis qu'en permutant, AB sera telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, chacun au sien, car ceste prop. aussi bien que la precedente se doit ainsi entendre.

A . . 2	G . . 2 B
C 6	
D 5	H . . . . . 5 E
F 15	

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C ; & DE en DH, HE parties de F ; AB sera diuisé en autant de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F : donc en permutant par la 9. prop. de ce liure, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F : & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB ensemble, sçauoir est le premier nombre AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est à dire du troisiesme nombre DE, que AG de DH, c'est à dire que le second nombre C du quart F : Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9 PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché ; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD, comme le retranché AE au retranché CF : ie dis que le reste EB est au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

A 4	E . . 2 B
C 6	F . . . 3 D

Car puis que AB est à CD, comme AE à CF ; AB estant plus petit nombre que CD, il sera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD, que le tout du tout :

du tout: & partant par la 20. def. le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'en ceſte demonſtration Euclide poſe le nombre AB plus petit que le nombre CD, ſi eſt-ce toutesfois qu'elle auroit auſſi lieu, ſi AB eſtoit plus grand que CD. Car ou iceluy nombre CD meſureroit AB, ou il ne le meſureroit pas. Que CD meſure donc premierement AB; & d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, par la 20. def. AB, AE, ſeront equemultiplices de CD, CF, c'eſt à dire que CD ſera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reſte FD ſera auſſi meſme partie du reſte EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, ſeront equemultiplices d'icelles CD, FD: & par la 20. def. conuertie, comme le tout AB ſera au tout CD, ainſi le reſte EB ſera au reſte FD.

A	8E	6B
C	4F	3D

Maintenant que CD ne meſure pas AB: derechef puis que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, telles parties que CD eſt de AB, telles parties CF eſt auſſi de AE par la ſuſdite 20. def. & par la 8. prop. le reſte FD ſera meſme parties du reſte EB, que le tout CD du tout AB: donc par la meſme def. conuertie, le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB ſera au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A	6E	3B
C	4F	2D

THEOR. 10. PROP. XII.

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux; comme l'vn des antecedans ſera à ſon conſequent, ainſi tous les antecedans ſeront à tous les conſequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux A, B; C, D; E, F; c'eſt à ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D, & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A, C, E enſemble, ſeront à tous les conſequens B, D, F enſemble, comme A, l'vn des antecedans, eſt à B ſon conſequent.

A	6	C	4	E	2
B	9	D	6	F	3

Car puis que les ſuſdits nombres ſont proportionnaux, & A, C, E, ſont moindres que B, D, E; par la 20. def. A ſera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce meſme liure A & C enſemble ſeront telle, ou telles parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C enſemble comme vn ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D enſemble, comme vn ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes prop. A, C enſemble auec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble auec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. conuertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront meſme raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que

A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'vn des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Euclide n'ayant demonstré ceste prop. qu'en quatre nombres, nous auons delaissé sa demonstration pour prendre celle-cy, qu'on peut estendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en ceste demonstration nous ayons posé, comme il a faict les nombres antecedens moindres que les consequens, si est-ce toutesfois qu'estans plus grands la demonstration n'en sera differente, sinon en ce qu'il faudra, comme au scholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiples des consequens; & puis apres iceux consequens mesmes parties desdicts antecedans, &c.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionnaux: aussi en permutant ils seront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D: Ie dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

A	6
B	9
C	8
D	12

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A estant plus petit que B, & C que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. conuertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Ceste demonstration d'Euclide á seulement lieu, quand les nombres antecedans sont moindres que les consequens, & que A est moindre que C: mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B, & moindre que C, la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. B sera mesme partie, ou mesmes parties de A, que D de C: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera mesme partie ou parties de D, que A de C: & par la susdite 20. def. A sera à C, comme B à D.

A	4
B	3
C	8
D	6

Que si A est plus grand que B, & que C; on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. D sera mesme partie ou parties de C que B de A: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. C sera telle partie, ou telles parties de A, que D de B; & partant par la mesme def. A sera à C, comme B à D.

A	9
B	6
C	3
D	2

Finalement si A est moindre que B, & plus grand que C, on dira ainsi: d'autant que comme A est à B, ainsi C est à D, par la 20. def. 7. C est mesme partie ou parties de D, que A de B: donc en changeant par la 9. ou 10. p. 7. C sera mesme partie, ou parties de A, que D de B; & par la susdicte 20. def. conuertie, A sera à C, comme B à D.

A	4
B	8
C	2
D	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre, qui soient prins de deux en deux, & en mesme raison; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F; & qu'il y ait telle raison de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Ie dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

A	9	D	6
B	6	E	4
C	3	F	2

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A sera à D, ainsi B à E: semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en permutant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstré) & partant en permutant, comme A sera à C, ainsi D sera à F: ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstrerons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B: Parquoy F sera telle ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def. conuertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles. Ce qui a esté demonstré en toutes grandeurs au 5. liure prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers mesure vn quart; aussi en permutant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A, qui mesure BC autant de fois que D mesure EF: Ie dis

qu'en permutant BC mesurera EF autant de fois que A mesure D.

Car ayant diuisé BC selon les vnitez BG, GH, HC; il y aura en EF autant de parties egales à D, lesquelles soient EI, IK, KF; & partant BG sera mesme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF: donc par la 20. def. BG est à EI, comme GH à IK, & HC à KF: & partant par la 12. prop. tous les antecedans BC seront à tous les consequents EF, comme BG à EI, ou leurs egaux A à D: & par la susdite 20. def. conuertie BC sera mesme partie de EF que A de D; & par consequent BC mesure EF autant de fois que A mesure D. Parquoy si l'vnité mesure quelque nombre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

A . 1
B . 1 G . 1 H . 1 C
D . . 2
E . . 2 I . . 2 K . . 2 F

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, leurs produicts seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B; & que A multipliant B produise C; & B multipliant A produise D: Ie dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produict C; B sera autant de fois en C, que l'vnité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'vnité mesure A, & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'vnité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. def. & par consequent mesurera D autant de fois que l'vnité mesure B: mais nous auons prouué que A mesureroit aussi C autant de fois que l'vnité mesure B: donc A mesure C & D egalement, & partant par la 1. com. sent. C & D seront egaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

vnité.	
A . . . 3	B 4
C 12	
D 12	

SCHOLIE.

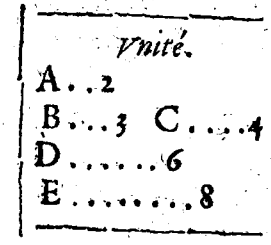
On demonstrera ceste prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produict C; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'vnité: & en permutant C sera à A comme B à l'vnité. Mais par la mesme def. comme B est à l'vnité, ainsi aussi D est à A, pource que B multipliant A a produict D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au mesme A, par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont egaux entr'eux.

vnité.	
A $\frac{2}{3}$	B 4 $\frac{5}{7}$
D 3 $\frac{1}{7}$	C 5 $\frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

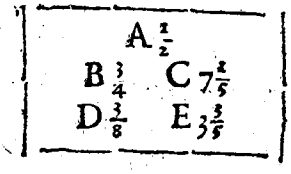
Si vn nombre en multiplie deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C faſſe D & E: Ie dis que les deux produicts D & E ſont entr'eux, comme B à C.



Car par la 15. def. B multiplié par A eſt autant de fois contenu en ſon produict D, que l'vnité en A; & C dans ſon produict E, comme la meſme vnité en A: & partant B meſurera autant de fois D, que C meſure E. Donc B ſera telle partie de D, que C de E: & par la 20. def. B ſera à D, comme C à E; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B ſera à C, ainſi D ſera à E: Si donc vn nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

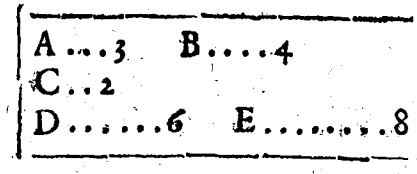


Cette prop. a auſſi lieu en nombres rompus; & ſe demonſtre ainſi. D'autant que A multipliant B & C, produict D & E; par la def. de la multiplication il y aura telle raiſon tant de D à B, que de E à C, comme de A à l'vnité, & partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D ſera à B, ainſi E à C: donc en permutant comme D ſera à E, ainſi B à C.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient vn autre, les produicts ſeront entr'eux, en meſme raiſon que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produiſent D & E. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E.



Car puis que A multipliant C produict D, auſſi C multipliant A produict le meſme D par la 16. prop. Semblablement, puis que B multipliant C produict E, auſſi C multipliant B produira le meſme E: veu donc qu'vn meſme nombre C multipliant A & B, produict D & E, comme A eſt à B, ainſi D eſt à E par la prop. prec. Parquoy ſi deux nombres en multiplient vn autre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Veu que la demonſtration tant de ceſte prop. que des deux ſuiuantes, eſt la meſme en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arreſterons dauantage; mais dirons icy que Clauius a accommodé (apres Campanus) tant ceſte prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra; en ceſte ſorte,

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produicts ſeront entr'eux en meſmes raiſons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou eſtant multiplié par iceux, ſoient produicts les nombres E, F, G. Ie dis que E, F, G, ſont entr'eux comme les nombres multipliez, ou multiplians B, C, D; c'eſt à dire que comme B eſt à C, ainſi E à F; & comme C à D, ainſi F à G. Car puis que E, F ſont produicts de A multipliant B, C; ou de B, C, multipliez par A, comme B ſera à C, ainſi E ſera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F, G, ſont produicts de A en C, D, ou de C, D par A, auſſi comme C ſera à D, ainſi F ſera à G, & ainſi des autres. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

A...3
B..2 C...3 D....4
E.....6 F.....9 G.....12

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, ſera egal au produict du ſecond par le tiers: Et ſi le produict du premier multiplié par le quart, eſt egal au produict du ſecond par le tiers; iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B: C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Ie dis que E & F ſont egaux.

A.....6 B....4
C...3 D..2
E.....12
F.....12
G.....18

Qu'ainſi ne ſoit: Soit multiplié A par C, & le produict ſoit G: d'autant que A multiplié par C & D, produict G & E, il y aura telle raiſon de G à E, que de C à D, par la prop. prec. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raiſon de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui ſont en meſme raiſon que A & B. Parquoy G eſtant à E, & G à F en meſme raiſon que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G ſera à E, ainſi G ſera à F; parquoy G aura meſme raiſon à E qu'à F; & partant E & F ſeront nombres egaux, ainſi que nous auons dit ſur la 20. def.

Pour la ſeconde partie, ſoit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié par C: Ie dis que A eſt à B comme C eſt à D.

Car ſi G eſt produict de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront meſme raiſon à G, comme nous auons dit en la ſuitte de la 20. def. Mais il y a telle raiſon de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raiſon de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. p. A ſera à B, comme C à D: ſi donc quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Clauius adiouſte icy cet autre Theoreme, la demonſtration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier a plus grande raiſon au ſecond, que le troiſieſme au quatrieſme; le produict du premier multiplié par le quatrieſme ſera plus grand que le produict du ſecond multiplié par le troiſieſme; & ſi le nombre produict du premier & quatrieſme eſt plus grand, que celuy du ſecond & troiſieſme; il y aura plus grande raiſon du premier au ſecond que du troiſieſme au quatrieſme.

A.....7	E.....6
B....4	
C.....9	
D.....6	

Soient quatre nombres A, B, C, D, & qu'il y ait premierement plus grande raiſon du premier A au ſecond B, que du troiſieſme C au quatrieſme D: Ie dis que le nombre procreé de A en D eſt plus grand que celuy fait de B en C. Car ſi on poſe que E ſoit à B, comme C à D; il y aura auſſi plus grande raiſon de A à B, que de E à B; & partant A ſera plus grand que E, comme nous auons annotté ſur la 20. def. 7. Parquoy il ſe fera vn plus grand nombre de A en D, que de E par le meſme D. Mais par la 19. prop. 7. le produict de E en D eſt egal à celuy de B en C: donc auſſi le nombre procreé de A en D ſera plus grand que celuy fait de B en C. Ce qu'il falloit prouuer.

A.....5	E.....6
B....4	
C...3	
D..2	

Maintenant que le nombre procreé de A en D, ſoit plus grand, que celuy faict de B en C: Ie dis qu'il y a plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Car ſi on entend que le nombre E en D faſſe le meſme nombre, que de B en C; le produict de A en D ſera auſſi plus grand que celuy de E par le meſme D: & partant A ſera plus grand que E. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à B, que de E au meſme B. Mais par la 19. prop. 7. comme E eſt à B, ainſi C eſt à D: donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

Que s'il y auoit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme, le nombre faict du premier multiplié par le quatrieſme ſeroit moindre, que celuy faict du ſecond par le troiſieſme: Et ſi le nombre procreé du premier multiplié par le quatrieſme eſtoit moindre, que celuy fait du ſecond par le troiſieſme; il y auroit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme. La demonſtration n'eſt differente à la precedente, ſinon en ce qu'il faut changer plus grand *en* moindre.

A ce Theoreme nous en adiouſterons vn autre fort vtil, qui eſt tel.

Si trois ou dauantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le ptoduict ſera touſiours le meſme, en quelque facon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A, B, C, & le produict de A multiplié par B ſoit D, le-

quel multiplié par C produise E: Mais changeant d'ordre le produict de B par C soit F, & iceluy multiplié par A produise G: Changeant derechef d'ordre, le produict de A en C soit H, qui multiplié par B fasse I. Ie dis que les trois produicts E, G, I, sont vn mesme nombre. Car puis que B multipliant A & C produict D, F, par la 17. prop. 7. comme A est à C, ainsi D à F, & par la 19. prop. 7. le produict de A en F, qui est G, sera egal au produict de C en D, qui est E. Item puisque C multipliant A & B, produict H & F, comme A est à B, ainsi H à F; & partant le produict de A en F, qui est G, sera egal au produict de B en H, qui est I. Par ainsi les deux nombres E & I estans egaux au nombre G, tous les trois E, G, I, sont egaux entr'eux, c'est à dire vn mesme nombre: Ce qu'il falloit prouuer.

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D, & multipliant A par B, & le produict par C, soit faict E, qui multiplié par D produise F: Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C, & le produict par B, soit faict G, qui multiplié par A, fasse H: Ie dis que F & H sont vn mesme nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D, sera tousiours produict le mesme nombre. Car puis que multipliant d'vn costé les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'vn autre costé les trois D, C, B, aussi entr'eux sont produicts les deux E & G, soient multipliez B & C entr'eux, & le produict soit I. Or par ce qui a esté demonstré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B, & le produict par C, se fera aussi multipliant B par C, & le produict (sçauoir I) par A. Par mesme discours, on prouuera que G seroit produict multipliant D par I. Veu donc que I multipliant A & D, produict E & G, comme A est à D, ainsi E est à G, par la 17. prop. 7. & partant le produict des extremes A & G sera le mesme que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H sont vn mesme nombre. Et par semblable discours on prouuera tousiours le mesme: Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'vn costé, & trois d'vn autre, il se rencontrera que de trois pris d'vn costé, & d'autre, il y en aura tousiours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la mesme demonstration aura tousiours lieu.

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.		I 12.	G 60.
F 120.			H 120.

Que si l'on propose cinq nombres, on en prendra quatre d'vn costé, & quatre d'vn autre, & s'en trouuera tousiours trois qui seront commun d'vn costé & d'autre: tellement que s'aydant de ce qui a esté demonstré en trois, & en quatre nombres, en accomplira la demonstration en la mesme sorte. Et si on propose six nombres, l'on se seruira de ce qui aura esté demonstré en cinq, & ainsi tousiours en augmentant de nombre en nombre, si on en propose dauantage. Ce que le docte Bachet a aussi demonstré en ses Problemes plaisans; & est veritable en toutes sortes de nombres soient entiers ou fractions.

THEOR.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres ſont proportionnaux, le produict des extremes eſt egal au produict du milieu: & ſi le produict des extremes eſt egal à celuy du milieu, iceux trois nombres ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi B à C: Ie dis que le produict de A 1, multiplié par C, 3e, eſt egal au produict du moyen B multiplié par ſoy-meſme.

A	9
B	6
D	6
C	4

Car eſtant pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & par la prec. prop. le produict de A par C, ſera egal au produict de B par D, c'eſt à dire, de B par ſoy-meſmes.

Pour la ſeconde partie; ſoit le produict de A, 1. multiplié par C, 3e, egal au produict de B moyen multiplié par ſoy-meſme: Ie dis que les nombres A, B, C, ſont proportionnaux.

Car derechef eſtant pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & par la prop. prec. le produict de A par C ſera egal au produict de B par D, c'eſt à dire de B par ſoy-meſme, puis que D luy eſt egal: partant les trois nombres A, B, C, ſont proportionnaux. Si donc trois nombres ſont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que s'il y-a plus grande raiſon du premier nombre au ſecond, que du ſecond au troiſieſme; le nombre procreé du premier multiplié par le troiſieſme ſera plus grand, que celuy faict du ſecond multiplié par ſoy-meſme: & ſi le nombre faict du premier multiplié par le troiſieſme eſt plus grand que du ſecond en ſoy-meſme, il y aura plus grande raiſon du premier au ſecond, que du ſecond au troiſieſme. Item s'il y-a moindre raiſon du premier au ſecond, que du ſecond au troiſieſme, le produict du premier par le troiſieſme ſera moindre que le produict du ſecond par ſoy-meſme: & ſi vn moindre nombre eſt faict du premier multiplié par le troiſieſme, que du ſecond en ſoy; il y aura moindre raiſon du premier nombre au deuxieſme, que du deuxieſme au troiſieſme: Ce qui ſera euident par ce qui eſt demonſtré au Scholie precedent, ayant poſé le nombre D egal au ſecond nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres: Car alors il y aura plus grand

A	8	A	4
B	6	B	6
D	6	D	6
C	5	C	7

de raiſon du premier au deuxieſme, que du troiſieſme au quatrieſme, ou moindre, &c. comme il appert aux exemples cy appoſés, ſoit que les nombres ſoient entiers ou rompus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux, meſurent egalement les nombres qui ont la meſme raiſon, ſçauoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit.

Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raiſon, & deux autres nombres plus grands C & D en meſme raiſon qu'iceux A & B, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C à D: Ie dis que A & B meſurent egalement C & D, c'eſt à dire que A meſure C autant de fois que B meſure D.

A...3	B....4
C.....6	D.....8

Car puis que iceux A, B, C, D, ſont proportionnaux, en permutant par la 13. prop. A ſera à C comme B à D; & puis que A & B ſont plus petits que C & D, par la 20. def. ils ſeront meſme partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuuent eſtre parties: car il eſt euident qu'ils ne ſeroient les plus petits nombres de leur raiſon; contre l'hypotheſe. Donc A eſt meſme partie de C, que B de D: & partant A meſure C, autant de fois que B meſure D: parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne meſme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y-a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, la proportion eſtant troublée, en raiſon egale, ils ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, & leur proportion troublee, ſçauoir que A ſoit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.

A....4	D.....12
B...5	E.....8
C..2	F.....6

Car puis que A eſt à B, comme E à F le produict de A multiplié par F, ſera egal au produict de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B eſt à C, comme D à E; le meſme produict de B multiplié par E, ſera egal au produict de C multiplié par D, par la meſme prop. & partant le produict de A par F, ſera egal au produict de C par D, & par la ſuſdite 19. prop. il y aura

meſme raiſon de A à C que de D à F: Parquoy s'il y a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Il eſt euident que ceſte demonſtration conuient auſſi aux nombres rompus. Et d'autant que de ſix moyens d'argumenter és proportions, leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonſtré au 5. liure, il en demonſtre en celuy-cy ſeulement deux en nombres; il ne ſera hors de propos de demonſtrer auſſi en nombres les quatre autres moyens, comme ont faict pluſieurs Interprettes.

1. Si quatre nombres ſont proportionnaux; par raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſſi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Ie dis qu'en changeant comme B à A, ainſi D à C. Car puis que comme A à B, ainſi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A ſera à C, ainſi B à D. Derechef puis que B eſt à D comme A à C, par la meſme prop. B ſera à A comme D à C. Ce qui eſtoit propoſé.

A	6	C	3
B	4	D	2

2. Si les nombres compoſez ſont proportionnaux; iceux diuiſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à EF. Ie dis qu'auſſi en diuiſant, comme AC à CB, ainſi DF à FE. Car puis que comme AB à CB, ainſi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE, ainſi le retranché CB au retranché FE: & partant par la 11. p. comme le tout AB eſt au tout DE, ainſi le reſte AC ſera au reſte DF: c'eſt à dire AC à DF comme CB à FE: donc en permutant comme AC ſera à CB, ainſi DF ſera à FE. Ce qui eſtoit propoſé.

A	6	C	3	B
D	4	F	2	E

Par la meſme maniere nous demonſtrerons comme au liure 5. la diuiſion conuerſe, & contraire de raiſon. Car ſoit premierement comme AB à CB, ainſi DE à FE; Ie dis que, par diuiſion conuerſe de raiſon, comme CB à AC, ainſi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainſi DE à FE; en diuiſant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE: & en changeant, comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainſi DF à DE. Ie dis par diuiſion contraire de raiſon, que comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE. Car puis que comme AC à AB, ainſi DF à DE: en changeant comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF. Donc en diuiſant comme CB à AC, ainſi FE à DF: & en changeant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Ce qui eſtoit propoſé.

3. Si les nombres diuiſez ſont proportionnaux: iceux compoſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit AB à BC, comme DE à EF. Ie dis qu'en compoſant comme AC eſt à BC, ainſi DF, à EF. Car puis que comme AB à BC, ainſi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainſi BC à EF, & partant par la 12. prop. comme AB, BC enſemble, à DE, EF, enſemble, c'eſt à dire

A	6	B	3 C
D	4	E	2 F

le tout AC au tout DF, comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC, ainsi DF à EF. Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous demonstrerons icy comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis par composition conuerse de raison, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car veu que AB est à BC, comme DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE: & en composant comme AC sera à AB, ainsi DF sera à DE.

Maintenant soit derechef AB à BC, comme DE à EF. Ie dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF: car puis que comme AB à BC, ainsi DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE. Donc en composant, comme AC à AB, ainsi DF à DE, & en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF.

4. Si les nombres composez sont propotionnaux; ils le seront aussi par conuersion de raison.

A.....6 C...3 B
D....4 F..2 E

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis que par conuersion de raison, comme AB est a AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC au reste DF. Donc en permutant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Ce qui estoit proposé.

A ces quatre theoremes nous adioutterons les quatre suiuans.

5. S'il y-a tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre lesquels prins de deux en deux soient en mesme raison; comme tous les nombres du premier ordre ensemble seront à l'vn d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'vn costé, & quatre d'vn autre E, F, G, H, & que A soit à B, comme E à F; & B à C comme F à G; & C à D comme G à H: Ie dis que comme tous les nombres A, B, C, D, ensemble, seront au dernier D, ainsi tous les nombres E, F, G, H, ensemble seront au dernier H. Car d'autant que comme A, est à B, ainsi E est à F; en composant comme A, B, ensemble seront à B, ainsi E, F ensemble seront à F. Mais comme B est à C, ainsi F à G: donc en raison egale, comme AB, ensemble sont à C. ainsi E, F ensemble sont à G; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C, ainsi E, F, G, ensemble seront à G. Mais comme C à D, ainsi G à H: donc en raison egale comme A, B, C ensemble seront à D, ainsi E, F, G ensemble seront

A...3	B....4	C..2	D.....5	
E.....6	F.....8	G....4	H.....10	

à H: Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble seront à H. Ce qu'il falloit prouuer.

D'où est manifeste que comme l'vn des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble sont à H; en permutant A, B, C, D ensemble sont sont à E, F, G, H ensemble, comme D à H.

6. Si le premier à mesme raison au second, que le troisiesme au quatriesme, & que le cinquiesme ayt aussi mesme raison au second, que le sixiesme au quatriesme: le composé du premier & cinquiesme aura mesme raison au second, que le composé du troisiesme & sixiesme au quatriesme.

Soit A B premier à C deuxiesme, comme D E troisiesme à F quatriesme. Item soit B G cinquiesme à C deuxiesme, comme E H sixiesme à F quatriesme. Ie dis que A G, composé du premier & du cinquiesme est à C deuxiesme comme D E composé du troisiesme & sixiesme est à F quatriesme. Car puis que comme B G est à C, ainsi E H à F, en changeant comme C sera à B G, ainsi F à E H. Veu donc que comme A B à C, ainsi D E à F, & comme C à B G, ainsi F à E H; en raison egale, comme A B est à B G, ainsi D E est à E H: & en composant, comme A G à B G, ainsi D H à E H, partant puis que derechef comme A G à B G, ainsi D H à E H, & comme B G à C, ainsi E H à F; en raison egale, comme A G sera à C, ainsi D H à F. Ce qui est proposé.

A.....6 B..2 6	D.....9 E...3 H
C....4	F.....6

7. Si le premier a mesme raison au second, que le troisiesme au quatriesme; & que le premier ayt aussi la mesme au cinquiesme, que le troisiesme au sixiesme; aussi le premier aura mesme raison au composé du second & cinquiesme que le troisiesme au composé du quatriesme & sixiesme.

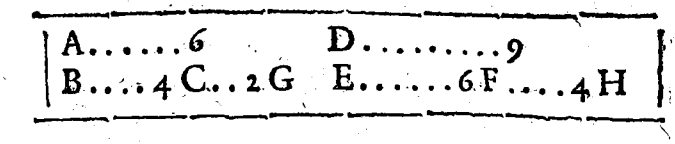
Soit le tout A B à C, comme le tout D E à F: Item le retranché A G soit à C, comme le retranché D H à F: Ie dis que le reste G B est à C, comme le reste H E à F. Car puis que comme A G à C ainsi D H à F, en changeant comme C sera à A G ainsi F à D H. Veu donc que comme A B à C, ainsi D E à F, & comme C à A G, ainsi F à D H; en raison egale; comme A B à A G, ainsi D E à D H. Parquoy en diuisant comme G B à A G, ainsi H E à D H. Mais puis que derechef, comme G B à A G, ainsi H E à D H, & comme A G à C, ainsi D H à F; en raison egale, comme G B sera à C ainsi H E sera à F: ce qui est proposé.

A.....6 G..2 B	D.....9 H...3 E
C....4	F.....6

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont vne mesme raison à deux nombres: aussi les restes auront mesme raison aux mesmes nombres.

oit A premier à B C deuxiesme, comme D troisiesme à E F quatriesme: & comme A premier C G cinquiesme, ainsi D troisiesme à F H sixiesme. Ie dis que cõme A premier est à

BG, composé du deuxiesme & cinquiesme, ainsi D, troisiesme à EH composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à BC, ainsi D à EF, en changeant comme BC sera à A, ainsi EF à D. D'autant donc que comme BC à A, ainsi EF à D, & comme A à CG, ainsi D à FH; en raison egale, comme BC à CG, ainsi EF à FH: & en composant comme BG à CG, ainsi EH à FH; & en changeant comme CG à BG, ainsi FH à EH. Veu donc que comme A à CG, ainsi D à FH, & comme CG à BG, ainsi FH à EH; en raison egale, comme A sera à BG, ainsi D à EH. Ce qui est proposé.

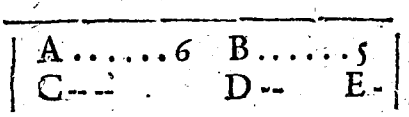


THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D plus petits en la mesme raison; & par la 21. prop. ils mesureront A & B, l'vn comme l'autre: qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure des nombres A & B, ainsi ils ne seroient pas premiers entr'eux, mais composez, contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entre'eux, &c. Ce quil falloit prouuer.

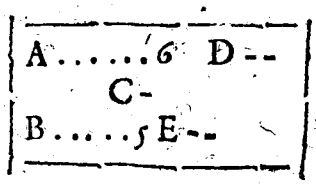


THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison: Ie dis qu'ils sont premiers entr'eux.

Autrement; s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux, s'il est possible, sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D, & B par les vnitez qui sont en E; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E: & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moin-



dres: ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison: ce qui est contre nostre hypothese: A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celuy qui en mesurera l'vn sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'vn ou l'autre desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Ie dis que C est premier à l'autre B.

A.....6	B.....5
C...3	D-

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A: mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre; le produit des deux sera aussi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Ie dis que D est aussi premier à C.

A..2	B...3	C.....5
D.....6	E..2	F...3

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçauoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux, E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente; & par la 23. prop. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & partant ils mesureront egalement F & B, qui sont en la mesme raison, sçauoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. prop. Mais il mesure aussi C: donc B & C ne seroient pas premiers, contre l'hypothese. Parquoy D sera premier à C. Si donc deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le produict de l'vn d'iceux multiplié par ſoy, eſt premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'vn ou l'autre d'iceux, ſçauoir A, multiplié par ſoy produiſe C. Ie dis que B & C ſont premiers entr'eux.

Car ſi on prend D, egal à A, B ſera auſſi premier à D. Ainſi A & D eſtans premiers à B par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'eſt à dire par ſoy-meſme, produira C premier au meſme B. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A....3	B....4
C.....9	D...3

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres; (l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre) leurs produicts ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E ſoit le produict de A multiplié par B, & F produict de C multiplié par D: Ie dis que E, & F ſont premiers entr'eux.

Car A & B eſtans premiers à C, leur produict E ſera auſſi premier au meſme C par la 26. prop. Par le meſme diſcours E ſera auſſi premier à D; ainſi C & D eſtans premiers à E, leur produict F ſera auſſi premier à E par la meſme 26. prop. Si donc deux nombres ſont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A..2	B....4
C...3	D.....5
E.....8	F.....15

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux ſont multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront premiers entr'eux: Et ſi iceux produicts ſont encore multipliez par les nombres propoſez au commencement, leurs produicts ſeront encores premiers entr'eux: & cecy aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C, mais B multiplié auſſi par ſoy produiſe D. Ie dis que C & D, ſeront premiers entr'eux. Item ſi A multipliant C produict E, & B multipliant

pliant D produict F. Ie dis que E & F seront aussi premiers entr'eux.

Car par la 27. pr. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier au restant B : par

A..2	B...3
C....4	D.....9
E.....8	F.....27
G16	H81.

meſme raiſon B & C eſtans premiers entr'eux, D ſera auſſi premier à C. Derechef, puis que A & B ſont premiers, par la meſme 27. prop. C ſera auſſi premier à B ; & D à A : Mais il a eſté demonſtré que C eſt auſsi premier à D : parquoy l'vn & l'autre nombre A, C, ſera premier à l'vn & à l'autre nombre B, D ; & partant par la 28. prop. E produict de A en C, ſera premier à F, produict de B par D.

Que ſi encore A multipliant E produict G ; & B multipliant F produict H: G & H ſeront auſsi premiers entr'eux. Car puis que A & C ſont premiers à B, leur produict E ſera auſsi premier à B par la 26. prop. Par meſme raiſon F ſera auſsi premier à A : Ainſi les deux nombres A, E, ſeront premiers aux deux B, F, ſçauoir l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre ; & partant par la 28. prop. G produict de A en E, ſera auſsi premier à H produict de B en F, & ainſi à l'infiny. Parquoy ſi deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le compoſé d'iceux ſera premier à chacun d'eux : & ſi le compoſé de deux nombres eſt premier à quelqu'vn d'iceux, ils ſeront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C : Ie dis que le compoſé des deux A C, ſera premier à chacun d'iceux AB, B C.

Car ſi A C, A B ne ſont premiers, ſoit D leur commune meſure, s'il eſt poſſible : ſi donc D meſure le tout AC, & la partie AB ; il meſurera auſsi le reſte BC, par la 12. com. ſent. Ainſi AB & BC ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Parquoy AC ſera premier à AB : on demonſtrera par la meſme maniere que AC eſt auſsi premier à BC.

A...3	B....4	C
D—		

Secondement, ſi le tout A C eſt premier à AB ou à BC. Ie dis qu'iceux AB & B C ſeront premiers entr'eux. Autrement, que D les meſure s'ils ne ſont premiers ; il meſurera auſsi le compoſé des deux AC, par la 10. com. ſent. Ainſi A C ne ſeroit premier à A B, & BC, cequi eſt contre l'hypotheſe. A B & B C ſont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy, que si un nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste prop. Donc aussi AC sera premiere à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, est premier à tout autre nombre qu'il ne mesure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne mesure le nombre B: Ie dis que A & B sont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le sont, ils auront vne commune mesure autre que l'vnité; laquelle soit C, s'il est possible. Or C ne peut estre egal à A puis que nous auons posé que A ne mesure pas B: & par ainsi A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne seroit premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....5 B.....8
C—

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produict, il mesurera aussi l'vn d'iceux nombres posez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication desquels soit produict C, & que D nombre premier mesure iceluy C. Ie dis qu'il mesurera aussi l'vn ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

Autrement, s'il ne mesure l'vn ny l'autre, qu'il mesure C par le nombre E: Si donc D ne mesure A, par la prop. prec. il sera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils seront les plus petits de leur raison. Mais d'autant que D multiplié par E faict C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A sera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesureront egalement E & B, c'est à dire que A mesurera E; & D mesurera B. En la mesme maniere sera demonstré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A. Si donc deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Ie dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. def. & soit de B, lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop. est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et pouree qu'vn nombre ne se diminue infiniement, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera; & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit trouuer.

A.....8
B....4
C..2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A: Ie dis qu'iceluy est ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la prec. prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....5
A.....6

PROBL. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits nombres de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C: & il faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

Lesdicts nombres A, B, C sont ou nombres premiers, ou nombres composez: s'ils sont premiers entr'eux, on a ce que lon cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composez, soit trouué D plus grande commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. p. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Ie

dis que E, F & G ſont les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A, B, & C.

Car il eſt euident qu'iceux E, F, G ſont és meſmes raiſons que A, B, C, d'autant que D meſurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, ſeront produicts A, B, C, par la 9. com. ſent. & par ce que nous auons demonſtré à la 18. prop. E, F, G, auront la meſme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demonſtrera ainſi. S'ils ne ſont tels, ſoient H, I, K, les plus petits nombres ayans meſme proportion qu'iceux A, B, C: ils les meſureront donc egalement par la 21. pr. & ſoit par le nombre L; ce qu'eſtant, par la 9. com. ſent. L multipliant H, I, K, ſeront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A; & L multipliant H, faict le meſme A; par la 19. prop. il y aura telle raiſon de D à L, que de H à E: mais H eſt moindre que E; donc D ſera auſſi moindre que L: & puis que H, I, K meſurent A, B, C par L; L meſurera auſſi iceux A, B, C par la 8. com. ſent. & ainſi D ne ſera pas la plus grande commune meſure d'iceux A, B, C: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui ſoient en meſme raiſon, que les propoſez A, B, C. Parquoy eſtans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

A.....6	B....4	C.....8	
	D..2		
E...3	F..2	G....4	
H-	I-	K--	L-

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune meſure de quelconques nombres, meſure iceux par les nombres qui ſont les plus petits de tous ceux qui ſont en la meſme raiſon qu'iceux propoſez.

SCHOLIE.

Par ces choſes appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la meſme raiſon, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme ſi on propoſe les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouuerons les deux moindres en la meſme raiſon, ſi par ce prob. nous prenons E & F en la meſme raiſon des deux A & B, c'eſt à ſçauoir ces nombres-là, par leſquels D plus grande commune meſure d'iceux A & B, meſure iceux. Car par le corol. cy deſſus, E & F ſeront les plus petits de tous ceux qui ſont en la meſme raiſon que A à B, c'eſt à dire en la raiſon des continuellement proportionaux A, B, C.

Or il aduient quelquesfois qu'vn des nombres E, F, G, trouuez par cette 35. prop. eſt l'vnité, c'eſt à ſçauoir quand D, plus grande commune meſure des nombres propoſez A, B, C, eſt egal à l'vn diceux: & alors les nombres trouuez E, F, G ſont les plus petits en la continuation de leur proportion, puis qu'il ne ſe peut donner vn nombre moindre que l'vnité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent meſurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouuer le plus petit nombre meſuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez meſure le plus grand, il eſt euident qu'iceluy plus grand ſera le nombre que nous cherchons : que ſi l'vn ne meſure l'autre, ou A & B ſeront premiers entr'eux, ou non ; ſi premiers, ſoit multiplié A par B, & le produict ſoit C. Ie dis que C eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Car par la 7. com. ſent. il eſt euident que C ſera meſuré par l'vn & par l'autre, & s'il n'eſt le moindre nombre meſuré par iceux A, B, en ſoit vn autre plus petit D, s'il eſt poſſible, lequel A meſure ſelon le nombre E, & B ſelon le nombre F. Ce qu'eſtant, D ſera produict tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. ſent. & partant par la 19. pr. A ſera à B comme F à E. Item A & B, eſtans premiers, *ils ſeront les plus petits* de leur raiſon par la 23. prop. & A meſurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raiſon de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous auons monſtré que A meſuroit F : donc C meſurera auſſi D, ſçauoir le plus grand meſurera le plus petit, ce qui eſt impoſſible. C eſtoit donc le moindre nombre que A & B peuuent meſurer.

A...3 B...4
C.....12
D----
E-- F-

Soient maintenant les deux nombres A & B compoſez, & par la prec. prop. ſoient trouuez C & D les plus petits nombres de la meſme raiſon, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, ſoient proportionnaux : Quoy poſé par la 19. prop. le produict de A multiplié par D, ſera egal au produict de B multiplié par C : iceluy produict ſoit E. Donc E ſera meſuré par B, & par A : & par le meſme diſcours de la precedente demonſtration, on monſtrera qu'il eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Nous auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

A....4 B.....6
C..2 D....3 E.....12

COROLLAIRE.

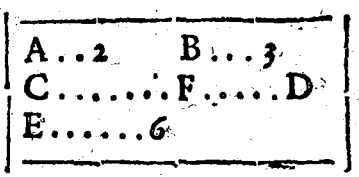
De cecy il s'enſuit, que ſi deux nombres multiplient les plus petits de leur raiſon, ſçauoir le plus grand, le plus petit, & le plus petit le plus grand; le produict ſera le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car C & D eſtans poſez les plus petits en la raiſon de A à B, il a eſté prouué que E produict de A plus petit multiplié

par D, plus grand; & de B plus grand par C plus petit, eſt le plus petit nombre meſuré par A. & B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres meſurent vn autre nombre, le plus petit qu'ils meſurent, meſurera auſſi cet autre nombre.

Soient deux nombres A, & B, qui en meſurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils meſurent ſoit E. Ie dis que E meſurera auſſi CD.



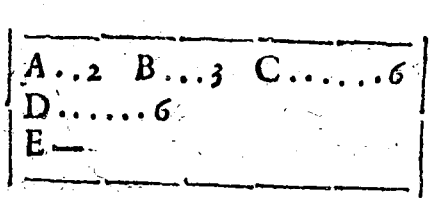
Autrement, ſi E ne meſure CD; apres auoir oſté E de CD, tant de fois que l'on pourra, il reſtera vn nombre moindre que E: qu'il laiſſe donc FD plus petit que E, s'il eſt poſſible: A & B meſurans E, ils meſureront auſſi CF par la 11. com. ſent. Mais ils meſurent le tout CD par la 12. com. ſent. ils meſureront donc auſſi le reſte FD plus petit que E, ce qui eſt impoſſible, eſtant le plus petit qu'ils meſurent. Parquoy E meſurera CD: Si donc deux nombres meſurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent meſurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent meſurer.

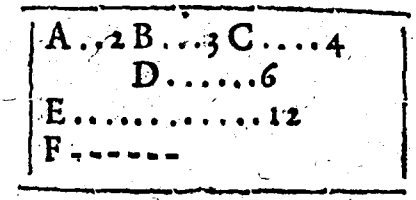
Soit trouué D plus petit nombre que peuuent meſurer A & B, par la 36. p. Or C meſure auſſi D, ou il ne le meſurera pas: s'il le meſure; Ie dis qu'il eſt auſſi le plus petit qu'iceux A, B, C, peuuent meſurer: car s'il ne l'eſt, en ſoit quelque autre plus petit E, s'il eſt poſſible, lequel tous les trois A, B, C meſurent. D'autant que A & B meſurent E moindre que D, iceluy D, ne ſera le moindre que A & B meſurent, ce qui eſt contre l'hypotheſe. D eſt donc le moindre nombre que peuuent meſurer les nombres propoſez A, B, C.



Que ſi D n'eſt auſſi meſuré par C: par la meſme 36. pr. ſoit trouué E plus petit nombre meſuré par C & D: Ie dis que E ſera le plus petit nombre meſuré par A, B, C.

Car premierement E eſt meſuré par A, B, C: d'autant que C & D le meſurent; & A & B meſurant D, par la 11. com. ſent. ils meſureront auſſi E meſuré

par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A,B,C, soit F plus petit, s'il est possible: donc A & B mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la prec. prop. Mais C mesure aussi F; (car A,B & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la mesme prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand vn plus petit; ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuuent mesurer; Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cet autre. Car il a esté demonstré que A,B,C, mesurant F; aussi E le plus petit nombre mesuré par A,B,C, mesure le mesme nombre F.

SCHOLIE.

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouuer le moindre que trois mesurent: si 5, il faudra trouuer le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre; le mesuré aura vne partie denommee par le mesurant.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Ie dis qu'iceluy B contiendra vne partie denommee par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire, autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois que l'vnité mesure A; & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommee par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. def. de ce 7. liure: donc aussi C sera vne partie de B denommee par A. Si donc vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle soit, le nombre nommant ceste partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommee par le nombre C. Ie dis que C mesure A.

Car puis que B eſt partie denommee par C; & l'vnité eſt vne partie de C, denommée par le meſme C; comme l'vnité meſure C, ainſi B meſure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'vnité meſurera B, ainſi C meſurera A. Parquoy ſi vn nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....	12
B...3	C....4

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre, qui ayt les parties donnees.

Soient les parties donnees A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, denommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. ſoit trouué G, le plus petit nombre que peuuent meſurer D, E, F: Ie dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

A *deuxieſme*	D..	2
B *tiers*	E...	3
C *quart.*	F....	4
G.....		12
H-----		

Car puis que D, E, F meſurent G; par la 39. prop. G aura les parties denommees par D, E, F, c'eſt à dire les parties A, B, C. Ie dis auſſi que G eſt le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'eſt, ſoit H plus petit, s'il eſt poſſible, ayant icelles parties. Et H ſera meſuré par les nombres D, E, F denommees par les parties A, B, C, par la precedente propoſition: & partant puis que H eſt moindre que G; iceluy nombre G ne ſera pas le plus petit que peuuent meſurer les nombres D, E, F, contre l'hypotheſe. Donc G eſt le moindre nombre, ayant les parties donnees A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties donnees: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. liure les prop. & demonſtrations qui conuiennent & ont lieu auſſi bien aux nombres rompus qu'aux entiers; ſi eſt-ce neantmoins que pour donner vne entiere & parfaicte intelligence des regles & preceptes enſeigne en noſtre Practique d'Arithmetique touchant les fractions, nous auons eſtimé eſtre beſoin d'adiouſter icy les prop. ſuiuantes.

DEMONSTRATIONS DES FRACTIONS, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont vn meſme denominateur, & que l'vnité ſoit le numerateur de l'vne d'icelles fractions; elles auront meſme raiſon entr'elles que les numerateurs.

Soient

Soient deux fractions AB, CB, ayans vn mesme denominateur B, & le numerateur C soit l'vnité: Ie dis que le nombre rompu AB est au nombre rompu CB, comme le numerateur A est au numerateur C. Car veu que la fraction AB se diuise en autant de fractions egales à la fraction CB qu'il y a d'vnitez en A, chacune d'icelles fractions ayant le numerateur C, & le denominateur B; autant de fois que l'vnité C est contenue en A, autant de fois la fraction CB est contenüe en la fraction AB: parquoy l'vnité C est mesme partie du nombre A, que la fraction CB de la fraction AB; & partant par la 20. def. 7. comme l'vnité C est à A, ainsi la fraction CB est à la fraction AB; & en changeant, le numerateur A sera au numerateur C, comme la fraction AB sera à la fraction CB. Ce qui estoit à prouuer.

A 5	C 1
B 8	B 8

2. Le numerateur de quelconque fraction a mesme raison au denominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle prouient.

Soit quelconque fraction AB: Ie dis que le numerateur A est au denominateur B comme la fraction AB est à son entier. Soit pris vne fraction CB dont le numerateur C est l'vnité, & le denominateur est le mesme B; mais soit vne autre fraction DB, de laquelle le numerateur D soit egal au mesme denominateur B, afin qu'icelle fraction DB soit egale à l'entier de la fraction AB. D'autant que par la prop. prec. comme A est à C, ainsi la fraction AB est à la fraction CB: & comme C est à D, ainsi la fraction CB est à la fraction DB; en raison egale, comme A sera à D, c'est à dire le numerateur A au denominateur B, (car B est egal à D) ainsi la fraction AB sera à la fraction DB, c'est à dire à l'entier: ce qui a esté proposé.

A 5	C 1	D 8
B 8	B 8	B 8

3. Les fractions qui ont vn mesme denominateur sont entr'elles en mesme raison que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB, CB, ayans vn mesme denominateur B: Ie dis que la fraction AB est à la fraction CB, comme le numerateur A est au numerateur C. Car puis que par la prop. prec. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à son entier, & que comme B est à C, ainsi l'entier est à la fraction CB; (car par la mesme prop. prec. comme C à B, ainsi la fraction CB à son entier, & en changeant comme B à C, ainsi l'entier à la fraction CB) en raison egale, comme le numerateur A sera au numerateur C, ainsi la fraction AB sera à la fraction CB. Ce qui estoit à demonstrer.

A 7	C 5
B 21	B 21

S'il y auoit plus de deux fractions, on prouueroit en la mesme maniere que la seconde seroit à la troisiesme, comme le numerateur au numerateur; & puis apres la troisiesme à la quatriesme, & ainsi consecutiuement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les denominateurs de toutes les autres, les nombres produits seront entr'eux, en mesme proportion que les fractions.

Nous disons le numerateur d'vne fraction estre multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur est multiplié par le denominateur de l'vne des autres fractions, & puis en-

core le produit par le denominateur de l'vne des restantes, & ainsi continuellement tant qu'il y aura de fraction: & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit est tousiours le mesme, comme nous auons demonstré au Scholie de la 19. p. 7.

Soient premierement deux fractions AB, CD, & de A en D soit faict E, mais de C en B soit faict F: Ie dis que le produit E est au produit F, comme la fraction AB, est à la fraction CD. Qu'ainsi ne soit; de B en D soit fait G: donc puis que D multipliant A & B, a faict E & G, par la 17. p. 7. comme A sera à B, ainsi E sera à G: Mais par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à son entier. Donc aussi comme la fraction AB sera à son entier, ainsi E sera à G. Derechef, pour ce que B multipliant D & C a faict G & F, par la mesme 17. p. 7. comme D sera à C, ainsi G sera à F. Mais comme D est à C, ainsi l'entier est à la fraction CD: (car puis que par la 2. prop. comme C à D, ainsi la fraction CD à son entier, en changeant comme D à C, ainsi l'entier à la fraction CD.) Donc comme G sera à F, ainsi l'entier sera à la fraction CD. Parquoy la fraction AB, l'entier, & la fraction CD seront en mesme proportion que les trois produits E, G, F. Donc en raison egale comme E sera à F, ainsi la fraction AB sera à la fraction CD. Ce qui a esté proposé.

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

Soient maintenant les trois fractions AB, CD, HI, & que de A en D soit faict E, & de E en I soit produit L: mais que de C en B soit faict F, & de F en I, vienne M: finablement que de B en D soit faict G, & de G en H vienne N: ie dis que les trois produis I, M, N sont entr'eux en mesme proportion que les fractions proposées AB, CD, HI. Car puis que I multipliant E & F faict L & M, par la 17. p. 7. comme E est à F, ainsi est le produit L au produit M: par la demonstration pree. comme E est à F, ainsi la fraction AB est à la fraction CD. Donc le produit L est au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Derechef puis que B multipliant C & D a faict F & G, comme C à D, ainsi F à G: Mais aussi I multipliant F & G a fait M & K. Donc iceux produits M & K seront entr'eux comme F à G, c'est à dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainsi la fraction CD à son entier: Donc aussi comme la fraction CD sera à l'entier, ainsi sera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N; partant comme I à H, ainsi K à N. Mais il appert par ce qui a esté demonstré cy dessus, que comme I est à H, ainsi est l'entier à la fraction HI. Donc comme l'entier sera à la fraction HI, ainsi K sera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, seront en mesme proportion que les produits M, K & N: donc en raison egale, comme la fraction CD sera à la fraction HI, ainsi le produit M sera au produit N. Mais nous auons desia demonstré cy dessus, que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi est le produit L au produit M: donc les trois produits L, M, N seront entr'eux en mesme proportion que les trois fractions AB, CD, HI. Ce qu'il falloit prouuer.

L40	M45	
E8	F9	N24
A2	C3	H2
B3	D4	I5
G12	K60	

Que s'il y a quatre fractions, on demonstrera en la mesme sorte que comme la troisiesme sera à la quatriesme, ainsi le produit correspondant à cette là sera au produit correspondant à cette-cy; & ainsi continuellement de fraction en fraction, repetant tousiours la demonstration cy-dessus.

Or il appert de ceſte demonſtration que ſi les ſuſdicts produicts eſtoient egaux, les fractions ſeroient auſsi egales: & au contraire que les fractions eſtans egales, leſdicts produicts ſeront pareillement egaux: Mais qu'eſtans inegales, le produict de la plus grande ſera le plus grand, & de la moindre, le moindre, & ainſi des autres.

5. L'entier a meſme raiſon à la ſomme de deux ou dauantage de fractions, que le nombre produict des denominateurs multipliez entr'eux à la ſomme des produicts du numerateur de chaque fraction multiplié par les denominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB, CD, EF, & que de B en D & F ſoit procreé K; & de A en D & F ſoit faict G; mais de C par B & F ſoit produict H; & de E par B & D ſoit faict I: Ie dis que l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, comme le produit K eſt à la ſomme des produits G, H, I. Car puiſque par la prop. prec. les fractions AB, CD, EF, ſont entr'elles comme les produits G, H, I, par le 5. theor. du Scholie de la 22. p. 7. comme la ſomme d'icelles fractions AB, CD, EF eſt à la fraction EF, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt au produit I. Mais comme la fraction EF eſt à l'entier, ainſi I eſt à K: (car par la 2. prop. comme la fraction EF eſt à l'entier, ainſi E eſt à F, & par la 18. p. 7. comme E à F, ainſi I à K, pour ce que E, F multipliant le produit de B en D ont faict I & K.) Donc en raiſon egale comme la ſomme des fractions AB, CD, EF eſt à l'entier, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt à K: & au contraire, comme l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, ainſi K eſt à la ſomme des produits G, H, I. Ce qu'il falloit demonſtrer.

G 16	H 12	I 18
A 2 / B 3	C 1 / D 2	E 3 / F 4
	K 24	

6. Si deux fractions ont vn meſme numerateur, comme la premiere fraction ſera à la ſeconde, ainſi le denominateur de la ſeconde ſera au denominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB, AC, ayans vn meſme numerateur A: Ie dis que la fraction AB eſt à la fraction AC, comme le denominateur C eſt au denominateur B. Car de A en C ſoit fait D, & de A en B ſoit produict E. Or puis que A multipliant C & B, fait D & E, par la 17. p. 7. comme C ſera à B, ainſi D ſera à E. Mais par la 4. prop. comme D eſt à E, ainſi la fraction AB eſt à la fraction AC: Donc auſsi la fraction AB ſera à la fraction AC, comme C ſera à B. Ce qu'il falloit prouuer.

D 10	E 6
A 2 / B 3	A 2 / C 5

7. Les fractions deſquelles les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs ſont egales entr'elles: Et des fractions egales, les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs: Mais des inegales, celles dont le numerateur a plus grande raiſon au denominateur, eſt la plus grande: Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au denominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au denominateur B, que du numerateur C au denominateur D: Ie dis qu'icelles fractions

AB, CD, ſont eſgales. Car ayant faict E de A en D, & F de B en C; comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi E à F, par la 4. prop. Mais puis que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; par la 19. p. 7. les deux produits E & F ſeront eſgaux: donc auſſi la fraction AB ſera eſgale à la fraction CD. Ce qu'il falloit prouuer.

E12	F12
A2	C4
B3	D6

Soient maintenant deux fractions eſgales AB, CD: Ie dis que comme A eſt à B, ainſi C à D: Car comme à la prec. demonſt. ayant fait E de A en D, & F de B en C, comme AB ſera à CD, ainſi E à F. Mais AB eſt eſgale à CD: donc auſſi E ſera eſgal à F; & par la 19. p. 7. comme A ſera à B, ainſi C ſera à D: Ce qu'il falloit demonſtrer.

En troiſieſme lieu, qu'il y ait plus grande raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis que la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C, par la 4. prop. comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi E à F. Mais par le Scholie de la 19. p. 7. le nombre E eſt plus grand que le nombre F: donc auſſi la fraction AB ſera plus grande que la fraction CD. Ce qu'il falloit prouuer.

E14	F9
A2	C3
B3	D7

Finablement, que la fraction AB ſoit plus grande que la fraction CD: Ie dis que la raiſon de A à B eſt plus grande que celle de C à D. Car comme deſſus la fraction AB ſera à la fraction CD, comme E à F. Mais par l'hypotheſe la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD: donc auſſi E ſera plus grand que F. Et puis que E eſt le produit de A en D, & F celuy de B en C, par le Scholie de la 19. p. 7. il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

8. Les fractions dont les numerateurs ſont en meſme raiſon que les denominateurs, ſont eſgales entr'elles. Et des fractions eſgales, les numerateurs ont meſme raiſon entr'eux, que les denominateurs. Mais des fractions inegales, celle dont le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur, eſt la plus grande; & de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au numerateur C, que du denominateur B au denominateur D: Ie dis qu'icelles fractions AB, CD, ſont eſgales. Car en raiſon permutee A ſera à B, comme C à D; & partant par la prop. prec. les fractions ſont eſgales. Ce qu'il falloit prouuer.

A2	C4
B3	D6

Mais ſoient les fractions AB, CD, eſgales: Ie dis que comme A eſt à C, ainſi B eſt à D. Car par la prop. prec. comme A ſera à B, ainſi C ſera à D; & en permutant, comme A ſera à C, ainſi B ſera à D. Ce qui eſtoit à prouuer.

Maintenant, qu'il y ait plus grande raiſon de A à C, que de B à D: Ie dis que la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD. Car en permutant il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D; & par la prec. prop. la fraction AB, ſera plus grande que la fraction CD: ce qu'il falloit prouuer.

A5	C2
B6	D3

En dernier lieu, soit la fraction AB plus grande que la fraction CD: Ie dis qu'il y a plus grande raison de A à C que de B à D. Car par la prec. prop. il y aura plus grande raison de A à B, que de C à D; & partant en permutant, la raison de A à C sera plus grande que de B à D. Ce qu'il falloit prouuer.

9. Reduire les fractions de diuerses denominations a autant d'autres fractions de mesme denomination, qui leur soient egales, chacune à la sienne.

Soient premierement les deux fractions AB, CD, ayans diuers denominateurs B, D: & il faut les reduire à deux autres fractions qui leurs soient esgales, & d'vne mesme denomination. Soit fait E de A en D; & F de B en C; mais G de B en D: Ie dis que les fractions EG, FG, qui ont vn mesme denominateur G, sont esgales aux fractions AB, CD, chacune à la sienne, c'est à dire que EG est esgale à AB, & FG à CD. Car d'autant que A & B multipliant D, ont faict E & G; par la 18. p. 7. comme A à B, ainsi E à G; & par la 7. prop. les fractions EG, AB sont esgales. Par mesme raison on prouuera que la fraction FG est esgale à la fraction CD.

E8	F9	
A2	C3	
B3	D4	
	G12	

Maintenant, soient trois fractions de diuerses denominations AB, CD, EF, lesquelles il faut reduire à trois autres d'vne mesme denomination, qui leur soient esgales, chacune à la sienne. Tout ainsi que dessus soit faict G de A en D, & H de B en C; mais I de B en D: puis apres soit faict K de G en F; L de H en F; M de I en E; & N de I en F. Ie dis que les trois fractions KN, LN, & MN, qui ont vn mesme denominateur N, sont esgales aux trois fractions AB, CD, EF, chacune à la sienne. Car premierement, il appert par ce qui a esté demonstré cy dessus, que GI est esgale à AB, & HI à CD: Mais puis que F multipliant G, HI, a produit K, L, N, par le Scholie de la 18. p. 7. iceux produits sont entr'eux en mesme proportion, que G, H, I. Parquoy KN sera aussi esgale à AB, & LN à CD. Semblablement, pource que I multipliant E & F, fait M & N, comme E est à F, ainsi M à N, & par la 7. prop. la fraction MN sera esgale à la fraction EF. Par ainsi nous auons trouué les trois fractions KN, LN & MN, qui ont vn mesme denominateur N, & sont esgales aux trois proposees AB, CD, EF, chacune à la sienne. Ce qu'il falloit faire.

K12	L16		
G3	H4	M18	
A1	C2	E3	
B2	D3	F4	
	I6	N24	

Que s'il y auoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme dessus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le denominateur de la quatriesme fraction, & leur denominateur commun tant par le numerateur que denominateur d'icelle quatriesme fraction: & ainsi on auroit quatre fractions d'vne mesme denomination esgales aux proposees. Bref, il appert assez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diuerses denominations à reduire à vne mesme denomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les denominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les denominateurs entr'eux, sera procreé le denominateur commun: & ce en

quelconque ordre & façon qu'on faſſe leſdites multiplications, puis que par le 2. Theor. du ſcholie de la 19. p. 7. lors que trois ou dauantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le produict eſt touſiours vn meſme, en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce ſoit à vne fraction dont le denominateur eſt donné.

Premierement l'entier ſoit l'vnité A, qu'il faut reduire à vne fraction dont le denominateur eſt B. Soit pris le numerateur C egal au denominateur B: Ie dis que la fraction CB eſt egale à l'vnité A; Car par la 2. prop. comme C eſt à B, ainſi la fraction CB eſt à l'entier A. Mais C eſt egal à B; donc auſſi la fraction CB eſt egale à l'entier A, c'eſt à dire à l'vnité.

	C_4
A_1	B_4

Maintenant que l'entier ſoit le nombre A, lequel il faut reduire à la fraction dont le denominateur eſt B. De A en B ſoit faict le numerateur C: Ie dis que la fraction CB eſt egale au nombre entier A. Soit poſée l'vnité D au deſſous de A, afin que la fraction AD ſoit egale à autant d'vnitez qu'il y en a au nombre A. Or d'autant que de la multiplication de A en B eſt faict C, par la 15. d. 7. le nombre B ſera auſſi autant de fois en C, qu'il y a d'vnitez en A. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à B. Parquoy des fractions AD, CB les numerateurs A & C, ont vne meſme raiſon aux denominateurs D & B: partant elles ſeront egales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD eſt egale à l'entier A, à cauſe que le denominateur D eſt l'vnité: Donc auſſi la fraction CB ſera egale au meſme entier A. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

A_5	C_{35}	
D_1	B_7	

11. Doubler & medier vne fraction donnee.

Premierement qu'il faille doubler la fraction AB. Soit doublé le numerateur A, afin que ſoit faict le numerateur C demeurant le meſme denominateur B: Ou bien lors que le denominateur B eſt pair en ſoit pris la moitié, afin d'auoir le denominateur D, demeurant le meſme numerateur A: Ie dis que chaque fraction CB, AD, eſt double de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, CB, ont vn meſme denominateur B, par la 3. prop. comme le numerateur C ſera au numerateur A, ainſi la fraction CB ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction C eſt double de A: donc auſſi la fraction CB ſera double de la fraction AB.

A_5	C_{10}	A_5
B_{12}	B_{12}	D_6

Derechef, pource que les fractions AB, AD, ont vn meſme numerateur A, par la 6. prop. comme le denominateur B ſera au denominateur D, ainſi la fraction AD ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt double d'iceluy D: donc auſſi la fraction AD ſera double de la fraction AB.

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB. Soit doublé le denominateur B, afin qu'il en vienne le denominateur C, demeurant le meſme numerateur A: Ou bien quant le numerateur A eſt pair, en ſoit pris la moitié, qui ſoit D, auec le meſme denominateur B. Ie dis que chaque fraction AC, DB eſt

A_8	A_8	D_4
B_9	C_{18}	B_9

moitié de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, AC ont vn meſme numerateur par la 6. prop. comme B ſera à C, ainſi la fraction AC ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt la moitié de C: Donc auſſi la fraction AC ſera moitié de la fraction AB.

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont vn meſme denominateur, par la 3. prop. comme D ſera à A, ainſi la fraction DB ſera à la fraction AB. Veu donc que par la conſtruction D eſt moitié de A, auſſi la fraction DB ſera moitié de la fraction AB. Nous auons donc doublé, & pris la moitié de la fraction donnee AB. Ce qu'il falloit faire.

En la meſme maniere vne fraction donnee ſera triplee, quadruplee, &c. ſi on triple, quadruple, &c. le numerateur demeurant le meſme denominateur: ou bien ſi on prend (quand il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du denominateur, demeurant le meſme numerateur. Pareillement on aura le tiers, le quart, &c. D'vne fraction donnee, ſi on triple, quadruple, &c. le denominateur, demeurant le meſme numerateur: Ou bien ſi on prend (lors qu'il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du numerateur, le meſme denominateur demeurant: Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere que deſſus.

12. La fraction de fraction eſt égale à la fraction ſimple, de laquelle le numerateur eſt procreé de la multiplication des numerateurs entr'eux, & le denominateur eſt produict des denominateurs auſſi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB vne fraction de la fraction CD, la valeur de laquelle au reſpect de l'vnité, ou du nombre entier E, ſoit exprimee par F; mais de A en C ſoit fait G, & de B en D ſoit produit H: Ie dis que la fraction de fraction donnee eſt eſgale à la ſimple fraction GH, au reſpect de l'entier E. Car ſoit encore faict I de B en C; & par la 2. pr. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier, c'eſt à ſçauoir à la fraction CD, de laquelle l'entier eſt E. Mais par la 18. p. 7. comme A eſt à B ainſi G à I, pour ce que A, B, multiplians C, produiſent iceux G, I: donc auſſi comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi ſera G à I. Derechef, pour ce que par la 2. prop. comme C eſt à D, ainſi la fraction CD eſt à ſon entier E, & que par la 17. p. 7. comme C à D, ainſi I à H: auſſi la fraction CD ſera à ſon entier E, comme I à H. Veu donc que comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi G eſt à I; & comme la fraction CD eſt à ſon entier E, ainſi eſt I à H; en raiſon eſgale comme AB fraction de la fraction CD eſt à l'entier E, ainſi G eſt à H: Mais nous auons poſé qu'à icelle fraction de fraction ſoit eſgale la ſimple fraction F: donc auſſi la fraction F ſera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. prop. comme G eſt à H, ainſi la fraction GH eſt au meſme entier E: Donc les fractions ſimples F & GH ſeront eſgales; & partant puis que la fraction F eſt eſgale à la fraction de fraction donnee, auſſi la fraction GH ſera eſgale à la fraction AB au reſpect de la fraction CD, duquel l'entier eſt E. Ce qu'il falloit prouuer

G6	I9		
A2 B3	C3 D5	E1 E20	F2/5
H15			

Soit maintenant AB fraction de CD, qui eſt auſſi fraction de la fraction EF; & ſoit faict G de A en C; & H de B en D: Item I de G en E; & K de H en F: Ie

dis que la fraction IK est esgale à la fraction de fraction donnee. Ce qui est manifeste, veu que par la demonstration prec. la fract. GH est esgale à AB, fraction de la fraction CD; tellement qu'icelle GH est fraction de la fraction EF, à laquelle est aussi esgale la fraction IK, par la mesme demonstration.

	G10	I30
A5	C2	E3
B6	D3	F4
	H18	

Que s'il y auoit dauantage de fractions, c'est à dire que EF fust encore fraction d'vne autre fraction, le produict de I, K, par ceste autre fraction, donneroit pareillement la fraction simple esgale à la fraction de fraction donnee; & ainsi continuellement s'il y auoit dauantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnee vne fraction de tant de fractions qu'on voudra, on la reduira en vne simple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous les dominateurs entr'eux.

13. Reduire vne fraction donnée à minimes termes.

Soit vne fraction AB, qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B, seront premiers entr'eux, ou non; s'ils sont premiers, la fraction AB ne pourra estre reduitte à plus petite denomination. Car soit reduitte, s'il est possible, à moindres termes C, D, tellement que la fraction CD soit egale à la fraction AB. D'autant que par la 7. prop. comme A est à B, ainsi C à D, & que les nombres C, D, sont moindres que les nombres A, B; iceux A, B, ne seront les moindres termes de ceste raison: Mais par la 23. p. 7. ils sont aussi les plus petits, veu qu'ils sont premiers entr'eux: Ce qui est absurde.

A7	C.
B8	D.

Maintenant que A, B, ne soient premiers entr'eux: & par la 2. p. 7. la plus grande mesure d'iceux soit C, qui mesure A par D; & B par E: Ie dis que la fraction DE est egale à la fraction AB, & constituee aux plus petits termes qu'elle puisse estre. Car puis que C mesure A & B par D & E; par la 7. com. sent. 7. Iceux A, B, seront produits de C en D, E; & par la 19. p. 7. comme A sera à B, ainsi D à E, & partant par la 7. pr. les fractions AB, DE, seront esgales. En apres, pour ce que C, plus grande mesure des nombres A, B, les mesure par D, E; par le corol. de la 35. p. 7. iceux D, E, seront les plus petits nombres de tous ceux qui ont mesme raison que A à B. Nous auons donc reduit la fraction donnee A B en sa plus petite denomination D E: Ce qu'il falloit faire.

A6	D2
B9	E3
	C3

14. Estant donnee vne fraction, la reduire (si faire se peut) à vne autre esgale de denomination donnee.

Soit donnee la fraction A B, qu'il faut reduire à vne autre esgale, de laquelle le denominateur soit C. De A en C, soit faict D, lequel B mesure par E: Ie dis que la fraction EC, qui a le denominateur donné C est esgale à la fraction donnée AB. Car puis que B mesure D par E, par le 9. ax. 7. D sera faict de B en E: Mais il a aussi esté faict de A en C. Donc par la 19. prop. 7. comme A sera à B, ainsi E sera à C; & par la 7. prop. les fractions A B, E C seront esgales.

A2	E6
B3	C9
	D18

que

Que ſi B ne meſure D procreé de A en C, la fraction donnee ne ſe pourra reduire à la denomination donnee C. Car ſoit reduitte, s'il eſt poßible, à la fraction EC. Donc puiſque les fractions AB, EC ſont eſgales, comme A ſera à B, ainſi E ſera à C par la 7. prop. & partant par la 19. p. 7. le nombre produit de B en E ſera eſgal à celuy faict de A en C, c'eſt à ſçauoir D. Donc par le 7. ax. 7. B meſurera D par E: Ce qui eſt abſurde, puis qu'on a poſé que B ne meſure D.

A_2	$E_{\overline{B_5}}$
C_7	
D_{14}	

Or la reduction de fraction, qui en l'Arithmetique pratique, eſt vulgairement appellee Eualuation, *deſpend de cette prop. veu qu'eualuer vne fraction n'eſt autre choſe, que trouuer vne fraction eſgale à la donnee, qui ait pour denominateur le nombre & valeur de l'entier propoſé. Comme par exemple, quand on veut eualuer les $\frac{2}{5}$ d'vne liure, ce n'eſt autre choſe que trouuer vne autre fraction egale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour denominateur le nombre 20, qui eſt la valeur de la liure: & ſuiuant ce qui eſt icy demonſtré, ſi ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numerateur de la fraction donnee, on diuiſe le produict 40 par le denominateur 5, viendra 8 pour le numerateur de ladite fraction cherchee, c'eſt à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ ſera egale à la donnee $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut auſsi dire 8 ſols, puis que l'entier auquel ſe reſeroit la fraction donnee vaut 20 ſols.*

A_2	$E_{\overline{B_5}}\ 8$
C_{20}	
$D\ 40$	

15. Quand vn nombre eſt diuiſé par vn autre plus grand, le quotient eſt vne fraction de laquelle le nombre à diuiſer eſt numerateur, & le diuiſeur denominateur.

Soit le nombre A, qu'il faut diuiſer par vn plus grand nombre B: Ie dis que le quotient eſt la fraction AB, de laquelle le nombre à diuiſer A, eſt numerateur, & le diuiſeur B denominateur. Car d'autant que par la 7. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt à dire a l'vnité par la def. de la diuiſion (La diuiſion d'vn nombre par vn nombre eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité que le nombre diuidande au diuiſeur) la fraction AB ſera quotient du nombre A diuiſé par le nombre B. Ce qu'il falloit prouuer.

A_5	B_7	$A_{\overline{B_7}}$

16. Adiouſter pluſieurs fractions en vne ſomme.

Qu'il faille premierement adiouſter enſemble deux fractions AB, CB d'vne meſme denomination. Soient adiouſtez enſemble les numerateurs A, C, la ſomme deſquels ſoit D, au deſſous de laquelle ſoit poſé le meſme denominateur B: Ie dis que la fraction DB, eſt la ſomme de l'addition des fractions AB, CB. Car d'autant que les fractions ont vn meſme denominateur, par la 3. prop. comme A ſera à C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB; & en compoſant, comme A, C, enſemble à C, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction CB. Mais par la meſme 3. prop. comme C à D, ainſi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raiſon eſgale, comme A C, enſemble à D, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction DB. Veu donc que par la conſtruction A, C, enſemble ſont eſ-

A_2	C_3	D_5
B_7	B_7	B_7

gales à D, auſſi les fractions AB, CB enſemble, ſeront eſgales à la fraction DB.

Soient maintenant trois fractions de diuerſes denominations AB, CD, EF, leſquelles il faut adiouſter enſemble. Les fractions propoſees ſoient reduittes à autant d'autres fractions de meſme denomination GK, HK, IK, par la 9. prop. puis ſoient adiouſtez enſemble les numerateurs G, H, I, dont la ſomme ſoit L, à laquelle ſoit ſuppoſé le denominateur commun K, & la fraction LK, ſera la ſomme des trois fractions propoſees. Car d'autant que par la 3. prop. les numerateurs G, H, I, ſont en meſme proportion que les fractions GK, HK, IK, par le 5 Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I enſemble, ſeront à I, comme les trois fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à la fraction EF. Mais par la 3. prop. comme I eſt à L, ainſi auſſi la fraction EF eſt à la fraction LK. Donc en raiſon eſgale, comme les trois nombres G, H, I enſemble ſeront à L ainſi les trois fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à LK. Mais par la conſtruction le nombre L eſt eſgal aux trois G, H, I: Donc auſſi la fraction LK ſera eſgale aux trois propoſees AB, CD, EF. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

G 12	H 16	I 18	
A 1	C 2	E 3	L 46
B 2	D 3	F 4	K 24
	K 24		

Or ayant reduict les fractions propoſees à vne meſme denomination, & adiouſté enſemble les numerateurs trouuez, puis à la ſomme L, ſuppoſé le denominateur commun K; on prouuera encore que la fraction LK eſt eſgale aux propoſees en ceſte ſorte. D'autant que par la 5. prop. comme l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, ainſi le denominateur commun K eſt à la ſomme des produits G, H, I, c'eſt à dire L; en changeant, comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera à l'entier, ainſi L ſera à K. Mais par la 2. prop. comme L eſt à K, ainſi auſſi la fraction LK eſt au meſme entier. Donc comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, eſt à l'entier, ainſi la fraction LK eſt au meſme entier: & partant la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera eſgale à la fraction LK. Ce qui eſtoit propoſé.

Que ſi les fractions propoſees à adiouſter ne ſe referoient à l'vnité, ains à quelque nombre entier, la ſomme d'icelles ſe rapporteroit au meſme nombre. Par exemple s'il falloit adiouſter $\frac{1}{3}$ du nombre 60 auec les $\frac{2}{5}$ du meſme nombre, la ſomme d'icelles fractions ſeroit $\frac{10}{15}$ qui ſe refereroient auſſi au meſme nombre 60; tellement que ce ſeroit 76: car les $\frac{2}{3}$ de 60 ſont 40, & les $\frac{3}{5}$ ſont 36, leſquels deux nombres adiouſtez enſemble, font le ſuſdit nombre 76.

17. Oſter vne petite fraction d'vne plus grande.

De la fraction AB, qu'il en faille oſter vne moindre fraction CB, laquelle eſt de meſme denomination. Soit oſté le numerateur C du numerateur A, & au deſſous du reſté D, ſoit poſé le meſme denominateur B: Ie dis que la fraction DB eſt ce qui reſte apres auoir ſouſtraict la fraction CB de la fraction AB. Car puiſque C oſté de A, reſte D; A eſt compoſé de C & D: donc la fraction AB, de laquelle le numerateur A eſt l'aggregé des numerateurs C, D, eſt la ſomme des deux fractions CB, DB, comme il a eſté demonſtré en la prec. prop. Parquoy ayant oſté la fraction CB de la fraction AB, reſtera la fraction DB.

A 3	C 1	D 2
B 4	B 4	B 4

Mais si de AB, il faut oſter vne moindre fraction CD, qui a vn autre denominateur que AB: par la 9. prop. icelles fractions AB, CD, ſoient reduittes à deux autres d'vne meſme denomination EG, FG: puis ſoit oſté le numerateur F du numerateur E, & reſte H, au deſſous duquel ſoit appoſé le denominateur commun G: Ie dis qu'apres auoir oſté la fraction CD de la plus grande fraction AB, reſte la fraction HG, ainſi qu'il appert par la demonſtration cy deſſus. Ce qu'on peuſt encore demonſtrer ainſi, d'autant que D multipliant A, B faict E, G, par la 17. p. 7. comme A ſera à B, ainſi E ſera à G. Mais par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier. Donc auſſi comme E à G, ainſi la fraction AB eſt à l'entier. Derechef, pour ce que B multipliant C, D, faict F, G, comme C ſera D, ainſi F à G. Mais auſſi comme C à D, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Donc comme F à G, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Veu donc que comme F premiere eſt à G deuxieſme, ainſi la fraction CD troiſieſme eſt à l'entier quatrieſme, & que par la 2. prop, comme H cinquieſme eſt au meſme G deuxieſme, ainſi la fraction HG ſixieſme eſt au meſme entier quatrieſme par le 6. Theor. du Schol. de la 22. p. 7. comme F, H, premiere & cinquieſme enſemble ſera à G deuxieſme, ainſi les fractions CD, HG, troiſieſme & ſixieſme enſemble, ſera à l'entier quatrieſme. Mais comme E, H, enſemble ſont à G, ainſi E eſgal à iceux F, H (Car F oſté de E reſte H) eſt au meſme nombre G. Donc auſſi comme E ſera à G, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront à l'entier. Mais il a eſté demonſtré que comme E à G, ainſi la fraction AB à l'entier. Donc auſſi comme la fraction AB ſera à l'entier, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront au meſme entier: Et partant les fractions CD, HG enſemble ſeront eſgalles à la fraction AB. Parquoy ayant oſté la fraction CD de la fraction AB, le reſte ſera la fraction HG. Ce qu'il falloit faire.

E 15	F 8	
A 3	C 2	H 7
B 4	D 5	G 20
	G 20	

Or ſi les fractions propoſees ne ſe referoient à l'vnité, ains à quelque nombre entier, le reſte ſe refereroit auſſi au meſme nombre. Par exemple, s'il falloit ſouſtraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du meſme nombre, le reſte $\frac{7}{20}$ ſe refereroit au meſme nombre 40; & partant ce ſeroit 14: car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, ſont 16, & les $\frac{3}{4}$ ſont 30.

18. Multiplier vne fraction par vne fraction.

Soit vne fraction AB, qu'il faut multiplier par la fraction CD: de la multiplication des numerateurs A, C, entr'eux ſoit faict E, au deſſous duquel ſoit poſé F produit des denominateurs B, D, multipliez entr'eux: Ie dis que la fraction EF eſt le produit des fractions AB, CD, multipliees entr'elles. Car ſoit faict G de E en D; & H de C en F: Et par la 4. prop. comme la fraction EE ſera à la fraction CD, ainſi G à H. Mais pour ce que C multipliant A, F, faict E, H, par la 17. p. 7. comme A ſera à F, ainſi E à H; & en permutant, comme A ſera à E, ainſi F ſera à H. Derechef, pour ce que D multipliant E, F faict G, F, par la 17. p. 7. comme E ſera à B ainſi G à F. Parquoy les trois

H 45	G 30	
A 2	C 3	E 6
B 3	D 5	F 15

nombres A, E, B ſont proportionnels aux trois G, F, H en proportion troublee: donc en raiſon eſgale, comme A ſera à B, ainſi G à H. Mais nous auons demonſtré que comme G eſt à H, ainſi la fraction EF eſt à la fraction CD; & par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt à dire à 1. Donc auſſi comme la fraction EF eſt à la fraction CD, ainſi la fraction AB eſt à 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'vn nombre en vn nombre eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vn des multiplians que l'autre à l'vnité) la fraction EF eſt produicte de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD: parquoy nous auons faict ce qui eſtoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne ſe rapportent pas à l'vnité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produict de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier proposé, ainſi qu'en l'addition & ſouſtraction; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné: Car veu que la comparaiſon ſe doit faire entre choſes ſemblables, & que de la multiplication de deux nombres eſt produit vn nombre plan: il faudra referer le nombre produict de la multiplication auec le plan du nombre entier proposé, c'eſt à dire auec ſon quarré, ſi toutes les deux fractions ſe referent à vn meſme nombre entier, pour ce qu'iceluy nombre (ſuiuant ce que nous auons dit à la 14. prop.) leur eſt comme denominateur, & par conſequent il le faut multiplier par ſoy meſme afin d'auoir le denominateur du produit deſdites fractions. Mais ſi les fractions ſe referoient à diuers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan faict des nombres entiers propoſez. Ainſi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ d'vne liure, c'eſt à dire les $\frac{2}{5}$ de 20 ſols, par $\frac{1}{2}$ du meſme nombre 20, le produit eſt ceſte fraction $\frac{2}{10}$, laquelle il ne faut pas rapporter au nombre entier proposé 20, mais à ſon quarré 400; tellement que ce produit $\frac{2}{10}$ eſt 80, & il ne ſeroit que 4, ſi on le referoit ſeulement au nombre proposé 20. Ce qui eſt apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre 20. ſont 8 & $\frac{1}{2}$ du meſme nombre 20, eſt 10; & de 8 en 10, eſt faict 80, qui eſt $\frac{2}{10}$ du nombre 400, quarré du nombre 20 entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'vne liure multipliez par $\frac{1}{2}$ liure, ne produiſent pas $\frac{2}{10}$ d'vne liure, qui ſont ſeulement 4 ſols, mais produiſent $\frac{2}{10}$ de 400, qui ſont 80 ſ. ou 4 liures. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produit eſt $\frac{6}{20}$, ou $\frac{3}{10}$ du nombre 480, c'eſt à dire 144: Car par la 14 prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 ſont 8, ou $\frac{8}{20}$; & les $\frac{3}{4}$ de 24 ſont 18, ou $\frac{18}{24}$, qui multipliez comme dit eſt cy-deſſus, produiſent 144, ou la fraction $\frac{144}{480}$: tellement que les $\frac{6}{20}$ trouuez ne ſe doiuent referer à l'vn ny à l'autre entier proposé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19 Diuiſer vne fraction par vne fraction.

A 5 / B 12	C 5 / D 6	E 1 / F 2
A 4 / B 9	C 2 / D 9	E 2 / F 1
A 9 / B 10	C 3 / D 5	E 3 / F 2

Soit la fraction AB, qu'il faut diuiſer par la fraction CD: & premierement que les nombres de cette-cy C, D, meſurent les nombres de celle-là A B, par E, F; tellement que A eſtant diuiſé par C le quotient ſoit E, & ayant diuiſé B par D, le quotient ſoit F: Ie dis que la fraction EF, eſt le quotient de la fraction AB diuiſee par la fraction C D. Car d'autant que C meſure A par E, & D meſure B par F par le 9. ax. 7. A eſt procreé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, eſt produicte de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD: & partant par

la def. de la multiplication, comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi la fraction EF sera à l'vnité. Parquoy puis que comme AB, fraction diuisee, est à CD, fraction diuisante, ainsi la fraction EF est à l'vnité, par la def. de la diuision, la fraction EF sera le quotient de la diuision de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne mesurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions proposées AB, CD, soient reduittes à deux autres esgales de mesme denomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, soit faict à part la fraction EF. Ie dis qu'icelle fraction EF est le quotient de la fraction AB diuisee par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG est à la fraction FG, comme le numerateur E est au numerateur F; & par la 2. prop. comme E est à F, ainsi la fraction EF est à son entier, c'est à dire à l'vnité. Donc aussi comme la fraction EF est à l'vnité, ainsi la fraction EG est à la fraction FG, c'est à dire la fraction AB à la fraction CD, puis qu'elles leurs sont esgales par la construction; & partant par la def. de la diuision, la fraction EF sera le quotient de la fraction AB diuisee par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

E12	F10		E8	F9	
A4	C2	E12	A2	C3	E8
B5	D3	F10	B3	D4	F9
G15			G12		

Or il appert assez que ceste demonstration a lieu en toutes fractions, soit que les nombres de la fraction diuisante mesurent ou non les nombres de la fraction à diuiser; & aussi que le denominateur commun G n'entre point au quotient de la diuision, ains seulement les deux numerateurs E, F; c'est pourquoy en la practique d'Arithmet. il suffit de multiplier le numerateur de la fraction à diuiser par le denominateur de la fraction diuisante, pour auoir le numerateur du quotient; mais le numerateur de la fraction diuisante par le denominateur de la fraction à diuiser pour auoir le denominateur d'iceluy quotient.

Il est aussi manifeste que si les nombres de la fraction diuisante sont changez de lieu à autre, que la diuision se fera comme la multiplication, c'est à sçauoir en multipliant les numerateurs entr'eux, & puis apres les denominateurs. Comme par exemple, voulant diuiser $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de ceste fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par lesquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'est à sçauoir 5 par 3; & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ diuisez par $\frac{2}{3}$.

Fin du septiesme Element.

ELEMENT HVICTIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extremes soient premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrémes A & C, soient premiers entr'eux: Ie dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

A....4	D—
B.....6	E——
C.....9	F———

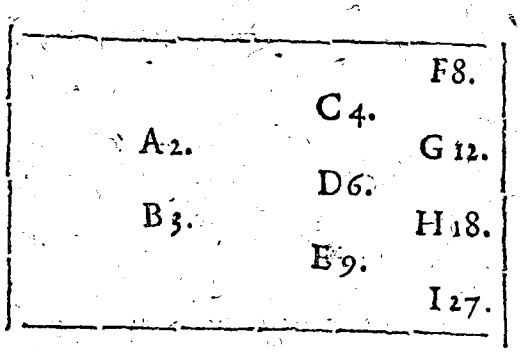
Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la mesme raison, s'il est possible. Par ainsi il y a d'vn costé les trois nombres A, B, C, & d'vn autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux sont en mesme raison: Donc en raison egale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement D & F: ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les plus petits en la mesme raison. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement

proportionnaux, les plus petits en vne raiſon donnee.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon: il faut premierement trouuer trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon donnee de A à B.



Que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C; A par B produiſe D; & B par ſoy produiſe E: Ie dis premierement que C, D, E, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produict C & D; comme A ſera à B, ainſi C ſera à D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produict D & E, comme A ſera à B, ainſi D ſera à E: Parquoy C, D, E, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Ie dis auſſi qu'ils ſont les plus petits d'icelle raiſon donnee. Car d'autant que A & B ſont les plus petits de leur raiſon, par la 24. p. 7. ils ſont premiers entr'eux, & par la 29. p. 7. C & E ſeront auſſi premiers entr'eux: & par la precedente prop. les trois nombres C, D, E, ſeront les plus petits en la raiſon donnee de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouuer quatre. Que A multipliant les trois trouuez C, D, E, produiſe F, G, H; & B multipliant le dernier E faſſe I: Ie dis que les quatres nombres F, G, H, I, ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a faict F, G, H; iceux ſont en la meſme raiſon que C, D, E, c'eſt à dire en la raiſon de A à B. Derechef, puis que A & B multipliant E ont faict H & I, par la 18. p. 7. comme A ſera à B, ainſi H ſera à I: & partant F, G, H, I, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon donnee de A à B. Dauantage, puis que A & B eſtans les plus petits de leur raiſon, ſont premiers entr'eux par la 24. p. 7. auſſi les extremes F & I ſeront premiers entr'eux par la 29. p. 7. attendu que A & B multipliez par eux meſme, ont produict C & E, & iceux multipliez par les meſmes A & B, ont produict les extremes F & I. Donc par la prop. prec. les quatres nombres F, G, H, I, ſeront les plus petits de leur raiſon. Et en ceſte façon on en trouuera tant que l'on voudra. Nous auons donc trouué des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il reſulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, eſtans les plus petits de leur raiſon; les extremes ſeront quarrez: s'il y en a quatre, qu'iceux extremes ſeront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C & E, ont eſté produits de

A & B multipliez par eux-mesmes; & des quatre F, G, H, I, les extrémes F & I, ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il resulte encore que les extrémes des nombres continuellement proportionnaux trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstré par les 24. & 29. p. 7. que les extremes C, E; & F, I, sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : les extrémes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison : Ie dis que les extrémes A & D, sont premiers entr'eux.

Car soient trouuuez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G : ils seront premiers entr'eux par la 23. p. 7. & comme il a esté enseigné en la preced. soient trouuez des nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois H, I, K; puis apres les quatre L, M, N, O; & ainsi consecutiuement vn plus, iusques à ce que on en ait autant qu'il y en aura de proposez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront esgaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extrémes L & O, sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. les extremes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

PROBL. 2. PROP. IV.

Estans donnees tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux selon les raisons donnees.

Soient donnees les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes

termes d'icelles : il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui ſont ſelon les raiſons donnees.

Soit trouué par la 36. p. 7. le plus petit nombre qui ſoit meſuré par B, & par C ; lequel ſoit F : en apres, ſoit trouué G, autant de fois meſuré par A, que F par B : Pareillement H autant de fois meſuré par D que F par C. Ie dis que les trois nombres G, F, H ſont continuellement proportionnaux, les plus petits qui ſoient ſelon les raiſons données.

A 2.		
	G 8. L—	
B 3.		
	F 12. M—	
C 4.		
	H 15. N—	
D 5.		

Car d'autant que A meſure autant de fois G, que B meſure F ; & par conſequent A & B multiplians vn meſme nombre (ſçauoir celuy par lequel ils meſurent G & F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G eſt à F, en meſme raiſon que A à B. Et par meſme diſcours F ſera à H, comme C à D : Donc G, F, H, ſont continuellement proportionnaux, ſelon les raiſons donnees. Mais ils ſont auſſi les plus petits, ſelon icelles raiſons données : car ſ'il n'eſt ainſi, en ſoient trouuez de plus petits L, M, N, ſ'il eſt poſſible, & qui reſpondent aux raiſons donnees, comme les trois G, F, H. Or veu que A & B ſont les plus petits en leur raiſon, par la 21. p. 7. ils meſureront également L & M, iceux eſtans en la meſme raiſon, c'eſt à ſçauoir le conſequent B, le conſequent M : Par meſme diſcours C & D meſureront egalement M & N, ſçauoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C meſurans M ; par la 37. p. 7. F, qui eſt le plus petit nombre qu'ils meſurent, meſurera auſſi M, ſçauoir eſt, le plus grand, le plus petit : ce qui eſt impoſſible. Partant les nombres G, F, H, eſtoient les plus petits ſelon les raiſons donnees.

Maintenant ſoient donnees trois raiſons aux plus petits termes A à B ; C à D, & F à G, ſelon leſquelles il faut trouuer quatre nombres tels que requiert la propoſition.

A 2.		
	I 8.	M 16.
B 3.		
	H 12.	N 24.
C 4.		
	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L—	P 35.
G 7.		

Soient trouuez les trois nombres I, H, K, comme deſſus : ce faict, ou F meſurera K, ou non. S'il le meſuroit, il faudroit prendre L autant de fois meſuré par G, que K par F : & par la precedente demonſtration, il eſt euident qu'on auroit ſatisfaict. Que ſi F ne meſure K, ſoit trouué O le plus petit nombre meſuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G meſure autant de fois P, que F meſure O. Item que comme K meſure O, ainſi H meſure N ; & I meſure M. Ie dis que M, N, O, P ſont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

Car puiſque I, H, K meſurent également M, N, O, comme dit eſt cy deſſus, I ſera à H ainſi que M à N, & comme H ſera à K, ainſi N à O. Mais il y a meſme raiſon de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pource que A & B meſurent egalement iceux I & H ; & C, D, egalement H & K.

Donc comme A à B, ainsi M à N; & comme C à D, ainsi N à O; aussi comme F à G ainsi O à P, à cause que F, G mesurent egalement O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux és raisons donnees. Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstrera en la mesme façon qu'on a faict cy dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé si 4, ou dauantage de raisons sont donnees aux plus petits termes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'vn à l'autre en la raison composee de leurs costez.

Soient deux nombres plans A & B; les costez de A, soient C & D; & les costez de B, soient E & F. Ie dis que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

	C 3.
A 12.	
	D. 4.
G 8.	
	E 2.
B 18.	
	F 9.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en mesme raison que C à E, par la 17. p. 7. Et par mesme discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en mesme raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F, costez. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composee de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composee de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne mesure le second, aussi pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne mesure B 2^e. Ie dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
F 4. G 6. H 9.

Car premierement, comme A ne mesure B, ainsi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D; ny D, E, d'autant qu'ils sont en mesme raison: par ainsi aucun d'iceux nombres ne mesure son prochain suiuant. Ie dis aussi qu'en passant qu'elqu'vn, les extremes ne se pour-

ront mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouué trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison egale A sera à C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'vnité, autrement il mesureroit G, veu que l'vnité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce liure F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'vnité, iceluy F ne mesurera pas H: Mais nous auons demonstré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par mesme discours on prouuera que B ne mesurera D; ny C, ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on demonstrera en la mesme maniere que A ne mesurera le quatrieſme D; ny B vn quatrieſme E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Ie dis qu'il mesurera aussi le second B.

A 3. B 9. C 12. D 24.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas vn autre ne mesureroit pas vn autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionn. &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux: & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Ie dis qu'entre E & F se trouueront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

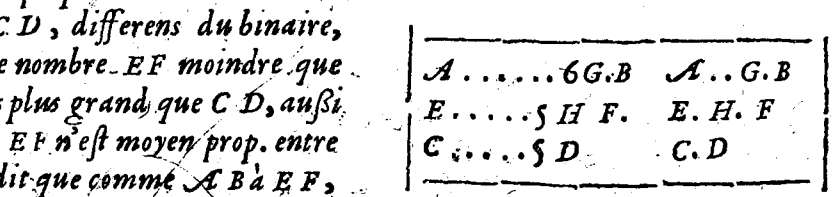
Car ayant trouué par la 2. p. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison esgale, com-

me A sera à B, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront esgalement E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M: tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent esgalement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F; lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstré à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K, sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est esgale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a esté demonstré que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux sont par la construction en la mesme proportion que A, C, D, B: donc aussi E, L, M, F, sont en mesme proportion que A, C, D, B.

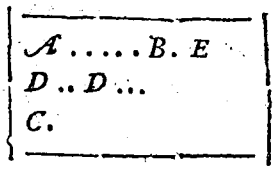
Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber vn nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouuee entre le binaire & l'vnité; mais la superparticuliere, entre les nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce Theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la seule vnité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre deux nombres differens seulement de l'vnité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement vn nombre, qui differe à l'vn & l'autre de l'vnité: lequel nous demonstrerons ne pouuoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD, differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'vnité, mais plus grand que CD, aussi de l'vnité. Ie dis que EF n'est moyen prop. entre AB, CD. Car si on dit que comme AB à EF, ainsi EF à CD: estant osté de AB, le nombre AG esgal à EF, afin qu'il reste l'vnité GB; & de EF, le nombre EH esgal à CD, afin qu'il reste aussi l'vnité HF; pareillement comme AB sera à EF, ainsi le retranché AG sera au retranché EH. Donc aussi le reste GB sera au reste HF; c'est à dire



l'vnité à l'vnité, comme le tout AB au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui eſt abſurde; dont EF n'eſt pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raiſon triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit auſsi vn entre entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui eſt impoſsible, comme nous venons de demonſtrer.

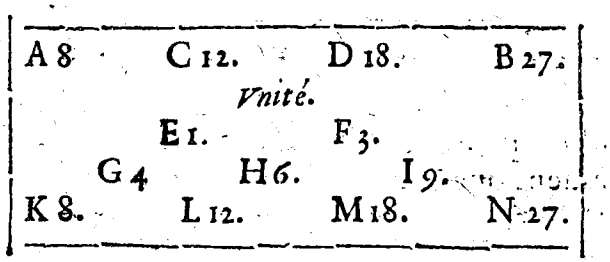
Par meſme raiſon, ne peut auſsi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raiſon. Car ſ'il y en tomboit vn, il en tomberoit auſsi vn (par ce Theor.) entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple: ce qui ne ſe peut faire. Car s'il eſt poſsible qu'entre le quinaire AB & l'vnité C, tombe vn moyen prop. D binaire, ou ternaire; tellement que AB ſoit à D, comme D à C: en changeant C ſera à D comme D à AB. Et pour ce que l'vnité C meſure D, auſsi D meſurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D meſure pareillement le ſenaire AE: donc D meſurera le tout AE, & le retranché AB; & partant par la 11. com. ſent. auſsi D meſurera le reſte BE vnité. Ce qui eſt abſurde. La meſme abſurdité aduiendra touſiours, ſi on dit qu'vn nombre quartenaire ſoit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'vnité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5, & 1. & par conſequent entre quelconques nombres de raiſon quintuple.



THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre leſquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres cotinuellement proportionnaux, qu'entre A & B.



Car ayant poſé l'vnité, ſoient pris E & F, les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. ſoient trouuez les trois plus petits en la meſme raiſon G, H, I: puis les quatre K, L, M, N; & ainſi conſequemment iuſques à ce que la multitude des pris ſoit eſgale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrémes A, B, ſont premiers entre eux, par la 1. p 8. A, C, D, B, ſeront les plus petits en la raiſon de E à F: Mais leurs eſgaux en multitude K, L, M, N, ſont auſsi les plus petits en la meſme raiſon par la conſtruction. Donc K, L, M, N, ſont eſgaux à iceux A, C, D, B,

chacun au ſien, comme K à A, & N à B. Et pour ce que (comme il appert par la demonſtration de la 2. p. 8.) E multipliant ſoy-meſme a produict G; & multipliant G a faict K, par la 7. com. ſent. E meſurera G par E; & G iceluy K par le meſme E: mais par la 5. com. ſent. l'vnité meſure iceluy E par E. Donc l'vnité meſurera egalement E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'vnité ſera meſme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G, K, ſont continuellement proportionnaux. Par meſme diſcours l'vnité & les trois nombres F, I, N, ſeront auſſi prouuez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité, eſt eſgale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il ſenſuiura qu'entre l'vnité & le nombre K ou A, qui luy eſt eſgal; & auſſi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy ſi deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres propoſez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres propoſez A & B, & qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Ie dis qu'il en tombera auſſi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8. I 12. K 18. B 27.
E 4. H 6. G 9.
D 2. F 3.
C 1.

Car ſi on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouuer les trois nombres H, I, K, c'eſt à ſçauoir que H ſoit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puis que comme C à D, ainſi D à E, & E à A; & que par la 5. com. ſent. C vnité meſure D, par les vnitez qui ſont en D; auſſi D meſurera E, par les vnitez qui ſont en D; & E meſurera A, par les meſmes vnitez de D; ainſi il eſt euident que D multiplié par ſoy-meſme produict E, & E multiplié par D, a produict A. Par meſme diſcours ſe prouuera que F multiplié par ſoy-meſme, a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant, puis que D multiplié par ſoy-meſme, & par F a produict E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy meſme, a produict H & G; auſſi H ſera à G comme D à F: parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront continuellement proportionnaux. Dauantage D multipliant E & H, produict A & I; & partant comme E ſera à H, ainſi A ſera à I, par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H, produiſent I & K; I ſera à K, comme D à F. par la 18. prop. 7. Par meſme diſcours

K ſera à B, comme H à G, eſtans les produicts de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux; & partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'eſt à ſçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel: & le quarré eſt au quarré en raiſon doublee du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera vn moyen proportionnel: & que le quarré A eſt au quarré B en la raiſon doublee du coſté C au coſté D.

A 4.	E 6.	B 9.
	C 2. D 3.	

Car le nombre C muliplié par D, produiſe E: Et puis que C eſt le coſté de A; iceluy C multiplié par ſoy-meſme produit A; & par D faict E: donc comme C à D, ainſi A à E par la 17 p. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant ſoy-meſme fait le quarré B, par la 17. prop. 7. comme C à D, ainſi E à B. Partant E eſt moyen proportionnel entre A & B.

Pour la ſeconde partie: puis que A, E, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 3. en raiſon doublee de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui eſt la meſme raiſon que de C à D, ainſi qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux: & le cube eſt au cube en raiſon triplee du coſté au coſté.

Soient deux nombres cubes A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux: & que la raiſon du cube A au cube B, eſt la raiſon triplee du coſté C au coſté D.

A 27.	H 36.	I 48.	B 64.
	E 9.	G 12.	F 16.
	C 3.	D 4.	

Qu'il ne ſoit ainſi. Que C ſe multipliant ſoy-meſme produiſe E; & D par ſoy produiſe F; mais C & D l'vn par

l'autre produiſe G : & iceluy G multiplié par l'vn & l'autre C & D, produiſe H & I. Or puis que C multipliant C & D a faict E & G ; comme C ſera à D, ainſi E à G par la 17. p. 7. Item puis que D multipliant C & D a faict G & F ; auſſi G ſera à F comme C à D : Partant E, G, F, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D. Derechef, pour ce que C multiplant E fait le cube A, & multiplant G a faict H, par la meſme prop. A ſera à H, comme E à G, c'eſt à dire, comme C à D. Item puis que D multipliant G a faict I, & multipliant F eſt produit le cube B ; par la 17. p. 7. I ſera à B, comme G à F, c'eſt à dire comme C à D. Mais par la 18. p. 7. H eſt auſſi à I, comme C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont faict H & I : donc A, H, I, B ſeront continuellement proprtionnaux ſelon la raiſon de C à D. Partant H & I, ſeront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt manifeſte, car d'autant que A, H, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 4^e^ en raiſon triplee de A 1. à H 2^c^ par la 10. deff. 5. Mais comme A eſt à H, ainſi C eſt à D. Donc le cube A eſt au cube B en raiſon triplee du coſté C au coſté D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, iceux eſtans multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & ſi chacun multiplie encores ſon produict, les derniers produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, leſquels multipliez chacun par ſoy-meſme, produiſent D, E, F ; & que les meſmes A, B C, multiplians chacun ſon produict facent G, H, I, & ainſi continuellement. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, ſont cõtinuellement proportionnaux.

		A 2.	B 4.	C 8.	
	D 4.	N 8.	E 16.	O 32.	F 64.
G 8.	P 16.	Q 32.	H 64.	R 128.	S 256. I 512.

Qu'il ne ſoit ainſi, que N ſoit le produict de A multiplié par B : & O celuy de B par C. Pareillement que A multipliant N, E face P & Q : mais B multipliant O, F produiſe R, S. Donc par la 17. p. 7. A multipliant ſoy-meſme, & B, les produicts D & N ſeront en la meſme raiſon de A à B : & par meſme diſcours B multipliant A & ſoy meſme, les produicts N & E ſeront auſſi en la meſme raiſon de A à B, & ainſi des autres : Partant D, N, E, O, F, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B :

par

par ainſi D, N, E; & E, O, F, ſont continuellement proportionnaux en vne meſme raiſon; & partant en raiſon eſgale, comme D ſera à E, ainſi E à F: parquoy D, E, F, ſeront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a faict G, P, Q; par ce que nous auons demonſtré à la 18. prop. 7. G, P, Q ſeront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'eſt à dire comme A à B. Item pource que A & B multiplians E ont produit Q & H, auſſi par la 18. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi Q à H. Donc G, P, Q, H, ſont proportionnaux en la raiſon de A à B. Par meſme diſcours H, R, S, I, ſeront prouuez proportionnaux en la meſme raiſon de A à B: & partant en raiſon eſgale, comme G ſera à H, ainſi H à I: parquoy G, H, I ſeront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vn nombre quarré meſure vn nombre quarré; auſſi le coſté meſurera le coſté: que ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le quarré meſurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui meſure le nombre quarré B; & d'iceux quarrez les coſtez ſoient C & D. Ie dis en premier lieu que le coſté C meſurera auſſi le coſté D.

A 4.	E 12.	B 36.
C 2.	D 6.	

Car ayant multiplié C par D, il eſt euident par la demonſtration de la 11. prop. 8. que le produict E eſt moyen proport. entre A & B, en la raiſon de C à D: mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A meſure le dernier B: donc par la 7. prop. 8. il meſurera auſſi le ſecond E. Parquoy puis que comme A à E, ainſi C à D: auſſi le coſté C meſurera le coſté D.

Ie dis en ſecond lieu, que ſi le coſté C meſure le coſté D, auſſi le quarré A meſurera le quarré B. Car comme deſſus A, E & B ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D: Et puiſque C meſure D, auſſi A meſurera E; & E meſurera B, & par conſequent A meſurera auſſi B, car qui meſure le meſureur, meſure auſſi le meſuré, par la 11. com. ſent. Parquoy ſi vn nombre quarré meſure vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube meſure vn nombre cube: auſsi le coſté meſurera le coſté: & ſi le coſté meſure le coſté; auſsi le cube meſurera le cube.

Soit vn nombre cube A, qui meſure vn autre nombre cube B, & d'iceux

cubes les costez soient C & D. Ie dis premierement que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque costé C, D multipliant soy-mesme face E, F, mais se multipliant l'vn l'autre facent G, & multipliant derechef G, produisent H, I. Il est éuident par la demonstr. de la 12. p. 8. que tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A, 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2e. par la 7. prop. 8. Mais A estant à H, comme C à D, aussi le costé C mesurera le costé D.

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

Secondement, que le costé C mesure le costé D: Ie dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a esté dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D: Parquoy le costé C mesurant le costé D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, desquels les costez sont C & D; mais que le quarré A ne mesure le quarré B: Ie dis premierement que le costé C ne mesurera pas le costé D.

Car par la 14. prop. de ce liure, si ledit costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese. Secondement, que le costé C ne mesure pas le costé D: Ie dis que le quarré A ne mesurera pas aussi le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

THEOR 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure vn nombre cube, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les costez sont C & D; & que A

ne mesure B : Ie dis que le costé C ne mesure pas aussi le costé D : & dauantage que si le costé C ne mesure pas le costé D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube, ce qui est contre l'hypothese. Et pour le second : Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesureroit le costé, par la susdite 15. p. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si vn nombre cube ne mesure vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublée des costez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs costez soient C D, & E, F. Ie dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn moyen proportionnel ; & que A est à B en raison doublee de C à E, ou de D à F, costez de mesme raison.

A 12.	G 18.	B 27.	
C 6.	D 2.	E 9.	F 3.

Car puis que les plans A & B, sont semblables, par la 21. def 7. C sera à D comme E à F ; & si A sera le produict de C par D : Item B le produict de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G : par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produict A & G : A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produict G & B : partant iceux G & B seront l'vn à l'autre comme D à F : ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est euidente : car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E : par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la mesme raison que de C à E, ou de D à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le solide est au solide en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B ; & de A les costez soient

C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H. Ie dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F, ou de D à G, ou E à H, costez de mesme raison.

A 30.	M 60.	N 120. B 240.
	I 6.	L 12. K 24.
C 2.	D 3.	E 5. F 4. G 6. H 10.

Car I soit le produict de C multiplié par D: K le produict de F par G: L le produict de F par D, & finalement M & N, soient les produicts de L par E & H.

Maintenant puis que par la 21. def. 7. les costez C, D, E, sont proportionnaux aux costez F, G, H: en permutant, ils seront aussi proportion. c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produict I & L, par la 17. p. 7. I sera à L comme C à F, c'est à dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produict I & K; parquoy I sera à K comme D à G: & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produict de la multiplication des trois nombres C, D, E: & I, le produict de C par D: aussi A sera le produict de I par E: Item le solide B estant produict de la multiplication des trois nombres F, G, H: & K le produict de F en G: aussi B sera le produict de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produict A & M en la raison de I à L: & semblablement que L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L: aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F: & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est euidente: car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont esté prouuez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M: Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H: donc A sera à B en raison triplee de C à F, ou D à G, ou E à H, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe vn moyen proportionnel C. Ie dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B: par la 21. p. 7. iceux D & E mesureront egalement A & C; qu'ils les mesurent par F: Ils mesureront aussi egalement C & B, qui sont en la mesme raison: qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D

A 12.	C 18.	B 27.
D 2.	E 3.	F 6. G 9.

& E, ſera produict A & C par la 9. com. ſent. Item G multipliant les meſmes D & E, ſeront produicts C & B. Veu donc que E multipliant F & G a faict C & B; comme C ſera à B, ainſi F à G par la 17. p. 7. Mais comme C eſt à B, ainſi eſtoit D à E. Donc comme D ſera à E, ainſi F ſera à G; & en permutant comme D ſera à F, ainſi E à G. Et puis que F multipliant D a faict A, iceluy A ſera vn plan duquel les coſtez ſont D, F. Item pour ce que G multipliant E a faict B; B ſera le plan duquel E & G ſont les coſtez. Mais ces coſtez ont eſté demonſtrez proportionnaux, c'eſt à dire D eſtre à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux ſeront nombres ſolides ſemblables.

Soient deux nombres A & B, entre leſquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Ie dis que A & B ſont nombres ſolides ſemblables.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient trouuez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la preced. prop. E & G ſeront plans ſemblables: Soient leurs coſtez H, I; & K, L, leſquels ſeront proportionnaux par la 21. def. 7. & puiſque E, F, G ſont les plus petits en la raiſon de A, C, D, ils les meſureront eſgalement par la 21. prop. 7. ſoit ſelon le nombre M: c'eſt à dire que E, F, G, eſtans multipliez par M produiſent A, C, D. Item par le meſme diſcours E, F, G, meſureront eſgalement les trois nombres C, D, B, chacun le ſien: ſoit ſelon le nombre N, c'eſt à dire, que N multipliant E, F, G, produiſe C, D, B. Il eſt donc euident, que A & B ſont nombres ſolides, deſquels les coſtez ſont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produiſent C & D, par la 18. p. 7. M ſera à N en la raiſon de C à D, & C eſt à D en meſme raiſon que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E & F a produict iceux C & D; mais auſſi E eſt à F en la meſme raiſon que H à K, ou I à L. Donc auſſi H ſera à K, ou I à L, comme M à N; & en permutant, H ſera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les coſtez H, I, M ſont proportionnaux aux coſtez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B ſeront nombres ſolides ſemblables: Parquoy ſi entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 2. I 2. M 4. K 3. L 3. N 6

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit quarré; le troiſieſme ſera auſſi quarré.

Soient trois nombres continuellent proportionnaux A, B, C, deſquels le premier A ſoit quarré: Ie dis que le troiſieſme C eſt auſſi quarré.

A 4. B 6. C 9.

Car puiſque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils ſeront plans ſemblables; & partant l'vn d'iceux eſtant quarré, auſſi ſera l'autre. Si donc trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quart ſera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier deſquels A ſoit cube: Ie dis que le quatrieſme D eſt auſſi cube.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Car puiſque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce liure, iceux A & D ſeront ſolides ſemblables; mais l'vn eſt cube, & partant auſſi ſera l'autre. Parquoy ſi quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux ſoit quarré, auſſi ſera l'autre.

Soient deux nombres A & B, leſquels ſoient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & ſoit A quarré. Ie dis que B eſt auſſi quarré.

A 16. F. 24. B 36.
C 4. E 6. D 9.

Car puiſque A eſt à B comme C à D; & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, ſçauoir eſt E; il en tombera auſſi vn entre A & B par la 8. prop. 8. & ſoit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, ſont continuellement proportionnaux, & le premier A eſt quarré; auſſi par la 22. prop. 8. le troiſieſme B ſera quarré. Parquoy ſi

quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il appert des choſes cy-deſſus dites, que la raiſon de quelque nombre quarré que ce ſoit à quelconque nombre non quarré, ne peut eſtre exhibee en deux nombres quarrez: Car ſi elle y eſtoit exhibee, par la 24. propoſit. 8. les deux premiers nombres ayans la meſme raiſon que les quarrez de la raiſon exhibee ſeroient auſsi quarrez, puis que l'vn eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde: car l'vn eſt poſé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raiſon double, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. & c. ſeroient quarrez; d'autant que 4 eſtant quarré, par la 24. propoſi. 8. auſsi 8 ſeroit quarré: donc auſsi 16 & 32. & c. Ce qui eſt abſurde. Car entre 4 & 8; & entre 8 & 16; & entre 16 & 32, & c. tomberoit vn moyen proportionnel, ſ'ils eſtoient quarrez, par la 11. prop. 8. & nous auons demonſtré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raiſon double.

Semblablement les nombres en raiſon quintuple, ne ſont auſsi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y eſtoient, par la 11. propoſit 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel: donc auſsi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui eſt impoſsible, comme nous auons demonſtré au Scholie de la meſme propoſition.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'vn d'iceux ſoit cube, auſſi ſera l'autre.

Que A ſoit à B, comme le cube C au cube D, & que A ſoit cube: Ie dis que B eſt auſſi cube.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce liure, leſquels ſoient E & F: Mais par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B ſont continuellement proportionnaux, & que le premier A eſt cube, auſſi ſera le quatrieſme B par la 23. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres ſont l'vn à l'autre, & c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 8. G 12. H 18. B 27.
C 64. E 96. F 144. D 216.

COROLLAIRE.

Il appert auſsi des choſes cy-deſſus, que la raiſon de quelque nombre cube que ce ſoit à quelconque nombre non cube, ne ſe peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Ie dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & soit C: si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A, C, B, les extremes D & F seront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 20. C 30. B 45.
D 4. E 6. F 9.

SCHOLIE.

Clauius à demonstré apres Commandin la conuerse de ceste prop. c'est à sçauoir:

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarrez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre iceux quarrez: & aussi vn entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, B. Ie dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouue, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raison egale comme E à H, ainsi A à B: Parquoy les nombres solides semblables sont l'vn à l'autre, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 8. F 12. G 18. H 27.

SCHO-

SCHOLIE.

Clauius demonstre aussi apres Commandin la conuerse de ceste proposition sçauoir est:

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. p. 8. il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H; il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est euident par toutes les choses cy-dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18 prop. 8. vn moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté demonstré au Scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront pas aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il est certain que deux nombres moyens proport. ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuuent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuuent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'vnité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les costez sont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy-mesme, & deux vnitez: & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuuent estre proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuuent estre plans, ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18 ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extrémes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seroient premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrémes n'en ayans point: Parquoy il est euident par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extrémes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy-mesme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez; Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il eſt facile de trouuer deux nombres plans, ou ſolides non ſemblables. Car ſi on prend deux nombres ayans raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre ſoit quarré, ou cube; il eſt euident par ce que deſſus, qu'ils ſeront plans, ou ſolides diſſemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, deſquels l'vn ſoit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20; ils ne ſont plans ſemblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils ſeroient comme quarré à quarré: & 16 eſtant quarré, par la 24. p. 8. 20 ſeroit auſſi quarré, contre l'hypotheſe. Par meſme raiſon, ſi de deux nombres, l'vn eſt cube, & l'autre ne l'eſt pas; comme 27 & 40; ils ne ſont pas ſolides ſemblables. Car s'ils l'eſtoient, par la 27. p. 8. ils ſeroient comme cube à cube: & 27 eſtant cube, par la 25. p. 8. 40 ſeroit auſſi cube, contre l'hypotheſe.

Fin du huictieſme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré.

SOient deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Ie dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-meſme produict D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Mais A & B eſtans plans ſemblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. p. 8. Il en tombera donc auſſi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſſi quarré par la 22. p. 8. Parquoy ſi deux nombres plans ſemblables &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A 4.		B 9.
D 16.	E 24.	C 36.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn nombre quarré, iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui ſe multiplians l'vn l'autre, produiſent C quarré. Ie dis que A & B ſont plans ſemblables.

Car que A ſe multipliant ſoy-meſme produiſe D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrez D & C tombe vn moyen pro-

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

portionnel: il en tombera donc aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. pr. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplians l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B. Ie dis que B est nombre cube.

Car soit C costé du cube A: & de C multiplié en soy, soit produict D; il est manifeste que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a faict D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par C. L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20. d. 7. Derechef puisque C multipliant D a faict A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A mesure B par A; (car B a esté faict de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D; par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4 nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriesme sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qui estoit à prouuer.

A 8.	
E 16.	D 4.
F 32.	C 2.
B 64.	*Vnité.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C. Ie dis que C est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B & soy-mesme, a produict C & D; il y aura telle raison de D à C, que de A à B, par la 17. p. 7. Et par la 12. p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube,

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

par la 23. pr. 8. C sera aussi cube. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Ie dis que B multiplié est aussi nombre cube.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la 3. p. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a faict D & C, par la 17. p. 7. A sera à B comme D à C, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. A estant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy, si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy-mesme produict vn nombre cube; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par soy-mesme produise le nombre cube B. Ie dis que A est aussi nombre cube.

A 8.	B 64.	C 512.

Car si on prend C produict de A multiplié par B, il sera cube par la definition du nombre cube; & par la 5. p. 9. A sera aussi cube. Si donc vn nombre se multipliant soy-mesme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre nombre le produict sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel estant multiplié par quelque nombre B produise C. Ie dis que C est nombre solide.

A 6.	B 5.	C 30.
D 2.	E 3.	

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'vnité le mesurera par la 13. d. 7. Que D mesure donc A par E. Ce qu'estant posé, D multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. sent. Et puisque B multipliant A a produict C, iceluy C sera procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; partant par la 17. p. 7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B. Parquoy vn nombre composé, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troiſieſme depuis l'vnité ſera quarré, & tous les autres qui en laiſſeront vn: Mais le quatrieſme ſera cube, & tous les ſuyuans qui en laiſſeront deux: & le ſeptieſme ſera cube & quarré enſemble, & tous les ſuiuans qui en laiſſeront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Ie dis que le troiſieſme B ſera quarré, enſemble tous les autres qui en laiſſeront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres, que le quatrieſme C eſt cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laiſſent deux, comme F & I: Pareillement que le ſeptieſme nombre F eſt cube & quarré enſemble, comme auſſi tous les autres qui pourroient ſuiure en laiſſant touſiours cinq nombres.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

Pour la premiere partie: puis que les nombres ſont continuellement proportionnaux, comme l'vnité meſure A ſelon les vnitez qui ſont en A, par la 5. com. ſent. ainſi chacun meſurera ſon ſuiuant ſelon les vnitez de A: partant B troiſieſme, qui ſera en ce faiſant le produict de A multiplié par ſoy, ſera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, ſont continuellement proportionnaux, & B eſt quarré, auſſi D ſera quarré. Par meſme diſcours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D eſt quarré, auſſi F ſera quarré; & ainſi de tous les autres nombres qui en laiſſent vn.

Pour la ſeconde partie: puis que A multiplié par ſoy produict B; & B par A produict C; Il eſt euident par les definitions du 7. que C ſera cube, & par la 23. p. 8. C, D, E, F, eſtans continuellement proportionnaux, F ſera auſſi cube: par meſme raiſon, eſtans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F eſt cube, auſsi I ſera cube; & ainſi de tous les autres nombres, en laiſſant deux, ſi dauantage y en auoit.

Pour la troiſieſme partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a eſté prouué quarré & cube; iceluy ſera cube & quarré enſemble: Et il en ſera ainſi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra conti-

nuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez : & s'il est cube, aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, Ie dis premierement que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Car puis qu'iceux nombres A, B, C, D, E, F, sont continuellement proportionnaux depuis l'vnité, par la prec. prop. le troisiesme nombre B sera nombre quarré, comme aussi tous les autres qui en laissent vn, sçauoir D & F. Mais pour ce que A, B, C, sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. p. 8. C sera aussi quarré : & par la mesme raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C estant quarré, aussi le sera le troisiesme E : partant tous les nombre A, B, C, D, E, F sont quarrez : Et ainsi de tous autres.

Ie dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes : Car d'autant que A, B, C, D, E, F sont continuellement proport. depuis l'vnité, C quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçauoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouuerons ainsi. D'autant que par l'hypothese l'vnité est à A, comme A à B, l'vnité mesurera A, & iceluy A le nombre B egalement. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure A par le mesme A : donc A mesurera aussi B par le mesme A : & par la 9. com. sent. A multiplié en soy, produira B, lequel A estant cube, B sera aussi cube par la 3. p'. 9. Mais tous les autres nombres suiuans sont en la raison de A à B, & par tant par la 23. p. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré : aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube, aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le qua-

trieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F; & premierement que A qui ſuit l'vnité, ne ſoit nombre quarré. Ie dis que pas vn autre ne ſera quarré, ſinon le troiſieſme B, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent vn, ſçauoir D & F.

vnité,	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F ſont quarrez: Et ſi quelqu'vn veut dire qu'il y en à auſsi d'autres, comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fuſt auſſi nombre quarré, (eſtans C, B, A, continuellemant proportionnaux & C quarré) ce qui eſt contre l'hypotheſe. Par meſme raiſons on demonſtrera qu'aucun autre ne peut eſtre quarré, ſinon les ſuſdits.

Maintenant, que A proche de l'vnité ne ſoit nombre cube: Ie dis qu'aucun autre ne ſera cube, ſinon C quatrieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſeront deux, comme F, &c.

Car par la 8. p. 9. C & F ſont cubes: Et ſi quelqu'vn veut dire que D ſoit auſsi cube; d'autant que D, C, B, A ſont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. p. 8. que A fut pareillement cube; ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc D n'eſt pas cube. Par meſme raiſons on demonſtrera qu'aucun autre, outre les ſuſdits, ne peut eſtre cube. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'll falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit meſurera le plus grand ſelon quelqu'vn de ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A, ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Ie dis que le plus petit nombre B meſurera le plus grand F par quelqu'vn des nombres C, D, E.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1,	3.	9.	27.	81.	243.

Car d'autant que A, B, C, D, E ſont en meſme raiſon que B, C, D, E, F, en raiſon eſgale, l'vnité A ſera à E, comme B eſt à F. Et par la 20. def. du 7. l'vnité meſurera E; & le nombre B le nombre F, egalement. Mais par la 5. com. ſent. l'vnité A meſure E par E: donc auſsi B meſurera F par E. Le meſme peut on dire des autres. Par quoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHO-

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est autant esloigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand: & ce d'autant qu'il y doit auoir vne mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est à dire par soy-mesme, &c. Pour ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres: & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par soy-mesme, en produict vn autre, qui entre les proportionnaux est autant esloigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouiendra sera autant esloigné du grand que le moindre de l'vnité: Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produict celuy-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant esloigné de C, qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, sera le mesme F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celuy qui est proche de l'vnité.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Ie dis que tout les nombres premiers qui se trouueront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront nombres premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D: D & F seront donc aussi premiers par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E: partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E: ce qui est contre l'hypothese: Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy d'apres l'vnité ſoit premier: Le plus grand ne ſera meſuré par aucun autre nombre, ſinon par ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui ſuit l'vnité ſoit premier. Ie dis que le plus grand nombre E ne ſera meſuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

A 1.	B 3.	C 9.	D 27.	E 81.
	K --	I --	H --	G --

Autrement, s'il eſt poſſible, que quelque autre nombre, comme G, meſure E: Or G ſera premier ou compoſé: s'il eſt premier, & meſurant E extreme, par la prec. prop. il meſurera auſſi B, premier proche de l'vnité: ce qui eſt abſurde. Donc G n'eſt premier, mais compoſé, & meſuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut eſtre autre que B: d'autant qu'il meſurera E, par la 11. com. ſent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il meſuraſt auſſi B nombre premier: ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui meſure G. Que maintenant B meſure G par H: & puis que par les choſes dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produict E & G, par la 17. p. 7. comme E ſera à G, ainſi D à H: mais G meſure E: donc auſſi H meſurera D. On prouuera comme deſſus qu'il ne peut eſtre premier ny meſuré par vn autre nombre premier que B: Car ſi H eſtoit premier, meſurant D, il meſureroit auſſi B: ce qui ne ſe peut faire, ayant eſté poſé premier. Que ſi H eſt compoſé, celuy nombre premier qui le meſurera ſera B, ou ſi c'eſt vn autre, c'eſt autre meſurera auſſi D, & celuy qui meſure D, c'eſt à ſçauoir B, par la 11. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui meſure H: & poſant que ce ſoit par le nombre I. On prouuera auſſi comme deſſus, que comme H meſure D, ainſi I meſure C, & que I ne peut eſtre nombre premier, ny meſuré par aucun autre nombre premier ſinon B. Donc que I meſure C par le nombre K: par meſmes raiſons, comme I meſure C, ainſi K meſurera B nombre premier: il faut donc qu'à tout le moins il luy ſoit egal, ce qui eſt impoſsible: d'autant que B eſt moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C eſt produict de K multiplié par I, & qu'il eſt auſſi le produict de B multiplié par ſoy-meſme. Partant aucun nombre ne meſurera E, ſinon B, C, D, qui le meſurent, par la 11. p. 9. Parquoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez

par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F: donc par la 9. com. sent. E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B, C, D; & par la 32. p. 7. iceux B, C, D, mesureront l'vn des deux E, F: Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas vn d'iceux; ils mesureront donc F, qui est plus petit que A: ce qui est absurde; puis que A est posé le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.	B.	C.	D.
30.	2.	3.	5.
E---		F--	

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy en nombres (apres Commandinus & Clauius) les 10 *premiers theoremes, qui sont demonstrez en lignes au second liure.*

1. S'il y a deux nombres, l'vn ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, A B & C, desquels A B est diuisé en A D, D E, E B, & soit faict F de C en A B: Item G H de C en A D, & H I, de C en D E, & I K de C en E B: Ie dis que F est egal aux nombres G H, H I, I K, c'est à dire à tout le nombre G K, composé d'iceux. Car puisque C multipliant A B, a produict F: A B mesurera F par C, c'est à dire que A B sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison A B sera la partie de G H; & D E de H I; & E B de I K, denommée par C, sçauoir est, la mesme que A B de F. Mais il est euident par la 5. prop. 7. que A B est la mesme partie de G K, que A D de G H, parquoy aussi A B sera mesme partie de G K, que A B de F: & partant par la 4. com. sent. F & G K seront egaux entr'eux. Ce qui estoit proposé.

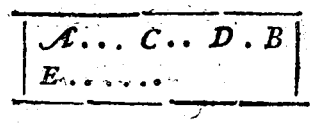
A	D	E	B	C
F 12				
G	H	I ..	K	

2. Si vn nombre est couppé en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre A B soit diuisé en A C, C B. Ie dis que les nombres qui seront produicts du total A B, és parties A C, C B seront ensemble egaux au quarré de A B. Car estant pris le nombre D egal à A B, par le 1. theo. le nombre faict de D, c'est à dire de A B, en A B, sçauoir est le quarré d'iceluy A B, sera egal aux nombres qui seront produicts de D, c'est à dire de A B, en A C, & en C B; ce qui estoit proposé.

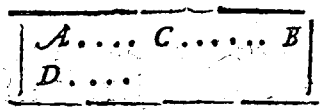
A	C	B
D		

Le meſme ſera demonſtré, ſi A B eſt couppé en plus de deux parties, comme on peut veoir par la ſeconde figure icy appoſée. Car par la meſme raiſon, le nombre faict de E, c'eſt à dire de A B, en A B, c'eſt à ſçauoir le quarré de A B, ſera egal aux nombres, qui ſeront produicts de E, c'eſt à dire de A B, en chaſque partie A C, C D & D B.



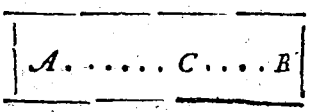
3. Si vn nombre eſt couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'vne des parties, eſt egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement priſe.

Soit le nombre A B diuiſé en A C, C B. Ie dis que le nombre plan produict de A B en la partie A C, eſt egal à celuy faict des parties A C, C B, & au quarré d'icelle partie A C. Car eſtant pris le nombre D egal à la ſuſdicte partie A C; par le 1. theor. le nombre faict de D, c'eſt à dire de A C, en A B; ou (qui eſt le meſme) de A B en A C, ſera egal aux nombres faicts de D, c'eſt à dire de A C, en C B, & de D, c'eſt à dire de A C, en A C, ſçauoir eſt le quarré de A C. Ce qui eſtoit propoſé.



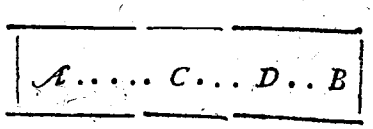
4. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties; le quarré faict du tout eſt egal aux deux quarrez faicts des deux parties, & à deux fois le nombre plan contenu d'icelles paties.

Soit le nombre A B diuiſé en A C, C B. Ie dis que le nombre quarré faict de A B, eſt egal aux quarrez des parties A C, C B, auec deux fois le nombre plan faict de A C en C B. Car par le 2. theor. le nombre quarré de A B, eſt egal aux nombres faicts de A B en A C, & en C B. Mais par le 3. theor. le nombre faict de A B en A C, eſt egal au nombre produict de A C en C B, & au quarré d'iceluy A C: Item le nombre produict de A B en C B, eſt par meſme raiſon egal au nombre produict de A C en C B, & au quarré de C B. Donc le nombre quarré faict de A B, eſt pareillement egal aux nombres quarrez des parties A C, C B, & a deux fois le nombre faict de A C en C B. Ce qui ſtoit propoſé.



5. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, auec le quarré du nombre qui eſt entre les deux ſections, eſt egal au quarré faict de la moictié du nombre total.

Soit le nombre A B, couppé en deux parties egales A C, C B, & en deux inegales A D, D B. Ie dis que le nombre plan compris des parties inegales A D, D B, auec le quarré du nombre C D, eſt egal au quarré du nombre B C. Car puis que par le theor. preced. le nombre quarré de C B, eſt egal aux quarrez des parties C D, D B, auec deux fois le nombre faict de C D, D B; & par le 3. theor. le nombre plan compris de C D, D B, enſemble auec le quarré de D B, eſt egal au nombre produict de C B en D B, ſera faict que ſi ce nombre faict de C B, en D B, eſt pris pour le quarré de D B, auec le nombre faict de C D, en D B, auſſi le nombre quarré de C B, eſt egal à l'autre quarré de C D, enſemble



à l'autre nombre faict de C D en D B, & au nombre produict de C B, c'eſt à dire de A C en D B: & partant par le 1. theor. le nombre faict du total A D en D B, eſt egal aux nombres produicts de C D en D B, & de A C en D B. Donc le quarré de C B, ſera egal au quarré de C D, & au nombre faict de A D en D B. Ce qui eſtoit propoſé.

6. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & à iceluy eſt adiouſté quelque autre nombre; le nombre qui eſt fait du tout auec l'adiouſté en l'adiouſté, auec le quarré de la moitié du nombre, eſt egal au quarré du nombre compoſé de la moitié & de l'adiouſté.

Soit le nombre A B couppé en deux parties egales A C, C B, & à iceluy ſoit adiouſté le nombre B D. Ie dis que le nombre faict du tout A B & de l'adiouſté B D comme vn ſeul, ſçauoir eſt de A D en l'adiouſté B D, auec le quarré de la moitié C B, eſt egal au quarré faict de la moitié C B & adiouſté B D comme vn ſeul, c'eſt à dire au quarré de C D. Car puis que par le 4. theor. le quarré de C D eſt egal aux quarrez des parties C B, B D, auec deux fois le nombre plan compris de C B, B D, c'eſt à dire aux quarrez des parties C B, B D, & aux nombres contenus de C B, B D, & de A C, B D: Mais par le premier theor. le nombre faict de A D en B D, eſt egal aux nombres contenus ſous C B, B D, & ſous A C, B D, & ſous A D, B D, c'eſt à dire au quarré de B D. Donc prenant le nombre faict de A D en D B, pour le quarré de la partie B D, auec les nombres faicts de C B en B D, & de A C en B D, le quarré de C D ſera egal à l'autre quarré de C B, enſemble auec le nombre faict de A D en B D: c'eſt à dire que le nombre faict de A D en B D, auec le quarré de C B, eſt egal au quarré de C D: ce qui eſtoit propoſé.

A . . . C . . . B . . D

7. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré du tout auec le quarré de l'vne des parties, eſt egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, enſemble auec le quarré de l'autre partie.

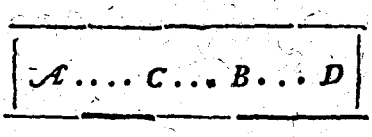
Soit le nombre A B couppé és parties A C, C B. Ie dis que le quarré de A B, auec celuy de la partie C B, eſt egal à deux fois le nombre faict de A B en C B, enſemble auec le quarré de l'autre partie A C. Car puiſque par le 4. theor. le quarré de A B eſt egal aux quarrez des parties A C, C B, & à deux fois le nombre faict d'icelles A C, C B; ſi on adiouſte le commun quarré de C B, les quarrez de A B, C B, ſeront enſemble egaux aux quarrez de A C, C B, C B, auec deux fois le nombre produict de A C en C B: mais par le 3. theor. le nombre faict de A C en C B auec le quarré de C B, eſt egal au nombre produict de A B en C B; & partant le double de l'vn eſt egal au double de l'autre. Donc ſi pour le double du nombre faict de A C en C B, & quarré de C B, on prend le double du nombre produict de A B en C B, les quarrez des nombres A B, C B ſeront enſemble egaux à deux fois le nombre de A B en C B, auec le quarré de l'autre partie A C. Ce qui eſtoit propoſé.

A . . . . . C . . . . B

8. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré du nombre compoſé du tout & de la partie premierement priſe.

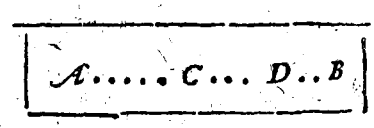
Soit le nombre A B couppé és parties A C, C B. Ie dis que le nombre faict de A B en la partie C B, enſemble auec le quarré de l'autre partie A C, eſt egal au quarré du

nombre composé de A B & de la partie C B. Car estant adiousté le nombre B D egal à C B, par le 4. theor. le quarré du tout A D est egal aux quarrez des nombres A B, B D, ensemble auec le nombre double de A B en B D, c'est à dire aux quarrez des nombres A B, C B, ensemble auec deux fois le nombre de A B en C B: Mais par le 7. theor. les quarrez de A B, C B, sont egaux à deux fois le nombre contenu de A B, C B, auec le quarré de A C; donc si pour les quarrez de A B, C B, on prend le nombre double de A B en C B, & le quarré de A C; le quarré faict de A D est egal à 4 fois le nombre faict de A B en C B, ensemble auec le quarré de l'autre partie A C: ce qui estoit proposé.



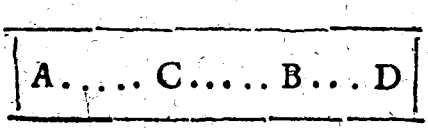
9. Si vn nombre est couppé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarrez faicts des parties inegales, sont doubles des quarrez faicts de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre A B diuisé es parties egales A C, C B, & ès inegales A D, D B. Ie dis que les quarrez des parties inegales A D, D B, sont doubles des quarrez de la moictié A C, & du nombre entre-moyen C D. Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre A D est egal aux quarrez des nombres A C, C D, ensemble auec deux fois le nombre faict de A C en C D; si on adiouste le commun quarré de D B, les quarrez des parties A D, D B, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de A C en C D, c'est à dire de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, c'est à dire de A C, & C D, sont egaux au quarré de D B, & à deux fois le nombre de C B en C D. Donc si pour le quarré de D B, & deux fois le nombre faict de C B en C D, on prend les quarrez de A C, C D, les quarrez de A D, D B seront egaux au double des quarrez des parties A C, C D; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.



10. Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy on adiouste quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiousté.

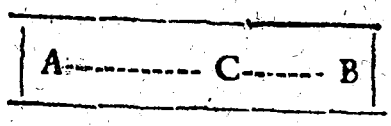
Soit le nombre A B diuisé en deux parties egales A C, C B, & à iceluy soit adiousté le nombre B D. Ie dis que le quarré du nombre A D composé du tout A B, & de l'adiousté B D, & le quarré d'iceluy nombre adiousté B D, sont ensemble doubles des quarrez faicts de la moitié A C, & de C D, composé de la moictié C B & de l'adiousté B D. Car puisque par le 4. theor. le quarré de A D est egal aux quarrez de A C, C D, & a deux fois le nombre produict de A C, c'est à dire de C B, en C D; si on adiouste le commun quarré du nombre B D, les quarrez des nombres A D, B D, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, ou A C, & C D sont egaux au quarré de B D, & a deux fois le nombre fait de C B en C D. Donc si pour le quarré de B D, & deux fois iceluy nombre produict de C B en C D, on prend les quarrez des nombres C B, C D, c'est à dire des nombres A C, C D: les quarrez



des nombres AD, BD seront egaux à deux fois les quarrez des nombres AC, CD: & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy: ce qui estoit proposé.

Or voila quant aux 10. *premieres prop. du* 2. *l. mais la* 11^e. *ne se peut accommoder aux nombres, c'est à dire qu'on ne peut pas* diuiser vn nombre proposé, en telle sorte que le nombre plan faict du tout & de l'vne des parties, soit egal au nombre quarré de l'autre partie.

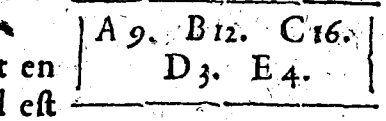
Car, s'il est possible, soit diuisé AB en AC, CB, en sorte que le nombre plan faict du tout AB, & de la partie CB, soit egal au quarré de l'autre partie AC. Donc quatre fois le nombre de AB en CB, sera quadruple du quarré de AC: & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy AB en CB, auec le qurré de AC, sera quintuple d'iceluy quarré de AC. Mais quatre fois le nombre plan de AB en CB, auec le quarré de AC, est quarré, veu que par le 8. *theor. il est egal au nombre quarré, qui est faict du nombre composé de AB & de CB. Donc deux nombres quarrez (sçauoir celuy qui est faict de AB en CB quatre fois auec le quarré de AC; & le quarré de AC) ont mesme raison, que* 5 *à* 1, *ou* 25 *à* 5. *Ce qui est absurde, ainsi qu'il appert du corol. de la* 24. *p.* 8. *Le nombre AB ne peut donc pas estre diuisé, en sorte que le nombre plan faict du tout en vne des parties soit egal au quarré de l'autre partie. Ce qui estoit proposé.*



THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison: Ie dis que le composé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B, est premier à l'autre C; & le composé de B, C, premier à A; & de A, C, premier à B.



Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le Scholie de la 35. prop. 7. il est euident par ce qui a esté demonstré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarrez de D & E, & que B est le produict de D multiplié par E: & par le 3. Theor. du Scholie precedent le composé de D, E, multiplié par D, produira vn nombre esgal au composé de A & B. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi leur composé sera premier à E, par la 30. prop. 7. & partant aussi a son quarré C, par la 27. prop. 7. Et par mesme raison D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produict du composé de D & E multiplié par D, sera aussi premier à C. Mais nous auons monstré que ce produict est esgal au nombre composé de A & B: Donc aussi le composé de A & B sera premier à C,

En apres, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacun d'iceux; par la 26. prop. 7. le produit du composé de D, E, multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdict Theor. iceluy produit est esgal à C faict de E en soy, & au nombre B faict de D en E. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D; & partant aussi à A par la 27. proposition 7.

Finablement D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au composé de deux par la 30. prop. 7. leur produict B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produict de D, E comme vn seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produict de D E comme vn seul nombre multiplié en soy, est esgal à A & C & deux fois B ensemble: donc A & C auec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B; il est manifeste que le reste composé de A & C, sera premier à B. Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a esté demonstré cy-dessus. Donc le composé de A & C est premier à B. Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Ie dis que comme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A & B, on ne peut trouuer vn troisiesme proportionnel,

| A 3. B 5. C-- |

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B, ainsi B soit à vn autre, sçauoir C. Par la 23. prop. 7. A & B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par 21. prop. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy-mesme; donc A mesure iceux A & B. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas comme A à B, ainsi B à C. Par mesme raison, il ne sera pas comme B à A, ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Ce qui est dict & demonstré tant en cette 16. prop. qu'aux trois suiuantes, se doit entendre des nombres entiers: car si on les vouloit estendre aux fractions, il est certain & manifeste qu'à deux nombres quels qu'ils soient, on en peut trouuer vn troisiesme proportionnel; puis que le quarré du second nombre estant diuisé par le premier, en est produict vn troisiesme proportionnel. Comme aux deux nombres premiers 3 & 5, si le quarré du second nombre 5, sçauoir 25 est diuisé par le premier 3, prouiendra 8 $\frac{1}{3}$ pour le troisiesme proportionnel, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, deſquels les extrémes ſoient premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, deſquels les extremes A & C ſoient premiers entr'eux. Ie dis qu'il ne ſe peut faire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D ---

Car ſ'il eſt poſſible, comme A eſt à B, ainſi ſoit C à D. En permutant comme A ſera à C, ainſi B à D: & par la 23. prop. 7. A & C eſtans premiers, ils ſeront les plus petits en leur raiſon: & par la 21. p. 7. ils meſureront egalement B & D; ſçauoir eſt A iceluy B; & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainſi B à C; & A meſure B, auſſi B meſurera C: & par la 11. comm. ſent. A meſurera auſſi C; & iceuy A meſurant ſoy-meſme, il meſurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui eſt abſurde. A n'eſt donc pas à B, comme C à D. Par meſmes raiſons, il ne ſera pas comme C à B, ainſi A à quelque autre. Parquoy ſi tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres eſtans donnez, conſiderer ſi on pourra trouuer vn troiſieſme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B: Il faut conſiderer ſi à iceux on peut trouuer vn troiſieſme nombre proportionnel.

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D ---	C 49.

La ſolution de ceſte propoſition eſt aiſee: Car il n'y a qu'à conſiderer ſi C, produict du ſecond nombre B multiplié par ſoy-meſme, peut eſtre meſuré, c'eſt à dire diuiſé par le premier A: car ſ'il peut eſtre meſuré ou diuiſé, comme en la premiere formule, il eſt euident par la 20. prop. 7. que le quotient D ſera troiſieſme nombre proportionnel; ſinon, on n'en trouuera point, puis que par la ſuſdite 20. prop. 7. trois nombres eſtans prop. le produict des extremes doit eſtre eſgal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnez trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatriesme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn quatriesme proportionnel.

A 3. B 6. C 5. E 10. D 30.

La solution de ceste prop. est aussi aisée. Car il faut seulement considerer si D, qui est le produict des second & troisiesme nombres B & C, peut estre mesuré par le premier A: s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriesme proport. sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdicte 19. prop. 7. quatre nombres estans proport. le produict du second & troisiesme doit estre esgal au produict du premier & quatriesme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A..2 B...3 C.....5 D---------- 30 E.F G-----

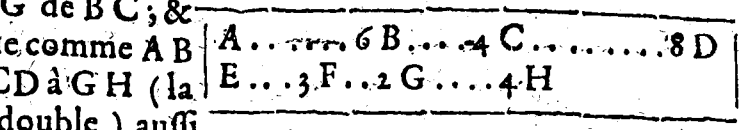
Car si on trouue le nombre D E, le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à icelluy D E on adiouste l'vnité E F, le tout D F sera premier ou non: S'il est premier, on a vn nombre premier autre que pas vn des proposez: Mais si D F n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc mesuré par G; il est éuident que G ne peut pas estre vn des trois A, B, C: car s'il estoit quelqu'vn d'iceux, il mesureroit comme eux D E. Donc G mesurant le tout D F, & le retranché D E, par la 12. comm. sent. il mesureroit aussi le reste D F, sçauoir vn nombre l'vnité: Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trouuer infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adiouſtez; le tout sera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra A B, B C, C D: Ie dis que tout le composé A D, est pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié, iceux AB, BC, CD, auront chacun moitié: Soit donc EF moitié de AB; & FG de BC; & GH de CD. D'autant que comme AB à EF, ainsi BC à FG; & CD à GH (la raison estant tousiours double) aussi par la 12. p. 7. comme AB sera à EF, ainsi AD à EH. Mais AB est double d'iceluy EF: Donc aussi AD sera double de EH; & partant iceluy nombre AD ayant moitié est pair par la susd. 6. def. Parquoy si tant de nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

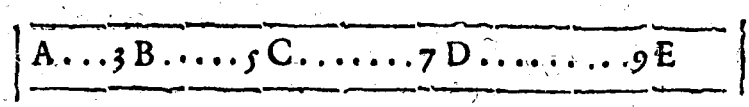


THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit pair; le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra, deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair: Ie dis que le tout AE eſt pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, ſont impairs, par la 7. def. 7. chacun ſera different du nombre pair de l'vnité: & partant ſi de chacun d'iceux l'on retranche l'vnité on les rendra tous pairs, & par la 21. propoſit. 9. le compoſé d'iceux ſera pair: Et d'autant que leur multitude eſt en nombre pair, les vnitez retranchees ſeront auſſi vn nombre pair, lequel adiouſté auec tout le reſte, qui eſt deſia nombre pair, le tout AE ſera pareillement pair par la ſuſdite 21. prop. 9. Parquoy ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

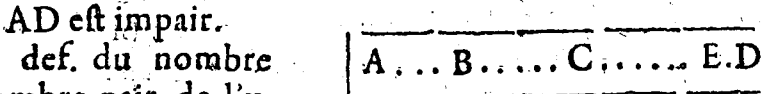


THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit impair, le tout ſera impair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que lon voudra, la multitude deſquels comme AB, BC, CD ſoit impair: Ie dis que le tout AD eſt impair.

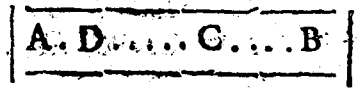
Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'vnité, ayant retranché l'vnité ED du nombre impair CD, le reſte CE ſera pair. Mais par la prec. prop. AC compoſé des impairs AB, BC, pairs en multitude, eſt pair: Donc auſſi AE compoſé des pairs AC, CE, ſera pair: Et partant ſi a iceluy AE, lon adiouſte l'vnité ED, le tout AD ſera impair, puis que par la ſuſd. def. le nombre impair differe du pair de l'vnité. Parquoy ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'vn nombre pair, on oſte vn nombre pair, le reſte ſera pair.

Soit vn nombre pair AB, duquel ſoit retranché vn nombre pair CB : Ie dis que le reſte AC eſt auſſi pair.



Ce qui eſt euident : Car ſ'il n'eſtoit pair, en oſtant l'vnité AD on le rendroit pair : Et le retranché auec iceluy, ſçauoir D B, ſeroit auſſi vn nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adiouſtant l'vnité oſtee A D, le tout A B ſeroit impair ; ce qui eſt abſurde ; puis qu'il a eſté poſé pair. Si donc d'vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oſte vn nombre impair, le reſte ſera impair.

Du nombre pair AB, ſoit retranché le nombre impair C B : Ie dis que le reſte AC eſt impair.

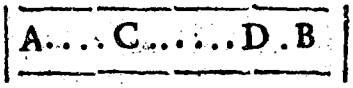


Car ayant retranché l'vnité CD du nombre impair CB, le reſte D B ſera pair. Et d'autant que le tout A B eſt poſé pair, par la preced. le reſte A D ſera auſſi pair. Et partant ſi on en oſte l'vnité CD, le reſte AC ſera impair. Si donc d'vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre impair, le reſte ſera pair.

Soit vn nombre impair AB, duquel ſoit retranché vn nombre impair CB : Ie dis que le reſte AC eſt pair.



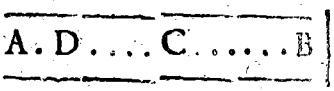
Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'vnité DB, les nombres reſtans A D, CD, ſeront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, eſt retranché le nombre pair CD ; par la 24. p. 9. le reſte AC ſera pair. Parquoy ſi d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre pair, le reſte ſera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché vn nombre pair CB: Ie dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'vnité AD, le reste DB sera pair; duquel estant retranché le pair CB, par la 24. p. 9. le reste DC sera aussi pair: & partant l'vnité AD y estant adiouſtee, AC sera impair. Parquoy si d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

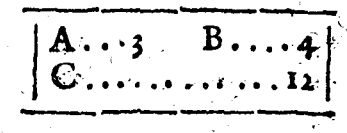


THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

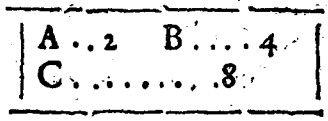
Soit vn nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, faſſe C: Ie dis qu'iceluy produict C est pair.

Car d'autant que C est produict de A en B; iceluy produict C sera composé d'autant de nombres esgaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Mais B est pair; & partant C sera composé d'autant de nombres pairs esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A: & par la 21. p. 9. C sera pair. Parquoy si vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

On demonſtrera en la meſme maniere, que ſi vn nombre pair multiplie vn nombre pair, le produit ſera auſſi pair. Car derechef C ſera composé d'autant de nombres pairs esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A, &c.



COROLLAIRE.

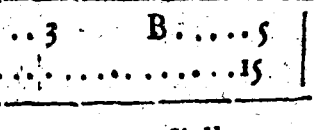
De ce que deſſus, il s'enſuit qu'vn nombre pair multiplié par ſoy-meſme produira vn nombre pair; comme il eſt manifeſte, en poſant les nombres pairs A & B esgaux.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair; le produit sera impair

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, faſſe C: Ie dis qu'iceluy produit C est impair.

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A: Et partant puis que tant A que B est nombre impair, leurdit produit C sera composé d'autant de



nombres impairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez au nombre impair A: parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. p. 9. ledit produict C sera nombre impair. Si donc vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

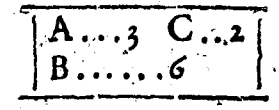
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn nombre impair multiplié par soy-mesme produict vn nombre impair.

SCHOLIE.

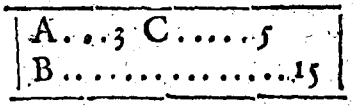
Clauius demonstre en cet endroit (apres Campanus) les deux theoremes suiuans.

1. Vn nombre impair mesurant vn nombre pair, il le mesure par vn nombre pair.



Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Ie dis que C est pair. Car s'il est impair; B produict de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. p. 9. ce qui est absurde: car il a esté posé pair. Donc C est pair.

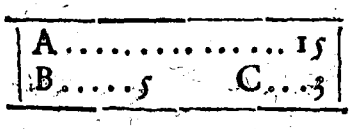
2. Vn nombre impair mesurant vn nombre impair, il le mesure par vn nombre impair.



Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Ie dis que C est impair. Car s'il est pair; B faict de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contre l'hypothese; donc C est impair.

A ces deux theor. nous adiousterons le suiuant.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair.



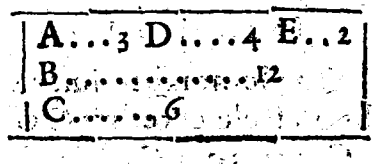
Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Ie dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produict A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Ie dis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D: iceluy D sera pair, comme nous auons demonstré au Schol. prec. theor. 1. & partant il se pourra diuiser en deux egalement par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C: & en permutant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B denommée par A: donc aussi



E ſera la partie de C denommée par le meſme A : & partant A meſurera C, par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair meſure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair eſt premier à quelque nombre, il ſera auſſi premier à ſon double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double ſoit C. Ie dis que A eſt auſſi premier à C. Car ſi A & C ne ſont premiers entre-eux, quelque nombre les meſurera, & ſoit D, lequel ſera impair, comme nous auons demonſtré au Scholie de la 29. p. 9. Et puis qu'il meſure le nombre pair C (car C eſt pair puis qu'il a moitié B) il meſurera auſſi ſa moitié B par la pr. prec. Mais il meſure auſſi A. Donc D meſure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc point de nombre qui meſure A & C ; & partant ils ſeront premiers entr'eux. Si donc vn nombre impair & premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A...3 B....4
C.....8 D--

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui ſuiuent le binaire en progreſſion double, ſont ſeulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raiſon double. Ie dis que B, C, D, E ſont tant ſeulement pairement pairs.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit priſe l'vnité, & puiſque depuis l'vnité, A, B, C, D, E, ſont continuellement prop. le plus petit meſurera le plus grand ſelon quelqu'vn de ceux qui ſont entre les proportionnaux par la 11. p. 9. leſquels eſtans tous pairs, il eſt euident par les def. du 7. que B, C, D, E, ſeront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient ſuiure en la meſme progreſſion. Mais d'autant que A prochain de l'vnité eſt nombre premier, à ſçauoir binaire, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne meſurera aucun de tous ceux qui ſont en la progreſſion, ſinon ceux de la meſme progreſſion, leſquels eſtans tous pairs, vn nombre pair meſurera chacun d'iceux par vn nombre pair ; & partant iceux nombres ſeront ſeulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui ſuiuent le binaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre eſt impair, iceluy nombre ſera ſeulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B eſt impair: Ie dis que A eſt ſeulement pairement impair.

Car puiſque B impair eſt moitié de A, il le meſurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A ſera pairement impair. Mais qu'il ſoit ſeulement pairement impair, on le prouuera ainſi. S'il eſtoit pairement pair, vn nombre pair, comme D, le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt fait de D en E: mais le meſme A eſt auſſi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produict de C par B, eſtant egal au produict de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E: Il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B impair: ce qui eſt impoſſible. Donc A n'eſt pairement pair: & partant il eſt ſeulement pairement impair. Parquoy ſi la moitié d'vn nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 30.	
B 15.	C 2.
D--	E--

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Le nombre pair A, ne ſoit de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ſoit pair: Ie dis que A eſt pairement pair, & pairement impair.

Qu'il ſoit pairement pair, il eſt euident. Car d'autant que ſa moitié eſt pair, le binaire, qui eſt pair, le meſurera par icelle moitié; & par la 9. def. 7. il ſera pairement pair.

A 20

Or il eſt auſſi pairement impair: car puis que iceluy nombre A n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diuiſe touſiours en deux egalement on viendra en fin à vn nombre impair auparauant que paruenir iuſques au binaire, lequel nombre impair meſurera A par vn nombre pair: Car ſi c'eſtoit par vn impair, attendu que par la 29. p. 9. vn nombre impair multipliant vn nombre impair produit vn nombre impair, A ſeroit impair: ce qui eſt abſurde, eſtant poſé pair. Vendonc qu'vn nombre impair meſure A par vn nombre pair, & qu'vn nombre pair le meſure auſſi par vn nombre pair; iceluy nombre A ſera pairement pair, & pairement impair. Parquoy ſi nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que l'on retranche du ſecond, & du dernier,

nier, vn nombre egal au premier; comme le reſte du ſecond ſera au premier, ainſi le reſte du dernier ſera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que du ſecond B l'on retranche F G egal au premier A: Et du dernier D l'on retranche K L auſſi egal à A: Ie dis que comme le reſte B F ſera à A, ainſi l'autre reſte D K ſera à tous les trois precedens A, B, C, enſemble.

A..... 8
B....4F.....8G
C.....18
D 9 H 6 I 4 K 8 L

Car ſi de D L on retranche L I egal à B G, il eſt euident que K I ſera egal à B F, (eſtant K L egal à F G) & ſi on retranche L H egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, ſont continuellement proportionnaux, auſſi ſeront leurs egaux D L, H L, I L, K L: & en diuiſant, D H ſera à H L, comme H I à I L, ou I K à K L; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans D H, H I, I K, (c'eſt à dire D K) ſeront à tous les conſequents H L, I L, K L, (c'eſt à dire A, B, C,) comme l'vn des antecedans I K, eſt à l'vn des conſequens K L, ou leurs egaux B F à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, iuſques à ce que le tout compoſé ſoit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raiſon double, la ſomme deſquels & de l'vnité ſoit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D faſſe F G: Ie dis que le produict F G eſt nombre parfaict.

Vnité.
A..2
B....4
C.....8
D.....16
E31
H31 M31 I
K124
L248
F31 N465 G
O-- P--

Car ayant pris H I double de E; K double de H I; & L double de K, & ainſi de ſuitte tant qu'il y aura de nombres propoſez: iceux nombres E, HI, K, L, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A, B, C, D; & partant en raiſon egale, A ſera à D comme E à L; & par la 19. p. 7. le produict de A multiplié par L, ſera egal au produict de D par E, ſçauoir F G: mais A eſtant binaire, F G ſera double de L: ainſi E, H I, K, L, F G, ſeront continuellement proportionnaux en raiſon double. Maintenant de H I ſecond ſoit retranché H M egal à E premier; &

de F G dernier, soit retranché F N, aussi egal à E premier: par la prec. prop. comme M I est egal à E, (d'autant que HI estoit double de E) ainsi N G sera egal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera egal à l'vnité & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que F G a esté faict de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG; & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 1r. p. 9, mesurent D, mesureront le mesme F G. Derechef puis que L mesure F G; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double: mesureront le mesme F G: ainsi l'vnité & tous les nombres, A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy F G, lequel ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux cy, comme nous monstrerons incontinent: & partant par la 22. def. du 7. il sera nombre parfaict, estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Que si on pense que F G puisse estre mesuré par quelque autre nombre que les susdits; que O le mesure, s'il est possible, selon P: donc O multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produict de E en D. Donc vn mesme nombre est faict de E premier par D 4e, & de P second en O 3e; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionnaux depuis l'vnité, & que A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D: & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier par la 31. p. 7. E & P seront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raison par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'vn d'iceux A, B, C. Soit donc le mesme que B: & d'autant que B, C, D, & E, HI, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produict de B par K, sera egal au produict de D en E. Mais le produict de D en E est egal à celuy de P en O. Donc vn mesme nombre sera faict de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P sera à B, ainsi K à O. Mais P estoit le mesme que B: Donc aussi K sera le mesme que O: Ce qui est absurde, car O a esté posé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui mesurent F G, & lequel ils composent. Iceluy est donc nombre parfaict. Parquoy si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il appert de ce theor. que pour trouuer des nombres parfaicts, & leurs parties aliquottes, il faut poser d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'vnité, puis adiouster tous ces nombres la ensemble, & si la somme d'iceux est nombre premier, icelle estant multipliée par le dernier nombre, le produict sera nombre parfaict. Mais si la susdicte somme n'est nombre premier, il faudra poursuiure la pos-

tion des nombres doubles iusques a ce que ladicte somme de tous les nombres posez vienne a estre nombre premier, laquelle estant, comme dict est cy-dessus, multipliee par le dernier des nombres doubles sera procreé vn nombre parfaict. Et si on prend autant de nombres continuellement doubles du susdict nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura posé depuis l'vnité, (icelle exclusé) tous ces nombres auec ladicte vnité, seront les parties aliquottes que peut auoir le nombre parfaict trouué. Ce qui est euident par la demonstration de cette prop. & neantmoins nous ioindrons encore icy quelques exemples. Ayant posé 1 & 2, leur somme 3 est nombre premier, lequel estant multiplié par 2, produict 6, nombre parfaict, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, font ensemble 7, nombre premier: parquoy iceluy estant multiplié par le dernier nombre 4, le produict 28 est nombre parfaict, & les parties aliquottes d'iceluy sont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la somme de ces nombres 1, 2, 4, 8, sçauoir 15, n'est pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme 31, est vn nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produict le nombre parfaict 496, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neufiesme Element.

ADVERTISSEMENT.

D'Autant que les doctes Commandin, Steuin, & Dibuadius, ont estimé que le 10. liure d'Euclide, seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible, y ioignant les nombres, ie les ay adiouttez aux endroits plus difficiles & obscurs, me seruant quelquefois du trauail des susdicts autheurs. Et de plus, voyant que chacun n'entend pas les operations des nombres radicaux & sourds, lesquelles neantmoins sont necessaires pour l'intelligence de ces applications de nombres, i'ay adiousté icy vn sommaire & abbregé de l'Algebre, auquel sont enseignés non seulement les Algorithmes, & autres operations de nombres radicaux & sourds, mais aussi toutes les autres reigles & operations Algebraiques. Si quelqu'vn en desire voir les demonstrations, il les trouuera au second traicté de nostre Collection Mathematique.

SOMMAIRE DE L'ALGEBRE.

Que c'est qu'Algebre, qui en est l'inuenteur, de quelles figures & caracteres on se sert en icelle, & leur signification.

CHAPITRE I.

ALGEBRE est vne Arithmetique de nombres figurez: ou bien parlant plus intelligiblement, c'est vne science par laquelle on peut rendre manifesté & cogneuë en nombre vne quantité incogneuë.

Quant à l'inuenteur de cette science, il est incertain: car les vns l'attribuent à Gebet Arabe; les autres à vn Mahomet fils de Moyse Arabe: & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle science, outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a plusieurs autres figures & caracteres, dont on se sert en ceste science, lesquels sont figurez, & nommez diuersement par les autheurs qui ont escrit d'icelle science: mais entre ceste diuersité de caracteres, nous auons choisi les suiuans, les iugeant plus propres & aisez à representer ce qu'ils signifient qu'aucuns autres.

N. ℞. *q*. *c*. *qq*. *ß*. *qc*. *bß*. *qqq*. *cc*. *qß*. *cß*. *qqc*. *dß*. *qbß*. &c.

Le premier caractere N, a l'appellation du nombre absolu & simple: tellement que le nombre auquel ledit caractere sera apposé, est absolu & simple: comme 4 N, ne signifie autre chose que 4 vnitez simples; toutesfois ce caractere N defaut le plus souuent aux nombres simples; c'est pourquoy les nombres ausquels est apposé ledit caractere N, ou bien ausquels il n'y a aucun signe, doiuent estre pris pour simples & absolus.

Le second caractere ℞, s'appelle racine: tellement que le nombre auquel est apposé ledit caractere, sera denommé par racine, comme 7 ℞, signifient 7 racines.

Le troisiesme caractere *q*, represente quarré; tellement que 5 *q*, signifient cinq quarrez.

Le quatriesme caractere *c*, signifie cube; comme 7 *c*, signifient sept cubes.

Le cinquiesme caractere *qq*, signifient quarré de quarré, comme 8 *qq*, s'appellent huict quarrez de quarré.

Le sixiesme *ß*, denotte sursolide; tellement que 4 *ß*, signifient quatre sursolides.

Le septiesme caractere *qc*, denotte quarré de cube, comme 7 *qc*, signifient sept quarrez de cube.

Le huictiesme *bß*, s'appelle second sursolide; tellement que 4 *bß*, signifient quatre second sursolide.

Le neufieſme caractere *qqq*, denotte quarré quarré de quarré: comme 3 *qqq*, ſignifient trois quarrés de quarré de quarré.

Le dixieſme *cc*, ſignifie cube de cube; tellement que 8 *cc*, ſignifient huict cubes de cube. Et ainſi faut-il entendre des autres caracteres en l'ordre cy deſſus, tous leſquels ſont appellez ſignes ou caracteres coſſiques.

Il y a encore ce caractere $\sqrt{}$, par lequel ſont nottez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou ſourds, dont ſera parlé cy apres: comme auſſi de quelques autres ſignes ou caracteres.

Des nombres coſſiques, ou denommez.

CHAP. II.

LEs nombres vſitez en l'Algebre ſont de trois genres: Ceux du premier, ſont nommez nombres coſſiques, ou denommez: ceux du ſecond, ſont appellez nombres radicaux, ou irrationnaux: & les troiſieſmes ſont nommez nombres radicaux coſſiques. Quant aux nombres coſſiques, ou denommez, ce ſont tous nombres de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'vnité: pour l'intelligence deſquels doiuent eſtre diligemment conſiderées les deux progreſſions ſuiuantes, au milieu deſquelles ſont poſez les caracteres coſſiques cy-deſſus declarez.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
N.	℞.	*q.*	*c.*	*qq.*	*ß.*	*qc.*	*bß.*	*qqq.*	*cc.*	*qß.*	*cß.*	*qqc.*	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	&c.

Le premier ordre eſt la progreſſion naturelle des nombres commençant à 0, leſquels s'appellent expoſans, tant des ſignes coſſiques deſcrits au deſſous, que des termes de la progreſſion Geometrique commençant à l'vnité: tellement que le premier terme de ladite progreſſion naturelle, qui eſt 0, au-deſſous duquel eſt N & 1, eſt expoſant du nombre ſimple & abſolu: Le ſecond terme 1, au deſſous duquel eſt ℞ & 2, monſtre le ſecond terme de la progreſſion Geometrique, eſtre la premiere denomination és nombres coſſiques, & s'appelle racine: Le tiers terme 2, expoſe que le tiers nombre de la progreſſion Geometr. eſt la ſeconde denomination, & s'appelle quarré: ainſi pareillement 6, demonſtre la ſixieſme denomination eſtre le nombre quarré de cube, & ainſi des autres.

Puis apres, les meſmes nombres expoſans de la progreſſion naturelle des nombres, enſeignent combien il y a de raiſons entre chacun nombre de la progr. Geometr. & l'vnité, comme 1, qui eſt au-deſſus de ℞ & 2, ſignifie qu'entre 2, ou bien la racine de la progr. Geometr. & l'vnité, il y a la ſeule raiſon de 2 à 1: & 2, qui eſt au deſſus de *q* & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré & l'vnité, doiuent eſtre 2 raiſons, comme 4 à 2, & 2 à 1: de meſme 3, qui eſt au deſſus de *c* & 8, monſtre qu'entre le cube, ou 8 & l'vnité, ſont les trois raiſons 8 à 4, 4 à 2, & 2 à 1, & ainſi des autres.

D'auantage, chaſque deux nombres expoſans multipliez entr'eux, produiſent l'expoſant du caractere coſſique qui ſera compoſé des caracteres deſdits

deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 fait 6, exposant du caractere *qc*. qui est composé de *q* & de *c*. De mesme, 4 estant multiplié par 3 fait 12, exposant du caractere *qqc*, qui est composé de *qq*, & de *c*; & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera (s'il est nombre entier) l'exposant du caractere cossique qui restera, si du caractere du nombre exposant diuisé, est osté le caractere du nombre exposant par lequel est faicte la diuision: comme si 6, exposant du caractere *qc*, est diuisé par 2, exposant du caractere *q*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, qui restera, si du caractere *qc*, exposant de 6, est osté le caractere *q* de l'exposant 2. De mesme, si 12, nombre exposant du caractere *qqc*, est diuisé par 4, exposant du caractere *qq*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, lequel restera, si de *qqc*, est osté *qq*; & ainsi des autres.

Derechef, ceste figure 2, qui est posee sur 4 & *q* enseigne que le quarré, ou bien la 2e. denomination est produite de la multiplication de la racine deux fois posee: car si la racine 2 est posee deux fois, en ceste maniere 2, 2, & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procreé le quarré 4: en la mesme maniere ceste figure 3, qui est posee sur 8 & *c*, signifie que le cube, ou bien la 3e. denomination est produicte de la racine, trois fois posee & multipliee: Car si la racine 2 est posee trois fois, comme icy 2. 2. 2. & soit faict la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict d'iceux par 2, viendra le cube 8; & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que c'est qu'vn nombre second sursolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié; comme 128, est engendré de la multiplic. de ceste racine 2, posee sept fois en ceste maniere 2.2.2.2.2.2.2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié; comme 16 est procreé de la multiplication de la racine 2, quatre fois posee ainsi 2.2.2.2. & ainsi des autres. Mais touſiours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dit racine du nombre produict, comme 2 estant posé six fois en ceste maniere 2.2. 2.2.2.2. & multiplié, faict ce nombre 64, qui est *qc*. partant 2 est dit racine quarree cubique de ce nombre 64; & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produicts les nombres de la progression Geometrique, posez par la multiplication de la racine, comme est cy-dessus dit, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes cossiques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sursolide 1024, est procreé de la racine dix fois posee en ceste maniere 2.2.2.2. 2.2.2.2.2.2. ainsi que monstre son exposant 10: toutesfois pource que son signe cossique *qß* est composé de ces deux signes cossiques *q* & *ß*, les exposans desquels sont 2 & 5, si la mesme racine 2 est deux fois posee en ceste maniere 2, 2, à cause de 2 exposant du signe *q*, & puis soit multipliee, afin que 4 soit produit, & ce produict cinq fois posé en ceste maniere 4.4.4.4.4. (à cause de 5, exposant du signe *ß*,) soit multiplié, sera procreé le mesme nombre 1024.

Par la meſme maniere, ſi la racine 2 eſt poſee cinq fois, à cauſe du ſigne ß, & pareillement multipliée, & le nombre 32 produict, ſoit poſé deux fois, à cauſe du ſigne q, ſera encore procreé le meſme nombre: Car la racine ainſi poſee 2,2,2,2,2, & puis multipliee faict 32: mais ce nombre cy 32 poſé deux fois ainſi 32,32, & multiplié procree 1024. Le meſme doit eſtre dit des autres dont, les ſignes coſſiques ſont compoſez de pluſieurs ſignes coſſiques.

Pareillement és ſuperieures progreſſions, eſt bien conſiderable que l'addition des nombres de la progreſſion Arithmetique reſpond à la multiplication des nombres de la progreſſion Geometrique, & la ſubſtraction à la diuiſion. Car pour exemple, ainſi que 2 & 5. (qui ſont expoſans de q & ß.) adiouſtez enſemble font 7, ainſi auſſi leurs correſpondans 4 & 32, eſtans multipliez entre eux produiſent 128, c'eſt à dire bß, l'expoſant duquel eſt 7. Item ainſi que 3 & 9. adiouſtez enſemble font 12, ainſi auſſi c & cc, c'eſt à ſçauoir 8 & 512, les expoſans deſquels ſont 3 & 9, multipliez entr'eux produiſent 4096, c'eſt à dire qqc, duquel l'expoſant eſt 12: & ainſi des autres.

Derechef tout ainſi qu'en ſouſtrayant 5 de 7 reſte 2, ainſi en diuiſant bß, c'eſt à ſçauoir 128, duquel 7 eſt expoſant, par ß, c'eſt à dire par 32, duquel l'expoſant eſt 5, prouient 4, c'eſt à ſçauoir q, duquel l'expoſant eſt 2: Semblablement, ainſi qu'en ſouſtrayant 3 de 12 reſtent 9, ainſi auſſi en diuiſant qqc, c'eſt à dire 4096, duquel l'expoſant eſt 12. par c; c'eſt à dire par 8, duquel l'expoſant eſt 3, prouient c; c'eſt à ſçauoir 512, duquel l'expoſant eſt 9, & ainſi des autres.

Or ce qui a eſté dit iuſques à preſent de la progreſſion Geometrique en raiſon double qui commence à l'vnité, le meſme doit eſtre entendu en quelqu'autre progreſſion Geometrique que ce ſoit, le commencement de laquelle eſt l'vnité.

Reſte à monſtrer par quelle raiſon tous les nombres propoſez de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'vnité, doiuent eſtre denommez, ou (ce qui eſt le meſme) quels ſignes coſſiques doiuent eſtre attribuez & inſcrits auſdits nombres: ce que nous monſtrerons facilement, ſi premierement nous denommons les nombres, deſquels les expoſans ſont nombres premiers; de laquelle ſorte ſont les ſuiuans, auec leurs caracteres coſſiques.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. &c.
q. c. ß. bß. cß. dß. eß. fß. gß. hß. iß. kß. lß. mß. nß. oß. pß. &c.

Or les lettres de l'alphabet apoſees aux caracteres de ß ſont au lieu de chiffres, comme bß ſignifie 2ß; cß, cß; dß, 4ß, &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confuſion.

Sçachant donc ainſi que deſſus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres coſſiques, deſquels les expoſans ne ſont nombres premiers, ains compoſez, en reſoluant l'expoſant du nombre compoſé, dont la denomination & caractere eſt deſiree en ſes parties aliquottes incompoſees, leſquelles eſtans multipliees par ordre entr'elles, conſtituent & produiſent iceluy: ce que vous ferez en ceſte maniere.

Diuisez premierement le nombre composé donné par le moindre nombre premier, par lequel il se peut diuiser, semblablement le quotient, s'il est nombre composé; & derechef soit diuisé ce quotient par le moindre nombre, & ainsi consequemment soit faicte continuellement la diuision, iusques à ce que le quotient soit nombre premier, c'est à sçauoir n'ayant aucune partie aliquotte; & tous les diuiseurs, ensemble le dernier quotient, seront parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordres entr'elles produiront le nombre composé donné, & les caracteres de toutes lesdictes parties aliquottes ioincts ensemble, feront le caractere dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouuer le charactere de ce nombre composé 24, vous diuiserez iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiserez encore derechef par 2, & viendra 3, au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incomposees de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3, dont les caracteres sont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre composé 24 sera *qqqc.* Et c'est exposant 30 (duquel les parties incomposees sont 2, 3, 5,) sera ce signe *qcß*, & ainsi des autres.

On fera encore la mesme chose, prenant deux quelconques nombres qui multipliés entr'eux, produisent le nombre exposant proposé: Car les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4, desquels les signes cossiques sont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cosique sera *qqc.*

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant à chasque caractere incomposé son exposant; puis multipliant iceux exposans ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons auoir l'exposant de *qqc.* nous rendrons à chasque caractere son exposant particulier, c'est à sçauoir, 2, 2, 3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe cossiques *qqc.* & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres cossiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres cossiques est facile, les choses cy-deuant dictes estans bien entendues: Car quand ils sont posez seuls, comme 5 ℞, ou 8 *q.* ou 20 *c.* &c. ils s'expriment ainsi, 5 racines, ou 8 quarrez, ou 20 cubes, &c; mais quand ils sont proposez conioincts entr'eux par ce signe + au milieu, ou par celuy-cy —; comme 5 ℞ + 8 *q*; ou 8 *q* — 5 ℞; ou 20 *c* + 8 *q* — 5; lesquels deux signes + & — ont leur signification contraire: car cestuy-cy +, est dict signe d'adiouster, & signifie plus; mais celuy-cy —, est appellé signe de soustraire, & denote moins; & les nombres ausquels est interposé le signe +, sont dits composez: mais ceux ausquels interuient le signe —, sont nommez diminuez: & finablement ceux ausquels l'vn & l'autre signe est interposé, sont appellez mixtes: jaçoit que tous pourroient estre dits composez;

Partant

Partant donc ce composé 5ℛ+8q. s'exprime 5 racines plus 8 quarrez; mais ce diminué 8q—5ℛ; 8 quarrez moins 5 racines: & ce mixte-cy 20c+8q—5, 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 vnitez; car comme il a esté dit, le nombre qui n'a point de caractere cossique apres soy, signifie vn nombre absolu composé d'vnitez.

Or ces signes + & — sont tousiours referez aux nombres qui les suiuent, & le nombre qui precede n'est à l'vn n'y à l'autre desdits signes. Or le sens des nombres composez, diminuez, ou mixtes est facile: car quand nous disons 5ℛ+8q, nous entendons 5 racines ensemble auec 8 quarrez, c'est à dire 42 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4: ainsi aussi quand nous disons 8q—5ℛ, nous entendons que de 8 quarrez, sont ostez 5 racines; c'est à dire que le nombre proposé est 22 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4; & le mesme faut il dire des autres.

De l'addition, & soustraction des nombres cossiques.

CHAP. IV.

QVand il faut adiouster vn nombre cossique à vn nombre cossique d'autre denomination ou caractere, l'addition se fait mettant ce signe + au milieu, & vient vn nombre composé: comme ces deux nombres 6ℛ & 8, adioustez ensemble font 6ℛ + 8: de mesme 6ℛ & 8c, font 6ℛ + 8c. &c.

Mais quand il faut adiouster vn nombre cossique à vn autre nombre cossique de mesme appellation ou caractere, les nombres se doiuent adiouster, & à la somme apposer le mesme caractere cossique: comme ces nombres 4q & 9q adioustez ensemble, font 13q, de mesme 5ℛ & 4ℛ, font 9ℛ, &c.

Par mesme raison, quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn nombre cossique d'autre denomination, la soustraction se fait mettant ce signe — au milieu, & fait vn nombre diminué: comme pour exemple, ce nombre 6ℛ osté de 8q, reste 8q—6ℛ; de mesme 12 de 6ℛ, restent 6ℛ—12. &c.

Mais quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn autre nombre cossique de mesme caractere, on doit soustraire le nombre du nombre, & au reste apposer le mesme caractere: comme 4ℛ de 9ℛ, restent 5ℛ: & 9c de 20c, restent 11c.

Mais quand il faut adiouster des nombres cossiques composez, diminuez, & mixtes, ou oster l vn de l'autre, il les faut poser l'vn au dessous de l'autre, tellement que les nombres de mesme appellation se respondent entr'eux. Que si en l'vn ou l'autre d'iceux n'est trouué vn nombre respondant à quelqu'vn, au lieu de sa figure sera posé o auec le signe +, & estans ainsi constituez, seront adioustez les nombres de mesme appellation, ou ostez l'vn de l'autre, & les sommes, ou nombres restez, souscrits en leurs propres lieux, auec les mesmes signes + ou —, qui seront trouuez és nombres adioustez, ou soustraits.

Exemples de l'addition.

℞.	N.
6	+ 8.
7	+ 10.
13	+ 18.

q.	℞.	N.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.
10	+ 17	— 13.

c.	N.	q.
7	+ 8	— 3
4	+ 11	— 5
11	+ 19	— 8

c.	q.	℞.	N.
4	+ 11.	+ 0	— 6.
3	+ 0	+ 8	— 4.
7	+ 11	+ 8	— 10.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4.
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0.
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4.

Exemples de la ſouſtraction.

e.	q.	℞.	N.
7	+ 11	+ 8	— 10.
3	+ 0	+ 8	— 4.
4	+ 11	+ 0	— 6.

c.	N.	q.
11	+ 19	— 8.
4	+ 11	— 5.
7	+ 8	— 3.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4.
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0.

q.	℞.	N.
10	+ 17	— 13.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.

Quand il reſte + 0, ou — 0, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple, où il reſte 4c + 11q + 0℞ — 6N, ſera ſeulement 4c + 11q — 6.

Que ſi en l'addition ou ſouſtraction, l'vn des nombres auoit le ſigne +, & l'autre —, il faudroit changer d'eſpece : c'eſt à dire qu'en l'addition, il faut ſouſtraire le moindre du plus grand, & au nombre reſtant donner le ſigne du plus grand nombre duquel a eſté faicte la ſouſtraction.

Exemples.

q.	℞.
6	+ 8.
2	— 10.
8	— 2.

qc.	ß.	qq.	c.	℞.	N.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.

Mais s'il falloit adiouſter ces deux nombres 12c + 6q — 8℞ + 7, & 12℞ — 5c — 3q — 9, il les faudroit poſer comme enſuit.

c.	q:	℞.	N.
+12	+6	−8	+7.
−5	−3	+12	−9.
7	+3	+4	−2.

Mais en la ſouſtraction, il faut adiouſter les nombres enſemble, & donner à la ſomme le ſigne du nombre ſuperieur, duquel doit eſtre faite la ſouſtraction.

Exemples.

q.	℞.
8	−2.
6	+8.
2	−10.

qc.	ß.	qq.	c.	℞.	N.
14	+5	−3	−11	−4	+8.
7	+0	+8	+0	+4	+8.
7	+5	−11	−11	−0	+0.

Que s'il aduenoit qu'aux deux nombres de la ſouſtraction fuſſent meſme ſigne, & que le nombre à ſouſtraire fuſt plus grand que celuy duquel il faut ſouſtraire, il faudroit oſter le moindre nombre du plus grand, & au reſte donner le ſigne contraire, comme il appert és exemples ſuiuans.

q.	℞.
6	+8.
2	+10.
4	−2.

q.	℞.	N.
9	+4	−5.
4	+7	−8.
5	−3	+3.

c	q.	N.
6	+5	+3.
7	−9	+10.
−1	+4	−7.

Et d'autant que le ſigne − n'eſt pas bien diſpoſé au premier nombre, le reſte du dernier exemple doit eſtre poſé ainſi $4q - 1c - 7$.

Or tous les preceptes de l'addition & ſouſtraction enſeignez cy deſſus, au regard des ſignes + & −, peuuent eſtre retenus en memoire par les deux reigles ſuiuantes.

1 *A meſmes ſignes on doit poſer le meſme ſigne, ſinon en la ſouſtraction, quand les nombres ſont poſez à rebours: car alors le ſuperieur eſt ſouſtraict de l'inferieur, & de + eſt fait −: mais de − eſt fait +.*

2 *Les ſignes diuers changent l'eſpece de l'operation: & en l'addition eſt poſé le ſigne du plus grand nombre: mais en la ſouſtraction eſt poſé le ſigne du nombre ſuperieur.*

Quant à la preune de l'addition & ſouſtraction, elle ſe fait en deux manieres: Pour la premiere, l'addition preuue la ſouſtraction, & la ſouſtraction l'addition, tout ainſi qu'on fait és nombres abſolus.

Exemples de la preuue des trois dernieres additions & ſouſtractions.

q.	℞.
8	— 2.
2	—10.
6	+ 8.

qc.	ß.	qq.	c.	℞.	N.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0.
7	+ 0 +	8	+ 0	— 4	+ 8.

c.	q.	℞.	N.
7	+ 3	+ 4	— 2.
— 5	— 3	+ 12	— 9.
12	+ 6	— 8	+ 7.

Preuue de la ſouſtraction.

c.	℞.
4	— 2.
2	+10.
6	+ 8.

q.	℞.	N.
5	— 3	+ 3.
4	+ 7	— 8.
9	+ 4	— 5.

c.	q.	N.
— 1	+ 4	— 7.
+ 7	— 9	+10.
6	— 5	+ 3.

Pour faire autrement ladite preuue, il faut conſtruire vne table auec quelques progreſſions Geometriques, commençant à l'vnité, comme il appert cy-deſſous.

N	℞	q.	c.	qq.	ß.	qc.	bß.	qqq.	cc.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

Par apres, il faut reſoudre les nombres coſſiques à adiouſter ſelon aucunes d'icelle progreſſions en nombres abſolus, puis les adiouſter enſemble, ou ſouſtraire l'vn de l'autre, ſelon les ſignes + ou —, & puis apres ſoient ſemblablement reſouls les nombres coſſiques de la ſomme recueillie; & ſi l'addition a eſté bien faite, leſdits nombres reſouls de la ſomme recueillie ſeront égaux aux nombres reſouls propoſez à adiouſter; comme pour exemple, nous auons trouué cy deuant que 6*q* + 8℞ adiouſtez auec 2*q* — 10℞ font 8*q* — 2℞: pour en faire donc la preuue, nous reſoudrons en nombres abſolus les deux nombres à adiouſter, ſçauoir eſt 6*q* + 8℞, & 2*q* — 10℞; & prenant la reſolution en la progreſſion dont la racine eſt 2, 6*q* font 24, & 8℞ font 16, leſquels 24 & 16 ioincts enſemble, à cauſe du ſigne + font 40: de meſme 2*q* font 8, qui adiouſtez à 40 (car le ſigne + eſt touſiours entendu eſtre au nombre qui n'a nul ſigne appoſé) font 48, & 10℞ font 20, qui ſouſtraits de 48, à cauſe du ſigne —, reſte pour la ſomme de l'addition 28: & reſoluant 8*q* — 2℞, qui eſt la ſomme recueillie de l'addition, viendront auſſi 28: & partant l'addition a eſté bien faite.

Quant à la preuue de la ſouſtraction, elle ſe faict en la meſme maniere : car les nombres coſſiques d'icelle eſtans reduits en nombres abſolus, & les nombres à ſouſtraire eſtans adiouſtez aux reſtans, doiuent eſtre eſgaux aux nombres dont la ſouſtraction a eſté faite : comme pour exemple, nous auons cy-deuant trouué que $7c-9q+10$ N, ſouſtraits de $6c-5q+3$ N, laiſſent $4q-1c-7$ N : donc $7c-9q+10$ N, reſouls en nombres abſolus ſelon la progreſſion dont la racine eſt 3, font 118; & $4q-1c-7$, font 2, qui adiouſtez à 118, font 120; & $6c-5q+3$ N font auſſi 120 : & partant la ſouſtraction a eſté bien faite.

De la multiplication & diuiſion des nombres coſſiques.

CHAP. V.

QVand vn nombre coſſique eſt multiplié, ou diuiſé par vn nombre abſolu, le produict a meſme denomination coſſique ; comme pour exemple 4 ℞ ou 8 q eſtans multipliez par 3, prouiennent 12 ℞, ou 24 q, &c. Item 12 q, ou 24 ℞ eſtans diuiſez par 4, viennent 3 q, ou 6 ℞.

Mais quand le nombre coſſique eſt multiplié, ou diuiſé par vn nombre coſſique, le produict eſt d'autre denomination, ſçauoir eſt de celle qui ſe faict des expoſans ioincts enſemble, quant à la multiplication : comme pour exemple 4 ℞ multipliez par 7 ℞ font 28 q, car l'vnité qui eſt expoſant de ce caractere coſſique ℞, eſtant adiouſtee à l'vnité, faict 2, expoſant de ce caractere q. Pareillement 4 ℞ multipliez par 5 q font 20 c : car 1 eſt expoſant de ℞, & 2 de q, leſquels adiouſtez enſemble, ſont 3 expoſans de c. Et quant à la diuiſion, le quotient à la denomination du nombre reſtant, l'expoſant du diuiſeur eſtant oſté de l'expoſant du diuiſé : Comme pour exemple, 36 qc, diuiſé par 4 qq, le quotient eſt 9 q : car 4 expoſant de qq eſtant oſté de 6 expoſant de qc, reſte 2 expoſant de q; ainſi auſsi 18 qq eſtans diuiſez par 3 c, vient 6 ℞; & 8 q par 8 q, vient 1 N, &c.

Quand le nombre coſsique compoſé, ou diminué, eſt multiplié ou diuiſé par vn nombre abſolu ou coſsique, tant ſimple que compoſé ou diminué, outre ce qui eſt dit cy deſſus, il faut ſur tout auoir eſgard aux ſignes + & — : Car quand les nombres ſe multiplians ou diuiſans ont vn meſme ſigne, il faut apposer au produict le ſigne + : mais quand l'vn d'iceux eſt +, & l'autre —, il faut donner au produict le ſigne — : ce qui eſt aiſé à retenir en memoire par la regle ſuiuante.

Aux ſignes ſemblables faut poſer + ; *mais aux diſſemblables faut poſer* —.

Exemples de la multiplication.

$7q-4$ ℞.	$7q+4$ ℞	$7q-4$ ℞.
9.	9 N.	9 ℞.
$63q-36$ ℞.	$63q+36$ ℞.	$63c-36q$.

$8q+9.$
$8q+9.$
$72q+81.$
$64qq+72q$
$64qq+144q+81.$

$8q-9.$
$8q-9.$
$-72q+81.$
$64qq-72q$
$64qq-144q+81$

$6q+8\mathcal{R}-6N.$
$2q-4N.$
$-24q-32\mathcal{R}+24N.$
$12qq+16c-12q.$
$12qq+16c-36q-32\mathcal{R}+24N$

$9q+8N-3\mathcal{R}.$
$7c-4qq-8q.$
$-72qq-64q+24c.$
$-36qc-32qq+12\beta.$
$63\beta+56c-21qq.$
$-36qc+75\beta-125qq+80c-64q.$

Et d'autant que comme il a desia esté dit, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit de ce dernier exemple, ainsi qu'il ensuit,
$75\beta-36qc-125qq+80c-64q.$

Exemples de la diuision.

Diuiser $\mathcal{Z}\,\phi\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}\,\mathcal{4}$ par $\mathcal{4}$ $\mathcal{4}$ [$9\mathcal{R}+6.$

Item $\mathcal{4}\,\mathcal{8}\,c+\mathcal{Z}\,\phi\,q+\mathcal{Z}\,\eta\,\mathcal{R}$ par $\vartheta\,\mathcal{R}$ $\vartheta\,\mathcal{R}$ $\vartheta\,\mathcal{R}$ [$5q+4\mathcal{R}+3N.$

Item $\overset{4}{\mathcal{4}}\,5c+\mathcal{Z}\,\overset{3}{\phi}\,q-\mathcal{Z}\,\eta\,\mathcal{R}$ par $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ [$5\frac{5}{8}q+4\frac{1}{2}\mathcal{R}-3\frac{3}{8}N.$

$-\mathcal{4}\,\phi$
diuiser encore $\mathcal{Z}\,\phi\,q-\mathcal{8}\,8\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}\,\mathcal{4}$ par $\mathcal{8}\,\mathcal{R}-\mathcal{Z}\,N.$ $\mathcal{8}\,\mathcal{R}-\mathcal{Z}\,N.$ [$6\mathcal{R}-8N.$

$\mathcal{Z}\,\mathcal{Z}$
Item $\mathcal{Z}\,\mathcal{Z}qq+\mathcal{Z}\,\phi\,c-\mathcal{Z}\,\phi\,q-\mathcal{Z}\,\mathcal{Z}\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}\,\mathcal{4}N$ par $\mathcal{Z}q+\phi\mathcal{R}-\mathcal{4}N$ $\mathcal{Z}q+\phi\,\mathcal{R}-\mathcal{4}N.$ $\mathcal{Z}\,q+\phi\,\mathcal{R}-\mathcal{4}N.$ [$6q+8\mathcal{R}-6N$

$-\mathcal{Z}+\mathcal{Z}$
Diuiser encore $\mathcal{Z}\,c+0\,q+\phi\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ par $\mathcal{Z}\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}\,\mathcal{R}+\mathcal{Z}$ [$1q-1\mathcal{R}+1.$

Et conuient notter qu'en toutes diuisions des nombres cossiques, les denominations doiuent estre continuees d'ordre: & partant quand il y a quelque denomination de manque, il faut poser o au lieu d'icelle, comme il appert és deux precedentes exemples; la derniere desquelles i'ay faict en ceste maniere Premierement i'ay posé le diuiseur 1℞ +1 au dessous du diuidande 1c +0q, & trouue que 1℞ est en 1c; 1q que ie pose au quotient, & multiplie ledit 1q par mon diuiseur, & vient, 1c +1q, que i'oste de 1c +0q, & reste de tout le nombre à diuiser —1q +0℞ +1: puis apres i'aduance mon diuiseur soubs —1q +0℞, & trouue qu'il y est —1℞, que ie pose au quotient, & multiplie ladite 1℞ par ledit diuiseur, & vient —1q—1℞, que ie soustraits de —1q +0℞; & reste de tout le nombre à diuiser 1℞ +1, sous lequel ie pose le diuiseur, & trouue qu'il y est 1 N precisément.

Or quand le diuiseur est nombre composé ou diminué, & qu'il ne peut diuiser precisément, alors il faut seulement interposer vne ligne entre-deux, ainsi qu'és fractions, comme és deux exemples suiuans.

8ß diuisez par 2q +4 N. 8q — 9℞ diuisez par 4℞ +3 N.

Les quotiens sont

$\frac{8ß}{2q+4N.}$ $\frac{8q-9℞.}{4℞+3N.}$

Il faut faire en la mesme maniere, quand vn nombre cossique, simple ou composé doit estre diuisé par vn nombre cossique simple de plus grande denomination: comme 8q diuisez par 2qc constituent ceste fraction $\frac{8q}{2qc}$. De mesme 9q +4 estans diuisez par 3c, font $\frac{9q+4}{3c}$ &c.

Reste à enseigner à faire la preuue de la multiplication & diuision, laquelle se faict en deux manieres. Premierement la diuision preuue la multiplication; & la diuision se preuue par la multiplication, tout ainsi qu'en l'Arithmetique vulgaire.

L'autre sorte de preuue se faict par la resolution des nombres cossiques, selon quelque racine des progressions Geometriques contenuës au chapitre precedent. Car les nombres cossiques resous, estans multipliez entr'eux, doiuent produire vn mesme nombre que le produict des nombres cossiques aussi resoult selon la mesme racine: & le nombre cossique qu'il faut diuiser resoult, doit produire autant diuisé par le diuiseur resoult, que le quotient aussi resoult. Comme pour exemple, nous auons trouué cy-deuant que 6q +8℞ —6 N multipliez par 2q—4 N, produisent 12qq +16c—36q—32℞ +24 N. Pour donc en faire la preuue, nous resoudrons les deux nombres cossiques en nombres absolus, & viendront (selon la progresion dont 2 est racine) 34, & 4, qui multipliez entr'eux produisent 136: mais la resolution du produict 12qq +16c—36q—32℞ +24 N, est aussi 136: & partant la multiplication a esté bien faicte. Nous auons aussi trouué que 1c +1, diuisez par 1℞ +1, Le quotient est 1q—1℞ +1, lequel quotient donne, par la resolution de la progresion, dont la racine est 2: mais les deux nombres cossiques

reſolus par la meſme progreſsion, ſont 9 & 3; & 3 diuiſant 9, le quotient eſt auſsi 3: & partant la diuiſion a eſté bien faite.

Des fractions des nombres coſsiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions coſsiques, les operations ſont preſque ſemblables qu'és fractions vulgaires: il n'y a qu'à adiouſter ce qui concerne les caracteres coſsiques, & les ſignes + & —. Et premierement quant à la numeration, ceſte fraction $\frac{3}{8\mathcal{R}}$ ſignifie 3 vnitez eſtre diuiſees par $8\mathcal{R}$; & $\frac{7q}{9}$ denote 7 quarrez eſtre diuiſez par 9 vnitez: Item $\frac{9qq+8q}{6c}$ ſignifie que ce nombre $9qq+8q$, eſt diuiſé par $6c$, &c.

Quant à l'abbreuiation elle ſe faict en deux manieres: Car ou les nombres ſeront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, ſans toucher aux caracteres coſsiques; ou bien ſeront auſsi abbreuiez leſdits caracteres coſsiques: comme ceſte fraction $\frac{15}{5\mathcal{R}}$, quant aux nombres, elle ſera reduicte à ceſte-cy $\frac{3}{1\mathcal{R}}$: car la plus grande commune meſure des nombres d'icelle fraction eſt 5. Semblablement ceſte autre fraction $\frac{9q+36}{81}$ ſera reduite à ceſte-cy $\frac{1q+4}{9}$ pour ce que la plus grande commune meſure eſt 9: Item $\frac{35\mathcal{R}+28}{7q+14}$ ſera reduite à $\frac{5\mathcal{R}+4}{1q+2}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{8\mathcal{R}+3q}$ ſera reduite à $\frac{6q-3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}+1q}$, &c.

Et quant à l'abbreuiation des caracteres coſsiques, elle eſt faite ſouſtrayant l'expoſant du moindre caractere, des expoſans des autres caracteres: car ſi aux nombres reſtans ſont appoſez les propres caracteres, l'abbreuiation ſera acheuee, quant aux caracteres. Comme ceſte fraction $\frac{8q}{2qc}$, quant aux caracteres, ſera reduitte en celle-cy $\frac{8}{2qq}$; car l'expoſant du moindre caractere q, eſt 2, qui oſté de 6, expoſant de l'autre caractere qc, reſte le nombre abſolu 8 au numerateur, & 4 pour l'expoſant du denominateur, qui partant ſera qq: puis apres quant aux nombres, elle ſera reduitte à ceſte-cy $\frac{4}{1qq}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{6\mathcal{R}+3q}$ quant aux nombres & caracteres, ſera reduitte à $\frac{6\mathcal{R}-3}{2+1\mathcal{R}}$, &c.

Quant à la reduction des fractions coſsiques à vn meſme denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux, tout ainſi qu'és fractions vulgaires: comme ces fractions $\frac{1\mathcal{R}}{4q}$ & $\frac{4c}{5qc}$ eſtans reduictes en meſme denomination, feront $\frac{15\beta\beta}{100qqq}$ & $\frac{16\beta}{100qqq}$, &c.

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fraction à meſme denomination; il faudra ſuppoſer l'vnité eſtre denominateur du nombre entier, & pourſuiure ainſi que deſſus. Comme 6 & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$, ſeront poſez ainſi $\frac{6}{1}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$; puis eſtans reduictes comme deſſus, elles feront $\frac{42q}{7q}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$: Item $\frac{5q}{1}$ & $\frac{4c}{3q}$ ſeront reduittes à $\frac{15qq}{3q}$ & $\frac{4c}{3q}$, &c.

Mais ſi aux entiers eſt ioincte quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction; ce qui ſe fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction, & adiouſtant au produict le numerateur. Com-

meſi

me si nous voulons reduire $4q + \frac{2\mathcal{R}}{3c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$ à vne mesme denomination, nous multiplierons premierement $4q$ par $1c$, afin que nous ayons ces deux fractions $\frac{4\beta + 2\mathcal{R}}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$, lesquelles nous reduirons à ces deux-cy $\frac{4q\beta + 2qc}{1qqq}$ & $\frac{3\beta}{1qqq}$; & ainsi des autres.

Quant aux autres quatre operations des fractions cossiques, sçauoir est, addition, soustraction, multiplication & diuision, elles ne different à celles que nous auons enseignees és fractions de nostre Arithmetique, sinon à raison des caracteres cossiques, & des signes + & —. Parquoy nous mettrons seulement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Adioustant $\frac{3\mathcal{R}}{5q}$ auec $\frac{7qc}{5q}$, viendront $\frac{3\mathcal{R} + 7qc}{5q}$: car pource que les denominateurs sont semblables, il n'y-a qu'à adiouster les numerateurs entr'eux, & à la somme d'iceux souscrire le mesme denominateur. Item si on adiouste $\frac{3\mathcal{R}}{2\mathcal{N}}$ auec $\frac{4q}{3c}$ viendront pour leur somme $\frac{9qq + 8q}{6c}$, c'est à dire $\frac{9q + 8}{6\mathcal{R}}$: Item $\frac{48}{7q}$ adioustez auec $\frac{48}{12\mathcal{R} - 3q}$ font $\frac{192q + 576\mathcal{R}}{84c - 21qq}$, qui estans reduicts tant au regard des nombres que des signes, font $\frac{64\mathcal{R} + 192}{28q - 7c}$. Item $\frac{9\mathcal{R} + 2q}{36c}$ adioustez auec $\frac{21qq - 8q}{36c}$ font $\frac{21qq - 6q + 9\mathcal{R}}{36c}$, qui reduicts comme dessus font $\frac{7c - 2q + 3}{12q}$: Item $\frac{5q - 1\mathcal{R}}{7c - 2}$ adioustez auec $\frac{3c + 1}{2qq + 4\mathcal{R}}$ font $\frac{31qc - 6\beta + 11c - 12q - 2}{14b\beta + 24qq - 8\mathcal{R}}$.

Exemples de la soustraction.

Ostant $\frac{3\mathcal{N}}{2q}$ de $\frac{5c}{2q}$, resteront $\frac{5c - 3}{2q}$: car d'autant que les denominateurs sont semblables, il n'y-a qu'à soustraire le numerateur 3 du numerateur $5c$, & au reste $5c - 3$, apposer le mesme denominateur: mais si on oste $\frac{3\mathcal{R}}{2\mathcal{N}}$ de $\frac{9qq + 8q}{6c}$ resteront $\frac{16q}{12c}$, c'est à dire $\frac{4\mathcal{N}}{3\mathcal{R}}$: Item $\frac{1}{2q}$ de $\frac{3\mathcal{R}}{4\mathcal{N}}$, resteront $\frac{6c - 4}{8q}$: Item $\frac{2\mathcal{R} - 3}{4\mathcal{N}}$ de $\frac{4}{2\mathcal{R} + 3}$, resteront $\frac{25 - 4q}{8\mathcal{R} + 12}$: Item $\frac{9q + 8\mathcal{R}}{2c - 6\mathcal{N}}$ de $\frac{11c + 16q + 8}{2c - 6\mathcal{N}}$, resteront $\frac{11c + 7q}{2c - 6\mathcal{N}}$.

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4\mathcal{R}}$ par $\frac{1}{2\mathcal{R}}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$ par $\frac{1\mathcal{R}}{4}$, vient $\frac{1\mathcal{R}}{8q}$: Item $\frac{3\mathcal{R}}{4q}$ par $\frac{1q}{2c}$, viendront $\frac{3c}{8\beta}$: Item $\frac{2\mathcal{R}}{3}$ par $1\mathcal{R} - 5$, viendront $\frac{2q - 10\mathcal{R}}{3}$: Item $\frac{3\mathcal{R} + 2}{4q - 1\mathcal{R}}$ par $\frac{2\mathcal{R} - 4}{1q + 3}$ viendront $\frac{6q - 8\mathcal{R} - 8}{4qq - 1c + 12q - 3\mathcal{R}}$: Item $\frac{7q + 8\mathcal{R}}{5c - 11}$ par $\frac{4\mathcal{R}}{5q} - 8\mathcal{N}$, viendront $\frac{32q - 280qq - 292c}{25\beta - 55q}$.

Exemples de la diuision.

Diuisant $\frac{3}{8q}$ par $\frac{1}{2\mathcal{R}}$, viendront $\frac{6\mathcal{R}}{8q}$, ou $\frac{3}{4\mathcal{R}}$: Item $\frac{1\mathcal{R}}{8q}$ par $\frac{1}{4\mathcal{R}}$, viendront $\frac{4q}{8q}$, ou $\frac{1}{2}$: Item, $\frac{3c}{8\beta}$ par $\frac{3\mathcal{R}}{4q}$, viendront $\frac{12\beta}{12qc}$, ou $\frac{1}{2\mathcal{R}}$: Item $\frac{2q - 10\mathcal{R}}{3}$ par $\frac{2\mathcal{R}}{3}$, viendront $1\mathcal{R} - 5$: Item $\frac{6q - 8\mathcal{R} - 3}{4qq - 1c + 12q - 3\mathcal{R}}$ par $\frac{2\mathcal{R} - 4}{1q + 3}$, viendront $\frac{3\mathcal{R} + 2}{4q - 1\mathcal{R}}$.

Quant à la preuue de ces quatres operations, elle se fait en la mesme maniere que celle des entiers.

De la reigle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposée quelque question, soit posé pour le nombre incogneu 1℞, *(on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux, ou trois, ou dauantage pour la commodité de la question proposée) laquelle soit examinée selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduite, s'il en est besoin, puis apres, par le nombre du plus grand caractere cossique soit diuisé l'autre nombre de l'equation: Car ou le quotient sera le nombre qui estoit cherché, sçauoir est la valeur de la racine posée au commencement, ou bien quelque racine du quotient rendra cogneu le nombre cherché. Or le diuiseur demonstrera par son caractere cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.*

Or il appert que ceste regle a quatre parties, dont la premiere est l'inuention d'vne Equation; la seconde, la reduction de l'Equation trouuee; la troisiesme, la diuision d'vn nombre de l'Equation par le nombre du plus grand caractere cossique; & la derniere, l'extraction de quelque racine du quotient de ladite diuision. Mais de ces quatres parties il y en a seulement deux du tout necessaires: sçauoir est la premiere & troisiesme: & quant aux deux autres, il n'en est pas touſiours besoin. Et auant que de traicter particulierement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouuer vn nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Ie pose le nombre incogneu estre 1℞; c'est à dire que ie pose 1 ℞ estre egale au nombre incogneu que nous cherchons. I'examine donc 1 ℞ selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sçauoir est $\frac{1}{3}$ ℞, & $\frac{1}{4}$ ℞, qui font ensemble $\frac{7}{12}$ ℞, que i'oste de 1 ℞, & restent $\frac{5}{12}$ ℞. Maintenant ie ratiocine ainsi: puisque 1 ℞ est posee esgale à tout le nombre incogneu; $\frac{1}{3}$ ℞ sera esgal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ ℞ esgal au quart du mesme; & puisque la tierce & quarte partie du nombre total estant soustraicte, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, c'est à dire $\frac{7}{12}$ ℞ estans ostez de 1 ℞, le nombre restant $\frac{5}{12}$ ℞ estre egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ostees choses egales, les restes sont egaux. Est donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}$ ℞, & ce nombre 10: car equation n'est autre chose qu'vne egalité de valeur entre deux quantitez, ou choses diuersement denommees: & voila quant à la premiere partie de la regle cy-dessus. Et pour le regard de la seconde partie, qui est la reduction, il n'en est besoin en l'equation de nostre exemple: mais nous monstrerons cy-apres, quand & comment l'equation se doit reduire. Et pour le regard de la diuision qui est la troisiesme partie de la reigle; en nostre equation trouuee entre $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 N, le plus grand caractere cossique est ℞ (c'est à dire que ℞ a plus grand exposant que N) parquoy ie diuise ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reste du caractere ℞, & vient au quotient 24, qui est le

nombre cherché. Parquoy la quattrieſme partie de la reigle d'Algebre n'a lieu en noſtre exemple : mais quand, & quelle racine du quotient manifeſtera le nombre incogneu, il ſera enſeigné cy-apres. Maintenant ſi du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, ſçauoir eſt 8 : puis $\frac{1}{4}$, ſçauoir eſt 6: icelles deux parties ſont enſemble 14, qui oſtez des 24, reſte le nombre 10, ainſi qu'il eſtoit requis en la propoſition.

De la reduction d'equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligence de la reduction des equations, eſt à noter, que ſi on adiouſte ou ſouſtraict choſes egales de chaſque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diuiſe par vn meſme nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Comme pour exemple, s'il y-a equation entre 12ℛ, & 72; oſtant 4ℛ de chaſque terme, reſtera encore equation entre 8ℛ, & 72 — 4ℛ: car puis que 12ℛ ſont egales à 72, 1ℛ ſera egale à 6, & partant 8ℛ ſeront egales à 48, & 4ℛ à 24, qui oſtez de 72, reſtera auſſi 48. Item ſi à chaſque terme de l'equation d'entre 8ℛ, & 72—4ℛ, on adiouſte 10, viendra equation entre 8ℛ + 10, & 82—4ℛ. Car il eſt manifeſte que chaſque terme vaut 58. Item s'il y-a equation entre 3ℛ + 12, & 72 — 7ℛ; multipliant chaſque terme par 2, viendra auſſi equation entre 6ℛ + 24, & 144 — 14ℛ: car l'vn & l'aure terme faict 60. Ainſi auſſi ſi nous diuiſons par 6 chaſque terme de ceſte derniere equation, ſera produict equation entre 1ℛ + 4, & 24 — $2\frac{1}{3}$ ℛ: car l'vn & l'autre terme fait 10.

Maintenant quand en la ſolution de quelque queſtion on eſt paruenu à l'equation ; ſi le plus grand caractere coſſique, par le nombre duquel (ſelon la reigle d'Algebre) on doibt diuiſer l'autre terme de l'equation n'eſt poſé ſeul en l'vn & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'eſtant ſeul en l'vn il ne le ſoit en l'autre, alors la diuiſion ne ſe peut faire. Comme pour exemple, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ+12, & 78—2ℛ, la diuiſion ne ſe peut faire, pource qu'en chaſque terme eſt trouué ce caractere ℛ, & ceſtuy-cy N : Semblablement ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ—12, & 42: tu vois que la diuiſion ne ſe peut auſſi faire par 9 nombre du plus grand caractere coſſique ℛ, pource que 9ℛ ne ſont pas poſees ſeules, ains 9ℛ—12.

Ainſi auſſi, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ, & 72—3ℛ: Item entre 1ⓠ—3ℛ, & 108 : Item entre 1ⓠ—48, & 8ℛ : Item entre 108+8ℛ, & 2ⓠ—12ℛ+60, &c. il eſt manifeſte qu'en toutes ces equations la diuiſion ne ſe peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenant ſemblables equations, elles doiuent eſtre reduittes en autres, eſquelles le plus grand caractere coſſique ſoit ſeul en vn terme de l'equation, & ne ſoit repeté en l'autre, & eſquelles auſſi aucun caractere coſſique ne ſoit poſé deux fois. Or ceſte reduction ſe fera ainſi qu'il enſuit.

Si vne particule de l'equation a le ſigne —, il la faut tranſpoſer, c'eſt à dire adiouſter à l'autre terme : comme ſi vne equation eſt trouuee entre 9ℛ

—12, & 42, nous adiousterons 12 à chaque terme, & nous aurons l'equation entre 9℞, & 54 : Item vne equatiou eſtant trouuee entre 9℞ & 72—3℞ ; adiouſtant 3℞ à chaſque terme, nous aurons l'equation entre 12 ℞, & 72 : Item vne equation eſtant trouuee entre 2 ⟨q⟩—3 ℞, & 104; adiouſtant 3 ℞ à chaſque terme, l'equation ſera entre 2 ⟨q⟩, & 3 ℞ + 104 : Item vne equation eſtant entre 5 ⟨q⟩—40, & 10℞ ; adiouſtant 40, nous aurons vne equation entre 5⟨q⟩ & 10℞ + 40. Mais quand vne particule a le ſigne +, il la faut ſouſtraire : comme ſi l'equation eſt trouuée entre 11℞ + 12, & 78, nous ſouſtrairons + 12, & reſtera l'equation entre 11℞, & 66 : Item l'equation eſtant trouuee entre 3 ℞ + 6, & 24; oſtant + 6, reſtera l'equation entre 1℞, & 18 : Item ſi vne equation eſt trouuee entre 5⟨q⟩ + 20, & 100, nous oſterons + 20, & reſtera l'equation entre 5⟨q⟩ & 80 : Item vne equation eſtant entre 3⟨q⟩ + 2℞, & 56 ; oſtant + 2℞, l'equation reſtera entre 3⟨q⟩, & 56—2℞. Que ſi l'vn & l'autre ſigne + & — ſont en vne equation, il faut adiouſter la particule du ſigne —, mais ſouſtraire celle du ſigne + : comme ſi vne equation eſt trouuee entre 9℞ + 12, & 78—2 ℞, nous adiouſterons premierement — 2℞, & l'equation ſera entre 11℞ + 12, & 78 : puis ſouſtrayant d'icelle + 12, reſtera l'equation entre 11℞, & 66 : Item ſi vne equation eſt entre 5⟨q⟩—3℞, & 3⟨q⟩ + 20, nous adiouſterons 3℞, & l'equation ſera entre 5⟨q⟩, & 3⟨q⟩ + 3℞ + 20 : & oſtant de ceſte cy 3⟨q⟩, reſtera l'equation entre 2⟨q⟩, & 3℞ + 20 : Item ſi vne equation eſt trouuee entre 108 + 8℞, & 2⟨q⟩—12℞ + 60 : nous adiouſterons premierement 12℞, & l'equation viendra entre 108 + 20℞, & 2⟨q⟩—60 : & d'icelle eſtans oſtez 60, reſtera l'equation entre 2⟨q⟩, & 20℞ + 48. Que s'il aduient quelque equation, comme entre 6℞—10, & 10℞—34, en laquelle les nombres 10, & 34 ont meſme ſigne —, il faut oſter 10 de chaſque terme, & reſtera l'equation entre 6℞, & 10℞—24 : & d'autant qu'en icelle les nombres 6℞ & 10℞ ont auſſi vn meſme ſigne +, il faut oſter le moindre nombre 6℞ du plus grand 10℞, & reſtera l'equation entre 0℞, & 4℞—24 : & adiouſtant 24 à chaſque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24, & 4℞. Soit derechef equation entre 54 + 4℞, & 1⟨q⟩—6℞ + 30 : Premierement pource que + 4℞, & —6℞ ont ſignes diuers, il faut adiouſter 4 ℞ à 6 ℞, & viendront —10℞, & ſera equation entre 54, & 1⟨q⟩—10℞ + 30 : puis apres, d'autant que 54 & 30 ont vn meſme ſigne, il faut ſouſtraire 30 de 54, & reſtera equation entre 24, & 1⟨q⟩—10℞ : Tiercement ie tranſpoſe —10℞, afin que l'equation ſoit entre 1⟨q⟩, & 10℞ + 24 : & ainſi des autres.

Quant à la reduction des equations qui ſont trouuees en fractions, elle ſe faict la reduiſant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme ſi vne equation eſt trouuee entre $\frac{3℞+12}{5}$ & $\frac{3⟨q⟩-198℞}{3℞}$: multipliant ces fractions en croix, ſçauoir eſt le numerateur de la premiere par le denominateur de la ſeconde, mais le numerateur de la deuxieſme par le denominateur de la premiere, ſera faict equation entre 9⟨q⟩ + 36℞ & 180⟨q⟩—990℞, c'eſt à dire entre 1℞ + 4, & 20℞—110, qui eſtant reduite, comme dict eſt cy-deſſus, l'equation ſera entre 19 ℞, & 114 : Item vne equation eſtant trouuee entre $\frac{4℞+18}{1℞}$, & $\frac{12℞-58}{2}$: eſtant reduite par la multiplication en croix, viendra equation entre 8 ℞ + 36, & 12⟨q⟩—58℞, qui reduite par tranſpoſition ſera entre 66℞ + 36, & 12⟨q⟩.

Que si vne equation est trouuée entre vne fraction, & quelque autre chose: comme entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & vn escu, ou vn degré, ou vne heure, ou vne minute, &c. Il faut poser vne vnité pour ceste chose, ainsi $\frac{1}{1}$, afin que l'equation soit entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & $\frac{1}{1}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 5, & $4+1\mathcal{R}$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres cossiques irrationaux, & vn nombre absolu, nous l'enseignerons à la fin du chapitre 22.

S'il se rencontre aussi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abbreuier les caracteres cossiques: Comme pour exemple, l'equation d'entre $2q$, & $12\mathcal{R}$ sera reduite à l'equation d'entre $2\mathcal{R}$ & 12: Item l'equation d'entre $1qc$, & $1\mathcal{S}+2qq$ sera reduite à l'equation d'entre $1q$, & $1\mathcal{R}+2$, &c. Mais ceste reduction n'est du tout neceſſaire deuant l'extraction des racines des nombres cossiques simples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diuision que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction estant faite, la regle d'Algebre dit que par le nombre du plus grand caractere cossique (laissant iceluy caractere) on diuise l'autre nombre de l'equation: comme si l'equation est trouuée entre $7\mathcal{R}$ & 42; diuisant 42 par 7, nombre du caractere cossique $\mathcal{R}$, viendra au quotient 6, qui sera la valeur d'vne racine: Item vne equation estant trouuée entre $12q$, & $66\mathcal{R}+36$: diuisant $66\mathcal{R}+36$ par 12, le quotient donnera $5\frac{1}{2}\mathcal{R}+3$, pour la valeur d'vn quarré: Item si vne equation est entre $\frac{1}{3}q$, & $6\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$, nous diuiserons $6\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera $18\mathcal{R}+40$, pour la valeur d'vn quarré: Item vne equation estant entre $3qc$, & $9c+120$, nous diuiserons $9c+120$ par 3, & le quotient donnera $3c+40$ pour la valeur d'vn quarré de cube, &c.

De l'extraction des racines dont est faict mention en la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant fait la reduction des caracteres cossiques, si le plus grand caractere cossique est $\mathcal{R}$, le quotient de la diuision mentionnée cy-dessus manifestera le nombre que vaut vne seule racine, comme il a esté dit au chapitre precedent: ou bien toutes & quantesfois qu'vn nombre cossique de grande denomination sera égal à vn nombre cossique de la prochaine moindre denomination; estant diuisé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'vne seule racine, encore que l'abreuiation des caracteres ne soit faite. Comme si $5\mathcal{S}$ sont égaux à $30qq$; 30 estans diuisez par 5, le quotient 6 sera la valeur d'vne seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, estant seul d'vne part

de l'equation, eſt plus grand que racine, & de l'autre part ſoit vn nombre abſolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractere ſignifie: comme ſi le caractere eſt q, il faudra extraire la racine quarree; ſi c, la cubique; ſi qq, la quarree de quarree, &c. laquelle ſera la valleur d'vne ſeule racine. Comme pour exemple, Si vne equation eſt entre $5q$, & 720; ayant fait la diuiſion, il faudra cercher la racine quarree du quotient 144: Item ſi $10c$ ſont egaux à 270, il faudra ayant fait la diuiſion extraire la racine cubique du quotient 27: Semblablement ſi $8qq$ ſont egaux à 128, il faudra trouuer la racine quarree de quarré du quotient. Et afin qu'on ſçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres coſſiques non collateraux ſont egaux entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre n'eſt nombre abſolu, il faut abbreuier les caracteres, afin que l'equation ſe face entre N, & nombre coſſique; comme ſi vne equation eſt entre $10qc$ & $80q$, ſoit reduitte icelle à l'equation d'entre $10c$, & 80: la diuiſion eſtant donc faicte, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8, & ainſi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres abſolus eſt ſuffiſamment enſeignee en noſtre Practique d'Arithmetique; c'eſt pourquoy nous enſeignerons ſeulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres coſſiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'vn nombre coſſique ſimple ſoit priſe la racine d'iceluy nombre, delaiſſant le caractere, l'expoſant duquel ſoit diuiſé par l'expoſant du caractere qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'expoſant du caractere, par lequel ſera denommée la racine cherchee. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $144q$; ayant pris la racine quarree d'iceluy nombre 144, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'expoſant de ce caractere q, par l'expoſant du caractere q, ſçauoir eſt 2 par 2, & viendra 1, qui eſt expoſant du caractere ℞: 12 ℞ eſt donc racine quarree du nombre $144q$. Car ſi ce nombre 12 ℞ eſt multiplié en ſoy, ſera produict le nombre propoſé $144q$.

Derechef, qu'il faille trouuer la racine quarrée de $144qc$; ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'epoſant de ce caractere qc, ſçauoir eſt 6, par l'expoſant de racine quarree, qui eſt 2, & viendra 3, expoſant du caractere c: donc $12c$ eſt racine quarree du nombre $144qc$. Ainſi auſſi la racine cubique de ce nombre $64c$, ſera 4 ℞. Car la racine cubique du nombre 64 eſt 4, & l'expoſant du caractere cube, ſçauoir eſt 3, eſtant diuiſé par 3, produict l'vnité expoſant de ℞. Item la racine quarree de ce nombre $25qq$, ſera $5q$. Et la racine quarree de quarree de ce nombre $16qqq$, ſera $2q$. Semblablement la racine ſurſolide de ce nombre $32qß$, ſera $2q$. Mais la racine quarree de quarree de ce nombre $81qq$, ſera 3℞, &c.

Que ſi vn nombre n'a la racine cherchee, ou que par la diuiſion des expoſans ne ſoit pas produict vn nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſiree. Comme par exemple, ce nombre $16c$, n'a pas de racine quarree ou cubique, car encore que le nombre 16 ait racine quarree, ſçauoir 4, ſi eſt-ce neantmoins qu'icelle racine ne ſe peut prendre à cauſe que diuiſant 3, expoſant du caractere c, par 2 expoſant de la racine quarree, prouient $1\frac{1}{2}$, qui ne correſpond à aucun caractere coſſique. Derechef, encore

que diuisant 3, exposant de ce caractere *c*, par 3, exposant de la racine cubique, prouienne 1, exposant de ce caractere ℞, toutesfois icelle racine cubique ne se peut prendre, parce que le nombre 16 n'est nombre cube, &c.

Quant à l'extraction des racines de nombres cossiques composez & diminuez, il est à notter qu'on n'a point encore trouué (au moins que ie sçache) de maniere certaine & vniuerselle pour ce faire, sinon que les exposans des trois nombres cossiques de l'equation ayent vn mesme excez entr'eux, c'est à dire qu'ils soient en proportion Arithmetique; & telles sont les equations suiuantes.

q.	6℞+72.	les exposans sont 2. 1. 0.
q.	72—6℞.	les exposans sont 2. 0. 1.
q.	14℞—48.	les exposans sont 2. 1. 0.
qq.	18*q*+648.	les exposans sont 4. 2. 0.
qq.	725—49.	les exposans sont 4. 0. 2.
qq.	433*q*—41616.	les exposans sont 4. 2. 0.
qc.	200*c*+3456.	les exposans sont 6. 3. 0.
qc.	5120—16*c*.	les exposans sont 6. 0. 3.
qc.	800*c*—156751.	les exposans sont 6. 3. 0.
qqq.	2000*qq*+18507688*q*.	les exposans sont 8. 4. 0.
qqq.	21465170*q*—209*qq*.	les exposans sont 8. 0. 4.
qqq.	2000*qq*—78461119.	les exposans sont 8. 4. 0.
qß.	80*ß*+39609.	les exposans sont 10. 5. 0.
qß.	7424—200*ß*.	les exposans sont 10. 0. 5.
qß.	2000*ß*—999424.	les exposans sont 10. 5. 0.
&c.		

Quand les exposans gardant la progression Arithmetique sont tous plus grands que 0, il les faut abbreuier par la soustraction du moindre nombre exposant; comme les suiuantes équations.

cß.	725*bß*—4*cc*	les exposans sont 11. 7. 9.
cß.	200*qqq*+3456*ß*.	les exposans sont 11. 8. 5.
qß.	200*qc*+143369.	les exposans sont 10. 6. 2.

Seront reduittes à celles-cy.

qq.	725—49	les exposans sont 4. 0. 2.
qc.	200*c*+3456.	les exposans sont 6. 3. 0.
qqq.	200*qq*+14336.	les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoistre quelle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree des nombres cossiques, dont les exposans sont 2, 1, 0, ou bien 2, 0, 1, vous ferez ainsi qu'il ensuit.

Premierement, prenez la moitié du nombre des racines, puis au quarré d'icelle moitié, adiouſtez-y le nombre abſolu, s'il a le ſigne +, ou l'oſtez s'il a le ſigne —: & finalement à la racine quarrée de ce produict, adiouſtez la moitié du nombre des racines, ſi

elles ont le signe +, ou l'ostez si elles ont le signe —: & ce qui viendra donnera l'estimation & valeur d'vne seule racine quarrée.

Comme pour exemple, vne équation estant trouuée entre 1*q*, & 72—6*R*; la diuision estant faite de 72—6*R*, par 1, comme veut la regle d'Algebre, vient le mesme nombre pour la valeur d'vn quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prends la moitié du nombre des racines, sçauoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, sçauoir est à 9, i'adiouste le nombre absolu 72, à cause du signe +, & viennent 81; dont ie prend la racine quarrée, qui est 9; & d'icelle i'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchée.

Soit derechef vne équation trouuée entre 1*q*, & 6*R* + 72: & il faut trouuer la racine quarrée de ce nombre 6*R* + 72. Ie prends premierement la moitié du nombre des racines, sçauoir est 3: puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, i'adiouste 72, à cause du signe +, & font 81, dont la racine quarrée est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitié du nombre des racines, & font 12, qui est la valeur d'vne racine.

Soit encore vne équation entre 1*q*, & 18*R*—72: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre 18*R*—72. Ie prends donc la moitié des racines, sçanoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié, qui est 81, ie soustrais 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarée est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +, & font 12 pour la valeur d'vne racine.

Mais il est à notter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'vne grande & l'autre petite; la grande est trouuée comme dit est cy dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarrée du reste de la soustraction est ostée de la moitié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarrée du reste 9, est osté de 9, moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique 18*R*—72. Et faut noter que l'vne & l'autre racine n'est pas touſiours propre à la solution d'vn probleme, ains seulement l'vne ou l'autre: c'est pourquoy aduenant tels nombres, si l'examen fait par l'vne d'icelles racines ne respond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine quarrée de tels nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair, ou rompu, laquelle extraction se fait ainsi:

Au quarré du nombre des racines, adiouſtez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: puis a la racine quarrée de ce produict adiouſtez ou soustrayez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarrée, parquoy la moitié sera la valeur d'vne seule racine.

Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique 72—6*R*: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, i'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarrée est 18, de laquelle i'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12 pour la valeur de deux racines, & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nombres cossiques, qui co-

stituent

ſtituent équation, ayans les expoſans conſtituez en telle progreſsion Arithmetique que ceux-cy, 4, 2, 0: ou 4, 0, 2: ou 6, 3, 0: ou 6, 0, 3: ou 8, 4, 0: ou 8, 0, 4: ou 10, 5, 0: ou 10, 0, 5, &c. eſquels le plus grand caractere eſt touſiours compoſé de q, & d'vn autre caractere coſsique: il faut premierement extraire la racine quarrée, à cauſe du caractere q, ſelon qu'il eſt enſeigné cy-deſſus, accommodant au nombre qui eſt affecté au caractere coſsique, en ceſte partie là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dit du nombre des racines, comme ſi l'équation eſtoit entre trois nombres coſsiques affectez aux caracteres q. ℞. & N. puis apres de cette racine quarrée trouuée, ſoit qu'elle ſoit rationelle ou irrationelle, il en faut tirer vne autre racine, ſelon l'autre partie du plus grand caractere coſsique, ce caractere q eſtant oſté. Comme pour exemple, ſi vne équation eſt trouuée entre $1qq$, & $18q-648$: Il faudra extraire la racine quarrée de ce nombre $18q-648$, à cauſe de la premiere partie du ſigne coſsique q, tout ainſi que ſi l'equation eſtoit trouuée entre $1q$, & 18℞-648, laquelle racine quarrée ſera 36: & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarrée qui ſera 6: parquoy 6 ſera la racine du nombre coſsique propoſé.

En la meſme maniere, ſi vne equation eſt entre $1qc$, & $5120-16c$: il faudra prendre la racine quarrée du nombre $5120-16c$, & de ceſte-cy prendre la racine cubique. Ainſi auſſi, ſi l'équation eſt entre $1qqq$, & $20000qq-7846119$, il faudra premierement prendre la racine quarrée: & puis apres de ceſte-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainſi des autres.

Or afin de tant plus faciliter l'intelligence des regles & preceptes iuſques icy enſeignez, nous leur adioindrons les 12 queſtions ſuiuantes.

1. *Trouuer deux nombres, deſquels la difference ſoit donnée, & en raiſon donnée.*

Quil faille trouuer deux nombres dont la difference ſoit 20, & leur raiſon quintuple. Soit poſé le moindre nombre eſtre 1℞. Donc le plus grand ſera 5℞, ſçauoir eſt le quintuple d'iceluy: l'excez d'iceux eſt 4℞. Il y a donc équation entre 4℞ & 20: & diuiſant 20 par 4, viendra 5 pour 1℞. Parquoy le moindre nombre requis ſera 5, & le plus grand 25, qui eſt quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raiſon donnée, deſquels les quarrez enſemble faſſent vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en raiſon ſeſquitierce, deſquels les quarrez faſſent 4329. Soient poſez les nombres cherchez eſtre 9℞, 12℞, 16℞, qui ſont en proportion ſeſquitierce. Les quarrez d'iceux, ſçauoir $81q$, $144q$, $256q$, font enſemble $481q$, egaux à 4329. Diuiſant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de $1q$, & par conſequent 1℞ ſera 3. Donc le premier nombre poſé 9℞, ſera 27: le ſecond 36, & le tiers 48, deſquels les quarrez 729, 1296, 2304 font enſemble 4329.

3. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, & qui multipliez entr'eux facent vn nombre ayant raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer deux nombres en raiſon ſeſquialtere, tels que leur produict ſoit dodecuple de la ſomme d'iceux. Soient poſez les deux nombres eſtre 2℞, & 3℞, qui eſt raiſon ſeſquialtere. Eſtans multipliez entr'eux ils

font 6q, & leur ſomme eſt 5R. Afin donc que 6q ayent raiſon dodecuple à 5R, l'equation ſera entre 6q & 60R. Diuiſant donc 60 par 6, viendront 10 pour la valeur de 1R, pource que les denominations coſſiques q. & R. ſont collaterales. Veu donc que le premier nombre a eſté poſé 2R, & le ſecond 3R, celuy-là ſera 20, & ceſtuy cy 30: & iceux multipliez entr'eux font 600, qui eſt dodecuple de 50, ſomme d'iceux.

4. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, produiſe vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon ſeſquiquinte, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, faſſe le nombre 4860. Poſons que les nombres cherchez ſoient 5R & 6R, leſquels ſont en raiſon ſeſquiquinte. Or le moindre 5R eſtant multiplié par le quarré du plus grand, ſçauoir eſt par 36q, faict 180c, qui partant ſont egaux au nombre donné 4860. Diuiſant donc 4860 par 180, viendront 27 pour 1c, & prenant la racine cubique dudict nombre 27, à cauſe du caractere c, icelle racine ſera 3. Parquoy le moindre nombre que nous auons poſé eſtre 5R ſera 15: & le plus grand 6R, ſera 18: Or le quarré d'iceluy, qui eſt 324, eſtant multiplié par le moindre nombre 15, produict le nombre quarré 4860.

5. *Eſtans donnez deux nombres inegaux, en trouuer deux autres en raiſon donnée, tels que le plus grand oſté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les reſtes ſoient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 & 60: & il en faut trouuer deux autres, en raiſon ſeptuple, & que le plus grand oſté de 100, & le moindre de 60, les reſtes ſoient egaux.

Soient poſez pour les nombres en raiſon ſeptuple 1R & 7R. Les nombres egaux reſtans ſeront 100—7R, & 60—1R. Adiouſtant donc 7R à chacun, l'equation ſera entre 100 & 60+6R: & oſtant 60 de chacun, elle ſera entre 40, & 6R. Et diuiſant 40 par 6, viendra pour 1R, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand ſeptupule de ceſtuy-cy ſera $46\frac{2}{3}$. Et oſtant celuy là de 60, & celuy-cy de 100, les nombres reſtans ſeront egaux, ſçauoir $53\frac{1}{3}$.

6. *Eſtant donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel eſtant adiouſté l'vn des donnez, & ſouſtraict l'autre, la ſomme ſoit au reſte en raiſon donnée.*

Les nombres donnez ſoient 100 & 20: & il faut premierement trouuer vn nombre auquel ſi on adiouſte 100, & du meſme on oſte 20, la ſomme ſoit triple du reſte. Soit poſé ce nombre là eſtre 1R; la ſomme ſera 1R+100, & le reſte 1R—20. Afin donc que ceſte ſomme-là ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1R+100, & 3R—60. Et adiouſtant à chacun 60, elle ſera entre 1R+160, & 3R: & oſtant 1R, icelle equation ſera entre 160 & 2R. Diuiſant donc 160 par 2, ſera trouué 80 pour 1R, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on adiouſte 100, on aura 180: mais ſi on en oſte 20, reſteront 60: & 180 eſt à 60 en raiſon triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel ſi on adiouſte 20, & du meſme on ſouſtraict 100, ceſte ſomme-là ſoit triple de ce reſte-cy. Soit poſé ce nombre-là eſtre 1R, & ſera fait la ſomme 1R+20, & reſtera 1R—100. Afin donc que ceſte ſomme ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1R+20,

& 3ℛ—300. Et adiouſtant 300 à chacun, elle ſera entre 1ℛ+320, & 3ℛ: & oſtant 1ℛ de chacun, l'equation ſera entre 320, & 2ℛ. Diuiſant donc 320 par 2 viendra 60 pour 1ℛ, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on adiouſte 20, on aura 180, & ſi on en oſte 100, reſteront 60: & iceux deux nombres 180 &, 60 ſont entr'eux en raiſon triple.

7. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, & que le quarré du plus grand ſoit au moindre auſſi en raiſon donnée.*

Que les nombres cherchez ayent raiſon triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raiſon ſextuple. Soit poſé le moindre 1ℛ, & le plus grand 3ℛ. Le quarré du plus grand, ſçauoir 9ℚ, doit auoir raiſon ſextuple au moindre 1ℛ: Donc l'equation ſera entre 9ℚ, & 6ℛ. Et diuiſant 6 par 9 viendra $\frac{2}{3}$ pour 1ℛ. pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Les nombres cherchez ſont donc $\frac{2}{3}$ & 2, ayans raiſon triple, & le quarré du plus grand, ſçauoir 4, eſt en raiſon ſextuple au moindre, ſçauoir à $\frac{2}{3}$.

8. *Eſtant donné vn nombre compoſé de deux quarrez, le diuiſer en deux autres quarrez.*

Soit le nombre donné 34, compoſé des deux quarrez 9 & 25, qu'il faut diuiſer en deux autres quarrez. Les coſtez des quarrez donnez ſont 3 & 5: ſoit poſé le coſté du premier quarré cherché eſtre 1ℛ+3, ſçauoir vne racine plus que le coſté du premier quarré donné: mais le coſté du ſecond quarré cherché, ſoit poſé quelconque nombre de racines moindre que le coſté du ſecond quarré donne, ſçauoir 2ℛ—5. Les quarrez d'iceux coſtez ſeront 1ℚ+6ℛ+9, & 4ℚ—20ℛ+25, qui adiouſtez enſemble, font 5ℚ+34—14ℛ, egal au nombre donné 34: adiouſtant donc 14ℛ à chacun, l'equation ſera entre 5ℚ+34, & 14ℛ+34. & oſtant 34 de chacun, reſtera l'equation entre 5ℚ, & 14ℛ. Diuiſant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour 1ℛ, pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Donc le coſté du premier quarré, lequel nous auons poſé eſtre 1ℛ+3 ſera $\frac{29}{5}$: & le coſté du ſecond quarré, lequel a eſté poſé de 2ℛ—5, ſera $\frac{28}{5}$—5, c'eſt à dire $\frac{3}{5}$. Les quarrez d'iceux coſtez trouuez ſont $\frac{841}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui font enſemble $\frac{850}{25}$, c'eſt à dire 34 nombre donné.

9. *Eſtans donnez deux nombres, en trouuer vn autre, qui adiouſté à l'vn d'iceux, & la ſomme multipliée par iceluy trouué, produiſe le quarré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouuer vn autre, qui adiouſté au premier 10, faſſe vn nombre, qui multiplié par iceluy adiouſté, produiſe le quarré de l'autre nombre 12, ſçauoir 144. Soit poſé le nombre cherché 1ℛ, l'adiouſtant à 10, viendra 1ℛ+10, qui multiplié par 1ℛ, fait 1ℚ+10ℛ, lequel doit eſtre egal à 144. Oſtant donc 10ℛ de chacun, l'equation ſera entre 1ℚ, & 144—10ℛ, laquelle ſe reſoudra ainſi: La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel adiouſtant 144, vient 169, dont la racine quarrée eſt 13, de laquelle ſoit oſtée la ſuſdite moitié 5, à cauſe du ſigne —, & reſtera la valeur de 1ℛ, ſçauoir 8, nombre cherché. Car iceluy eſtant adiouſté à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produict eſt 144, quarré de l'autre nombre 12.

10. *Trouuer vn nombre, duquel le cube ioint auec vn nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy.*

Soit donné vn nombre 702; & il en faut trouuer vn autre, duquel le cube eſtant adiouſté à iceluy nombre dõné, faſſe le quarré de cube d'iceluy nombre trouué. Poſons que le nombre cherché ſoit 1ℛ; le cube d'iceluy ſera donc 1*c*, & le quarré de cube 1*qc*; qui partant ſera egal à 1*c*+702. Parquoy il faut prendre la racine cenſicubique de ce nombre compoſé 1*c*+702, en cette ſorte. La moitié du nombre affecté au caractere *c*, eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$, qui eſtant adiouſté au nombre 702, à cauſe du ſigne —, vient $702\frac{1}{4}$, dont la racine quarré eſt $\frac{53}{2}$, a laquel ſoit adiouſtée la ſuſdite moitié du nombre affecté au caractere *c*, & viendront $\frac{54}{2}$, ceſt à dire 27: qui ſera la racine quarrée dudit nombre 1*c*+702, priſe a cauſe du caractere *q*, qui eſt ioint au plus grand caractere coſſique *qc*. Maintenant de cette racine quarré 27, ſoit priſe la cubique à cauſe de l'autre caractere *c*, & icelle ſera 3: qui eſt le nombre requis: Car le cube d'iceluy, ſçauoir 27, eſtant adiouſté au nombre donné 702, fait 729, qui eſt le quarré de cube du dict nombre 3.

11 *Trouuer deux nombres tels que le nombre produict de la multiplication d'iceux, eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit eſgal à vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres, tels que leur produict eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit 30. Soit poſé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, ſçauoir eſt 20, & ſoit poſé le plus grand eſtre 20 + 1ℛ, afin que la difference d'iceux ſoit 1ℛ: de 20 en 20 + 1ℛ, ſera faict le nombre 400+20ℛ, lequel diuiſé par 1ℛ difference d'iceux, le quotient eſt $\frac{400+20ℛ}{1ℛ}$, eſgal au nombre propoſé 30. Ceſte equation ſera reduitte par la multiplication en croix, à l'egalité d'entre 30ℛ, & 400+20ℛ, oſtant donc 20ℛ de chacun, l'equation ſera entre 10ℛ & 400: & 400 eſtans diuiſez par 10, viendront 40 pour la valeur de 1ℛ, difference des nombres cherchez. Veu donc que le moindre eſt 20, le plus grand ſera 60, c'eſt à ſçauoir 20 + 1ℛ. Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diuiſez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient eſt 30.

12. *Diuiſer vn nombre donné en deux parties, telles que la plus grande, diuiſee par la moindre, & la moindre par la plus grande, la ſomme des quotiens ſoit donnee.*

Qu'il faille donc diuiſer le nombre 10, en deux telles parties que chacunes d'icelles diuiſee par l'autre, les deux quotiens faſſent enſemble $4\frac{1}{4}$. Poſons que l'vne des parties ſoit 1ℛ: donc l'autre ſera 10—1ℛ: ceſte-cy eſtant diuiſee par celle-là, le quotient ſera $\frac{10-1ℛ}{1ℛ}$; & celle-là diuiſee par ceſte-cy, le quotient eſt $\frac{1ℛ}{10-1ℛ}$. La ſomme de ces deux quotiens ſera donc $\frac{2q+100-20ℛ}{10ℛ-1q}$ qui doit eſtre egale à $4\frac{1}{4}$: laquelle equation ſera reduitte par multiplication croiſee à cette autre 8*q*+400—80ℛ, & 170ℛ—17*q*; tellement qu'adiouſtant de part & d'autre 17*q*, & 80ℛ; l'equation viendra entre 25*q* + 400, & 250ℛ; mais oſtant 400, l'equation demeurera entre 25*q*, & 250ℛ—400; & chaque nombre eſtant diuiſé par le nõbre 25 affecté au caractere *q*, l'egalité ſera entre 1*q* & 10ℛ —16; Parquoy la racine quarree en ſera priſe ainſi. La moitié du nombre des racines eſt 5, & le quarré 25, duquel oſtant le nombre 16, à cauſe du ſigne—, reſteront 9, dont la racine quarree eſt 3, à laquelle ſoit adiouſtee la ſuſdite

moitié des racines, ſçauoir 5, & viendront 8, pour la valleur de 1ℛ, qui eſt la plus grande partie cherchee, & partant l'autre ſera 2. Ce qui eſt euident; car chaque partie diuiſant l'autre, les deux quotients ſont 4 & $\frac{1}{4}$, qui font enſemble le nombre donné $4\frac{1}{4}$.

Or és 12 queſtions cy-deſſus expliquees les nombres ſont abſtraicts de la matiere, mais à la fin de ce traicté nous en joindrons quelques autres ou les nombres ſeront ioincts & appliquez aux choſes materielles.

Des ſecondes racines.

CHAPITRE XI.

D'Autant qu'en pluſieurs operations ſont cherchez deux, ou trois, ou dauantage de nombres ſoubs vne proportion incertaine, il eſt neceſſaire pour euiter confuſion, qu'ayant poſé 1ℛ pour le premier nombre, on ne poſe derechef 1ℛ pour le ſecond, & encore 1ℛ pour le 3e. C'eſt pourquoy on a excogité les ſecondes racines, leſquelles ſont nommees & figurees diuerſement par les Autheurs: mais ſuiuant Stifel, Pelletier & Clauius, nous retiendrons le nom de ſecondes racines, & les notterons ainſi: 1A, ſignifie 1ℛ ſeconde; 1B, denotte 1ℛ tierce; 1C, ſignifie 1ℛ quarte, &c. Et quand vn nombre a deux ſignes, il faut entendre que le nombre auec le premier ſigne a eſté multiplié par l'vnité du ſigne poſterieur: Comme 1ℛA, ſignifie 1ℛ multipliée par 1A; & 3ℛA, ſignifie 3ℛ multipliees par 1A: ainſi 1*q*A*q*, monſtre que 1*q* a eſté multiplié en 1A*q*, &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, auſſi bien que les premieres racines. Et premierement quant à l'addition, elle eſt aiſee: car ſi elles ſont de meſme genre, il faut ſeulement adiouſter les nombres entr'eux, & au produict appoſer le meſme caractere d'icelles racines. Comme 3A, & 4A, font enſemble 7A: Item 5B, & 3B, font 8B. Mais quand icelles racines ne ſont de meſme genre, l'addition ſe fait par le ſigne +: comme 3A, & 4B, font 3A+4B: Item 3ℛ, & 4A, font 3ℛ+4A.

La ſouſtraction eſt auſſi aiſée: Car quand les racines ſont de meſme genre il n'y a qu'à ſouſtraire vn nombre de l'autre, & appoſer au reſte le meſme caractere. Comme 3A oſtez de 5A, reſtent 2A: Item 2B oſtez de 5B, reſtent 3B. Mais quand icelles ſont de genres differens, la ſouſtraction ſe fait par le ſigne —: comme 3A oſtez de 4B, reſtent 4B—3A.

Pour le regard de la multiplication, elle ſe fait ainſi: Si vn nombre de racine premiere, doit eſtre multiplié par vn nombre de racine ſeconde, ayant ſeulement la lettre A ou B, &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & appoſer au produict les meſmes ſignes. Comme 2ℛ multipliees par 2A, font 4ℛA, c'eſt à dire 4ℛ multipliees par 1A: Item 2A par 2ℛ, font 4Aℛ; c'eſt à dire 4A multipliez par 1ℛ: Item 3*q* multipliez par 4B, font 12*q*B; c'eſt à dire 12*q* multipliez par 1B.

Mais quand vn nombre abſolu eſt multiplié auec vn nombre de ſeconde racine, il faut appoſer au produict le ſigne de la ſeconde racine.

Comme 6 multipliant 4B, le produict est 24B : Item 5C multipliant 7, le produict est 35C.

Que si vn nombre de seconde racine doit estre multiplié par vn nombre de seconde racine de mesme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict apposer la mesme lettre auec le caractere q. Comme 3A multipliez par 4A, feront 12A q.

Quand vn nombre de seconde racine est multiplié en soy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut apposer au produict la mesme lettre auec le caractere q, ou c, &c. Comme 2A multipliez en soy quarrément, le produict est 4A q ; mais cubiquement, est produict 8A c: Item 2 ℞ A par 2 ℞ A, font 4 q A q ; c'est à dire 4 q de premiere racine multipliez par 1 q de seconde racine.

Mais quand vn nombre de seconde racine est multiplié en vn autre de la mesme racine seconde, qui a aussi vn caractere cossique ; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le signe cossique ℞. Comme 1A multiplié par 1A q, le produict est 1A c: Item 3B par 4B c, font 12B qq.

Que si vn nombre cossique simple sans lettre de seconde racine doit estre multiplié auec vn nombre marqué de lettre & signe cossique ; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict apposer les mesmes signes. Comme 2 c multipliez par 4A q, feront 8 c A q ; c'est à dire 8 c multipliez en 1A q : Item 1 c multiplié par 1 ℞ A q, fait 1 qq A q ; c'est à dire 1 qq multiplié par 1A q : Autant fait aussi 1 q A multiplié en soy : Car 1 q multiplié en soy fait 1 qq ; & 1A en soy fait 1A q.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, est multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, le produict doibt auoir outre la lettre, ou les lettres de seconde racine, le caractere cossique que donnent les exposans des caracteres. Comme 2A q, en 5A c, produisent 10A β : Item 3A q multipliez par 4B c, feront 12AB β.

Mais si vn nõbre ayant vn caractere cossique apres la lettre de seconde racine, est multiplié par vn nombre, qui apres le caractere cossique a aussi la lettre de seconde racine, il faut apposer au produict le dernier caractere cossique, suiuy par la lettre de seconde racine, puis aussi du caractere cossique produict du premier caractere cossique multiplié par la lettre de seconde racine, comme si elle auoit ce signe ℞. Comme 1A c multiplié par 1 q A, fera 1 q A qq, qui fera aussi produict de 1 ℞ A q multipliee en soy : Item 3A q multipliez par 4 c A, feront 12 c A c, c'est à dire 12 c multipliez par 1A c.

Quant à la diuision des secondes racines : soit fait premierement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diuiser 8 c A q par 4A q : Ie soustrais les signes semblables A q, & restent 8 c, & 4 : puis ie diuise 8 c par 4, & viennent 2 c, pour le quotient de 8 c A q diuisez par 4A q : ainsi 8 c A q diuisez par 4 c, le quotient est 2A q.

Mais diuisant vn nombre ℞ par vn nombre de secondes racines, le quotient sera nombre rompu. Comme 2 ℞ diuisees par 4A, le quotient est $\frac{2 ℞}{4 A}$

Quant à l'extraction des secondes racines il faut tirer la racine du nombre, s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractere cossique. Comme la racine quarree du nombre 25 Aq, est 5 A : Item la racine cubique du nombre 27 Ac, est 3 A ; & la racine quarree du nombre 16 Dqq, est 2 D.

Mais si le nombre n'a telle racine, ou que le caractere ne soit de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire : il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractere, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre 3 Aq, est γc 3 Aq. Item la racine quarree du nombre 4 Ac, est γ 4 Ac.

Quant à la preuue des operations de cet Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'és premieres racines ; sçauoir est, que l'addition & soustraction se prouueront l'vne l'autre : comme aussi la multiplication & diuision ; ou bien plus intelligiblement par les progressions Geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 356, prenant celle de la raison double pour les premieres racines : mais celles de la raison triple pour les secondes racines : tellement que 1 $\mathcal{R}$ vale 2 : mais 1 A, 3 ; 1 q, 4 ; 1 Aq, 9 ; 1 Ac, 27 ; 1 $\mathcal{R}$ A, 6 ; 1 $\mathcal{R}$ Aq, 18, &c.

Or comme au chapitre precedent nous auons adiousté plusieurs questions pour faciliter par leur solution l'intelligence des regles & preceptes auparauant enseignés, aussi en adiousterons-nous icy quelques vnes appartenans aux secondes racines, afin de faire voir par leur solution le moyen de se seruir & mettre en pratique les choses enseignees en ce chapitre.

1. *Diuiser vn nombre donné en trois parties, telles que les deux moindres soient ensemble egales à l'autre, & les deux plus grandes quintuples de la moindre.*

Qu'il faille donc diuiser le nombre 24, en trois parties, telles que les deux moindres ensemble fassent la plus grande, mais les deux plus grandes soient ensemble quintuple de la moindre. Posons que la moindre partie soit 1 $\mathcal{R}$, & la moyenne 1 A : donc la plus grande sera 1 $\mathcal{R}$ + 1 A, & partant la somme de ces deux-cy sera 1 $\mathcal{R}$ + 2 A, qui doit estre quintuple de la moindre partie ; parquoy 1 $\mathcal{R}$ + 2 A seront egales à 5 $\mathcal{R}$: ostons de part & d'autre 1 $\mathcal{R}$, & resteront 2 A egales à 4 $\mathcal{R}$, & consequemment 2 $\mathcal{R}$ egales à 1 A. Donc la moyenne partie sera double de la plus petite qui a esté posee 1 $\mathcal{R}$, & la plus grande triple. Parquoy il n'y a qu'à couppet le nombre donné 24, selon cette proportion 1, 2, 3, quoy faisant la plus grande partie sera 12, la moyenne 8, & la plus petite 4.

2. *Il y a trois nombres, tels que les deux derniers adiousteż auec* 100, *le produict est double du premier nombre : mais le premier & dernier adiousteż auec le mesme nombre* 100, *sont triples du second : & le premier & deuxiesme aussi auec* 100 *sont quadruple du troisiesme : à sçauoir quels sont ces trois nombres-là ?*

Posons 1 $\mathcal{R}$ pour le premier nombre, & 1 A pour les deux autres ensemble. Or puis que les deux derniers auec 100 doiuent estre doubles du premier, il y aura equation entre 2 $\mathcal{R}$ & 1 A + 100 : & ostant 100 de part & d'autre restera 1 A egal à 2 $\mathcal{R}$ — 100 : partant la somme du second & troisiesme nombre, qui

faisoit 1A sera 2℞—100; & si on y adiouste le premier nombre, sçauoir 1℞, la somme de tous les trois nombres sera 3℞—100. Maintenant posons 1B pour le second nombre: donc le premier & troisiesme feront 3℞—100—1B, puis que tous les trois faisoient ensemble 3℞—100. Et puis que la somme du premier & troisiesme auec 100 fait le triple du second, il y aura equation entre 3℞—1B, & 3B: adioustons 1B de part & d'autre, & l'equation viendra entre 3℞ & 4B: donc aussi entre $\frac{3}{4}$℞, & 1B. Parquoy le second nombre que nous auons posé estre 1B, sera $\frac{3}{4}$℞. Finalement pour le troisiesme nombre soit posé 1C: Donc puis que tous les trois font ensemble 3℞—100, la somme des deux premiers sera 3℞—100—1C, qui auec 100, doibt faire le quadruple du troisiesme. Il y aura donc equation entre 4C, & 3℞—1C: Adioustons 1C de part & d'autre, & viendront 3℞ egales à 5C; partant aussi $\frac{3}{5}$℞ à 1C. Parquoy le troisiesme nombre sera $\frac{3}{5}$℞. Et puis que le premier nombre est 1℞, le second $\frac{3}{4}$℞, & le troisiesme $\frac{3}{5}$℞, la somme de tous les trois sera $\frac{47}{20}$℞: Mais nous auons trouué cy-dessus qu'ils faisoient aussi 3℞—100. Il y a donc equation entre 3℞—100, & $\frac{47}{20}$℞: Adioutant 100 de part & d'autre; nous aurons 3℞ egales à $\frac{47}{20}$℞+100: ostons-en $\frac{47}{20}$℞, & resteront $\frac{13}{20}$℞ egales à 100. Diuisant donc 100 par $\frac{13}{20}$, viendront $153\frac{11}{13}$, pour la valleur de 1℞, qui est le premier nombre, mais le second sera $115\frac{5}{13}$, & le troisiesme $92\frac{4}{13}$.

3. *Il y-a deux nombres, dont la somme des quarrez est 208, & multipliez entr'eux leur produict est les $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré; à sçauoir quels sont ces deux nombres-là?*

Posons que le plus grand nombre soit 1℞, & le moindre 1A: leurs quarrez seront 1*q*, & 1A*q*, qui doiuent faire ensemble 208; & partant 1*q* sera 208—1A*q*; & 1A*q* sera 208—1*q*. Mais les deux nombres 1℞ & 1A multipliez entr'eux font 1℞A, qui est egal à $\frac{4}{9}q$, c'est à dire à $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré, qui est 1*q*. Si donc il y-a equation entre 1℞A & $\frac{4}{9}q$, il y-aura aussi equation entre les quarrez d'iceux nombres, c'est à sçauoir entre 1*q*A*q*, & $\frac{16}{36}qq$, laquelle equation sera reduite par multiplication en croix à 36*q*A*q*, & 16*qq*, & par depression du signe *q* de la premiere racine, l'equation viendra entre 36A*q*, & 16*q*: & par regle de trois si 16*q*, vallent 36A*q*, 1*q* vaudra $\frac{36Aq}{16}$, (pource qu'il faut laisser le signe *q* des premier & troisiesme termes de la regle.) Et d'autant que cy dessus 1A*q* estoit egal à 208—1*q*, il y aura aura aussi equation entre 1A*q*, & 208—$\frac{36Aq}{16}$, puis que 1*q* est egal à $\frac{36Aq}{16}$. Adioustons donc à chacun $\frac{36Aq}{16}$, & l'equation viendra entre 1A*q*+$\frac{36Aq}{16}$ & 208. Or veu que 1A*q* fait $\frac{16}{16}$A*q*, ladite equation sera entre $\frac{52Aq}{16}$ & 208. Parquoy diuisant 208 par $\frac{52}{16}$, viendront 64, pour la valleur de 1A*q*, la racine duquel nombre 64, qui est 8, sera le moindre nombre cherché, lequel nous auõs posé estre 1A; & pource que le quarré du plus grand estoit 208—1A*q*, si de 208, on oste la valeur de 1A*q*, sçauoir 64, resteront 144, pour le quarré d'iceluy plus grand nombre, qui par consequent sera 12.

4. *Il y-a deux nombres, la somme desquels estant ostee de la somme de leurs quarrez, restent 8, mais adioustee au nombre produict de leur multiplication faict 11. A sçauoir quels sont ces deux nombres-là.*

Posons que le moindre nombre soit 1℞, & le plus grand 1A: mais pour la somme

ſomme d'iceux nombres poſons 1B. Or puis que la ſomme des deux nombres cherchez eſtant oſtee de la ſomme de leurs quarrez, reſtent 8, iceux quarrez ſeront 8+1B. (Car ſi d'iceux on oſte 1B, reſteront 8.) Mais le quarré de 1℞, qui eſt le moindre nombre, eſt 1q: donc le quarré de 1A, qui eſt l'autre nombre ſera 8+1B—1q. Et d'autant que la ſomme deſdits nombres cherchez, c'eſt à ſçauoir 1B, eſtant adiouſtee au produict de leur multiplication fait 11; iceluy produict ſera 11—1B. Et pource que 1B eſt couppé en deux parties, ſçauoir 1℞ & 1A, le quarré de 1B, c'eſt à dire 1Bq, ſera egal aux deux quarrez de 1℞, & 1A, ſçauoir 8+1B, auec deux fois le produict d'iceux, ſçauoir 22—2B. Parquoy il y-aura equation entre 1Bq, & 30—1B. Or la racine de ce nombre 30—1B, ſe trouuera tout ainſi que de 30—1℞; car 1B tient icy lieu de ℞: & partant nous adiouſterons le quarré des racines, ſçauoir 1, au quadruple du nombre 30, ſçauoir 120, & viendront 121, dont la racine quarree eſt 11, de laquelle oſtons 1, à cauſe du ſigne—, & reſteront 10, dont la moitié 5, eſt la valleur de 1B, c'eſt à dire la ſomme des deux nombres cherchez: & partant la ſomme de leurs quarrez que nous auons trouué eſtre 8+1B ſera 13. Il faut donc maintenant diuiſer 5 en deux telles parties que la ſomme de leurs quarrez faſſe 13; ce que nous ferons ainſi qu'il enſuit.

Poſons que l'vn des nombres ſoit 1℞: donc l'autre ſera 5—1℞, & leurs quarrez ſeront 1q, & 1q+25—10℞, tellement que leur ſomme, qui eſt 2q+25—10℞ ſera egale à 13. Adiouſtons 10℞ de part & d'autre, & l'equation viendra entre 2q+25, & 13+10℞; oſtons-en 25, & l'equation reſtera entre 2q, & 10℞—12, & conſequemment entre 1q, & 5℞—6. Parquoy de 25, quarré des racines, oſtons 24 quadruple du nombre 6, & reſtera 1, dont la racine quarree eſt 1, à laquelle ſoit adiouſté 5, nombre des racines, à cauſe de leur ſigne +, & viendront 6, dont la moitié 3 eſt la valleur de 1℞, qui eſt l'vn des nombres cherchez, & partant l'autre ſera 2.

Or i'eſtime que ces quatre queſtions auec celles que nous adiouſterons encore à la fin de ce liure ſuffiront pour l'intelligence des ſecondes racines; c'eſt pourquoy nous viendrons maintenant à traitter

Des nombres irrationnaux, ou ſourds.

CHAP. XII.

NOmbres irrationnaux ou ſourds, ſont les racines des nombres, leſquelles ne ſe peuuent exprimer par nombres; tellement que pour expliquer telles racines on ſe ſert de ces ſignes $\sqrt{}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{\sqrt{}}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{qc}$, &c. Comme la racine quarrée de 5, eſt dicte ſourde ou irationnelle, pource qu'on ne peut trouuer aucun nombre qui multiplié en ſoy produiſe 5: tellement que ceſte racine quarrée de 5, ſera marquée ainſi $\sqrt{}$ 5: ou ainſi $\sqrt{q5}$. Item la racine cubique de 7, ſera marquee ainſi $\sqrt{c}7$. Item la racine quarree de quarree de 12, ainſi $\sqrt{\sqrt{}}12$, ou ainſi $\sqrt{qq}12$; & ainſi des autres.

Eſt toutes-fois à noter que tout nombre qui a le ſigne $\sqrt{}$ n'eſt pas pourtant irrationel; car quelquesfois pour la commodité de l'operation, au lieu de

tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes : car les vnes sont simples : comme γq de quelque nombre non quarré : γc de quelque nombre non cube, &c. & ces racines simples sont aussi appelées par quelqu'vns nõbres mediaux. Les autres racines sourdes sont composées par l'interposition des signes + & —: & icelles sont appellees par aucuns multinomies radicales; & par d'autres, nombres irrationnaux composez, ou diminuez; composez, quand les nombres sont liez par le signe +, comme $\gamma 7 + \gamma 10$: mais diminuez, quand les nombres sont liez par le signe —, comme $\gamma 5 - \gamma 13$, ou $\gamma 10 - \gamma c 7$.

De la reduction des simples racines sourdes, à vne mesme denomination.

Chap. XIII.

AFin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diuiser entr'elles, il est necessaire qu'elles soient reduites en vne mesme denomination, si elles sont diuerses; la quelle reduction se fait presque en la mesme maniere que la reduction des fractions de diuerses denominations à vne mesme: Car ayant posé les signes radicaux, chacun sous leur nombre, il faut multiplier vn chacun nombre en soy, selon le signe radical de l'autre: puis apres multiplier les exposans des signes entr'eux, afin d'auoir l'exposant du signe commun. Comme pour exemple, soient les deux racines $\gamma 7$, & $\gamma c 5$, qu'il faut reduire en racines de mesme espece. Ayant posé ces deux racines ainsi qu'il appert icy, ie multiplie 7 cubiquement à cause du signe c, & viennent 343 au lieu de 7; puis ie multiplie 5 quarrément à cause du signe γ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5: & finalement ie multiplie les exposans des signes γ & γc entr'eux : sçauoir est 2 par 3, & viennent 6, qui est exposant du caractere qc : tellement que $\gamma 7$, & $\gamma c 5$ seront reduites à $\gamma qc 343$, & $\gamma qc 25$. Ainsi aussi $\gamma c 2$, & $\gamma\gamma 3$ estans reduites à mesme espece ou denomination, seront $16qqc$, & $27qqc$, comme il appert en ceste figure.

$$\frac{343}{7} \times \frac{25}{5}$$

$$\gamma \quad -\gamma c$$
$$2 \quad 3$$
$$6$$

$$\frac{16}{2} \times \frac{27}{3}$$

$$\gamma c \quad \gamma\gamma$$
$$3 \quad 4$$
$$12$$

Il y a quelques abbreuiations en ceste operation, comme quand il faut reduire vn nombre absolu, & vn radical en mesme espece : car alors il n'y a qu'à multiplier en soy quarrément ou cubiquement, &c. le nombre absolu, & au produict apposer le signe radical de la racine. Comme 6, & $\gamma 5$, estans reduits à mesme espece feront $\gamma 36$, & $\gamma 5$. Item 2 & $\gamma c 4$, feront $\gamma c 8$, & $\gamma c 4$.

Item voulant reduire ces deux racines $\gamma c 8$, & $\gamma\gamma 25$, Ie prends de 8 la ra-

cine cubique 2 : puis apres la racine quarree de 25, qui est 5, à laquelle i'appose le signe radical restant γ, ainsi $\gamma 5$. I'ay donc maintenant pour les deux racines proposees vn nombre absolu 2, & vn nombre radical $\gamma 5$, qui reduits comme dit est cy-dessus, font $\gamma 4$ & $\gamma 5$.

Item, voulant reduire ces deux racines $\gamma c 2$ & $\gamma qc 4$ en mesme espece, ie multiplie 2 en soy quarrément, à cause du signe q, qui est en l'autre racine, outre le signe c, & fait 4, auquel i'appose le signe q, & sera faite la reduction à $\gamma \jmath c 4$, & $\gamma qc 6$.

Item, voulant reduire $\gamma\gamma 19$, & $\gamma 3$ en mesme denomination, ie multiplie le nombre de la moindre denomination, sçauoir est 3, en soy quarrément, à cause du signe γ, qui est en la plus grande denomination, outre γ, & viennent $\gamma\gamma 19$, & $\gamma\gamma 9$ pour la reduction en mesme espece des deux racines proposees. Ainsi $\gamma qc 8$, & $\gamma 9$ seront reduites à $\gamma qc 8$, & $\gamma qc 729$, multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractere c, qui outre q, est en la plus grande denomination.

Or auparauant que venir à l'Algorithme d'icelles racines sourdes, il est necessaire que nous enseignions le probleme suiuant.

Cognoistre si deux racines sourdes sont commensurables ou incommensurables, & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit diuisé le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, (icelles estans reduites en mesme espece, si elles n'y sont) & si au quotient vient vn nombre qui ayt la racine denotée par le signe radical d'icelles racines proposées, elles seront commensurables entr'elles, autrement non: & auront telle raison l'vne à l'aure, que le quotient à l'vnité: ou si le quotient est vne fraction, elles seront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\gamma 12$ & $\gamma 3$, sont cõmensurables entr'elles: Car 12 estans diuisez par 3, le quotient est 4, dont la racine quarree est 2, & seront l'vne à l'autre comme 2 à 1. Item $\gamma 320$ & $\gamma c 135$ sont commensurables; car 320 estans diuisez par 135, le quotient est $2\frac{10}{27}$, ou $\gamma c \frac{64}{27}$, c'est à dire $\frac{4}{3}$: & leur raison est comme 4 a 3. Item $\gamma qc 64$ & $\gamma c 27$ sont commensurables, & leur raison est comme 3 à 2: car icelles estans reduites en mesme espece, feront $\gamma qc 64$ & $\gamma qc 729$, & la diuision faite, le quotient sera $\gamma qc 11\frac{25}{64}$, ou $\gamma qc \frac{729}{64}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$.

Mais $\gamma 5$ & $\gamma 30$ sont incommensurables: car 30 estans diuisez par 5, le quotient est 6, qui est nombre irrationel, pource qu'il n'a pas de racine quarree; toutesfois ils ont mesme raison que $\gamma 6$ à 1. Item $\gamma c 32$ & $\gamma c 24$, seront aussi incommensurables: car diuisant 32 par 24, le quotient sera $1\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, qui n'a point de racine cube; & toutesfois ils seront entr'eux comme $\gamma c 4$ à $\gamma c 3$, ou comme $\gamma c \frac{4}{3}$ à 1.

De la multiplication & diuision des simples racines sourdes.

CHAPITRE XIV.

COmbien que l'addition & soustraction precedent ordinairement la multiplication & la diuision, si est-ce toutesfois qu'aux racines sourdes, on

commence par la multiplication & diuiſion, à cauſe que l'addition & ſouſtraction ne ſe peuuent paracheuer ſans la multiplication. Quand donc deux racines de meſme genre doiuent eſtre multipliées, ou diuiſées entr'elles, il faut multiplier, ou diuiſer les nombres entr'eux, & appoſer au nombre produict le meſme ſigne radical. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{7}$ par $\sqrt{10}$, ie multiplie 7 par 10, & viennent 70, auſquels i'appoſe le ſigne radical, & ſont $\sqrt{70}$. Ainſi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produict $\sqrt{36}$, c'eſt à dire 6. Ainſi $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ par $\sqrt{8}$, le produict eſt $\sqrt{18}$. Ainſi $\sqrt{c3}$ par $\sqrt{c7}$, viennent $\sqrt{c21}$. Ainſi $\sqrt{\sqrt{4}}$, par $\sqrt{\sqrt{8}}$, viennent $\sqrt{\sqrt{32}}$. Mais pour diuiſer $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$, ie diuiſe 70 par 10, & viennent 7, auſquels i'appoſe le ſigne radical, & ſont $\sqrt{7}$. Ainſi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, le quotient ſera $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$, ou $1\frac{1}{2}$. Ainſi $\sqrt{c21}$ par $\sqrt{c3}$, le quotient ſera $\sqrt{c7}$.

Mais quand les deux racines propoſées ſont de differente eſpece, il les faut reduire à vne meſme, puis apres faire la multiplication, ou diuiſion comme deſſus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4, ie reduits le nombre abſolu 4, & ſont $\sqrt{16}$, puis ie les multiplie comme deſſus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainſi $\sqrt{5}$ multipliee par $\sqrt{c10}$, le produict ſera $\sqrt{qc12500}$. Ainſi auſſi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{3}}}$, produict $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{12}}}$, ou $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{6}}}$. Mais diuiſant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient ſera $\sqrt{3}$. Ainſi $\sqrt{qc12500}$, diuiſee par $\sqrt{c10}$, le quotient ſera $\sqrt{5}$.

Mais ſi quelque racine doit eſtre multipliee en ſoy quarrément, ou cubiquement, &c. ſelon le ſigne radical qui luy ſera appoſé, il faut ſeulemẽt prẽdre le meſme nombre pour le produict, delaiſſant le ſigne radical. Comme $\sqrt{3}$ eſtant multipliee quarrément, produira 3: & $\sqrt{c5}$ multipliee en ſoy cubiquement, ſera 5.

Et s'il falloit multiplier quelque racine en ſoy ſelon l'exigence d'vn autre ſigne radical, il faudroit multiplier le nombre en ſoy ſelõ que le requerroit cet autre ſigne radical, & appoſer au produict le ſigne radical du nombre multiplié. Ainſi de $\sqrt{6}$ multipliee en ſoy cubiquement eſt faict $\sqrt{216}$; d'où aduient que la racine cubique de ce produit ſera $\sqrt{6}$. Item de $\sqrt{c8}$ multipliee en ſoy quarrément eſt faict $\sqrt{c64}$, c'eſt à dire 4; d'où aduient que la racine quarree de ce nombre $\sqrt{c64}$, eſt $\sqrt{c8}$, c'eſt à dire 2. Semblablement de $\sqrt{qc6}$ en ſoy quarrément eſt faict $\sqrt{qc36}$, c'eſt à dire $\sqrt{c6}$. &c.

De l'addition des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XV.

PRemierement ſi deux ou pluſieurs racines egales doiuent eſtre adiouſtees enſembles, il n'y a qu'à les multiplier par 2, ou par 3, ou par 4, &c. ſelon le nombre d'icelles racines à adiouſter: comme par exemple, voulant adiouſter $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$, ie double $\sqrt{6}$, & ſont $\sqrt{24}$, pour la ſomme d'icelles deux racines. Item $\sqrt{c6}$, $\sqrt{c6}$ & $\sqrt{c6}$, font enſemble $\sqrt{c162}$, car $\sqrt{c6}$, triplee, c'eſt à dire multipliee par 3. qui ſont $\sqrt{c27}$, faict ledit nombre $\sqrt{c162}$. Semblablement $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$, adiouſtées enſemble font $\sqrt{80}$, car le quarré de 4, eſt 16, qui multipliant 5, font 80. &c.

Mais quand deux racines inegales doiuent estre adiouſtees enſemble, icelles ſoient premierement reduittes à meſme eſpece, ſi elles n'y ſont; puis ſoit aduiſé, ſi elles ſont commenſurables ou incommenſurables: Que ſi leſdites racines ſont commenſurables, ayant diuiſé la plus grande par la moindre, ſoit adiouſtée vne vnité au quotient rationel, & la ſomme eſtant multipliée par la moindre racine, ſera donnee la ſomme de l'addition des deux racines propoſees. Comme pour exemple, ſoient propoſees adiouſter $\gamma 18$ & $\gamma 8$: diuiſant la plus grande par la moindre, le quotient eſt $2\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$, & adiouſtant 1, c'eſt $\frac{5}{2}$, qui multipliez par $\gamma 8$, le produict eſt $\gamma 50$, pour la ſomme des deux racines propoſees. Ainſi $\gamma 12$ adiouſtee à $\gamma 3$, la ſomme eſt $\gamma 27$: Item $\gamma c 320$, adiouſtee à $\gamma c 135$, fait la ſomme $\gamma c 1715$: Item $\gamma 4$ adiouſtee à $\gamma c 8$, fait 4: Item $\gamma \frac{1}{2}$ adiouſtee à $\gamma \frac{8}{9}$, fait $\gamma \frac{49}{18}$.

Que ſi les racines propoſees ſont incommenſurables, il faut ſeulement interpoſer entre-deux le ſigne +; comme $\gamma 6$ adiouſtee à $\gamma 11$, fait $\gamma 6 + \gamma 11$.

Or il y a encore pluſieurs autres manieres d'adiouſter les racines commenſurables, deſquelles la ſuiuante me ſemble ayſée. Ayant trouué la raiſon des racines propoſees, ſoit poſé au premier terme d'vne reigle de trois, l'vn des nombres d'icelle raiſon; au ſecond terme, la ſomme d'iceux nombres de la raiſon; & au troiſieſme, la racine correſpondante au terme de la raiſon, poſé au premier terme; & faiſant la reigle comme il appartient, le quatrieſme nombre qui viendra ſera la ſomme des racines propoſees. Comme au premier exemple cy-deſſus, la raiſon des racines a eſté trouuee comme 3 à 2; poſant donc 3 ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au ſecond, & $\gamma 18$, ou $\gamma 8$ au troiſieſme, le quatrieſme ſera $\gamma 50$; & ſe fait la reigle de trois, ainſi qu'il appert cy-deſſous.

si 3 donnent 5, que donneront $\gamma 18$ *? ou bien ſi 2 donnent 5, combien* $\gamma 8$ *?*

$\gamma 9$. $\gamma 25$.

25
90
36
450

$\gamma 4$ $\gamma 25$
8
200

$\text{ϰ}\phi\phi[\gamma 50$.
$\#\#$

$\#\,\S\,\phi[\gamma 50$, *ſomme des racines* $\gamma 18$ *&* $\gamma 8$ *propoſees à adiouſter.*
$\S\S$.

De la ſouſtraction des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XVI.

SI les racines ſont incommenſurables, il n'y a qu'à interpoſer le ſigne —. Comme $\gamma 3$ oſtee de $\gamma 10$, reſtera $\gamma 10 - \gamma 3$. Item $\gamma c 20$, oſtee de $\gamma c 50$, reſtera $\gamma c 50 - \gamma c 20$.

Mais quand les racines sont commensurables, ayant diuisé la plus grande par la moindre, soit osté du quotient rationnel vne vnité; puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produict sera le reste desiré. Comme pour exemple, qu'il faille soustraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Ie diuise donc 50 par 8, le quotient est $6\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{5}{2}$, de laquelle i'oste vn entier, & reste $\frac{3}{2}$, que ie multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reste desiré. Item, qui de $\sqrt{27}$ oste $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Semblablememt qui de $\sqrt{c1715}$ oste $\sqrt{c320}$, reste $\sqrt{c135}$. Ainsi aussi qui de $\sqrt{\frac{49}{18}}$ oste $\sqrt{\frac{1}{2}}$, reste $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Ceste operation se fait aussi par la regle de trois, mettant au premier & troisiesme terme les nombres specifiez au chapitre precedent; mais au deuxiesme la difference des termes de la raison, comme il appert cy-dessous.

si 5 donnent 3, combien donneront $\sqrt{50}$ *? ou si 2 donnent 3, combien donneront* $\sqrt{8}$?

$\sqrt{25}$. $\sqrt{9}$ 9 450 — $\sqrt{4}$. $\sqrt{9}$. 9 72

4
2ϕ
48ϕ [$\sqrt{18}$
288
2

3
7z [$\sqrt{18}$ *reste;* $\sqrt{8}$ *estant osté de* $\sqrt{50}$.
44

De l'addition des nombres irrationaux composez, & diminuez.

CHAP: XVII.

POur adiouster nombres irrationnaux composez & diminuez, il les faut disposer l'vn au dessous de l'autre; puis adiouster chaques racines simples, comme il a esté dit en l'Algorithme precedent, obseruant les reigles de + & —, que nous auons enseignez au chapitre 4; c'est à sçauoir *qu'aux signes semblables, il faut adiouster sans changer le signe; mais qu'aux dissemblables, il faut soustraire, & poser le signe du plus grand nombre.*

Or d'autant qu'il ne se fait rien en ceste operation, qui n'ait desia esté enseigné cy-deuant, la chose sera assez manifeste par exemples sans dauantage de discours.

$6+\sqrt{18}$.	$\sqrt{27}+\sqrt{8}$.	$\sqrt{162}-2$.	$\sqrt{50}+3$.
$4+\sqrt{8}$.	$\sqrt{12}+\sqrt{2}$.	$\sqrt{200}-3$.	$\sqrt{32}-5$.
$10+\sqrt{50}$.	$\sqrt{75}+\sqrt{18}$.	$\sqrt{722}-5$.	$\sqrt{162}-2$.

$\sqrt{50}-3$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50}+6$.
$\sqrt{32}+5$.	$\sqrt{242}-12$.	$24-\sqrt{242}$.
$\sqrt{162}+2$.	$\sqrt{72}-4$.	$30+\sqrt{72}$.

$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}$.	$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}$.
$\sqrt{c64}-\sqrt{\sqrt{80}}$.	$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}$.
$10-\sqrt{\sqrt{3125}}$.	$7-\sqrt{1}$.

Et eſt à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre compoſé ſe rencontrans totalement egales aux deux particules d'vn nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'vn d'iceux nombres. Comme pour adiouſter $15+\sqrt{8}$ à $15-\sqrt{8}$: Ie double ſeulement 15 & font 30 pour la ſomme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adiouſtez à $\sqrt{20}-6$ font $\sqrt{80}$, & ce d'autant que les dernieres particules ſe deſtruiſent l'vne l'autre, à cauſe des ſignes + & —.

De la ſouſtraction des nombres irrationaux compoſez & diminuez.

CHAP. XVIII.

POur ſouſtraire tels nombres, il les faut diſpoſer l'vn au deſſus de l'autre puis ſouſtraire chaſques racines comme il a eſté dit au chap. 16. obſeruant les regles des ſignes + & — enſeignees au chap. 4. ſçauoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables, il faut ſouſtraire (ſi faire ſe peut) ſans changer le ſigne : mais ſi on ne peut ſouſtraire, il faudra oſter le ſuperieur de l'inferieur, & changer le ſigne. Mais aux ſignes diſſemblables, il faut adiouſter, & appoſer le ſigne ſuperieur.*

Ceſte operation peut eſtre facilement entendue par les exemples ſuiuans, ſans autres preceptes.

$\sqrt{50}-5$	$\sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}$.	$\sqrt{50}+2$.	$\sqrt{50}-2$.
$\sqrt{8}-2$	$\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}$.	$\sqrt{18}+4$.	$\sqrt{18}-4$.
$\sqrt{18}-3$	$\sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}$.	$\sqrt{8}-2$.	$\sqrt{8}+2$.

$\sqrt{162}+2$.	$\sqrt{162}-2$.	$\sqrt{72}-4$.	$30-\sqrt{72}$.	$\sqrt{0}+16$.
$\sqrt{50}-3$.	$\sqrt{50}+3$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50}+6$.	$\sqrt{320}-8$.
$\sqrt{32}+5$.	$\sqrt{52}-5$.	$\sqrt{242}-12$.	$24-\sqrt{242}$	$24-\sqrt{320}$.

$\sqrt{\sqrt{2401}}-\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c1000}+\sqrt{\sqrt{3125}}$.	$\sqrt{180}+0$
$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}$.	$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}$.	$\sqrt{320}-8$
$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}$.	$4+\sqrt{\sqrt{20480}}$.	$8-\sqrt{20}$

Et eſt à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre compoſé ſe rencontrans du tout egales à deux particules d'vn nombre diminué, il faut ſeulement doubler la derniere particule de l'vn des nombres. Comme pour ſouſtraire $\sqrt{12}-5$, de $\sqrt{12}+5$; ie double la derniere particule 5, & vient le nombre 10, pour reſte de la ſouſtraction. Ainſi $10-\sqrt{4}$, oſtez de $10+\sqrt{4}$, reſteront $\sqrt{16}$, c'eſt à dire 4: Item $\sqrt{12}-\sqrt{5}$ oſtee de $\sqrt{12}+\sqrt{5}$, reſtent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que + deſtruit +; mais + & — ſe doiuent adiouſter.

De la multiplication des nombres irrationaux compoſez & diminuez.

CHAP. XIX.

POur faire ceſte operation, & auſſi la ſuiuante il faut retenir la regle de + & — enſeignee au chap. 5. ſçauoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables faut poſer +;*

mais aux dissemblables —. Ayant donc posé l'vn des deux nombres au dessous de l'autre, soit faicte la multiplication comme és nombres absolus, obseruant toutesfois ce que nous auons dit au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap 15. de l'addition & soustraction des mesmes racines. Ce qui sera enseigné és exemples descrits cy-dessous. Comme en l'exemple suiuant, —$\sqrt{45}$ en —$\sqrt{20}$, fait +$\sqrt{900}$, c'est à dire +30, & —$\sqrt{45}$ par +6, c'est à dire en +$\sqrt{36}$, fait —$\sqrt{1620}$, & —$\sqrt{20}$ par +8, c'est à dire par +$\sqrt{64}$, fait —$\sqrt{1280}$. Et finalement +8 en +6, fait +48 : Et partant tout le nombre produict sera 48 —$\sqrt{1280}$ —$\sqrt{1620}$ +30 ; qui reduit par addition de +48 à 30; & de —$\sqrt{1280}$ à —$\sqrt{1620}$: sera 78—$\sqrt{5780}$.

Multiplicande 6—$\sqrt{20}$.
Multiplicateur 8—$\sqrt{45}$.

Pr. 48.—$\sqrt{1280}$—$\sqrt{1620}$+30
qui par reduction sera 78—$\sqrt{5780}$.

En cet autre exemple, ie multiplie —$\sqrt{\sqrt{648}}$ par —$\sqrt{\sqrt{162}}$, & vient —+$\sqrt{\sqrt{104976}}$, c'est à dire —+18 : & —+$\sqrt{\sqrt{288}}$ par —$\sqrt{\sqrt{162}}$, fait —$\sqrt{\sqrt{46656}}$, c'est à dire —$\sqrt{216}$: & —$\sqrt{\sqrt{648}}$ par —+$\sqrt{128}$, fait —$\sqrt{\sqrt{82944}}$, c'est à dire —$\sqrt{288}$: & finalement +$\sqrt{\sqrt{288}}$ par —+$\sqrt{\sqrt{128}}$ fait +$\sqrt{\sqrt{36864}}$, c'est à dire +$\sqrt{192}$; & partant tout le nombre produict de la multiplication sera $\sqrt{192}$ —$\sqrt{288}$—$\sqrt{216}$ —+18, ou bien 18+$\sqrt{192}$—$\sqrt{288}$—$\sqrt{216}$.

Multiplicande $\sqrt{\sqrt{288}}$ — $\sqrt{\sqrt{648}}$.
Multiplicateur $\sqrt{\sqrt{128}}$ — $\sqrt{\sqrt{162}}$.

Produict $\sqrt{192}$—$\sqrt{288}$—$\sqrt{216}$ +18
ou 18 —+$\sqrt{192}$—$\sqrt{288}$—$\sqrt{216}$.

En ce troisiesme exemple nous reduirons premierement $\sqrt{\beta 6}$, & $\sqrt{3}$ en vne mesme denomination, c'est à sçauoir à $\sqrt{q\beta 36}$, & $\sqrt{q\beta 243}$, & ces deux nombres multipliez entr'eux, le produict est —+$\sqrt{q\beta 8748}$: puis apres nous reduirons $\sqrt{c7}$, & $\sqrt{3}$ à $qc49$, & $\sqrt{qc27}$ de mesme espece, & ces deux-cy estans multipliez entr'eux, le produict est $\sqrt{qc1323}$.

Multiplicande $\sqrt{c7}$+$\sqrt{\beta 6}$.
Multiplicateur $\sqrt{3}$.

Produict $\sqrt{qc1323}$+$\sqrt{q\beta 8748}$.

Au premier de ces deux exemples est multiplié vn nombre composé en soy, dont le produit est 49+$\sqrt{245}$+$\sqrt{245}$ +5, c'est à dire 54 +$\sqrt{980}$, pource que 49 & +5, font 54, & $\sqrt{245}$ auec $\sqrt{245}$, c'est à dire le double de $\sqrt{245}$, faict $\sqrt{980}$. Mais au 2e. exemple est multiplié vn nombre diminué en soy, dont le produit est 49—$\sqrt{245}$—$\sqrt{245}$+5, c'est à dire 54—$\sqrt{980}$. Or pour briefuement faire telle multiplication, c'est à dire multiplier vn nombre composé de racines quarrees en soy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouster ensemble les quarrez des particules, puis à ceste somme adiouster le double du produit d'vne particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-dessus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'vne patti-

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{5} \\ 7+\sqrt{5} \\ \hline 49+\sqrt{245}+\sqrt{245}+5. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7-\sqrt{5}, \\ 7-\sqrt{5}. \\ \hline 49-\sqrt{245}-\sqrt{245}+5. \end{array}$$

cule

cule en l'autre. Comme és deux exemples cy-dessus, les quarrez des particules sont 54, & le produit d'vne particule en l'autre est $\sqrt{}245$, ou $-\sqrt{}245$, dont le double est $\sqrt{}980$, ou $-\sqrt{}980$. Tout le produict est donc $54+\sqrt{}980$, ou $54-\sqrt{}980$.

Mais multipliant vn nombre composé ou diminué de racines quarrees, comme $6+\sqrt{}8$ par son respondant contraire, c'est à dire par $6-\sqrt{}8$, viendra au produit vn simple nombre 28, comme il appert en l'operation. Car $+\sqrt{}288$ ruine $-\sqrt{}288$; & partant reste $36-8$, qui sont 28. Ce produit sera encore trouué plus facilement & promptement: car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{}8$, estant osté de 36, quarré de la premiere particule 6, restera le mesme produit 28.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{}8. \\ 6-\sqrt{}8. \\ \hline 36+\sqrt{}288-\sqrt{}288-8. \end{array}$$

Ainsi aussi $\sqrt{}10+\sqrt{}2$ estant multiplié par son respondant contraire $\sqrt{}10-\sqrt{}2$, le produit sera $10+\sqrt{}20-\sqrt{}20-2$, c'est à dire 8: lequel nombre 8 est aussi produit en ostant 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

$$\begin{array}{r} \sqrt{}10+\sqrt{}2 \\ \sqrt{}10-\sqrt{}2 \\ \hline 10+\sqrt{}20-\sqrt{}20-2 \end{array}$$

Et si le nombre de la derniere particule est le plus grand, sera produit vn nombre diminué, comme appert en cet exemple, où est multiplié $2+\sqrt{}16$ par son respondant contraire $2-\sqrt{}16$, & est produict $4-16$.

$$\begin{array}{r} 2+\sqrt{}16 \\ 2-\sqrt{}16 \\ \hline 4-16 \end{array}$$

Mais si on multiplie $\sqrt{}3+\sqrt{}2+1$, par son respondant $\sqrt{}3+\sqrt{}2-1$, où tu vois que le signe $+$ de la derniere particule est changé en $-$, le produit sera $4+\sqrt{}24$: lequel produit estant derechef multiplié par son respondant contraire $-4+\sqrt{}24$, viendra vn simple nombre 8. Ce dernier produict sera encore trouué plus facilement & promptement comme ensuit. Soient multipliees les deux premieres particules $\sqrt{}3$ & $\sqrt{}2$ entr'elles, & viendra $\sqrt{}6$, qui doublee sera $\sqrt{}24$; puis de la somme des deux nombres d'icelles particules, sçauoir est 5, soit osté le nombre de la derniere particule, & restera 4, dont le quarré 16 soit osté du nombre 24, & resteront 8 comme dessus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{}3+\sqrt{}2+1. \\ \sqrt{}3+\sqrt{}2-1. \\ \hline -\sqrt{}3-\sqrt{}2-1 \\ +\sqrt{}6+2+\sqrt{}2 \\ 3+\sqrt{}6+\sqrt{}3 \\ \hline \textit{produit}\ 4+\sqrt{}24. \\ -4+\sqrt{}24 \\ \hline -16-\sqrt{}384+\sqrt{}384+24 \end{array}$$

Ainsi aussi, si on multiplie $\sqrt{}3+\sqrt{}5+\sqrt{}6$ par son respondant $\sqrt{}3+\sqrt{}5-\sqrt{}6$, sera produit $\sqrt{}60+2$, qui multipliez par $\sqrt{}60-2$, le produit sera simple nombre 56; lequel produit on aura aussi auec la mesme briefueté que dessus.

Et par ceste maniere peuuent estre reduits tous tels nombres composez ou diminuez en simple nom: sçauoir est multipliant tousiours par le respondant contraire, ainsi que dit est cy-dessus, iusques à ce que l'on soit paruenu à vn simple nombre.

De la diuiſion des nombres irrationnaux compoſez & diminuez.

CHAP. XX.

POur diuiſer vn nombre irrationnel compoſé par vn ſimple nombre radical, il faut diuiſer chaſque particule par ledit ſimple nombre radical, obſeruant la regle de + & de —. Comme pour diuiſer $\sqrt{24}+\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuiſe chaſque particule du diuidande par le diuiſeur $\sqrt{6}$, & le quotient eſt $\sqrt{4}+\sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, comme il appert en ceſte formule.

$$\frac{\sqrt{24}+\sqrt{9}}{\sqrt{6}} \left[\sqrt{4}+\sqrt{1\tfrac{1}{2}}\right.$$

Ainſi auſſi diuiſant $\sqrt{c28}+\sqrt{c20}$, par $\sqrt{c4}$, vient au quotient $\sqrt{c7}+\sqrt{c5}$.

Que s'il faut diuiſer vn nombre irrationel compoſé par vn nombre ſimple & abſolu. Comme pour exemple, $\sqrt{20}-\sqrt{c10}$ par le nombre abſolu 3; il faut premierement reduire iceluy nombre 3 en l'eſpece de la premiere particule $\sqrt{20}$, & ſeront $\sqrt{9}$; par leſquels eſtãt diuiſée ladite particule, viendra au quotient $\sqrt{2\frac{1}{9}}$: en apres il faudra auſsi reduire ledit diuiſeur 3 en l'eſpece de la racine de la ſeconde particule $\sqrt{c10}$; & ſeront $\sqrt{c27}$, qui diuiſant icelle particule, le quotient ſera $\sqrt{c\frac{10}{27}}$: tellement que tout le quorient de la diuiſion ſera $\sqrt{2\frac{1}{9}}-\sqrt{c\frac{10}{27}}$. Ainſi auſſi pour diuiſer $\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{\beta 3}}$ par $\sqrt{2}$, il faut reduire iceluy diuiſeur en la meſme denomination que chaque particule du diuidande, & on trouuera pour le quotient de la diuiſion $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{q\beta\frac{9}{32}}}$: Car $\sqrt{\sqrt{8}}$ & $\sqrt{2}$ eſtant reduites à meſme denomination, ſeront $\sqrt{\sqrt{64}}$, & $\sqrt{\sqrt{16}}$: & celle là diuiſee par ceſte cy donne $\sqrt{\sqrt{4}}$, c'eſt à dire $\sqrt{2}$. Et pour la ſeconde particule ſeront reduits $\sqrt{\beta 2}$ & $\sqrt{2}$, à $\sqrt{q\beta 9}$ & $\sqrt{q\beta 32}$; & celle-là eſtant diuiſee par ceſte cy, le quotient eſt $\sqrt{q\beta\frac{9}{32}}$.

Mais pour diuiſer vn ſimple nombre par vn compoſé ou diminué de racines quarrees, ou cenſicenſiques; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25}+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 7; il faut multiplier l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{25}-\sqrt{4}$, le correſpondant contraire du diuiſeur, & viendront $\sqrt{44100}-\sqrt{7056}$, & 21, ou $\sqrt{441}$: puis apres ſoit diuiſé $\sqrt{44100}-\sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100}-\sqrt{16}$, c'eſt à dire 6, qui ſera le quotient de 42 diuiſé par $\sqrt{25}+\sqrt{4}$. Qu'il faille encore diuiſer 54 par $2+\sqrt{16}$, c'eſt à dire par 6: ſoit donc multiplié le diuiſeur $2+\sqrt{16}$, par $2-\sqrt{16}$, & ſera produit le nombre diminué $4-16$, pource que la derniere particule eſt plus grande que la premiere: parquoy ſoient tranſpoſees les particules dudit diuiſeur en ceſte maniere $\sqrt{16}+2$, afin qu'eſtant multiplié par ſon reſpondant contraire $\sqrt{16}-2$, ſoit fait vn nombre ſimple 12. En apres ſoit auſsi multiplié le nombre diuidande 54 par le meſme nombre $\sqrt{16}-2$, & viendra pour nouueau diuidande $\sqrt{46656}-108$, qui diuiſé par le nouueau diuiſeur 12, le quotient ſera $\sqrt{324}-9$, c'eſt à dire $18-9$, qui ſont 9. Voulant encore diuiſer 20 par $\sqrt{\sqrt{16}}+\sqrt{\sqrt{81}}$, c'eſt à dire par 5: ſeront premierement tranſpoſees les particules d'iceluy diuiſeur, afin que la plus grande ſoit la premiere: puis ſera trouué vn nouueau diuiſeur & diuidande, qui ſera 5, & $\sqrt{\sqrt{12960000}}-\sqrt{\sqrt{2560000}}$, & la diuiſion faicte, le quo-

tient ſera $\sqrt{\sqrt{20736}}-\sqrt{\sqrt{4096}}$, c'eſt à dire 12—8, c'eſt aſſauoir 4.

Que ſi tant le diuidãde que le diuiſeur, ſont nombres compoſez, ou diminuez de racines quarrees, il faut reduire le diuiſeur en ſimple nombre, comme il a eſté dit au chap. precedent: puis multiplier le diuidande par les meſmes nombres par leſquels on aura multiplié le diuiſeur pour le conuertir à ſimple nombre, & ce qui viendra ſoit diuiſé par le ſimple nombre trouué, comme dit eſt cy-deſſus, & ainſi qu'il appert aux exemples ſuiuans.

Eſtant propoſé à diuiſer $18+\sqrt{36}$, qui ſont 24, par $7-\sqrt{16}$, (c'eſt à dire par 3.) Il faut premierement multiplier le diuiſeur $7-\sqrt{16}$ par ſon reſpondant contraire $7+\sqrt{16}$, & viendront 33 pour vn nouueau diuiſeur: puis par le meſme nombre $7+\sqrt{16}$ ſoit auſsi multiplié le diuidande $18+\sqrt{36}$, & viendront $198+\sqrt{4356}$, pour le nouueau diuidande, qui diuiſé par les 33 trouuez, viendront au quotient $6+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 8.

Soit encore propoſé à diuiſer $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$, par $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Il faut donc premierement multiplier le diuiſeur $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ par ſon reſpondant contraire $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, & viẽdra vn ſimple nombre 3 pour nouueau diuiſeur: en apres ſoit multiplié le nombre diuidande $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ par le meſme nombre $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, afin d'auoir vn nouueau diuidande, & le produit ſera $\sqrt{205}+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{82}-\sqrt{6}+\sqrt{4}$. Lequel il faut diuiſer par 3, c'eſt à dire par $\sqrt{9}$, & le quotient ſera $\sqrt{22\frac{7}{9}}+\sqrt{1\frac{6}{9}}-\sqrt{1\frac{1}{9}}-\sqrt{9\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\frac{2}{3}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}}+\sqrt{\frac{15}{9}}-\sqrt{\frac{10}{9}}-\sqrt{\frac{82}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}$.

Que ſi le diuiſeur auoit deux parcelles de racines cubiques, il faudroit auſsi trouuer vn diuiſeur ſimple, comme ſera dit en ceſte exemple. Qu'il faille diuiſer 10 par $\sqrt{c5}+\sqrt{c3}$. Premierement il faut trouuer ſuiuant ce qui eſt enſeigné en la 2. prop. 8. trois nombres continuellement proportionnaux (à cauſe de 3 expoſant du cube) en la raiſon des particules du diuiſeur, c'eſt aſſauoir de $\sqrt{c5}$ à $\sqrt{c3}$, & ce comme il enſuit. Premierement ſoit multiplié $\sqrt{c5}$ en ſoy, & viendra $\sqrt{c25}$ pour le premier nombre; puis apres ſoit multiplié $\sqrt{c5}$ en $\sqrt{c3}$, & viendront $\sqrt{c15}$ pour le ſecond nombre; tiercement ſoit multiplié $\sqrt{c3}$ en ſoy, & ſera produit $\sqrt{c9}$ pour l'autre nombre: & par ainſi nous aurons ces trois nombres $\sqrt{c25}$, $\sqrt{c15}$, & $\sqrt{c9}$, continuellement proportionnaux, en la raiſon de $\sqrt{c5}$ à $\sqrt{c3}$, comme il eſt demonſtré en la ſuſdite 2. p. 8. Or eſtant appoſé le ſigne + aux deux nombres extremes, & le ſigne — à celuy du milieu, en ceſte ſorte $\sqrt{c25}-\sqrt{c15}+\sqrt{c9}$ ſoit multiplié par ce nombre, tant le diuidande propoſé 10, que le diuiſeur $\sqrt{c5}+\sqrt{c3}$, & viendra $\sqrt{c25000}-\sqrt{c15000}+\sqrt{c9000}$ pour le nouueau diuidande; mais pour nouueau diuiſeur $\sqrt{c125}+\sqrt{c27}$, c'eſt à dire 8: lequel ſimple diuiſeur on obtiendra auſsi en adiouſtant ſeulement les nombres des parcelles du diuiſeur 5 & 3.

Il faut proceder en la meſme maniere lors que le diuiſeur eſt compoſé de deux racines cenſicenſiques, ſurſolides, quarrees cubiques, &c. trouuant autant de nombres continuellement proportionnaux, en la raiſon des parcelles du diuiſeur qu'il y a d'vnitez en l'expoſant du ſigne coſsique qq, β, qc, &c. c'eſt aſſauoir quatre au diuiſeur des racines cenſicenſiques; cinq pour le diuiſeur des ſurſolides &c. Leſquels nombres eſtans trouuez, ſoit appoſé

le signe + au premier, & le signe — au second: mais au troisiesme derechef +, au quatriesme encore —, & ainsi alternatiuement iusques au dernier; tellement que tous les nombres des lieux impairs soient nottez du signe +, & ceux des lieux pairs, du signe —. Nous poserons pour exemple qu'il faille diuiser 10 par $\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$. D'autant que l'exposant de qq est 4, il faut trouuer quatre nombres continuellement proportionnaux en la raison de $\gamma\gamma 5$ à $\gamma\gamma 3$, en la sorte cy-dessus.

$\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$
$\gamma\gamma 25 - \gamma\gamma 15 + \gamma\gamma 9$
$\gamma\gamma 125 - \gamma\gamma 75 + \gamma\gamma 45 - \gamma\gamma 27$

Maintenant, si par ce monbre de quatre particules on multiplie tant le diuidande 10, que le diuiseur $\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$, on trouuera pour nouueau diuidande $\gamma\gamma 1250000 - \gamma\gamma 750000 + \gamma\gamma 450000 - \gamma\gamma 270000$, & pour nouueau diuiseur $\gamma\gamma 625 - \gamma\gamma 81$, c'est à dire 2: lequel diuiseur 2 on obtiendra aussi sans multiplication, en fouſtrayant seulement le nombre de la moindre particule du diuiseur de la plus grande, c'est assauoir 3 de 5. Car les Algebraistes enseignent que quand le nombre exposant des racines est pair, comme q, qq, &c. le simple diuiseur est donné en ostant le nombre de la moindre particule de celuy de la grande: mais en les adioutant ensemble lors que ledit exposant est impair, comme c, β, &c.

Mais il est à noter que les particules du diuiseur estans denommées de diuerses racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparauant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande: & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de $\gamma 41 + \gamma 3 - \gamma 2$, diuisé par $\gamma 5 + \gamma 2$, se peut donner ainsi $\frac{\gamma 41 + \gamma 3 - \gamma 2}{\gamma 5 + \gamma 2}$. Semblablement s'il faut diuiser $\gamma 48 + \gamma c3$ par $\gamma 15 + \gamma c6 - \gamma 3$, le quotient sera ceste fraction $\frac{\gamma 48 + \gamma c3}{\gamma 15 + \gamma c6 - \gamma 3}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationnaux composez est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composez $3 + \gamma 8$, & $8 - \gamma 5$, le plus grand desquels ie desire sçauoir. Ie fouſtrais 3 de chaque nombre, & restent $\gamma 8$, & $5 - \gamma 5$, desquels ie prend les quarrez, ce sont 8 & $30 - \gamma 500$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0: & $22 - \gamma 500$: & à chacun d'iceux i'adiouste $\gamma 500$, & viennent $\gamma 500$, & 22, c'est à dire $\gamma 484$, qui sont moindre que $\gamma 500$: & partant ie dis que $3 + \gamma 8$ est plus grand que $8 - \gamma 5$.

Des fractions des nombres irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuant le milieu de la fraction, iceluy signe est referé à l'vn & à l'autre terme, c'est à sçauoir, tant au numerateur qu'au denominateur. Comme ceste fraction $\gamma \frac{9}{16}$, signifie $\gamma 9$ estre diuisee par $\gamma 16$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi

$\gamma c\frac{8}{27}$ signifie $\gamma c8$ estre diuisee par $\gamma c27$: & icelle equiuale à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\gamma\frac{6}{8}$ denote $\gamma 6$ estre diuisee par $\gamma 8$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier auec la fraction, il faut reduire tout le nombre à vne seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\gamma c1\frac{67}{125}$ sera reduit à $\gamma c\frac{192}{125}$, & signifie $\gamma c192$ estre diuisee par $\gamma c125$, c'est à dire par 5; & peut estre representee ainsi $\frac{\gamma c192}{5}$, tellement qu'il signifie $\gamma c192$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\gamma c\frac{192}{125}$ sont multitipliez par vn mesme nombre, c'est à sçauoir par $\gamma c192$, sera produit la fraction $\gamma c\frac{3686864}{24000}$ equiuallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si derechef les termes produits de la fraction sont multipliez par la mesme $\gamma c192$, sera produit la fraction $\gamma c\frac{7077888}{4608000}$, c'est à dire $\frac{192}{\gamma c4608000}$, & signifie le cube 192 (qui est produit de $\gamma c192$ multipliee en soy cubiquement) estre diuisé par $\gamma c4608000$; pource que la racine cubique du numerateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\gamma\frac{16}{64}$, signifie $\gamma 16$, c'est à sçauoir 4, estre diuisee par $\gamma 64$, c'est à dire par 8; & est equiualente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{\gamma 16}{64}$ signifie $\gamma 16$, c'est à dire 4 estre diuisé par 64: & est equiualente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\frac{16}{\gamma 64}$, signifie que le nombre 16 est diuisé par $\gamma 64$, c'est à dire par 8: & est equiualente au nombre 2.

Quand la raison des numerateurs aux denominateurs est vne mesme, les fractions sont egales, tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Parquoy toutes ces fractions $\gamma\frac{64}{4}$, $\frac{\gamma 64}{2}$, $\frac{64}{\gamma 256}$ sont de mesme valeur : pource qu'en toutes, le numerateur est quadruple du denominateur.

Les fractions irrationelles se reduisent à minimes termes (quand elles peuuent estre reduites,) tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Comme ceste fraction $\gamma qc\frac{4}{8}$ se reduira à ceste-cy $\gamma qc\frac{1}{2}$: & $\gamma\frac{6}{144}$ à $\gamma\frac{1}{4}$. Elles peuuent aussi estre quelquesfois reduites à moindres signes radicaux : Comme $\gamma qc\frac{4}{8}$ se reduit à $\frac{\gamma q2}{\gamma 2}$. Pource que le numerateur 4 a racine quarree 2, mais il n'a pas racine cubique : Et le denominateur 8 a racine cubique 2, mais il n'a pas la quarree.

Quant à l'addition & soustraction, elles se font en ceste maniere. Si le denominateur est vn mesme, soient adioustez les numerateurs, comme il a esté dit cy-deuant, ou soit soustrait l'vn de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit apposé le denominateur commun, ainsi qu'il appert és exemples suiuans.

Addition	*Soubstraction*
$\frac{\gamma 4}{7}$ adiouſtez à $\frac{\gamma 9}{7}$	$\frac{\gamma 4}{7}$ ostee de $\frac{\gamma 9}{7}$
font $\frac{\gamma 25}{7}$ ou $\frac{5}{7}$	reste $\frac{\gamma 1}{7}$ ou $\frac{1}{7}$

Mais quand les denominateurs sont diuers, soit faicte la reduction à vn mesme denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires: puis soit fait ainsi que cy-dessus, & comme il appert en ces formules.

Reduction.	*Addition*	*Soubstraction*
$\gamma 144$ $\gamma 196$	$\gamma\frac{144}{441}$ & $\gamma\frac{196}{441}$	$\gamma\frac{144}{441}$ de $\gamma\frac{196}{441}$
$\gamma\frac{16}{49}$ & $\gamma\frac{4}{9}$.	font $\gamma\frac{676}{441}$, ou $1\frac{5}{49}$.	reste $\gamma\frac{4}{441}$, ou $\frac{2}{21}$
$\gamma 441$.		

En la meſme maniere s'il faut adiouſter $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{24}}{5}$ à $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{8}}{2}$, on reduira premierement icelles fractiõs à meſme denomination, c'eſt à ſçauoir à $\frac{\sqrt{200}+\sqrt{192}}{10}$ & $\frac{\sqrt{300}+\sqrt{100}}{10}$: puis apres adiouſtant les numerateurs, on aura $\frac{\sqrt{800}+\sqrt{832}}{10}$: Mais ſi on ſouſtraict la moindre d'icelles fractions de la plus grande, reſtera $\frac{\sqrt{648}}{10}$.

Quand les numerateurs ſont incommenſurables, l'addition d'iceux ſe faict par l'interpoſition du ſigne +, mais la ſoubſtraction par l'interiection du ſigne —. Comme la ſomme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{5}{8}}$ eſt $\sqrt{\frac{7}{8}}+\sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ oſtée de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reſte $\sqrt{\frac{7}{8}}-\sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & diuiſion des fractions irrationnelles, il faut ſeulement les reduire à meſme ſigne radical, & acheuer comme és fractions vulgaires Parquoy multipliant $\frac{\sqrt{3}}{4}$ par $\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\frac{\sqrt{18}}{28}$. Et $\frac{\sqrt{36}}{5}$ diuiſée par $\frac{\sqrt{27}}{2}$ fera $\frac{4}{3}$: & auſſi $\frac{\sqrt{3}}{4}$ diuiſee par $\frac{\sqrt{6}}{7}$, viendra $\sqrt{\frac{147}{96}}$ c'eſt à dire $\sqrt{1\frac{51}{96}}$.

Quant à la preuue de chacune de ces operations, elle ſe fait par ſa contraire, c'eſt à dire que l'addition ſe preuue par la ſoubſtraction: & la ſoubſtraction par l'addition, &c.

Or voila quant à ce qui concerne l'Algorithme des nombres ſourds, reſte que pour en monſtrer quelque vſage nous adiouſtions icy quelques queſtions en la ſolution deſquelles on ſe ſert deſdits nombres ſourds & irrationnels.

1. *Trouuer deux nombres en vne raiſon donnee, tels que l'vn multiplié par l'autre produiſe vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon ſeſquialtere, tels que le produit de leur multiplication ſoit 40. Poſons qu'iceux nombres ſoient 2 ℞ & 3 ℞: leur produit ſera 6q, qui doit eſtre egal à 40. Diuiſant donc 40 par 6, viendront $\frac{40}{6}$ ou $\frac{20}{3}$ pour la valeur de 1q, & conſequemment 1℞, ſera $\sqrt{\frac{20}{3}}$: Et pour ce que le premier nombre a eſté poſé 2 ℞, & le ſecond 3 ℞, iceux nombres ſeront $\sqrt{\frac{80}{3}}$ & $\sqrt{\frac{180}{3}}$, leſquels multipliez entr'eux produiſent $\sqrt{\frac{14400}{9}}$, c'eſt à dire $\frac{120}{3}$ ou 40, ainſi qu'il eſtoit requis.

2. *Trouuer deux nombres en raiſon donnée, tels que le plus grand eſtant diuiſé par le moindre, le quotient & le quarré d'iceluy moindre, ſoient auſsi en raiſon donnée.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon quadruple, tels que le quarré du moindre aye raiſon double au quotient du plus grand diuiſé par iceluy moindre. Poſons qu'iceux nombres ſoient 1℞ & 4℞: Or le plus grand eſtant diuiſé par le moindre, le quotient ſera 4, & le quarré du moindre eſt 1q: & puis que ce quarré doit auoir raiſon double au quotient 4: il y aura Equation entre 1q, & 8: parquoy 1℞ ſera $\sqrt{8}$, qui eſt le moindre nombre, & par conſequent le plus grand qui eſt en raiſon quadruple ſera $\sqrt{128}$: & diuiſant iceluy par le moindre $\sqrt{8}$, le quotient eſt $\sqrt{16}$, c'eſt à dire 4, auquel 8 quarré dudit moindre nombre à raiſon double.

3. *Trouuer trois nombres en progreſsion arithmetique, tels qu'eſtans multipliez entr'eux, le produit ait vne raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres conſtituans vne progreſſion arithmetique, tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux ſoit triple de leur ſomme. Poſons que les trois nombres cherchez ſoient 1℞, 2℞ & 3℞ ayans vn meſme excez 1℞. De la multiplication d'iceux eſt faict le nombre 6c,

lequel doit estre triple de leur somme 6ℛ : & partant egal à 18ℛ. Diuisant donc 18 par 6, viendra 3 pour 1q; (car d'autant que le caractere q, est au milieu de c & ℛ, il vient le mesme qu'en deprimãt les signes.) Partant 1ℛ sera √3, & par consequent les trois nombres cherchez seront √3, √12, & √27, qui ont mesme excez √3, & multipliez entr'eux font √972, qui est le triple de la somme des mesmes, c'est à sçauoir du nombre √108.

Notez que quand le denominateur de la raison que doit auoir le produict de la multiplication à la somme, est nombre quarré: la question se resoult en nombres rationnaux. Comme les mesmes choses que dessus estans posees, si le nombre produit deuoit auoir à la somme la raison quadruple, l'equation viendroit entre 6c & 24ℛ: parquoy diuisant 24 par 6 viendroit 4 pour 1q, & consequemment 1ℛ seroit 2, & les trois nombres cherchez seroient 2, 4, & 6, lesquels multipliez entr'eux produisent 48, qui est le quadruple de leur somme 12.

4. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raison donnée, tels que la somme de leurs quarrez face vn nombre donné.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres continuellement proport. en raison double, desquels la somme de leurs quarrez face 600. Posons que les trois nombres soient 1ℛ, 2ℛ, & 4ℛ, qui sont en raison double: leurs quarrez seront 1q, 4q, & 16q. Mais la somme d'iceux quarrez sera 21q, qui est egale à 600. Diuisant donc 600 par 21 viendront $\frac{200}{7}$ pour vn quarré, & partant 1ℛ sera $\sqrt{\frac{100}{7}}$, qui est le premier nombre cherché, & le second double d'iceluy sera $\sqrt{\frac{800}{7}}$: mais le troisiesme aussi double de cestuy-cy sera $\sqrt{\frac{3200}{7}}$, & leurs quarrez font ensemble $\frac{4200}{7}$, c'est à dire 600.

5. *Trouuer vn nombre, qui auec vn nombre donné face son quarré.*

Le nombre donné soit 50, & il faut trouuer vn autre nombre qui adiousté auec 50 face son quarré. Posons que le nombre cherché soit 1ℛ: donc son quarré sera 1q, qui doit estre egal à 1ℛ + 50 Or le quadruple de 50 estant adiousté au quarré des racines, faict 201, dont la racine quarree est √201: à icelle soient adioustees les racines & viendront √201+1, dont la moitié, qui est $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, est la valeur de 1ℛ, & consequemment le nombre cherché: tellement que si à iceluy nombre on adiouste le donné 50, le nombre qui en prouiendra, sçauoir $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50\frac{1}{2}$, sera le quarré du mesme nombre $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, ainsi qu'il estoit requis.

6. *Diuiser vn nombre donné selon la moyenne & extreme raison.*

Le nombre donné soit 12, lequel il faut coupper en deux parties telles que la moindre, la plus grande, & ledit nombre 12, soient continuellement proportionnaux, c'est à dire que le quarré de la plus grande partie soit egal au produit de tout le nombre 12 multiplié par la moindre partie. Posons que la plus grande partie soit 1ℛ: donc la moindre sera 12 — 1ℛ, & partant ces trois nombres 12 — 1ℛ, 1ℛ, & 12 seront proport. tellement que le quarré du moyen, sçauoir 1q, sera egal au produict des deux extremes, qui est 144 — 12ℛ. Or la moitié du nombre des racines est 6, & son quarré 36, auquel adioustant le nombre 144, viendront 180, dont la racine quarree est √180, delaquelle estant ostee la susdite moitié des racines, à cause du signe — le reste sera √180 — 6,

qui eſt la plus grande partie cherchee, laquelle oſtee du nombre donné 12, reſteront 18—$\sqrt{180}$ pour la moindre partie.

Or d'autant que nous rapporterons à la fin de ce liure beaucoup d'autres queſtions eſquelles les nombres ſeront ioincts & appliquez aux choſes materielles, afin qu'au moyen d'icelles on voye mieux l'vſage & practique de tous les preceptes & documens enſeignez en ce traicté, nous ne nous arreſterons d'auantage ſur ſemblables queſtions abſtraittes de la matiere.

Des nombres coſſiques & irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

TOut ainſi que les nombros abſolus ſe font irrationnaux, eſtans precedez de ſignes radicaux : comme de 5, ſe fait $\sqrt{c5}$: Ainſi auſſi les nombres coſſiques ſe font irrationnaux, quand on leur propoſe quelqu'vn d'iceux ſignes radicaux. Comme de 20ℛ, ſe fait $\sqrt{20ℛ}$, nombre coſſique irrationnel, qui ſe prononce, la racine quarrée de 20 racines : Item de $6c$, ſe fait $\sqrt{6c}$: qui ſignifie la racine quarrée de $6c$. Item de $9ℛ$, ſe fait $\sqrt{\sqrt{9ℛ}}$, &c. Or tels nombres peuuent eſtre quelquesfois rationnaux, & quelquefois irrationnaux ſelon la valeur d'vne racine. Car ſi 1ℛ vaut 5, 20ℛ vaudront 100, duquel la racine quarree eſt 10 : partant $\sqrt{20ℛ}$ eſt vn nõbre rationel equiuallant 10: Et $\sqrt{c20ℛ}$ ſera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il eſt donc euident qu'on ne peut iuger ſi tels nombres ſont rationnaux ou irrationnaux, iuſques à ce que l'eſtimation & valeur d'vne ſeule racine apparoiſſe.

Or l'addition & ſouſtraction d'iceux nombres ſe fait par l'interpoſition des ſignes + & — Comme $\sqrt{36ℛ}$ adiouſtee à $\sqrt{12q}$, fait $\sqrt{36ℛ}+\sqrt{12q}$, ou $\sqrt{12q}+\sqrt{36ℛ}$. Et 36 eſtans oſtez de $\sqrt{36ℛ}$, reſtera $\sqrt{36ℛ}-36$: & ainſi des autres.

Que ſi les ſignes coſſiques ſont ſemblables, & les nombres irrationnaux (conſiderez ſans leurs ſignes coſſiques) commenſurables ; l'addition & ſoubſtraction ſe fera en la meſme maniere que des ſimples racines ſourdes, appoſant apres l'operation le meſme ſigne coſſique. Ainſi $\sqrt{8ℛ}$ adiouſtee à $\sqrt{18ℛ}$, fera $\sqrt{50ℛ}$. Mais oſtant $\sqrt{8ℛ}$ de $\sqrt{18ℛ}$, reſtera $\sqrt{2ℛ}$.

La preuue ſera facile & euidente, ſi on poſe la valeur d'vne ſeule racine eſtre quelque nombre, comme 2. Car 8ℛ ſeront 16, dont la racine quarree eſt 4 : & 18ℛ ſeront 36, dont la racine quarree eſt 6 : Or 4 & 6 font 10 : comme auſſi $\sqrt{50ℛ}$, puis que 50ℛ ſont 100, dont la racine eſt 10. Mais 4 oſtez de 6, reſtent 2, valeur de $\sqrt{2ℛ}$, puis que 2ℛ font 4, dont la racine eſt 2.

Mais afin que les nombres coſſiques irrationaux ſoient multipliez entr'eux, ou diuiſez, ils doiuent eſtre premierement reduits à meſme ſigne radical par multiplication en croix, comme nous auons enſeigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier $\sqrt{c4ℛ}$ par $\sqrt{8ℛ}$: icelles eſtans reduites à meſme ſigne radical, ſeront $\sqrt{qc\,16q}$, & $\sqrt{qc\,512c}$, ainſi qu'il appert en ceſte formule : leſquels deux nombres multipliez entre eux produiſent

$\sqrt{qc\,16q}$.		$\sqrt{qc\,512c}$.
$4ℛ$.	X	$8ℛ$.
$\sqrt{c}$.		$\sqrt{q}$.
3.		2.
6.		

diuiſent $\sqrt{qc}\,8192\beta$: mais $\sqrt{qc}\,512c$ diuiſee par $\sqrt{qc}\,16q$, le quotient ſera $\sqrt{qc}\,32\mathfrak{R}$. Item le nombre $\sqrt{qc}\,131072\,b\beta$ eſtant diuiſé par $\sqrt{qc}\,512c$, le quotient ſera $\sqrt{qc}\,256qq$.

Semblablement pour multiplier $1\mathfrak{R}$ par $\sqrt{4}$, il n'y a qu'à quarrer $1\mathfrak{R}$, & à ſon quarré prepoſer le ſigne radical, afin d'auoir $\sqrt{1q}$: puis le multiplier par $\sqrt{4}$, & viendra pour le produit $\sqrt{4q}$. Par meſme moyen $3\mathfrak{R}$ multipliees par $\sqrt{16}$, le produit ſera $\sqrt{144q}$: c'eſt à dire la racine quarree de $144q$, qui ſera 24, la racine eſtant 2. Et tels produits $\sqrt{4q}$, & $\sqrt{144q}$ ſont appellez par Clauius Nombres des Racines, ainſi qu'il appert és 12 & 28 queſtions du 32. chap. de ſon Algebre.

Or la preuue de toutes ces operations ſe fera, poſant la valeur d'vne racine, comme dit eſt cy deſſus: ou bien chaque operation par ſa contraire.

Quant aux fractions de ces nombres coſſiques irrationaux, il n'eſt beſoin d'en traicter particulierement, pource qu'elles ſuiuent l'Algorithme de leurs entiers, ioinct à celuy des nombres communs.

Or eſt icy à noter qu'vne equation ſe rencontrant entre vn nombre coſſique irrationel, & vn nombre abſolu, il la faudra reduire en ceſte maniere. Soit pour exemple vne equation entre $\sqrt{24}\,\mathfrak{R}$ & 12. Il y aura pareillement equation entre leurs quarrez, ſçauoir $24\,\mathfrak{R}$ & 144: ſoit donc diuiſé 144 par 24, & viendront 6 au quotient pour la valeur d vne racine. Item, s'il y a equation entre $\sqrt{10q}$ & 20; il y aura auſſi equation entre $10q$ & 400: diuiſant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'vne racine. Finalement ſi vne equation eſt trouuee entre $\sqrt{c}\,12q$, & 30: il y aura auſſi equation entre $12q$ & 27000, les cubes d'iceux: parquoy diuiſant 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'vne ſeule racine.

Que ſi quelqu'vn propoſoit vne equation entre $\sqrt{c}\,8$ & 3, il y auroit auſſi equation entre leurs cubes 8 & 27: Ce qui eſt impoſſible. Parquoy en ces equations il eſt neceſſaire que le nombre abſolu ſoit la racine du nombre auec lequel eſt le ſigne radical: telle qu'eſt l'equation d'entre $\sqrt{c}\,8$ & 2. Item entre $\sqrt{c}\,64$ & 4: Item entre $\sqrt{81}$ & 9, &c. Autrement l'equation ſera impoſſible.

Des racines vniuerſelles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

LA racine d'vn nombre compoſé ou diminué eſt appellee racine vniuerſelle: Comme la racine quarree de ce nombre compoſé $\sqrt{9}+22$, eſt dicte racine vniuerſelle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle ſera 5; car $\sqrt{9}$, qui eſt 3, eſtant adiouſtee à 22 fait 25, dont la racine quarree eſt 5. Ainſi auſſi par la racine vniuerſelle de cet autre nombre compoſé $10+\sqrt{7}$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, ſi elle ſe peut auoir, eſtant adiouſtee à 10, on doit prendre la racine de tout le nombre.

Or ces racines sont notees diuersement par les Autheurs: mais nous les figurerons appoſant le ſigne radical γ, ou γc au deuant du nombre dont la racine devra eſtre extraicte, & enfermant tout ledit nombre entre deux parentheſes, en ceſte maniere, $\gamma(\gamma 9 + 22)$, ou ainſi $\gamma(22 + \gamma 9)$, qui eſt le meſme. Item $\gamma c(10 + \gamma 7)$. Item $\gamma(49 + 182)$. Item $\gamma(10 + \gamma 16 + 3 + \gamma 64)$. Item $\gamma c(\gamma 25 - \gamma 4 + 24)$. Item $\gamma(10 + \gamma 36) + \gamma(70 + \gamma 121)$, laquelle vaut 13.

Or tout ainſi que le quarré d'vne ſimple racine quarree ſourde eſt le meſme nombre, delaiſſant ſeulement le ſigne radical γ, tellement que le quarré de $\gamma 5$ eſt 5, & celuy de $\gamma 12$ eſt 12: mais le cube d'vne racine cubique ſimple eſt le meſme nombre, delaiſſant le ſigne radical γc, tellement que le cube de $\gamma c 9$ eſt 9, & le cube de $\gamma c 12$ eſt 12: Ainſi auſſi, le quarré de la racine quarree de quelque nombre compoſé, eſt le meſme nombre, eſtant delaiſſé le ſigne radical γ. Comme le quarré de $\gamma(11 + \gamma 9 + \gamma 4)$ eſt $11 + \gamma 9 + \gamma 4$, c'eſt à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\gamma(\gamma c 216 + \gamma c 27)$ eſt $\gamma c 216 + \gamma c 27$, c'eſt à dire 9, dont la racine eſt 3. Le quarré de $\gamma(\gamma c 216 - \gamma c 27)$ eſt $\gamma c 216 - \gamma c 27$, c'eſt à dire 3, & la valeur de ſa racine eſt $\gamma 3$. Et ſemblablement le cube de la racine cubique d'vn nombre compoſé eſt le meſme nombre, eſtant oſté le ſigne radical γc. comme le cube de $\gamma c(\gamma 25 + \gamma 9)$ eſt $\gamma 25 + \gamma 9$, c'eſt à dire 8, tellement que ceſte racine-là valoit 2. Le cube de $\gamma c(\gamma 25 - \gamma 9)$ eſt $\gamma 25 - \gamma 9$, c'eſt à dire 2, & la racine d'iceluy eſt $\gamma c 2$. Le cube de $\gamma c(\gamma c 64 + \gamma c 27)$ eſt $\gamma c 64 + \gamma c 27$, c'eſt à dire 7, dont la racine eſt $\gamma c 7$. Et faut entendre le meſme de quarré de quarrez, & ſurſolides, &c. En ceſte maniere on multiplie la racine de quelconque nombre compoſé en ſoy, c'eſt à dire qu'on a le produict de ſon quarré, ou cube, &c.

Mais, pour multiplier la racine d'vn nombre compoſé, par vne racine ſimple, ou par vn nombre ſimple, ou compoſé, ou finalement par vne autre racine de nombre compoſé: il faut reduire l'vn & l'autre nombre à quarré, ou cube: puis faire la multiplication comme dit eſt cy deſſus. Comme pour exemple, ſoit $\gamma(7 + \gamma 3)$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarrez ſont $7 + \gamma 3$, & 4. Multipliant donc 7 par 4 viendront 28; mais $\gamma 3$ par 4, c'eſt à dire par $\gamma 16$, viendront $\gamma 48$. Donc tout le nombre produit eſt $\gamma(28 + \gamma 48)$.

$$\begin{array}{r} 7 + \gamma 3. \\ 4. \\ \hline 28 + \gamma 48. \end{array}$$

Item $\gamma c(\gamma c 64 + \gamma c 27)$ multipliée par 2, le produict eſt $\gamma c(\gamma c 32768 + \gamma c 13824)$, ou $\gamma c(32 + 24)$, c'eſt à dire $\gamma c 56$.

$$\begin{array}{r} \gamma c 64 + \gamma c 27. \\ 8. \\ \hline \gamma c 32768 + \gamma c 13824 \end{array}$$

Item ſoit $\gamma(7 + \gamma 4)$ qu'il faut multiplier par $\gamma 9$. Les quarrez des nombres ſont $7 + \gamma 4$, & 9. Ie multiplie donc $\gamma 4$ par 9, c'eſt à dire par $\gamma 81$, & vient $\gamma 324$: puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit ſera $\gamma(63 + \gamma 324)$, c'eſt à dire $\gamma 81$, ou 9.

$$\begin{array}{r} 7 + \gamma 4 \\ 9 \\ \hline 63 + \gamma 324. \end{array}$$

Soit auſſi $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$, qu'il faut multiplier par le nombre compoſé $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Le quarré du premier nombre eſt $6+\sqrt{9}$; & du poſterieur $20+\sqrt{256}$: eſtant donc faicte la multiplication, comme il ſe void icy, le produit ſera $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, c'eſt à dire $\sqrt{324}$ ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{9} \\ 20+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120. \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13+\sqrt{9})}$ par $\sqrt{(5+\sqrt{16})}$, c'eſt à dire 4 par 3. Les quarrez des nombres ſont $13+\sqrt{9}$, & $5+\sqrt{16}$: & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, eſt fait $\sqrt{144}$; & 13, c'eſt à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 5, c'eſt à dire par $\sqrt{25}$, eſt fait $\sqrt{225}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc tout le nombre produit eſt $\sqrt{(\sqrt{2704}+\sqrt{225}+77)}$, c'eſt à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ eſt 52, & celle de $\sqrt{225}$ eſt 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 adiouſtez enſemble font 144, dont la racine quarrée eſt 12.

$$\begin{array}{r} 13+\sqrt{9} \\ 5+\sqrt{16} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{144} \\ 65+\sqrt{225} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{225}+77 \end{array}$$

Qu'il faille encore multiplier $\sqrt{(\sqrt{18000}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ par $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$. Ayant poſé ces nombres comme tu vois icy, multiplie premierement $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, & viendra ſon quarré $\sqrt{450}+15$, auquel il faut prepoſer le ſigne — à cauſe que de + en — eſt faict —. En apres, de $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}$ en $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ ſera fait $\sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450$; (c'eſt à ſçauoir en multipliant leurs quarrez entr'eux) c'eſt à dire $1350+\sqrt{1620000}$, pource que $\sqrt{810000}$ vaut autant que 900, lequel nombre adiouſté à 450, fait 1350, & prepoſant le ſigne $\sqrt{}$, le produit ſera le nombre $\sqrt{(1350+\sqrt{1620000})}$: Mais la racine de ce nombre ſera $\sqrt{900}+\sqrt{450}$, (comme il apparoiſtra au chapitre ſuiuant) c'eſt à dire $30+\sqrt{450}$; duquel nombre eſtant oſté le premier produit $-\sqrt{450}+15$, fait de $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, reſtera ſeulement 15 pour tout le produit de la multiplication propoſee.

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{18000}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \sqrt{(\sqrt{450}+15)}+\sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \hline \sqrt{4050000}+450-\sqrt{450}+15 \\ \sqrt{810000}+\sqrt{4050000} \\ \hline \sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450 \end{array}$$

Et afin de rendre cecy plus manifeſte, nous adiouſterons encore vn exemple en nombres rationaux. Soit propoſé à multiplier $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ par $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ c'eſt à dire 1 par 3, & viendront 3. Car de $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faict ſon quarré $\sqrt{9}+6$ auec le ſigne —, qui luy doit eſtre prepoſé: puis apres, de $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faict $\sqrt{144}$,

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \sqrt{(\sqrt{9}+6)}+\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \hline \sqrt{144}+84-\sqrt{9}+6 \\ \sqrt{36}+\sqrt{1764} \\ \hline \sqrt{144}-9 \end{array}$$

c'eſt à dire 12 : Car $\gamma 36$ eſt 6, & $\gamma 144$ eſt 12, & $\gamma 1764$ eſt 42 ; tous leſquels nombres auec 84 font iceluy nombre 144, & luy prepoſant le ſigne γ, ſera le produit $\gamma 144$, c'eſt à ſçauoir 12, duquel nombre eſtant oſté l'autre produit $\gamma 9+6$, ſçauoir 9, reſtera 3 pour tout le nombre produit ainſi qu'il deuoit eſtre.

Or quand il faut multiplier la racine quarree d'vn nombre compoſé enſemble, auec la racine quarree d'vn nombre diminué ſemblable, en ſoy-meſme, comme $\gamma(12+\gamma 6)+(12-\gamma 6)$; ſoit poſé le nombre deux fois, ainſi qu'il appert icy, & ſoient pris les quarrez des parties, leſquels ſeront $12+\gamma 6$, & $12-\gamma 6$, qui font enſemble 24 : (car $+\gamma 6$ ruine $-\gamma 6$) Et ſoit multipliee vne partie par l'autre, & ſera fait $\gamma 138$, (pource que 6, quarré de $\gamma 6$, oſté de 144, quarré du nombre 12, reſte 138, auquel faut appoſer le ſigne γ), dont le double eſt $\gamma 552$: & $24+\gamma 552$ ſera le nombre produit cherché. Or la racine de ce produit eſt auſſi la ſomme des deux racines $\gamma(12+\gamma 6)$ & $\gamma(12-\gamma 6)$ recueillie en vne ſeule ſomme. Car quand la ſomme de deux nombres eſt multipliee en ſoy, la racine quarree du nombre produit eſt la ſomme des meſmes deux nombres : & partant puis que les deux racines propoſees enſemble, multipliees en ſoy, font $24+\gamma 552$, la racine de ce produit, ſçauoir eſt $\gamma(24+\gamma 552)$ ſera la ſomme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeſte par vn autre exemple en nombres rationnaux. Soit $\gamma(10+\gamma 36)+\gamma(10-\gamma 36)$ c'eſt à dire 6, qu'il faut multiplier en ſoy. Il eſt euident que le nombre qui ſera produict doit eſtre 36.

$\gamma(12+\gamma 6)+\gamma(12-\gamma 6)$
$\gamma(12+\gamma 6)+\gamma(12-\gamma 6)$

$12+\gamma 6+12-\gamma 6.$
$\gamma 138.$
$\gamma 138.$

$\gamma 552.$
$24+\gamma 552.$

Soient donc trouuez les quarrez des parties, leſquels ſeront $10+\gamma 36$, & $10-\gamma 36$, qui adiouſtez enſemble font 20 : & ſoit multipliée vne partie en l'autre, & viendra $\gamma 64$, dont le double ſera $\gamma 256$, c'eſt à dire 16 ; & partant le nombre produit eſt $20+16$, c'eſt à dire 36 : & la racine de ce nombre, ſçauoir 6, eſt pareillement la ſomme de l'addition de ces deux racines-là propoſees, comme il eſt manifeſte.

$\gamma(10+\gamma 36)+\gamma(10-\gamma 36)$
$\gamma(10+\gamma 36)+\gamma(10-\gamma 36)$

$10+\gamma 36+10-\gamma 36.$
$\gamma 64$
$\gamma 64$

$\gamma 256$
$20+\gamma 256.$

Or quand il faut multiplier vn nombre compoſé de racine ſimple, & de racine vniuerſelle, par vn nombre diminué ſemblable ; a auſſi lieu le compendium que nous auons enſeigné au chapitre 19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le nombre $\gamma 20+\gamma(20-\gamma 5)$ par le nombre $\gamma 20-\gamma(20-\gamma 5)$: Il n'y a qu'à ſouſtraire $20-\gamma 5$, quarré de la derniere particule du nombre compoſé ou diminué, de 20 quarré de la premiere particule, & le reſte $\gamma 5$, ſera le produit de la multiplication.

Mais s'il falloit multiplier $\gamma(29+8)+5$ en ſoy, il n'y auroit qu'à quarrer

chaque particule, & viendroient $2q+8$, & 25 : puis multiplier l'vne par l'autre, & le double du produit estant adiousté auec les susdits deux quarrez des particules, donneroit $2q+33+\sqrt{(200q+800)}$ pour tout le produit de la multiplication.

Si on vouloit encor multiplier $\sqrt{(5q-4\mathfrak{Z})}+8$ en soy, il ne faudroit aussi que prendre les quarrez de chaque particule, qui seroient $5q-4\mathfrak{Z}$, & 64, puis les adiouster au double du produit d'vne particule en l'autre, & viendroient $5q-4\mathfrak{Z}+\sqrt{(1280q-1024\mathfrak{Z})}$ pour tout le produit de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq+1q)}$ par $\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq-1q)}$: Il n'y a qu'à soustraire le quarré de la derniere particule, du quarré de la premiere particule, sçauoir est $\frac{1}{4}qq+1q$, de $\frac{1}{4}qq$, & le reste $-1q$, sera le produit de la multiplication.

Pour faire la diuision des racines vniuerselles, soit reduit à quarré, tant le nombre diuidande que diuiseur: puis apres soit faite la diuision comme il a esté enseigné cy deuant, & la racine du nombre produit sera le quotient. Comme pour exemple, soit $\sqrt{(13+\sqrt{7})}$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{5}$. Les quarrez des nombres, sont $13+\sqrt{7}$, & 5. Ie diuise donc 13 par 5, & vient $2\frac{3}{5}$, & $\sqrt{7}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, & vient $\sqrt{\frac{7}{25}}$: tellement que tout le quotient est $\sqrt{(2\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{7}{25}})}$.

$$\begin{array}{l} 13+\sqrt{7} \\ \sqrt{25} \end{array} \left[2\tfrac{3}{5}+\sqrt{\tfrac{7}{25}} \right.$$

Item soit $\sqrt{(432+\sqrt{7776})}$ qu'il faut diuiser par 6. Les quarrez des nombres sont $432+\sqrt{7776}$, & 36: le nombre 432 estant diuisé par 36, viennent 12; & $\sqrt{7776}$ estant diuisee par 36, c'est à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\eta \quad 1\mathfrak{Z}\mathfrak{Z} \\ 4\mathfrak{Z}2+\sqrt{\eta\eta\eta\phi} \\ \mathfrak{Z}\phi\phi \quad 1296 \\ \mathfrak{Z} \end{array} \left[12+\sqrt{6} \right.$$

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diuiser par $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$. Afin de trouuer vn nouueau diuiseur nous multiplierons $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$ & viẽdra vn nouueau diuiseur $\sqrt{4}$. Que si le diuidande $\sqrt{15}$, est aussi multiplié par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$, nous aurons vn nouueau diuidande $\sqrt{(45-\sqrt{1125})}$: le quarré d'iceluy sera $45-\sqrt{1125}$, & le quarré du nouueau diuiseur sera 4. Si donc on diuise 45 par 4, le quotient sera $11\frac{1}{4}$: si nous diuisons $-\sqrt{1125}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, le quotient sera $-\sqrt{70\frac{5}{16}}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{(11\frac{1}{4}-\sqrt{70\frac{5}{16}})}$.

Item soit diuisé 20 par $\sqrt{(10-\sqrt{5})}$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{(10+\sqrt{5})}$, afin d'auoir vn nouueau diuidãde $\sqrt{(4000+\sqrt{800000})}$, & vn nouueau diuiseur $\sqrt{95}$: les quarrez d'iceux nombres sont $4000+\sqrt{800000}$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, seront dõnez $42\frac{2}{19}$: & de la diuision de $\sqrt{800000}$ par 95, c'est à dire par $\sqrt{9025}$, sera produit $\sqrt{88\frac{232}{361}}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{(42\frac{2}{19}+\sqrt{88\frac{232}{361}})}$.

Item soit diuisée $\sqrt{c}(\sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824)$ par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824$, & 8. Ie diuise donc $\sqrt{c}32768$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c}512$, & vient au quotient $\sqrt{c}64$: & de la diuision de $\sqrt{c}13824$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c}512$, vient $\sqrt{c}27$. Tout le quotient est donc $\sqrt{c}(\sqrt{c}64+\sqrt{c}27)$, c'est à dire $\sqrt{c}7$.

Item ſoit $\sqrt{(588+\sqrt{34848})}$, qu'il faut diuiſer par $\sqrt{(12+\sqrt{8})}$. Les quarrez des nombres ſont $588+\sqrt{34848}$, & $12+\sqrt{8}$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nõbre par $12-\sqrt{8}$, afin d'auoir nouueau nombre diuidande, & diuiſeur: le diuidande ſera $\sqrt{(7056+\sqrt{1018112}-\sqrt{2765952}-\sqrt{278784})}$, ou pluſtoſt par reduction $\sqrt{(6528+\sqrt{332928})}$, & le diuiſeur ſera 136. Si donc on diuiſe 6528 par 136, viendront 48: & $\sqrt{332928}$ par 136, c'eſt à dire par $\sqrt{18496}$, viendront $\sqrt{18}$: & partant tout le quotient ſera $\sqrt{(48+\sqrt{18})}$.

Nous auons dit cy-deſſus comment il faut adiouſter vne racine vniuerſelle à vne ſemblable ayant le ſigne contraire: comme $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ auec $\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ dont la ſomme eſt $\sqrt{6}$. Mais telles racines ſe peuuent encore adiouſter enſemble comme enſuit.

Le quarré de la derniere particule de l'vne ou l'autre d'icelles racines ſoit oſté du quarré de la premiere particule, & à la racine quarree du reſte ſoit adiouſtee la premiere particule; puis ſoit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double là, ſera la ſomme de l'addition. Comme en l'exemple cy-deſſus, le quarré de la derniere particule eſt 3, lequel i'oſte de 4, quarré de la premiere particule, & reſte 1, que i'adiouſte à icelle premiere particule, & ſont 2, dont le double eſt 6, & la racine de 6, eſt $\sqrt{6}$, & autant eſt la ſomme de l'addition des deux racines propoſees.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouſter ſont diſſemblables, il faut diuiſer la plus grande par la moindre, & au quotient adiouſter 1; (ſinon que leſdites racines fuſſent incommenſurables: car alors l'addition d'icelles ſe fera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —) puis par le produict ſoit multipliee la plus petite racine; & le produict de la multiplication ſera la ſomme de l'addition. Comme pour exemple: ſoit $\sqrt{(8+\sqrt{48})}$ à laquelle il faut adiouſter $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). Ie diuiſe celle-là par ceſte-cy, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'eſt à dire 2, auquel i'adiouſte 1, & font 3, par leſquels ie multiplie $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, & vient $\sqrt{(18-\sqrt{243})}$ pour la ſomme des deux racines propoſees à adiouſter.

Item ſoit $\sqrt{(10+\sqrt{36})}$, qu'il faut adiouſter à $\sqrt{(11+\sqrt{25})}$. Ie diuiſe ceſte-cy par celle-là, & vient 1 au quotient, auquel i'adiouſte vne vnité, & ſont 2, par leſquels ie multiplie $\sqrt{(10+\sqrt{36})}$, & vient $\sqrt{64}$, c'eſt à dire 8, pour la ſomme de l'addition des deux racines propoſees.

Maintenant ſi d'vne racine vniuerſelle de nombre compoſé, il en faut ſouſtraire vne autre ſemblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule ſoit oſté du quarré de la premiere, & la racine du reſte ſoit oſtee d'icelle premiere particule, puis ſoit doublé ce dernier reſidu, & la racine de ce double ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$. Le quarré de la premiere particule eſt 144, duquel i'oſte 6, quarré de la derniere particule, & reſte 138, dont la racine eſt $\sqrt{138}$, que ie ſouſtrais de la premiere particule 12, & reſte $12-\sqrt{138}$, que ie double, & viennent $24-\sqrt{552}$, dont la racine eſt $\sqrt{(24-\sqrt{552})}$, qui eſt le reſte requis.

Mais ſi les racines ſont diſſemblables: pour faire la ſouſtraction, il faut diuiſer la plus grande par la moindre, & du quotient oſter 1; (ſinon que les racines propoſees fuſſent incommenſurables: Car alors la ſouſtraction ſe

fera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —). Puis par le reſte ſoit multipliee la moindre racine, & le produit ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\gamma(2+\gamma 3)$ qu'il faut ſouſtraire de $\gamma(8+\gamma 48)$. Ie diuiſe ceſte-cy par celle-là, & vient au quotient $\gamma 4$, c'eſt à dire 2, dont i'oſte vne vnité, & reſte 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\gamma(2+\gamma 3)$, & vient la meſme $\gamma(2+\gamma 3)$ pour le reſte de la ſouſtraction.

Item ſoit $\gamma(486-\gamma 162)$, de laquelle faut ſouſtraire $\gamma(\gamma 6-\gamma 2)$: ie diuiſe celle-là par celle-cy, & vient au quotient $\gamma 9$, c'eſt à dire 3, dont i'oſte 1, & reſte 2, par leſquels ie multiplie la moindre racine $\gamma(\gamma 6-\gamma 2)$, & vient au produict $\gamma 8(\gamma 96-\gamma 32)$ pour le reſte de la ſouſtraction requis.

De l'extraction des racines des binomes, & reſidus.

CHAP. XXIIII.

QVand deux quelconques nombres ſont conioints par le ſigne +, ils ſont ordinairement nommez Binome: comme $\gamma 12+\gamma 3$: & $\gamma 18+\gamma 8$. Mais eſtans accouplez par le ſigne —, ils ſont appellez Apoteme ou Reſidu: Comme $\gamma 12-\gamma 3$: & $\gamma 18-\gamma 8$. Et plus de deux nombres ainſi accouplez, ſont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\gamma 17+\gamma 10-\gamma 3$: ou $\gamma 17-\gamma 10+\gamma 3$, ſont dits Trinome: & $\gamma 17+\gamma 10+\gamma 3+\gamma 2$: ou $\gamma 17-\gamma 10+\gamma 3+\gamma 2$, ſont appellez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure, prop. 37 & 74 appelle ſeulement Binome, ou reſidu, quand les deux nombres conioints par le ſigne + ou —, ſont rationnels commenſurables en puiſſance ſeulement: il conſtitue de ſix ſortes de Binome, & autant de reſidu; chacun deſquels il definit, & enſeigne à trouuer au meſme liure. Or pour extraire la racine quarree d'iceux Binomes & reſidus, il y a diuerſes manieres, deux deſquelles nous enſeignerons icy, & au prealable le probleme ſuiuant.

Coupper vn nombre donné en deux parties, telles que le nombre produit d'icelles ſoit egal à vn nombre donné, qui ne ſoit plus grand que le quarré de la moitié d'iceluy nombre propoſé à diuiſer, ou (qui eſt le meſme) que la quatrieſme partie du quarré dudit nombre.

Qu'il faille coupper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliées entr'elles, leur produict ſoit 75, qui eſt moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nõbre propoſé 20. Soit oſté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, & reſteront 25, dont ſoit pris la racine quarree, laquelle ſera 5, & ſoit icelle adiouſtee à 10, moitié du nombre propoſé à diuiſer, & viendra 15, qui ſera le plus grand nombre cherché, mais icelle racine 5 eſtant oſtée d'icelle moitié 10, reſteront 5, qui ſera le moindre nombre requis: tellement donc que les deux nombres 15 & 5, ſont parties du nombre 20, telles que multipliees entr'elles, elles produiſent 75, ainſi qu'il eſtoit requis.

Maintenant ſoit le binome $38+\gamma 288$, duquel il faut extraire la racine quarrée. Soit couppé le plus grand nom 38 en deux parties, telles que leur

produit ſoit le nombre 72, quatrieſme partie du quarré du moindre nom, ſçauoir de 288, leſquelles parties ſeront trouuees par le prob. cy-deſſus, eſtre 36 & 2: d'iceux deux nombres ſoient priſes les racines quarrees, & icelles ſeront 6 & $\sqrt{2}$, qui conioinctes par le ſigne + feront $6+\sqrt{2}$, qui ſera la racine quarree du binome propoſé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$ eſtans accouplees par le ſigne — feront $6-\sqrt{2}$, qui ſera la racine quarree du reſidu $38-\sqrt{288}$. Item la racine quarree du binome $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, ſera trouuee en la meſme maniere eſtre $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom d'iceluy binome eſtant coupé en deux parties, telles que leur produit ſoit 6, quatrieſme partie de 24, quarré du moindre nom: icelles parties ſeront trouuees eſtre $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les rrcines conioinctes par le ſigne +, ſont $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}}$.

Pour autrement extraire la racine quarree du binome $38+\sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, oſter le quarré du moindre nom, & reſteront 1156, deſquels ſoit pris le quart, qui ſera 289, duquel ſoit pris la racine quarree, laquelle ſera 17, qu'il faut adiouſter, & ſouſtraire de la moitié du plus grand nom, ſçauoir de 19, & viendront 36, & 2, deſquels deux nombres ſoient priſes les racines quarrees, & ſeront 6, & $\sqrt{2}$, qui accouplees par le ſigne +, feront $6+\sqrt{2}$ pour la racine quarree du binome $38+\sqrt{288}$, comme deuant. Par la meſme maniere la racine quarree du reſidu $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, ſera trouuee eſtre $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{12})}-\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{12})}$.

Quant à la preuue, elle ſe fait comme en l'extraction des nombres abſolus, ſçauoir eſt, multipliant la racine trouuée par ſoy-meſme.

Or voila ſommairement les operations plus ordinaires & vſitees en l'Algebre numeralle: Et afin de donner aux apprentifs & peu verſez en ceſte ſcience, tant plus de cognoiſſance de ſa pratique, nous finirons ce traicté par quelques problemes ou queſtions, auec leurs ſolutions, au moyen deſquelles & des preceptes cy-deuant enſeignez on en pourra ſouldre infinis autres.

Diuerſes queſtions & problemes, auec leurs ſolutions.

CHAP. XXV.

1. *EN vne armée de 24000 hommes, il y a de trois nations, ſçauoir, François, Suiſſes & Allemans: mais le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt ſeptuple du nombre des Allemans: & le nombre des François ioinct à celuy des Allemands eſt quintuple des Suiſſes: On demande quel eſt le nombre de chaque nation?*

Premierement poſons 1R, pour le nombre des Allemans: donc le nombre des François & des Suiſſes enſemble ſera $24000-1R$; & partant 7R ſeront egales à $24000-1R$. Adioutons donc 1R de part & d'autre, & nous aurons 8R egales à 24000; par conſequent 1R, qui eſt le nombre des Allemands ſera 3000: parquoy le nombre des Francois & des Suiſſes enſemble eſt 21000. Or poſons 1R pour les Suiſſes: & les François ſeront $21000-1R$: Et puis que le nombre des François & des Allemands enſemble, eſt quintuple de celuy des Suiſſes, $24000-1R$ ſeront egales à 5R: adiouttons depart & d'autre 1R, & viendront 6R egales à 24000: partant 1R vaudra 4000, qui eſt le nombre des Suiſſes: & par conſequent il y a 17000 François.

2. *Il y a*

2 *Il y a vne armee composee de François, Allemans & Anglois: les François sont 25000: les Allemans sont moitié des François & Anglois, & les Anglois sont la huictiesme partie des François & Allemans: il faut trouuer le nombre tant des Allemans que des Anglois, & combien il y a d'hommes en toute l'armee.*

Soit posé 1ℛ pour les Allemans: donc les François & les Anglois ensemble seront 2ℛ, & toute l'armee sera 3ℛ. Et puis que les Anglois sont la huictiesme partie des François & des Allemans ensemble; & que les Allemans & François sont ensemble 1ℛ+25000: les Anglois seront $\frac{1}{8}$ℛ+3125. Parquoy veu que les François sont 25000, les Allemans 1ℛ, & les Anglois $\frac{1}{8}$ℛ+3125, toute l'armee sera $1\frac{1}{8}$ℛ+28125 egale à 3ℛ. Ostant donc $1\frac{1}{8}$ℛ de part & d'autre, l'equation sera entre 28125, & $1\frac{7}{8}$ℛ: parquoy diuisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, viendra le nombre 15000, pour la valeur de 1ℛ, qui est le nombre des Allemans; & partant les François & Allemans seront ensemble 40000, dont la huictiesme partie est 5000 pour le nombre des Anglois: & par consequent toute l'armée sera de 45000 hommes.

3. *Il y a vne colomne quadrangulaire rectangle de laquelle la base a les costez en raison sesquitierce, & sa hauteur est au plus grand costé de la base en raison double superbipartiente tierce, & la solidité d'icelle colomne contient 93312 toises: il faut trouuer chacune des dimensions susdictes.*

Le moindre costé de la base soit posé 3ℛ, & le plus grand 4ℛ: mais la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ afin qu'elle soit au plus grand costé 4ℛ, en raison double superbipartiente tierce, & le plus grand costé au moindre en raison sesquitierce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent 128c, egaux à 93312 solidité de la colomne. Diuisant donc 93312 par 128, viennent 729 pour 1c, & 9 pour 1ℛ: donc le moindre costé de la base, lequel nous auons posé estre 3ℛ, sera 27: & le plus grand 4ℛ, sera 36; & la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ sera 96. Et ces trois nombres 27, 36, 96 multipliez entr'eux produisent la solidité proposée 93312.

4. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est 30, & les costez d'iceluy sont en raison sesquialtere: il faut trouuer iceux costez, & le diametre.*

Soit posé le moindre costé 2ℛ, & partant le plus grand qui doit estre sesquialtere à iceluy sera 3ℛ: de la multiplication des costez entr'eux, sera produit 6q egaux à 30, aire donné. Diuisant donc 30 par 6, viendront 5 pour 1q; & partant 1ℛ, sera $\sqrt{5}$. Et pource que nous auons posé le moindre costé estre 2ℛ, iceluy sera $\sqrt{20}$, nombre double de $\sqrt{5}$; & le plus grand costé 3ℛ. sera $\sqrt{45}$, nombre triple de $\sqrt{5}$. Et pource que les quarrez des costez 20 & 45 sont ensemble egaux au quarré du diametre, le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy diam. $\sqrt{65}$.

5. *Il y a vn rectangle dont la difference des costez est $\sqrt{32}$, & leur raison triple: trouuer tant iceux costez, que l'aire d'iceluy rectangle.*

Posons que le moindre costé soit 1ℛ: Donc l'autre sera 3ℛ, puis qu'ils sont en raison triple: Mais puis que leur difference est 2ℛ, & la donnee est $\sqrt{32}$: icelles 2ℛ seront egales à $\sqrt{32}$; & consequemment 1ℛ vaudra $\sqrt{8}$, qui est le moindre costé, & partant le plus grand qui luy est triple sera $\sqrt{72}$: Et puis que l'aire d'vn rectangle s'obtient en multipliant vn costé par l'autre, si on multiplie $\sqrt{72}$ par $\sqrt{8}$, viendront $\sqrt{576}$, c'est à dire 24 pour l'aire du rectangle proposé.

6. *Il y a vn rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarrez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouuer les costez, l'aire, & le diam. dudit rectangle.*

Soit posé le moindre costé estre 1ℛ, & le plus grand 7ℛ; donc la somme d'iceux costez sera 8ℛ, & leurs quarrez, sçauoir 1q & 49q, adioustez ensemble feront 50q, centuple de 8ℛ. Il y a donc equation entre 50q & 800ℛ. Et diuisant 800 par 50, viendront 16 pour 1ℛ, moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112, & l'aire sera 1792, car c'est le produit d'vn costé multiplié par l'autre: Mais le diametre sera √12800. Car les quarrez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128, qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, dont la racine quarree, sçauoir est √12800 sera ledit diametre.

7. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est* 80, *& la difference des costez est* 2: *trouuer le diametre, & les costez d'iceluy rectangle.*

Soit posé le moindre costé de 1ℛ; & partant le plus grand sera 1ℛ+2. Ces costez multipliez entr'eux donnent pour l'aire 1q+2ℛ, lequel est egal à l'aire donné 80. Ostant donc 1ℛ de chacun, l'equation sera entre 1q, & 80—2ℛ. La moitié du nombre des racines est 1, dont le quarré est 1, qui adiousté à 80, sera 81, dont la racine quarree est 9, de laquelle ostant la susdite moitié 1, restera 8, estimation de 1ℛ, qui est pour le moindre costé: Donc le plus grand excedant iceluy de 2 sera 10. Iceux costez multipliez entr'eux produisent 80 aire donné, & les deux quarrez des costez sont 64 & 100, egaux au quarré du diametre: & partant le quarré du diametre sera 164, & iceluy diametre √164.

8. *Il y a vn rectangle duquel le diametre est* 30, *& la somme des costez* 42: *trouuer iceux costez, & l'aire du rectangle.*

Soit posé vn costé de 1ℛ, & partant l'autre sera 42—1ℛ: donc leurs quarrez seront 1q, & 1764—84ℛ+1q, qui sont ensemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation sera entre 2q+1764—84ℛ & 900. Et adioustant 84ℛ à chacun, elle sera entre 84ℛ+900, & 2q+1764. Et ostant 900 de chacun, restera equation entre 84ℛ, & 2q+864. Et derechef ostant 864 de chacun, elle sera entre 2q, & 84ℛ—864. Parquoy diuisant tout par 2, l'equation viendra entre 1q & 42ℛ—432. La moitié du nombre des racines est 21, dont le quarré est 441, duquel ostant 432, resteront 9, dont la racine quarree est 3, qui adiousteé à la susdite moitié 21, viendront 24 pour le plus grand costé: & partant resteront 18 pour le moindre: & iceux costez multipliez entr'eux, produisent 432 pour l'aire du rectangle.

9. *Il y a vn quarré duquel le diametre & le costé ensemble font* 6: *trouuer iceux costé & diametre.*

Soit posé 1ℛ pour le costé, & partant le diametre sera 6—1ℛ. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré du costé est 1q; & le quarré du diametre est 36—12ℛ+1q: il y aura equation entre 2q, & 36—12ℛ+1q: parquoy ostant 1q de chacun, demeurera equation entre 1q, & 36—12ℛ: maintenant la moitié du nombre des racines est 6, dont le quarré est 36, qui adioustez au nombre 36, viennent 72, dont la racine est √72, de laquelle estant ostee la susdite moitié 6, restera √72—6, pour la valeur de 1ℛ; & autant sera le costé du quarré; lequel estant osté de 6, resteront 12—√72 pour le diametre.

10. *Il y a vn autre quarré duquel le diametre surpasse le costé de* 3: *trouuer lesdits costé, & diametre.*

Pour le costé soit posé 1ℛ, & partant le diametre sera 1ℛ+3. Et pource que le

quarré du diametre eſt double du quarré du coſté ; lequel le quarré du coſté eſt 1q; le quarré du diametre ſera 1q+6R+9. L'equation ſera donc entre 2q, & 1q+6R+9; & oſtant 1q de chacun, reſtera l'equation entre 1q, & 6R+9. La moitié du nombre des racines eſt 3, dont le quarré eſt 9, qui adiouſté au nombre 9, faict 18, dont la racine eſt √18, à laquelle ſoit adiouſtée la ſuſdite moitié 3, & ſera faict √18+3, valeur de 1R, qui eſt pour le coſté du quarré: & partant le diametre ſera √18+6.

11. *Il y a vn quarré duquel le coſté multiplié par le diametre faict 10 : trouuer leſdits coſté, & diametre.*

Soit poſé le coſté de 1R: & puis qu'iceluy coſté multipliant le diametre fait 10: par le contraire diuiſant 10, le quotient donnera ledit diametre, & par conſequent iceluy diametre ſera $\frac{10}{1R}$. Et pource que le quarré du diametre eſt double du quarré du coſté, ſçauoir eſt de 1q, & le quarré dudit diametre eſt $\frac{100}{1q}$; il y aura equation entre 2q, & $\frac{100}{1q}$, laquelle par la multiplication croiſee ſera reduitte à celle d'entre 2qq, & 100. Diuiſant donc 100 par 2, viendront 50 pour la valeur de 1qq: & partant 1R ſera √√50, & tel eſt le coſté du quarré propoſé. Parquoy ſi on diuiſe 10 par √√50, viendront au quotient √√200 pour le diametre dudit quarré.

12. *Il y-a vn quarré duquel le coſté multiplié par la difference d'entre iceluy coſté, & le diametre fait 15 : trouuer le diametre, & le coſté dudit quarré.*

Soit poſé le coſté eſtre 1R, & partant la difference d'entre le coſté & le diametre ſera $\frac{15}{1R}$, laquelle eſt trouuee diuiſant 15 par 1R, ſçauoir eſt afin que le quotient multiplié par le diuiſeur 1R, produiſe le nombre diuiſé 15. Et pource que le diametre excede le coſté de ceſte difference, le diametre ſera 1R+$\frac{15}{1R}$. Et d'autant que le quarré du diametre eſt double du quarré du coſté: & le quarré d'iceluy coſté eſt 1q, & le quarré du diametre eſt $\frac{1qq+30q+225}{1q}$, il y aura equation entre 2q, & $\frac{1qq+30q+225}{1q}$, qui par multiplication en croix ſera reduite à l'equation d'entre 2qq, & 1qq+30q+225. Oſtant donc 1qq de chacun, l'equation ſera entre 1qq & 30q+225. La moitié du nombre des quarrez eſt 15, dont le quarré eſt 225, qui adiouſté à 225, viennent 450, dont la racine quarree eſt √450, à laquelle adiouſtant la ſuſdite moitié 15, viendra √450+15 pour 1q; & partant 1R ſera √(√450+15): & autant eſt le coſté requis, dont le quarré √450+15 eſtant doublé donnera √1800+30, pour le quarré du diametre: & partãt iceluy diametre ſera √(√1800+30), duquel eſtant ſouſtraict le coſté, reſtera la difference √(√1800+30)—√(√450+15), qui multipliee par le coſté √(√450+15) ſera produict le nombre 15.

13. *Il y a vn triangle duquel les ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire ſont 16 & 5, mais l'aggregé des deux coſtez eſt 33 : On demande combien eſt chacun deſdits coſtez, & conſequemment l'aire d'iceluy triangle?*

Ie poſe que le moindre coſté ſoit 1R: donc l'autre coſté ſera 33—1R, & partant les quarrez d'iceux coſtez ſeront 1q, & 1q—66R+1089: du moindre d'iceux quarrez ſoit oſté le quarré du moindre ſegment, & reſtera 1q—25 pour le quarré de la perpendiculaire. Mais du quarré du plus grand coſté ſoit auſſi oſté le quarré du grand ſegment, & reſteront encore 1q—66R+833 pour le quarré de la perpend. Partant il y a equation entre 1q—25, & 1q—66R+833. Parquoy adiouſtant & ſouſtraiant de part & d'autre ſelon les preceptes des Equations, viendront 66R egales à 858. Donc la valeur de 1R ſera 13, qui eſt le moindre coſté requis, & partant l'autre ſera 20, & la ſuperficie 126.

14. *Il y a vn triangle rectangle, duquel vn costé de l'angle droict est* $\sqrt{18}+3$, *mais l'autre costé & l'hypotenuse font ensemble* $\sqrt{162}+9$: *on demande combien est chaque costé.*

Posons 1R pour le costé de l'angle droict requis; & partant l'hypotenuse sera $\sqrt{162}+9-1R$: donc les quarrez des deux costez dudit angle droict seront $27+\sqrt{648}$, & 1q; lesquels deux quarrez ensemble sont egaux au quarré de l'hypotenuse, c'est assauoir à $243-18R+1q+\sqrt{52488}-\sqrt{648q}$: Parquoy si on oste de part & d'autre $\sqrt{648}$, viendra equation entre $1q+27$, & $243-18R+1q+\sqrt{41472}-\sqrt{648q}$: (car ostant $\sqrt{648}$ de $\sqrt{52488}$, qui sont commensurables, restera $\sqrt{41472}$) & si de chaque terme d'icelle equation on oste 1q, & 27, restera encore equation entre 0, & $216-18R+\sqrt{41472}-\sqrt{648q}$: mais adiouſtant de part & d'autre 18R, & $\sqrt{648q}$, l'equation viendra entre $\sqrt{648q}+18R$, & $216+\sqrt{41472}$. Or d'autant que le nombre $\sqrt{648q}$ a esté procreé multipliant deux fois $\sqrt{162}$ par 1R il doit estre pris pour nombre de racines, suiuant ce que nous auons dit à la page 393: & partant tout ce nombre $\sqrt{648q}+18R$ est le nombre des racines, & consequemment il faut par iceluy nombre (delaissant les signes cossiques q & R) diuiser l'autre nombre de l'equation $216+\sqrt{41472}$, afin d'auoir la valeur d'vne racine: pour faire laquelle diuision il faut, suiuant ce qui est enseigné au chap. 20. multiplier tant le diuiseur $\sqrt{648}+18$, que le diuidande $216+\sqrt{41472}$, par $\sqrt{648}-18$: quoy faisant viendront 324 pour nouueau diuiseur, & $\sqrt{3359232}+1296$ pour nouueau diuidande: & la diuision faite, le quotient sera $\sqrt{32}+4$, qui est la valeur de 1R: & autant est le costé cherché, que nous auons posé estre 1R, lequel costé estant soustrait de $\sqrt{162}+9$, restera $\sqrt{50}+5$ pour l'hypotenuse, puis que l'aggregé d'iceluy costé, & de ladite hypotenuse est $\sqrt{162}+9$.

15. *Il y a vn iardin rectangulaire, dont la diagonalle excede la longueur dudit iardin de 4 perches, & la largeur de 8. On demande combien est la longueur & la largeur dudit iardin, & consequemment l'aire d'iceluy.*

Ie pose que la largeur dudit iardin soit 1R: donc la diagonalle sera $1R+8$, & son quarré $1q+16R+64$, duquel estant osté le quarré de la largeur, sçauoir 1q, restent $16R+64$ pour le quarré de la longueur dudit iardin, & partant icelle longueur sera $\sqrt{(16R+64)}$, qui ostee de la diagon. resteront $1R+8-\sqrt{(16R+64)}$, qui sont egaux à l'excez donné 4: adiouſtant donc & soustraiant de part & d'autre ainsi qu'il appartient, viendra 1q egal à $8R+48$. Parquoy la valeur de 1R sera 12: & autant est la largeur du iardin, & consequemment la diagonalle d'iceluy sera 20, la longueur 16, & la superficie 192.

16. *Il y a vn autre iardin rectangulaire, dont les quatre costez auec la diagonalle font ensemble 38, & la superficie d'iceluy est 48. Assauoir combien est la longueur & la largeur dudit iardin.*

Ie pose 1R pour la somme de la longueur & de la largeur dudit iardin, & consequemment les quatre costez seront 2R, & la diagon. $38-2R$: partant son quarré est $1444-152R+4q$: à iceluy quarré soit adiouſté le double de la superficie donnee, (pource que par la 4. p. 2. le quarré de l'aggregé des costez comprenant l'angle droict d'vn rectangle, est egal aux quarrez d'iceux costez auec deux fois leur rectangle) & viendront $1540-152R+4q$, qui sont egaux au quarré de la somme de la longueur & largeur, qui est 1q. Adiouſtons & soustraions de part & d'autre ainsi qu'il appartient, & viendra 1q egal à $50\frac{2}{3}R-513\frac{1}{3}$. Parquoy 1R vaut 14: Et autant est

la somme de la longueur & de la largeur du iardin proposé. Parquoy les quatre costez seront ensemble 28, & la diagonalle 10. Nous auons donc maintenant l'aggregé des deux costez d'vn rectangle, sçauoir 14, & la diagon. d'iceluy 10 : Partant nous trouuerons suiuant ce qui est enseigné cy-deuant en la 8. question que la longueur du iardin proposé est 8, & sa largeur 6.

17. *Il y a vne piece de terre en forme de Rhombe, dont chaque costé est de 20 perches, & la difference des diagon. 4: Assauoir combien est chacune desdites diag. & la superficie de ladite piece.*

Ie pose que la moitié de la moindre diagon. soit 1R: Donc la moitié de l'autre sera 1R+2 : & partant les quarrez d'icelles moitiez seront 1q, & 1q+4R+4, lesquels quarrez font ensemble 2q+4R+4, & sont egaux au quarré du costé donné, qui est 400. Parquoy procedant à la reduction de ceste equation ainsi qu'il appartient, sera trouué 1q egal à 198—2R, & partant la valeur de 1R sera $\sqrt{199}-1$, & par consequent la moindre diagon. requise sera $\sqrt{796}-2$, & y adiouſtant la difference donnee, viendront $\sqrt{796}+2$ pour la plus grande diagonalle, laquelle multipliee par la susdite moitié $\sqrt{199}-1$, donne 396 pour la superficie de ladite piece de terre.

18. *Il y a vne autre piece de terre en Rhombe, dont chaque costé est de 15 perches, & la superficie 216 : On demande combien est chaque diagonalle de ladite piece.*

Ie pose que la moitié de la petite diagonalle soit 1R : Donc son quarré est 1q, qui osté de 225, quarré du costé donné 15, restent 225—1q pour le quarré de la moitie du grand diametre, qui partant est $\sqrt{(225-1q)}$, & icelle moitié estant multipliee par tout l'autre diam. sçauoir est par 2R, viendront $\sqrt{(900q-4qq)}$ pour la superficie de la piece. Mais elle a esté proposee de 216 : Il y a donc equation entre 216, & $\sqrt{(900q-4qq)}$, & consequemment entre leurs quarrez 46656, & 900q—4qq. Donc aussi entre 1qq, & 225q—11664 : partant 1R vaut 9, & consequemment la moindre diagonalle est 18, & la grande 24.

19. *Il y a encore vn Rbombe, duquel la somme des quatre costez & des deux diagonalles est 68, & la difference d'icelles diagonalles 4 : On demande combien est chaque costé dudit Rhombe, chacune des diagonalles, & la superficie.*

Ie pose que le costé dudit Rhombe soit 1R: Donc les quatre costez ensemble seront 4R, & les diagonalles ensemble 68—4R. Et puis que la difference d'icelles est proposee 4, la moindre desdites diagonalles sera 32—2R, & la plus grande 36—2R. Parquoy leurs moitiez seront 16—1R, & 18—1R, dont les quarrez font ensemble 2q—68R+580, & sont egaux au quarré du costé dudit Rhombe, c'est à dire à 1q. Parquoy adiouſtant & souſtraiant de part & d'autre ainsi qu'il appartient, on trouuera 1q egal à 68R—580 : & partant la valeur de 1R sera 10, la moindre diagon. 12, & la plus grande 16. Mais multipliant l'vne d'icelles diagonalles par la moitié de l'autre viendront 96 pour la superficie dudit Rhombe proposé.

20. *Trois marchans s'associans ensemble le premier met 140 liures plus que le second : mais le second & le troisiesme ensemble mettent 336 liures : Est aduenu qu'il ont gagné 264 liures, dont le troisiesme en a eu 84 liures pour sa part. On demande combien ils ont mis chacun, & combien le premier & le second ont eu chacun du gain.*

Posons que le second ait mis en la societé 1R : donc la mise du premier sera 1R+140, & celle du troisiesme 336—1R; consequemment la mise de tous les trois sera 476+1R. Et puis que le gain du 3. est 84 liures, & le gain total 264, posez les susdits nombres en ordre de regle de trois ainsi :

si 476+1℞ *donnent* 264, *combien donneront* 336—1℞? 84.

Or d'autant que de quatre nombres proportionaux le produict du premier par le quatriesme doit estre egal au produit du second par le tiers; il y aura equation entre 39984+84℞ & 88704—264℞: laquelle equation estant reduite ainsi qu'il appartient, viendra entre 348℞ & 48720, & par consequent 1℞ vaut 140 liures, qui est la mise du second: partant la mise du premier sera 280 liures, & celle du troisiesme 196: tellement que toute la mise sera 616 liures. Parquoy nous trouuerons le gain du premier disant par regle de trois,

si 616 *donnent* 264, *combien donneront* 280?

Et viendront 120 liures pour le gain du premier: qui auec celuy du troisiesme fait 204 liures, & partant le gain du second sera 60 liures.

21. *Deux Marchands s'estans associez ensemble ont gaigné* 100 *liures, & le premier, tant pour le principal qui a demeuré trois mois en la societé, que pour son gain prend* 100 *liures. Et l'autre duquel le principal n'a demeuré que deux mois en ladite societé prend* 125 *liures. Assauoir combien ils auoient mis chacun.*

Premierement, adiousțons les deux sommes qui ont esté prises, & viendront 225: ostons en tout le gain, & resteront 125 liures pour toute la mise. Posons 1℞ pour la mise du premier, & par consequent la mise de l'autre sera 125—1℞: Chacune de ces mises soit multipliee par son temps: viendra au premier 3℞ & à l'autre 250—2℞: mais l'aggregé sera 250+1℞: Disons donc par regle de trois, Si 250+1℞ donnent 100 de gain, que donneront les 3℞ du premier? & la regle faite on aura pour son gain $\frac{300℞}{250+1℞}$ tellement que l'aggregé de sa mise & gain sera $1℞+\frac{300℞}{250+1℞}$, qui est egal à 100: & par consequent $\frac{300℞}{250+1℞}$ seront egaux à 100—1℞, qui reduits par multiplication croisee, viendront 300℞ egales à 25000—150℞—1q: & partant 1q sera egal à 25000—450℞: parquoy prenant la racine quarree dudit nombre 25000—450℞ on trouuera 50 pour la valeur de 1℞, qui est la mise du premier, laquelle ostee de 125 resteront 75 pour la mise de l'autre.

Or est à noter que quand telles questions se font de trois marchans, elles tombent aux equations cubiques: de quatre aux quarrez de quarré: & ainsi de suitte: desquelles equations nous n'auons estimé estre à propos de parler en ce sommaire & abbregé d'Algebre, mais les auons reseruees pour estre traitees amplement en vn autre lieu.

22. *Vn marchand estant allé traffiquer à trois foires; il a autant gaigné à la premiere qu'il y auoit porté d'argent, tellement qu'apres ceste premiere negotiation il auoit le double de son argent: à la seconde son gain estoit* 6 *liures dauantage que la racine quarree de ce double; mais à la troisiesme son gain estoit* 4 *liures dauantage que le quarré du gain fait à la seconde foire: & apres toutes ces negotiations, il trouue qu'il a gaigné à ces trois foires* 1786 *liures. On demande quelle somme d'argent ce marchand auoit au commencement, & combien il a gaigné à chaque foire.*

Supposons qu'à la seconde foire il aye gaigné 1℞: donc puis que ce gain est 6 dauantage que la racine quarree du double de ce qu'il auoit porté ou gaigné à la premiere foire; si nous multiplions 1℞—6 en soy, viendront 1q—12℞+36, pour iceluy double; & pourtant le gain de la premiere foire sera $\frac{1}{2}q-6℞+18$: mais le gain de la troisiesme est 4 dauantage que le quarré du gain de la seconde que nous auons posé estre 1℞: donc iceluy gain sera 1q+4. Adiousțons ces trois gains ensemble

1q+4, 1ℛ, & $\frac{1}{2}$q—6ℛ+18, & viendront $1\frac{1}{2}$q—5ℛ+22 pour tous lesdits gains, qui partant sont egaux à 1786. Ostons de part & d'autre 22, & l'equation viendra entre $1\frac{1}{2}$q—5ℛ, & 1764; adioustons les 5ℛ, & nous aurons l'equation entre $1\frac{1}{2}$q, & 5ℛ+1764. Puis à cause de la fraction, reduisons & multiplions en croix, & l'equation viendra entre 3q, & 10ℛ+3528: & diuisons tout par 3, viendra equation entre 1q, & $3\frac{1}{3}$ℛ+1176. Parquoy prenant la racine quarrée de ce nombre, nous trouuerons 36 pour la valeur d'vne racine: Et partant la somme du gain fait à la seconde foire sera 36 liures; & puis qu'elle vaut 6 liures dauantage que la racine quarree du double de la somme gaignee à la premiere foire, ostons 6 liures, & resteront 30, dont le quarré 900, est le double de la somme, tant de l'argent porté à la premiere foire, que du gain fait à icelle, parquoy le marchand auoit porté 450 liures à ladite foire, & y gaigna autant. Mais puis que le gain fait à la troisiesme foire est 4 liures dauantage que le quarré de la somme du gain fait à la seconde, multiplions le gain 36 en soy, & viendront 1296, à quoy adioustons 4, & nous aurons 1300 liures pour le gain fait à ladite troisiesme foire: & que cela soit, adioustons ensemble tous ces trois gains 450, 36 & 1300 liures; viendront 1786 liures pour tout le gain fait aux trois foires susdites, ainsi que veut la proposition.

Que si on disoit qu'ayant gaigné à la troisiesme foire 4 liures dauantage que le quarré de toute la somme qu'il auoit au precedent; tout son argent est 877036: Nous poserions qu'apres la seconde foire il eut 1ℛ: Donc le gain de la troisiesme foire seroit 1q+4: & partant tout ce qu'il auroit apres ces negotiations seroit 1q+1ℛ+4, egaux à 877036: Ostons donc 1ℛ & 4 de part & d'autre, & restera 1q egal à 877032—1ℛ. Or la moitié du nombre des racines est $\frac{1}{2}$, dont le quarré est $\frac{1}{4}$, qui adiousté à 877032, font $877032\frac{1}{4}$, dont la recine quarree est $936\frac{1}{2}$, de laquelle soit ostée la susdite moitié du nombre des racines, & resteront 936 pour la valeur de 1ℛ. Et partant le marchand auoit autant d'argent apres la seconde foire: Mais ostons en 6 qu'il auoit gaigné plus que la racine de ce qu'il auoit apres la premiere foire; & pour ce gain posons 1ℛ: Donc il auoit 1q apres ladite premiere foire: Parquoy 1q+1ℛ seront egaux à 930; & ostant 1ℛ, l'equation se trouuera entre 1q, & 930—1ℛ; & procedant à l'extraction, nous trouuerõs 30 pour la valeur de 1ℛ: partant 36 est le gain de la seconde foire, qui osté des 936, restent 900 pour ce qu'il auoit apres la premiere foire, dont la moitié 450, est ce qu'il y auoit apporté, ainsi que deuant.

23. *Deux hommes mettant leur argent ensemble, la somme est* 200 *escus, mais diuisant l'argent du second par celuy du premier, le quotient est* $1\frac{1}{2}$: *Il faut trouuer l'argent de chacun.*

Soit posé 1ℛ pour le premier, & pour le second 1A: il faut donc resoudre la seconde racine en premiere ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200 escus; il y aura equation entre 1ℛ+1A, & 200. Ostant 1ℛ de chacun, restera l'equation entre 1A, & 200—1ℛ: donc 1A sera reduite en 200—1ℛ. Parquoy ie pose derechef le nombre du premier estre 1ℛ, & celuy du second 200—1ℛ, qui font ensemble 200 escus. Ie diuise maintenant le nombre du second par celuy du premier, & vient $\frac{200-1ℛ}{1ℛ}$ egal à $1\frac{1}{2}$, laquelle equation, par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 400—2ℛ, & 3ℛ. Et adioustant 2ℛ à chacun, l'equation sera entre 400, & 5ℛ: diuisant donc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier: & partant le second aura 120, qui diuisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$.

24. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dit aux deux autres, que s'il auoit encore*

100 escus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus il auroit le double de leur argent: pareillement le troisiesme dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le triple de leur argent: sçauoir combien a chacun.

Soit posé l'argent du premier estre 1R: donc auec 100, il aura 1R+100, & autant sera la somme du second & du troisiesme, & tous les trois auront 2R+100. Or soit posé la somme du second estre 1A: Donc auec 100, il aura 1A+100, lequel nombre est double de la somme du premier & du tiers, laquelle est 2R+100—1A: (Pource que ayans tous trois 2R+100, si on oste 1A, c'est à sçauoir l'argent du second, restera 2R+100—1A pour la somme du premier & du troisiesme.) Partant il y aura equation entre 1A+100, & 4R+200—2A. Et adiouſtant 2A à chacun, l'equation sera entre 3A+100, & 4R+200: & ostant 100 de chacun, demeurera l'equation entre 3A, & 4R+100. Si donc les touts sont diuisés par 3, l'equation viendra entre 1A, & $\frac{4}{3}$R+$\frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé auoir 1A, la somme d'iceluy sera $\frac{4}{3}$R+$\frac{100}{3}$. Finalement la somme du troisiesme soit posee estre 1B. Donc auec 100, il aura 1B+100, qui est nombre triple de la somme du premier & du second, laquelle est $\frac{7}{3}$R+$\frac{100}{3}$, composee de 1R somme du premier, & de $\frac{4}{3}$R+$\frac{100}{3}$ somme du second: Il y aura donc equation entre 1B+100, & $\frac{21}{3}$R+$\frac{300}{3}$; c'est à dire entre 1B+100, & 7R+100, & ostant 100 de chacun, l'equation sera entre 1B, & 7R: & partant la somme du tiers, qui a esté posee 1B, sera 7R. Parquoy puis que le premier a 1R, le second $\frac{4}{3}$R+$\frac{100}{3}$: & le tiers 7R: tous les trois ensemble auront $9\frac{1}{3}$R+$\frac{100}{3}$. Mais tous les trois auoient aussi 2R+100: Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3}$R+$\frac{100}{3}$, & 2R+100: & ostant 2R de chacun, restera equation entre $7\frac{1}{3}$R+$\frac{100}{3}$, & 100: & ostant derechef $\frac{100}{3}$, c'est à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3}$R, & $66\frac{2}{3}$: diuisant donc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 1R, somme du premier: & le second ayant $1\frac{1}{3}$R+$33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{5}{11}$: & le tiers ayant 7R, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainsi le premier auec 100, aura $109\frac{1}{11}$, egale à la somme du second & tiers: & le second auec 100, aura $145\frac{5}{11}$, qui est le double de la somme du premier & tiers: & finalement le tiers auec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui est le triple de la somme du premier & second.

Fin du Sommaire de l'Algebre.

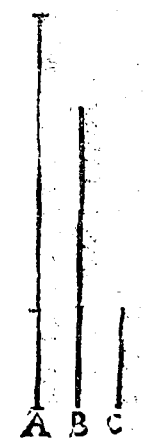
ELEMENT

ELEMENT
DIXIESME.

DEFINITIONS.

1 GRANDEVRS commenſurables, ſont celles là qui ſont meſurees par vne meſme meſure.

Ainſi les deux lignes droictes A & B, eſtans meſurees par vne meſme ligne C, ſeront dictes commenſurables. Ainſi auſsi vne ligne de 6 pieds eſt commenſurable à vne autre ligne de 7 pieds, pource qu'elles ſont toutes deux meſurees tant par la ligne d'vn pied, que par celle d'vn demy pied, d'vn tiers de pied, &c. Semblablement les ſuperficies, qui ſont meſurees par vne meſme ſuperficie, ſont dites commenſurables: Item les corps, ou ſolides qui ſont meſurés par vn meſme corps, ſont auſsi dits commenſurables.

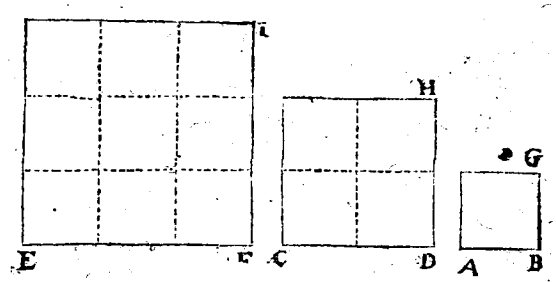


2 Mais les grandeurs incommenſurables, ſont celles-là qui n'ont aucune commune meſure.

Telles grandeurs ſont le diametre & le coſté de quelconque quarré: car icelles grandeurs n'ont aucune commune meſure, comme il ſera demonſtré à la derniere prop. de ce liure. Il y a encores pluſieurs autres lignes incommenſurables, ſçauoir eſt auſquelles on ne peut donner aucune commune meſure, beaucoup deſquelles ſeront expliquees en ce 10. liure; & enſeigné par quelles manieres elles peuuent eſtre trouuees: derechef, les ſuperficies ſont dites incommenſurables, & les ſolides incommenſurables, qui n'ont aucune commune meſure.

3 Les lignes droictes commenſurables en puiſſance, ſont celles là deſquelles les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Les lignes droictes ſont conſiderees ou ſelon leur longueur, ou ſelon leur puiſſance; & en l'vne & l'autre ſorte elles ſont dites commeſurables, & incommenſurables. Aux deux premieres definitions Euclide a expliqué quelles ſont les lignes commenſurables, & incommenſurables conſiderees ſelon leurs longitudes, mais en ceſte-cy, & en la ſuiuante, il declare quelles ſont celles dites commenſurables, & incommenſurables en puiſſance. Il dit donc icy que les lignes droictes dont les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie ſont commenſurables en puiſſance: Ainſi les lignes droictes AB & CD ſeront dites commenſurables en puiſſance, d'autant que leurs quarrez AG & CH peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie AG: Item les lignes droictes CD & EF, ſeront auſſi dites commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez CH & EI peuuent eſtre meſurez par l'eſpace ou quarré AG. Semblablement, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds ſera dite commenſurable en puiſſance à vne autre ligne de 6 pieds, parceque leurs quarrez 9 & 36 peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie: Ainſi auſſi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre √8 ſeront dictes commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez 4 & 8 ſont meſurez par vn meſme eſpace ſuperficiel: derechef, vne ligne eſtant √√20, & vne autre √√125 ſeront pareillement dites commenſurables en puiſſance, pource que leurs quarrez √20 & √125 ſont meſurez par vne meſme ſuperficie √5: car elle eſt deux fois en √20, & 5 fois en √125.



Or eſt à noter que toutes lignes droictes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance; car les quarrez d'icelles lignes ſont meſurez par le quarré de leur commune meſure, ainſi qu'il appert aux trois premiers exemples cy-deſſus.

4 Mais les lignes droictes incommenſurables en puiſſance, ſont celles-là deſquelles les quarrez n'ont aucune commune ſuperficie qui les puiſſe meſurer.

Comme par exemple, vne ligne eſtant de 2 pieds, & vne autre √√6, icelles deux lignes ſeront dites incommenſurables en puiſſance, pource qu'il n'y a aucune ſuperficie qui meſure leurs quarrez 4 & √6: de meſme √8 & √√12 ſeront auſſi dictes incommenſurables en puiſſance, car nul eſpace ſuperficiel ne meſure leurs quarrez 8 & √12.

Or eſt icy à noter que toutes lignes (ou nombres) incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude, mais non pas au contraire. Ainſi vne ligne de 2 pieds ſera bien incommenſurable en longitude à vne autre ligne de √8: mais non pas en puiſſance: & 2 qui eſt incommenſurable en puiſſance à √√8, l'eſt auſſi en longitude.

5 Cela eſtant ainſi, il eſt euident qu'à toute ligne droicte propoſee, on trouuera infinies lignes droictes commenſurables, & infinies incommenſurables: les vnes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or ceſte ligne droicte propoſee, eſt appellee rationelle.

C'eſt à dire que quand on propoſe quelque ligne droicte de grandeur cogneue & determinee, icelle eſt appellee rationelle, pource que c'eſt ſelon elle que nous ratiocinons: & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poſerons touſiours d'vn de ces nombres abſolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

6 Et les lignes droictes commenſurables à ceſte ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement ſont auſſi appellees rationelles.

7 Mais les lignes incommenſurables à ceſte ligne rationelle, ſont dictes irrationelles.

Si comparant quelque ligne droicte, à la ligne prinſe pour rationelle, & ſur laquelle nous ratiocinons, elle eſt trouuee commenſurable à icelle rationelle, ſoit en longueur, & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement, telle ligne eſt auſſi rationelle; mais ſi elle eſt incommenſurable à icelle ligne rationelle propoſee, tant en longitude qu'en puiſſance, ceſte dicte ligne eſt appellee irrationelle.

8 Le quarré deſcrit ſur vne ligne rationelle propoſee, eſt appellé rationel.

Tout ainſi que ceſte ligne-là, laquelle eſt cogneuë & determinee de certaine quantité eſt dicte rationelle; ainſi auſſi le quarré deſcrit ſur icelle ligne, eſt appellé rationel, pource qu'iceluy eſt certain & cogneu: & les ſuperficies comparees à iceluy quarré, ſont auſſi dictes rationelles, ou bien irrationelles, ſelon qu'elles ſeront trouuees commenſurables ou incommenſurables à iceluy quarré rationel, ainſi qu'il eſt dit és deux definitions ſuiuantes.

9 Les figures commenſurables à ce quarré rationel, ſont auſſi rationelles.

10 Mais celles qui luy ſont incommenſurables, ſont irrationelles & ſourdes.

11 Et les lignes droictes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſont irrationelles & ſourdes.

Or vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure, quand le quarré deſcrit ſur icelle eſt

egal à icelle figure, d'autant que tout quarré eſt la puiſſance de ſa racine ou de ſon coſté. Ainſi il a eſté dit cy-deſſus que deux lignes ſont commenſurables en puiſſance, lors que non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Or à ces definitions nous adiouſterons (apres Clauius) vne demande, & quelques communes ſentences, dont l'vſage ſera trouué en ce liure

DEMANDE.

Qu'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excede quelconque grandeur propoſee de meſme genre.

COMMVNES SENTENCES.

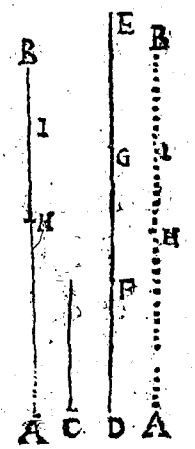
1 Vne grandeur meſurant tant de grandeurs qu'on voudra, meſure auſſi la compoſee d'icelles.

2 Vne grandeur meſurant quelconque grandeur, meſure pareillement toute grandeur que celle-là meſure.

3 Vne grandeur qui meſure toute vne grandeur, & vne retranchee d'icelle, meſure auſſi le reſte.

THEOR. 1. PROP. I.

Eſtans propoſees deux grandeurs inegales, ſi de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reſte encore plus de la moitié, & qu'en continuant cela ſe faſſe touſiours ainſi: Il demeurera en fin vne grandeur plus petite que la moindre des deux propoſees.



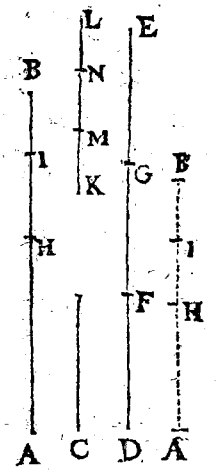
Soient propoſees deux grandeurs inegales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande: Ie diſque ſi d'icelle AB on retranche plus de la moitié, & du reſte encores plus de la moitié, & qu'on continue touſiours ainſi, il reſtera en fin quelque grandeur plus petite que C.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la grandeur C multiplice tant de fois que le produict excede la plus grande AB, & la produite d'icelle multiplication ſoit DE, laquelle ſera multiplice de C, & plus grande que AB: qu'elle ſoit donc diuiſee en parties egales à C, comme en DF, FG, GE: Item de AB ſoit retranché plus de la moitié, AH, & du reſte HB encore plus de la moitié HI, & en continuant touſiours cecy iuſques à ce que

AB soit diuisee en autant de parties que DE, sçauoir AH, HI, & IB. D'autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est pas plus grand que la moitié de DE: comme le retranché AH, est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB; semblablement si du plus grand reste FE, on oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit reste HB on oste plus de la moitié HI; le reste IB sera plus petit que le reste GE egal à C: & par consequent IB derniere partie de AB, sera plus petite que C. Estans donc proposees deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

On demonstrera semblablement que le mesme aduiendra si de AB, on oste la moitié AH, & du reste HB la moitié HI.

AVTREMENT. Ayant fait la mesme construction que dessus, soit prise KL autant multiple de IB que DE est multiple de C. Donc icelle KL estant diuisee en KM, MN, NL, parties egales chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE. Mais d'autant que AH est plus grande que HB, (ou egale si on a osté seulement la moitié de AB) & icelle HB plus grande que IB: aussi AH sera plus grande que IB, c'est à dire que KM. Derechef, puis que HI est plus grande que IB, (ou egale à icelle) & que icelle IB, est egale à MN; aussi HI sera plus grande que MN: (ou egale) & partant la toute AI sera plus grande que la toute KN. Adiouſtant donc les egales IB, NL, la toute AB sera plus grande que la toute KL. Mais DE est encore plus grande que AB: Donc DE sera bien plus grande que KL. Et puis que comme DE est à C, ainsi KL est à IB; (car KL est prise autant multiple de IB, que DE de C) aussi C sera plus grande que IB par la 14. p. 5. & partant le reste IB est moindre que C. Ce qu'il faloit demonstrer.

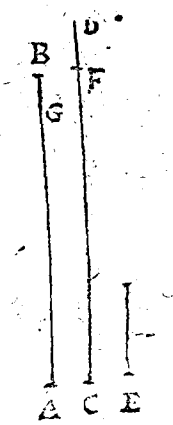


THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposees on retranche touſjours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le reste mesure la grandeur precedente: telles grandeurs seront incommensurables.

Soient proposees deux grandeurs inegales AB & CD, desquelles la moindre AB soit retranchee de la plus grande CD: puis le reste CD soit osté de AB, & qu'ainsi continuellement & alternatiuement la plus petite estant ostee de la plus grande, le reste ne mesure iamais sa grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit reste ne mesure iamais le plus grād reste: Ie dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables: & partant qu'elles ayent vne commune mesure, laquelle soit



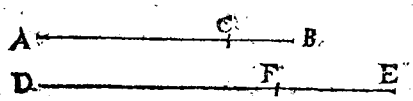
E, s'il eſt poſſible. Maintenant, de la plus grande CD ſoit retranchee CF egale à AB: Et s'il ſe peut faire, ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que le reſte DF ſoit plus petit que AB. Donc E commune meſure, meſurera la toute CD & la retranchee CF, egale à AB, ou multiplice d'icelle, par la 2. com. ſent. & elle doit auſſi meſurer le reſte DF par la 3. com. ſent. Item ſoit retranchee DF de AB tant de fois que faire ſe pourra, iuſques à ce que le reſte GB ſoit plus petit que E, qui meſure FD, & par conſequent ſa multiplice AG, par la 2. comm. ſent. donc auſſi le reſte GB, par la 3. comm. ſent. ce qui eſt abſurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune meſure; & par conſequent ſont incommenſurables. Parquoy ſi de deux grandeurs inegales propoſees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons ceſte prop. ainſi:

Si de deux grandeurs incommenſurables propoſees l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, le reſte ne meſurera iamais la grandeur precedente.

Soient propoſees deux grandeurs incommenſurables, AB, DE, dont la moindre AB ſoit oſtee de DE, & le reſte ſoit FE: Item de AB ſoit oſtee FE, & le reſte ſoit BC, & ainſi continuellement la plus petite de la plus grande: Ie dis que le reſte ne meſurera iamais la grandeur prec. Car ſi faire ſe peut que CB meſure la preced. FE. Donc puis que CB meſure FE, & icelle FE meſure AC, auſſi CB meſurera AC par la 2. com. ſent. Mais elle meſure auſſi ſoy-meſme. Donc CB meſurera pareillement la toute AB par la 1. comm. ſent. Mais AB meſure DF: Donc par la 2. com. ſent. CB meſurera la meſme DF: Et puis qu'on a poſé qu'elle meſure auſſi FE, elle meſurera la toute DE par la 1. com. ſent. Mais il a eſté demonſtré qu'icelle CB meſure auſſi AB: elle meſure donc AB & DE: ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ont oſté poſees incõmenſurables.



A ce theor. Clauius adiouſte ceſtuy-cy.

Si de deux grandeurs commenſurables propoſees, on oſte touſiours alternatiuement la moindre de la plus grande, quelque grandeur reſtante meſurera la precedente.

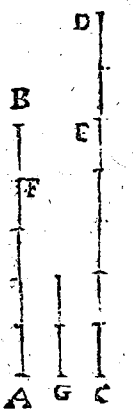
Car ſi iamais le reſte ne meſuroit la grandeur precedente, les propoſees ſeroient incommenſurables par ceſte 2. prop. ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ſont poſees commenſurables.

Parquoy il eſt facile de cognoiſtre, ſi deux quelconques grandeurs propoſees ſont commenſurables, ou non: Car retranchant alternatiuement la moindre de la plus grande, ſi quelque reſte meſure le precedent, les grandeurs propoſees ſeront commenſurables, comme il appert de la demonſtration du premier theor. de ce Scholie: Mais ſi le reſte ne meſure iamais la grandeur precedente, les grandeurs propoſees ſeront incommenſurables, comme Euclide a demonſtré en ceſte 2. prop.

PROBL. 1. PROP. III.

Eſtans donnees deux grandeurs commenſurables, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point: Si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchee de CD, & que le reste ED mesure AB. Ie dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son egale: & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G (s'il est possible) donc par les communes sentences G mesurera AB, CD, & le retranché CE egal à AB, & par consequent le reste ED, qui est plus petit; ce qui est impossible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD: Partant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc donnees deux grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

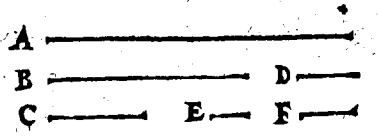
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit premierement trouuee D plus grande commune mesure de A & B par la 3. proposition 10. Or si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le corollaire de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que les grandeurs A, B, C sont commensurables, quelque commune mesure d'i-



celles mesurera, D plus grande mesure d'icelles A & B, par le corol. de la 3. prop. 10 mais ceste mesme mesure-là mesurera aussi C : donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouuee par la susdicte 3. proposition 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C : & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C ; & D mesure A & B, par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C. Donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdit coroll. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C : donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles : ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grãdeurs A, B, C : Et partant E est la plus grande commune mesure d'icelles. Parquoy estans donnees trois grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est euident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si E mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

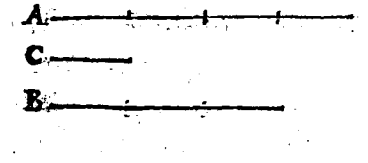
Par semblable maniere, estans donnees plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure : & ce mesme corollaire aura aussi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Ie dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle soit C : & autant de fois que C mesure A, que l'vnité F mesure le nombre D ; & autant de fois que C mesure B, que l'vnité mesure aussi le nombre E. Or puis que la grandeur C & l'vnité F, mesurent egallement la grandeur A & le nombre D, la grandeur A contiendra la grandeur C autant de fois que le nombre D contient l'vnité F ; & partant comme A est à C, ainsi le nombre D est à l'vnité F. Mais puis que la grandeur C mesure la grandeur B, & l'vnité F le nombre E, egalement ; comme C est à B, ainsi l'vnité F est au nombre E. Donc en raison egale, A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. p. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui soient l'vne à l'autre comme le nombre C est au nombre D : Ie dis qu'elles seront commensurables.

Car la grandeur A soit entendue estre diuisee en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'vne d'icelles parties soit egale à E : donc E est à A, ainsi que l'vnité F est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D : donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F mesure le nombre D : donc aussi E mesure B : mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B: & partant par la premiere deff. de ce liure A & B sont commensurables. Parquoy si deux grandeurs sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

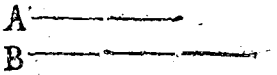
Par cecy est euident qu'estant proposez deux nombres comme C & D, & vne ligne droicte comme A, qu'il sera aisé de trouuer vne autre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y-a d'vnitez au nombre C, & on prend vne ligne droicte B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez au nombre D; alors A sera à B, comme le nombre C au nombre D: ainsi qu'il est manifeste, parce qui a esté demonstré en ceste prop.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut, estans donnez deux nombres, & vne ligne droicte, trouuer vne autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer vne ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre D: Il faudra trouuer ainsi que dessus la ligne B, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: puis soit trouuee par la 13. prop. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B: & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommensurables, ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommensurables A & B: Ie dis qu'elles ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre.



Ce qui est manifeste: car si elles estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6 prop. 10. ce qui est contre l'hypothese, ayans esté posées incommensurables. Parquoy les grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR 6. PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeront incommenſurables.

Que les grandeurs A & B ne ſoient entr'elles comme nombre à nombre: Ie dis qu'elles ſont incommenſurables. A——— B———

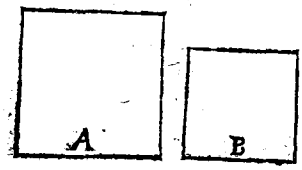
Ce qui eſt euident: car ſi elles eſtoient commenſurables, il faudroit qu'elles fuſſent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui eſt contre noſtre hypotheſe, puis qu'elles ont eſté poſees n'eſtre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy ſi deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez deſcrits ſur lignes droictes commenſurables en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez qui ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez deſcrits de lignes droictes incommenſurables en longitude, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez incommenſurables en longitude.

Soient les lignes droictes A & B commenſurables en longitude: Ie dis que leurs quarrez ſont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Car puis que les lignes A & B ſont commenſurables en longitude, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D: & les quarrez d'iceux C & D ſoient E & F. Or les quarrez de A & B ſont en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarrez E & F ſont auſſi en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A eſt au quarré de B, comme le nombre quarré E eſt au nombre quarré F: C'eſt à ſçauoir en raiſon doublee des coſtez A & B, ou des nombres C & D, qui ſont en la meſme raiſon que les lignes A & B.



C. 4. D 3.
E. 16. F 9.

Pour la ſeconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Ie dis que les lignes A & B ſeront commenſurables en longitude. Car par la 20. pr. 6. & 11. prop. 8. la raiſon des

quarrez aux quarrez, eſt la raiſon doublee de leurs coſtez: & partant comme le coſté A au coſté B, ainſi le nombre C au nombre D, puis que leurs raiſons doublees ſont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B ſont commenſurables en longitude.

Pour la troiſieſme partie, ſoient les lignes droictes A & B incommenſurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne ſont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi les quarrez de A & B eſtoient ainſi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B ſeroient commenſurables en longitude contre l'hypotheſe.

Finalement, les quarrez de A & B n'eſtans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis qu'elles ſont incommenſurables en longitude. Car autrement leurs quarrez ſeroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypotheſe. Parquoy les quarrez deſcrits de lignes droictes commenſurables en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par les choſes cy-deſſus demonſtrees, que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance: mais que celles qui ſont commenſurables en puiſſance ne le ſont pas touſiours en longitude. Que les incommenſurables en longitude, ne le ſont pas pourtant en puiſſance: & que celles incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commenſ. en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'eſt à dire ſimplement comme nombre à nombre: iceux quarrez ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commenſurables en longitude le ſont auſſi en puiſſance.

Puis apres, veu que les lignes dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains ſeulement comme nombre à nombre, ſont commenſ. en puiſſance (car leurs quarrez ſont commenſurables par la 6. prop. 10.) & non en longitude, comme il a eſté demonſtré: il appert que les lignes commenſurables en puiſſance ne le ſont pas pourtant en longitude, ſinon que les quarrez d'icelles lignes ſoient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, puis que les lignes deſquelles les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre ſont incommenſurables en longititude, & commenſurables en puiſſance: il appert que les lignes incommenſurables en longitude ne le ſont pas touſiours en puiſſance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre à nombre, qui ſoyent auſſi incommenſ. en puiſſance, veu que leurs quarrez ſont incommenſ. par la 8. prop. 10.

Finalement eſt manifeſte que les lignes incommenſ. en puiſſance, le ſont auſſi en longitude: car ſi elles eſtoient commenſ. en longit. elles le ſeroient auſſi en puiſſance, comme appert par la premiere partie de ce corollaire; ce qui eſt contre l'hypotheſe.

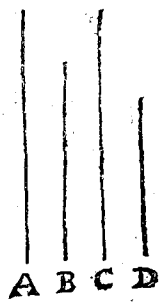
SCHOLIE.

Il eſt à noter qu'és deux premieres parties de ceſte propoſition s'entend auſſi des lignes inexplicables par nombre, pourueu qu'elles ſoient commenſurables en longitude; com-

me ſi les quarrez de A & B eſtoient 12 & 3, leurs coſtez ſeroient √12 & √3, qui ſont nexplicables par nombres, toutesfois commenſ. Car par la 20. prop. 6. 12 ſeroit à 3 en raiſon doublee de √12 à √3. Mais 12 eſt quadruple de 3: Ainſi le coſté A ſera double du coſté B, par la 10. def. 5. Car la double raiſon doublee eſt quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit commenſurable à la ſeconde, la troiſieſme, ſera auſſi commenſurable à la quatrieſme. Que ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi incommenſ. à la quatrieſme.



Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: & ſoit A 1, commenſurable à B 2e. Ie dis que C 3e. ſera auſſi commenſ. à D 4e.

Car A eſtant commenſurable à B, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D; Partant C eſt à D, comme nombre à nombre: & par conſequent commenſurable par la 6. prop. 10.

Que ſi A eſtoit incommenſ. à B. Ie dis que C ſeroit auſſi incommenſurable à D: Car A & B ne ſeroient pas comme nombre à nombre par la 7. pr. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D: donc C n'eſt pas à D comme nombre à nombre: & par conſequent incommenſurable par la 8. prop. 10. Si donc quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans diſſemblables, c'eſt à dire, qui ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A, & vn autre non quarré B. A 16. B 20. *Ie dis qu'iceux nombres A & B ſont plans diſſemblables. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, ils ſeroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. pr. 8. & partant A eſtant nombre quarré, auſſi B ſeroit quarré par la 24. pr. 8. contre l'hypotheſe. Donc A & B, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.*

PROBL. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables à vne ligne rationelle propoſee, ſçauoir vne en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soit la ligne rationelle propoſee A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommenſurables, l'vne ſeulement en longitude, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soient trouuez par le lemme precedent deux nõbres B, & C, qui ne ſoient

entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré ſoit au quarré de la ligne A, comme le nombre C eſt au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarrez de A & D ſont comme nombre à nombre, ils ſeront commenſurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'eſtans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les coſtez A & D commenſ. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D ſont commenſurables en puiſſance ſeulement : la ligne D eſt donc la premiere requiſe.

A —— B 20.
E ——
D —— C 16.

Maintenant ſoit trouuée la ligne E moyenne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E ſera la ſeconde ligne demandee : car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A eſt au quarré de E comme A eſt à D, & icelles A & D ſont incommenſurables en longitude, comme il a eſté demonſtré : le quarré de A ſera auſſi incommenſ. au quarré de E, par la 10. prop. 10. Parquoy les lignes A & E ſont incommenſ. en puiſſance, & par le corol. de la 9. prop. 10. elles ſont auſſi incommenſ. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

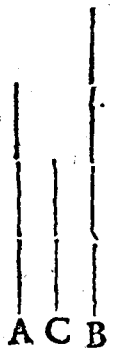
La ligne A ſoit 5 : donc la ligne D ſera √20, laquelle il appert eſtre incommenſurable en longitude à A, mais commenſurable en puiſſance. Mais la ligne E eſtant moyenne prop. entre A 5, & D √20, elle ſera √√500, qui eſt incommenſurable en longit. que puiſſance à A 5.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commenſurables à vne autre, ſont auſſi commenſurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commenſ. chacune à la grandeur C : Ie dis qu'elles ſont commenſurables entr'elles.

Car puis que A & C ſont commenſur. icelles ſeront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & ſoit comme le nombre D au nombre E. Derechef puis que C & B ſont commenſ. C ſera à B, comme nombre à nombre, & ſoit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, ſelon les raiſons de D à E, & F à G : tellement que H ſoit à I comme D à E, c'eſt à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'eſt à dire comme C à B. Donc puis que A eſt à C, comme H à I, & C à B, comme I à K ; en raiſon egale, A ſera à B, comme H à K, c'eſt à dire comme nombre à nombre : & partant A



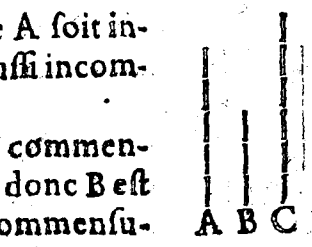
D 10, E 8.
F 2, G 3.
H 5, I 4. K 6.

& B ſont commenſ. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commenſurables à vne autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'vne eſt commenſurable à vne troiſieſme, & l'autre incommenſ. icelles grandeurs ſeront incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſ. à C; & B incommenſ. à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſ. entr'elles. Car ſi B eſtoit commenſ. à A, lequel A eſt poſé auſſi commenſ. à C, par la 12. pr. 10. B & C ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A & B ne ſont commenſ. Parquoy ſi de deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'vne eſt incommenſ. à vne tierce grandeur, auſſi ſera l'autre à la meſme.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B, & que A ſoit incommenſurable à la tierce C: Ie dis que B & C ſont auſſi incommenſurables.

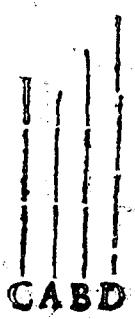
Autrement, ſi B eſt commenſurable à C, elle ſera auſſi commenſurable à A, par la 12. prop. 10. contre noſtre hypotheſe: donc B eſt incommenſurable à C: Parquoy ſi de deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceſte prop. le theoreme ſuiuant, vtile aux choſes demonſtrees en ce liure.

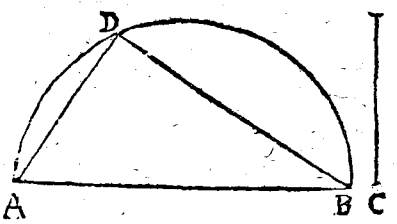
Les grandeurs commenſurables à des incommenſurables, ſont auſſi incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommenſurables, auſquelles C & D ſoient commenſurables, ſçauoir eſt C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommenſurables entr'elles. Car puis que A & C ſont poſees commenſurables, & A incommenſurable à B, l'autre C ſera auſſi incommenſ. à A par la 14. prop. 10. Derechef, puis que D & B ſont poſees commenſurables, & B a eſté demonſtree incommenſurable à C; D ſera auſſi incommenſurable à la meſme C par la 14. prop. 10. Ce qui eſtoit propoſé.



LEMME.

Eſtans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.



Soient données les deux lignes droictes AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit descrit sur AB le demy cercle A D B, & dans iceluy soit accommodee AD egale à C, par la 1. pr. 4. & soit menee D B. Ie dis que AB peut plus que C du quarré de B D. Car d'autant que l'angle D est au demy cercle, il est droict par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB: sera egal aux quarrez de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'est à dire que C, du quarré de B D. Ce qui estoit proposé.

Semblablement estans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient données les deux lignes droictes AD, BD: & il faut trouuer vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posées icelles AD, BD à angle droict D, & tiré AB. Il est euident qu'icelles AB peut les deux AD & BD, puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB, est egal aux deux quarrez de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes droictes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: aussi la troisiesme pourra plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude: aussi la troisiesme pourra plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude.



Soient 4. lignes droictes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E; & C plus que D du quarré de F. Ie dis que comme A sera commensurable ou incommens. en longitude à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable en longitude à F.

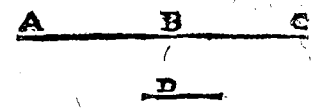
Car puis que A, B, C, D, sont proportionneles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarrez de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc aussi les quarrez de B, E, seront au quarré de B, comme les quarez de D, F, au quarré de D; & en diuisant, cõme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. cõme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F sera à la ligne D; & en changeant,

comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F; en raison egale, cõme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parquoy si quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commensurables sont conioinctes, la composee sera commensurable à chacune de ses parties: Et si la composee est commensurable à vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles.

Soient ioinctes deux grandeurs commensur. AB & BC: Ie dis que la composee AC, est aussi commens. à chacune d'icelles A B & B C.



Car puis que AB & B C sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle soit D. Donc puis que D mesure A B & BC, elle mesurera aussi la toute A C, par la 1. c. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Que la toute AC soit commens. à vne de ses parties, sçauoir à A B: Ie dis qu'icelles parties A B, B C seront commensurables entr'elles. Car puis que A C & A B sont commensurables, elles auront vne commune mesure, comme D, laquelle mesurant la toute AC & la retranchee AB, elle mesurera aussi le reste B C par la 3. commune sent. Partant AB & BC seront commensurables entr'elles, puis qu'elles ont vne commune mesure D. Parquoy si deux grandeurs commensurables, & c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à l'vne d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC: Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commensurables: donc par la premiere partie AC sera commensurable à chasque partie, AB, BC.

SCHOLIE.

Soit AB √18, & BC √8, lesquelles sont commens. La composee AC sera √50, laquelle est commens. tant à √18, que à √8. Car √50 est à √18, comme 5 à 3: & à √8 comme 5 à 2.

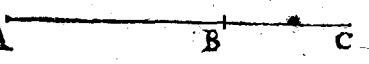
THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommensurable à chacune de ses parties: Et si la composee est incommensurable à l'vne de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.

Soient

Soient conioinctes deux grandeurs incommenſ. AB & BC: Ie dis que la toute AC eſt incommenſ. à vne chacune de ſes parties AB & BC.

Autrement, ſi AC eſtoit commenſ. à AB, elle le ſeroit auſſi à BC: car la commune meſure qui meſureroit AC & le retranché AB, meſureroit auſſi le reſte BC, par la 3. c. ſent.



Et partant AB & BC ſeroient commenſ. (ce qui eſt contre l'hypotheſe.) Donc AC & AB ſont incommenſ. Il s'enſuiura le meſme inconuenient ſi on nie que AC & BC ſoient incommenſurables

Pour la ſeconde partie: Ie dis que ſi AC & BC, ſont incommenſ. que AB & BC ſeront auſſi incommenſ. Autrement ſi elles eſtoient commenſurables: La toute AC, ſeroit auſſi commenſurable à ſa partie BC par la 16. p. 10. contre noſtre hypotheſe. Donc AB & BC ſont incommenſ. Par meſme argument nous demonſtrerons que ſi AC & AB ſont incommenſ. que AB & BC ſont auſſi incommenſurables. Parquoy ſi on conioinct deux grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il reſulte de ces choſes, que ſi vne grandeur compoſee de deux, eſt incommenſurable à l'vne d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC compoſee de AB & BC eſt incommenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC. Car ſi AC eſtoit commenſ. à icelle BC, elle le ſeroit auſſi à AB, par le coroll. de la precedente prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc AC & BC ne ſont commenſurables, mais incommenſurables.

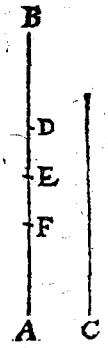
SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC √ 28, leſquelles ſont incommenſurables. La compoſee AC ſera 8 + √ 28 incommenſurable à chacune d'icelles AB 8, & BC √ 28.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude: Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & deffaillant d'vne figure quarrée; le rectangle diuiſera icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. ſur la plus grande AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarrée, c'eſt à dire d'vne ligne egale à ſon autre coſté. Et ſoit iceluy rectangle contenu ſous AD & DB commenſurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB couppee en deux egalement en E, & ſoit faicte EF egale à ED : Il eſt euident que AF ſera egale à DB, puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchees EF, ED. Maintenant, puis que AB eſt couppee en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB auec le quarré de ED, ſeront egaux au quarré de BE, lequel n'eſtant par l'hypotheſe que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, ſont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AD & DB eſt le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB eſt plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du ſeul de FD egal à iceux par le Schol. de la 4. p. 2. puiſque FD eſt double de ED. Dauantage, puis que AD & DB ſont poſees commenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi commenſ. en longitude à ſa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à ſon egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: & par conſequent au reſte de la ligne FD par la meſme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt commenſurable en longitude.

Pour la ſeconde partie, que AB puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, & qu'à icelle AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarree, lequel rectangle diuiſe AB és parties AD, DB : Ie dis qu'icelles parties AD & DB ſeront auſſi commenſ. en longitude. Car demeurant la meſme conſtruction que deſſus, il ſera demonſtré comme là que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a eſté poſee pouuoir plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude : & partant AB ſera commenſ. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compoſee de FD, AF, & DB comme d'vne, eſt commenſurable en longitude à la partie FD; la meſme AB ſera auſſi commenſurable en longitude à l'autre partie compoſee de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle compoſee de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longit. à DB, puis qu'elle eſt double d'icelle : donc puis que chacune d'icelles AB, DB eſt commenſurable en longit. à la compoſee de AF, DB; auſſi AB, DB ſeront commenſurables entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB compoſee de AD, DB eſt commenſurable en longitude à icelle DB; auſſi icelles AD, DB ſeront commenſurables en longitude entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

L'application mentionnee au commencement de la demonſt. cy-deſſus ſe fera bien plus

briefuement par le 60. de nos Problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

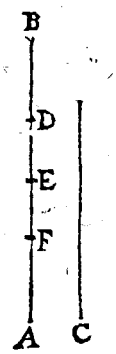
Quant à l'application des nombres soit AB 30, & C 24: donc les segmens AD & DB, seront 24 & 6, desquels le produict, c'est à dire le rectangle, est 144, qui est egal au quart de 576, quarré de C 24, & deffaillant du quarré de DB 6, c'est à dire 36: & sont icelles parties AD 24, DB 6, commens. en longitude: car l'vne est quadruple de l'autre. Ainsi FD, qui peut auec C le quarré de AB, sera 18: car le quarré de AB est 900, & celuy de C 576; & partant reste pour le quarré de FD, 324, dont la racine quarree est 18, commensurable en longitude à AB. L'autre partie sera aussi euidente par l'adaption des nombres cy-dessus.

La proposition suiuante sera aussi facilement entenduë, si on pose AB 12, & C $\sqrt{96}$: car les segmens AD, DB, seront $6+\sqrt{12}$. & $6-\sqrt{12}$: & FD $\sqrt{48}$, qui est à 12 incommensurable en longitnde, &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y-a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, & qu'iceluy rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incomensurable en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, le rectangle diuisera la plus grande ligne en parties incommensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales A B & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. prop. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarree: & soit iceluy rectangle contenu sous AD, DB incommensurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude. Car ayant construit comme en la preced. prop. nous demonstrerons semblablement que AB peut plus que C du quarré de FD. Il faut donc demonstrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posees incommens. en longitude, la toute AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurable en longitude à la composee de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle-là: donc



puis que de ces deux lignes commenſ. icelle DB eſt incommenſ. en longitude à AB; la compoſee de AF, DB ſera auſſi incommenſ. en long. à la meſme AB par la 14. prop. 10. Et d'autant que AB compoſee de AF, DB comme vne, & de FD, eſt incommenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB; la meſme AB ſera auſſi incommenſ. en long. à FD, par le corol. de la 17 p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy eſt incommenſurable en longitude.

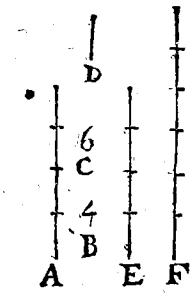
Maintenant, ſi AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt incom. en longitude, & ſur icelle AB eſt appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel rectangle diuiſe AB és parties AD, DB. Ie dis qu'icelles AD, DB ſont incommenſ. en long. Car nous demonſtrerons comme deuant (les meſmes choſes eſtans conſtruictes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD ſont incommenſurables en longitude: & puis que AB eſt compoſee de FD, & de AF, DB ioinctes en vne, icelle AB ſera auſſi incommenſ. en longitude à la compoſee de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la compoſee de AF, DB eſt commenſ. en longit. à icelle DB, puis que celle-là eſt double de ceſte-cy. Donc puis que AB eſt incommenſurable en longit. à la compoſee de AF, DB, icelle AB ſera auſſi incommenſ. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB compoſee de AD, DB eſt incommenſ. en long. à DB, icelles AD, DB ſeront auſſi incomm. en long. entr'elles par la 7. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Puis qu'il a eſté demonſtré que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance, mais que celles commenſ. en puiſſance ne le ſont pas touſiours en longitude: il eſt manifeſte que s'il y a quelque ligne comm. en longitude à vne propoſee rationnelle: elle doit eſtre appellee rationnelle & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puiſſance: car les lignes commenſ. en long. le ſont touſiours auſſi en puiſſance. S'il y a auſſi quelque ligne droicte commenſ. en puiſſance & longitude à l'expoſee rationele, elle ſera auſſi dite rationele commenſ. en longitude & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à icelle, mais incommenſ. en longitude, elle ſera auſſi dicte rationelle commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

SCHOLIE.

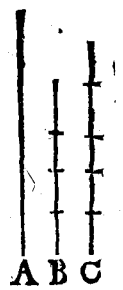
Il appert par ce que deſſus, qu'il y a de trois ſortes de lignes rationeles commenſ. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commenſurables entr'elles en longitude, ou l'vne eſt egale à l'expoſee rationele; & partant l'vne & l'autre commenſ. en longitude à la rationele: ou l'vne ny l'autre n'eſt egale à l'expoſee rationele, & toutesfois commenſ. en longit. à icelle: ou finablement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationele en puiſſance ſeulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceſte maniere. Soit vne rationele propoſee A diuiſee en quatre parties egales: c'eſt à ſçauoir en autant qu'il y a d'vnitez au nombre B: puis apres eſtant pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit vne partie de A: & qu'autant de fois que D meſure A, autant de fois elle meſure quelque ligne E: Item autant de fois que l'vnité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Donc



puis que A & E ſont compoſees de parties egales en nombre, qui ſont egales à D, elles ſeront egales. Derechef, puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F, elles ſeront commenſurab. en longitude: parquoy E & F ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſsi commenſ. entr'elles en longitude. Nous auons donc trouué deux rationeles E & F commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele expoſee A, & deſquelles l'vne ſçauoir E, eſt egale à A.



Or maintenant, que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G differens de B, tellement que l'vne & l'autre ligne C & E ſoit inegale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commenſurables en longitude: parquoy C & E ſont rationeles commenſ. en longit. à la rationelle A: mais elles le ſont auſsi entr'elles. Nous auons donc trouué deux rationeles C & E commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele propoſee A: l'vne ny l'autre deſquelles n'eſt egale à icelle A.



Finalement par la 11. prop. 10. à l'expoſee rationele A ſoit trouuee la ligne B, incommenſurable en longitude ſeulement, laquelle ſoit couppee en tant de parties egales qu'on voudra, & ſoit priſe C, compoſee de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C ſeront commenſ. en longitude. Ie dis qu'elles ſont auſsi commenſ. en puiſſance ſeulement à l'expoſee rationele A. Car puis que A & B ſont commenſurable en puiſſance; le quarré de A ſera commenſ. au quarré de B: Mais au meſme quarré de B, eſt auſsi commenſ. le quarré de C, pource que B, C eſtans commenſ. en longitude, elles le ſeront auſsi en puiſſanee. Donc par la 12. prop. 10. les quarrez de A & C, ſont pareillement commenſ. entr'eux. Parquoy C eſt commenſ. en puiſſance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commenſ. en longitude, B eſt incommenſ. en longitude à A: par la 14. pr. 10. G ſera auſsi incommenſ. en longitude à la meſme A. Donc C eſt commenſ. à A ſeulement en puiſſance. Et pource que B & C, commenſurables en puiſſance à l'expoſee rationele A, ſont rationeles; elles ſeront deux rationeles commenſ. en longit. entr'elles, mais en puiſſance ſeulement à l'expoſee rationele A: elles ſont donc les deux lignes requiſes à trouuer.

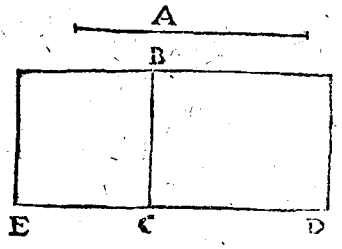
Que ſi quelqu'vn deſire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationeles commenſurables en longitude entr'elles, cela ſe fera ainſi qu'il enſuit: Soit pris quelconque meſure D, (regardez la premiere figure de ceſte page) & ſoient compoſees autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D; qu'il y a d'vnitez en autant de nombres inegaux B, F, G: car les lignes A, C, E, ayans la commune meſure D, ſeront commenſurables en longitude.

Or il eſt auſsi euident que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. non ſeulement à vne expoſee rationele, mais auſsi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles ſont celles qui ſont commenſ. à l'expoſee rationele, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement, & que par la 12. p. 10. les commenſurables à vne meſme, ſont auſsi com-

menſurables entr'elles ; il eſt manifeſte que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commenſ. en longitude ſelon quelqu'vne des manieres cy-deuant dites, eſt rationel.



Soit vne expoſee rationele A, & le rectangle BD compris ſous BC, CD rationeles commenſ. en longitude, ſelon quelqu'vne des manieres cy-deſſus dites : Ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel.

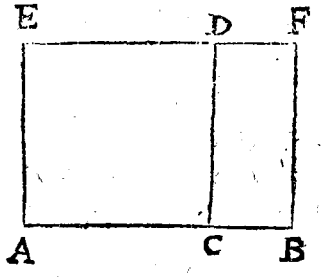
Car ſi ſur l'vne d'icelles BC, CD, ſçauoir BC, on faict le quarré BE, il ſera commenſurable au quarré de la rationele A par la 3. def. 10. puis que BC eſt rationele commenſurable à la rationele expoſee A, ou en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Et puis que BC, ou CE, CD ſont commenſ. en longitude ; (car BC, CD ont eſté poſees rationeles commenſurables en longitude entr'elles) & par la 1. p. 6. comme EC eſt à CD, ainſi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD ſeront auſſi commenſ. tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD ſont commenſurables au quarré EB ; & partant commenſ. entr'eux par la 12. prop. 10. Mais le quarré de A eſt rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD ſera auſſi rationel : Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit BC 3 & CD 4 : donc le rectangle BD ſera 12. Derechef ſoit BC √3 & CD √12 : Le rect. BD ſera √36, c'eſt à dire 6. Et derechef ſi BC eſt √8, & CD √18 : Le rectangle BD ſera √144, c'eſt à dire 12. Par ainſi iceluy rectangle eſt rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'vn des coſtez rationel, il aura auſſi l'autre coſté rationel : & iceux coſtez ſeront entr'eux commenſurables en longitude.



Soit le rectangle rationel DB ayant le coſté CD rationel : Ie dis que BC ſera auſſi rationel commenſurable en longitude à CD.

Car ſur DC, ſoit faict le quarré AD, lequel ſera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle eſt au quarré, ainſi CB eſt à CA par la 1. prop. 6. Mais le quarré & le rectangle ſont rationnaux, & partant commenſurables. Donc par la 10. prop. 10. CB & CA, ou CD ſon egale, ſeront rationeles & commenſurables en longitude. Parquoy ſi

vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD $\sqrt{3}$: BC sera donc $\sqrt{12}$, qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$: Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droicte CD $\sqrt{8}$, l'autre costé BC sera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à CD $\sqrt{8}$. Car si on diuise $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, prouiendra $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ c'est à dire $\sqrt{\frac{9}{4}}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$, comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longitude.

LEMME.

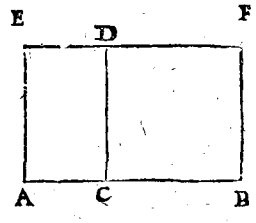
Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droicte incommensurable en longitude seulement à vne ligne droicte rationele proposee, & icelles seront les requises: car puis qu'elles sont comm. en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d. 10.

Que si à la ligne trouuee, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la proposee rationele, il est manifeste par la 12. prop. 10. que toutes les trois seront commensurables entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commens. en puissance seulement, est irrationel: & la ligne droicte qui peut iceluy est irrationelle. Soit icelle appellee Mediale.



Soit le rectangle AD, compris de deux lignes rationelles DC & CA commensurables en puissance seulement. Ie dis que le rectangle est irrationel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appelle Mediale.

Car si sur la rationelle CD on descrit le quarré DB, il sera rationel, & sera au rectangle AD, comme BC ou CD son egale, est à CA, par la 1. prop. 6. Mais DC & CA sont incommens. en longitude: donc par la 10. prop. 10. le quarré BD, & le rectangle AD seront incommens. Or le quarré est rationel: donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationel; & par la 11. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle: & soit icelle ligne appellee Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationelles DC, CA commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons icelle estre vne ligne irrationelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationnel qu'elle peut, eſt auſsi nommé medial, pource qu'il eſt moyen prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſance ſeulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle medial ſoit touſiours contenu ſous deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, tel qu'eſt le medial CF: car il en aduient quelquesfois autrement, comme ſe verra cy-apres.

La ligne DC ſoit 2, & BC √8. Le rectangle BD ſera √32, qui eſt irrationel; & ſera dict medial, mais la ligne pouuant iceluy eſt √√32, laquelle on appelle mediale.

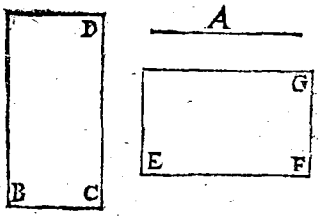
THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la ligne à laquelle ſe faict l'application.

Auparauant que venir à ce qui eſt icy propoſé, eſt à notter que pour appliquer ſur vne ligne rationele vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poſer quelconque ligne rationelle, en ſecond lieu la mediale, & chercher la tierce proportionelle, laquelle ſera l'autre coſté du rectangle: car par la 17. propoſition 6, le quarré de la moyenne eſt egal au rectangle des extremes.

Venons maintenant à la demonſtration de la propoſition.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle ſoit appliqué ſur la ligne rationelle BC, faiſant le rectangle BD: Ie dis que BC & CD ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement.



Car A eſtant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationelles commenſ. en puiſſanee ſeulement, autrement elle ne ſeroit dicte mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu ſous les rationelles EF, FG commenſurables en puiſſance ſeulement. Et pource que A, par l'hypotheſe peut auſſi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG ſeront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les coſtez reciproques, ſçauoir que comme BC à EF, ainſi FG à CD, & par la 22. prop. 6. les quarrez d'icelles lignes ſeront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle, eſt commenſ. au quarré de EF, auſſi ligne rationelle: donc par la 10. pr. 10. le quarré de FG ſera auſſi commenſ. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD ſeront com. au moins en puiſſance, & le quarré de FG eſtant rationel, le quarré de CD ſera auſſi rationel; & par conſequent les lignes CB & CD ſeront rationelles. Or qu'icelles BC & CD ſoient commenſ. en puiſſance ſeulement, il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré à la 21. prop. 10. Car ſi elles eſtoient commenſurables en longitude, le rectangle BD ſeroit rationel, & nous l'auons poſé medial, c'eſt à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD ſont incommenſurables en longitude. Parquoy le quarré d'vne ligne mediale appliqué ſur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

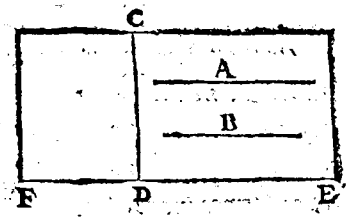
SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit le quarré de A √40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique √40, l'autre costé CD sera √10. qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est √5, CD sera √8, aussi comm. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit √√35, & BC √5: le quarré de A seroit √35: & CD √7, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.



Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Ie dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposee la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationelle CD soit appliqué le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront commens. en longit. Mais la ligne ED est rationnelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationelle & incommens. en longit. à la mesme CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. pr. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à vne figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'vne d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit A √√200, B √√128, CD 4. Donc DE sera √12½ & DF √8 commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4: & DF est commens. en puiss. seulement à CD; & par consequent le rectangle CF, qui est √128, est medial, & la ligne B √√128, qui peut iceluy, aussi mediale.

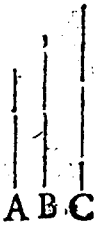
LEMME I.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de ce liure, nous le dirons aussi des mediales: sçauoir est que les lignes droictes commens. en long. à vne mediale, est dite mediale, & comm. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance. Car

vniuerſellement les lignes droictes commenſ. en longit. le ſont auſsi en puiſſance. Ets'il y a quelque ligne comm. en puiſſance & longit. à vne mediale, elle ſera pareillement dite mediale, & à icelle commenſ. en longit. & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à vne mediale, mais incomm. en longit. elle ſera auſsi dite mediale commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en longitude: Item deux commenſurables en puiſſance ſeulement.

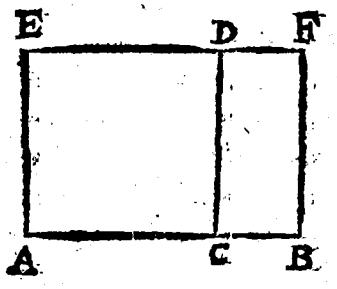


Soient trouuees les deux lignes A & B commenſ. à la mediale C, c'eſt à ſçauoir A en longit. & B en puiſſance ſeulement: & chacune d'icelles A & B ſeront auſsi mediales par la 24. prop. 10. Veu donc que A & C ſont commenſ. en longit. & B, C en puiſſance ſeulement, eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

Or il eſt à noter qu'encore que toute ligne droicte commenſ. à vne mediale, ſoit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'eſt pas commenſ. à quelque mediale que ce ſoit. Car deux mediales ſe peuuent donner incomm. en longit. & puiſſance, comme apparoiſtra par la 36. prop. de ce liure, où nous enſeignerons auſsi à trouuer deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en longitude, eſt auſſi medial.



Soit le rectangle DB, compris de deux mediales commenſ. en longitude DC & BC: Ie dis qu'il eſt medial.

Car ſi ſur la ligne DC on deſcrit le quarré DA, il ſera medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale: & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi AD eſt à DB: mais CD, ou CA ſon egale, eſt commenſurable en longitude à BC: Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, ſera commenſurable au rectangle DB: & par le corollaire de la 24. prop. 10. iceluy rectangle ſera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si les mediales DC, CB commenſ. en longitude ſont √√2 & √√32: le rectangle d'icelles, ſçauoir DB, ſera √√64, c'eſt à dire √8, qui eſt medial.

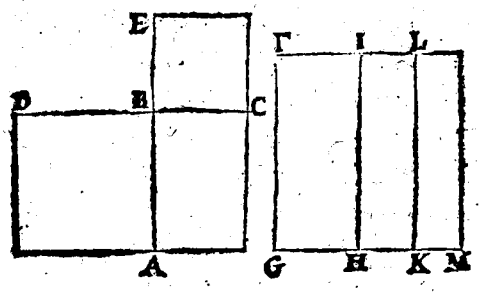
THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt rationel, ou medial.

Soient les deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel ou medial.

Qu'ainſi ne ſoit: Sur AB & BC ſoient deſcrits les quarrez AD & CE, leſ-

quels eſtans faits ſur lignes mediales ſeront mediaux. Maintenant ſoit propoſee la ligne rationelle FG, & ſur icelle ſoient deſcrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. pr. 1. Et d'autant que les quarrez AD & CE ſont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM ſeront mediaux: leſquels appliquez ſur la rationelle FG, leurs autres coſtez GH & KM, ſeront rationnaux commenſ. en puiſſance ſeulement à FG par la 23. prop. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE ſont commenſ. (eſtans faicts ſur lignes commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles FH & LM ſeront auſſi commenſ. mais par la 1. p. 6. comme FH eſt à LM, ainſi la ligne droicte GH eſt à la ligne droicte KM: donc par la 10. prop. 10. GH & KM ſeront commenſ. en longitude; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH & KM ſera rationel. Et pource que AB, BD ſont egales, & BC, BE auſſi egales, comme DB eſt à BC, ainſi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainſi AD à AC par la 1. prop. 6. & comme AB eſt à BE, ainſi AC à CE: donc comme AD à AC, ainſi AC à CE: & partant AD, AC, CE ſont proportionnaux: & par conſequent leurs egaux FH, HL, LM ſeront auſſi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes GH, HK, KM ſont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM: elles ſeront donc proportionelles: & par la 17. pr. 6. le rectangle de GH, KM, ſera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a eſté demonſtré rationel: donc auſſi le quarré de HK ſera rationel: & par conſequent la ligne HK ſera auſſi rationelle: & par la 6. def. 10. elle ſera pareillement commenſurable à la rationelle propoſee FG, ou à ſon egale HI, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement: Si en longitude, le rectangle HL contenu ſous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy eſt egal, ſera rationel par la 20. prop. 10. mais ſi HK eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC ſera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commenſ. en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Soient les mediales AB & BC, √√8, & √√2: (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables, car elles ſont en raiſon double.) Le rectangle d'icelles AC ſera √√16, c'eſt à dire 2, qui eſt rationel. Mais ſi AB eſt √√12, & BC √√3, (deſquelles les puiſſances ſont commenſ. eſtans en raiſon double.) Le rectangle AC ſera √√36, c'eſt à dire √6, qui eſt vn medial.

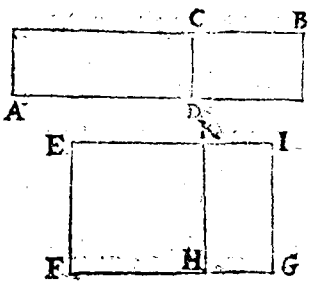
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale n'eſt pas plus grande qu'vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial AC du rectangle DB: ie dis que DB n'eſt pas figure rationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi: Sur vne propoſée rationelle EF ſoient faicts les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI ſera egal à DB: partant iceux rectangles EG, EH ſeront mediaux, leſquels eſtans appli-

quez sur la rationelle EF, les autres costez FG & FH seront lignes rationelles commens. en puissance seulement à EF par la 23. prop. 10.



Maintenant si on dit que HI est rationel; estant appliqué sur la rationelle KH, l'autre costé GH sera rationel commensurable en longit. à KH par la 21. prop. 10. mais FH est incom. en long. à KH, ou EF: donc par la 14. pr. 10. FH & GH seront incomm. en longit. mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils sont de mesme hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le quarré de GH est incomm. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. pr. 10. Or le mesme quarré de GH est comm. au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG estans rationelles) & par la 16. pr. 10. les deux quarrez de FH & GH, ensemble seront commensurables au seul quarré de GH: mais iceluy quarré est incommensurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13. prop. 10. les deux quarrez de FH & GH seront ensemble incommensur. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH & GH sont egaux au quarré de FG par la 4. pr 2. donc par la 17. p. 10. le quarré de FG sera incomm. aux deux quarrez de FH & GH ensemble: lesquels estans rationaux, (car ils sont faicts sur lignes rationelles) le quarré de FG sera irrationel, par la 10. def. 10. & par consequent la ligne FG irrationelle: Ce qui est absurde, car nous auons monstré qu'elle est rationelle: donc le rectangle HI, ou son egal DB, n'estoit pas rationel. Parquoy vne figure mediale n'est pas plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle medial AB √50, & le rectangle AC √18: le rectangle restant DB sera √8, qui est medial. Derechef AB estant √32, & AC √20; le restant DB sera √32 — √20, qui n'est pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel.



Soient deux lignes rationelles commens. en puissance seulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. prop.) soit trouuée la moyenne proportionelle C; puis (par la 12. prop. 6.) aux trois A, B, C, soit trouuée la quatriesme proportionelle D: Ie dis que C & D sont les deux mediales demandees.

Car puis que C est moyenne propor. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. p. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale: Item, puis que comme A à B, ainsi C à D, & que A est commensurable en puissance seulement à B, aussi le sera C à D par la 10. prop. 10. Mais C est ligne mediale: donc D qui luy est commens. en puissance seulement sera aussi

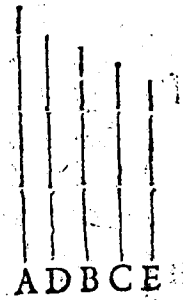
ligne medialle par la 24. prop. 10. Ie dis en outre que le rectangle contenu d'icelles medialles C & D est rationel. Car d'autant que comme A est à B, ainsi C à D, en permuttant, comme A à C, ainsi B à D: mais comme A est à C, ainsi C à B. Donc C sera aussi à B, comme B à D par la 11. prop. 5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B, ligne rationelle, est rational: donc le rectangle comprins de C & D est aussi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales comm. en puissance seulement qui comprennent vn rectangle rationel: Ce qu'il failloit faire.

SCHOLIE.

Soit A √20, & B √12. donc la moyenne prop. C sera √√240. & puis que comme A à B, ainsi C à D; D sera √√86⅖. Or les puissances de √√240, & √√86⅖ sont commens. car elles sont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles est √√ 20736, c'est à dire 12, egal au quarré de √12, qui est aussi 12: & partant iceluy rectangle de C & D, commens. en puissance seulement est rational.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.



Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, B, C, trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 22. pr. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionelle D: puis par la 12. pr. 6. soit fait comme B à C, ainsi D à E: Ie dis que D & E sont les deux mediales demandées.

Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. propositi. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B: mais comme B à C, ainsi D à E, & B est commens. en puissance seulement à C, aussi par la 10. pr. 10. D sera commens. en puissance seulement à E: Et par la 24. prop. 10. D estant mediale, E sera aussi mediale commens. en puissance seulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle d'icelles deux mediales D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D comme C à E: mais B est à D comme D à A; partant comme D est à A, ainsi C est à E: & par la 16. prop. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commens. en puissance seulement, est medial par la 22. prop. 10. Donc par le corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Parquoy nous auons trouué deux lignes medialles commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE 1.

Soit A 20, B √200, & C √80. Donc la moyenne prop. D, sera √√80000. Et puis que comme B à C, ainsi D à E; icelle E sera √√12800. Or les puissances de D & E, sont commensurables, car elles sont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles est √√1024000000, c'est à dire √32000, egal au rectangle de A & C; qui est √32000.

Or és choſes ſuiuantes nous aurons beſoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D. Mais A & B ſe multiplians entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multiplians faſſent F. Donc E & F ſeront nombres ſemblables, puis qu'ils ſont les coſtez proportionnaux.

A 6.	C 12.
B 4.	D 8.
E 24.	F 96.

Or d'autant qu'il a eſté demonſtré és 28 & 29. p. 9. que ſi on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, eſt produit vn nombre pair: mais vn impair, ſi on multiplie vn impair par vn impair: il appert par quelle maniere peuuent eſtre trouuez deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair ou impair; ou vn ſeul pair, & l'autre impair: car ſi les coſtés pris ſont nombres pairs, les plans d'iceux ſeront auſſi pairs; mais ſi les nombres ſont impairs, les plans d'iceux ſeront auſſi impairs. Que ſi les coſtez de l'vn ſont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là ſera impair, mais de ceux-cy pair: ſemblablement les plans ſeront pairs, ſi chacun a vn coſté nombre pair, & l'autre impair, &c.

LEMME I.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ſoit auſſi nombre quarré.

Soient trouuez par les choſes cy-deſſus dictes deux plans ſemblables AB & C, chacun deſquels ſoit pair ou impair. Et d'autant que par les 24 & 26. prop. 9. ſi d'vn nombre pair on en oſte vn pair, ou bien vn impair d'vn impair, le reſte eſt pair: eſtant oſté BD egal à C de AB, le reſte AD ſera pair; & iceluy AD eſtant diuiſé en deux egalement en E: Ie dis que le nombre fait de AB en BD (qui eſt vn quarré par la 1. prop. 9.) auec le quarré du nombre ED, fait vn quarré. Car puis que le nombre AD eſt diuiſé en deux egalement en E, & à iceluy eſt adiouſté DB; le nombre qui eſt fait de AB en BD, auec le quarré du nombre DE, ſera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theor. de ceux que nous auons demonſtré à la 14. p. 9. Parquoy les deux nombres quarrez, ſçauoir celuy fait de AB en DB, & celuy du nombre DE adiouſtez enſemble feront vn quarré, ſçauoir celuy qui ſera produict de BE. Ce qui eſtoit propoſé.

A.....E.....D.....B
C.....

COROLLAIRE.

De ces choſes eſt manifeſte que quand AB & C ſont ſemblables, eſtre trouuez en la meſme maniere les deux nombres quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en BD, eſt auſſi quarré.

Que ſi les nombres AB & C ne ſont prins ſemblables, l'vn & l'autre toutesfois pair, ou impair, ſeront trouuez en la meſme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en DB n'eſt quarré. Car s'il eſtoit quarré, par la 2. propoſit. 9. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB & C, ſeroient plans ſemblables. Ce qui eſt abſurde, puis qu'ils ont eſté poſez diſſemblables.

SCHOLIE 2.

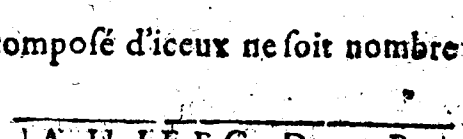
Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrés, deſquels l'excez ſoit auſſi nombre quarré, nous prendrons comme cy-deſſus, deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair, ou impair, ſçauoir AB & C, & acheuerons comme il eſt dict au precedent lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, deſquels l'excez ne ſoit quarré, il faudra prendre deux nombres plans diſſemblables, & paracheuer comme deſſus. Ce qu'on obtiendra plus facile-

ment, diuisant vn nombre quarré en deux nombres, l'vn desquels soit quarré, & l'autre non: Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainsi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit nombre quarré.



Soient deux nombres plans semblables AB, & C. pairs, ou impairs, & soit fait mesme construction qu'au lemme precedant: tellement que le quarré fait de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, auec le quarré de DE, soit egal au quarré de BE: en apres, de DE soit ostee l'vnité EF. Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de BE, à cause de l'inegalité des costez. Ie dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il seroit plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF: soit premierement plus grand, s'il est possible; donc le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF; partant egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'vnité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE.) Si on dit qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF; puis qu'au mesme quarré de BE, a esté demonstré au lemme precedent estre egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE; auſsi celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF, sera egal à celuy là fait de AB en BD, auec le quarré de DE. Ostant donc le commun quarré fait de AB en DB, le reste quarré de DF, sera egal au reste quarré de DE; & partant le costé DF auſsi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE. Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI, qui est plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais au preced. lemme le quarré de BE a esté demonstré egal au nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE: ostant donc le commun nombre fait de AB en BD, restera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE; & partant le costé DF plus grand que le costé DE, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'vn est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas plus grand que le costé BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas auſsi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BE.

Soit maintenant, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, egal au quarré de BF: & soit posé AH double de l'vnité EF. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, (car AD a esté diuisé en deux egalement en E) & l'osté AH double de l'osté EF, auſsi le reste HD sera double du reste FD par la 7. prop. 7. & partant HD est diuisé en deux egalement en F: Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons demonstré sur la 14. prop. 9. le nombre fait de HB en BD, auec le quarré de DF, sera egal au quarré de BF: Mais au mesme quarré de BF, est posé egal le nombre fait de AB en BD auec le quarré de DF. Donc le nombre fait de HB en BD, auec le quarré du nombre DF, est egal à celuy fait de AB en DB, auec le quarré de DF. Ostant donc le commun quarré de DF,

resterale nombre fait de HB en BD, egal à celuy fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD, produisent nombres egaux, & que par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produicts: HB sera egal à AB, la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en DB, auec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF, lequel soit BG, tellement que le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, soit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD est double du tout FD, & l'osté AI double de l'osté EG; par la 7. prop. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD: & partant ID est diuisé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor. demonstré sur la 14. pr. 9. le nombre fait de IB en BD auec le quarré de DG, est egal au quarré de BG. Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF: Donc le nombre fait de IB en BD, auec le quarré de DG, est egal à celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF. Ostant donc les quarrez de DG & DF, desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celuy fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD, auec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à demonstrer.

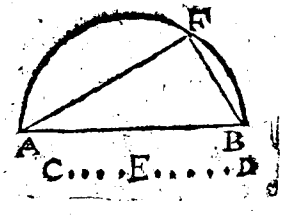
SCHOLIE 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarrés, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: Car ainsi le quarré total ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 6. PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soit proposee la rationele, AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, en iceluy soit accommodee la ligne droite AF: & ioinct BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes requises.



Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme le nombre CD est au nombre DE, ils seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant aussi leurs costez

AB & AF, au moins en puissance: mais AB est rationnele, & par consequent aussi rationele AF qui luy est commensurable: mais les quarrez de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. pr. 10. les lignes AB & AF seront incommensurables en longitude: elles seront donc rationeles commensurables en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droict par la 31. pr. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarrez de AF & FB, c'est à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF du quarré de FB. Et d'autant que comme CD est à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conuersion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB; (car ainsi que CD excede DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB.) Parquoy les lignes droictes AB, FB sont commensurables en longitude par la 9. pr. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commensurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

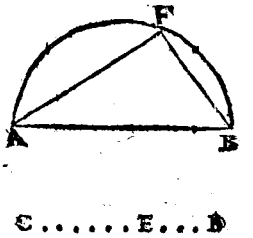
SCHOLIE.

La rationele AB soit 6: AF sera √20: & partant BF sera 4, commens. en longitude à AB.

PROB. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commens. en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude.

Soit exposée la rationele AB, & soient trouuez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la pr. 29. de ce liure) deux nombres quarrez tels que le composé d'iceux ne soit quarré; ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarrez CE, ED, afin que le tout CD ne soit à l'vn ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré puis sur AB soit descrit le demy cercle AFB; & par le corollaire de la 6. pr. 10. soit trouuee la ligne droicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE: & finalement icelle AF estant accommodee au cercle soit menee BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes demandees.



Car on prouuera tout ainsi qu'à la precedente, que AB & AF sont rationeles commensurables en puissance seulement, (car leurs quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré;) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD est à CE, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF; par conuersion de raison comme CD sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CD n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc aussi le quarré de AB ne sera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF, seront incommensurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, telles

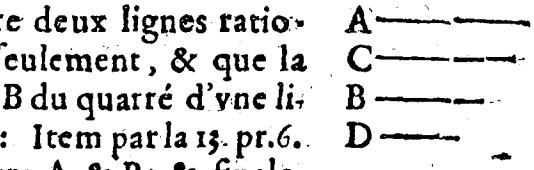
que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy eſt incommenſurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si la rationele AB eſt 3, AF ſera √6, & BF √3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.



Soient trouuées par la 30. prop. de ce liure deux lignes rationeles A & B commenſurables en puiſſance ſeulement, & que la plus grande A puiſſe plus que la plus petite B du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude: Item par la 13. pr. 6. ſoit trouuee C moyenne proportionnele entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, ſoit trouuee la 4. proportionele D. Ie dis que C & D ſont les deux lignes demandees.

Car puis que A & B ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, par la 22. pr. 10. le rectangle d'icelles A & B ſera irrationel; & la ligne C pouuant iceluy par la 17. prop. 6. (car elle eſt moyenne prop. entre A & B) ſera mediale. Et d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D; & A eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à B, auſſi C ſera commenſurable en puiſſance ſeulement à D, par la 10. propoſition 10. Mais puis que C eſt mediale, par la 24. propoſition 10. D ſera auſſi mediale. Et d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D: en permutant comme A ſera à C, ainſi B ſera à D: mais par la conſtruction comme A eſt à C, ainſi C eſt à B: pareillement donc comme C ſera à B, ainſi B ſera à D: & partant le rectangle de C & D ſera egal au quarré de B, par la 17. prop. 6. & puis que le quarré de la rationele B eſt rationel, le rectangle compris ſous C & D, qui luy eſt egal, ſera auſſi rationel. Et veu que comme A eſt à B, ainſi C à D; & peut plus que B du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſur. en longitude, auſſi par la 15. pr. 10. C pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſur. en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Ce qu'il falloit faire.

Que ſi on vouloit que C pûſt plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fuſt incommenſ. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles ſont requiſes par la precedente prop. au lieu que cy deſſus elles ont eſté trouuées par la 30. pr. 10. & acheuer le tout comme deſſus.

SCHOLIE.

Soit A8, B √28: le rectangle d'icelles ſera √1792, & la ligne C √√1792, qui eſt mediale. Et puis que comme A8, eſt à B √28, ainſi C √√1792 eſt à D, icelle ſera √√343: donc C & D ſont deux mediales comm. en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent vn rationel 28, & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude.

Car si du quarré d'icelle C, on oste le quarré de D, restera √567, & seront commens. en longit. les deux mediales √√1792 & √√567. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit A8, & B √20 : le rectangle d'icelles sera √1280, & la ligne C √√1280, & partant D sera √√125, donc C & D sont mediales comprenant vn rationel. 20, & C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuées trois lignes rationneles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 30. p. 10. les deux rationelles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & A soit trouuée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuée D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit faict comme D à B, ainsi C à E. Ie dis que D & E sont les deux lignes demandées.

A ——————
D ——————
B ——————
C ——————
E ——————

Car puis que D est moyene prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationel, & par consequent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulement : donc aussi D & E : & par la 24. p. 10. D estant mediale, E le sera aussi. Et derechef puis que comme D à B ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrémes D & E sera egal au rectangle des moyennes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationneles commens. en puissance seulement est medial. Donc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finalement, puis que comme A à C, ainsi D à E ; & A peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. p. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que si on trouue A, B, C, rationeles commens. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit incomm. en longitude, & on acheue de construire comme dessus ; on demonstrera semblablement que D & E sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

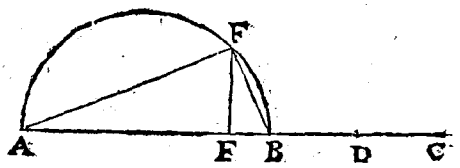
SCHOLIE.

Soit A8, B √48, & C √28 : le rectangle compris de A & B sera donc √3072, & la ligne droicte D √√3072, qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera √√588. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la

plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'vne ligne, qui luy eſt commenſurable en longitude. Car ſi du quarré d'icelle D, on oſte le quarré de E, le reſte ſera √ 972, qui eſt commenſurable en longitude à icelle D √√3072. Derechef ſi A eſt 8, B √ 48, & C √ 20; D ſera encore √√3072, mais E ſera √√300. Donc D & E ſont deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.



Soient deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement AB & BC, & que la plus grande AB puiſſe plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, trouuée comme il à eſté enſeigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppé en deux egalement CB au poinct D, ſoit appliqué vn rectangle ſur BA egal au quarré de BD defaillant d'vne figure quarrée par la 28. p. 6. & ſoit iceluy rectangle compris de AE & EB; & apres auoir fait vn demy cercle ſur la ligne AB, & mené la perpendiculaire EF, ſoient menées BF & FA: Ie dis qu'icelles lignes ſont les requiſes.

Car puis que AB & BC ſont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué ſur AB, & defaillant d'vne figure quarrée, eſt egal au quart du quarré de BC, (c'eſt à dire au quarré de DB; car nous auons demonſtré au ſcholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC eſt quadruple du quarré de BD) les deux lignes AE & EB ſeront incommenſ. en longitude par la 19. p. 10. Mais par le ſcholie de la 13. p. 6. EF eſt moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a eſté demonſtré à la 11. p. 10. elle ſera incommenſ. en puiſſance à EA. Mais comme FE à EA, ainſi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles ſont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA ſont incommenſ. en puiſſance, par la 10. p. 10. BF & FA ſeront auſſi incõmenſ. en puiſſance. Item le quarré de AB, eſt egal aux deux de BF & FA par la 47. p 1. lequel quarré de BA eſt rationel, eſtant la ligne AB rationele; partant le compoſé des quarrez de BF & FA, ſera auſſi rationel. Et d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AE, EB, eſt egal au quarré de BD, & qu'il eſt auſſi egal au quarré de la moyenne prop. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de EF ſera egal au quarré de BD: partant la ligne EF eſt egale à BD: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA ſera egal au rectangle de BA & EF, ou BD ſon egale. (car par la 8. & 4. prop. 6. AB eſt à BF comme FA à EF.) Or par la 1. pr. 6. le rectangle de AB & DC eſt double du rectangle de AB & BD: (car la baſe BC eſt double de la baſe BD.) Mais le rectangle de AB & BC eſt medial par la 22. prop. 10. donc auſſi ſa moitié rectangle de AB & BD: & par conſequent medial ſon egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommenſu-

sables en puissance, qui font le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est 6, & BC √12: BD ou EF sera √3: & par consequent AE sera 3+√6, & EB 3−√6.: & puis que le quarré de AF est egal aux quarrez de AE, EF: icelle AF sera √(18+√216): mais BF sera √(18−√216). Donc icelles AF, FB sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrez, sçauoir 36, est rationel, mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est √108, est medial.

PROB. 11. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez medial: mais qu'elles comprenent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement *(voyez la figure precedente)* AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puisse plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuées comme il a esté enseigné en la 31. p. 10. & soit acheuée la construction comme en la precedente. Ie dis que BF & FA sont les deux lignes demandées.

Car nous demonstrerons ainsi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance: & que le quarré de BA est medial, estant descrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47 p. 1. Partant le composé des deux quarrez de BF & FA est medial. Et dautant que le rectangle de AB, BC (comme il a esté demonstré en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD; & qu'il est rationnel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationel. Mais il a esté demonstré en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA: & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

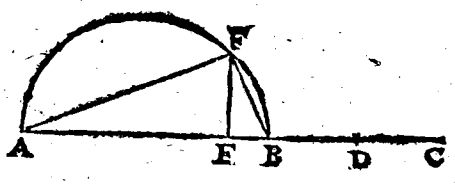
Si AB est √√432, & BC √√48: BD ou EF sera √√3, & AF √(√108+√72); mais BF est √(√108−√72): & partant icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrez, sçauoir est √432, est medial: mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est √36, c'est à dire 6, est rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez medial, & aussi le rectangle d'icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus pe-

tite BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude, trouuées comme nous auons enſeigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la conſtruction comme en la 34. p. 10. Ie dis que BF & FA ſont les lignes demandées.



Car premierement elles ſont incommenſurables en puiſſance, comme en la demonſtration de la 34. p. 10. & le quarré de BA eſtant medial, comme en la precedente, le compoſé des quarrez de BF & FA ſera auſſi medial: Item le rectangle de AB & BC eſtant medial par l'hypotheſe, le rectangle de AB, & BD (ou EF ſon egale) qui eſt ſa moitié, ſera auſſi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & par conſequent medial le rectangle de BF & FA qui luy eſt egal, comme il a eſté demonſtré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypotheſe AB eſt incommenſurable en longitude à BC, & qu'à icelle BC eſt commenſurable en longitude ſa moitié BD, par la 13. p. 10. BD ſera auſſi incommenſurable en longitude à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB ſera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils ſont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'eſt à dire incommenſurable, par la 10. prop. 10. & par conſequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, ſera incõmenſurable au quarré de BA, c'eſt à dire au compoſé des quarrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droites AF, BF incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu ſous icelles, medial & incommenſurable au compoſé d'iceux quarrez: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt √√192, & BC √√48; BD ou ſon egale EF ſera √√3, & AF √(√48+√24), & BF √(√48—√24): Parquoy icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt √192, eſt medial incommenſ. à √24, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme eſt manifeſte le ſuiuant.

Trouuer deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

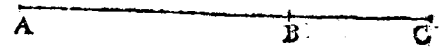
Car puis que tant le compoſé des quarrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, eſt medial, & qu'iceluy rectangle eſt incommenſ. à ce compoſé, auſſi les lignes pouuans iceluy compoſé, & rectangle, ſeront pareillement mediales incommenſ. tant en longitude que puiſſance. Car ſi elles eſtoient commenſ. en puiſſance, auſſi les quarrez d'icelles, c'eſt à dire le compoſé des quarrez des lignes, AF, BF, & le rectangle ſous icelles AF, FB, ſeroient commenſ. ce qui n'eſt pas. Parquoy ſi on prend AB pouuant le compoſé des lignes AF, FB; & vne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB, c'eſt à dire vne moyenne proportionnelle entre AF, FB, ſeront trouuees deux mediales incommenſurables en longit. & puiſſance.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes rationnelles par composition.

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement sont composées, la toute sera irrationnelle: & soit icelle appellée Binome.

Soient composées deux lignes rationelles commens. en puissance seulement AB & BC, trouuées par le lemme qui precede la 22. prop. 10 Ie dis que la toute AC est irrationnelle.



Car par la 1. prop. 6, le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC sont incommens. en longit. par l'hypothese. Donc par la 10. pr. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB & BC sont rationnelles commens. en puissance seulement, leurs quarrez seront commensurables entr'eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC, par la 16. prop. 10. & partant par la 14. prop. 10. les deux quarrez d'icelles AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. prop. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarrez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré est egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarrez de AB & BC, lesquels estans rationnaux, & le composé d'iceux rationnel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. def. 10. & par consequent la ligne AC irrationelle: or icelle sera appellee binome, pource qu'elle est composée de deux noms, c'est a dire de deux lignes rationelles AB, BC, commensurables en puissance seulement. Si donc deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il failloit demonstrer.

SCHOLIE.

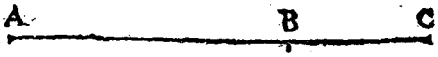
Soit AB 2, BC √3: la toute AC sera 2+√3, & son quarré est 7+√48.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, sont procreées deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles est irrationelle par la 22. prop. de ce liure, laquelle est appellée mediale. Et la composee d'icelles, par la 37. prop. 10. est vne irrationelle, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel sont composées,

la toute sera irrationelle : & soit icelle appellee bimediale premiere.



Soient composées deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel trouuees, par la 28. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

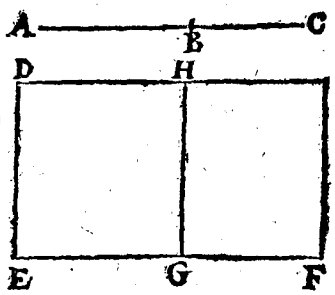
Car puis que par la 1. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au quarré de BC; & que AB, BC sont incommensurables en longitude; par la 10. prop. de ce liure, iceluy rectangle de AB, BC sera aussi incommensurable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC est commensurable à deux fois iceluy: & au quarré de BC est commens. le composé des quarrez d'icelles AB, BC (car puisque AB, BC sont commensurables en puissance, leurs quarrez seront commensur. & partant le composé d'iceux quarrez sera aussi commensurable au quarré de BC par la 16 prop. 10.) Donc le composé des deux quarrez de AB, BC sera incommensurable à deux fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le composé d'iceux deux quarrez & rectangles, c'est à dire le seul quarré de AC, qui leur est egal par la 4. prop. 2. sera aussi incommensurable à deux fois le rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable vn seul rectangle d'icelles AB, BC : donc par la 13. prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au rectangle compris sous AB, BC : & iceluy rectangle estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de AC sera irrationel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC sera aussi irrationelle par la 11. def. 10. Et icelle ligne soit appellée bimediale premiere. Si donc deux lignes medialles comm. en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{\sqrt{54}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{24}}$: La toute AC sera donc $\sqrt{\sqrt{54}}+\sqrt{\sqrt{24}}$, irrationelle nommee bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont composées, la toute sera irrationelle : & soit icelle appellee bimediale seconde.



Soient composées les deux mediales AB & BC commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29 prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Car soit vne ligne rationelle proposee DE, sur laquelle soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au composé des quarrez de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AC, c'est à dire le rectangle DF, est egal aux deux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle d'icelles AB, BC; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypothese le rectangle

ctangle de AB, B C, eſt medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy eſt commenſurable, c'eſt à dire le rectangle HF, ſera auſſi medial. Derechef, puis que les quarrez des mediales AB, B C ſont commenſ. le compoſé d'iceux, c'eſt à ſçauoir le rectangle DG, ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, BC, eſt medial: Donc par le coroll. de la 24. prop. 10. le rectangle DG ſera auſſi medial: Ainſi les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, (car GH eſt egale à la rationelle DE,) leurs autres coſtez EG & FG ſeront rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à D H, par la 23. pr. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC comme AB eſt à BC, par la 1. prop. 6. c'eſt à dire incommenſurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de A B & BC ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC eſtans commenſurables entr'eux, les deux enſemble ſeront commenſurables au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarrez de AB & BC ſeront incommenſurables à deux fois le rectangle de AB & BC; & par conſequent auſſi leurs egaux rectangles DG & HF: & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationelles ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc commenſurables en puiſſance ſeulement; (car autrement elles ne ſeroient rationelles ſi elles eſtoient incommenſurables,) & par la 37. p. 10. la toute compoſee EF ſera irrationelle: & le rectangle D F ſera irrationel: car s'il eſtoit rationel la ligne DE eſtant rationelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre coſté EF fut auſſi rationel, ce qui n'eſt pas: DF eſt donc irrationel: & partant auſſi irrationel ſon egal quarré de AC; & par conſequent la ligne AC irrationelle, qui ſera appellee bimediale ſeconde. Si donc deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

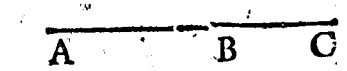
Il eſt manifeſte par cecy que le rectangle compris d'vne ligne rationelle & d'une irrationelle, eſt auſſi irrationel. Car il a eſté demonſtré que le rectangle DF compris de la rationelle DE, & irrationelle EF, ne peut eſtre rationel.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{\sqrt{18}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{8}}$: La toute AC ſera $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{8}}$, qui eſt irrationelle, appellee bimediale ſeconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adiouſte enſemble deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, mais le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel; la toute ſera irrationelle: & ſoit icelle appellee ligne majeure.



Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC incommenſur. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, trouuees par la 34. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. prop. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypothese le composé des quarrez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17. prop. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui est le quarré de AC par la 4. prop. 2.) sera incommens. au composé des deux quarrez de AB & BC, qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel, & son costé AC aussi irrationel: lequel sera appellé ligne Majeure. Parquoy si on adiouste deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

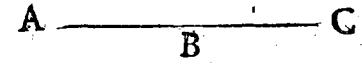
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, *& BC* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$ *: la toute AC sera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, *qui est irrationelle nommee ligne majeure.*

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, sont assemblees; la toute sera irrationelle: & soit icelle appellee ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la propos. & qu'enseigne à trouuer la 31. prop. de ce liure. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel; deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. prop. 10. le composé des deux quarrez, & des deux rectangles, sçauoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationel: & par consequent la ligne AC aussi irrationelle: laquelle sera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

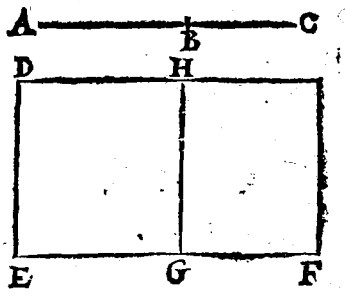
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$ *: La toute AC sera donc* $\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, sont composées; la toute sera irrationnelle: Soit icelle appellee ligne pouuant deux mediaux.

Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



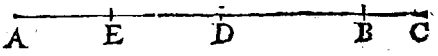
Soit exposee la rationnelle DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. prop. 10. sçauoir que le rectangle DF soit egal au quarré de AC: DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté demonstré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF seront aussi incommensurables en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE, feront les deux autres costez EG & FG rationnaux par la 23. prop. 10. Ainsi EG & FG seront rationelles commens. en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF sera irrationelle. Mais DE estant rationelle, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la 39. pr. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, sçauoir AC sera irrationelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}$ *&* $BC\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$. *Donc la toute* AC *sera* $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$.

LEMME 1.

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalement en vn autre poinct, & que les parties de l'vne des diuisions soient inegales aux parties de l'autre diuision, chacune à la sienne: les quarrez des deux parties de la plus inegale diuision seront ensemble plus grands que les quarrez des parties de la moins inegale.



Soit la ligne droicte AC diuisee inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC, sont plus grands ensemble que ceux de AE & EC ensemble.

Car si AC est couppee en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC sont plus inegales que CE, AE, & que AE est plus grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD, est egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, auec le quarré de DE, est aussi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC auec le quarré de DE, est egal au rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD. Et en ostant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, auec deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle

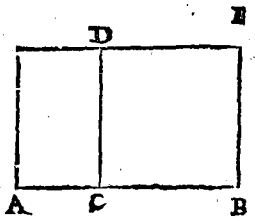
de AE & EC: & par conſequent les compoſez des quarrez & rectangles ſont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont eſté demonſtrez plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC ſeront plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui eſtoit propoſé.

LEMME 2.

Vne figure rationelle excede vne figure rationelle, d'vne figure rationelle.

Soient les deux figures rationelles AE & AD, eſtant AE plus grande que AD de CE: Ie dis que CE eſt figure rationelle.

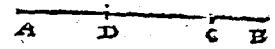
Car AE & AD eſtans rationelles, elles ſeront auſſi commenſ. & par la 16. prop. 10. AD & CE ſeront commenſurables entr'elles, & par conſequent rationelles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut eſtre diuiſee en ſes noms, qu'en vn poinct ſeulement.

Soit le binome AB diuiſé en ſes noms au poinct C: tellement que AC, CB ſoient rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, comme veut la 37. prop. Ie dis qu'on ne peut diuiſer AB en ſes noms en vn autre poinct, ſçauoir eſt que les lignes ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement.



Car s'il ſe peut faire, ſoit diuiſee derechef AB en ſes noms au poinct D. Or il appert que AB n'eſt couppee en deux egalement és poincts C & D. Car AC & CB, ou AD & DB, ſeroient commenſ. en longitude contre l'hypotheſe: il faut donc que AB ſoit couppée inegallement eſdits poinct C & D; & que les parties AD & DB ſoient inegalles aux parties AC & CB, chacune à la ſienne: car ſi elles eſtoient egales, icelle AB ſeroit diuiſee à la ſeconde diuiſion au meſme poinct qu'à la premiere. Si donc AD & DB ſont parties moins inegales que AC & CB, par le lemme qui ſuit la 42. prop. 10. le compoſé des quarrez de AC & CB ſera plus grand que le compoſé des quarrez de AD & DB: Et d'autant qu'iceux compoſez ſont rationnaux (car ce ſont quarrez conſtruicts ſur lignes rationelles) leurs excez ſera auſſi rationel par le lemme preced. Or eſt-il que le compoſé des quarrez de AC & CB, auec deux fois le rectangle de AC & CB, eſt egal au compoſé des quarrez de AD & DB, auec deux fois le rectangle de AD & DB: (car iceux ſont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, ſont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC, CB ſoient plus petits que les rectangles de AD & DB: mais il a eſté demonſtré que l'excez des quarrez eſt rationel: donc l'excez des

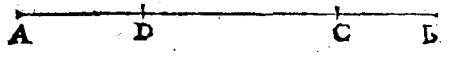
rectangles sera aussi rationel: (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB: ou AD & DB, sont rationnelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a pû estre diuisé, en ses noms qu'en C: car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura tousiours la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il est à notter qu'és cinq sortes de lignes irrationelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux: car comme il a esté dict cy-dessus, ils seroient commens. en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au poinct proposé faut entendre que le contredisant apportant vne autre diuision, les parties d'icelles doiuent estre, inegales aux parties de la proposee.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.



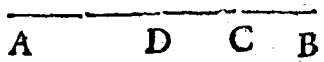
Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au poinct C, tellement que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. Ie dis qu'on ne la peut diuiser en ses noms en vn autre poinct.

Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonstrerons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB seront autant plus grands que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB sont plus petits que les quarrez de AC & BC: Or tous ces rectangles sont rationnaux par l'hypothese. Donc leurs excez sera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par consequent l'excez des quarrez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarrez, estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, ainsi qu'il appert par la 16. proposition 10. & coroll. de la 24. proposition 10. partant l'excez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Si vne ligne droicte est couppee inegallement, les quarrez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB couppee inegallement en C: Ie dis que les quarrez de AC, CB, sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.



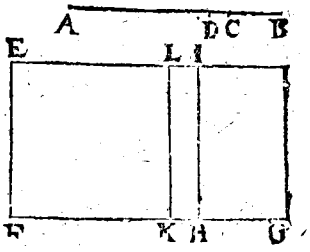
Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. pr. 2. les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB, sont egaux à deux fois le rectangle de

AC, CD, (c'eſt à dire de AC, CB) auec le quarré de AD: & partant les deux quarrez de AC, CB ſont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB: ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale ſeconde, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la bimediale ſeconde AB diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC & BC ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la 37. prop. de ce liure: Ie dis qu'elle ne peut eſtre diuiſee en ſes noms en vn autre poinct que C.



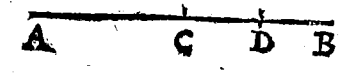
Car ſi faire ſe peut qu'elle ſoit encore diuiſee en AD & DB, en ſorte que deſſus: & ſoit vne ligne rationelle propoſee EF, ſur laquelle (par la 45. prop. 1.) ſoit conſtruit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarrez de AC, CB: le reſte IG ſera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AC, CB, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la meſme maniere ſi ſur EF on applique EK égal aux quarrez de AD, DB: le reſte LG ſera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, ſont inegaux aux quarrez de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK ſeront auſſi inegaux: & partant les lignes FH, FK, ſeront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB ſont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent; EH ſera auſſi plus grand que IG: & partant EH plus grand que la moitié de EG: & conſequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonſtrerons par meſmes raiſons que FK, eſt auſſi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, ſont inegales aux parties FK, KG, chacune à la ſienne. Et pource que AC, CB ſont mediales, & commenſurables en puiſſance; les quarrez d'icelles ſeront auſſi mediaux & commenſurables; & par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'eux; leſquels eſtans mediaux, leur compoſé, c'eſt à ſçauoir le rectangle EH, ſera auſſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. Par meſme raiſon EK ſera demonſtré medial; parquoy EH, EK appliquez ſur la rationelle EF, auront les coſtez FH, FK rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB eſt poſé medial; le double d'iceluy, ſçauoir eſt IG, ſera auſſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & eſtant appliqué ſur la rationele HI, l'autre coſté HG ſera auſſi rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB ſont incommenſurables en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi le quarré de AC eſt au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré ſera incommenſurable au rectangle. Mais au quarré de AC eſt commenſurable le compoſé des quarrez de AC, CB;

(car d'autant que AC, CB ſont commenſurables en puiſſance, & partant les quarrez d'icelles commenſurables, le compoſé d'iceux quarrez ſera auſſi commenſurable au quarré de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB, eſt commenſurable à ſon double. Donc auſſi le compoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle EH, eſt incommenſurable au double du rectangle de AC, CB, c'eſt à dire à IG, par le ſcholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH eſt à IG, ainſi FH eſt à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG ſeront incommenſurables en longitude. Mais elles ont eſté demonſtrees rationeles: Donc les lignes FH, HG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG ſera binome, & diuiſée en ſes noms au poinct H. En la meſme maniere nous demonſtrerons auſſi FG binome eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct K; ce qui eſt abſurde: car par la 43. p. 10. elle ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'en vn ſeul poinct. Donc AB bimediale ſeconde ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne majeure, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne majeure AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance: & le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial, comme veut la 40. prop. de ce liure. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.



Car ſi faire ſe peut, qu'elle ſoit diuiſee en ſes noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que ſoit le poinct D, nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la 45. p. de ce liure, que les compoſez des quarrez de AC & BC; & de AD & DB ont vn meſme excez que les doubles rectangles de AC, BC: & de AD, DB. Mais d'autant que les compoſez quarrez ſont rationaux par l'hypotheſe, & par conſequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (leſquels ſont mediaux par le corol. de la 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui eſt contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne ſera diuiſee en ſes noms en autre poinct qu'en C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AB & BC ſoient incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: mais le re-



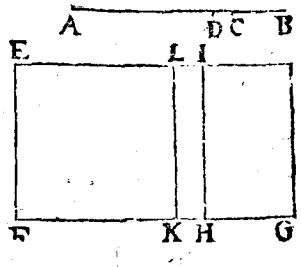
ctangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. prop. 10. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

Car il s'enſuiuroit meſme abſurdité qu'en la precedente prop. ſçauoir que ſi on la diuiſoit encores au poinct D, il s'enſuiuroit comme là, que l'excez tant des quarrez, que des rectangles ſeroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC & BC ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, comme veut la 42. prop. 10. Ie dis qu'on ne peut diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.



Car ſi faire ſe peut, qu'icelle AB ſoit encore diuiſee au poinct D: & ſur la rationele propoſee EF ſoit faite pareille conſtruction qu'en la 45. p. 10 ſçauoir eſt le rectangle EG egal au quarré de AB, & EH egal aux deux quarrez de AC & CB: & partant IG, egal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a eſté demonſtré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui ſont mediaux par la ſuſdite demonſtration, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſurable au double de leur rectangle: (car par l'hypotheſe il eſt incommenſurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant auſſi les rectangles EG & EH ſeront incommenſurables. Ainſi les lignes rationeles FH & HG ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. AB ſera binome diuiſé en ſes noms au poinct H. Que ſi on veut dire que AB peut encore eſtre diuiſé en ſes noms au poinct D: il s'enſuiura, comme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diuiſé en ſes noms au poinct H, ſe pourroit encore diuiſer en ſes noms au poinct K, contre la 42. pr. 10. Ainſi AB ne pouuoit eſtre diuiſee en ſes noms qu'au ſeul poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele eſtant propoſee, & vn binome diuiſé en ſes noms; lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude:

1. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee: toute la ligne ſoit appellée Binome premier.

2. Mais

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne soit appellée Binome second.

3. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne soit appellée Binome troisiesme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appellee Binome quatriesme.

5. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne est appellee Binome cinquiesme.

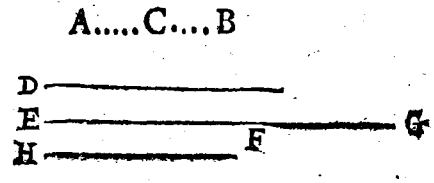
6. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee ; la toute soit appellee Binome sixiesme.

Il n'est rien dit icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposee : parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au 2. scholie de la 29. prop. 10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, à fin que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient ent'eux comme nombre quarré à nombre quarré ; à vne rationele proposée D, soit pris EF commens. en longit. & icelles D & EF seront rationeles commensurables en longitude. En apres, par le corol. de la 6. prop. 10. soit faict que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quar-



ré de EF ſoit au quarré de FG. Ie dis que la toute EG eſt binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG, qui ſont entr'eux comme les nombres AB, AC, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. auſſi les lignes EF, FG ſeront commenſurables, au moins en puiſſance: Et d'autant que EF eſt rationele, auſſi FG ſera rationele. Mais pource que AB, AC ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré; & partant les lignes EF, FG ſont incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'il eſt premier. Car puis que les quarrez de EF, FG ſont entr'eux comme les nombres AB, AC: & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: que ce ſoit donc du quarré de H: (iceluy quarré ſera trouué par le lemme qui ſuit la 14. prop. 10.) Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG: par conuerſion de raiſon comme AB à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de EF ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes EF, H ſont commenſ. en longitude par la 9. pr. 10. Veu donc que le plus grand nom EF eſt commenſ. en longit. à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ en longitude, EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier: Ce qu'il falloit faire.

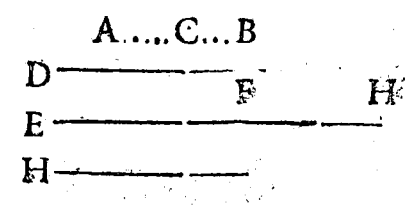
SCHOLIE.

Soit la rationele propoſee D 8, & EF 6, faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 36 quarré de EF, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant la toute EG, ſera 6+√20, qui eſt binome premier: car le plus grand nom eſt commenſurable à nombre abſolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt commenſurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier ſera trouué plus briefuement que deſſus, poſant quelconque nombre pour le plus grand nom, & pour le moindre la racine quarree des trois quarts de ſa puiſſance. Ainſi poſant 8 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 64, dont le quart ſouſtrait reſte 48; & partant 8+√48 ſera binome premier.

PROB. 14. PROP. L.

Trouuer vn Binome ſecond.

Eſtans trouuez les deux nõbres quarrez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commenſurable en longitude à vne rationele propoſée D: icelles D & FG ſeront rationeles commenſurables: puis apres par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG ſoit au quarré de EF. Ie dis que EG eſt binome ſecond.



Car on demonſtrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG

est binome. Et puis que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de FG est au quarré de EF, en changeant comme AB à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG. Mais AB est plus grand que AC: Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG, & soit du quarré de H. Nous demonstrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF sont commensurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est commens. en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationele D: & par les sec. def. EG, sera binome second. Nous auons donc trouué vn binome second, ainsi qu'il estoit requis.

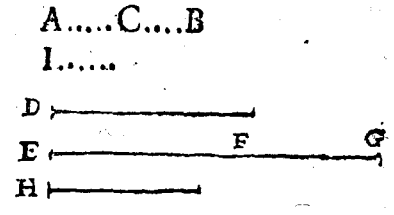
SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 7, & FG 5: faisant donc que comme AC 5 est à AB 9, ainsi 25 quarré de FG soit au quarré de EF 5 icelle EF sera √45: & partant la toute EG sera √45+5, qui est binome second: pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine est commens. en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom est aussi commensur. au nombre rationel proposé. Or pour trouuer plus briefuement que dessus iceluy binome second, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adiouster le tiers, & la racine quarree de ce qui en viendra sera le plus grand nom. Ainsi prenant pour le moindre nom 6, son quarré est 36, dont le tiers luy estant adiousté sera 48: & partant √48+6 sera binome second.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troisiesme.

Estans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. soit pris vn autre nombre I qui ne soit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qui se fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré, il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Derechef, puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: & partant il ne tombera pas entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonstré au scholie de la 8 p. 8. Ils ne seront donc pas plans semblables: & partant ne seront entr'eux comme nombres quarrez.) & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait que comme I à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: par ainsi les quarrez de D & EF, estans entr'eux comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D & EF le seront aussi, au moins en puissance. Parquoy D estant rationele, EF le sera, aussi. Mais parce que I n'est pas à AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef soit fait par le susdict corol. que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG: & par la 6. prop. 10. iceux



quarrez de EF, FG, eſtans comme nombre à nombre, ſeront commenſurables entr'eux: & partant les lignes EF, FG auſſi commenſurables, au moins en puiſſance: & EF eſtant rationele, FG le ſera auſſi. Et d'autant que AB n'eſt pas à AC, c'eſt à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG ſeront incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'elle eſt binome troiſieſme. Car d'autant que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D eſt au quarré de EF; & comme AB à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de FG: par raiſon egale comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D ſera au quarré de FG. Mais I n'eſt pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré: donc les quarrez de D & FG ne ſeront auſſi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D & FG, ſeront incommenſurables en longitude par la 9. p. 10. Et puiſque comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG; & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: ſoit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonſtrerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H ſont commenſurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy eſt commenſurable en longitude, & l'vne ny l'autre d'icelles EF, FG n'eſt commenſurable en longitude à la propoſee rationele D, comme il a eſté demonſtré: partant EG ſera binome troiſiéme par les ſecondes definitions. Nous auons donc trouué vn binome troiſieſme. Ce qu'il falloit faire.

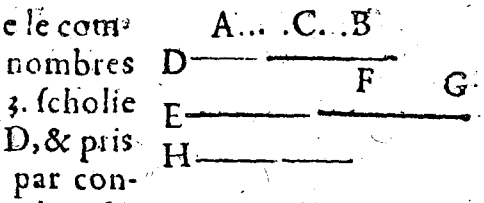
SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 6: faiſant donc que comme 16, eſt à AB 9, ainſi 36 quarré de D ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera √54: & faiſant que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 54 quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √30: & partant la toute EG ſera √54+√30, qui eſt binome troiſieſme, parce que l'vn ny l'autre nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, duquel la racine eſt commenſurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouuer ce binome plus promptement que deſſus, on poſera la racine quarree de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarree des trois quarts du meſme nombre pour le moindre nom: Ainſi poſant pour le plus grand nom √20, l'autre nom ſera √15: & partant √20+√15 ſera binome troiſieſme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatrieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB, ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nombres quarrez, (ſuiuant ce que nous auons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop. de ce liure) ſoit expoſé la rationele D, & pris EF commenſ. en long. à icelle rationele D; & par conſequent EF ſera auſſi rationele: Et ayant conſtruit le reſte comme en la 49. pr. 10.



Nous demonſtrerons comme là que la toute EG eſt binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du quarré de H; & que par conuerſion de raiſon, comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & par la 9. prop. 10. les lignes EF & H, ſont incommenſ. en longitude: parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt incommenſurable en longitude, & qu'icelle EF eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee D: EG ſera binome quatrieſme par les def. ſecondes. Nous auons donc trouué vn binome quatrieſme: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele expoſee D ſoit 8, & EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt AC 6, ainſi le quarré de EF, ſçauoir 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera trouuee de √24: & partant la toute EG ſera 6+√24, qui eſt binome quatrieſme: pource que le plus grand nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt incommenſurable en longitude à iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus promptement que deſſus poſant pour le plus grand nom quelconque nombre: & pour le moindre la racine quarree de la moitié du quarré d'iceluy. Ainſi poſant 6 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 36, dont la moitié ſera 18, & partant 6+√18 ſera binome quatrieſme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50. p. on demonſtrera comme en ladite 50. prop. que EG eſt binome. Item que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H: Et comme en la precedente, qu'icelles EF & H ſont incommenſurables en longitude: & partant par les ſecondes def. EG eſt binome cinquieſme. Nous auons donc trouué vn binome cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

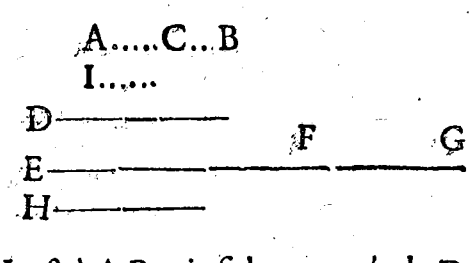
La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 6: donc faiſant que comme AC 6 eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF, ſçauoir eſt 36, ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera trouuee de √54: partant la toute EG ſera √54+6, qui eſt binome cinquieſme: car le moindre nom eſt commenſ. en longitude au nombre rationel propoſé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré dont la racine eſt incommenſ. en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer tel binome, ſoit poſé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy eſtant adiouſtee au meſme quarré, la racine du tout ſera le plus grand nom: Ainſi poſant 4 pour le moindre nom, ſon quarré ſera 16, dont la moitié 8 luy eſtant adiouſtee ſeront 24, dont la racine ſera √24, & partant √24+4 ſera binome cinquieſme.

PROB. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome ſixieſme.

Soient trouuez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB ne ſoit

à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qu'on fera adiouſtant enſemble deux nombres premiers: Car par la 30. p. 7. le total ſera auſſi premier à chacun d'eux: & partant ne ſera à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré par les choſes demonſtrées à la fin du 8. liure) puis ſoit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres, ſoit vne rationele propoſee D: &



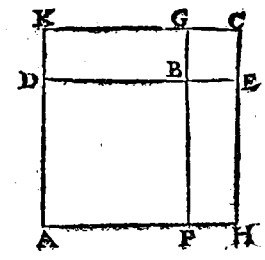
par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: & ayant acheué comme en la 51. pr. 10. nous demonſtrerons comme là que EG eſt binome: Item que D & FG ſont incommenſ. en longitude, & que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonſtrerons comme en la 49. pr. que par conuerſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conſequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. pr. 10. les lignes droictes EF & H, ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy eſt incommenſ. en longitude: & que l'vn ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſ. en longitude à l'expoſee rationele D, par les ſecondes def. EG ſera binome ſixieſme. Nous auons donc trouué vn binome ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 6: faiſant que comme 16 eſt à AB 8, ainſi le quarré de D, c'eſt à ſçauoir 36, au quarré de EF: icelle EF ſera trouuee de √48: & faiſant que comme AB 8 eſt à AC 5, ainſi 48 quarré de EF ſoit au quarré de FG: icelle FG ſera trouuee de √30: partant la toute EG ſera √48+√30, qui eſt binome ſixieſme: car l'vn & l'autre nom eſt incommenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt incommenſ. à iceluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que deſſus tel binome il n'y a qu'à prendre les racines quarrees de deux nombres non quarrez, dont l'vn ſoit double de l'autre: Ainſi poſant √12 pour le plus grand nom, l'autre ſera √6; & partant √12+√6 ſera binome ſixieſme.

LEMME.

Les quarrez AB, BC eſtans conioincts à l'angle B, tellement que les coſtez DB, BE facent vne ſeule ligne droicte DE; & par conſequent les coſtez FB, BG auſſi vne ſeule ligne droicte FG: eſtant acheué le parallelogramme HK: Ie dis qu'iceluy eſt quarré; & le rectangle FE moyen proportionnel entre les quarrez AB, BC; & DC moyen proportionnel entre les quarrez AC, BC.



Car d'autant que DB eſt egale à FB, & BE à BG: la toute DE ſera egale à la toute FG. Mais par la 34. pr. 1. la ligne DE eſt egale à l'vne & à l'autre d'icelles AH, KC: & FG

à AK, HC: & par conſequent chacune d'icelles AH, KC eſt egale à l'vne & à l'autre AK, HC: donc le parallelogramme HK eſt equilateral. Mais par la 29. prop. 1. il eſt auſſi rectangle, & partant quarré. Derechef, puis que DB, BE, ſont egales à FB, BG, chacune à ſa correſpondante, comme DB eſt à BE, ainſi FB à BG. Mais par la 1. prop. 6. comme DB à BE, ainſi AB à FE: & comme FB à BG, ainſi FE à BC: donc comme AB à FE, ainſi FE à BC: & partant FE eſt moyen prop. entre AB, BC. Et finalement, veu que comme AD à DK, ainſi KG à GC, icelles eſtans egales chacune à la ſienne: en compoſant comme AK à DK, ainſi KC à GC. Mais comme AK à DK, ainſi AC à DC: & comme KC à GC, ainſi DC à BC par la 1. prop. 6. Donc comme AC à DC, ainſi DC à BC: & par conſequent DC eſt moyen prop. entre AC, BC.

Or voila comme Commandin propoſe & demonſtre ce lemme: mais Clauius le propoſe ainſi.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt moyen proportionnel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu ſous la toute, & vne des parties, eſt moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

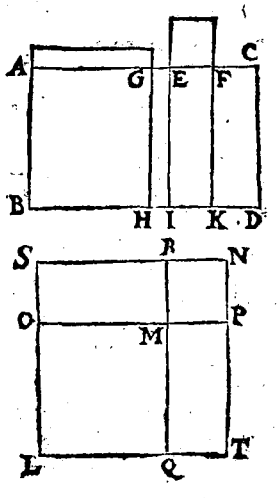
Ce qui eſt la meſme choſe que deſſus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier; la ligne pouuant iceluy rectangle eſt binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationelle appellee binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom ſoit AE: donc par la def. AE, EC ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & auſſi AE ſera commenſ. en longit. à la rationelle propoſee AB. Soit couppee EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. ſi ſur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eſt à dire au quarré de EF, & defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle AE en parties commenſ. en long. par la 18. prop. 10. ſoient donc icelles parties AG, GE: & par les poincts G, E, F ſoient menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. p. 2. ſoient deſcrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & diſpoſez en ſorte que OM, MP facent vne ligne droicte: puis ſoit acheué le rectangle ST, lequel ſera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la conſtruction le rectangle de AG, GE eſt egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE ſeront proport. par la 17. pr. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI ſeront auſſi proportionnaux: parquoy EK ſera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK ſeront egaux.

Mais par la 43. prop. 1. OR, QP ſont auſſi egaux: & par la 36. p. 1. EK eſt egal à FD: donc QP ſera auſſi egal à FD: & par conſequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle AD: & par ainſi la ligne OP peut le rectangle AD: Ie dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude, la toute AE ſera auſſi commenſ. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE eſt auſſi commenſ. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle AB eſt auſſi commenſ. en long. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB eſtant rationelle, AG, GE ſeront auſſi rationelles: & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationelles, ſeront rationaux: donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationelles. Et d'autant que AE eſt incomm. en long. à EC, mais commenſ. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. AG, EF ſeront incommenſ. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. p. 6. ſont auſſi incommenſ. par la 10. p. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. pr. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommenſ. en long. puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demonſtrees rationelles: & partant elles ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc la toute OP pouuant le rectangle AD eſt binome par la 37. p. 10. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC 4+√12. Donc le rectangle AD ſera 20+√300: Et puis que AE plus grand nom du binome eſt 4, & EF moitié du plus petit nom EC, eſt √3, AG ſera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH ſera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle ſera √15: Ainſi GI eſt 5, & MP √5. Mais EF eſt √3, & EI egale à AB: donc EK ſera √75, & ſon double ED √300. Or ſi on multiplie OM, MP entr'elles, ſera produict MT √75, egal à EK. Mais à iceluy MT eſt egal MS: donc MS, MT enſemble ſeront auſſi √300. Or les quarrez LM 15, MN 5, ſont enſemble 20: Partant tout le quarré LN eſt 20+√300, & ſon coſté OP ou LT √15+√5, qui eſt binome ſixieſme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

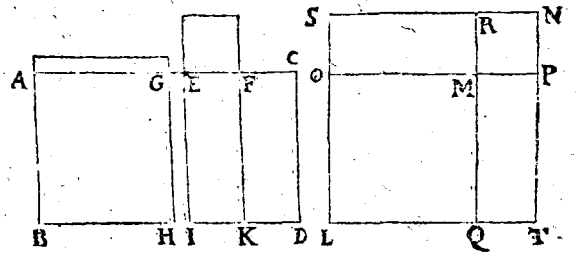
Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome ſecond, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, comprís de la rationelle AB & du binome ſecond AC: Ie dis que (apres auoir fait pareille conſtruction & demonſtration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt l'irrationelle appellee bimediale premiere.

Car puis que AC eſt binome ſecond, AE ſera incommenſ. en longit. à la rationelle AB: Item AG & EG (qu'on prouuera eſtre commenſurable en longi-

tude

rude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. prop. 10. à leur toute AE seront par la 14. pr. 10. aussi incommensurables en longitude à icelle AB, laquelle estant rationelle, icelles AG, GE seront aussi rationelles: & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationelle AB. Donc par la 22. prop. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux: & leurs egaux quarrez L M, M N aussi mediaux: Et partant les lignes O M, M P mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longitude à la rationelle AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. prop. 10. aussi sera sa moitié I K: & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP: & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC √48+6: donc le rectangle AD sera √12000+30. Et puis que AE est √48, & EC 6: EF sera 3, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront √27, & √3: parquoy le rectangle AH sera √675, & par consequent la ligne OM, qui peut iceluy sera √√675: ainsi GI sera √75, & MP √√75. Or EC est 6: partant ED double de MS √√30625, c'est à dire 15, est 30; & par consequent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarrez LM √675, MN √75, & des deux rectangles MS, MT 30, sera √1200+30, & son costé OP ou LT √√675+√√75, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome troisiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationele nommee bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisiesme AC; (apres auoir construict comme aux precedentes.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationele appellée bimediale seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commens. en puissance seulement: Item, d'autant que AC est binome troisiesme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationele AB; & par la 22. p. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK: Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC √32+√24: Donc le rectangle AD sera √800+√600. Mais d'autant que AE est √32, & EC √24; EF sera √6, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG sera √18, & GE √2. Parquoy le rectangle AH sera √450, & GI √50; & par consequent la ligne OM est √√450, & MP √√50. Et puis que EI est 5, & EC √24, le rectangle ED sera √600, lequel est double de MT √150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarrez LM √450, MN √50, & des rectangles MS, MT √600; sera √800+√600: & partant son costé OP est √√450+√√50, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Majeure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC, & de la rationelle AB: (apres auoir construict & demonstré comme en la 55. prop.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle qu'on appelle ligne majeure.

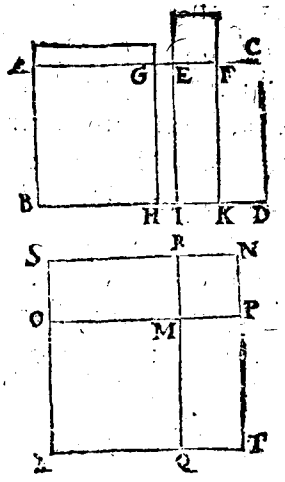
Car puis que AC est binome quatriesme, le plus grand nom AE est commensur. en longitude à la rationele AB, & peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 19. pr. 10. le rectangle defaillant compris soubs AG, GE, (qui est egal au quart du quarré de EC) diuisera AE en AG & EG incommens. en longitude: & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Donc aussi incommens. leurs egaux quarrés LM & MN: & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris des rationeles AB, AE, (qui est egal aux quarrez LM, MN) est rationel par la 20. prop. 10. Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. estant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP est ligne majeure. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC 4+√8: Donc le rectangle AD sera 20+√200. Et puis que AE est 4, & EC √8: EF sera √2, au quarré de laquelle, sçauoir 2, ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE: la ligne AG sera 2+√2, & GE 2—√2: partant le rectangle AH sera 10+√50, & GI 10—√50: & par consequent OM est √(10+√50) & MP √(10—√50). Or EC estoit √8: donc ED double du rectangle MT √50, sera √200. La somme des quarrez LM, MN, sera donc 20, à laquelle si on adiouste les plans TMS √200, on aura pour tout le quarré LN 20+√200: & partant son costé OP sera √(10+√50)+√(10—√50), ou √(20+√200) qui est ligne majeure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome cinquieſme; la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome cinquieſme AC: Ie dis, (apres auoir conſtruict & demonſtré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt ligne irrationelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC eſt binome cinquieſme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & comme en la precedente, AG & GE ſeront incomm. en long. Et les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance, & l'egal au compoſé de leurs quarrez, ſçauoir le rectangle AI, eſt medial par la 22. pr. 10. car les lignes AB & AE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, ſont comm. en longit. par la 20. p. 10. ED eſt rationel: auſſi ſera ſa moitié EK, & ſon egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP eſt ligne irrationele pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn binome cinquieſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC √8+2. Donc le rectangle AD ſera √200+10. Et d'autant que AE eſt √8, & EC 2; EF ſera 1, au quarré de laquelle eſtant egal le rectangle de AGE, le coſté AG ſera √2+1, & GE √2—1: & partant le rectangle AH ſera √50+5, & la ligne OM √(√50+5): & MP √(√50—5), puis que GI eſt √50—5. Et pource que EI eſt 5, & EC 2; le rectangle ED ſera 10: & par conſequent ſa moitié MT eſt 5. Donc la ſomme des quarrez LM, MN, eſt √200, à laquelle adiouſtant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN ſera √200+10: & par conſequent ſon coſté OP, eſt √(√50+5) +√(√50—5), ou bien √(√200+10), qui eſt ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

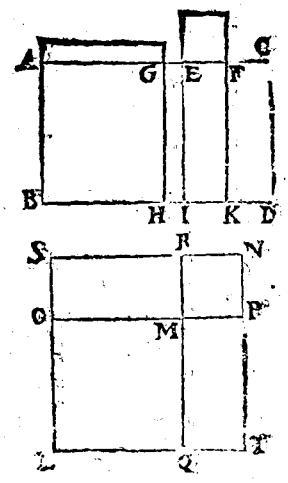
THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome ſixieſme la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt ligne qui peut deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome ſixieſme AC: (apres auoir conſtruit & demonſtré comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD.) Ie dis qu'icelle OP eſt ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC eſt binome ſixieſme, le plus grand nom AE peut plus

que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les deux noms sont incommensur. en longitude à la rationelle AB : Et comme il a esté demonstré à la 58. prop. 10. OM, MP seront incommensurables en puissance: aussi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui est egal au composé de leurs quarrez est medial: Item ED qui est cõpris de deux rationelles commensurables en puissance seulement, est aussi medial par la mesme propos. aussi medial sa moitié EK, & son egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et de plus, iceluy rectangle QP, ou son egal EK, est incommens. au composé des quarrez LM, MN, sçauoir AI: car les lignes AE & EC estans incommens. en longitude, aussi AE & EF le seront: & partant par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AI & EK seront incommens. & par la 42. prop. 10. OP sera ligne pouuant deux mediaux. Parquoy, si vn rectangle est compris, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, AC $\sqrt{12}+\sqrt{8}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{,00}+\sqrt{200}$. Et pource que AE est $\sqrt{12}$, & EC $\sqrt{8}$: EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE; le costé AG sera $\sqrt{3}+1$, & le costé GE $\sqrt{3}-1$: Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{75}+5$, & la ligne OM $\sqrt{(\sqrt{75}+5)}$: & GI estant $\sqrt{75}-5$, MP sera $\sqrt{(\sqrt{75}-5)}$. Mais EC estant $\sqrt{8}$, le rectangle ED, qui est double de MT $\sqrt{50}$, sera $\sqrt{200}$. Donc les quarrez LM, MN, feront ensemble $\sqrt{300}$, & les rectangles SMT $\sqrt{200}$: & partant tout le quarré LN sera $\sqrt{300}+\sqrt{200}$: & par consequent son costé OP sera $\sqrt{(\sqrt{75}+5)}+\sqrt{(\sqrt{75}-5)}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{300}+\sqrt{200})}$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

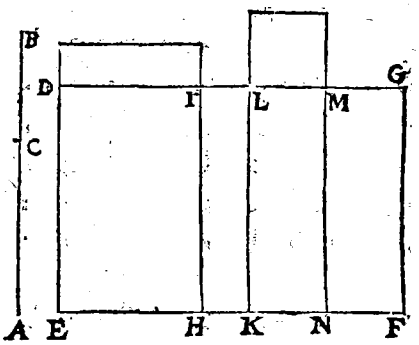
Le quarré d'vn binome appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationelle DE soit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF egal au quarré de AB : Ie dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB : Il est donc euident par la 4. prop. 2. que le reste LF est egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuisant LG egalement en M, & en menant MN parallele à DE, chasque rectangle LN, MF sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationelles commens. en puissance seulement: & leurs quarrez seront rationnaux, & leurs egaux rectangles DH & IK aussi rationaux : & par la 21. prop. 10. les costez DI & IL seront rationelles commens. en longitude à la rationelle DE, & entr'elles par la 12. prop. 10. Et par la 16. pr. 10. la toute

DL ſera commenſ. en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle ſera rationelle & commenſ. en longitude à DE rationelle: Et d'autant que par la 22. pr. 10. le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF ſera auſſi medial: & par la 23. prop. 10. iceluy medial LF eſtant appliqué ſur la rationelle LK, l'autre coſté LG ſera auſſi rationel incommenſ. en longit. à icelle LK, c'eſt à dire à DE, à laquelle DL eſtant commenſ. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG ſont incommenſ. en longit. mais elles ſont rationelles: elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement; & par la 37. prop. 10. DG eſt binome. Ie dis en outre que c'eſt binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB eſt moyen proport. entre les quarrez d'icelles AC, CB: donc auſſi LN moyen prop. entre DH, IK: & par conſequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL ſera egal au quarré de LM: Et d'autant que les quarrez de AC, CB ſont commenſ. (car icelles AC, CB ſont poſees commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles DH, IK ſeront auſſi commenſ. Donc auſſi commenſ. en longitude les lignes DI, IL par les 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB ſont plus grands que deux fois leur rectangle, par le lemme qui ſuit la 44. prop. de ce liure: DK ſera plus grand que LF; & par conſequent DL plus grand nom que LG: car icelles lignes ſont entr'elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puiſque le rectangle de DI, IL appliqué ſur DL, eſt egal au quarré de LM, c'eſt à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, & que les parties DI, IL ſont commenſ. en longitude: icelle DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant eſté demonſtrée commenſ. en longit. à la rationelle DE, par les ſecondes def. DG ſera binome premier. Donc le quarré d'vn binome appliqué ſur vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

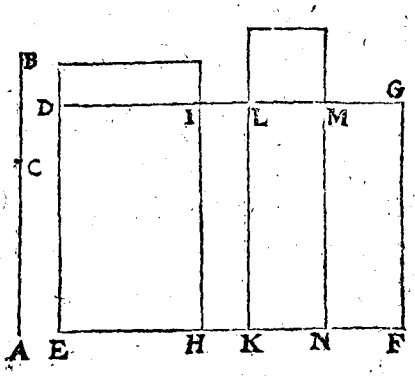
Le binome AB ſoit $\sqrt{45}+3$, *& la rationelle* ~~DE~~ *6: d'autant que le plus grand nom AC eſt* $\sqrt{45}$, *ſon quarré eſt 45, lequel appliqué ſur DE 6, fait l'autre coſté DI de* $7\frac{1}{2}$: *Et le moindre nom CB eſtant 3, ſon quarré eſt 9, qui appliqué ſur IH 6, fait IL de* $1\frac{1}{2}$, *& partant la toute DL eſt 9. Or le rectangle de ACB eſt* $\sqrt{405}$, *& ſon double LF* $\sqrt{1620}$. *Donc la ligne FG ſera* $\sqrt{45}$: *& par conſequent la toute DG ſera* $9+\sqrt{45}$, *qui eſt binome premier.*

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimediale premiere appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté binome ſecond.

Soit la bimediale premiere AB diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC : (apres auoir construit comme en la precedente). Ie dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. prop. 10. AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquelle double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrez sont mediaux: & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK. par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longitude à la rationelle DE: & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente, que DL est le plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationelle DE : & partant par les secondes def. D G est binome second. Parquoy le quarré d'vne bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La bimediale AB soit $\sqrt{\sqrt{108}}+\sqrt{\sqrt{12}}$, *& la rationelle DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est* $\sqrt{\sqrt{108}}$, *son quarré est* $\sqrt{108}$, *lequel estant appliqué sur la rationelle DE 4, le costé DI sera* $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. *Ainsi aussi le moindre nom estant* $\sqrt{\sqrt{12}}$, *son quarré est* $\sqrt{12}$: *& par consequent IL, est* $\sqrt{\frac{3}{4}}$, *& la toute DL* $\sqrt{12}$. *Or le rectangle de ACB est 6: & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3. Donc la toute DG sera* $\sqrt{12}+3$, *qui est binome second.*

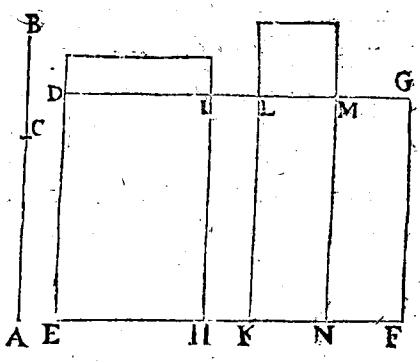
THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'vne bimediale seconde appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Apres auoir construit comme en la 61. pr.) Ie dis que DG est binome troisiesme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC, BC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle

medial; partant les quarrez d'icelles AC, CB seront commens. & mediaux: & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. prop. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. pr. 10. DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationelle DE, par la 23. pr. 10. son autre costé DL sera rationnel incommens. en longitude à icelle DE. De rechef, puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi: & iceluy LF estant appliqué sur la rationelle LK, son autre costé LG sera rationel incommens. en longitude à LK: c'est à dire à DE. Donc l'vne & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationelle & incommens. en longit. à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il est euident par la 10. pr. 10. que le quarré sera incomm. au rectangle (estans les deux lignes incommens. en longit.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC est commens. le composé des quarrez de AC, CB: & au rectangle de AC, CB est commensur. son double: Donc le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommens. au double du rectangle de AC, CB: c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, FL sont incomm. en long. par la 10. p. 10. mais elles sont rationeles, & partant comm. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG est binóme.



Ie dis d'auantage, qu'il est binome troisiesme. Car il a esté demonstré que les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: Et se prouuera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & par les secondes def. DG est binome troisiesme. Donc le quarré d'vne bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{\sqrt{72}+\sqrt{\sqrt{8}}}$, *&* DE 4. *Donc* DH *sera* $\sqrt{72}$, $IK\sqrt{8}$, *&* LN *ou* $MF\sqrt{24}$, *qui appliquez sur* DE; DI *sera* $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, $IL\sqrt{\frac{1}{2}}$ *&* LM *ou* $MG\sqrt{1\frac{1}{2}}$: *& partant la toute* DL *sera* $\sqrt{8}$, *&* $LG\sqrt{6}$. *Parquoy la toute* DG *est* $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, *qui est binome troisiesme.*

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'vne ligne majeure appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome quatriesme.

Soit la ligne majeure AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construict comme en la 61. p. de ce liure) ie dis que DG est binome quatriéme.

Car puis que AB est ligne majeure, par la 40. p. AC, & CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quar-

rez rationel; le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en longit. à icelle DE par la 21. pr. 10. Item le rectangle LF, double du rectangle de AC, CB, sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommens en longit. à DE. Et partant par la 13. pr. 10. les rationeles DL & LG seront incommensurables en long. Donc commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Ie dis dauantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarrez seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, IL incommens. Et d'autant que l'on demonstrera comme en la 61. prop. que DL est plus grande que LG, & que sur icelle DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise icelle DL à l'en parties incomm. en long. par la 19. p. 10. DL, qui est commens. en longit. à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longit. & par les secondes def. DG est binome quatriesme. Donc le quarré d'vne ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne maieure AB soit $\sqrt{(10+\sqrt{37\frac{1}{2}})}+\sqrt{(10-\sqrt{37\frac{1}{2}})}$, *& la rationele DE soit 5. Donc le rectangle DH sera* $10+\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *IK* $10-\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *& LN ou MF* $\sqrt{62\frac{1}{2}}$; *qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *IL* $2-\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *& LM ou MG* $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. *Parquoy DL sera 4, & LG* $\sqrt{10}$: *& par consequent la toute DG est* $4+\sqrt{10}$, *qui est binome quatriesme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (apres auoir construit comme en la 61. prop.) Ie dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel & vn medial, AC, CB, par la 41 pr. 10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele commens. en longit. à icelle DE: & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Ie dis de plus, qu'il est binome cinquiesme. Car LG est commensurable en longitude à la rationele DE; & si on prouuera

comme

comme aux precedentes, que DL peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par les ſecondes definitions DG eſt binome cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

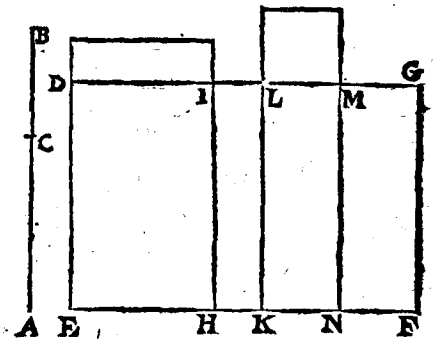
La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{125}+5)}+\sqrt{(\sqrt{125}-5)}$, *& la rationelle DE 5. Donc le rectangle DH ſera* $\sqrt{125}+5$, *IK* $\sqrt{125}-5$, *& LN ou MF 10, qui appliquez ſur DE, le coſté DI ſera* $\sqrt{5}+1$, *IL* $\sqrt{5}-1$, *& LM ou MG 2. Parquoy DL ſera* $\sqrt{20}$, *& LG 4, & par conſequent la toute DG eſt* $\sqrt{20}+4$, *qui eſt binome cinquieſme.*

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté binome ſixieſme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, dont le plus grand eſt AC. (Apres auoir conſtruit comme aux preced.) ie dis que DG eſt binome ſixieſme.

Car puis que AB eſt ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſ. au compoſé de leurs quarrés auſſi medial: par ainſi il eſt euident que DK & LF ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. p. 10. iceux rectang. eſtans appliquez ſur lignes rationelles, leurs autres coſtez DL, LG ſeront rationaux commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele DE.. Mais iceux coſtez DL, LG eſtans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF leſquels ſont incommenſ. ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr. 10. Donc les rationeles DL, LG ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 37. prop. 10. DG eſt binome, duquel les deux noms ſont incommenſ. en longitude à la rationele DE: & comme il a eſté demonſtré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & par les ſecondes def. DG eſt binome ſixieſme. Parquoy le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

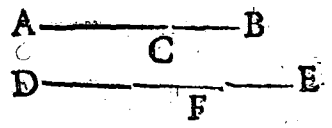
La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{252}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{252}-\sqrt{72})}$, *& DE 6. Le rectangle DH ſera donc* $\sqrt{252}+\sqrt{72}$, *IK* $\sqrt{252}-\sqrt{72}$, *& LN, ou MF* $\sqrt{180}$, *qui appliquez à DE, le coſté DI eſt* $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, *IL* $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, *& LM ou MG* $\sqrt{5}$. *Partant DL eſt* $\sqrt{28}$, *& LG* $\sqrt{20}$; *& par conſequent la toute DG eſt* $\sqrt{28}+\sqrt{20}$, *qui eſt binome ſixieſme.*

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commensurable en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit quelconque binome AB diuisé en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand, & CB le moindre: soit la ligne droicte DE commensurable en longitude au binome AB. Ie dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchee AC soit à la retranchee DF, par la 19. p. 5. le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, sont commens. en longit. par la 10. pr. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en longitude. Mais par la 37. pr. 10. AC, CB, sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement: donc aussi DF, FE seront rationeles commens. en puissance seulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.



Car si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, aussi par la 15. prop. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commensurable en longitude à la rationele proposee, aussi sera DF par la 12. prop. 10. veu que l'vne & l'autre est commensurable en longitude à la mesme AC; & partant chacune d'icelles AB & DE sera binome premier. Que si CB est commensurable en longitude à la rationelle proposee, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: mais si AC & CB sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DF & FE: & par les def. AB & DE seront binome troisiesme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longit. aussi par la 15. pr. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE seront binome 4^e. ou 5^e. ou 6^e. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre. Donc la ligne commens. en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

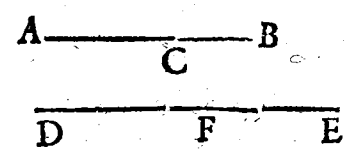
THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commensurable en longitude à vne bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisee en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand, & CB le plus petit; & à icelle AB soit commens. en longitude la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au

reſte FE, comme la toute AB à la toute DE: & partant par la 10.p.10. AC ſera commenſurable en longitude à DF; & CB à FE. Mais AC, CB ſont mediales: donc par la 24. pr. 10. DF, FE commenſurables à icelles, ſont auſſi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE: en permutant, comme AC à CB ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 38.p.10. Donc auſſi DF, FE ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 10.p.10. mais elles ſont auſſi mediales: & partant par la 38 ou 39. prop. 10. DE ſera bimediale.



Dauantage ie dis qu'elle eſt en meſme ordre que AB. Car d'autant que comme AC eſt à DF, ainſi BC à FE, par la 22.pr. 6. le quarré de AC ſera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC eſt au rectangle de DF, FE: (eſtans iceux rectangles ſemblables, d'autant qu'ils ont les coſtez proport.) Mais le quarré de AC eſt commenſurable au quarré de DF, (pource que les lignes AC, DF ont eſté demonſtrees commenſ. en long.) Donc par la 10. pr. 10. les rectangles ſeront auſſi commenſ. Que ſi l'vn eſt rationel, l'autre le ſera auſſi: & par ainſi AB, & DE ſeroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que ſi l'vn des rectangles eſt medial, l'autre ſera auſſi medial, & conſequemment AB & DE ſeront bimediales ſecondes, par la 39. prop. 10. Ainſi DE ſera bimediale, & en meſme ordre que AB. Parquoy la ligne commenſurable en longitude à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commenſurable à vne ligne majeure eſt auſſi ligne majeure.

Soit la ligne majeure AB, diuiſee en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſ. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne majeure.

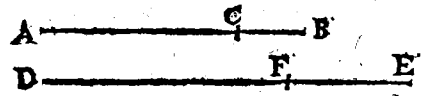
Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) AC ſera à CB comme DF à FE, & AC commenſurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. prop. 10. AC & CB ſont incommenſ. en puiſſance; les lignes DF & FE le ſeront donc auſſi. Item puis qu'icelles lignes AC, CB, DF, FE ſont proport. par la 22. pr. 6. leurs quarrez ſeront porportionnaux: & en compoſant, les deux de AC & BC ſeront au ſeul de CB, comme les deux de DF & FE ſont au ſeul de FE: & en permutant, les deux quarrez de AC & CB, ſeront aux deux de DF & FE, comme le ſeul de CB eſt au ſeul de FE. Mais les lignes CB, FE eſtans commenſ. leurs quarrez ſeront auſſi commenſurables; & partant les deux de DF & FE, ſeront par la 10. prop. 10. commenſ. aux deux de AC & BC: & ſeront rationaux comme iceux. Item, on prouuera comme en la precedente, que le rectangle de DE & FE eſt commenſurable au rectangle de AC & BC; lequel eſtant medial par la 40. prop. 10. auſſi ſera celuy de DF & FE par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE ſera ligne majeure. Donc la ligne commenſ. à vne ligne majeure, eſt auſſi majeure. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, est aussi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisée en ses noms en C, & à icelle soit commensurable la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommensur. en puissance, aussi le seront DF & FE. Item que le composé des quarrez de AC & BC sera commens. au composé des quarrez de DF & FE: & le rectangle de AC & BC aussi commensur. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41 p. 10.



le composé des quarrez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarrez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & par ainsi la toute DE sera ligne pouuant vn rationel & vn medial, par la susdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commens. à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux mediaux, est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuisee en ses noms au poinct C, & à icelle soit comm. DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant deux mediaux.

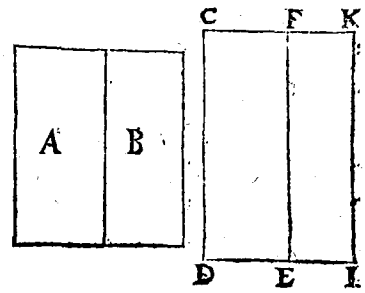
Car (apres auoir construit comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissance; que le composé de leurs quarrez est medial, & leur rectangle aussi medial: Mais on prouuera aussi comme en la 69. pr. que le composé des quarrez de AC & BC, est au composé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE: & encore comme en la 68. p. que le quarré de CB est au quarré de EF, comme le rectangle de AC & BC, est au rectangle de DF & FE: donc par la 11. prop. 5. le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le composé des quarrez de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarrez de DF & FE est incommens. à leur rectangle, & par la 42. pr. 10. DE est ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commens. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 54. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationele, & vne mediale sont ioinctes; la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soient ioinctes deux ſuperficies A rationele, & B mediale: ie dis que la ligne qui peut toutes les deux eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car premierement les deux ſuperficies ne ſçauroient eſtre egales (car ou elles ſeroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales.) Soit donc premierement A plus grande que B: Et ſur la rationele CD ſoit appliqué le rectangle CE egal à A: & ſur EF vn autre rectangle FI egal à B, afin que tout le rectangle CI ſoit egal aux deux ſuperficies propoſees A & B. Et puis que A eſt rationele, & B mediale, auſſi le rectangle CE ſera rationel, & FI medial, leſquels eſtans appliquez à la rationele CD; CF ſera rationele commenſ. en longitude à icelle CD par la 21. prop. 10. & FK auſſi rationele, mais incommenſ. en longitude à la meſme CD par la 23. pr. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK ſeront incommenſ. en longitude: donc commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. CK ſera binome diuiſé en ſes noms en F. Mais puis que A a eſté poſee plus grande que B, auſsi CE ſera plus grand que FI; & partant CF ſera plus grande que FK par la 1 p. 6. Parquoy CF ſera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable, ou incommenſurable en longitude. Si commenſ. (eſtant CF commenſ. en longitude à la rationele CD) CK ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt binome. Si incommenſ. CK ſera binome quatrieſme, par la 4. des ſecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eſt ligne maieure.



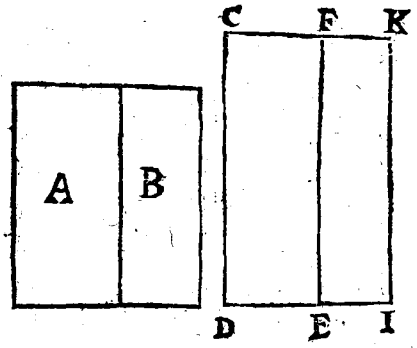
Que ſi la figure A eſtoit plus petite que B, auſſi le rectangle CE ſeroit plus petit que le rectangle FI; & CF ſeroit le plus petit nom commenſ. à la rationele CD: & par ce moyen CK ſeroit binome ſecond, ou cinquieſme: ſi binome ſecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale premiere. Si binome cinquieſme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial. Si donc vne ſuperficie rationele, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie rationelle A eſt 7, & la mediale B √48, la ligne pouuant icelles adiouſtees enſemble ſera 2+√3, qui eſt binome premier: ſi A & B ſont 21 & √432, la ligne pouuant icelles ſera √12+3, qui eſt binome ſecond: mais elle ſera √8+√6, qui eſt binome troiſieſme, ſi A eſt 14 & B √192: mais ſi A eſt 6, & B √32, elle ſera 2+√2, qui eſt binome quatrieſme: ſi A eſt 3 & B √8, elle ſera √2+1 qui eſt binome cinquieſme: & ſi A eſt 5, & B √24, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √3+√2, qui eſt binome 6: mais ſi A eſt 4, & B √18, la ligne pouuant la ſuperficie compoſée d'icelles ſera √√8+√√2, qui eſt mediale premiere: mais ſi A eſt 6, & B √12, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √(6+12) ou √(3+√6)+√(3—√6): & finalement ſi A eſt 2, & B √8, la ligne pouuant icelles ſera √(√8+2), ou √(√2+1)+√(√2—1), qui eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux ſuperficies mediales incommenſurables ſont iointes, la ligne qui peut le compoſé d'icelles eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soient iointes enſemble deux ſuperficies mediales incommenſ. A & B: Ie dis que la ligne droicte qui peut le compoſé d'icelles ſuperficies A & B eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Ayant fait ſur la rationele CD pareille conſtruction qu'en la prec. prop. les rectangles CE & FI ſeront mediaux & incomm. Et par la 23. p. 10. CF, FK ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele CD: & par la 37. p. 10. CK ſera binome. Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FK ne ſçauroient eſtre egales, d'autant qu'elles ſont incommenſ. en longit. Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſ. CK eſt binome troiſieſme par la 3. d. ſec. (eſtans les deux noms CF, FK incomm. en long. à la rationele CD) & par la 57. prop. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde: Si incommenſ. par la 6. des ſec. def. CK ſera binome ſixieſme: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy ſi deux ſuperficies mediales incommenſ. ſont iointes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si A eſt $\sqrt{50}$, *& B* $\sqrt{48}$: *la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera* $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{8}}}$, *qui eſt bimediale ſeconde: mais ſi A eſt* $\sqrt{12}$, *& B* $\sqrt{8}$, *ladite ligne pouuant icelles ſera* $\sqrt{(\sqrt{12}+\sqrt{8})}$, *ou bien* $\sqrt{(\sqrt{3}+1)}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$, *qui eſt ligne pouuant deux mediaux.*

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui ſuiuent icelle ſont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele à la quelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, faict l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale premiere, faict l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale ſeconde, faict l'autre coſté binome troiſieſme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'vne ligne maieure, faict l'autre coſté binome quatrieſme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial fait l'autre coſté binome cinquieſme, par la 65. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre coſté binome ſixieſme, par la 66. p. 10.

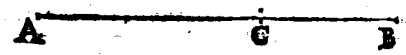
Mais il faut touſiours entendre qu'ils ſoient appliquez ſur vne ligne rationele. Et puis que tous ces coſtez ſont differens entr'eux, il eſt manifeſte que toutes icelles lignes irrationeles ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'vne ligne rationele, eſt retranchée vne ligne rationele commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute; le reſte eſt irrationel: & ſoit appelé Reſidu.

Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en ſorte que AB & AC, ſoient rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: Ie dis que le reſte CB eſt irrationel.



Car par la 1. p. 6. comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB eſt au rectangle de AB & AC: mais AB eſt incommenſ. en longitude à AC. Donc par la 10. pr. 10. le quarré de AB eſt incommenſ. au rectangle de AB & BC: Partant auſſi à ſon double: mais les quarrez de AB & AC, ſont poſez commenſ. Donc par la 16. prop. 10. les deux enſemble ſeront commenſ. au ſeul de AB: & partant puis que le quarré de AB eſt incommenſ. au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarrez de AB & AC, ſeront auſſi incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & AC, leſquels auec le quarré de CB, eſtans egaux aux deux quarrez de AB & AC par la 7. pr. 2. il s'enſuiura que le quarré de CB auec deux fois le rectangle de AB & AC ſeront incommenſ. à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17. pr. 10. deux fois le rectangle auec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) ſeront incommenſ. au quarré de CB: Mais iceux quarrez de AB, AC, eſtans rationaux; (car ils ſont deſcrits ſur lignes rationelles) le quarré de CB ſera irrationel: Partant la ligne CB ſera auſsi irrationelle: Et icelle ſoit appellee Apotome ou Reſidu. Si donc d'vne ligne rationelle eſt retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 2, & AC √3: Donc le reſte BC ſera 2—√3. Or en ceſte prop. & és 5 ſuiuantes, où Euclide monſtre l'origine des Apotomes ou reſidus, il ne veut dire autre choſe, ſinon que ſi des lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. on retranche le plus petit nom du plus grand, le reſte ſera irrationel, qu'on appellera Apotome, ou reſidu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'vne ligne mediale, eſt retranchee vne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel; le reſte eſt irrationel: Soit appellé reſidu medial premier.

Soit la bimediale AC, de laquelle eſt retranchee la mediale AB, en ſorte que AB & AC ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, compre-

nant vn rectangle rationel : Ie dis que le reste BC est irrationel.



Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarrez seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel, vn seul rectangle ayant esté posé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, auec le quarré de BC sont egaux aux quarrez de AB & AC: donc aussi deux fois le rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC seront incommens. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. pr. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle de AB & AC: mais iceluy double est rationel: donc le quarré de BC sera irrationel; & partant la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial premier. Parquoy si d'vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

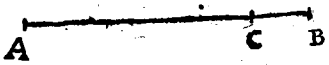
SCHOLIE.

La mediale AC soit √√54, & la retranchee AB √√24 : donc le reste BC sera √√54—√√24.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne mediale est retranchee vne ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial; le reste est irrationel: Soit appellé residu medial second.

Soit la mediale AB, de laquelle est retranchee la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial: Ie dis que le reste CB est irrationel.



Car puis que les quarrez de AB & AC sont commens. par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commens. à vn chacun d'eux: & chacun d'iceux estant medial, (pource que les lignes AB, AC sont posees mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme aussi le double du rectangle de AB, AC, puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de CB: le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'vn rationel: donc le quarré de CB n'est pas rationel, & partant il est irrationel: & consequemment la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial second. Parquoy si d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

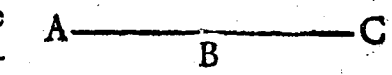
SCHOLIE.

La mediale AB soit √√18, & AC √√8 : donc le reste CB sera √√18—√√8.

THEOR.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel; le reſte ſera irrationel: Soit appellé ligne mineure.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle eſt retranchee AB incommenſ. en puiſſance à la toute AC, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

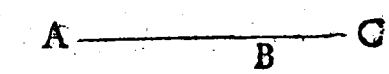
Car puiſque le compoſé des quarrez de AB, & AC eſt rationel, il eſt incommenſ. au rectangle de AC & AB, lequel eſt medial: partant auſſi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC eſt egal au double du rectangle de AB, AC, enſemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez de AB, AC ſera auſſi incommenſ. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy compoſé eſt poſé rationel, par la 10. def. le quarré de BC eſt irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{(18+\sqrt{108})}$, *& AB* $\sqrt{(18-\sqrt{108})}$: *le reſte BC ſera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{108})} - \sqrt{(18-\sqrt{108})}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial; le reſte ſera irrationel: Soit appellé ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle eſt retranchee AB incommenſ. en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC eſt rationel, auſſi ſera ſon double, & partant par la 10. def. il ſera incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles AB, AC, lequel eſt medial, c'eſt à dire irrationel. Mais le compoſé d'iceux quarrez par la 7. pr. 2. eſt egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC. Donc auſſi le double du rectangle de AB, AC eſt incommenſur. au double d'iceluy rectangle auec le quarré de BC: Et par la 17. pr. 10. iceluy double rectangle ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC. Et puis qu'iceluy double rectangle eſt rationel, par la 10. definit. le quarré de BC ſera irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle: la-

quelle ſoit appellee ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, vn tout medial: & ce d'autant que le quarré d'icelle ligne eſtant adiouſté auec vne ſuperficie rationele fait vn tout medial, comme il apparoiſtra à la 109. prop. 10. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AC eſt √(√216+√72), & AB √(√216−√72); le reſte BC ſera √(√216+√72) −√(√216−√72).

THEOR. 61. PROP. LXXIX.

Si d'vne ligne droicte, eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial; le reſte eſt irrationel: ſoit appellé ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne doicte AB, de laquelle eſt retranchée la ligne AC incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.



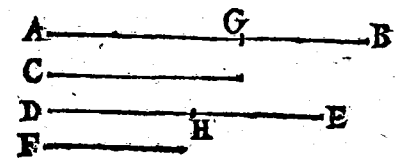
Car puis que par la 7. propoſit. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC auec le quarré de BC: iceluy compoſé des quarrez excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. prop. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'vn rationel: Donc le quarré de BC n'eſt pas rationel; & partant eſt irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle; laquelle on appellera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial; parce que le quarré d'icelle ligne auec vne ſuperficie mediale fait vn tout medial. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB eſt √(√180+√60), & AC √(√180−√60), le reſte CB ſera √(√180+√60) −√(√180−√60).

LEMME.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C ſoit egal à HE excez d'entre DE & F; auſſi en permuttant l'excez d'entre AB & DE ſera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB eſt l'excez d'entre AB & C, AG ſera egal à C: En la meſme maniere DH ſera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH ſera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne, & partant adiouſtant à AG & DH choſes egales GB & HE, l'excez d'entre les toutes AB & DE ſera touſiours egal à l'excez d'entre C & F. Ce qui eſtoit propoſé.



COROLLAIRE.

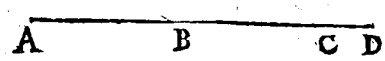
De ces choſes appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles ſeront auſſi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'vne seule ligne droicte rationele commensurable en puissance seulement à la toute.

Soit le residu AB, auquel conuienne la ligne droicte BC, rationele commens. en puissance seulement à la toute AC: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

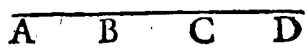
Car s'il est possible, soit vne autre ligne BD, s'accordant auec icelle AB, en sorte que AD & BD soient rationeles commens. en puissance seulement. Maintenant par la 7. pr. 2. les deux quarrez de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en permutant, par le lemme precedent les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme qui precede la 43. p. 10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. p. 10. vn seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. prop. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationele commens. en puissance seulement à la toute. Parquoy au residu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'vne seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne droicte que BC en la mesme sorte.



Car si faire se peut, en soit vne autre BD. Maintenant par la 7. prop 2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui sont mediaux, (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit commens. en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.

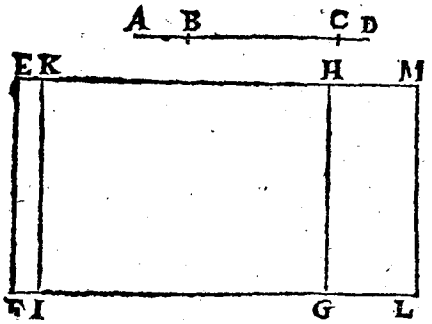
THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conioincte qu'vne seule

ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant auec icelle vn rectangle medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut pas conuenir vne autre ligne que BC, en la mesme sorte.

Car si faire se peut, en soit conioincte vne autre BD en la sorte requise. Et sur la rationele proposee EF, soit appliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & à la mesme EF soit encore appliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7. pr. 2. le reste KG sera egal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item sur la mesme rationele soit encore appliqué le rectangle EL egal aux deux quarrez de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est egal au quarré de AB, aussi KL sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la susdite 7. prop. 2.

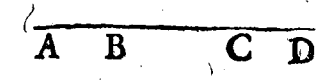


Maintenant les quarrez de AC & BC sont mediaux (estans faits de lignes mediales) & si le double rectangle de AB & BD doit estre medial: partant leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH & KH rationaux comm. en puiss. seulement à EF par la 23. p. 10. en apres, le quarré de AC estant au rectangle de AC & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incommens. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC: & partant aussi à son double KG. Item le quarré de BC est commens. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarrez, sera incomm. au seul quarré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10 pr. 10. lesquelles estans rationeles seront incommens. en puissance seulement: & par la 74. p. 10. EK sera residu & KH sa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe à AB selon le requis) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ce qui seroit contre la 80. pr. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adioindre autre conuenable que BC. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, conuient vne seule ligne droicte incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le compose de leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le compose de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut estre adiointe autre ligne que BC qui face le mesme.

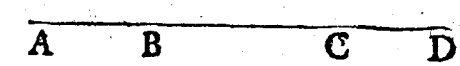


Car si faire se peut en soit adiouſtee vne autre B D, qui soit pareillement incommenſ. en puiſſance à la toute AD, & faisant le composé des quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle compris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouuera comme en la 80. prop. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'vn & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles estans mediaux, l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on ne peut adiouster autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIIII.

A la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommenſ. en puissance à la toute, & faisant auec icelle vn rectangle rationel: mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne AB faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, à laquelle AB s'accorde la ligne BC, incommenſ. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais que le composé de leurs quarrez soit medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui face la mesme chose.



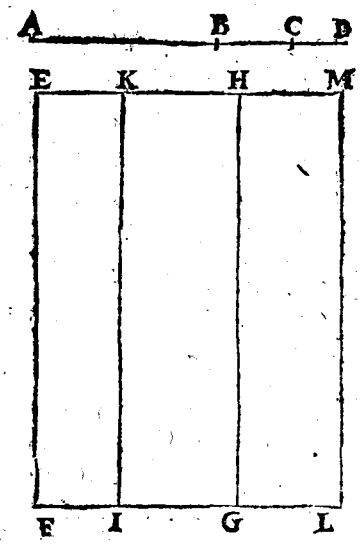
Car s'il est possible, en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. pr. 10. que les quarrez de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'vn mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB on pouuoit encore ioindre BD incommenſ. en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, se conioint vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incommenſ. au composé de leurs quarrez qui est aussi medial.

Soit la ligne AB faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, à laquelle AB s'accorde BC incommenſ. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez, qui est aussi medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'adioindre autre ligne que BC, qui face le proposé.

Car si faire se peut, en soit adiouſtee vne autre BD. Puis soit fait meſme conſtruction qu'en la 82. prop. 10. Donc le composé des quarrez de AC & BC estant medial, & incommens. à deux fois le rectangle de AC & BC, aussi medial, leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux, & incommensurables: Et par la 23. prop. 10. estans appliquez sur la rationele EF, leurs autres costez EH & KH seront lignes rationeles, & par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. commens. en puissance seulement; (puis que leurs rectangles sont incommens.) & par la 74. prop. 10. EK sera residu auquel KM sera conuenablement adiouſtee: Par meſme discours (si on dit que BD soit aussi conuenable à AB, & faſſe ce qui est proposé) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ainsi le residu EK n'auroit pas vne seule conuenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouuoit donc pas adioindre à AB, autre ligne conuenable que BC, incommensurable en puissance à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



DEFINITIONS TROISIESMES.

Estant proposee vne ligne rationele, & vn residu: Lors que la toute composee du residu & de sa conuenable ou adiouſtée, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude;

1. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; le residu soit appellé residu premier.

2. Mais si la conuenable ou adiouſtée est commensurable en long. à la rationelle proposée; soit appellé residu second.

3. Que si l'vne ny l'autre n'est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu troisieſme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adiouſtée, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu quatrieſme.

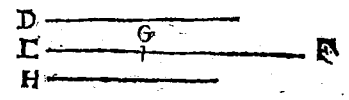
5. Mais si l'adiouſtée est commensurable en longitude à la rationele; soit appellé residu cinquieſme.

6. Que si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable en longitude à la rationele; soit appellé residu sixieſme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn Apotome ou residu premier.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enſeigné au ſecond ſcholie de la 29. prop. de ce liure) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit poſée la rationele D, à laquelle EF ſoit commenſ. en longit. & partant icelle EF ſera auſſi rationele: puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de GF. Ie dis que EG eſt reſidu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF, qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſ. par la 10. pr. auſſi les lignes EF, GF ſeront commenſ. au moins en puiſſance: & EF eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Mais d'autant que les deux nombres AB, AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez: auſſi les quarrez de EF, GF ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez: & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF ſont incommenſ. en longit. elles ſont donç rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant le reſte EG ſera reſidu par la 74. pr. 10.

Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu premier: car EF eſtant plus grande que GF, elle poutra plus qu'icelle CF: ſoit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de GF, par conuerſion de raiſon, comme AB ſera à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB, CB ſont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H ſont entr'eux comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10, les lignes EF & H ſont commenſ. en longitude. Par ainſi la toute EF commenſurable en longitude à la rationelle D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſurable en longitude: & partant par la 1. des troiſieſmes def. EG ſera reſidu premier. Nous auons donc trouué vn reſidu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: AB 9, CB 4, & par conſequent AC eſt 5: faiſant donc que comme 9 eſt à 5, ainſi le quarré de EF, c'eſt à dire 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant le reſte EG ſera 6—√20, qui eſt reſidu premier.

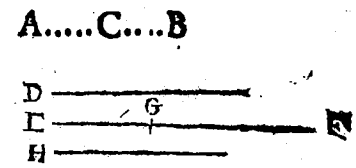
Or il appert par les def. preced. que Apotome ou reſidu n'eſt autre choſe que ce qui reſtera ſi de deux nombres poſez rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement on ſouſtraict le moindre du plus grand; ce qui ſe fait par l'interpoſition du ſigne —: & par ainſi il n'y a aucune difference entre le binome & le reſidu, ſinon qu'en celuy-là les deux noms ſont conioincts par le ſigne +, & en ceſtuy cy, l'vn eſt ſouſtraict de l'autre par le ſigne —. Parquoy pour promptement trouuer vn reſidu de quelque eſpece que ce ſoit, il n'y a qu'à trouuer le binome de meſme eſpece, ainſi qu'il a eſté dit cy-deuant, puis au lieu du ſigne + apposer le ſigne —. Comme au ſcholie de la 49. prop. nous auons trouué ce binome premier 8+√48; mais en changeant ſeulement le ſigne nous aurons 8—√48, pour reſidu premier: & ainſi des autres.

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.

Trouuer vn reſidu deuxieſme.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB. (comme en la precedente propoſition) & l'expoſee rationele D, ſoit priſe GF commenſ. en longitude à icelle D, laquelle ſera auſſi rationele: puis ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF par le corol. de la 6. pr. 10. Ie dis que EG eſt reſidu ſecond.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raiſon des nombres AC, AB, ſont commenſ. par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF ſeront auſſi commenſ. au moins en puiſſance: & GF eſtant rationele, EF le ſera auſſi. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant auſſi les quarrez de GF, EF, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, par la 9. pr. 10. GF, EF, ſeront incommenſ. en longitude: donc les rationeles GF, EF, ſont commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. p. 10. le reſte EG eſt reſidu.



Ie dis auſſi qu'il eſt reſidu ſecond. Car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & ſoit du quarré de H. Donc puis que comme AC eſt à AB, ainſi le quarré de GF au quarré de EF; en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de GF. Maintenant nous demonſtrerons comme en la preced. que la ligne H eſt commenſ. en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adiouſtee GF, du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, comme auſſi à la rationele propoſee D: par les troiſieſmes def. EG ſera reſidu ſecond. Nous auons donc trouué vn reſidu ſecond, ainſi qu'il falloit faire.

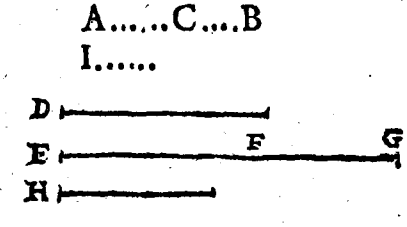
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, FG 5: AB 9, CB 4: & par conſequent AC 5: faiſant donc que comme AC 5 eſt AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera √45: & partant EG ſera √45—5, qui eſt reſidu ſecond.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn reſidu troiſieſme.

Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la propoſition 86, ſoit pris vn autre nombre I, (comme nous auons enſeigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: puis eſtant expoſee la rationele D, ſoit fait que comme I eſt à AB, le quarré de D ſoit au quarré de EG, leſquels quarrez par la 6. pr. 10. ſeront commenſurables: & partant les lignes D & EG auſſi commenſ. au moins en puiſſance. Donc D eſtant rationele, auſſi EG ſera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne ſont en raiſon de nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG ſeront incommenſ. en longitude. Derechef, ſoit fait que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EG ſoit au quarré de GF. Ie dis que EF eſt reſidu troiſieſme.



Car puis que les quarrez de EG, GF, eſtans comme nombre à nombre, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF ſeront auſſi commenſ. au moins en puiſſance. Mais EG eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Et puis que AB, AC, & partant auſſi les quarrez de EG, GF, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez; par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF ſeront incommenſ. en longitude. Donc EG, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: & partant puis que de EG eſt oſtee GF commenſ. en puiſſance à icelle, par la 74. pr. 10. le reſte EF ſera reſidu.

Ie dis qu'il eſt auſſi reſidu troiſieſme: Car puis que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D eſt au quarré de EG, & comme AB à AC, ainſi le quarré de EG au quarré de FG;

de GF; en raiſon egale, comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, ny par conſequent auſſi les quarrez de D & GF: parquoy par la 9. prop. 10. les lignes D & GF ſont incommenſ. en longitude. Donc l'vne & l'autre d'icelles EG, GF eſt incommenſ. en longitude à la rationele propoſee D. Et comme en la 86. pr. on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par les tierces def. EF ſera reſidu troiſieſme, qu'il falloit trouuer.

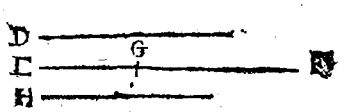
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 6, & ſoit fait que comme le nombre 16, eſt à AE 9, ainſi le quarré de D, ſçauoir 36, ſoit au quarré de EF, & iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF √54: Mais faiſant que comme AB 9, eſt à AC 5, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √30, & par conſequent EG ſera √54—√30, qui eſt reſidu troiſieſme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn reſidu quatrieſme.

Eſtans trouuez (comme nous auons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop.) deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré: ſoit propoſee la rationele D, à laquelle ſoit commenſurable en longitude EF, laquelle ſera par conſequent auſſi rationele. Que ſi on acheue de conſtruire comme en la 86. prop. on demonſtrera comme là que EG eſt reſidu: & d'auantage, ie dis qu'il eſt reſidu quatrieſme.



Car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, ſoit du quarré de H. Et puis que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de GF; par conuerſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adiouſtee GF du quarré de H, qui luy eſt incommenſ. en longitude, & la meſme EF eſt commenſurable en longitude à la rationele D: partant par les 3. def. EG ſera reſidu quatrieſme. Nous auons donc trouué vn Apotome ou reſidu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 6, ainſi 36 quarré de EF ſoit au quarré de FG, icelle ſera √24, & par conſequent le reſte EG ſera 6—√24, qui eſt reſidu quatrieſme.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. prec. ſoit fait meſme conſtruction qu'en la 87. puis ſoit demonſtré comme en icelle que GE eſt reſidu. Ie dis en outre qu'il eſt reſidu 5e. Car FE peut plus que GF du quarré de H: Et comme en la 86. prop. nous demonſtrerons par conuerſion de raiſon, que comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de H; & comme en la prece-

dente, les lignes E F & H seront incommensurables en longitude : & la conuenable GF commensurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les 3. def. EG sera residu cinquiesme. Nous auons donc trouué vn residu cinquiesme. Ce qu'il falloit faire.

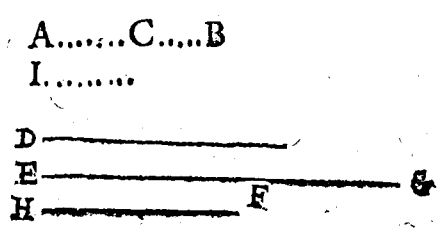
SCHOLIE.

La rationele D soit 9, FG 6, faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF √54 ; & le reste EG √54—6, qui est residu cinquiesme.

PROBL. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn residu sixiesme.

Estans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. tels que AB ne soit à l'vn ny à l'autre d'iceux AC, CB : & I à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré : soit exposee la rationele D, & acheuee la construction comme en la 88. prop. Nous demonstrerons donc comme là, que D & EG sont incommens. en longitude, & que EF est residu : en apres, que D & FG seront aussi incommens. en longitude ; & partant l'vne & l'autre d'icelles EG, FG est incommensurable en longitude à la rationele proposee D. Maintenant, que EG puisse plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonstrerons comme en la 89. prop. estre incommensurable en longitude à icelle EG. Donc puis que la toute EG peut plus que la conuenable FG, du quarré de H qui luy est incommensurable en longitude, & que EG ny FG n'est commens. en long. à la rationele proposee D, par la derniere des 3. def. EF sera residu sixiesme. Nous auons donc trouué vn residu sixiesme. Ce qu'il falloit faire.

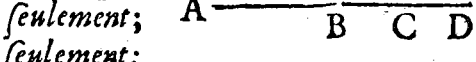


SCHOLIE.

La rationele D soit 9 ; & soit fait que comme 19 est à AB 12, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF ; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle EF sera √108 ; & faisant que comme AB est à AC 7, ainsi 108 soit au quarré de FG ; icelle FG sera √63, & par consequent le reste EG sera √108—√63, qui est residu sixiesme.

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les six residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouuer pour exemple le residu premier : soit trouué par la 49. pr. 10. le binome premier AD, duquel le plus grand nom est AC, & le moindre CD ; puis soit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Ie dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rationeles commensurables en puissance seulement ; aussi AC, BC seront rationeles commens. en puissance seulement : Donc par la 74. pr. 10. AB est residu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, & AC est commensurable en longitude à la rationele proposee par la def. du binome premier ; AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la mesme maniere seront trouuez tous les autres residus, sçauoir est le 2e, si du second binome nous ostons le moindre nom du plus grand, &c.



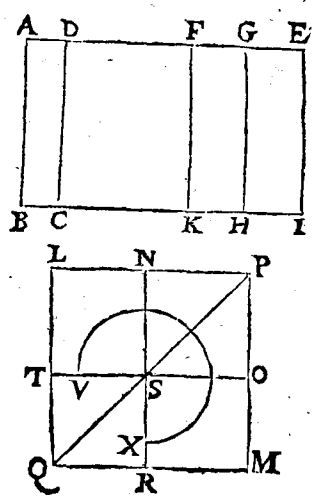
Ainsi ayant trouué le binome premier AD 9 + √45, si du plus grand nom AC 9, on oste le moindre nom, restera le residu AB de 9—√45. & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu premier AD: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Au reſidu AD ſoit ſa conuenable DE, laquelle ſoit couppee en deux egalement au poinct F, puis ſur la ligne AE ſoit appliqué vn rectangle defaillant d'vne figure quarree, & egal au quart du quarré de DE, qui eſt le quarré de FE, & ſoit iceluy rectangle compris ſous AG, GE: en apres, ſoient menees les lignes FK, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H & I: puis ſoit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant auec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26. prop. 6. ſeront au long d'vn meſme diametre, lequel ſoit PQ: ſoient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant, FE eſt moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. pr. 6. car par l'hypotheſe le quarré de EF eſt egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. pr. 6. le rectangle KE ſera milieu porport. entre les deux rectangles AH & HE: il le ſera auſſi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54. pr. 10. le rectangle LO, eſt auſſi milieu proport. entre iceux quarrez: Donc KE, ou DK ſon egal, ſera egal au rectangle LO; & par conſequent KG à LS, (eſtant HE egal à NO.) Iceluy GK ſera auſſi egal à SM: par ainſi le rectangle DH ſera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM eſt egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC ſera egal au quarré TR. Maintenant, ie dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC eſt reſidu.



Car puiſque AD eſt reſidu premier, & DE ſa conuenable: les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſtant la toute AE commenſ. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adiouſtee DE, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par la 18. pr. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſ. en longit. & par la 16. pr. 10. ils ſeront commenſ. en longit. à la totale AE, laquelle eſtant commenſurable en longit. à la rationele AB, par la 12. prop. 10. AE, AG, GE, AB, ſeront toutes rationeles commenſ. en longitude: & par la 20. pr. 10. les rectangles AH & HE ſeront rationaux, & par conſequent leurs egaux quarrez LM & NO auſſi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles. Pareillement, les deux lignes DF & FE eſtans egales & commenſ. elles le ſeront auſſi à leur toute DE, par la 16. pr. 10. laquelle DE eſtant rationele, DF & FE ſeront auſsi rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement à AB, comme leur toute DE: & par la 22. pr. 10. leurs rectangles CF & KE ſeront mediaux. Mais le rectangle LO eſt egal au medial KE, partant auſsi medial & incommenſ. au quarré rationel NO, donc par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs coſtez TO

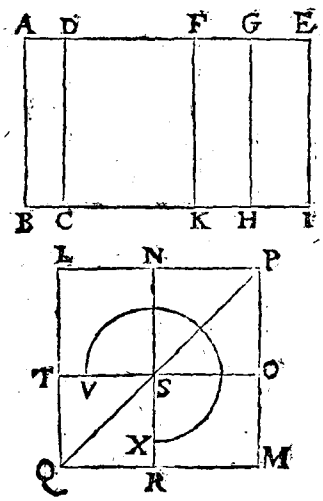
& SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. pr. 10. TS est residu. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 8, & AD 9—√45: DE est donc √45, & sa moitié DF √11¼: mais AG sera 7½, & GE 1½. Donc le rectangle BE est 72, AH 60, HE 12, CF √720 & AC 72—√2880, & le rectangle de AG, GE est 11¼. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12: & partant la ligne LP est √60, & NP √12: & par consequent LN, ou TS sera √60—√12, qui est residu; & son quarré TR est 72—√2880, egal au rectangle AC.

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.



Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu second AD. Ie dis (apres auoir construit comme en la precedente, & demonstré comme là que le rectangle AC est egal au quarré TR) que la ligne TS, qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE sa conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commensurables en longitude, & par la 16. prop. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. prop. 10. icelle totale estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le seront AG & GE, qui sont rationeles (car elles sont commensurables à leur totale AG, qui est rationele) commens. en puissance seulement à la rationele AB, & par la 22. pr. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux; partant mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales. Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longitude: (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. pr. 10.) & par la 75. pr. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, AD √45—5: DE est donc 5, & sa moitié DF 2½, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est 6¼, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront √31¼, & √1¼: parquoy le rectangle HE, ou le quarré NO sera √20: & partant son

coſté SO eſt √√20. Mais puis que la ligne AE eſt √45, & AG √31¼: le rectangle BE ſera √720, & AH, ou le quarré LM √500: & par conſequent la ligne TO eſt √√500: de laquelle eſtant oſtee SO, reſtera TS √√500—√√20, qui eſt reſidu medial premier; & ſon quarré TR eſt √720—√20. Mais le rectangle AC eſt autant: car multipliant AB 4 par AD √45—5, viendra auſſi √720—√20. Donc ST reſidu medial premier peut le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu troiſieſme; la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt reſidu medial ſecond.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu troiſieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. prop. 10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme nous auons demonſtré en la ſuſdite prop.) eſt reſidu medial ſecond.

Car puis que AB eſt reſidu troiſieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tant entr'elles, qu'à la rationele AB: mais AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. & par la 18. prop. 10. AG & GE ſeront commenſ. en longit. & à leur totale AE par la 16 pr. 10. Et ſeront rationeles comme icelle: mais AE eſt commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 14. pr. 10. AG & GE ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement à AB: Et par la 22. propoſ. 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux: donc auſſi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes mediales. Pareillement DE eſtant incommenſ. en longit. à la rationele AB, auſſi le ſera ſa moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF eſtant rationele comme ſa double DE, le rectangle KE ſera medial, partant auſſi medial ſon egal LO, compris des deux mediales commmenſ. en puiſſance ſeulement TO & SO: car leurs quarrez LM, NO ſont commenſ. l'eſtans leurs egaux rectangles AH & HE. Or ils ne ſçauroient eſtre commenſ. en longit. car il faudroit par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. que LO & NO fuſſent auſſi commenſurab. & par conſequent leurs egaux rectangles KE & HE: ce qui n'eſt pas. Donc par la 76. p. 10. TS eſt reſidu medial ſecond. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

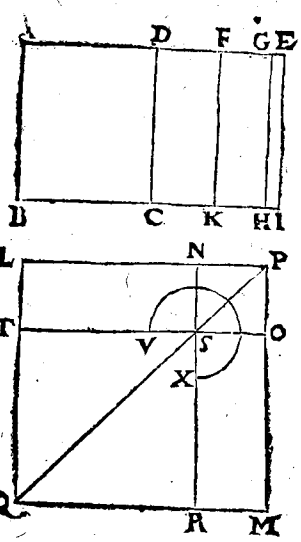
SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 4, & AD √54—√30: donc DE eſt √30; ſa moitié DF √7½, & ſon quarré 7½, lequel eſtant appliqué ſur la ligne AE √54, & defaillant d'vne figure quarrée, les coſtez du rectangle appliqué, ſçauoir AG, GE, ſeront √37½, & √1½. Parquoy le rectangle AC ſera √864—√480, BE √864, CE √480, AH √600, DK √120, & HE √24. Mais le quarré LM eſtant egal à AH, il ſera auſſi √600, NO egal à HE √24: & partant les coſtez d'iceux quarrez, ſçauoir TO, SO ſont √√600, √√24: & par conſequent TS eſt √√600—√√24, & ſon quarré TR √864—√480, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu quatrieſme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu quatrieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92.p.10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC). Ie dis qu'icelle ligne TS eſt ligne mineure.



Car puis que AD eſt reſidu quatrieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement; & AE qui eſt commenſ. en longit.. à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incomm. en long. & par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longitude: partant par la 1. pr. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AH & HE ſeront incommenſurables, auſſi ſeront donc leurs egaux quarrez LM & NO: partant les lignes TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance: Mais AE eſtant commenſ. en long. à la rationele AB, par la 20.p.10. le rectangle AI ſera rationel: partant auſſi rationel ſera le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement DE eſtant commenſurable en puiſſance ſeulement à AB, le rectangle CE ſera medial par la 22. prop. 10. auſſi ſera ſa moitié KE: & par conſequent ſon egal LM ſera auſſi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales, (car elles ſont incommenſur. en puiſſance) & le compoſé de leurs quarrez eſtant rationel, par la 77. p. 10. TS eſt ligne mineure. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 6, AD 9—√54: donc DE eſt √54, & ſa moitié DF √13½, ſon quarré 13½, lequel appliqué ſur AE 9, & defaillant d'vne figure quarrée, les coſtez AG, GE ſeront 4½+√6¼, & 4½—√6¼. Parquoy le rectangle AC ſera 54—√1944, BE 54, AH 27+√243, DK √486, & HE 27—√243. Mais le quarré LM eſtant egal à AH, ſera auſſi 27+√243, & NO egal à HE 27—√243: & partant leurs coſtez TO, SO ſont √(27+√243), & √(27—√243): & par conſequent TS eſt √(27+√243)—√(27—√243), & ſon quarré TR 54—√1944, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu cinquieſme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu cinquieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. pr. 10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Ie dis qu'icelle TS eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu cinquieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & DE eſt commenſurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & par la 19. p. 10. les lignes AG & GE ſont incomm. en longit. & comme en la precedente TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais AE eſtant incommenſ. en longitude à la rationele AB, le rectangle AI ſera medial par la 22. prop. 10. partant auſſi medial le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement, DE eſtant commenſur. en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE ſera rationel, auſſi le ſera ſa moitié KE, & ſon egal LO, compris de deux lignes incommenſ. en puiſſance TO & SO, deſquelles le compoſé de leurs quarrez fait vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Cequ'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 4, AD $\sqrt{54}-6$: donc DE eſt 6, & ſa moitié DF 3, ſon quarré 9, auquel eſtant egal le rectangle de AGE: AG ſera $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$, & GE $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC ſera $\sqrt{864}-24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216}-\sqrt{72}$: ainſi le quarré LM ſera $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, NO $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, & leurs coſtez TO, SO, $\sqrt{(\sqrt{216}+72)}$, & $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, & par conſequent TS eſt $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, & ſon quarré TR ſera $\sqrt{864}-24$.

THEOR. 75. PROP. XCVII.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu ſixieſme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu ſixieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. p. 10.) Ie dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme il a eſté demonſtré en la ſuſdite prop.) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

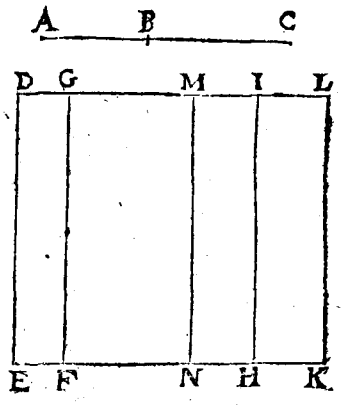
Car puis que AD eſt reſidu ſixieſme, & DE ſa conuenable, AE & DE ſont rationeles commenſur. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en long. Et par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longit. Et comme en la 95. pr. 10. TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance; & tout ainſi qu'en la precedente, le rectangle AI eſtant medial, le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO, ſera auſſi medial: Item DE eſtant commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, par la 22. p. 10. le rectangle CE ſera medial: auſſi le ſera donc ſa moitié KE, & ſon egal LO. Et AE, DE eſtans incomm. en longit. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AI, CE, ſeront incommenſ. & puis que CE eſt commenſ. à ſa moitié KE, par la 14. p. 10. KE ſera incommenſ. à AI: & partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incomm. en puiſſance, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reſte TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD $\sqrt{108}-\sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié DE $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{27}+\sqrt{11\frac{3}{4}}$, GE $\sqrt{27}-\sqrt{11\frac{3}{4}}$: mais le rectangle AC sera $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$, & HE $\sqrt{972}-\sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, NO $\sqrt{972}-\sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO, seront $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}$, & $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$, & son quarré TR $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PROP. XCVIII. Six. 5.

Le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationelle, fait l'autre costé residu premier.



Soit le residu AB, & BC sa conuenable, tellement que AC, BC soient rationeles commens. en puissance seulement: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu premier.

Car à la mesme rationele DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarrez de AC, BC: lequel estant egal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble auec le quarré de AB, si on oste le quarré de AB, & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB: partant GL estant couppee en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE: MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarrez seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarrez est commens. à vn chacun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel estant appliqué à la rationele DE, par la 21. prop. 10. DL sera rationele commens. en longit. à icelle DE. Derechef, puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationele GF, par la 23. pr. 10. GL sera rationele incommens. en longitude à GF, ou DE: Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationeles, elles seront commens. en puissance seulement: & partant par la 74. prop. 10. le reste DG sera aussi residu. Ie dis dauantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la p. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarrez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK: DH, MK, IK seront continuellement proportionaux: & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10.

les

les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, LG sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI. IL, egal à la quarte partie du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, par la 18. pr. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier. Parquoy le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

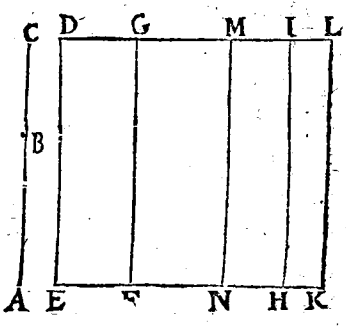
Le residu AB soit √60—√12, & BC √12: donc la toute AC est √60: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est 72—√2880, l'autre costé DG sera 9—√45: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9, & GL √45, & GM $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rectangle DK sera 72, DH 60, IK 12, GN √720, GK √2880, & DE 72—√2880.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'vn residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu second.

Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement: les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. prop. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationele commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. pr. 10. GL sera rationele commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommensur. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude; & partant par les tierces definitions, DG est residu second. Parquoy le quarré d'vn residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit VV500—VV20, & BC VV20: la toute AC sera donc VV500: & estant appliqué sur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui est √500, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est √20,

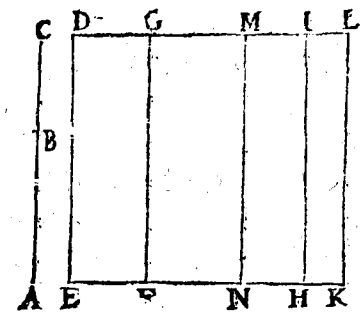
IL sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: ainsi la toute DL sera $\sqrt{45}$. Derechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10, l'autre costé GM sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL 5: parquoy DG sera $\sqrt{45}-5$, qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationele DE, soit appliqué le rectangle DF. Ie dis que l'autre costé DG est residu troisiesme.

Car ayant construit comme en la 98. prop. on demonstrera comme en la prec. que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi le sera son double GK, & par la 23. pr. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationele DE: Et puis que AC, BC sont incommens en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double GK: Mais le quarré de AC est aussi commens. au quarré de BC: (pource qu'iceux quarrez sont descrits sur lignes commens en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarrez, c'est à dire DK, sera aussi commens. au quarré de AC, auquel est incommens. GK; donc par la 13. prop. 10. DK sera incommens. à GK: & par la 10 prop. 10. les lignes DL, GL, ayant mesme raison que DK, GK seront incommens. en longitude. Mais estans rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74. pr. 10. BG sera residu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98. prop. que DL peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: Et par les tierces def. DG est residu troisiesme. Parquoy le quarré d'vn residu medial second, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

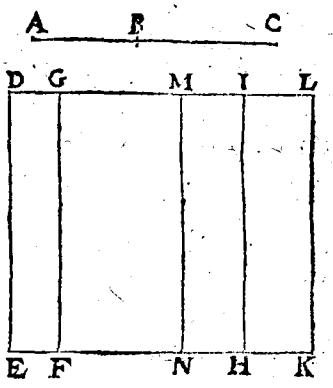
Le residu medial second AB soit $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{24}}$: la toute AC sera donc $\sqrt{\sqrt{600}}$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est $\sqrt{600}$, l'autre costé DI sera $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, mais appliquant à la mesme DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre costé IL sera $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: & si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{120}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, & son double GL $\sqrt{30}$: parquoy DG est $\sqrt{54}-\sqrt{30}$, qui est residu troisiesme.

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en ſorte que AC, BC, ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel: & le quarré d'icelle AB ſoit appliqué à la rationele DE: ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu quatrieſme.

Car apres auoir conſtruit comme en la 98. p. le rectangle DK ſera rationel, & GK medial, par le diſcours des precedentes: & par la 21. prop. 10. DL ſera rationele commenſ. en longitude à la rationele DE: & GL, par la 23. prop. 10. ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle rationele DE: & puis que DK eſt rationel, & GK medial, ils ſont incommenſ. & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, qui ſont en meſme raiſon que DK, GK, ſeront incommenſ. en longitude. Mais elles ſont rationeles: elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 74. pr. 10. DG ſera reſidu.



Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu quatrieſme. Car puis que les lignes AC, BC, ſont incomm. en puiſſance, leurs quarrez ſeront incommenſ. Auſſi incommenſ. leurs egaux rectangles DH, IK, & par conſequent incommenſ. les lignes DI, IL, coſtez du rectangle defaillant d'vne figure quarree egale au quarré de ML, c'eſt à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a eſté demonſtré en la 98. prop. & par la 19. prop. 10. DL (qui eſt commenſ. en longitude à la rationele DE) peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude: & par les tierces definitions DG eſt reſidu quatrieſme. Donc le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB ſoit $\sqrt{(27+\sqrt{243})}-\sqrt{(27-\sqrt{243})}$, *& BC* $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$, *le quarré de laquelle appliqué ſur la rationele DE 6, l'autre coſté DI ſera* $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *mais eſtant appliqué ſur la meſme DE, le rectangle IK, egal au quarré de BC, qui eſt* $27-\sqrt{243}$, *l'autre coſté IL ſera* $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *& partant la toute DL ſera 9. Que ſi à la meſme DE on applique le rectangle GN egal au rectangle de ACB; qui eſt* $\sqrt{486}$, *l'autre coſté GM ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, *& ſon double GL* $\sqrt{54}$: *& partant DG eſt* $9-\sqrt{54}$, *qui eſt reſidu quatrieſme.*

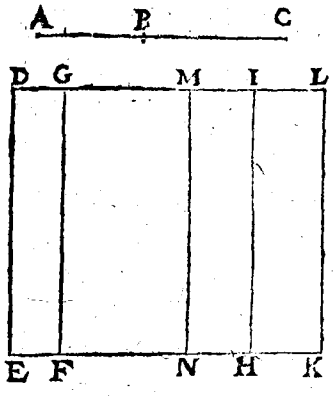
THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, vn tout medial, appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté reſidu cinquieſme.

Soit la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial AB, de laquelle le quarré ſoit appliqué ſur la rationele DE: Ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu cinquieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 98. prop. 10.) AB eſtant ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, & BC ſa conuenable, les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial: partant le rectangle DK ſera medial, & GK rationel,

& par la 23. prop. 10. DL sera rationelle incommensur. en longitude à la rationelle DE: & par la 21. prop 10. GL sera aussi rationelle, mais commens. en longitude à la rationelle DE: Item les rectangles DK, GK estans incommensurables (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommensurables en longitude. Mais icelles sont rationelles: elles sont donc commensurables en puissance seulement, & par la 74. proposition DG sera residu. Mais il a esté demonstré que GL est commensurable en longitude à la rationelle DE, & on prouuera comme en la precedente, que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude: & partant par les tierces def. DG est residu cinquiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer:



SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *la toute AC sera donc* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE 4, & l'autre costé DI sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *l'autre costé IL sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL sera* $\sqrt{54}$: *Que si à la mesme rationelle on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui est 12, l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6: Parquoy DG sera* $\sqrt{54}-6$, *qui est residu cinquiesme.*

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationele DE: Ie dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres auoir construict comme en la 98. pr.) AB estant ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, & BC la conuenable à icelle AB; les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial: partant les deux rectangles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. prop. 10. DL, GL seront rationeles incommens. en longitude entr'elles, & à la rationele DE: & par consequent commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. BG sera residu. Mais on peut prouuer comme en la 101. prop. 10. que la toute DL peut plus que sa conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$:

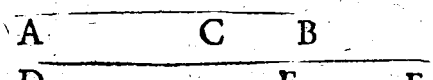
donc la toute AC sera √(√972+√405), au quarré de laquelle soit egal le rectangle DH, appliqué sur la rationele DE6: l'autre costé DI sera donc √27+√11¼: mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est √972—√405, l'autre costé IL sera √27—√11¼: & partant la toute DL sera √108: si derechef on applique sur la mesme rationele le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est √567, l'autre costé GM sera √15¾, & son double √63: parquoy DG sera √108—√63, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne droicte commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit commensurable en longitude la ligne droicte DF. Ie dis que DF est residu de mesme ordre que AC.

Car CB soit la conuenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commens. en puissance seulement, & par la 12. prop. 6. soit fait que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. prop. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE: & par la 10. p. 10. comme AC est commens. en long à DF, ainsi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant, comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant, comme AB & BC sont rationeles, aussi seront DE & FE: (car elles sont commens. à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC sont commens. en puissance seulement: partant DE & EF seront aussi rationeles commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. DF est residu.



Ie dis dauantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude: si commensur. aussi DE pourra plus que FE de mesme façon par la 15. p. 10. (estans les quatre lignes proport.) Que si AB est commensurable en longitude à vne ligne rationele proposee, aussi DE qui luy est commensur. en longitude sera commens. en longitude à la mesme rationele proposee par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF seront residus premiers: Que si BC est commens. en longitude à la rationele, aussi sera FE; & AC, DF seront residus seconds: Et si AB & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE; & AC, DF seront residus troisiesmes. Que si AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. pr. 10. Et si AB est commens. en longitude à la rationele, aussi sera DE: & AC, DF seront residus quatriesmes. Mais si BC est commens. en longitude à la rationele, aussi sera FE: & AC, DF seront residus cinquiesmes. Si AB & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE: partant AC & DF seront residus sixiesmes: par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC. Parquoy la ligne commens. en long. à vn residu. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Le residu AC soit √60—√12, & DF √15—√3, lesquelles sont commens. en longitude l'vne estant double de l'autre, & la conuenable CB soit √12: Donc la toute AB est √60: & puis que comme AC est à DF, ainsi CB √12 est à FE; icelle FE sera √3: & la toute DE √15, commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne droicte commenſurable à vn reſidu medial, eſt auſſi reſidu medial de meſme ordre.

Soit la ligne DF commenſ. au reſidu medial AC: ie dis que icelle DF eſt auſſi reſidu medial, & de meſme ordre que AC.

Car ayant faict meſme conſtruction qu'en la prec. prop. AB & BC ſeront commenſ. à DE, EF leſquelles ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 24. p. 10. DE & FE ſeront mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. prop. DF eſt reſidu medial: Ie dis dauantage qu'il eſt de meſme ordre que AC.

Car par la 1. p. 6. le quarré de AB eſt au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE eſt auſſi au rectangle de DE, FE comme DE à FE. Mais le quarré de AB eſt commenſ. au quarré de DE, eſtant AB & DE commenſ. & par la 10. prop. 10. les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. & comme l'vn ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers: & ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds. Donc la ligne commenſ. à vn reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

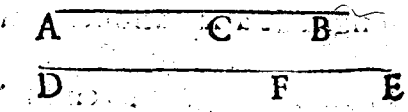
SCHOLIE.

Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, *& DF* $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}} - \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$: *BC ſera* $\sqrt{\sqrt{20}}$, *& la toute AB* $\sqrt{\sqrt{500}}$: *mais FE ſera* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$, *& la toute DE* $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.

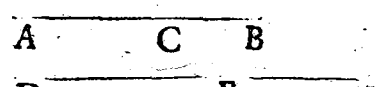
Soit la ligne DF, commenſurable à vne ligne mineure AC: Ie dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuenable à icelle AC, apres auoir faict meſme conſtruction qu'en la 104. pr. 10. AB & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE & FE ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AB à BC, ainſi DE à FE, par la 22 pr. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux: & en compoſant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DE, FE, ſera au quarré de FE: & en permutant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au compoſé des quarrez de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE: leſquels quarrez de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes BC & FE ſont commenſur. comme AC & DF, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 104. p.) & partant par la 10. pr. 10. le compoſé des quarrez de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE, lequel ſera auſſi rationel. Pareillement, puis que comme à la prop. prec. le quarré de AB eſt au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE eſt au rectangle de DE & FE: en permutant, comme le quarré



au quarré, ainsi le rectangle au rectangle : c'est à dire commensur. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. prop. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celuy de DE & FE sera aussi medial : partant DE & FE estant incommens. en puissance comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure. Donc la ligne commens. à vne ligne mineure est aussi ligne mineure. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne droicte commensurable à vne ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.



Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et estant faict mesme construction qu'en la 104. prop. on demonstrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE sont incommens. en puissance ; & que le composé des quatrez de AB, CB est commensur. au composé des quarrez de DE, FE. Mais celuy-là est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef, comme nous auons demonstré en la 105. prop. le rectangle de AB, CB est commensurable au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc cestuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. pr. 10. DF sera ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant auec vne superficie mediale vn tout medial : Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au composé de leurs quarrez : & ayant fait semblable construction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop. que les lignes DE, FE, sont incommens. en puissance, & que le composé des quarrez de AB & BC, est commens. au composé des quarrez de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, est commens. au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB

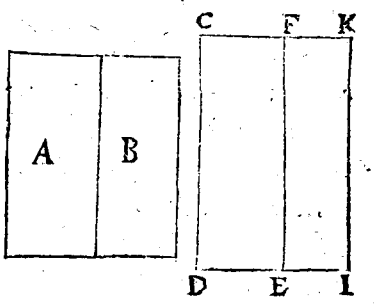
& CB, eſt medial, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & CB, auſſi medial: partant par le ſcholie de la 14.p.10. le rectangle de DE & FE, ſera medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE auſſi medial: & DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Donc la ligne commenſ. à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'vne ſuperficie rationele, eſt retranchee vne ſuperficie mediale: la ligne qui peut le reſte eſt reſidu, ou ligne mineure.

Soit la ſuperficie rationele AB, de laquelle ſoit retranchee la mediale A: Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu, ou ligne mineure.

Car ſur vne rationele propoſee CD ſoit deſcrit le rectangle CE egal à A, & ſur FE le rectangle FI egal à B. Il eſt euident que CI egal au rationel AB, ſera auſſi rationel, & par la 21. pr.10. ſon autre coſté CK ſera rationel commenſ.en longitude à CD. Item par la 23.p.10. CE eſtant medial, CF ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à CD, & par la 13. pr. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74.pr.10. FK ſera reſidu, & FC ſa conuenable. Parquoy CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſurable, FK ſera reſidu premier: & partant la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu par la 92.pr. 10. Si incommenſurable, FK eſt reſidu quatrieſme: & conſequemment la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par la 95. pr.10. Parquoy ſi d'vne ſuperficie rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Si l'eſpace rationel AB eſt 32, le medial AV320; & la ligne rationele CD 6, ſur laquelle eſt deſcrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B: les coſtez CF, & FK, ſeront V8 8/9, & 5 1/3 — V8 8/9: & partant la toute CK ſera 5 1/3: & le rectangle CI 32, duquel oſtant CE, qui eſt V320, le reſte rectangle FI ſera 32 — V320: & la ligne pouuant iceluy ſera V(16+V176) —V(16—V176), qui eſt ligne mineure.

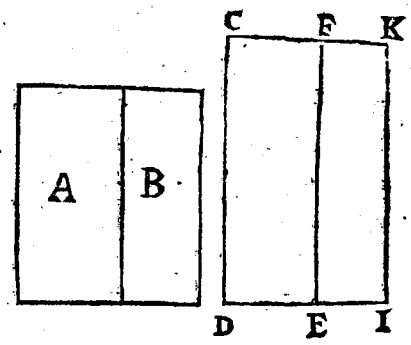
THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'vne ſuperficie mediale eſt retranchee vne ſuperficie rationele, la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la rationele A. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Car, ayant conſtruit comme en la preced. puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale, auſſi la totale CI eſt mediale, & par la 23. prop. 10. le coſté CK eſt rationel commenſ.

commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele CD. Item puis que le retranché A eſt rationel, auſſi ſera ſon egal CE, & par la 21. p. 10. CF ſera rationele commenſ. en longitude à la rationele CD: & par la 13 pr. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement; & partant par la 74. prop. 10. FK ſera reſidu, & FC ſa conuenable. Donc CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude, & conſequemment FK ſera reſidu ſecond, ou reſidu cinquieſme. Si reſidu ſecond; la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial premier par la 93. pr. 10. Si reſidu cinquieſme, la ligne qui peut le rectangle FI, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial par la 96. pr. 10. Parquoy ſi d'vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Si la ſuperficie mediale AB eſt √800, & la rationele A 12: le reſte B ſera √800—12, & la ligne pouuant iceluy ſera √(√200+√164)—√(√200—√164), qui eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'vne ſuperficie mediale, eſt retranchee vne ſuperficie mediale incommenſurable à la toute; la ligne qui peut le reſte eſt ou reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la ſuperficie mediale A, incommenſ. à la toute AB. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car ayant fait meſme conſtruction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE ſeront mediaux & incommenſurables entr'eux; & par la 23. pr. 10. les lignes CK, CF ſeront rationeles incommenſ. en longitude à CD. Et puis que CI, CE ſont incommenſ. les rationeles CK, CF, qui par la 1. pr. 6. ſont en meſme raiſon que CI, CE, ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr. 10. & par conſequent elles ſont ſeulement commenſ. en puiſſance: Donc FK ſera reſidu par la 74. prop. 10. & FC ſa conuenable. Partant CK peut plus que FK, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſ. en longitude: ſi commenſ. FK ſera reſidu troiſieſme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial ſecond, par la 94. prop. Si incommenſ. FK ſera reſidu 6e. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B ſon egal) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, par la 97. prop. Si donc d'vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

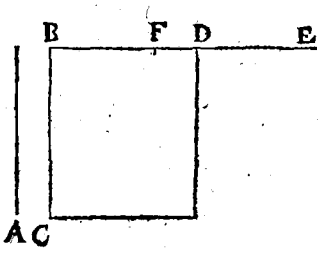
Si la ſuperficie mediale AB eſt √279, & A √40: la ſuperficie reſtante B ſera √279—√40:

& la ligne pouuant icelle sera $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}}+\sqrt{59\frac{3}{4}})}-\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}}-\sqrt{59\frac{3}{4}})}$, *qui est appellee ligne faisant auec vne superficie medial vn tout medial.*

THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appellee residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit quelconque residu A. Ie dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.



Car soit la rationele proposee BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD egal au quarré du residu A: par la 98. prop. BD sera residu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE; BE & DE seront rationeles commens. en puissance seulement: & BE commens. en longitude à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome; BD sera binome premier par la 61. pr. 10. lequel estant diuisé en ses noms au poinct F; (estant BF le plus grand nóm) BF & FD seront rationeles commens. en puissance seulement, & BF commensurable en longitude à la rationele BC: & par la 12. pr. 10. BE & BF, seront commens. en longitude. Veu donc que la toute BE est commens. en longitude à la partie BF, par le coroll. de la 16. pr. 10. l'autre partie FE sera aussi commens. en longit. à BE: partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est pas commensurable en longitude à BE, & par la 14. pr. 10. FE, DE sont rationeles commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele; ce qui est absurde: car elle a esté prouuee rationele: donc le residu A sera differend du binome. Parquoy la ligne appellee residu n'est pas la mesme que binome. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appellee residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suiuantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué à vne ligne rationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisiesme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriesme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, fait l'autre costé residu cinquiesme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, fait l'autre costé residu sixiesme par la 103. pr. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles suiuantes, estans appliquez à vne ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq suiuantes sont differentes du residu, & des cinq suiuantes.

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy-deuant dictes sont treize: sçauoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.

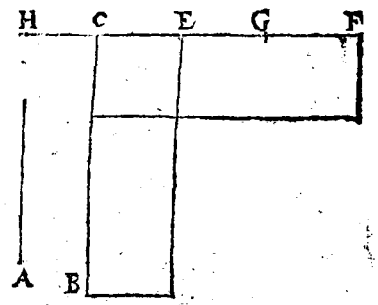
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale ſeconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Reſidu.
9. Reſidu medial premier.
10. Reſidu medial ſecond.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué à vn binome, fait l'autre coſté reſidu, les noms duquel ſont proportionaux, & commenſ. aux noms du binome: en outre le reſidu eſt de meſme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom ſoit BD: & à icelle BC ſoit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Ie dis que l'autre coſté CE eſt reſidu duquel les noms, c'eſt à dire la ligne totale & ſa conuenable, ſont proportionnaux & commenſ. aux noms BD, DC du binome BC: & en outre qu'iceluy reſidu eſt de meſme ordre que ledit binome.

Car au moindre nom CD ſoit appliqué le rectangle DF auſſi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, ſeront egaux, & par la 14.pr.6. leurs coſtez ſeront reciproques, ſçauoir que comme BC à DC, ainſi CF à CE; & en diuiſant, comme BD à DC, ainſi FE à EC. Mais BD eſt plus grande que CD: donc auſſi FE ſera plus grande que EC. Maintenant de EF ſoit retranchee EG egale à EC, & ſoit fait que comme FG à GE, ainſi EC ſoit à CH par la 12. pr. 6. & en compoſant, comme FE ſera à EG, (ou EC ſon egale) ainſi EH à CH, & par la 12.pr.5. les deux antecedens FEH ſeront aux deux conſequens ECH, comme l'vn des antecedens EH à l'vn des conſequens CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, ſeront continuellement proportioneles en la raiſon de FE à EC, ou BD à DC: & par la 22.prop.6. & 10.pr.10. comme le quarré de BD eſt commenſ. au quarré de DC, (car iceux quarrez ſont commenſ. puis que BD, DC ſont les noms du binome BC) ainſi le quarré de EH ſera commenſ. au quarré de CH: & par le coroll. de la 20.p.6. & 10.p.10. CH ſera commenſ. en longitude à la troiſieſme proportionele FH, & par la 16.p.10. CH & GF ſeront commenſ. en longitude. Et d'autant que le rectangle DF eſt rationel (eſtant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele; CF ſera auſſi ligne rationele commenſ. en longitude à CD par la 21.p.10. Et CH ſera auſſi rationele commenſ. en longitude à CD, par la 12.p.10.



& par la 10. pr. 10. comme CD & DB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, auſſi CH, EH, ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. pr. 10. CE ſera reſidu, duquel les noms EH, CH ſont proportionaux, & commenſ. aux noms BD, DC, du binome BC: Car il a eſté demonſtré que comme BD eſt à DC, ainſi EH à CH; & partant en permutant, comme BD ſera à EH, ainſi DC à CH. Mais DC, CH ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH ſeront donc auſſi commenſ. en longitude.

Reſte donc à prouuer que le reſidu CE eſt de meſme ordre que le binome BC: Or les noms de l'vn eſtans proportionnaux, & commenſ. aux noms de l'autre: par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. ou incommenſ. en longitude: auſſi le plus grand nom du reſidu pourra plus de meſme. Que ſi le plus grand nom du binome eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera le plus grand nom du reſidu par la 12. p. 10. & ils ſeront binome premier, & reſidu premier. Que ſi le plus petit nom du binome eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera le plus petit du reſidu; & ils ſeront binome & reſidu ſecond. Que ſi ny l'vn ny l'autre nom du binome eſt commenſ. à la rationele: ſemblablement l'vn ny l'autre nom du reſidu ne ſera commenſ. à la meſme rationele par la 14. p. 10. & partant ils ſeront binome, & reſidu troiſieſme: & ainſi des autres. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué ſur vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

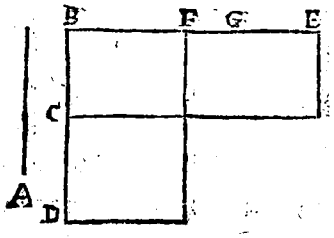
SCHOLIE.

Si la rationele A eſt 8, le binome BC $9+\sqrt{45}$, *tellement que BD ſoit 9, & CD* $\sqrt{45}$: *Le quarré de A eſtant appliqué ſur BC, l'autre coſté du rectangle CE ſera* $16-\sqrt{142\frac{1}{9}}$, *qui eſt reſidu: & puis que comme DC eſt à CB, ainſi CE à CF, icelle CF ſera* $\sqrt{91\frac{1}{45}}$; *& EF* $\sqrt{460\frac{4}{5}}-16$. *Mais EG eſtant egale à CE, eſt* $16-\sqrt{142\frac{8}{9}}$; *GF* $\sqrt{1115\frac{1}{45}}-32$: *& d'autant que comme FG eſt à GE, ainſi EC à CH, icelle ſera* $\sqrt{142\frac{2}{9}}$, *& EH* 16: *Ainſi eſt manifeſte que CE eſt reſidu de meſme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, ſont proportion. aux noms BD, CD.*

THEOR. 90. PROP. CXIIII.

Le quarré d'vne ligne rationele, eſtant appliqué à vn reſidu, faict l'autre coſté binome, les noms duquel ſont proportionaux, & commenſurables aux noms du reſidu: En outre le binome eſt de meſme ordre que le reſidu.

Soit la rationele A, & le reſidu BC, auquel conuienne CD, & ſur BC ſoit deſcrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Ie dis que l'autre coſté BE eſt binome, dont les noms ſont proport. & commenſ. à BD, CD, noms du reſidu BC; & en outre qu'iceluy binome BE eſt de meſme ordre que ledit reſidu BC.



Car ſur BD ſoit deſcrit le rectangle DF egal au meſme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF ſeront egaux, & ayans les coſtez reciproques. par la 14. pr. 6. BD ſera à BC comme BE à BF; & par conuerſion de raiſon, BD ſera à CD

comme BE à FE. Maintenant ſoit coupée EF en G, par la 10. prop. 6. tellement que comme BE eſt à FE, ainſi EG ſoit à GF: Veu donc que comme la toute BE eſt à la toute FE, ainſi EG retranchée de BE, eſt à GF retranchee de FE, auſſi par la 19. p. 5. le reſte BG ſera au reſte EG, comme la toute à la toute, c'eſt à dire comme la retranchee EG à la retranchee GF: & partant EG eſt moyenne proportionele entre BG & GF. Parquoy comme BG ſera à GF, ainſi le quarré de BG ſera au quarré de EG, par le corollaire de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainſi BE à FE, c'eſt à dire BG à GE; & BD, CD noms du reſidu BC ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: par la 10. p. 10. BG, GE ſeront auſſi commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE ſont commenſ. & par conſequent les lignes BG, FG qui ont meſme raiſon qu'iceux quarrez, ſont commenſ. en longit. par la meſme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF ſeront auſsi commenſ. en longit. Et d'autant que BD plus grand nom du reſidu BC eſt rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, eſt rationel; par la 21. p. 10. BF ſera auſsi rationele commenſ. en longit. à BD. Donc par la 12. pr. 10. BG ſera auſsi rationele commenſ. en longit. à la meſme BD. Et puis que BG, GE, ont eſté demonſtrees commenſ. en puiſſance ſeulement, & BG rationele; GE ſera auſsi rationele. Donc BG, GE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: Et partant par la 37. p. 10. BE eſt binome: duquel les noms BG, GE, ſont proportionaux, & commenſ. aux noms BD, CD, du reſidu BC. Car il a eſté demonſtré que comme BD à CD, ainſi BG à GE: & partant en permutant, comme BD à BG, ainſi CD à GE: mais BD a eſté demonſtré commenſurable en longitude à BG: donc auſsi CD ſera commenſ. en longitude à GE, par la 10. p. 10. Reſte donc à prouuer que BE eſt binome de meſme ordre que le reſidu BC: ce qu'on fera procedant tout ainſi qu'en la precedente. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué ſur vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si la rationele A eſt 4, & le reſidu BC $9-\sqrt{45}$, *CD* $\sqrt{45}$, *& BD 9, le rectangle DF ſera 16, & auſsi CE 16: ainſi le coſté BF ſera* $1\frac{1}{9}$, *& BE* $4+\sqrt{8\frac{8}{9}}$: *& par conſequent FE ſera* $\sqrt{8\frac{8}{9}}+2\frac{2}{9}$; *& GE* $8\frac{8}{9}$, *FG* $2\frac{2}{9}$, *BG 4: ainſi eſt euident que BE eſt binome en meſme ordre que le reſidu BC, & que les noms d'iceux ſont proportionaux.*

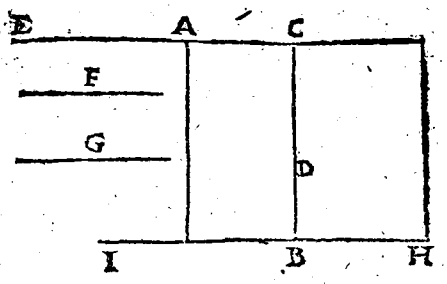
THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle eſt compris d'vn reſidu, & d'vn binome, deſquels les noms ſont proportionaux & commenſurables; la ligne droicte pouuant iceluy rectangle eſt rationele.

Soit le rectangle AB compris ſous le reſidu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB ſoient proportionaux, & commenſurables aux noms CE, AE du reſidu AC: & ſoit la ligne droicte F pouuant iceluy rectangle AB. Ie dis que F eſt rationele.

Car ſoit vne rationele propoſee G, le quarré de laquelle eſtant appliqué ſur le binome CB, face le rectangle CH. Donc par la 113. prop. l'autre coſté BH ſera

residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD, DB, sçauoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE: & en permutant, comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchee BI à la retranchee AE; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commens. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'vne & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC seront commensurables en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH, & AC, ils seront aussi commensurables. Mais HC, egal au quarré de la rationele G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn rectangle rational, peut estre compris de lignes irrationeles.

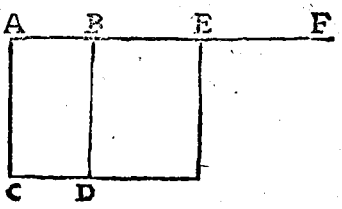
SCHOLIE.

Si le residu AC est $4-\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient 4, &* $\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *mais le binome BC soit* $9+\sqrt{45}$, *le rectangle AB sera 16, qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4, & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8, le rectangle CH sera 64, & le costé BH* $16-\sqrt{142\frac{2}{9}}$, *HI 16, & BI* $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dites.

Soit la ligne mediale AB: ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationeles toutes differentes des treize lignes deuant dites.



Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationele, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle sera irrationel par le corol. de la 39. p. 10. & par la 11. def. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationele, soit icelle BE laquelle sera differente de toutes les lignes deuant dites. Car son quarré appliqué à vne ligne rationele AC, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des 13 lignes deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationel par le mesme coroll. & la ligne qui le peut, aussi irrationele: & soit EF, laquelle sera differente de toutes les lignes deuant dites. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué à vne ligne rationele, ne fait l'autre costé tel que BE: & procedant de ceste façon, on trouuera infinies autres lignes irrationeles differentes entr'elles & des precedentes. Parquoy de la ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

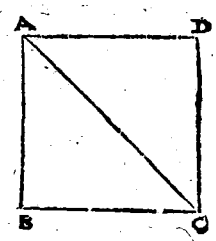
SCHOLIE.

Si la mediale AB eſt √√2, & la rationele AC 2, le rectangle AD ſera √√ 32, & la ligne BE qui peut iceluy ſera √√√32: Ainſi le rectangle DE ſera √√√ 512, & la ligne EF qui peut iceluy ſera √√√√512, & ainſi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale eſt incommenſurable en longitude au coſté.

Soit le quarré ABCD, duquel AC ſoit diagonale. Ie dis qu'icelle diagonale AC eſt incommenſ. en longitude au coſté AB.



Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC eſt double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'vne autre eſt comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC eſt au quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons demonſtréau corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. pr. 10. la diagonale AC, & le coſté AB, ſont incommenſ. en longitude. Donc au quarré, la diagonale eſt incommenſ. en longitude au coſté. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB coſté du quarré eſt 1, la diagonale AC ſera √ 2: tellement que la raiſon du coſté au diametre eſt comme 1 à √2, c'eſt à dire incommenſ. en longitude.

Fin du dixieſme Element.

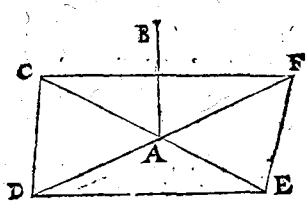
ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1. Solide, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur.

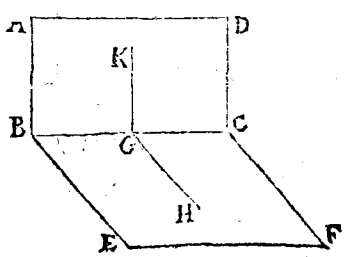
2. Mais les termes d'vn ſolide, ſont ſuperficies.

3. Vne ligne droicte eſt perpendiculairement eſleuee ſur vn plan, quand toutes les lignes droictes conſtituees ſur iceluy plan, & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.



Soit la ligne droicte AB eſleuee au deſſus du plan CDEF, ſur lequel ſoient menees tant de lignes droictes que l'on voudra CA, DA, EA & FA, qui rencontrant en A ladite ligne AB faſſent les angles droicts CAB, DAB, EAB & FAB: Nous dirons donc qu'icelle ligne AB eſt perpendiculaire, ou eſleuee à angles droicts ſur ledit plan propoſé CDEF.

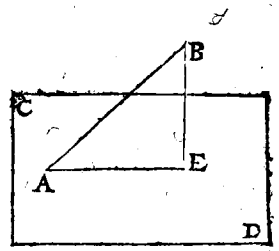
4. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune ſection, ſont auſſi perpendiculaires à l'autre plan.



Soit le plan ABCD eſleué ſur le plan BEFC, tellement que la ligne AD ſoit en l'air, & la ligne BC leur commune ſection: mais au plan BEFC, ſoit tiree la ligne droicte GH perpendiculaire à icelle commune ſection BC. Maintenant ſi la meſme ligne GH eſt auſſi perpend. à l'autre plan ABCD, c'eſt à dire qu'ayant mené en iceluy du poinct G, quelque ligne droicte, comme GK, l'angle HGK ſoit droict: iceluy plan ABCD ſera eſleué perpendiculairement ou à angles droicts ſur l'autre plan BCEF. Partant lors qu'vn plan eſt eſleué à angles droicts ſur quelque autre plan, auſſi les lignes droictes menees en l'vn d'iceux à angles droicts à leur commune ſection, ſeront perpendiculaires à l'autre plan: tellement que ſi on dit que le plan ABCD eſt eſleué à angles droicts ſur le plan BCEF, & qu'en celuy-là ſoient menees les lignes droictes AB, KG, DC perpendic. à la commune ſection BC, nous conclurons qu'icelles lignes ſont auſſi perpend. à l'autre plan BCEF, & font les angles ABE, KGH, DCF droicts.

5. L'inclination

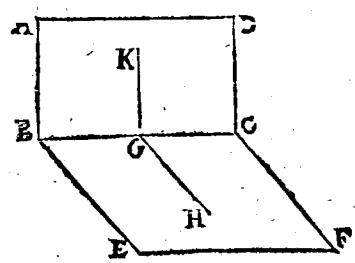
5. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan, eſt l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.



Soit la ligne droicte AB inclince au plan CD, & du poinct du ſommet B, ſoit menee BE perpendic. au meſme plan CD, & tiree AE: l'angle aigu BAE ſera l'inclination de ladite ligne AB au plan CD.

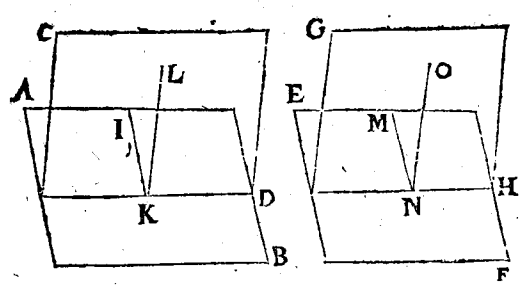
6. Vn plan eſt incliné ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers vn meſme poinct d'icelle, ne ſont point perpendiculaires les vnes aux autres: & l'inclination d'iceux plans, eſt l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

Soit le plan ABCD eſleué au deſſus du plan BCFE, tellement que la ligne AD eſt en l'air, & BC leur commune ſection: mais de quelque poinct d'icelle comme G, ſoient menees GH au plan CE, & GK au plan AC, chacune perpendiculaire à ladite BC. Or ſi leſdites perpendiculaires GH & GK, ne ſont perpendiculaires entr'elles, c'eſt à dire que l'angle KGH ne ſoit droict, le plan ABCD ſera incliné au plan BCFE, & l'angle aigu KGH contenu ſous icelles perpendiculaires GH, GK ſera l'inclination d'iceux plans.



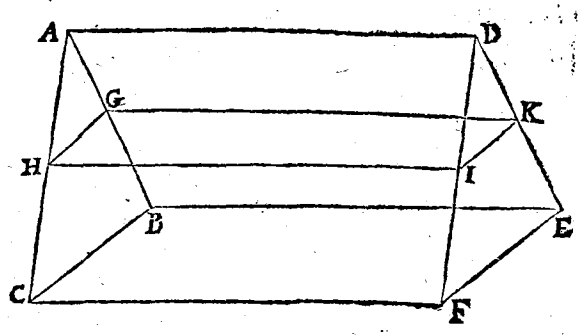
7. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, lors que les ſuſdicts angles d'inclinations ſont egaux entr'eux.

Soient deux plans AB, CD, inclinez entr'eux, & deux autres plans EF, GH, auſſi inclinez entr'eux; mais que l'angle d'inclination de ceux-là, qui eſt IKL, ſoit egal à l'angle d'inclination de ceux-cy, qui eſt MNO: Le plan AB ſera ſemblablement incliné au plan CD, que le plan EF au plan GH, c'eſt à dire que l'inclination de ces deux plans-là ſera ſemblable & egale à l'inclination de ces deux-cy.



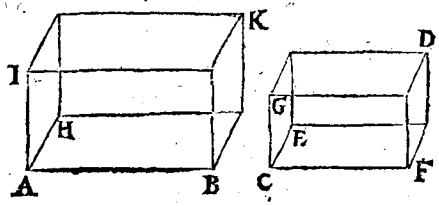
8. Plans parallels, ſont ceux leſquels eſtans continuez ne ſe rencontrent point.

Comme ſi les deux plans ABC, DEF, eſtans prolongez de part & d'autre, ne ſe rencontrent point: iceux plans ſeront parallels entr'eux. Item, les deux plans BCFE, GHIK ne ſe pouuant iamais rencontrer eſtans prolongez ſeront auſſi dicts plans parallels, mais non pas les deux plans CHIF, BGKE, leſquels eſtans continuez ſe rencontrent en AD.



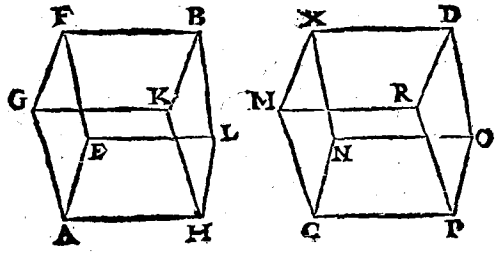
9. Solides ſemblables, ſont ceux qui ſont compris de plans ſemblables, egaux en nombre.

Comme les ſolides AK, & CD, chacun deſquels eſt contenu & enuironné de ſix plans ou ſuperficies ſemblables, ſeront dicts ſolides ſemblables.



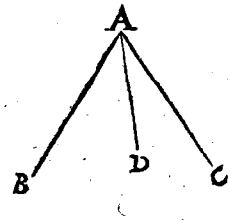
10. Solides egaux & ſemblables, ſontceux qui ſont compris & enuironnez de ſemblables plans, egaux en nombre & grandeur.

C'eſt à dire que ſi les plans ſemblables, qui ſuiuant la precedente definition contiennent les corps ſemblables, ſont egaux chacun au ſien: tels ſolides ne ſeront pas ſeulement dicts ſemblables, mais auſſi egaux: Comme chacun des corps AB, CD, eſtant contenu de ſix plans ſemblables & egaux, chacun à ſon correſpondant, ſeront dicts corps ou ſolides egaux & ſemblables.



11. Angle ſolide, eſt l'inclination ou rencontre de plus de deux lignes, qui ſe touchans en vn meſme poinct, ne ſont conſtituees ſur vn meſme plan. *ou bien*, Angle ſolide, eſt celuy qui eſt contenu ſous plus de deux angles plans, qui ſe rencontrans à vn meſme poinct ſont conſtituez ſur plans differens.

Nous auons dit au premier liure que quand deux lignes droictes conſtituees à vn meſme plan ſe rencontrent indirectement à vn poinct, elles ſont vn angle plan, tel qu'eſt l'angle BAC contenu des deux lignes AB, AC, conſtituees en vn meſme plan: Mais s'il y interuient vne troiſieſme ligne comme AD, qui ne ſoit conſtituee au meſme plan, ains que le poinct D ſoit en l'air hors le plan d'icelles, ſera fait au poinct A vn angle ſolide: Lequel eſt auſſi conſtitué par les trois angles plans BAC, BAD, & CAD, qui ſe rencontrent au meſme poinct A, & ſont conſtituez ſur plans differens.

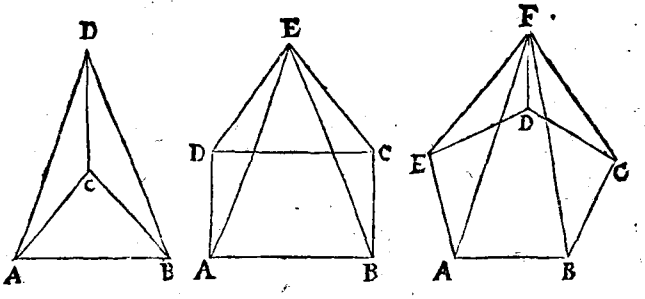


Mais eſt icy à noter que ceſte def. ne comprend que les angles ſolides qui ſont contenus ſous plus de deux lignes droictes, ou plus de deux angles plans rectilignes: car elle ne comprend pas

l'angle du cone, qui eſt contenu d'vne ſeule ſuperficie courbe; ny celuy fait de deux ſuperficies l'vne plaine & l'autre courbe, tel qu'eſt l'angle fait lors qu'vn Cone eſt couppé par le ſommet. Comme eſt auſſi à noter que les angles ſolides contenus d'angles plans egaux en multitude & grandeur, ſont egaux entr'eux.

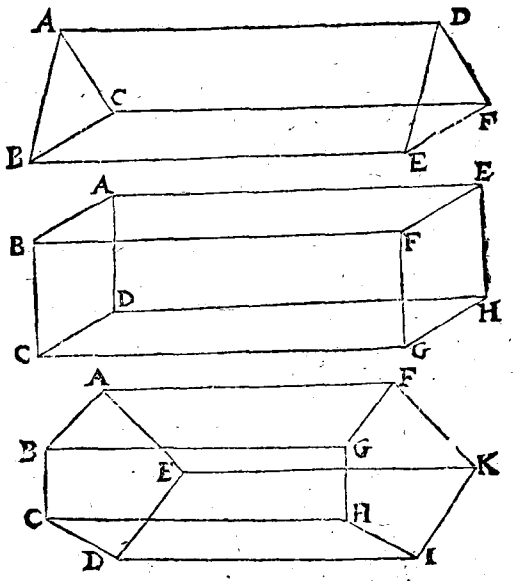
12. Pyramide, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, ſe rencontrans en vn meſme poinct, & ayans vn autre plan pour baſe.

Comme la figure ſolide ABCD conſtituee ſur le plan ABC auec les trois autres plans ADB, ADC, & CDB, qui ſe rencontrent & terminent au poinct D, eſt appellee Pyramide. Comme auſſi la figure ſolide ABCDE conſtituee ſur la baſe ABCD, les autres plans ſe rencontrans au ſommet E: Item la figure ſolide ABCDEF: Chacune deſquelles Pyramides prend ſa denomination ſelon la figure de ſa baſe: tellement que celle qui a vn triangle pour baſe, comme la premiere des trois cy-deſſus, s'appelle Pyramide triangulaire: celle qui a vn quadrangle comme la 2e. ſe nomme Pyramide quadrangulaire: celle qui a vn pentagone pour baſe, comme la 3e. s'appelle Pyramide pentagonalle, &c.



13. Priſme, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

Comme la figure ſolide ABCDEF s'appelle priſme, car elle eſt contenue de deux triangles oppoſez ABC, DEF qui ſont egaux ſemblables & parallels, & de trois parallelogrammes BCFE, BADE, ACFD. Semblablement la figure ſolide ABCDHEFG, en laquelle les plans oppoſez, egaux, ſemblables & parallels ſont les quadrilateres ABCD, EFGH, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommee Priſme: Comme auſſi l'autre figure ſolide ABCDEKFGHC, dont deux des plans qui la contiennent ſont oppoſez, egaux ſemblables & parallels, ſçauoir les pentagones ABCDE, FGHIK, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommee Priſme. Parquoy vn priſme n'eſt autre choſe qu'vne colomne d'egale groſſeur qui a les baſes oppoſees egales, ſemblables & paralleles, ſoit qu'icelles bazes ſoient triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, &c. ainſi qu'il appert és figures cy deſſus.



14. Sphere, eſt vne figure contenue de la ſuperficie deſcrite par vn demy cercle, lors que ſon diametre demeurant immobile, iceluy de-

my cercle eſt tourné iuſques à ce qu'il reuienne où il a commencé de mouuoir.

Encore que nous ayons ſuppleé quelque choſe en ceſte def. de la ſphere, ſi eſt-ce toutesfois que celle de Theodoze rapportee en noſtre Coſmographie ſemble plus claire & intelligible: & des deux nous en auons faict vne autre, qui eſt au commencement de noſtre Geometrie practique, laquelle eſt telle qu'il enſuit,

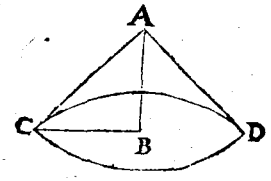
La ſphere eſt vn corps compris d'vne ſeule ſuperficie, à laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont au dedans d'iceluy corps ſont egales entr'elles: & icelle ſphere eſt deſcrite par vn demy cercle tournant vn tour ſur ſon diametre immobile.

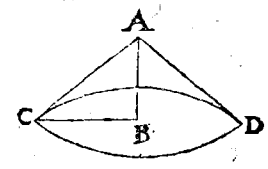
15. L'axe de la ſphere, eſt iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

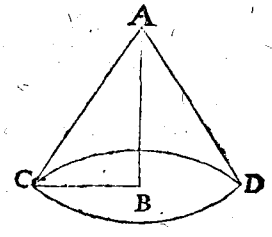
16. Le centre de la ſphere, eſt le meſme que celuy du demy cercle.

17. Mais le diametre de la Sphere, eſt vne ligne droicte, laquelle paſſant par le centre d'icelle, eſt terminee à la ſuperficie de la ſphere.

18. Cone, eſt vn ſolide compris ſous deux ſuperficies deſcrites par vn triangle rectangle, lors que l'vn des coſtez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, le triangle fait vn tour à l'entour d'iceluy coſté. Et ſi ledit coſté immobile eſt egal à l'autre coſté comprenant l'angle droict, le cone ſera rectangle: mais ſi plus petit; il ſera ambligone: & ſi plus grand; il ſera oxigone.







Soit le triangle ABC, dont l'angle B eſt droict, & le coſté AB demeurant fixe, ſoit imaginé ledit triangle ABC eſtre meu à l'entour dudit coſté AB iuſques à ce qu'il ait fait vne entiere reuolution: alors ſera deſcrite vne figure ſolide contenue ſoubs deux ſuperficies, l'vne plane & circulaire deſcrite par le coſté BC, & l'autre courbe & conuexe deſcrite par le coſté AC oppoſé à l'angle droict: laquelle figure eſt appellee Cone par Euclide & autres Geometres; mais pluſieurs l'appellent auſſi Pyramide ronde.

Que ſi le coſté immobile AB eſt egal à BC autre coſté de l'angle droict, comme en la premiere figure, le Cone ſera dit Orthogonel ou rectangle, pource que l'angle au ſommet A ſera droict, chacun des deux CAB & DAB, qui le compoſent eſtant demy droict, à cauſe que l'angle B eſt droict, & les coſtez AB & BC egaux. Mais ſi le coſté immobile AB eſt moindre que l'autre coſté de l'angle droict BC, comme en la 2. figure, le Cone deſcrit ſera dit Ambligone, pource que l'angle au ſommet A ſera obtus, attendu que chacun des angles egaux BAC, BAD, qui le compoſent eſt plus grand qu'vn demy droict, l'angle ACB qui fait vn droict auec BAC eſtant moindre qu'iceluy. Et finalement ſi le coſté immobile AB eſt plus grand que l'autre coſté BC,

comme en la 3. figure, le Cone descrit sera appellé Oxigone, parce que l'angle au sommet A sera aigu, puis que l'angle ACB sera plus grand qu'vn demy droict, & chacun des angles BAC, BAD qui composent ledit angle A, moindre qu'vn demy droict.

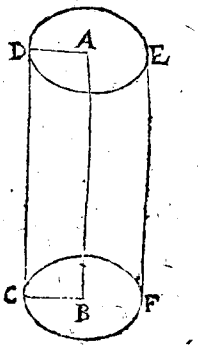
19. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

Comme en chacun des trois Cones descrits cy-dessus, l'axe est la ligne droicte immobile AB.

20. Mais la baze du cone, est le cercle descrit par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne.

Comme és Cones cy-dessus, la base est le cercle descrit par le costé BC.

21. Cylindre, est vn solide compris de trois superficies descrites par vn parallelogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme fait vn tour à l'entour d'iceluy costé.



Soit vn parallelogramme rectangle ABCD, & le costé AB demeurant fixe & immobile soit conceu ledict parallelogramme estre meu allentour dudit costé AB, iusques à ce qu'il soit reuenu au lieu où il a commencé de mouuoir: alors sera descrite vne figure solide CDEF contenue soubs trois superficies, c'est à sçauoir deux planes, & circulaires descrites par les costez AD, BC, & l'autre courbe & conuexe descrite par le costé DC: laquelle figure CDEF est appellée Cylindre par Euclide & plusieurs autres Geometres; mais quelques vns l'appellent Colomne ronde.

22. L'axe du Cylindre, est icelle ligne mobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

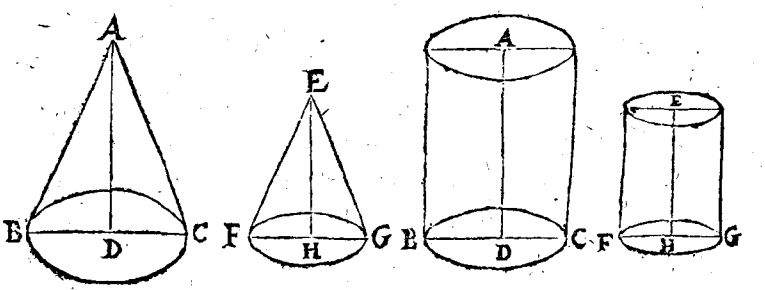
Comme en la figure precedente la ligne droicte AB qui est demeuree immobile est dicte Axe du Cylindre CDEF.

23. Mais les bases du cylindre, sont les cercles descrits par les deux costez opposez, meus allentour.

Ainsi en la figure cy-dessus les cercles DE & CF descrits par les costez opposez AD, BC, seront les bases du Cylindre CDEF.

24. Semblables Cones, & Cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

Soient deux Cones ABC, EFG: Item deux Cylindres; & AD, EH soient leurs Axes; & BC, FG les diametres des bazes. Or si l'axe AD est à l'axe EH, comme le diametre BC est au diametre FG; tant les Cones, que les Cylindres seront semblables entr'eux.



Mais est icy à noter qu'en ceste def. & autres preced. des Cones & des Cylindres, Euclide

ne definit, & n'entend parler cy apres que des Cones & Cylindres droicts, c'eſt à ſçauoir de ceux dont l'axe eſt perpendiculaire & à angles droicts ſur la baze: mais Appolonius Pergeus, & Serenus en traictent vniuerſelement, c'eſt à ſçauoir tant des Ortogones, que des inclinez, ou ſcalenes.

25. Cube eſt vn ſolide compris de ſix quarrez egaux.

26. Tetraedre, eſt vne figure ſolide compriſe de quatre triangles egaux, & equilateraux.

27. Octaedre, eſt vn ſolide compris de huict triangles egaux, & equilateraux.

28. Dodecaedre, eſt vn ſolide compris de douze pentagones egaux, equilateraux, & equiangles.

29. Icoſaedre, eſt vn ſolide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

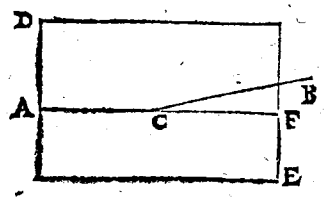
30. Parallelipipede, eſt vn ſolide compris de ſix quadrangles plans, deſquels les oppoſez ſont parallels.

31. Vne figure ſolide, eſt dicte inſcrite en vne figure ſolide, lors que tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou és angles, ou és coſtez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

32. Mais vne figure ſolide, eſt dicte circonſcrite à vne figure ſolide, quand ou les angles, ou les coſtez, ou les plans de la figure circonſcrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

THEOR. 1. PROP. 1.

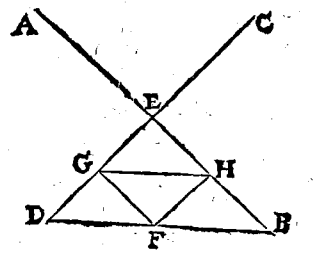
Vne partie d'vne ligne droicte ne peut eſtre ſur vn plan, & l'autre partie en l'air.



Car ſoit, s'il eſt poſſible, vne partie de la ligne droicte AB, ſçauoir AC ſur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air. Donc puis que AC eſt ligne droicte poſée au plan DE, elle peut eſtre prolongee directement ſur iceluy plan, lequel prolongement ſoit CF, qui ſera autre que CB, icelle ayant eſté poſee en l'air, & hors dudit plan DE: Et partant les deux lignes droictes ACB, ACF auront vn commun ſegment AC: Ce qui ne peut eſtre par la 10. comm. ſent. Parquoy vne partie d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, elles seront sur vn mesme plan: & tout triangle est en vn mesme plan.



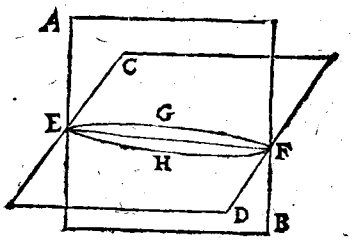
Soient deux lignes droictes AB & CD se coupans l'vne l'autre au poinct E; & en EB, ED soient pris quelconques poincts B & D, & soit tiree la ligne droicte BD, afin de faire le triangle EBD. Ie dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul & mesme plan: Item, que le triangle EBD est pareillement en vn mesme plan.

Car si quelque partie d'iceluy triangle EBD, comme FBEG estoit en vn plan, & la partie restante FDG en vn autre plan, aussi BF, EG seroient en vn plan, & les parties restantes FD, GD, en vn autre plan, c'est à dire en l'air, contre la prec. prop. Par mesmes raisons DEHF partie du mesme triangle BED, ne peut pas estre en vn plan, & l'autre partie BHF en vn autre plan: Ny aussi la partie DGHB ne peut pas estre en vn autre plan que la partie restante GHE: car il arriueroit tousiours la mesme absurdité que dessus, sçauoir est que partie d'vne ligne droicte seroit en vn plan, & l'autre partie en l'air contre ce qui a esté demonstré à la prec. pr. Partant tout le triangle EBD est en vn seul & mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçauoir est en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'vn l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient deux plans se coupans l'vn l'autre AB & CD, & leur commune section, soit la ligne EF. Ie dis que icelle commune section EF est vne ligne droicte.



Car si elle n'est telle, des poincts extremes E & F, qui sont communs à tous les deux plans on pourra tirer sur chacun d'iceux plans vne ligne droicte qui sera autre qu'icelle commune section EF: soit donc menee au plan AB vne ligne droicte EGF, & au plan CD la ligne droicte EHF. Donc puisque ces deux lignes droictes EGF, EHF ont mesmes termes E & F, elles encloront vn espace: ce qui est absurde. Donc la commune section EF sera ligne droicte. Parquoy si deux plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

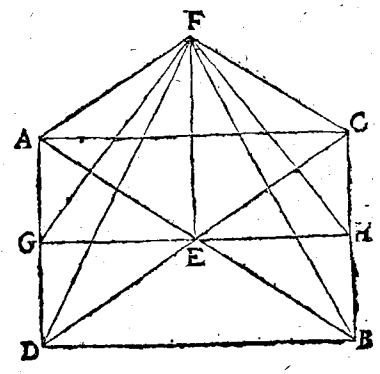
THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune section on esleue perpendiculairement vne au-

tre ligne droicte, elle ſera auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le plan d'icelles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, ſe coupans l'vne l'autre au poinct E, & d'iceluy poinct de ſection E, ſoit eſleuee EF perpendiculaire à chacune d'icelles AB, CD: ie dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à leur plan.

Car ſoient poſees egales les lignes droictes AE, EB, & CE, ED; puis ſoient tirees les lignes droictes AD, BC; & par le poinct E ſoit menee quelconque ligne droicte GH couppant les lignes AD, BC, és poincts G & H: Item du poinct en l'air F ſoient tirees les lignes droictes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les coſtez EA, ED du triangle AED, ſont egaux aux coſtez EB, EC du triangle BEC, chacun au ſien, & les angles AED, BEC contenus par iceux coſtez auſſi egaux par la 15. pr. 1. les baſes AD, BC ſeront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH ſont egaux par la 15. p. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE ſeront egaux aux deux angles BEH, EBH, du triangle BHE, & le coſté AE eſt egal au coſté BE: donc par la 26. prop. 1. les deux coſtez AG, GE, ſeront egaux aux deux coſtez BH, HE. Et puis que les deux coſtez FE, EA du triangle FEA ſont egaux aux coſtez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, ſçauoir droicts par l'hypotheſe, par la 4. prop. 1. les bazes FA, FB ſeront egales. Par meſme raiſon ſeront auſſi egales les lignes FD, FC. Dauantage, veu que les coſtez FA, AD du triangle FAD, ſont egaux aux coſtez FB, BC du triang. FBC, & la baſe FC egale à la baſe FD, par la 8. pr. 1. les angles FAD, FBC ſeront auſſi egaux: Parquoy les coſtez FA, AG du triangle FAG, eſtans egaux aux coſtez FB, BH, du triangle FBH, les baſes FG, FH, ſeront pareillement egales par la 4. prop. 1. Et finalement, puis que les coſtez FE, EG, du triangle FEG, ſont egaux aux coſtez EF, EH du triangle FEH, & les baſes FG, FH auſſi egales, les angles FEG, FEH ſeront pareillement egaux par la 8. pr. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE ſera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & conſtituee au meſme plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 11.



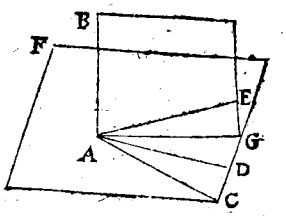
On pourra ſemblablement mener tant de lignes droictes qu'on voudra ſur le meſme plan, leſquelles rencontrant la perpendiculaire FE en E, y ſeront angles droicts, par les meſmes raiſons que deſſus: & par la 2. def. 11. icelle FE ſera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes ſeront en vn meſme plan.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE,

AE, au poinct de leur rencontre A. Ie dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, ſont ſur vn meſme plan.

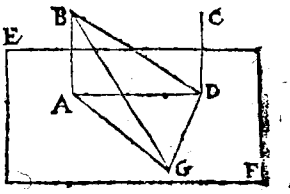


Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles ſoient ſont en vn meſme plan par la 2. prop. 11. ſoient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'eſt point ſur le meſme plan FC, mais qu'elle eſt eſleuee en l'air, elle pourra eſtre au meſme plan que AB par la 2. p. 11. & ſoient toutes deux au plan BE. Ainſi FC, & BE ſont deux plans differens, leſquels ſe touchans au poinct A, ne ſont pas parallels, partant eſtans continuez tant qu'il ſera de beſoin ils ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte par la 3. p. 11. ſoit la ligne AG, laquelle par ce moyen ſera au meſme plan que AC; & partant par la 4. d. 11. BA, & GA ſe rencontreront en angles droicts: mais par l'hypotheſe AB & AE ſe rencontrent auſſi en angles droicts: par ainſi les angles BAE, BAG eſtans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, ſeroient egaux, la partie au tout: ce qui eſt impoſſible: Donc AE n'eſtoit pas eſleuee en l'air, ains eſtoit au meſme plan que AC & AD. Parquoy ſi vne ligne droicte rencontre en vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes ſont eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan, elles ſeront paralleles.

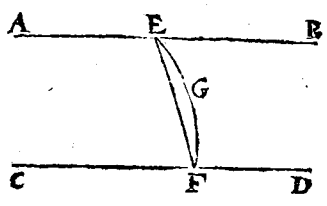
Soient deux lignes droictes AB, CD eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan EF, & aux poincts A & D. Ie dis qu'icelles AB, CD, ſont paralleles entr'elles.



Car des ſuſdits poincts A & D du plan EF, ſoit menee la ligne droicte AD, & du poinct D la ligne droicte DG perpendiculaire à icelle AD par la 11. prop. 1. puis ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux coſtez AB, DG egaux, & AD commun, & l'angle BAD egal à l'angle GDA (car ceſtuy-là eſt droict par la 3. def. 11. & celuy-cy eſt auſſi droict par la conſtruction) par la 4. pr. 1. la baſe BD ſera egale à la baſe AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux coſtez AB, AG egaux aux deux coſtez DG, BD, chacun au ſien, & la baſe BG commune, par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG ſeront egaux. Mais l'angle BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict: & partant la ligne DG eſt perpendiculaire à BD: Mais elle eſt auſſi perpendiculaire à chacune d'icelles AD, CD par la 3. def. 11. Parquoy GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. pr. 11. icelles trois lignes ſeront en vn meſme plan, c'eſt à dire que CD ſera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. pr. 11. les trois lignes AB, BD, AD qui conſtituent le triangle ABD ſont en vn meſme plan: partant AB & CD ſeront auſſi en vn meſme plan. Mais par la 3. def. 11. elles ſont les deux angles BAD, CDA droicts: Donc par la 28. pr. 1. icelles lignes AB, DC ſont paralleles entr'elles. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont eſleuees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes ſont paralleles, & de l'vne à l'autre on mene vne ligne droicte, elle ſera au meſme plan des lignes paralleles.



Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'vne à l'autre ſoit menee la ligne droicte EF. Ie dis qu'icelle ligne EF eſt au meſme plan des lignes paralleles AB & CD.

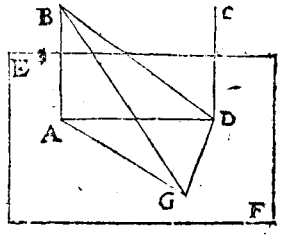
Car ſi elle n'eſt au meſme plan, ains en vn autre: que celuy-cy couppe ceſtuy-là és poincts E & F, & la commune ſection d'iceux plans ſoit EGF, laquelle ſera ligne droicte par la 3. pr 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans meſmes termes E & F, enfermeront vn eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte EF n'eſt pas en vn autre plan que celuy auquel ſont les paralleles AB, CD. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ceſte meſme propoſition eſt auſſi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne ſoient paralleles, pourveu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, deſquelles l'vne ſoit à angles droicts à quelque plan: auſſi l'autre ſera à angles droicts ſur le meſme plan.

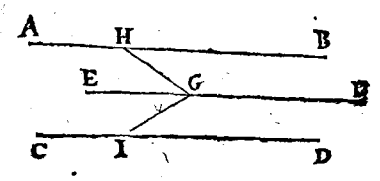


Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'vne d'icelles AB ſoit éleuée perpendiculairement ſur le plan EF. Ie dis que l'autre CD eſt auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le meſme plan EF. Car eſtant menee au plan EF la ligne droicte AD, l'angle BAD ſera droict par la 3. d. 11. Mais les deux lignes AB, CD eſtans paralleles, les deux angles BAD, CDA ſont egaux à deux droicts par la 29. pr. 1. donc l'angle CDA ſera droict. Maintenant au meſme plan EF ſoit menee DG perpendiculaire à AD, & ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menees les lignes AG, BG, BD. D'autant que les coſtez BA, AD du triangle ABD ſont egaux aux coſtez GD, DA du triangle ADG, chacun au ſien, & les angles BAD, ADG contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, eſtans droicts; les bazes BD, AG ſeront egales par la 4. prop. 1. Item, les coſtez BA, AG du triangle GBA eſtans egaux aux coſtez GD, DB du triangle BDG, & la baze BG commune à tous les deux triangles; les angles BDG, BAG contenus deſdicts coſtez ſeront egaux par la 8 prop. 1. Mais BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict. Parquoy GD ſera perpendiculaire à chacune d'icelles AD, BD, leſquelles faiſant angle à D s'y entrecouperont eſtans prolongees: & par la 4. prop. 11. icelle GD ſera eſleuee perpendiculairement au plan mené par les lignes AD & BD: mais par la preced. prop. icelles deux lignes BD & AD ſont au meſme plan des paralleles AB & CD: donc GD eſt perpendicu-

laire sur le plan où est la ligne CD: partant l'angle CDG sera droict. Mais nous auons demonstré que l'angle ADC est aussi droict: donc par la 4. prop. 11. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Parquoy s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont en vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.

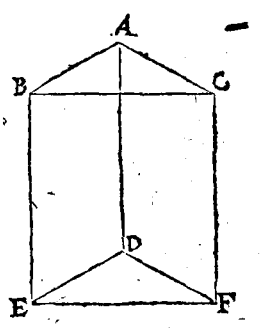


Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Ie dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque poinct G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçauoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G; elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles; & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI: aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. Par mesme raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI: & partant par la 6. p. 11. AB, CD estans perpendiculaires à vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droictes s'entretouchans, sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.



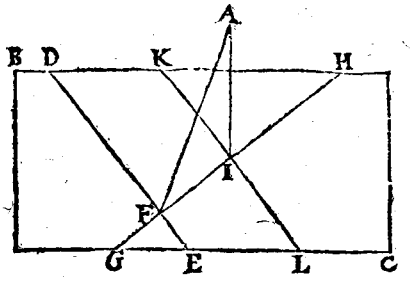
Soient deux lignes droictes AB & AC s'entretouchans en A, lesquelles soient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF se touchans l'vne l'autre en D: & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF, comprins par icelles sont egaux.

Car estans prises egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF, soient menees les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Donc AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par mesme raison AD & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la prec. prop. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles: & par la 33. p. 1. BC & EF seront pareillement egales & paralleles entr'elles. Parquoy les deux triangles ABC & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. prop. 1. les angles BAC, EDF, seront egaux. Si donc deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'vn poinct donné en l'air, mener vne ligne droicte perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy poinct.

Soit le poinct A en l'air, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy poinct A. Au plan BC, soit mence comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A soit tiree la perpendiculaire AF par la 12. pr. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. p. 1. Et à icelle GH soit tiree de A la perpendiculaire AI par la 12. prop. 1. Ie dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.

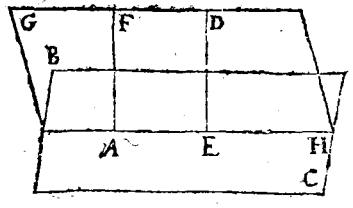


Car au plan BC, soit tiree par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. Donc puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH, par la construction; & partant aussi perpendiculaire au plan tiré par icelles FA, FH par la 4. prop. 11. pareillement KI sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en vn mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droict par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendic. au plan où sont les lignes KI, IF, sçauoir au plan BC. Nous auons donc d'vn poinct donné en l'air abaissé vne perpendiculaire au plan d'au-dessous d'iceluy poinct: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le poinct donné en iceluy soit A: il faut d'iceluy poinct A esleuer vne ligne perpendiculaire audit plan BC.

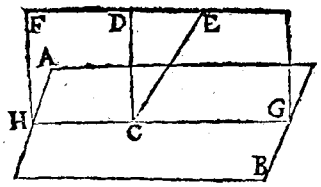


Soit pris en l'air comme on voudra le poinct D, & d'iceluy soit menee sur le plan BC, la perpendiculaire DE par la preced. prop. laquelle rencontrant le plan BC au poinct A, on aura faict ce qui estoit requis: Mais si elle ne rencontre iceluy poinct A, ains quelque autre poinct E, dudict poinct A soit menee AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. Ie dis qu'icelle AF sera perpendiculaire au plan BC. Car DE, AF estans paralleles, & DE perpendic. au plan BC par la construction, par la 8. pr. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuee sur le mesme plan BC. Parquoy à vn plan donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 11. PROP. XIII.

D'vn plan donné, & d'vn mesme poinct d'iceluy, on ne leuera pas

en l'air d'vn meſme coſté, deux lignes droictes perpendiculaires.

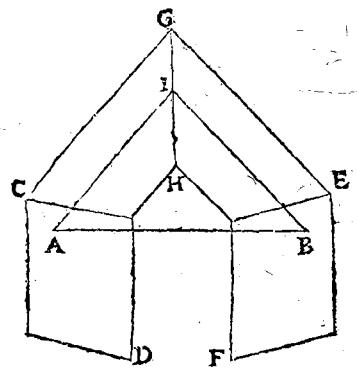


Soit donné le plan AB, & le poinct en iceluy C: ie dis que du poinct C, on n'eſleuera pas en l'air deux lignes droictes perpendiculaires ſur iceluy plan, & de meſme coſté.

Car, s'il eſt poſſible, du poinct C, ſoient eſleuees en l'air les deux perpendiculaires CD & CE: par la 2. p. 11. elles ſeront en vn meſme plan, & ſoit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB au poinct C, n'eſt point parallele à iceluy AB: partant iceux plans eſtans continuez ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte, laquelle ſoit GCH. Et parce que les lignes CD & CE ſont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG ſeront droicts, & partant egaux: la partie au tout: ce qui eſt impoſſible. Il ne ſe peut donc eſleuer du poinct C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de meſme coſté. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droicte eſt perpendiculaire à deux plans, iceux plans ſeront parallels.



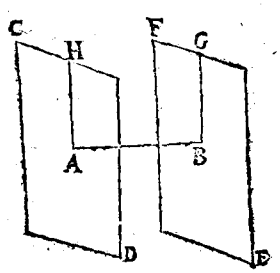
Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à chacun des plans CD, & EF: ie dis qu'iceux plans ſont parallels entr'eux.

Car s'ils ne ſont parallels, eſtans continuez il ſe rencontreront: que ce ſoit donc de la part de C, E, & que GH ſoit la ligne de leur commune ſection, en laquelle ſoit pris comme on voudra le poinct I, & d'iceluy ſoient menees les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB eſt poſee perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, ſeront droicts, contre la 17. pr. 1. donc les deux plans CD, EF prolongez ne ſe rencontreront point; & partant ils ſont parallels. Si donc vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre la conuerſe de ceſte prop. qui eſt telle.

S'il y a deux plans parallels, la ligne droicte qui eſt perpendiculaire à l'vn d'iceux, ſera auſſi perpendiculaire à l'autre.



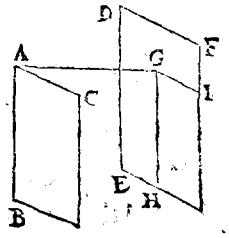
Soient deux plans parallels, CD, EF, & la ligne droicte AB ſoit perpendiculaire au plan CD: Ie dis qu'icelle AB eſt auſſi perpendiculaire au plan EF: car ſi elle n'eſt perpendiculaire ſoit tiree audit plan EF, la ligne droicte BG de la part que AB fait l'angle moindre qu'vn droict; & par AB, BG ſoit mené vn autre plan, duquel & du plan CD la commune ſection ſoit la ligne droicte AH. Et d'autant que l'angle ABG eſt aigu, les plans eſtans prolongez, les lignes droictes BG, AH ſe rencontreront, & partant auſſi les plans, leſquels ont eſté poſez parallels: ce qui eſt abſurde. Donc AB eſt perpendiculaire au plan EF. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchans ſont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'eſtans toutesfois en vn meſme plan: les plans paſſans par icelles, ſeront auſſi parallels.

Soient deux lignes droictes AB & AC, s'entretouchans en A, paralleles à deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne ſoient en vn meſme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par icelles AB, AC eſt parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

Car par la 11. prop. 11. de A ſoit tiree ſur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31 pr. 1. audit plan EF, ſoient tirees de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH ſont paralleles à DE, icelles AB, GH ſeront paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. & partant par la 29. pr. 1. les angles BAG, AGH ſont egaux à deux droicts. Mais AGH eſt droict, par la 3. def. 11. Donc BAG ſera auſſi droict. Par meſme raiſon on prouuera l'angle CAG eſtre droict. Parquoy, veu que la ligne GA eſt perpendiculaire aux deux AB, AC; par la 4. pr. 11. elle ſera auſſi perpendiculaire à leur plan BC: Mais par la conſtruction elle l'eſt auſſi au plan EF. Donc par la prec. prop. les plans BC, EF ſeront parallels. Parquoy ſi deux lignes droictes s'entretouchans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

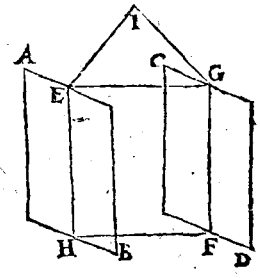


THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels ſont couppez par vn autre plan; les lignes de communes ſections ſeront paralleles.

Soient deux plans parallels AB & CD, couppez par le plan EF, & les communes ſections d'iceux ſoient EH, GF. Ie dis qu'icelles HE & FG ſont paralleles entr'elles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans prolongees elles ſe rencontreront au plan couppant EF: Que ce ſoit donc au poinct I. Or d'autant que toute la ligne droicte HEI eſt en vn meſme plan, ſçauoir en AB prolongé; & auſſi toute la ligne droicte FGI en vn meſme plan, ſçauoir en CD prolongé; les plans AB, CD eſtans prolongez ſe rencontreront auſſi en I: ce qui eſt abſurde, ayans eſté poſez parallels. Donc HE, FG eſtans continuées ne ſe rencontrent point; & partant ſont paralleles entr'elles. Parquoy, Si deux plans parallels ſont couppez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

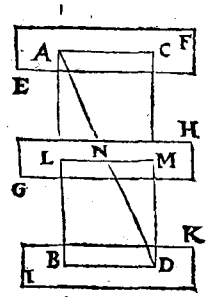


THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes ſont couppees par des plans parallels, elles ſeront couppees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, trauerſans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes ſont couppees par iceux plans és poincts A, L, B, C, M, D. Ie dis qu'elles ſont couppees proportionellement, c'eſt à dire que les ſegmens d'icelles compris entre les ſuſdicts plans ſont proportionaux, ſçauoir que comme AL eſt à LB, ainſi CM à MD.

Car és plans EF, IK, ſoient menees les lignes droictes AC, BD: & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel ſoient meneés les lignes LN, NM, au meſme plan GH: & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. ſera en vn meſme plan: ſemblablement le triangle ADC auſſi en vn meſme plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK ſont couppez par le plan du triangle ABD: leurs communes ſections LN, BD ſeront paralleles par la prec. prop. Par meſme raiſon MN, AC, ſeront auſſi paralleles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL ſera à LB, ainſi AN ſera à ND: Item comme AN à ND, ainſi CM à MD: Et partant par la 11: prop. 5. comme AL ſera à LB, ainſi CM ſera à MD. Si donc deux lignes droictes ſont couppees par des plans parallels, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

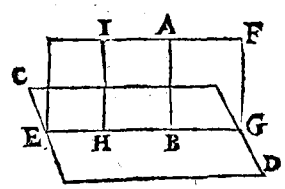


THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte eſt eſleuee perpendiculairement ſur vn plan, auſſi tous les plans procedans d'icelle, ſeront perpendiculaires au meſme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire ſur quelque plan CD: Ie dis que tous les plans menez de la ligne AB, vers quelle part on voudra, ſeront eſleuez perpendiculairement ſur le meſme plan CD.

Car par AB ſoit tiré le plan EF, couppant le plan CD par la ligne droicte EG: & en icelle ſoit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF ſoit menee HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH ſont paralleles, & AB a eſté poſee perpendiculaire au plan CD; auſſi IH ſera perpendiculaire au meſme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant auſſi perpendiculaire à la commune ſection EG, par la 3. d. 11. Par meſme diſcours toutes autres lignes qui ſeront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, ſeront perpendiculaires au plan CD: & par conſequent à la ligne EG. Parquoy par la 4. def. 11. le plan EF ſera perpendiculaire au plan CD. Par meſme raiſon ſeront demonſtrez tous autres plans tirez par la ligne AE, eſtre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte eſt eſleuee perpendiculairement ſur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



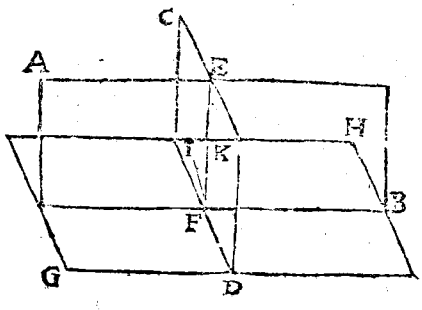
THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans eſleuez perpendiculairement ſur vn autre plan

s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'vn l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section EF : ie dis qu'icelle EF est perpendiculaire au mesme plan GH.

Car, ou EF est perpendic. à BF, DF, communes sections des plans AB, CD auec ledit plan GH, ou non : Que si elle leur est perpend. par la 4. p. 11. elle le sera aussi audit plan GH, mené par icelles BF, DF. Mais si on dit que EF est seulement perpend. à l'vne ou l'autre desdites sections BF, DF; qu'elle le soit à BF. Donc puis que le plan AB est perpendic. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne EF (qui au plan AB est menee perpend. à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH) sera perpendic. au plan GH. Lon conclura le mesme si ladite EF est concedee perpendiculaire à la section DF : car alors icelle EF sera perpend. au plan GH par ladite 4. def. puis qu'elle est posee perpendicul. à DF commune section du plan CD auec le plan GH, & menee audit plan CD qui est perpendic. à iceluy plan GH. Finalement, si on croit EF n'estre perpendic. à l'vne ny l'autre d'icelles communes sections BF, DF, du poinct F soit menee au plan AB la ligne FI perpendic. à BF par la 11. pr. 1. & au plan CD, la ligne FK perpendiculaire à la section DF. Donc puis que le plan AB est perpend. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne FI (laquelle est perpendic. à DF commune section d'iceux plans AB, GH) sera aussi perpendic. à iceluy plan GH. Par mesme raison FK sera encore perpend. au mesme plan GH. Par ainsi FI, FK seront d'vn mesme poinct F donné au plan GH esleuees perpendiculairement sur iceluy plan : Ce qui est contre la 13. pr. 11. Parquoy EF sera perpendiculaire au plan GH. Si donc deux plans esleuez perpendicul. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

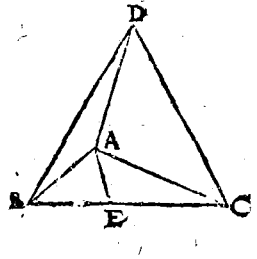


THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, deux d'iceux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisiesme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux d'iceux lesquels on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands ensemble que le troisiesme BAC.

Car si on dit que BAC est plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit fait l'angle BAE egal à l'angle DAB par la 23. prop. 1. & la ligne AE egale à la ligne AD : puis au mesme plan soit menee par E la ligne droicte BC, coupant les lignes AB, AC, en B & C: & tirees les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD du triangle ABD sont egaux aux deux costez



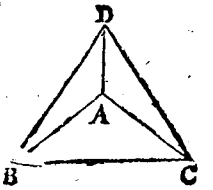
ſtez AB & AE du triangle ABE, chacun au ſien, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux; la baſe DB ſera egale à la baſe BE, par la 4. pr. 1. Item puis que l'on poſe l'angle BAC plus grand que les deux autres BAD, CAD, & que le retranché BAE eſt egal à l'vn d'iceux BAD, le reſte CAE ſera plus grand que l'autre CAD: mais les deux coſtez EA & AC du triangle ACE, ſont egaux aux deux coſtez AD & AC du triangle CAD, & l'angle CAE eſt plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24.p.1. la baſe EC ſera plus grande que la baſe DC: adiouſtant donc les egales EB & DB, les deux CE, EB, c'eſt à dire la toute BC, ſera touſiours plus grande que les deux CD, DB: & partant au triangle ABC le coſté BC eſt plus grand que les deux autres: ce qui eſt contre la 20. pr. 1. Donc l'angle BAC n'eſt point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que ſi on dit qu'il eſt egal, il s'enſuiura par le meſme diſcours que BC eſt egal à BD & CD: ce qui contreuient touſiours à la 20. pr. 1. Il eſt donc plus petit que les deux autres. Parquoy ſi vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle ſolide, ſont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans ſont plus petits que quatre angles droicts.

Car eſtans tirees les trois lignes droictes BC, CD, BD, ſeront conſtituez trois angles ſolides B, C, D, deſquels chacun eſt contenu ſous trois angles plans, ſçauoir B, ſous ABC, ABD, CBD: & C ſous ACB, ACD, BCD: & D ſous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. pr. 11. de chacun d'iceux angles ſolides, deux angles plans leſquels on voudra ſont plus grands que le troiſieſme, les deux angles ABC, ABD, ſeront plus grands que le troiſieſme DBC; & les deux ACB, ACD, ſeront plus grands que le troiſieſme BCD: Item les deux CDA, & BDA, ſont plus grands que BDC: & partant les ſix angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA enſemble, ſeront plus grands que les trois de la baſe triangulaire BCD, c'eſt à dire que deux droicts: (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p.1.) Mais d'autant qu'iceux ſix angles auec les trois qui font l'angle ſolide A, vallent ſix droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce ſont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) ſi on oſte ces ſix-là, qui ſont plus grands que deux droicts; les trois qui font l'angle ſolide A, demeureront plus petits que quatre droicts. Parquoy tous les angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



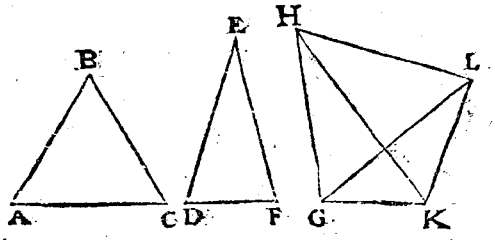
THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſoient plus grands que l'autre, & les lignes droictes compre-

nant iceux, egales; il se peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plans ABC, DEF, GHK contenus de lignes droictes egales BA, BC, ED, EF, HG & HK: deux desquels pris comme on voudra sont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droictes AC, DF, GK, qui conioignent icelles lignes egales, peut estre constitué vn triangle, c'est à dire que deux d'icelles lignes AC, DF, GK de quelque façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisiesme.

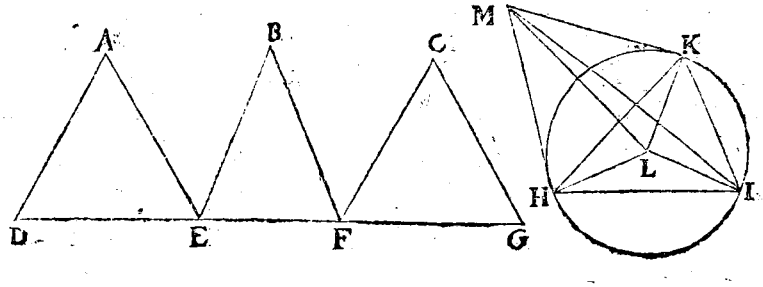
Car premierement si les trois angles B, E, H sont egaux, puis que les lignes qui les contiennent sont egales, par la 4. pr. 1. les bases AC; DF, GK seront egales: & partant deux d'icelles lesquelles on voudra seront ensemble plus grandes que la troisiesme. Mais si lesdits angles proposez sont egaux, puis que deux d'iceux pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme, si on en met deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à GHK on adiouste KHL egal à E par la 23. pr. 1. & ayant fait HL egale à EF on tire LK & GL: l'angle total GHL sera plus grand que le troisiesme ABC, & la base GL par la 24. pr. 1. sera plus grande que la base AC: (car les deux costez sont egaux aux deux costez) & à plus forte raison les deux GK, KL, qui par la 20. pr. 1. sont plus grandes qu'icelle GL, seront plus grandes que la troisiesme AC. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases AC, DF, GK, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisiesme: Partant d'icelles on pourra faire vn triangle par la 22. prop. 1. S'il y-a donc trois angles plans, &c. Ce qui estoit à demonstrer.



PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra sont plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que quatre droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.



Soient posees egales les six lignes droictes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soustenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG,

ſoit fait le triangle HIK, ayant les trois coſtez egaux à icelles baſes DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel ſoit circonſcrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L ſoient menees les trois lignes LH, LI, LK: & apres auoir par la 12. pr. 11. eſleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. ſoit icelle retranchee en ſorte, que ſon quarré auec le quarré de LH, ſoit égal au quarré de l'vn des coſtez d'iceux angles plans: puis ſoient menees les lignes HM, IM, KM: Ie dis que HIMK eſt vn angle ſolide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK eſtans egales, & LM perpendiculaire à icelles: les trois lignes HM, IM, KM, ſeront egales, d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des coſtez des angles plans donnez, elles ſeront egales aux coſtez d'iceux angles plans: puis les trois baſes HI, IK, KH eſtans egales aux baſes des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faiſant l'angle ſolide au poinct M, ſeront egaux aux trois donnez A, B, C. Nous auons donc fait vn angle ſolide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

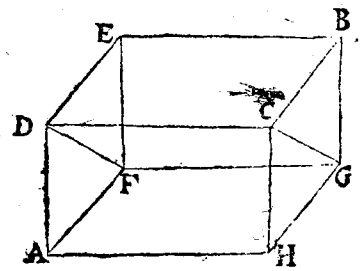
Si quelqu'vn obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas touſiours eſtre retranchée, en ſorte que ſon quarré auec le quarré de LH ſoit egal au quarré de l'vn des coſtez des angles donnez: comme par exemple, ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arriue iamais, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à HL: Car ſi HL & IL eſtoient egaux à AD & AE: & la baſe HI egale à la baſe DE, par la 8. p. 1. (& ainſi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L ſeroient egaux aux trois angles A, B, C, chacun au ſien: ce qui eſt euidemment faux: Car touſiours par hypotheſe les trois angles A, B, C, ſont plus petits que quatre droicts; & par le corol. de la 15. p. 1. les trois au poinct L ſont egaux à quatre droicts.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si vn ſolide eſt compris de plans parallels; les plans oppoſez d'iceluy ſeront parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Soit le ſolide AB compris de ſix plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB: Ie dis que les plans oppoſez ſont parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB ſont parallels, eſtans couppez par les plans AE & HB: les lignes de commune ſection AD, FE ſont paralleles: Item HC & GB, par la 16. prop. 11. par la meſme raiſon les plans AG & DB eſtans parallels, les lignes de commune ſection AF & DE: Item GH & BC ſont paralleles: partant AE & HB ſont parallelogrammes. Par le meſme diſcours AG, DB; AC, FB, ſe prouueront eſtre parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes oppoſites ſont ſemblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, ſont paralleles aux lignes HG, HC, & non en meſmes plans, mais en oppoſez: par la 10. pr. 11. les angles DAF, CHG, ſeront egaux: par meſme raiſon les autres angles du parallelogramme AE, ſeront egaux aux autres angles du



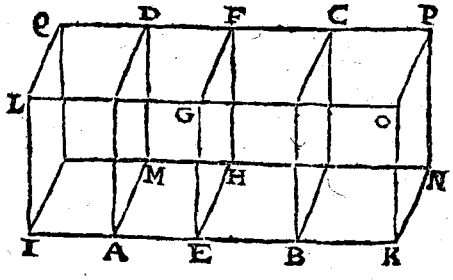
parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC le coſtez AD, HC ſont egaux, comme auſſi les coſtez AF, HG, du parallelogramme AG, comme AD ſera à AF, ainſi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainſi HG à GB, &c. Donc les coſtez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, ſeront proportionaux: & partant ils ſont parallelogram. ſemblables. Maintenant eſtans tirez les diametres DF, CG: veu que les coſtez AD, AF, du triangle ADF, ſont egaux aux coſtez HC, HG. du triangle HCG, & les angles DAF, CHG, auſſi egaux: par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, ſeront pareillement egaux: leſquels eſtans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogrammes ſeront auſſi egaux entr'eux. Par meſme diſcours on demonſtrera les autres parallelogrammes oppoſez AG, DB: AC, FB, eſtre ſemblables & egaux. Si donc vn ſolide eſt compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, les ſolides couppez ſeront l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soit le ſolide parallelipipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux oppoſez AD & BC, & faiſant deux ſolides AF & EC: ie dis qu'iceux ſolides ſeront l'vn à l'autre, comme la baſe AH à la baſe BH.

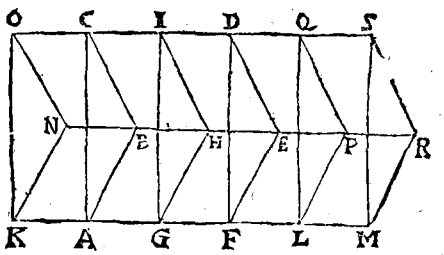
Car la ligne AB eſtant prolongee de part & d'autre, ſoient faites egales AI à AE, & BK à BE, & ſoient accomplis les parallelogrammes IM, & BN: Item les ſolides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, ſont egales, les parallelogrammes IM, AH ſeront auſſi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans oppoſez LD, GD ſeront ſemblables & egaux: Item AL, AG ſemblables & egaux à MQ, MF, plans oppoſez. & ainſi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le ſolide AQ eſt egal au ſolide AF. Par le meſme diſcours le ſolide BP ſera egal au ſolide FB: partant le ſolide IF eſt autant multiplice du ſolide AF, comme la baſe IH eſt multiplice de la baſe AH: Item le ſolide EP eſt autant multiplice du ſolide EC, comme la baſe EN eſt multiplice de la baſe BH: & partant comme la baſe IH ſera plus grande, egale ou plus petite que la baſe AH, ainſi le ſolide IF ſera plus grand, egal, ou plus petit que le ſolide AF. Tout de meſme comme la baſe EN ſera plus grande, egale, ou plus petite que la baſe BH, ainſi le ſolide EP ſera plus grand, egal, ou plus perit que le ſolide EC. Maintenant ſoient quatre grandeurs, les deux baſes AH, BH, & les deux ſolides AF, EC: deſquelles de la premiere & troiſieſme, (ſçauoir de la baſe AH & du ſolide AF) on a pris les equemultiplices HI baſe, & IF ſolide: Item de la ſeconde & quatrieſme, (ſçauoir de la baſe BH, & du ſolide EC) les equemultiplices EN baſe, & EP ſolide, leſquels nous auons monſtré eſtre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles ſoient prinſes: & partant comme la baſe AH à la baſe BH,



ainſi le ſolide AF au ſolide EC. Parquoy ſi vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

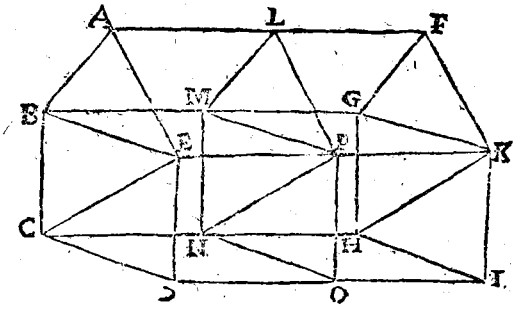
SCHOLIE.

Ceſte propoſ. ſe peut acommoder à tous priſmes: Car ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez: tout ainſi que la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide ſera au ſolide. Car ſoit premierement le priſme ABCDEF, duquel les plans oppoſez ſont les triangles ABC, DEF: & ſoit iceluy couppé par le plan GHI parallel aux plans oppoſez. Ie dis que comme la baſe AI eſt à la baſe FI, ainſi le ſolide ABCIHG eſt au ſolide FEDIHG. Car ſoit imaginé le priſme ABCDEF eſtre prolongé de part & d'autre tant qu'on voudra: & de AF prolongees ſoient priſes AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres, par les poincts G, L, M, ſoient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, ſont couppez par le plan AI: leurs communes ſections AC, GI, ſeront paralleles par la 16. prop. 11. Mais à cauſe que AD eſt parallelog. AG, CI ſeront auſsi paralleles. Donc AI eſt parallelog. Par meſmes raiſons ſeront demonſtrez AH, CH eſtre parallelog. Et pource que les coſtez AC, AB, du triangle ABC, ſont egaux aux coſtez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. prop. 1. AC eſt egal à GI, & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI ſont auſsi egaux: (pource que les lignes AB, AC ſont paralleles aux lignes GH, GI, & en diuers plans) par la 4. prop 1. les triangles ABC, GHI ſont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4. prop. 6. les coſtez d'alentour les angles egaux, ſeront proportionnaux; & partant iceux triangles ſeront ſemblables. Donc le ſolide ABCIHG, contenu des deux plans oppoſez ABC, GHI egaux, & ſemblables, & des parallelog. AI, IB, GB, eſt vn priſme. Par meſme raiſon ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM ſeront priſmes: Et pource que les paralledogrammes AI, KC ſont egaux & ſemblables, comme auſsi AH, KB, & CH, OB; tous les plans du priſme ABCIHG, ſeront egaux & ſemblables à tous les plans du priſme ABCONK. Parquoy par la 10. def. 11, les priſmes ABCIHG, ABCONK ſont egaux. Par meſme raiſon les priſmes GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM ſeront egaux Partant le priſme KNOIHG ſera autant multiple du priſme ABCIHG, que la baſe KI de la baſe AI; & le priſme GHISRM autant multiplice du priſme GHIDEF, que la baſe GS de la baſe GD. Et pource que ſi la baſe KI, (multiplice de la baſe AI premiere grandeur) eſt egale à la baſe GS, (multiplice de la baſe GD 2. grandeur) auſsi le priſme KNOIHG, (multiple du priſme ABCIHG 3. grandeur) eſt egal au priſme GHISRM, (multiple du priſme GHIDEF 4. grandeur:) Mais ſi la baſe KI eſt plus grande que la baſe GS, auſsi le priſme eſt plus grand que le priſme; & ſi moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. def. 5. comme la baſe AI premiere grandeur, ſera à la baſe GD 2. grandeur, ainſi le priſme ABCIHG 3. grandeur ſera au priſme GHIDEF 4. grandeur. En la meſme maniere on demonſtrera que le priſme eſt au priſme, comme la baſe AH eſt à la baſe GE, & comme la baſe CH eſt à la baſe EI. Ce qui eſtoit propoſé.



Soit maintenant le priſme ABCDEFGHIK, duquel les plans oppoſez ſont polygones, c'eſt à ſçauoir pentagones, & ſoit couppé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que comme la baſe CM

eſt à la baſe NG, ainſi eſt le ſolide ABCDELMNOP, au ſolide LMNOPFGHIK. Car ſi les plans oppoſez parallels ſont reſouds en triangles; auſſi le priſme ſera reſoud en autant de priſmes qu'il y aura de triangles és plans oppoſez. Parquoy comme la baſe BP ſera à la baſe MK, ainſi le priſme ABEPML ſera au priſme LMPKGF, par les choſes demonſtrees cy deſſus. En la meſme maniere, comme la baſe CP eſt à la baſe NK, ainſi le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH; & le priſme CDEPNO au priſme NOPKHI. Mais par la 1. prop. 6. comme BP eſt à MK: & CP à NK, ainſi eſt la ligne EP à la ligne PK, c'eſt à dire comme CN eſt à NH, & comme CN eſt à NH, ainſi eſt CM à NG. Donc les priſmes ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG, & partant ont la meſme entr'eux. Mais par la 12. prop. 5. comme vn ſeul eſt à vn ſeul, ainſi ſont les trois aux trois. Donc comme le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH, c'eſt à dire comme la baſe CM à la baſe NG, ainſi le priſme ABCDELMNOP compoſé des trois ſera au priſme LMNOPFGHIK compoſé des trois. Ce qui eſtoit propoſé. Il y aura meſme demonſtration en quelconque autre priſme.



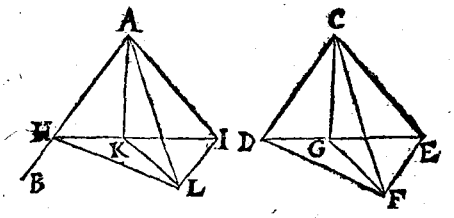
COROLLAIRE.

De cecy reſulte que ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Car il a eſté demonſtré au premier priſme que le triangle GHI eſt egal, & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a meſme demonſtration en tous. Le meſme ſe doit entendre des paralleli-pipedes.

PROBL. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, conſtituer vn angle ſolide egal à vn angle ſolide donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, & le poinct donné en icelle A; & il faut conſtruire ſur icelle AB, & au poinct A, vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.

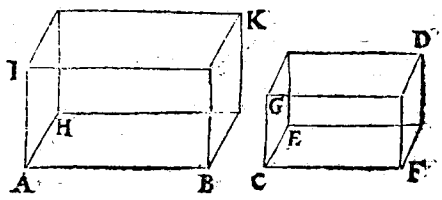


Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. prop. 11. & ſoient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG: en apres ſoit priſe AH egale à CD: & par la 23. pr. 1. ſoit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE; & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, ſoit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG, & la ligne AK egale à la ligne CG: puis par la 12. prop. 11. de K ſoit tiree au plan auquel ſont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL: laquelle ſoit poſee egale à FG, & ſoit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle ſolide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, eſt egal à l'angle ſolide donné C.

Car eſtans menees les lignes HK, KI, IL, LH: veu que les coſtez AH, AK du triangle AHK, ſont egaux aux coſtez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la conſtruction: les baſes HK, DG ſeront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, eſtans oſtez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE: leſquels par la conſtruction ſont compris de lignes egales: par la 4. prop. 1. les baſes KI, GE, ſeront auſſi egales. Les coſtez KH, KL ſont auſſi egaux aux coſtez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts: donc par la meſme 4. prop. 1. les baſes HL, DF, ſeront egales. Parquoy puis que les coſtez AH, AL du triangle AHL, ſont auſſi egaux aux coſtez CD, CF du triangle CDF: (car les coſtez AK, KL, ſont egaux aux coſtez CG, GF, par la conſtruction, & comprenent angles droicts: partant les baſes AL, CF ſont egales par la 4. prop. 1.) les angles HAL, DCF ſeront pareillement egaux par la 8. p. 1. Finalement, pource que les coſtez KI, KL ſont egaux aux coſtez GE, GF: & les angles IKL, EGF droicts; par la 4. pr. 1. les baſes IL, EF ſont egales: partant puis que les coſtez AI, AL du triangle AIL ſont egaux aux coſtez CE, CF du triangle CEF, par la conſtruction, les angles IAL, ECF ſeront auſſi egaux par la 8. p. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, compoſans l'angle ſolide A, ſont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, compoſans l'angle ſolide C; & partant l'angle ſolide A eſt egal à l'angle ſolide C. Parquoy nous auons conſtitué ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipipede donné.



Soit la ligne donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipipede donné CD.

Sur la ligne AB, & au poinct en icelle A, ſoit fait par la prec. vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C, lequel ſoit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH: tellement que HAI ſoit egal à ECG; BAI à FCG; & BAH à FCE: puis par la 12. prop. 6. ſoit fait comme CF eſt à CG, ainſi AB à AI, & comme CG à CE, ainſi AI à AH: & en raiſon egale, AB ſera à AH comme CF à CE. Et ſoient paracheuez les parallelogr BH, HI, BI, BK, KI, KH; qui accompliront le parallelipipede AK. Ie dis qu'iceluy parallelipipede AK eſt ſemblable & ſemblablement poſé au donné CD.

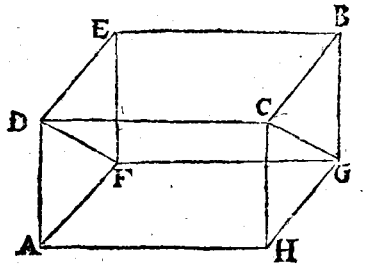
Car d'autant que AB eſt à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI eſt ſemblable au parallelogramme FG: par la meſme raiſon le parallelog. BH ſera ſemblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelogrammes du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement poſez, à trois parallelog. du ſolide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois oppoſez ſont egaux, & ſemblables. Parquoy les ſix plans du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement

poſez aux ſix plans du ſolide CD : & partant par la 9. defin. les ſolides AK & CD ſeront ſemblables & ſemblablement poſez. Nous auons donc ſur vne ligne droicte donnee, deſcrit vn parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan paſſant par les diagonales des plans oppoſez, il ſera couppé en deux egalement.

Soit le ſolide parallelipipede AB couppé par le plan CDFG, par les diagonales des plans oppoſez DF, CG. Ie dis qu'il eſt couppé en deux egalement.

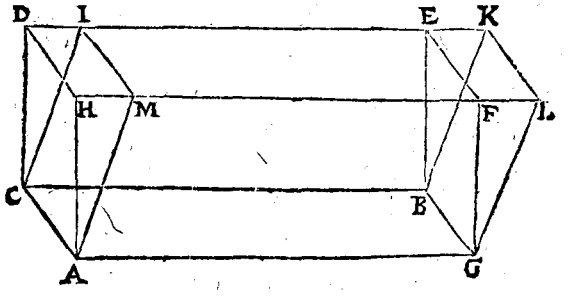


Car puis que les plans AE, HB, ſont parallelogr. egaux & ſemblables par la 34. prop 1. les triangles ADF, EFD, CGH & GCB ſont egaux entr'eux : mais les coſtez qui contiennent les angles egaux DAF, DEF, CHG, & CBG ſont proportionnaux : donc iceux triangles ſeront auſſi ſemblables par la 6. pr. 6. & le plan AG eſt egal & ſemblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ce ſont plans oppoſez.) Partant les deux priſmes ADCHGF, FEBGCD, ſont compris de parallelogrammes, & de triangles oppoſez ſemblables & egaux, & par la 10. def. iceux priſmes ſont egaux. Parquoy puis qu'ils compoſent le parallelipipede AB : iceluy ſera couppé en deux egalement par le plan DCGF. Si donc vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les ſolides parallelipipedes ayans meſme baſe, & meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ſont colloquees en meſmes lignes droictes ; ſont egaux entr'eux.

Soient conſtituez ſur la baſe AB, & en meſme hauteur, les ſolides parallelipipedes ADEG, AIKG, deſquels les lignes inſiſtantes AH, AM, GF, GL ; CD, CI, BE, BK ſont colloquees en meſmes lignes droictes HL, DK. Ie dis que le ſolide ADEG eſt egal au ſolide AIKG. Car d'autant que les parallelogrammes AF, AL conſtituez ſur meſme baſe AG ſont egaux



ent'eux par la 35. p. 1. ſi on en oſte le trapeze commun GM, reſteront egaux les triangles AHM, GFL : Et puis que par la 34. prop. 1. ils ont leurs coſtez egaux, chacun au ſien, ils ſeront equiangles, & partant auſſi ſemblables par la 4. prop. 6. Pour meſmes raiſons les triangles CDI, BEK, ſeront auſſi egaux & ſemblables. Mais par la 24. prop. 11. le parallelog AD eſt egal & ſemblable au parallelog. GE : Item le parallogr. AI au parallelogr. GK. Et par la 36. prop. 1. DM eſt egalà EL ;

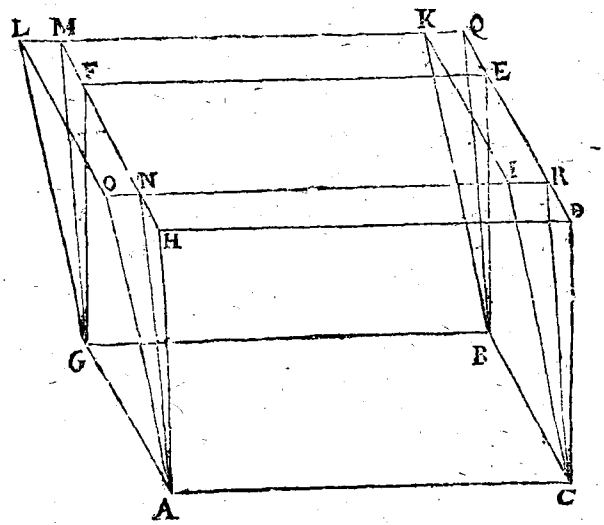
attend u

attendu que leurs baſes HM, FL ſont egales (car HF, ML ſont egales entr'elles, chacune d'icelles eſtant egale à AG; & oſtant MF qui leur eſt commune, reſtent MH, FL egales.) Parquoy les cinq plans du priſme AHMIDC ſont egaux & ſemblables aux cinq plans du priſme GFLKEB: & par la 10. def. 11. leſdits priſmes ſeront egaux: partant ſi on adiouſte à chacun d'iceux priſmes le commun ſolide AMICBEFG, ſeront faits egaux les parallelipipedes ADEG, AIKG. Parquoy les ſolides parallelip. ayans vne meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les ſolides parallelipipedes, conſtituez ſur meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ne ſont colloquees en meſmes lignes droictes; ſont egaux entr'eux.

Sur vne meſme baſe AB, & en meſme hauteur (c'eſt à dire entre meſme plans parallels) ſoient conſtituez les ſolides parallelipipedes CF, CL deſquels les lignes inſiſtentes menees des quatre angles de la baſe AB, ſçauoir AH, AO, GF, GL, CD, CI, BE, BK, ne ſont pas colloquees en meſmes lignes droictes. Ie dis que le ſolide CF eſt egal au ſolide CL.



Car puis que les plans HE, OK oppoſez à la baſe commune AB, ſont en vn meſme plan, à raiſon de la meſme hauteur des parallelipipedes; ſoient prolongees en iceluy plan les lignes HF, DE, iuſques à ce qu'elles rencontrent LK auſſi prolongee en M & Q: ſoit encore prolongee OI, qui rencontre HF & ED en N & R, puis ſoient tirees les lignes droictes AN, GM, BQ, CR. D'autant que les lignes continuees LK, OI ſont paralleles, comme auſſi HF, DE; le quadrilatere NMQR ſera parallelogramme, qui ayant les coſtez oppoſez egaux & parallels, auſſi ANMG, CRQB, ANRC, GMQB, ſeront parallelog. & partant le ſolide CM ſera parallelipipede: & par la prec. prop. il ſera egal au parallelip. CF, puis qu'eſtans conſtituez ſur meſme baſe AB, & de meſme hauteur, les lignes inſiſtantes AH, AN, GF, GM, CD, CR, BE, BQ ſont colloquees en meſmes lignes droictes HM, DQ. Mais pour meſmes raiſons le parallelipip. CM eſt auſſi egal au parallelip. CL, ayans meſme baſe, & les lignes inſiſtantes colloquees en meſmes lignes droictes LQ, OR. Donc le parallelipipede CF ſera egal au parallelip. CL. Parquoy les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On conuertira tant ceſte propoſition que la precedente en ceſte maniere.

Les ſolides parallelipipedes egaux ayans meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtentes ſoient colloquées en meſmes lignes droictes, ou non, ſont de meſme hauteur.

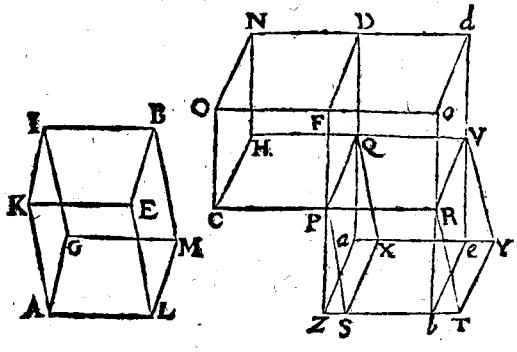
Car ſi l'on dit que l'vn eſt plus haut, ſi d'iceluy on coupe vn parallelipipede de meſme hauteur que l'autre, le coupé & l'autre ſeront egaux, par la 29. ou 30. prop. 11. & puis que ceſt autre eſt poſé egal au tout, le coupé ſera egal au tout. Ce qui eſt abſurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les ſolides parallelipipedes conſtitués ſur baſes egales, & de meſme hauteur, ſont egaux entr'eux.

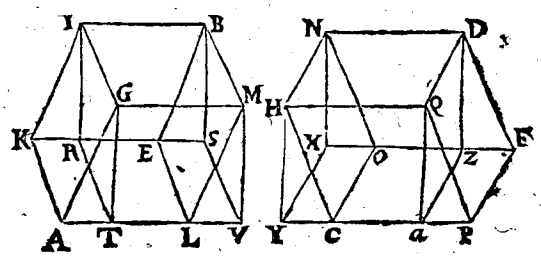
Soient les ſolides parallelipipedes AB, CD conſtituez ſur baſes egales AE & CF, & de meſme hauteur. Ie dis qu'iceux ſolides ſont egaux entr'eux.

Car premierement les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, EB ſoient perpendiculaires à la baſe AE, & les inſiſtentes CH, PQ, ON, FD perpendic. à la baſe CF; toutes leſquelles perpendicul. ſeront egales entr'elles, puis que les parallelip. ſont de meſme hauteur: & apres auoir continué CP iuſques à R, & fait PR egale à KE, au plan de OP prolongé, ſoit fait l'angle RPS egal à l'angle AKE, & fait PS egale à KA: puis ſoit acheué le parallelogr. PM, ſur lequel ſoit conſtruit le parallelip. QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les coſtez PR, PS ſont egaux aux coſtez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelogrammes PT, KL ſeront egaux & ſemblables. Derechef puis que les coſtez PQ, PS ſont egaux aux coſtez KI, KA, & les angles QPS, IKA droicts par la 3. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ ſont poſees perpendiculaires aux plans AE, PT: auſſi les parallelogrammes QS, AI, ſeront egaux & ſemblables. Item les coſtez PR, PQ eſtans egaux aux coſtez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts, par la meſme def. les parallelogrammes PV, KB ſeront auſſi egaux & ſemblables. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelipipede QSTV ſont egaux & ſemblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la 24. prop. 11. tant ceux-là, que ceux-cy ſeront egaux & ſemblables à leurs autres parallelogrammes oppoſez: & partant par la 10. definit. les parallelipipedes AB, SV ſeront egaux entr'eux. Maintenant que EP, TS prolongees ſe rencontrent en Z: & DQ, YX, en *a*, & ſoit acheué le parallelipipede ZV. Item que ND, *e*V prolongees ſe rencontrent en *d*, & OF, *b*R, en *o*, & ſoit acheué le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont meſme baſe PV, & meſme hauteur, & que les lignes inſiſtentes PS, PZ, RT, R*b*: Q*x*, Q*a*, VY, V*e*, ſont colloquees entre meſmes lignes droictes ZT, *a*Y: iceux ſolides ſeront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV eſt demonſtré egal au parallelipipede AB: donc le parallelipipede ZV ſera egal au meſme AB. Et d'autant que par la 35. pr. 1. les parallelogrammes PT, P*b* ſont egaux, & PT egal à AE, auſſi P*b* ſera egal au meſme AE,



c'eſt à dire à CF (car AE, CF ſont poſees baſes egales:) & par la 7. pr. 5. comme CF ſera à P*o*, ainſi P*b* ſera à P*o*: & par la 25. pr. 11. comme la baſe CF eſt à la baſe P*o*, ainſi le ſolide CD eſt au ſolide P*d*, puis que le parallelipipede C*d* eſt couppé par le plan PD parallel aux plans oppoſez CN, R*d*: Semblablement comme P*b* eſt à P*o*, ainſi le ſolide ZV au ſolide P*d*, pour ce que le parallelipipede D*b* eſt couppé par le plan PV parallel aux plans oppoſez F*d*, Z*e*. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipipedes CD, ZV, ſeront egaux, puis qu'ils ont meſme raiſon au ſolide P*d*, ſçauoir eſt la meſme qu'ont les baſes CF, P*b* à la baſe P*o*. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a eſté demonſtré egal au parallelipipede AB: les parallelipipedes AB & CD ſeront pareillement egaux: ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, ſi les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, EB; CH, PQ, ON, FD, ne ſont perpendiculaires, ſur les baſes AE, CF, ſoient tirees des poincts (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il ſera de beſoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & ſur les plans d'audeſſous d'iceux poincts les perpendiculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Q*a*, par la 11. pr. 11. & ſoient tirees RT, SV, XY, Z*a*, pour faire les parallelipipedes ITVB, NY*a*D, leſquels par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus ſeront egaux entr'eux, car ils ſont ſur baſes egales, GB, HD; & de meſme hauteur: Mais par la 29. ou 30. prop. 11. le ſolide ITVB eſt egal au ſolide AB; & le ſolide NY*a*D egal au ſolide CD: donc le ſolide AB ſera egal au ſolide CD. Parquoy les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

On conuertira ceſte 31. prop. en ceſte maniere.

Les ſolides parallelipipedes egaux, conſtituez ſur baſes egales, ſont de meſme hauteur: & les ſolides parallelipipedes egaux, qui ſont en meſme hauteur: ſont ſur baſes egales. s'ils n'ont vne meſme baſe.

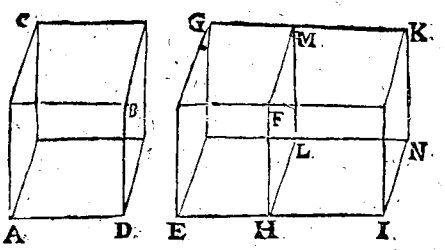
Car ſi on croit l'vn plus haut que l'autre: ſi on couppe du plus haut vn parallelip. de meſme hauteur que l'autre: par la 31. p. 11. le couppé ſera egal à l'autre, auquel eſt auſſi poſé egal le tout: parquoy le couppé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde. Que ſi les parallelipip. eſtans de meſme hauteur, on croit que la baſe de l'vn ſoit plus grande que la baſe de l'autre: ſi d'icelle baſe on en couppe vne egale à l'autre, & ſur icelle couppee on entend eſtre vn parallelipipede de meſme hauteur, lon demonſtrera en la meſme maniere, la partie eſtre egale au tout: Ce qui eſt abſurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les ſolides parallelipipedes de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux parallelipipedes de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquels les baſes ſoient AB, EF. Ie dis que le ſolide eſt au ſolide comme la baſe à la baſe.

Car ſi ſur la ligne HF, (apres auoir prolongé le plan EF vers I) & à l'angle FHI on conſtruit le parallelogramme FI egal au parallelog. AB; puis on acheue le ſolide IFLK; iceluy eſtant de meſme hauteur que le ſolide ABCD, & ſur baſe egale, il luy ſera egal par la 31. pr. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le ſolide IFKL eſt au ſolide EFGH, ainſi le ſolide ABCD eſt au meſme ſolide EFGH. Mais par la 25. prop. 11. le ſolide IFKL eſt au ſolide EFGH, comme la baſe IF, c'eſt à dire AB, à la baſe EF : Donc auſſi le ſolide ABCD, ſera au ſolide EFGH, comme la baſe AB à la baſe EF. Parquoy les ſolides parallelipipedes de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

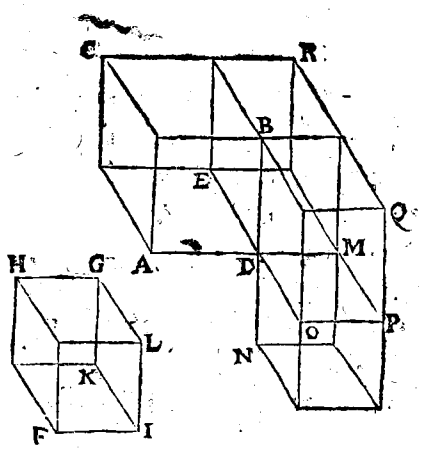
La conuerſe : Si les ſolides parallelipipedes ſont entr'eux comme leurs baſes ; ils ſeront en meſme hauteur. *Car ſi l'vne des hauteurs eſt plus grande que l'autre, de la plus grande en ſoit couppee vne egale à la moindre, & puis ſoit tiré vn plan parallel à la baſe ; & par la 32. p. 11. comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le parallelipipede ſera au parallelipipede couppé : mais ainſi il eſtoit auſſi au parallelipipede total. Donc le couppé eſt egal au tout par la 9. p. 5. Ce qui eſt abſurde.*

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les ſemblables ſolides parallelipipedes, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

Soient deux ſemblables parallelipipedes ABCE, FHGI conſtituez ſur baſes ſemblables AE, FK, eſquelles les coſtez homologues ſont AD, FI. Ie dis que le parallelipipede ABCE eſt au parallelipipede FHGI en raiſon triplee des coſtez homologues AD, FI.

Car ſoit prolongé AD vers M, tellement que DM ſoit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en ſorte que DN ſoit egale à LI ou GK : Item ED vers O, tellement que DO ſoit egale à KI ou GL : puis apres eſtans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO, ſoit acheué le parallelipipede NMP. Il eſt donc euident que les deux parallelipipedes FG, NP ſont ſemblables & egaux, puis qu'ils ſont compoſez de plans qui ont les angles egaux, & les coſtez au long d'iceux angles egaux, auſſi egaux. Item ſoient conſtruits les parallelipipedes BMOQ, & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD, FGHI, ſont ſemblables, comme AD eſt à FI, c'eſt à dire à DM, ainſi DE à KI, c'eſt à dire à DO : & BD à LI, c'eſt à dire à DN. Mais



par la 1. prop. 6. comme AD à DM, ainsi le parallelog. AE au parallelog. EM: & comme ED à DQ, ainsi le parallelog. EM à DP: & comme BD à DN, ainsi le parallelogramme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP & BM à MN. Mais par la 32. prop. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelipipede AECB au parallelip. EMRB: & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelip. EMRB est au parallelipipede DPBQ: & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelip. DPBQ est au parallelipipede NP. Parquoy comme le parallelipipede AECB sera au parallelip. EMRB, ainsi le parallelipipede EMRB sera au parallelip. DPBQ: & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP. Partant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. d. 5. la premiere AECB sera à la quatriesme NP, c'est à dire à FG, en raison triplee de la premiere AECB à la seconde EMRB. Mais par la 32. pr. 11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE est à la base EM: & par la 1. prop. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. pr. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: partant la raison triplee de AECD à EMRB, sera la mesme que de AD à FI: & par consequent AECD estant à FG en raison triplee de AECD à EMRB: il sera aussi en raison triplee de AD à FI. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

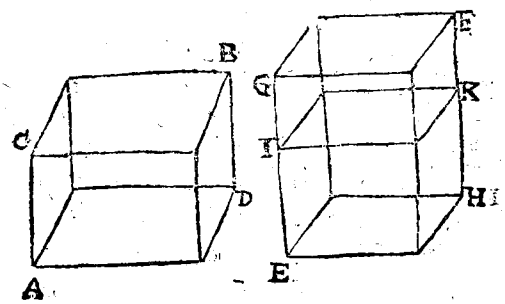
COROLLAIRE.

Par cecy est euident que s'il y a quatre lignes droittes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la quatriesme, ainsi le parallelipipede descrit sur la premiere, est au parallelipipede semblable, & semblablement descrit sur la seconde: Puis que tant le parallelipipede est au parallelipipede, que la premiere ligne à la quarte en raison triplee de la raison de la premiere ligne à la seconde, sçauoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les solides parallelipipedes egaux, ont les bases & les hauteurs reciproques: Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient les parallelipipedes egaux ABCD, EFGH sur les bases AD, EH, desquels les hauteurs sont AC, EG. Ie dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.



Car si les bases AD & EH sont egales, (estans les solides posez egaux) les hauteurs AC, EG seront aussi egales par le schol. de la 31. pr. 11. & partant comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG à la hauteur AC.

Mais si les bases sont inegales, sçauoir AD, plus grande que EH, la hauteur EG sera plus grande que la hauteur CA: car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 31. p. 11. iceux solides seroient l'vn à l'autre cõme leurs bases;

partant AB plus grand que EF, & nous les auons posez egaux: La hauteur EG sera donc plus grãde que CA; & d'iceluy soit retranchee EI egale à CA, & d'iceluy poinct I soit imaginé que le plan IK parallel à EH, couppe le parallelip. EF: Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au solide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'vn à l'autre comme la base AD à la base EH, par la 32. prop. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallelipipede EF est au parallelip. EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. prop. 11. & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1. prop. 6. & partant par la 11. p. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG à EI. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH: Donc par la 11. prop. 5. comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son egale AC.

Pour la seconde partie, si la base AD est à la base EH, comme la hauteur EG est à la hauteur AC. Ie dis que les deux solides AB & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est euident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posees en mesme raison: & partant par la 31. prop. 11, les parallelipipedes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la heuteur EG est plus grande que la hauteur AC d'icelle, soit retranchee EI egale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallele à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont egales: Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK: (car ils sont de mesme hauteur,) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au mesme solide EK, puis que par l'hypothese AD est à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. prop. 5. les solides AB, EF seront egaux. Donc les solides parallelipipedes egaux, ont les bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des solides doiuent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, il les y faudroit reduire, comme nous auons fait à la fin de la 31. prop. de ce liure.

Or toutes les choses que nous auons demonstrees és 6 precedentes propositions, sçauoir és 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, obseruant les susdites hypotheses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, & constituez sur vne mesme base, ou sur bases egales, on appose deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront faits deux parallelipipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesmes, ou egales bases. Parquoy par la 29. 30. ou 31. pr. 11. seront egaux iceux parallelipipedes; & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçauoir les moitiez d'iceux parallelipipedes.

Derechef, si aux deux prismes susdits de mesme hauteur, & constituez sur diuerses bases, on adioinct deux autres prismes egaux, & semblables à iceux, seront faits derechef deux parallelipipedes de mesme hauteur: Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelip. sera au parallelip. comme la base à la base; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçauoir la moitié de l'vn des parallelip. à la moitié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, sçauoir est la moitié d'vne base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

Dauantage, si à iceux deux prismes semblables, on adiouste deux autres prismes egaux &

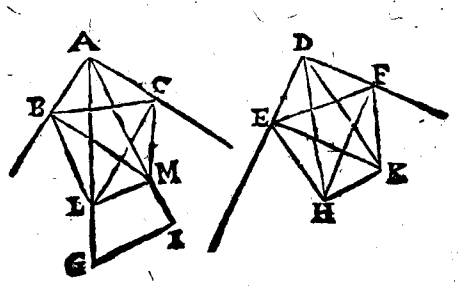
ſemblables à eux, ſeront conſtituez deux parallelip. ſemblables, leſquels par la 33. p. 11. ſeront entr'eux en raiſon triplee des coſtez homologues. Donc auſſi par la 15. pr. 5. les priſmes, ſçauoir eſt les moitiez d'iceux, auront la raiſon triplee de meſmes coſtez homologues, leſquels ſont pareillement coſtez homologues des priſmes.

Finalement, ſi aux deux ſuſdits priſmes egaux, on adiouſte deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront conſtituez deux parallelip. egaux de meſme hauteur que les priſmes: Parquoy par la 34. pr. 11. puis que les baſes, & les hauteurs des parallelip. ſont reciproques, & les baſes des priſmes ſont les meſmes, ou les triangles moitiez d'icelles, ayant meſme raiſon par la 15. p. 5. auſſi les baſes & les hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux, aux ſommets deſquels ſoient leuees en l'air deux lignes droictes faiſant angles egaux auec les lignes des angles premierement poſez, chacun au ſien; & d'vn poinct pris au haut de chacune d'icelles deux lignes eſleuees ſont menees des lignes perpendiculaires aux plans eſquels ſont les angles premierement poſez, & des poincts où tombent icelles perpendiculaires ſont tirees des lignes droictes vers les ſommets des angles premierement poſez: Les angles que font icelles lignes, auec les leuees en l'air ſont egaux entr'eux.

Soient deux angles plans egaux BAC, EDF, des ſommets deſquels A & D, ſoient leuees en l'air les lignes droictes AG, DH, tellement que l'angle BAG ſoit egal à l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH: & des poincts G & H pris és lignes AG, DH, ſoient tirees aux plans eſquels ſont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, deſquels ſoient menees les lignes IA, DK. Ie dis que les angles GAI, HDK, ſont egaux entr'eux.



Car ſi les deux lignes AG, DH ſont inegales, de la plus grande AG, ſoit retranchee AL egale à DH: & de L au plan du triangle AGI, ſoit tiree LM parallele à GI: laquelle LM ſera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que GI eſt perpendiculaire à iceluy plan. Soient auſſi tirez des poincts M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF: & ſoient menees les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM eſt perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le ſera auſſi à la ligne AM tiree au meſme plan par la 3. def. 11. partant par la 47. prop. 1. le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AM, ML: mais par la meſme prop. le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AC, CM, puis que l'angle ACM eſt droict par conſtruction. Donc le quarré

de AL eſt egal aux quarrez de AC, CM, ML : Et par la 47. prop. 1. le quarré de CL eſt egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 3. d. de ce liure, l'angle CML eſt droict. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL eſt droict. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AM, ML : & le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM eſtant droict par la conſtruction : le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BM, ML : mais le quarré de BL eſt egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML eſt droict par la 3. def. 11. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BL : & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL ſera droict. On demonſtrera en la meſme maniere que les angles DFH, DEH ſont auſſi droicts. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, eſtans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4. pr. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droicts : Donc auſſi les autres angles BMC, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE ; & partant puis que les coſtez BC, EF, ont eſté demonſtrez egaux ; les coſtez BM, MC, ſeront egaux aux coſtez EK, FK, par la 26. prop. 1. veu donc que les coſtez AC, CM, du triangle ACM ſont egaux aux coſtez DF, FK, du triangle DFK, & les angles ACM, DFK ſont droicts, par la 24. prop. 1. les baſes AM, DK ſeront egales. Et puis que BL, EH ont eſté demonſtrées egales, leurs quarrez ſeront auſſi egaux. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL eſt egal au quarré de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, KH, pource que les angles BML, EKH ſont droicts, par la 3. def. 11. Donc les quarrez de BM, ML ſeront egaux aux quarrez de EK, KH : & partant eſtans oſtez les quarrez de BM, EK, qui ſont egaux, les lignes BM, EK, ayant eſté demonſtrees egales, reſteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes LM, HK ſeront egales. Parquoy veu que les coſtez AL, AM du triangle ALM, ſont egaux aux coſtez DH, DK du triangle DHK, & la baſe LM egale à la baſe HK ; les angles LAM, HDK ſeront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

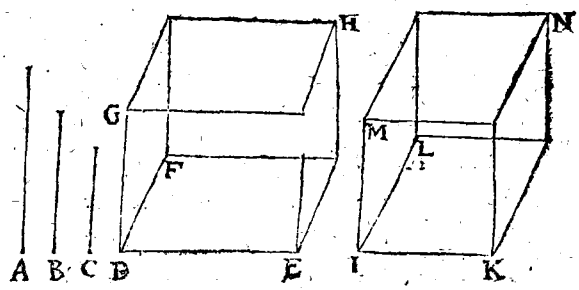
Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, és ſommets deſquels ſoient eſleuees en l'air des lignes droictes egales, leſquelles auec les lignes d'iceux angles premierement poſez, contiennent angles egaux, chacun au ſien : les perpendiculaires tirees des poincts extremes d'icelles lignes eſleuees en l'air, ſur les plans des angles premierement poſez, ſeront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, ſont poſez egaux, & les lignes egales AL, DH eſleuees en haut conſtituent les angles egaux LAB, HDE ; Item LAC, HDF, il a eſté demonſtré que les perpendiculaires LM, HK, ſont egales entr'elles.

THEOR.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droictes ſont proportioneles; le ſolide parallelipipede conſtitué d'icelles trois lignes, eſt egal au ſolide parallelipipede fait de la moyenne, pourueu qu'iceux deux ſolides ſoient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportioneles A, B, C: & ſoit conſtitué vn angle ſolide D, de trois quelconques angles plans EDF, EDG, FDG, tellement que la ligne DE ſoit egale à la ligne A, DG à B, & DF à C: & ſoit accomply le parallelipipede DH: en apres, par la 26. pr. 11. ſur la ligne IK egale à B, & au poinct I ſoit fait l'angle ſolide I des trois angles plans KIL, KIM, & MIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que chacune des lignes IK, IL, IM ſoit egale à la moyenne B; & ſoit parfait le parallelipipede IN. Ie dis que les ſolides DH, IN ſont egaux.



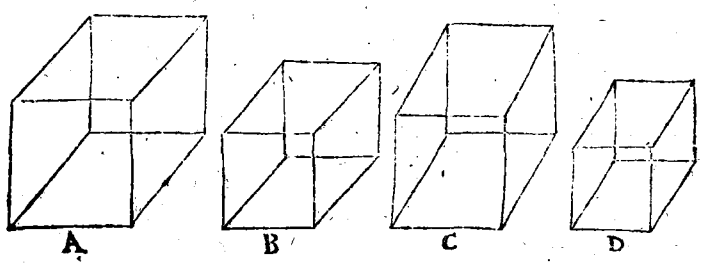
Car puis que comme DE eſt à IK, ainſi IL à DF: (car DE eſt egale à A; IK, IL à B; & DF à C,) & les angles EDF, KIL egaux, les parallelog. EF, KL ſeront egaux par la 14. prop. 6. pource qu'ils ont les coſtez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux ſommets des angles plans egaux EDF, KIL ſont eſleuez en l'air les lignes egales DG, IM, leſquelles auec les lignes des angles premierement poſez comprennent angles egaux, vn chacun au ſien: les perpendiculaires tirees de G, M, ſur les plans des baſes EF, KL; (ſçauoir eſt les hauteurs des parallelip. DH, IN) ſeront egales entr'elles par le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. prop. 11. les parallelip. DH, IN, ſeront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les baſes EF, KL egales, & pareillement les hauteurs egales. Parquoy ſi trois lignes droictes ſont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droictes ſont proportioneles; les ſolides parallelipipedes ſemblables, & ſemblablement deſcrits ſur icelles, ſeront auſſi proportionaux: Et ſi quatre ſolides parallelipipedes ſemblables & ſemblablement poſez ſont proportionaux; les quatre lignes droictes, ſur leſquelles ils ſeront deſcrits, ſeront auſſi proportioneles.

Soient quatre lignes droictes proportioneles A, B, C, D: & ſoient deſcrits ſur icelles quatre ſolides ſemblables & ſemblablement poſez A, B, C, D. Ie dis qu'iceux ſolides ſont proportionaux.

Car puis que le ſolide A eſt ſemblable au ſolide B: par la 33. prop. 11. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B: pareillement les ſolides C & D ſeront auſſi en raiſon triplee de C à D: mais la raiſon de A à B, eſt comme de C à D par l'hypotheſe. Donc la raiſon triplee de A à B, ſera ſemblable à la raiſon triplee de C à D; & partant par la 11. prop. 5. le ſolide A ſera au ſolide B, comme le ſolide C au ſolide D.



Maintenant, ſi les quatre ſolides A, B, C, D, ſemblables & ſemblablement deſcrits ſur les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſont proportionaux. Ie dis que la ligne A ſera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car le ſolide A ſera au ſolide B, en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B par la 33. pr. 11. Item le ſolide C au ſolide D, en raiſon triplee de C à D: mais le ſolide A eſt au ſolide B comme le ſolide C au ſolide D: partant leur raiſon triplee ſera ſemblable; & par conſequent les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſeront proportioneles. Parquoy ſi quatre lignes droictes ſont proportioneles, &c. Cequ'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement, ſi trois lignes droictes ſont proportionelles, les parallelipip. ſemblables & ſemblablement deſcrits ſur icelles ſeront ptoportionaux; & ſi trois ſolides ſemblables, &c. Car la moyenne ligne eſtant poſee deux fois auec ſon ſolide, les quatre ſolides ſeront proportionaux, comme il a eſté demonſtré. Car puis que le ſolide de la deuxieſme ligne eſt egal au ſolide de la troiſieſme ligne, & la deuxiéme ligne egale à la troiſiéme, la propoſition eſt manifeſte.

Et eſt à notter qu'il n'importe pas que tous les quatre ſolides ſoient ſemblables entr'eux: Car les deux ſolides deſcrits ſur les deux premieres lignes A & B eſtans ſemblables & ſemblablement poſez, il n'eſt pas neceſſaire que les deux autres ſolides deſcrits ſur les deux dernieres lignes C & D ſoient ſemblables & ſemblablement poſez aux deux premiers, ains ſuffit qu'ils le ſoient entr'eux deux, ainſi qu'il eſt euident par la demonſtration cy-deſſus.

Nous adiouſterons icy cét autre theoreme.

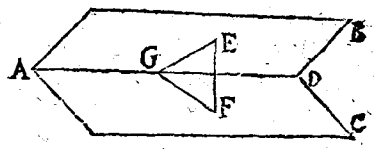
Si quatre lignes droictes ſont continuellement proportioneles: le parallelipipede ayant pour baſe le quarré de l'vne des extrémes, & pour hauteur l'autre extréme, eſt egal au cube de la moyenne proport. plus prochaine de la premiere extréme priſe.

Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Ie dis que le parallelipipede ayant le quarré de l'extréme A pour baſe, & l'autre extréme D pour hauteur, eſt egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extréme A.

Car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A eſt au quarré de B, comme A à C, c'eſt à dire comme B à D: les baſes auec les hauteurs ſeront reciproques, puis que le quarré de A eſt la baſe du parallelipipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy; & la baſe du cube eſt le quarré de B, & ſa hauteur la meſme ligne B. Donc par la 34. prop. 11. le parallelipipede & le cube ſeront egaux. Par meſme raiſon le parallelip. ayant pour baſe le quarré de l'extreme D, & pour hauteur l'autre extreme A, ſera demonſtré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan eſt perpendiculaire à vn autre plan, & d'vn poinct de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire à l'autre, elle tombera ſur leur commune ſection.

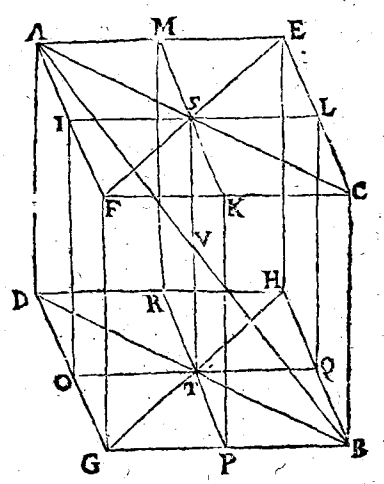


Soit le plan AB perpendiculaire au plan AC, leur ligne de commune ſection AD; & du poinct E pris en AB, ſoit menee vne perpendiculaire au plan AC: ie dis qu'elle tombera ſur la commune ſection AD.

Car qu'elle tombe ailleurs, s'il eſt poſſible, comme au poinct F du plan AC: & par la 12. prop. 1. de F ſoit menee FG perpendiculaire à AD; & la ligne GE faiſant le triangle GFE. Or ſi la ligne EF eſt perpendiculaire au plan AC, par la 3. def. 11. elle le ſera auſſi à la ligne FG: & icelle FG eſtant perpendiculaire à la commune ſection AD, par la 4. def. elle le ſera pareillement au plan AB: & par conſequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles ſur la ligne GF ſeroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E au plan AC ne tombera pas hors la commune ſection AD, ains ſur icelle. Parquoy ſi vn plan eſt perpendiculaire à vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, ſont couppez en deux egalement, & on meine des plans par les ſections: la ligne de commune ſection d'iceux plans, & le diametre du ſolide parallelipipede, ſe coupperont en deux egalement.



Soit le parallelipipede AB; les plans oppoſez AC, BD, deſquels tous les coſtez ſoient couppez en deux egalement és poincts I, K, L, M, O, P, Q, R, par leſquels ſoient imaginez paſſer les plans IQ, KR, ſe couppans l'vn l'autre en la ligne ST: & ſoit menee la diagonale AB: Ie dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entrecouppent en deux egalement.

Car eſtans tirees les lignes SA, SC, TD, TB: ſoient conſiderez les deux triangles BQT, DOT, deſquels les deux coſtez BQ, QT ſont egaux aux deux coſtez DO, OT, (car BQ, DO, ſont moitiez des lignes droictes egales BH, DG: & par la 34. pr. 1. QT, OT, ſont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO ſont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. prop. 1. eſt egal à l'interne DOT: partant par la 4. prop. 1. les baſes BT, DT ſeront auſſi egales: & les angles BTQ, DTO pareillement egaux: & par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO ſont egaux à deux droicts. Donc auſſi

DTO, BTO ſont egaux à deux droicts: & partant par la 14. pr. 1. BT, DT conſtituent vne ſeule ligne droicte. En la meſme maniere ſera demonſtré que AS, CS ſont egales, & compoſent vne ſeule ligne droicte. Maintenant puis que l'vne & l'autre AD, BC eſt parallele & egale à FG, à cauſe des parallelogrammes DF, FB: icelles ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioignent les extrémitez d'icelles AD, BC, ſont auſſi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par conſequent AS, BT moitiez d'icelles ſont egales. Mais pource que AC, BD ſont paralleles, les lignes AB, ST ſeront auec icelles en vn meſme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecoupperont en vn poinct, ſçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. pr. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, ſont egaux aux deux angles BTV, BVT, du triangle BTV, & le coſté AS egal au coſté BT: les autres coſtez AV, SV, ſeront auſſi egaux aux autres coſtez BV, TV, chacun au ſien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalement au poinct V. Parquoy ſi les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

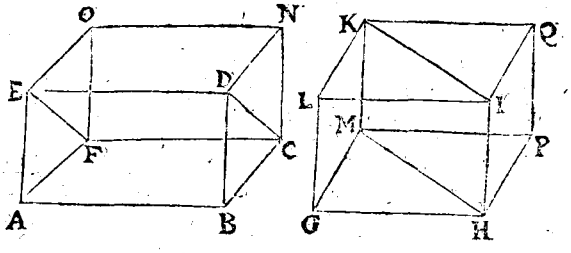
COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident qu'en tout parallelipipede, tous les diametres s'entrecouppent en deux egalement en vn ſeul poinct, ſçauoir eſt au poinct V, auquel ils diuiſent en deux egalement la ligne ST. Eſt auſſi manifeſte que tout plan qui couppe le parallelipipede en deux egalement paſſe par le centre d'iceluy, ſçauoir par V.

THEOR. 35. PROP. XL.

S'il y a deux priſmes d'egale hauteur, l'vn deſquels ait pour baſe vn triangle, & l'autre vn parallelogramme double d'iceluy triangle: iceux priſmes ſeront egaux entr'eux.

Soient deux priſmes d'egale hauteur ABCDEF, GHIKLM: & que celuy-là ait pour baſe le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM baſe du priſme GHIKLM. Ie dis qu'iceux priſmes ſont egaux entr'eux.



Car ſi on les accomplit pour eſtre ſolides parallelipipedes AN, GQ, la baſe GP ſera egale à la baſe BF: & eſtans poſez de meſme hauteur, ils ſeront egaux par la 31. prop. 11. & par la 28. prop. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diuiſeront en deux egalement; & partant les priſmes propoſez eſtans les moitiez de choſes egales, ſeront egaux entr'eux. Parquoy s'il y a deux priſmes d'egale hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnzieſme Element.

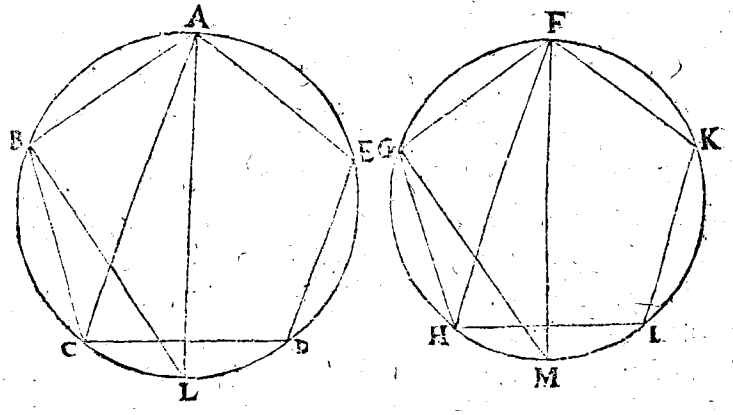
ELEMENT DOVZIESME

THEOR. 1. PROP. 1.

LES polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre comme les quarrez descrits des diametres des cercles.

Soient deux polygones semblables ABCDE & FGHIK, inscrits aux cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Ie dis qu'iceux polygones sont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.

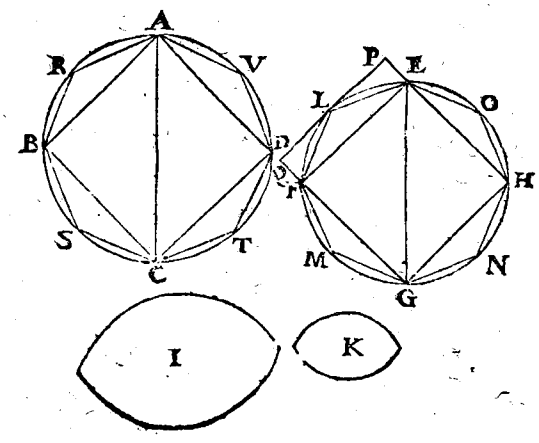
Car soient menees les lignes droictes AC, FH: item BL & GM. D'autant que les pentagones estans semblables, AB est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC egal à l'angle FGH: par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles: partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG. Mais celuy-là est egal à l'angle L, cestuy-cy à l'angle M, par la 21. pr. 3. (car ils sont sur mesmes segmens BA, & FG.) Donc l'angle L sera egal à l'angle M: & par la 31. pr. 3. les angles ABL, FGM estans dans les demy cercles sont droicts & egaux: partant les triangles ABL FGM seront equiangles: (car le troisiesme angle BAL sera egal au troisiesme GFM par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG: & en permutant, comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. prop. 6. comme le pentagone descrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL sera au quarré de FM. Parquoy les polygones semblables inscrits aux cercles, &c. Ce qui estoit à prouuer.



THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles ſont l'vn à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres ſont AC & EG: Ie dis qu'ils ſont l'vn à l'autre comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD ſoit à quelque figure quatriéme proport. comme I, qu'icelle figure I eſt egale au cercle EFGH.



Autrement elle ſera plus petite ou plus grande. Qu'elle ſoit premierement plus petite, s'il eſt poſſible: & ſoit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K: Soit donc dans iceluy cercle EFGH deſcrit le quarré EFGH, qui eſt plus grand que la moitié du cercle: (d'autant que le quarré de EG, qui eſt ſon double, eſt plus grand que le cercle.) Si les quatre ſegmens du cercle ſont moindres que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon ſoit couppé l'arc EF en deux egalement au poinct L, & ſemblablement les trois autres arcs FG, GH, HE, és poincts M, N, O; & ſoient tirees les lignes droictes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, afin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inſcrit au cercle: Il eſt euident que dans les quatre ſegmens egaux, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, eſt plus de la moitié de ſon ſegment: (car par la 41. prop. 1. le triangle Iſoſcele FLE eſt la moitié du rectangle FP de meſme hauteur, & ſur meſme baſe FE, lequel rectangle eſt plus grand que le ſegment FLE.) Soient maintenant les huict petites figures reſtantes plus petites que la figure K: que ſi cela n'eſtoit, il faudroit touſiours couppper les arcs derniers, & touſiours inſcrire des polygones, deſquels le dernier auroit deux fois autant de coſtez que ſon precedent, & ſouſtraire touſiours plus de la moitié de chaque ſegment, ſçauoir ſon triangle Iſoſcele: Il eſt certain que les dernieres portions ſeront en fin plus petites que la figure K. Mais pour abreger ſoient les deuant dites huict portions reſtantes plus petites que la figure K: Il eſt euident que l'octogone ELFMGNHO ſera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K ſont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inſcrit vn octogone ſemblable au cercle AB CD: ce qui eſt facile; car il n'y a qu'à couppper chaque demy circonference ABC, ADC en deux egalement és poincts B & D; puis les circonferences AB, BC, CD, AD auſſi en deux egalement en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV, & VA; il eſt euident que la figure inſcripte ſera ſemblable à la figure octogone deſcrite au cercle EFGH. Maintenant

par la prec. prop. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC est au quarré de EG : mais comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I : & par la 11. prop. 5. comme le poligone ARBSCTDV sera au poligone ELFMGNHO, ainsi le cercle ABCD sera à la figure I : mais le poligone ARBSCTDV est moindre que le cercle ABCD : Donc par la 14. propos. 5. le poligone ELFMGNHO sera aussi moindre que la figure I : mais il a aussi esté demonstré plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

Elle ne peut aussi estre plus grande : Car puis que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I ; en changeant, la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC : mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme K : & par la 14. pr. 5. comme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K : & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD sera à la figure K, comme le quarré de AC est au quarré de EG : ce qui est contre la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous auons demonstré que l'vn des cercles estant à vne figure, en la raison des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle : Partant la figure I ne pouuoit estre plus grande que le cercle EFGH : ny plus petite, comme en la premiere partie : elle estoit donc egale à iceluy. Parquoy les cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres : Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone descrit en celuy-là est au polygone semblable descrit en cestuy-cy. Puis que le cercle est au cercle, & le polygone au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté demonstré és 1 & 2. prop. cy-dessus.

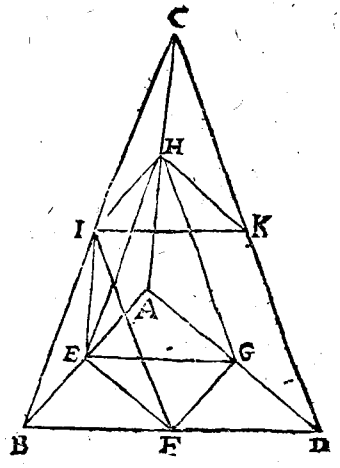
THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD ayant la base triangulaire ABD, & le sommet au poinct C : Ie dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale ABCD : & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié d'icelle pyramide proposee.

Car soient couppez en deux egalement, tous les costez des plans d'icelle pyramide, sçauoir les trois de la base ABD aux poincts E, F, G, & les trois hypothenuses AC, BC, DC aux trois poincts H, I, K, & soient menees les lignes EF, FG,

GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Premierement il eſt euident que toute la pyramide ABDC eſt diuiſee en quatre ſolides, ſçauoir en deux pyramides AEGH, HIKC, dont les baſes ſont les triangles AEG, HIK, & les ſommets H, C: & en deux priſmes BFIHEG, FGDKHI, dont la baſe de celuy-là eſt le quadrangle BEGF, & de celuy-cy le triangle FGD. Or d'autant que les coſtez AB, AC, ont eſté couppez en deux egalement en E & H, par la 2. prop. 6. BC, EH ſeront paralleles: & par meſme raiſon HI eſt parallele à BA: donc le quadrilatere BIHE eſt parallelogramme: & par la 34. pr. 1. HI eſt egale à EB, ou EA ſon egale, & HE à BI, ou IC ſon egale: & par le corol. de la 4. prop. 6. les deux triangles ABC, AEH ſont ſemblables entr'eux. Par meſmes raiſons les deux triangles ABC, HIC ſeront ſemblables entr'eux, & conſequemment auſſi les deux AEH, HIC, par la 21. prop. 6. leſquels ſeront auſſi egaux entr'eux, puis qu'ils ont tous leurs coſtez egaux, chacun au ſien. Par meſmes raiſons le triangle AHG ſera egal & ſemblable au triangle HCK: mais les lignes HE, HG eſtans paralleles aux lignes CI, CK, & ſe touchans en diuers plans, par la 10. p. 11. les angles EGH, ICK ſeront egaux: & les coſtez qui ſont iceux angles eſtans proportionaux, les trois triangles EHG, ICK, BCD ſeront equiangles, & conſequemment ſemblables: comme auſſi les trois AEG, HIK, ABD: Donc par la 9. def. 11. les trois pyramides ABDC, AEGH, HIKC ſeront ſemblables entr'elles: & par la 10. def. les deux dernieres ſeront auſſi egales entr'elles, puis que tous les quatre triangles de l'vne ont eſté monſtrez ſemblables & egaux aux quatre triangles de l'autre.



Or que les deux ſolides BFIHGE, FGDKHI, ſoient deux priſmes egaux, & faiſans enſemble plus de la moitié de la pyramide propoſee ABDC, on le prouuera ainſi, puis que les coſtez des plans d'icelle pyramide ont eſté couppez en deux egalement, & partant proportionnellement, par la 2. prop. 6. les lignes AB, FG ſont paralleles, comme auſſi BD, EG: par ainſi le quadrilatere BEGF eſt vn parallelogr. & par la 9. prop. 11. HG & IF eſtans parallelles à CD, elles le ſont auſſi entr'elles: Donc FIHG eſt vn parallelogramme; comme eſt auſſi BIHE: partant les trois coſtez du triangle BIF ſeront egaux aux trois coſtez du triangle EHG, chacun au ſien: conſequemment iceux triangles ſont equiangles & egaux entr'eux, & partant ſemblables: Mais par la 15. prop. 11. ils ſont auſſi parallels, les lignes BI, FI, eſtans paralleles aux lignes EH, GH. Parquoy le ſolide BFIHGE contenu des deux triangles BIF, EHG egaux ſemblables & parallels oppoſez, & des trois parallelogrammes BEGF, BIHE, FIHG eſt vn priſme par la 13. def. 11. Derechef FD, FG, GD, coſtez de parallelogrammes ſont egaux aux coſtez opoſez IK, IH, HK, chacun au ſien par la 34. pr. 1. & partant les triangles FGD, IHK ſeront egaux & equiangles entr'eux, & conſequemment ſemblables: Mais ils ſont auſſi parallels par la 15. prop. 11. donc le ſolide FGDKHI contenu des deux triangles oppoſez FGD, IHK egaux, ſemblables & parallels, & des trois parallelogr. FIKD, FIHG, GHKD eſt vn priſme; lequel eſtant de meſme hauteur que le priſme BFIHGE (car ils ſont tous

deux

deux entre les plans parallels BEGD, IHK) luy ſera egal par la 40. prop. 11. puis que la baſe quadrangulaire BEGF de celuy-cy eſt double de la baſe triangulaire de celuy-là, par le ſcholie de la 41. prop. 1. Mais il eſt euident qu'iceluy priſme BFIHGE eſt plus grand que la pyramide de meſme hauteur BEFI, qui n'en eſt que partie, la baſe d'icelle BEF n'eſtant que la moitié du parallelogr. BEGF; laquelle pyramide BEFI eſt egale & ſemblable à la pyramide EAGH, comme il eſt manifeſte par l'egalité & ſimilitude de leurs triangles. Parquoy ledit priſme BFIHEG ſera auſſi plus grand qu'icelle pyramide EAGH: Et par conſequēt les deux priſmes BFIHEG, FGDKHI enſemble, ſeront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK enſemble. Mais iceux priſmes & pyramides ſont enſemble la pyramide totale ABCD: donc iceux priſmes eſtans plus grands qu'icelles deux pyramides, ſeront auſſi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

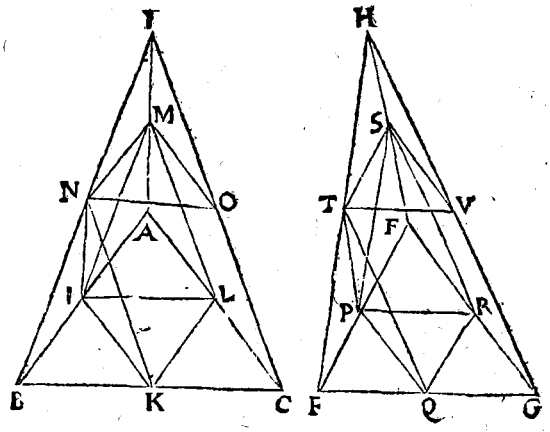
THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, chacune deſquelles ſoit diuiſee en deux autres pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, & en deux priſmes egaux; & que les pyramides prouenues de cette diuiſion ſoient touſiours diuiſees de meſme façon: comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'vne des pyramides, ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de meſme hauteur, chacune deſquelles ſoit diuiſee comme en la precedente propoſition en deux pyramides egales entr'elles & ſemblables à la toute, ſçauoir eſt en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de meſme façon ſoient entendues les pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH eſtre diuiſees; & en continuant touſiours de meſme façon. Ie dis que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes faits en la pyramide ABCD ſont à tous les priſmes faits en la pyramide EFGH, egaux en multitude.

Car puis que comme BC à CK, ainſi FG à GQ; pource que l'vne & l'autre ligne eſt diuiſee en deux egalement, & les triangles ABC, LKC ſont ſemblables & ſemblablement poſez: Item les triangles EFG, RQG par le coroll. de la 4. prop. 6. auſſi comme le triangle ABC ſera au triangle LKC, ainſi le triangle EFG ſera au triangle RQG par la 22. prop. 6. & en permutant, comme ABC à EFG, ainſi LKC à RQG. Mais comme LKC à RQG, ainſi eſt le priſme CKLMNO au priſme GQRSTV, comme nous demonſtrerons incontinent: & partant ainſi auſſi le priſme IBKLMN eſt au priſme PFQRST, puis que ceux-cy ſont egaux à ceux-là: Et

comme vn ſeul priſme, ſçauoir IBKLMN eſt à vn ſeul priſme PFQRST, ainſi ſont les deux priſmes enſemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux priſmes enſemble PFQRST, GQRSTV par la 12. prop. 5. Donc auſſi comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi les deux priſmes en la pyramide ABCD ſeront aux deux priſmes en la pyramide EFGH. Nous demonſtrerons en la meſme maniere, deux priſmes és pyramides AILM, MNOD, faites en la pyramide ABCD, eſtre à deux priſmes és pyramides EPRS, STVH, faites en la pyramide EFGH, comme ſont les baſes AIL, MNO de ces pyramides là aux baſes EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainſi continuellement, tant que la meſme diuiſion ſera faite. Mais comme ces baſes là ſont à celles-cy, ainſi la baſe LKC, qui eſt egale & ſemblable à celles-là, eſt à la baſe RQG, qui eſt egale & ſemblable à celle-cy, c'eſt à dire ainſi la baſe ABC eſt à la baſe EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi les priſmes de quelconque pyramide faite en la pyramide ABCD, ſeront aux priſmes de quelconque pyramide faite en la pyramide EFGH: & partant auſſi comme les priſmes de la pyramide ABCD ſeront aux priſmes de la pyramide EFGH, ainſi ſeront tant les priſmes de la pyramide AILM, aux priſmes de la pyramide EPRS, que les priſmes de la pyramide MNOD, aux priſmes de la pyramide STVH; & ainſi continuellement. Parquoy puis que par la 12. prop. 5. comme les deux priſmes de la pyramide ABCD ſont aux deux priſmes de la pyramide EFGH, ainſi tous les priſmes eſtans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes eſtans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. enſemble, ſi ceux cy ſont egaux en multitude à ceux là: pareillement comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi ſeront tous les priſmes de la pyramide ABCD, à tous les priſmes de la pyramide EFGH. Parquoy s'il y a deux pyramides de meſme hauteur, ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



LEMME.

Or que comme LKC eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO ſoit au priſme GQRSTV, nous le demonſtrerons ainſi. Soient imaginees tomber des ſommets D, H, des lignes perpendiculaires ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCDEFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droittes, ſçauoir DC, & la perpendiculaire tombant de D, & DC eſt couppee en deux egalement en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, ſera couppee en deux egalement au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la meſme raiſon la perpendiculaire tombant de H, ſera couppee en deux egalement par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires ſont poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir eſt les hauteurs des priſmes, ſeront auſſi egales: & partant les priſmes CKLMNO, GQRSTV eſtans d'egales hauteurs, ſe-

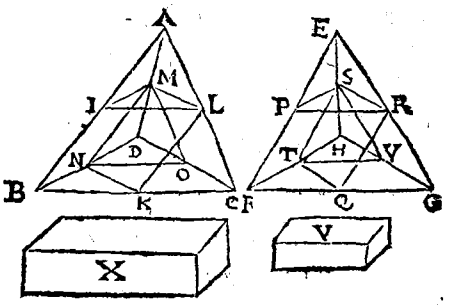
vont entr'eux, comme les baſes LKC, KQG, par les choſes que nous auons demonſtrees au ſcholie de la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquelles les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe.

Autrement, ſoit imaginé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſoit à quelque ſolide, comme X, lequel ſera plus petit ou plus grand que la pyramide EFGH: Et ſoit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du ſolide Y. Ainſi nous imaginons que les deux ſolides X & Y, ſont egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 5. p. 12. on peut diuiſer vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, leſquels ſeront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que ſi de la pyramide EFGH, on retranche plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide reſtante EPRS, STVH, encores plus de la moitié, ſçauoir deux priſmes, en continuant touſiours iuſques à ce que toutes les pyramides reſtantes apres le dernier retranchement, ſoient toutes enſemble manifeſtement plus petites que le ſolide Y: ce qui peut arriuer par la 1. prop. 10. Ainſi tous les priſmes enſemble retranchez de la pyramide EFGH, ſeront plus grands que le ſolide X, puis que le reſte eſt plus petit que le ſolide Y. Pareillement ſoient retranchez autant de fois deux priſmes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché de la pyramide EFGH: il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré en la precedente propoſition, que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH: Mais nous auons poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Or tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſont plus petits qu'icelle pyramide: donc par la 14. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, ſeront auſſi plus petits que le ſolide X: Mais nous les auons tantoſt prouuez plus grands: Ce qui eſt abſurde. Partant le ſolide X n'eſtoit pas plus petit que la pyramide EFGH.



Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible; & puis que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD au ſolide X; en permutant, la baſe EFG ſera à la baſe ABC, comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD. Mais comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD, ſoit poſé la pyramide EFGH eſtre à quelque autre

ſolide, comme Y : Et par la 14. prop. 5. d'autant que le ſolide X eſt poſé plus grand que la pyramide EFGH, auſſi la pyramide ABCD ſera plus grande que le ſolide Y : & par la 11. p. 5. comme la baſe EFG eſt à la baſe ABC, ainſi la pyramide EFGH à vn ſolide plus petit que l'autre pyramide : mais nous auons demonſtré que cela eſtant, il s'enſuit vne abſurdité, ſçauoir que les priſmes retranchez d'vne pyramide, eſtoient plus grands que la pyramide de laquelle ils ſont retranchez : Partant le ſolide X ne peut eſtre plus grand que la pyramide EFGH, ny auſſi plus petit : il ſera donc egal. Parquoy puis qu'il a eſté poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X ; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD eſt au ſolide X, cõme à la pyramide EFGH egale à iceluy ſolide X ; pareillement comme la baſe ABC ſera à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Par la conuerſe : ſi les pyramides triangulaires ſont entr'elles comme leurs baſes ; elles ſeront de meſme hauteur. Car ſi on croit que la hauteur de l'vne ſoit plus grande que l'autre, en ſoit couppee d'icelle vne egale à la moindre, & du poinct de la ſection à tous les angles de la baſe, ſoient tirees des lignes droictes ; & comme la baſe ſera à la baſe, ainſi la pyramide ſera à la pyramide n'agueres conſtituee : mais elle eſtoit pareillement ainſi à toute la pyramide. Donc par la 9 pr. 5. la pyramide conſtituee ſera egale à toute la pyramide ; c'eſt à ſçauoir la partie au tout : ce qui eſt abſurde.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les pyramides de meſme hauteur conſtituees ſur meſme, ou egales baſes triangulaires, ſont egales entr'elles : puis qu'elles ſont en meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſees egales, ou vne ſeule & meſme.

Item il s'enſuit au contraire que les pyramides triangulaires conſtituees ſur vne meſme, ou egales baſes, ſont de meſme hauteur : Et que les pyramides egales, & ayans meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme : leſquelles deux choſes l'on demonſtrera par la premiere partie du corol. par le meſme argument dont nous auons vſé en demonſtrant la conuerſe des 30. & 31. p. 11. ſi tant ſur la hauteur, que ſur la baſe couppee eſt conſtituee vne autre pyramide, &c.

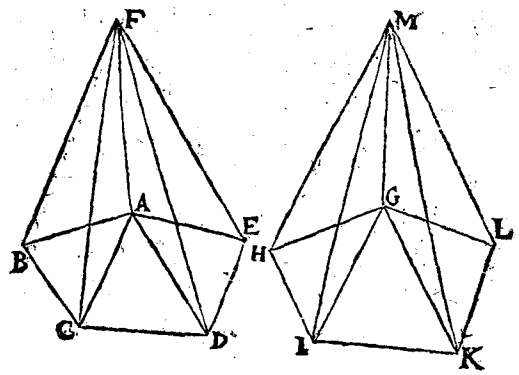
THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soit la pyramide ABCDEF de meſme hauteur que la pyramide GHIKLM, deſquelles les baſes ABCDE & GHIKL ſont polygones : Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi la pyramide eſt à la pyramide.

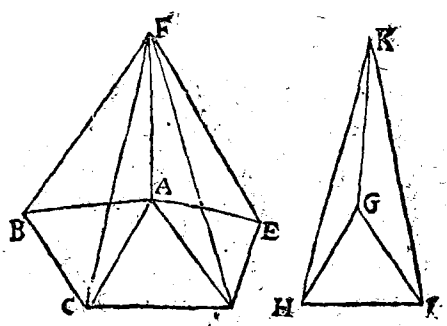
Car les baſes eſtans reduites en triangles ABC, ACD, ADE ; GHI, GIK, GKL : ſoit imaginé ſur chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ACD, ainſi la

pyramide ABEF eſt à la pyramide ACDF; en compoſant, comme la baſe ABCD ſera à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCDF ſera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5. prop. 12. comme la baſe ACD eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ACDF eſt à la pyramide ADEF: Donc en raiſon egale, comme la baſe ABCD eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide ADEF: & partant en compoſant, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe ADE, ainſi la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide ADEF. Par ſemblable argument ſera demonſtré que comme la baſe GHIKL eſt à la baſe GKL, ainſi la pyramide GHIKLM eſt à la pyramide GKLM: & en changeant, comme la baſe GKL eſt à la baſe GHIKL, ainſi la pyramide GKLM eſt à la pyramide GHIKLM. Derechef, puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ADE eſt à la baſe GKL, ainſi la pyramide ADEF eſt à la pyramide GKLM: les 4. baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, ſeront és meſmes raiſons que les quatre pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM: Parquoy en raiſon egale, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe GHIKL, ainſi la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIKLM. Donc les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



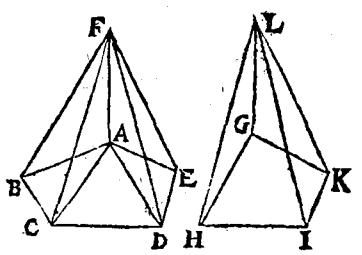
SCHOLIE.

Encore que ſelon pluſieurs Interpretes, il ſoit parlé en la demonſtration de ceſte prop. ſeulement des pyramides de meſme hauteur, deſquelles les baſes polygones ont les coſtez egaux en nombre: toutesfois nous demonſtrerons auſſi le meſme des pyramides de meſme hauteur, la baſe de l'vne deſquelles contient plus de coſtez que la baſe de l'autre. Car ſoient premierement deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIK, la baſe de l'vne deſquelles ſoit polygone, ſçauoir eſt pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe: Car le pentagone eſtant reſoud en triangles, auſſi la pyramide ſera diuiſee en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC premiere quantité eſt à la baſe GHI, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſieſme quantité eſt à la pyramide GHIK quatrieſme quantité. Et en la meſme maniere, comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxieſme quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la 24. p. 5. comme la baſe ABCD premiere & cinquiéme quantité enſemble ſera à la baſe GHI ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité auec la ſixiéme ſera à la pyramide GHIK quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD eſt à



la baſe GHI, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonſtrer: & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ADE cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxiéme quantité, ainſi la pyramide ADEF ſixiéme quantité eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la meſme 24. pr. 5. la baſe ABCDE ſera à la baſe GHI, comme la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: ce qui eſtoit propoſé. En la meſme maniere faudroit touſiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe du polygone. Or puis que comme il a eſté demonſtré, la baſe du polygone ABCDE eſt à la baſe triangulaire GHI, ainſi que la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: pareillement en changeant, comme la baſe GHI ſera à la baſe ABCDE, ainſi la pyramide GHIK ſera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, deſquelles l'vne a la baſe polygone, & l'autre triangulaire, ſont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence: Car encore que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyramide, comme appert par la demonſtration cy-deſſus, toutesfois en changeant, il eſt permis de commencer au triangle & à ſa pyramide, comme il a eſté dict.

Maintenant ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, deſquelles les baſes ſont polygones, & ſont plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre: Ie dis derechef que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe. Car eſtant reſoud le polygone ABCDE és triangles ABC, ACD, ADE: la pyramide ſera diuiſée en autant de pyramides. Et d'autant que comme la baſe triangulaire ABC, premiere quantité, eſt à la baſe polygone GHIK, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité; & comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: auſſi par la 24. prop. 5. comme la baſe ABCD premiere quantité auec la cinquiéme ſera à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité auec la ſixiéme ſera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD premiere quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF tierce quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: & auſſi que comme la baſe ADE quinte quantité, eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ADEF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quarte quantité: pareillement par la 24. propoſit. 5. comme la baſe ABCDE premiere quantité auec la quinte, ſera à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDEF tierce quantité auec la ſixiéme, ſera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: ce qui eſtoit propoſé. Il faudroit touſiours proceder en la meſme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe.



Or nous conuertirons tant ceſte 6. prop. d'Euclide que celle demonſtree en ce Scholie en ceſte maniere.

Les pyramides de quelconques baſes, leſquelles ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere, que les choſes dittes au Scholie de la 5. pr. de ce liure, ont eſté demonſtrées.

COROLLAIRE.

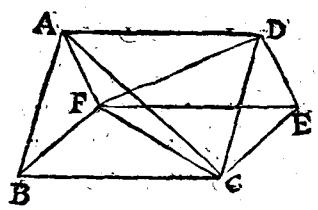
Il appert auſsi que les pyramides de meſme hauteur, conſtituées ſur baſes egales multilateres, ou ſur vne meſme, eſtre egales entr'elles: puis qu'elles ont meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſees egales, ou vne meſme.

Derechef, eſt euident que les pyramides multilateres egales, & conſtruites ſur baſes egales, ou ſur vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans meſme hauteur, ont auſsi les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme. Ce qui ſe peut demonſtrer comme nous auons dict au coroll. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout priſme ayant la baſe triangulaire peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires

Soit le priſme ABCDEF duquel les deux triangles oppoſites ABF, DCE ſont egaux & ſemblables. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires.



Car aux trois parallelogrãmes d'iceluy priſme, ſoient menés les trois diametres AC, CF, FD: d'autant que par la 34. prop. 1. les triangles ABC, ADC ſont egaux, & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ADC, ainſi eſt la pyramide ABCF à la pyramide ADCF, (car elles ont vne meſme hauteur, ſçauoir eſt la perpendiculaire menee du ſommet F au plan BCD) icelles pyramides ſeront egales entr'elles. Par meſme raiſon ſeront egales les pyramides ADFC, EFDC, conſtituees ſur les baſes egales ADF, EFD, & ſous meſme hauteur, ſçauoir de la perpendiculaire menee du ſommet C ſur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF eſt la meſme que la pyramide ADFC: puis que l'vne & l'autre eſt contenue des quatre plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Parquoy tout priſme ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

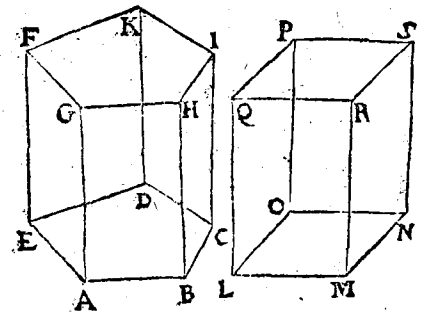
De cecy reſulte que tout priſme eſt triple d'vne pyramide de meſme hauteur, eſtant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales, ou bien qu'vne pyramide eſt la tierce partie d'vn priſme de meſme hauteur, eſtant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons icy la demonſtration d'vne autre propoſition, touchant les priſmes qui ont au ſommet les plans parallels à la baſe, egaux & ſemblables: ceſte propoſition eſt telle.

Les priſmes eſtans ſous meſme hauteur, & ayans quelconques baſes, ſont entr'eux comme leur baſes.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, desquels les bases sont figures multilateres. Ie dis que comme la base ABCDE est à la base LMNO, ainsi est le prisme au prisme. Car si de tous les angles de chaque base on tire des lignes droictes à vn poinct du plan superieur, qui est opposé à la base, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme: Et partant par le corollaire cy-dessus, chaque pyramide sera la troisiéme partie de son prisme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme: Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté demonstré à la 6. prop. de ce liure. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

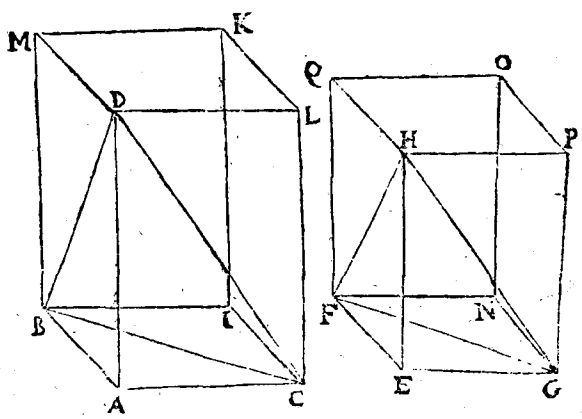
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & constituez sur mesme base, ou sur bases egales quelles qu'elles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont vne mesme, ou bien sont egales.

Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, constituez sur vne mesme base, ou sur egales sont en mesme hauteur: Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere qu'a esté demonstré la conuerse de la 31. prop. 11.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient deux pyramides semblables ABCD & EFGH, ayans bases triangulaires ABC & EFG: Ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison AC & EG. Car soient acheuez les parallelipipedes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois angles plans de l'angle solide A, (sçauoir DAC, DAB, BAC) seront egaux aux trois angles plans de l'angle solide E, (sçauoir HEG, HEF, FEG) & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionaux; tellement que comme DA est à AC, ainsi HE est à EG; & comme DA est à DB, ainsi HE est à EF; & comme BA est à AC,

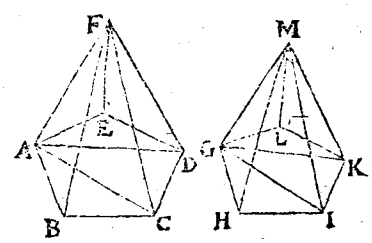


ainſi FE eſt à EG: Parquoy les trois parallelogrammes AL, AM, AI ſeront ſemblables aux trois parallelog. EP, EQ, EN. Mais par la 24. prop. 11. tant les trois AL, AM, AI du parallelipipede AK ſont egaux & ſemblables aux trois oppoſez BK, CK, ML; que les trois EP, EQ, EN du parallelipipede EO, le ſont aux trois oppoſez QN, PN, HO: & partant les ſix plans du parallelelipipede AK ſont ſemblables aux ſix plans du parallelip. EO. Et par la 9. def. 11. iceux parallelipipedes ſont ſemblables. Donc par la 33. prop. 11. ils ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homologues AC & EG. Mais par la 15. prop. 5. comme le parallelipipede AK eſt au parallelip. EO, ainſi la pyramide ABCD eſt à la pyramide EFGH: (car chacune d'icelles pyramides eſt la ſixieſme partie de ſon parallelipipede, puis que chaque parallelipipede peut eſtre diuiſé en deux priſmes egaux par la 38. prop. 11. & chacun priſme en trois pyramides egales par la prec. prop.) donc par la 11. prop. 5. leſdites pyramides ABCD, EFGH, ſont auſſi en la raiſon triplee des meſmes coſtez AC & EG. Parquoy les pyramides ſemblables ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'auſsi les pyramides ſemblables, deſquelles les baſes ont plus de trois coſtez, ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

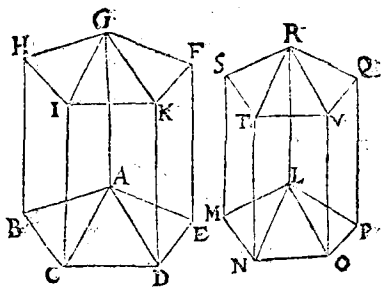
Soient les pyramides ſemblables ABCDEF, GHIKLM, ayans baſes rectilignes ſemblables de pluſieurs coſtez. Ie dis qu'icelles pyramides ſont en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH. Car ſi des angles A & G, on tire aux angles oppoſez les lignes droictes AC, AD: GI, GK: par la 20. prop. 6. les baſes ſemblables ſeront diuiſees en nombre egal de triangles ſemblables, ſçauoir eſt que les triangles ABC, ACD, ADE, ſeront ſemblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides ſont ſemblables, les triangles AFB, GMH, ſont ſemblables, & l'angle FAB, egal à l'angle MGH; & comme FA ſera à AB, ainſi MG ſera à GH: mais comme AB à AC, ainſi GH à GI, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: donc en raiſon egale, comme FA ſera à AC, ainſi MG ſera à GI. Derechef, puis que comme AC eſt à CB, ainſi GI eſt à IH, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: & comme CB à CF, ainſi IH à IM, car à cauſe de la ſimilitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, ſont ſemblables: auſsi en raiſon egale, comme AC ſera à CF, ainſi GI ſera à IM: & partant puis que comme FA à AC, ainſi MG à GI; & comme AC à CF, ainſi GI à IM: pareillement en raiſon egale, comme FA ſera à FC, ainſi MG à MI. Parquoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC, GMI, ſeront equiangles, & partant ſemblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC ſont auſsi ſemblables aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. def. 11. les pyramides ABCF, GHIM, ſont ſemblables. Par meſme raiſon ſeront ſemblables les pyramides ACDF, GIKM: Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. prop. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, ſeront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne, en raiſon triplee des coſtez homologues AB, CD, DE, à GH, Ik, kL, chacun au ſien. Veu donc qu'à cauſe de la ſimilitude des baſes ABCDE, GHIKL, il y a vne ſeule & meſme raiſon de AB, CD, DE à GH, Ik, kL: auſsi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, vn



ſeule & meſme raiſon, c'eſt à ſçauoir triplee. Et par la 12. prop. 5. comme vne ſeule pyramide ABCF eſt à vne ſeule pyramide GHIM, ainſi toutes les pyramides, ſçauoir eſt la pyramide ABCDEF, eſt à toutes les pyramides, ſçauoir à la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. prop. 12. la pyramide ABEF eſt à la pyramide GHIM en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH; auſſi la pyramide ABCDEF ſera à la pyramide GHIKLM en la raiſon triplee des meſmes coſtez homologues AB, GH: Ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon les priſmes ſemblables ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues. Car ſoient deux priſmes ſemblables ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV: Ie dis qu'ils ſont en raiſon triplee des coſtez homologues. Car ſi des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO; par la 20. prop. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, ſeront ſemblables aux triangles LMN, LNO, OPL. ſemblablement, ſi des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV; les triangles GHI, GIK, GKF, ſeront auſſi ſemblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux ſuſdits, puis que par la def. du priſme, tous les plans oppoſites des priſmes ſont ſemblables. Et d'autant qu'à cauſe de la ſimilitude des priſmes, les parallelogrammes CH, NS ſont ſemblables, comme CI ſera à CB, ainſi TN ſera à NM: mais comme BC eſt à CA, ainſi NM eſt à NL, à cauſe de la ſimilitude des triangles. Donc en raiſon egale, comme CI ſera à CA, ainſi TN à NL. Derechef, pource que l'angle ſolide N, eſt egal à l'angle ſolide C, à cauſe de la ſimilitude des priſmes, ſi celuy-cy eſt ſuperposé à l'autre, l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais auſſi la ligne droicte NL conuient à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA ſont egaux. Donc les angles ICA, TNL ſont egaux; & partant puis que les coſtez d'alentour iceux, ont eſté demonſtrés proportionaux, les parallelogrammes CG, NR, ſeront ſemblables. Mais auſſi les parallelogrammes CH, HA, ſont ſemblables aux parallelogrammes NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les priſmes ABCIGH, LMNTRS, ſont ſemblables, par la 8. def. 11. On demonſtrera en la meſme maniere que les priſmes CDAGIK, NOLTRV, ſont ſemblables, comme auſſi les priſmes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les priſmes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF par les choſes demonſtrees à la 34. prop. 11. ſont aux priſmes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au ſien, en raiſon triplee des coſtez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP; chacun au ſien. Et partant en la meſme maniere que nous auons demonſtré cy-deſſus des pyramides multangles, on demonſtrera que les priſmes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, ſont en raiſon triplee des coſtez homologues BC, MN.



De toutes ces choſes ſe collige, que les pyramides multangles ſemblables, ſe diuiſent en pyramides triangulaires ſemblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Ce qui eſt manifeſte par la demonſtration du preced. corollaire.

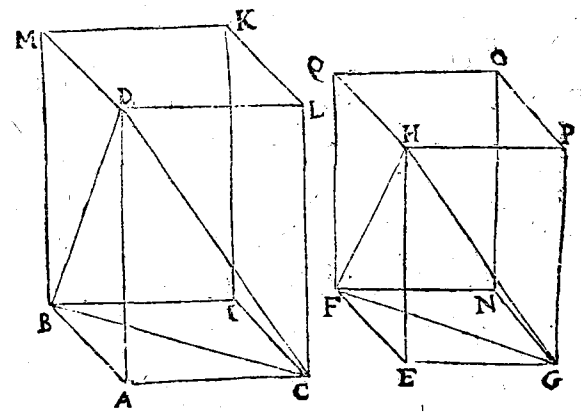
Il ſe collige auſſi que les priſmes multangulaires ſemblables, ſe diuiſent en priſmes ſemblables, ayans baſes triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonſtration de ſe ſcholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales ayans baſes triangulaires, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les pyramides ayans baſes triangulaires reciproques à leurs hauteurs, ſont egales.

Soient les pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans baſes triangulaires: ie dis que les baſes d'icelles ſont reciproques à leurs hauteurs, c'eſt à dire que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la hauteur du poinct H à la hauteur du poinct D.

Car ſoient acheuez les parallelipipedes AK, EO; & comme il a eſté dit en la prop. precedente, chacun d'iceux parallelipipedes ſera ſextuple de ſa pyramide. Et les deux pyramides eſtans egales, iceux ſolides AK, EO, ſeront egaux: & par la 34. prop. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux baſes. (C'eſt à dire que comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainſi la baſe EN à la baſe AI) Mais comme EN eſt à AI, ainſi le triangle EFG (moitié de EN) eſt au triangle ABC; (moitié de AI) & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du poinct D eſt à la hauteur du poinct H, ainſi le triangle EFG eſt au triangle ABC.

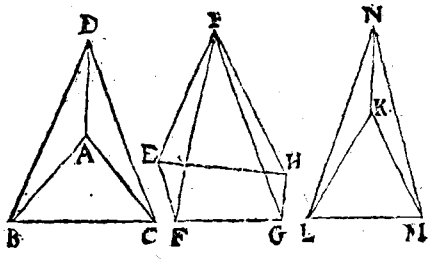


Pour la ſeconde partie: Si la hauteur du poinct D eſt à la hauteur du poinct H, comme le triangle EFG eſt au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH ſeront egales. Car il eſt euident comme cy deſſus que la hauteur du poinct D, ſera à la hauteur du poinct H, comme la baſe EN à la baſe AI: (d'autant qu'elles ſont doubles des triangles EFG & ABC) ainſi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux baſes: & par la 34. prop. 11. ils ſeront egaux; & par conſequent leurs ſixieſmes parties ſeront auſſi egales, ſçauoir les pyramides ABCD, & EFGH: Parquoy, des pyramides egales ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

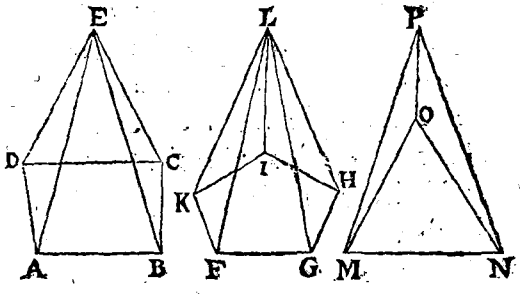
Les pyramides egales, deſquelles les baſes ne ſont triangulaires, ont auſſi les baſes & hauteurs reciproques: & les pyramides deſquelles les baſes ne ſont triangulaires, & ont leurs baſes reciproques à leurs hauteurs, ſont egales. Car ſoient premierement deux pyramides egales, l'vne deſquelles ABCD ait la baſe triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la baſe non triangulaire EFGH; puis ſur iceluy triangle ſoit conſtruite la pyramide KLMN, de meſme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les baſes egales, & meſme hauteur; elles ſeront egales, par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 6. prop. 12. Mais la pyramide EFGHI a eſté poſee egale à la pyramide ABCD; donc auſſi les pyramides ABCD, KLMN ſeront egales: Parquoy

puis qu'elles ont les baſes triangulaires, par la 9. prop. 12. comme la baſe ABC ſera à la baſe KLM, ou à ſon egale EFGH, ainſi la hauteur de la pyramide KLMN, c'eſt à dire la hauteur de la pyramide EFGHL, ſera à la hauteur de la pyramide ABCD: & partant des pyramides egales ABCD, EFGHI, les baſes & hauteurs ſont reciproques.



Mais maintenant d'icelles pyramides, les baſes & hauteurs ſoient reciproques: ie dis qu'icelles pyramides ſont egales. Car demeurant la meſme conſtruction faite cy-deſſus; puis que la baſe ABC eſt poſee eſtre à la baſe EFGH, comme la hauteur de la pyramide EFGHI à la hauteur de la pyramide ABCD; auſſi la baſe ABC ſera à la baſe KLM, comme la hauteur de la pyramide KLMN ſera à la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides ABCD, KLMN, ſont egales. Mais comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 6. prop. 12. la pyramide KLMN eſt egale à la pyramide EFGHI: donc auſſi la pyramide ABCD ſera egale à la pyramide EFGHI. Ce qui eſtoit propoſé.

Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FGHIKL, ayans baſes multangulaires. Soit fait derechef le triangle MNO egal à la baſe ABCD; & la pyramide MNOP de meſme hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 6. prop. 12. la pyramide MNOP ſera egale à la pyramide ABCDE, laquelle a eſté poſee egale à la pyramide FGHIKL: donc auſſi la pyram. MNOP ſera egale à la pyram. FGHIKL. Parquoy cõme nous auons demonſtré cy-deſſus, ainſi que la baſe MNO, c'eſt à dire la baſe ABCD, ſera à la baſe FGHIK, ainſi la hauteur de la pyramide FGHIKL ſera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'eſt à dire à la hauteur de la pyramide ABCDE: Et partant des pyramides egales ABCDE, FGHIKL, les baſes & hauteurs ſont reciproques.



Mais ſoient maintenant reciproques les baſes & hauteurs d'icelles pyramides: on demonſtrera comme deſſus qu'elles ſont egales.

Or tout ce que nous auons demonſtré cy deſſus peut auſſi conuenir à quelconques priſmes. Car ſi les priſmes eſtoient egaux, auſſi les pyramides de meſme hauteur qu'iceux, ayans les meſmes baſes, ſeroient egales, puis que d'iceux priſmes par le corol. de la 7. prop. 12. elles ſont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le ſcholie de la meſme prop. Parquoy, comme nous auons demonſtré n'agueres, les baſes & hauteurs d'icelles pyramides ſeront reciproques. Veu donc que ces baſes & hauteurs ſont les meſmes que des priſmes, les baſes & hauteurs des priſmes ſeront pareillement reciproques.

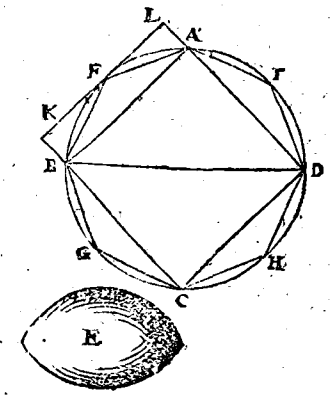
Derechef, ſi les baſes & hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyramides ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Parquoy, comme il a eſté demonſtré, les pyramides ſont egales: & partant auſſi les priſmes, puis que d'icelles pyram. ils ſont triples, ou ſeſquialteres. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre qui a meſme baſe, & egale hauteur.

Soit vn cone, & vn cylindre ayans vne meſme baſe, ſçauoir le cercle ABCD, & vne meſme hauteur. Ie dis que le cylindre eſt triple du cone.

Autrement, il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone: Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible, ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire, que ſi du cylindre ayant pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone ayant pour baſe le meſme cercle ABCD: dans iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, diuiſé en deux triangles par la diagonale BD, & ſur iceux triangles ſoient imaginez eſtre eſleuez deux priſmes de meſme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré eſt plus de la moitié du cercle, il eſt euident qu'iceux deux priſmes ſeront plus de la moitié du cylindre. Que ſi les ſegmens reſtans du cylindre, (les deux priſmes eſtans oſtez) ſont encores plus grands que le ſolide E, ſur les baſes d'iceux ſegmens ſoient faits les quatre triangles Iſoſceles AFB, BGC, CHD, DIA, & ſur iceux ſoient imaginez eſtre eſleuez quatre priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre, dont la baſe eſt le cercle ABCD. Il eſt euident que ces triangles Iſoſceles ſont plus de la moitié des baſes des ſegmens reſtans du cylindre; & par conſequent qu'iceux quatre priſmes ſeront plus de la moitié d'iceux quatre ſegmens: Que ſi les huict petits ſegmens reſtans du cylindre ne ſont plus petits que le ſolide E, ſoit touſiours en ceſte façon ſouſtrait plus de la moitié de ce qui reſtera, iuſqu'à ce que les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E: Ce qui doit aduenir par la 1. prop. 10. Et pour abreger, ſoient iceux huict petits ſegmens plus petits qu'iceluy ſolide E; Il eſt donc manifeſte que la colomne compoſee de ces ſix priſmes, ayant pour baſe le polygone inſcrit au cercle ABCD, & de meſme hauteur que le cylindre donné, ſera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a eſté dit cy-deſſus. Or d'autant que chacun priſme eſt triple de ſa pyramide de meſme hauteur, & ayant baſe egale, (car il peut eſtre diuiſé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'enſuit que tous iceux priſmes faiſans la colomne qui a pour baſe le polygone inſcrit au cercle ABCD, (c'eſt à dire icelle colomne de meſme hauteur que le cylindre) eſt triple de toutes les ſix pyramides, qui font la ſeule pyramide, ayant le meſme polygone pour baſe, & de meſme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide ſera plus grande que le cone de meſme hauteur, qui a le cercle ABCD pour baſe: ce qui eſt impoſſible, n'eſtant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'eſtoit pas plus grand que le triple du cone.



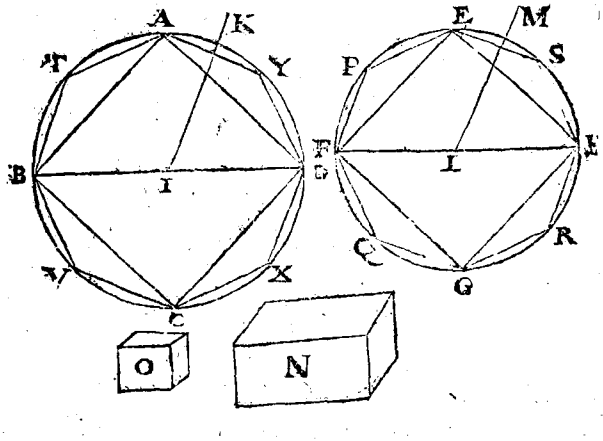
Soit donc plus petit, s'il eſt poſſible; ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire que ſi on retranche le ſolide E du cone, que le reſidu ſoit la troiſieſme partie du

cylindre. Maintenant du cone, qui a pour baſe le cercle ABCD, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de meſme hauteur, ayant pour baſe le quarré ABCD, & du reſidu, ſçauoir des quatre ſegmens F, G, H, I, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de chacun ſegment, de meſme hauteur qu'iceluy ſegment, & ayant pour baſe le triangle Iſoſcelle en iceluy ſegment : ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E : ce qui doit arriuer par la 1. prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huict petits ſegmens plus petits que le ſolide E : il eſt donc euident que la pyramide de meſme hauteur que le cone, qui a iceluy octogone pour baſe, eſt plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle eſt plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le ſolide E. Or iceluy cone ainſi reſcinde eſt le tiers du cylindre donné, & la pyramide eſt auſſi, (comme il a eſté dit cy-deſſus) le tiers de la colomne de meſme hauteur, ayant le meſme octogone pour baſe : Partant icelle colomne ſeroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle eſt partie : Ce qui eſt impoſſible. Donc le cylindre donné n'eſtoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone : il faut donc qu'il luy ſoit egal. Parquoy tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux cones de meſme hauteur, deſquels les baſes ſont les cercles ABCD & EFGH ; les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Ie dis que comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au cone FM ; c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le cone BK ſoit à quelque autre ſolide, comme N ; iceluy ſolide N ſera egal au cone FM.



Autrement, il ſera plus petit ou plus grand : Soit premierement plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité du ſolide O : donc les deux ſolides N & O ſeront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant pour baſe le quarré FGHE : & du reſidu encores plus de la moitié, ſçauoir quatre pyramides de meſme hauteur que le cone, ayans pour baſes les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, en continuant touſiours iuſques à ce que le reſidu ſoit plus petit que

le ſolide O : & ſoit iceluy reſidu pour abreger les huict petits ſegmens : il s'enſuit que la pyramide FM de meſme hauteur que le cone FM, & ayant pour baſe l'octogone E P F Q G R H S, ſera plus grande que le ſolide N. Au cercle A B C D, ſoit inſcrit vn polygone ſemblable au polygone inſcrit dans la baſe circulaire EFGH, & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre eſleuée vne pyramide de meſme hauteur que le cone BK. Or par le corol. de la 2. prop. 12. comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le polygone T V X Y eſt au poligone PQRS: mais comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au ſolide N, & par la 6. prop. 12. comme le poligone au poligone, ainſi la pyramide à la pyramide de meſme hauteur que les cones : & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXDYK ſera à la pyramide EPFQG RHSM, comme le cone BK au ſolide N. Mais la pyramide ATBVCXDYK eſt plus petite que le cone BK ; la partie que le tout : Donc auſſi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM ſera moindre que le ſolide N. Mais elle a eſté demonſtree auſſi plus grande : ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide N n'eſtoit pas plus petit que le cone FM.

Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible: Or puis que l'on a poſé le cercle ABCD eſtre au cercle EFGH, comme le cone BK au ſolide N; en permutant, comme le ſolide N ſera au cone BK, ainſi le cercle EFGH ſera au cercle ABCD : Mais comme iceluy ſolide N eſt au cone BK, ſoit auſſi le cone FM à quelque autre ſolide, comme O : Et par la 14. prop. 5. puis que le ſolide N eſt plus grand que le cone FM, auſſi le cone BK ſera plus grand que le ſolide O. Parquoy puis que comme le cercle E F G H eſt au cercle ABCD, ainſi le ſolide N eſt au cone BK: par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi le cone FM au ſolide O, plus petit que le cone BK : ce que tantoſt nous auons monſtré eſtre impoſſible. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a poſé la baſe ABCD eſtre à la baſe EFGH, ainſi que le cone ABCDK au ſolide N : & que par la 7. prop. 5. comme le cone ABCDK eſt au ſolide N, ainſi eſt le meſme cone ABCDK au cone EFGHM : pareillement comme la baſe ABCD ſera à la baſe EFGH, ainſi le cone ABCDK ſera au cone EFGHM.

Or ce que nous auons prouué des cones de meſme hauteur, ſe doit auſſi entendre des cylindres de meſme hauteur : d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre eſt triple de ſon cone de meſme hauteur, & ayant baſe egale. Que ſi le cone eſt au cone, comme la baſe à la baſe, auſſi le triple du cone ſera au triple du cone, comme la baſe à la baſe par la 15. prop. 5. c'eſt à dire le cylindre au cylindre, comme la baſe à la baſe. Donc les cones & cylindres de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On peut conuertir ceſte prop. ainſi : Les cones & les cylindres qui ſont entr'eux comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on peut demonſtrer en la meſme façon que nous auons demonſtré la conuerſe de la 31. prop. 11.

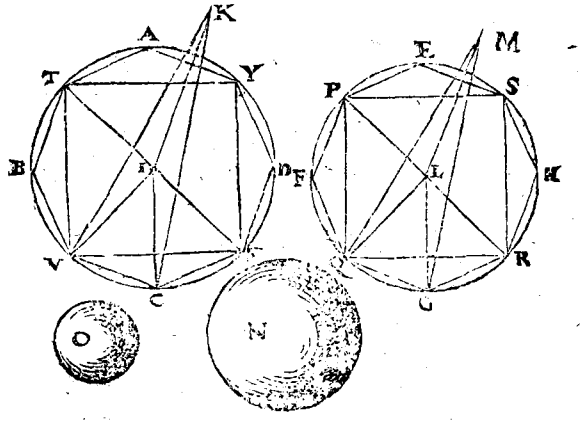
COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les cones, & les cylindres de meſme hauteur, conſtituez ſur meſme baſe ou ſur baſes egales, ſont auſſi egaux. Il s'enſuit encore que les cones & les cylindres egaux conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales ſont de meſme hauteur; & que les egaux de meſme hauteur ſont ſur baſes egales, s'ils n'ont vne meſme baſe. Ce que l'on pouroit auſſi demonſtrer, comme en la conuerſe de la 31. prop. 11.

THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones, & les cylindres ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee des diametres de leurs baſes.

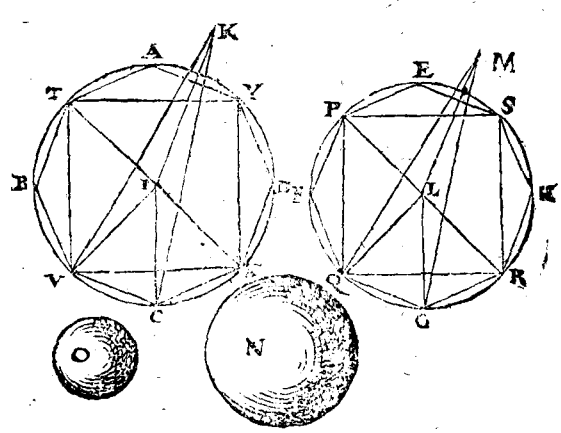
Soient ſemblables cones, & cylindres, ayans pour baſes les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux ſoient IK, LM; & les diametres des baſes TX, PR. Ie dis que le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre, en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, c'eſt à dire que ſi on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK ſoit à quelque ſolide, comme N, en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, iceluy ſolide N ſera egal au cone EFGHM.



Autrement, il ſera plus grand ou plus petit: Soit premierement plus petit, ſçauoir de la quantité du ſolide O: Donc les deux ſolides O & N ſeront egaux au cone EFGHM: & comme en la precedente ſoit faite diſtraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du reſidu encore plus de la moitié, iuſques à ce que les reſtes ſoient plus petits que le ſolide O: & pour abreger, iceux reſtes ſoient les huict petits ſegmẽs qui ſont à l'entour de la pyramide FM qui a pour baſe l'octogone EPFQGRHS; tellement qu'icelle pyramide ſera plus grãde que le ſolide N. Maintenant au cercle ABCD ſoit inſcrit vn tel poligone que le plus grand inſcrit au cercle EFGH, ſçauoir ATBVCXDY: & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre eſleuee vne pyram. de meſme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; ſoient menees les lignes QM, GM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il eſt manifeſte que la pyramide ATBVCXDYK eſt compoſee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de coſtez au poligone inſcrit dans le cercle, (c'eſt à ſçauoir qu'icelle pyramide totale BK eſt compoſee de huict pyramides egales & ſemblables à la pyramide VICK de meſme hauteur que la totale.) On peut dire ſemblablement que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM eſt compoſee de huict pyramides egales & ſemblables à la pyramide QLGM, de meſme

hauteur

hauteur que ſa totale. Mais d'autant que les cones BK & FM ſont ſemblables par la definition des cones ſemblables, comme le diametre TX eſt au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI eſt au demy diametre QL, ainſi l'axe IK eſt à l'axe LM: & en permutant, comme le demy diametre VI ſera à l'axe IK, ainſi le demy diametre QL à l'axe LM: & les angles VIK & QLM eſtans droicts, (car les cones ſont poſez droicts, & par conſequent les axes d'iceux, ſont auſſi à droicts angles ſur leurs baſes) par la 6. prop. 6. le triangle VIK ſera equiangle au triangle QLM. Item CIK ſera auſſi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les coſtez proportionaux, & ſeront ſemblables. Item VI eſt à CI comme QL à GL, (eſtans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun la huictieſme partie de la circonference pour baſe) & partant par la 6. propoſit. 6. les triangles VIC, QLG, ſeront equiangles; partant ſemblables: Item VC eſt à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC & QLG ſont ſemblables) & pour la meſme raiſon VI eſt à VK, comme QL à QM: & en raiſon egale, VC ſera à VK, comme QG à GM: Et par meſme diſcours VC eſt à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, ſeront l'vne à l'autre, comme les egales QM & GM: Et partant par la 5. prop. 6. les triangles VKC, QMG, ſeront equiangles, & ſemblables: & par la def. des pyramides ſemblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, ſeront ſemblables: Et par la 8. prop. 12. elles ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homologues, ſçauoir des demy diametres VI & QL. Par meſme diſcours on prouuera les ſept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK, proportioneles à vne chacune des ſept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. prop. 5. les toutes ſeront aux toutes, comme l'vne d'icelles eſt à l'vne d'icelles: C'eſt à dire que toute la pyramide BK eſt à toute la pyramide FM, en raiſon triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX au diametre PR; puis que comme VI eſt à QL, ainſi TX eſt à PR par la 15. prop. 5. Mais par noſtre hypotheſe le cone BK eſt au ſolide N, auſſi en raiſon triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK ſera au ſolide N, comme la pyramide ATBVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK eſt plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, auſſi par la 14. prop. 5. le ſolide N ſera plus grand que la pyramide FM: & il a eſté demonſtré eſtre auſſi moindre. Ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide N n'eſt pas plus petit que le cone FM. Qu'il ſoit donc plus grand, s'il eſt poſſible. D'autant qu'õ a poſé que le cone ABCDK eſt au ſolide N en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK eſt à la pyramide FM en raiſon triplee des meſmes diametres, comme nous auons demonſtré par la 11. prop. 5. comme le cone BK ſera au ſolide N, ainſi la pyramide BK à la pyramide FM: & en permutant, comme N eſt au cone B, ainſi la



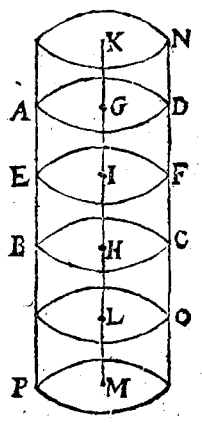
pyramide FM eſt à la pyramide BK. Parquoy puis que par le corol. de la 8. p. 12. la pyramide FM eſt à la pyramide BK en raiſon triplee des coſtez homologues QG à VG: c'eſt à dire du diametre PR au diametre TX: pareillement le ſolide N ſera au cone BK en raiſon triplee des meſmes diametres PR à TX. Soit poſé que comme N eſt au cone BK, ainſi le cone FM ſoit au ſolide O. Donc auſſi le cone FM ſera au ſolide O en raiſon triplee du diametre PR au diametre TX. Et puis que le ſolide N a eſté poſé plus grand que le cone FM: par la 14. prop. 5. le cone BK ſera auſſi plus grand que O. Parquoy le cone FM ſera au ſolide O, moindre que le cone BK, en raiſon triplee du diametre TR au diametre TX: ce qui eſt abſurde. Car il a eſté demonſtré cy-deſſus qu'vn cone ne peut eſtre à vn ſolide moindre qu'vn autre cone, en raiſon triplee des diametres des baſes d'iceux cones. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM: il eſt donc egal. Parquoy par la 7. prop. 5. le cone ABCDK à meſme raiſon au cone EFGHM qu'au ſolide N. Et partant puis qu'on a poſé le cone ABCDK eſtre à N en raiſon triplee des diametres TX & PR: le cone ABCDK ſera auſſi au cone EFGHM en la raiſon triplee des meſmes diametres.

Ceſte demonſtration ſe doit auſſi entendre des cylindres ſemblables: car leurs cones eſtans en raiſon triplee des diametres, par la 15. propoſit. 5. les cylindres qui ſont triples d'iceux cones, ſeront auſſi l'vn à l'aurre en raiſon triplee de leurs diametres. Donc les cones, & les cylindres ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, les ſegmens du cylindre ſeront l'vn à l'autre comme les ſegmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF parallel aux plans oppoſez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Ie dis que le ſegment du cylindre AF eſt au ſegment du cylindre EC, comme l'axe GI eſt à l'axe IH.



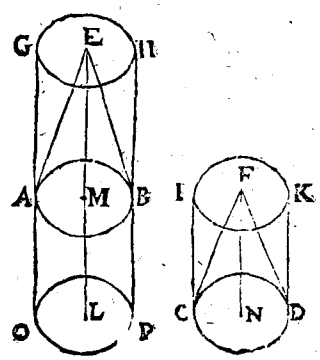
Car ayant continué l'axe GH de part & d'autre, ſoit faite GK egale à GI: & de l'autre coſté HL, LM, chacune egale à IH: Et ſoit imaginé le cylindre ABCD eſtre continué de part & d'autre iuſques aux poincts K & M: Cela eſtant, il eſt euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, ſont tous ſur baſes egales: & par le corollaire de la 11. prop. 12. les deux AF, AN, qui ſont de meſme hauteur, (c'eſt à dire qui ont leurs axes IG, GK egaux) ſont egaux entr'eux: Item les trois BF, BO, PO, eſtans de meſme hauteur, ſont auſſi egaux entr'eux. Parquoy l'axe IK eſt autant multiple de l'axe IG, que le cylindre EN eſt multiple du cylindre ED; & l'axe IM autant multiple de l'axe IH, que le cylindre PF eſt multiple du cylindre BF: Et partant ſi l'axe IK (multiple de IG premiere grandeur) eſt egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiple de IH ſeconde grandeur) auſſi le cylindre EN (multiple du cylindre ED troiſieſ-

me grandeur) ſera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiple du cylindre BF quatrieſme grandeur) en quelque multiplication que ce ſoit: & partant par la 6. def. 5. l'axe GI ſera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy ſi vn cylindre eſt couppé par vn plan, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans baſes egales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient ſur baſes egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDKI, deſquels les axes ou hauteurs, (car aux cones & aux cylindres droicts, deſquels ſeulement parle Euclide, les axes & les hauteurs ſont les meſmes) ſoient ME, NF. Ie dis que le cone ABE eſt au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME eſt à la hauteur NF.



Car ayant continué l'axe EM, iuſques au poinct L, ſoit faite ML egale à FN; & ſoit imaginé le cylindre AH continué iuſques au plan OP parallel à AB, & paſſant par le poinct L, afin que le cylindre AP ſoit fait de meſme hauteur que le cylindre CK. Et d'autant que le plan AB couppe le total cylindre OPGH, eſtant parallel aux deux plans oppoſez OP, GH par la precedente prop. les cylindres AH, AP, ſeront entr'eux comme les axes EM & ML: Mais ML eſt egal à FN, & la baſe AB egale à la baſe CD: Donc par le corollaire de la 11. prop. 12. le cylindre AP ſera egal au cylindre CK: Partant comme EM ſera à NF, ainſi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABE, CDF, ſont les tierces parties des cylindres AH, CK: ils auront meſme raiſon qu'iceux cylindres, par la 15. prop. 5. Et partant le cone ABE ſera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la hauteur NF. Donc les cones, & les cylindres conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

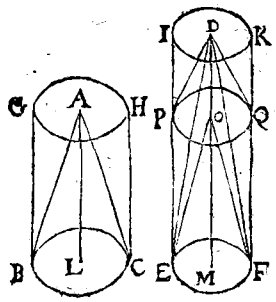
THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les cones, & les cylindres, deſquels les hauteurs ſont reciproques aux baſes, ſont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux; & les cylindres BGHC, EIKF auſſi egaux, deſquels les baſes ſoient BC, EF, & leurs axes ou hauteurs AL, DM. Ie dis que les baſes ſont reciproques aux hauteurs; c'eſt à dire que comme la baſe BC eſt à la baſe EF, ainſi la hauteur DM eſt à la hauteur AL.

Car premierement ſi la hauteur DM eſt egale à la hauteur AL; les cylindres eſtans egaux par le corollaire de la 11. prop. 12. la baſe ſera egale à la baſe; & partant comme la baſe BC ſera à la baſe EF, ainſi la hauteur DM à la hauteur AL. Que ſi

l'vne, comme MD eſt plus grande que AL, ſoit retranchee MO egale à AL; Et ſoit couppé le cylindre EK par le plan PQ, parallel à EF, & paſſant par le poinct O. Donc par la precedente prop. le cylindre EK ſera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO: & partant par la 7. prop. 5. le cylindre BH, egal à iceluy BK, ſera au cylindre EQ, comme MD eſt à MO: & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH eſt au cylindre de meſme hauteur EQ, ainſi la baſe BC à la baſe EF: Et partant par la 11. prop. 5. comme la baſe BC à la baſe EF, ainſi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA ſon egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les baſes & les hauteurs reciproques.



Par meſme diſcours on prouuera que les baſes & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, ſont reciproques; ſi on conſtruit deux cones ſous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

Maintenant, ſoient les baſes reciproques aux hauteurs: Ie dis que les cylindres BH & EK ſont egaux. Car ayant conſtruict comme deſſus, puis que la baſe BC eſt à la baſe EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO ſon egale: Et par la 11. pr. 12. comme la baſe BC à la baſe EF, ainſi le cylindre BH au cylindre de meſme hauteur EQ: Item par la precedente prop. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainſi le cylindre EK au cylindre EQ: donc par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront meſme raiſon au troiſieſme EQ, l'vn comme l'autre: Et par la 9. prop. 5. ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs reciproques, ils ſeront par le meſme diſcours demonſtrez egaux. Ce qui eſt toutesfois aſſez euident, puis qu'ils ſont par la 10. prop. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

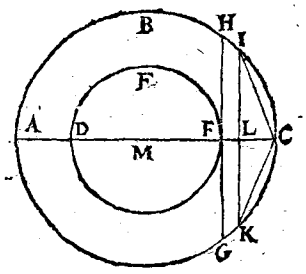
PROBL. 1. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre; inſcrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des coſtez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles inegaux ABC & DEF, à l'entour d'vn meſme centre M: Il faut dans le plus grand ABC, inſcrire vn polygone equilateral, duquel les coſtez ſoient en nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre M le diametre AC, couppant le petit cercle au poinct F; duquel ſoit menee HG perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du grand cercle aux poincts H & G: & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corollaire de la 16. pr. 3. Item ſoit couppee la demye circonference ABC en deux egalement en B: & la moitié BC encores en deux egalement, en continuant touſiours ainſi iuſques à ce qu'on vienne à vn arc plus petit que l'arc HG: ce qui eſt poſſible par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tiree

la ligne droicte subtendante IC. Ie dis qu'icelle ligne droicte IC est vn costé du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont tousiours esté diuisez par moitiez iusques à l'arc IC: il est euident qu'iceluy arc est contenu precisement certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nombre pair; & par consequent que la ligne droicte IC sera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant sera descrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de costez pair, lequel ne touchera le moindre cercle DEF. Car de I soit menee IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF sont droicts, les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. prop. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au seul poinct F; la ligne droicte IK sera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra auec la ligne droicte GH: Donc à plus forte raison la ligne droicte IC, qui est moindre & plus esloignee d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partant aussi les autres costez du polygone inscrit, puis qu'ils sont egaux à IC, & par consequent egalement distans du centre d'iceluy cercle par la 14. prop. 3. Parquoy deux cercles inegaux estans à l'entour d'vn mesme centre, &c. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si de l'extremité du costé du polygone inscrit, lequel rencontre le diametre, on tire vne ligne droicte perpendiculaire à iceluy diametre, elle ne pourra toucher le moindre cercle, mais tombera toute hors iceluy. Car telle est la ligne IK, laquelle du poinct I, extremité du costé IC rencontrant le diametre AC, est tiree perpendiculairement sur iceluy diametre AC, & a esté demonstré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

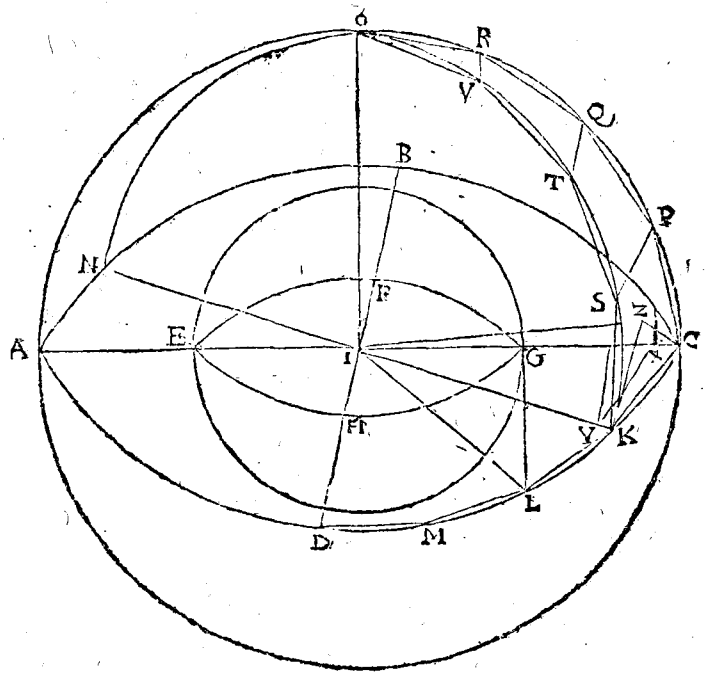
PROBL. 2. PROP. XVII.

Deux spheres inegales estans sur vn mesme centre; inscrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la superficie de la petite sphere.

Soient deux spheres inegales ABCD, EFGH à l'entour d'vn mesme centre I: & il faut dans la plus grande ABCD inscrire vn solide polyedre, ou de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de la moindre sphere EFGH.

Les deux spheres soient couppees par quelque plan passant par le centre I: il est euident par la def. de la sphere, que les communes sections seront cercles, & les plus grands de toute la sphere: d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puis que le plan couppant passe par le centre de ladite sphere: soient donc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH: & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I: Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD,

soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFGH, par la precedente prop. duquel les costez de la quarte CD, soient CK, KL, LM, MD: Et ayant mené par le centre I le diametre KN, par la 12. prop. 11. dudit centre soit menee IO perpendiculaire sur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O: puis par icelle IO, & chacun des diametres AC, NK, soient tirez les plans AOC, NOK, lesquels (par ce qui a esté dit cydessus) feront en la superficie de la sphere des grands cercles: & d'iceux soient les demy cercles AOC, NOK: Et d'autant que la ligne IO est esleuee perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, seront par la 18. prop. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK sont egaux, (ayans les diametres egaux,) aussi leurs moitiez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, OK: Parquoy, autant qu'il y aura de costez du polygone en la quarte CD, on en pourra inscrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & KS, ST, TV, VO: & soient menees les lignes SP, TQ, VR: Item des poincts P & S soient menees par la 11. p. 11. PX, SY perpendiculaires au plan du cercle ABCD, lesquelles par la 38. prop. 11. tomberont sur les lignes IC, IK, communes sections d'iceluy plan, & des quarts de cercles IOC, IOK esleuez perpendiculairement sur ledit plan ou quart IDC. Soit aussi menee la ligne XY. Maintenant, puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales; les angles PXC, SYK droicts, & les angles PCX, SKY egaux; (car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS) les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SYK, & au costé SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Parquoy puis que les deux semidiametres IC, IK sont egaux: & les segmens XC, YK, aussi egaux; les segmens IX, IY seront pareillement egaux: partant comme IX est à XC, ainsi IY est à YK: & par la 2. prop. 6. YX sera parallele à KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY estans egales, sont aussi paralleles par la 6. prop. 11. & par la 33. prop. 1. SP, YX, seront egales & paralleles: & par la 9. prop. 11. SP & KC seront paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CKSP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on mõstrera



auſſi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn meſme plan. Que ſi des poincts P, Q, R, S, T, V, on imagine des lignes droictes eſtre menees au centre I, on ſe repreſentera vne figure ſolide, compriſe entre OC & OK, compoſee de quatre pyramides, deſquelles le ſommet eſt au centre I, & leurs baſes ſont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR: Et ſi on conſtruit pareillement ſur les coſtez KL, LM, & MD, comme on a fait ſur CK: Et ſemblablement ſur toutes les autres quartes, on aura inſcrit vn poliedre en la ſphere donnee.

Ie dis d'auantage qu'iceluy poliedre ne touche la petite ſphere EFGH. Car ſi du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire ſur le plan SC, elle ſera plus grande que IG demy diametre de la petite ſphere. Car ayant pour l'inſcription du polygone tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle eſt manifeſtement plus grande que CK coſté d'iceluy poligone inſcrit, ſoit tiree IL; & auſſi CZ, KZ. D'autant que par la 3. def. 11. les angles IZC, IZK ſont droicts, le quarré de IC ſera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK: Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, eſtans egaux, les quarrez de IZ, CZ, ſeront egaux aux quarrez de IZ, ZK: oſtant donc le quarré de IZ commun, reſteront egaux les quarrez de CZ, KZ; & par conſequent les lignes CZ, KZ ſont egales. On demonſtrera en la meſme maniere, eſtans tirees des lignes de Z à P & S, qu'elles ſeront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy ſi du centre Z, & de l'interuale de l'vne d'icelles, on deſcrit vn cercle, il circonſcrira le quadrilatere CKSP: duquel les trois coſtez CK, CP, KS, qui ſouſtiennent arcs egaux de cercles egaux, ſont egaux, & l'autre coſté SP plus petit: (car les triangles ICK, IXY eſtans ſemblables, & le coſté IC plus grand que le coſté IX, auſſi le coſté CK ſera plus grand que le coſté XY, qui a eſté demonſtré egal à SP) & partant ſouſtiendra vn plus petit arc que chacun de ces trois là, qui conſequemment ſera moindre que le quart de l'entiere circonference, & chacun de ceux-cy plus grand: Parquoy l'angle CZK ſera plus grand qu'vn droict: & par conſequent le plus grand du triangle CZK: & par la 19. prop. 1. CK ſera plus grand coſté que CZ. Parquoy GL eſtant plus grande que CK, elle ſera auſſi plus grande que CZ: & par conſequent le quarré de GL plus grand que celuy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarrez de IG & GL, ſont egaux aux quarrez de IZ, CZ: (car tant ces deux cy, que ces deux-là ſont egaux au quarré du demy diametre de la grande ſphere, les triangles IGL, ICZ eſtans rectangles) & le quarré de GL, eſt plus grand que le quarré de CZ: le quarré de IZ, ſera plus grand que le quarré de IG; & par conſequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite ſphere EFGH. On prouuera par meſme raiſon que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la grande ſphere ne touchent pas la petite ſphere EFGH. Donc deux ſpheres inegales, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Des choſes cy-deſſus demonſtrees reſulte que ſi en vne autre ſphere on inſcrit vn polyedre ſemblable au polyedre cydeſſus deſcrit, qu'iceux polyedres ſeront en raiſon triplee des diametres des ſpheres, auſquelles ils ſeront inſcrits. Car iceux polyedres eſtans ſemblables par la

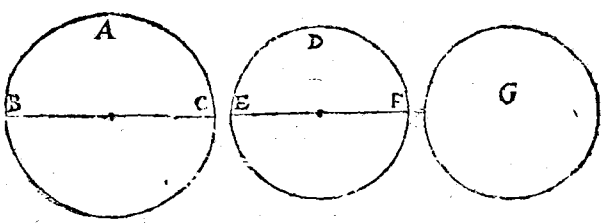
def. des ſolides ſemblables, ils auront en leur conuexité autant de plans ſemblables l'vn comme l'autre : partant ils ſe pourront diuiſer en autant de pyramides ſemblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur ſphere pour vn de leurs coſtez : Partant priſes vne à vne, elles ſeront en raiſon triplee des coſtez homologues, ſçauoir eſt des demy diametres des ſpheres, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raiſon triplee des meſmes demy diametres, par la 12. prop. 5. Et par la 15. prop. 5. en raiſon triplee des diametres entiers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les ſpheres ſont l'vne à l'autre, en raiſon triplee de leurs diametres.

Soient deux ſpheres ABC, DEF, deſquelles les diametres ſont BC, EF. Ie dis qu'elles ſont l'vne à l'autre en raiſon triplee du diametre BC au diametre EF : C'eſt à dire que ſi on imagine que comme la raiſon triplee de BC à EF, ainſi la ſphere ABC ſoit à quelque autre ſphere, comme G : icelle ſphere G ſera egale à la ſphere DEF.

Autrement, elle ſera plus grande ou plus petite. Soit premierement la ſphere G, plus petite que la ſphere DEF, s'il eſt poſſible : Elle pourra donc eſtre enfermee dans icelle, ſi on les met toutes deux ſur vn meſme centre : Et partant dans la ſphere DEF, peut eſtre inſcrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite ſphere G par la 17. prop. 12. Et dedãs l'autre ſphere pourra eſtre pareillement inſcrit vn ſemblable polyedre par la meſme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy ſera à celuy-là, en raiſon triplee du diametre BC au diametre EF : mais en telle raiſon, la ſphere ABC eſt poſee eſtre à la ſphere G, & par la 11. prop. 5. comme la ſphere ABC eſt à la ſphere G, ainſi le polyedre de la ſphere ABC, ſera au polyedre de la ſphere DEF. Or la ſphere ABC, eſt plus grande que ſon polyedre, n'eſtant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la ſphere G eſt auſſi plus grande que le polyedre de la ſphere DEF : ce qui eſt impoſſible, n'eſtant que partie d'iceluy. Donc la ſphere ABC, ne peut eſtre en raiſon triplee des diametres BC & EF, à vne autre ſphere plus petite que DEF.



Soit donc la ſphere G plus grande que DEF, s'il eſt poſſible : Et puis qu'on a poſé que la ſphere ABC eſt à la ſphere G, en la raiſon triplee du diametre BC au diametre EF ; en changeant, la ſphere G ſera à la ſphere ABC, en raiſon triplee du diametre EF au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la ſphere G eſt à la ſphere ABC, ainſi la ſphere DEF ſoit à vne quatrieſme proportionele : laquelle ſera plus petite que ABC par la 14. prop. 5. d'autant que G eſt poſee plus grande

que

que DEF: Et partant icelle quatrieſme proport. pourra eſtre inſcrite en la ſphere ABC: Et ſi par la 11. pr. 5. la ſphere DEF ſera à icelle quatrieſme inſcrite dans ABC, en raiſon triplee du diametre EF au diametre BC: ce que nous auons demonſtré eſtre impoſſible. Donc la ſphere G n'a peu eſtre plus grande, ne plus petite que la ſphere DEF, mais egale: & par conſequent les ſpheres ſont l'vne à l'autre en raiſon triplee de leurs diametres. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'vne ſphere eſt à vne ſphere, comme le polyedre deſcrit dans celle-là, eſt au polyedre ſemblable deſcrit en ceſte-cy: pource que tant les ſpheres que les polyedres ſont en raiſon triplee des diametres d'icelles ſpheres, comme il a eſté demonſtré.

Fin du douzieſme Element.

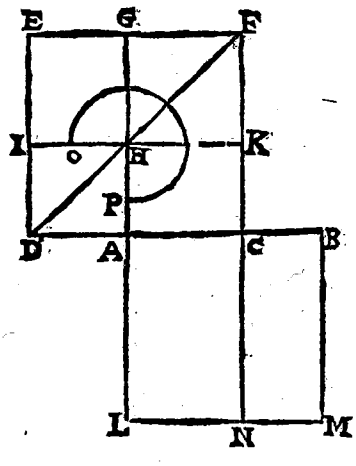
ELEMENT TREZIESME.

THEOR. 1. PROP. 1.

SI vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon : le quarré de la moitié de la toute, & du grand ſegment comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB couppee au poinct C en la moyenne, & extreme raiſon, dont le grand ſegment eſt AC, auquel ſoit adiouſtee AD egale à la moitié de la totale AB : ie dis que le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA.

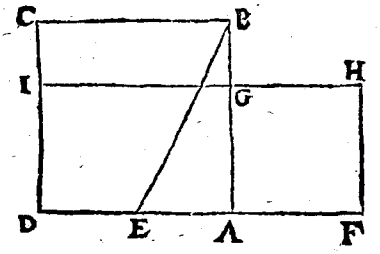
Car ſoit deſcrit ſur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF ; puis ſoit menee AG parallele à DE, couppant le diametre DF en H, par lequel poinct ſoit tiree IK parallele à CD. En apres, ayant prolongé GA, & accomply le quarré AM, ſoit produicte FC iuſques en N. Premierement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, comme AB ſera à AC, ainſi AC eſt à CB ; & par la 17. prop. 6. le rectangle CM compris ſous AB, CB, eſt egal au quarré de AC, ſçauoir GK. Et puis que AB eſt poſee double de DA ; & AL eſt egale à icelle AB ; & AH à AD, auſſi AL ſera double de AH. Mais comme AL eſt à AH, ainſi le rectangle AN eſt au rectangle AK, par la 1. prop. 6. Donc AN eſt double de AK. Et puis que par la 43. prop. 1. AK eſt egal à IG ; AN ſera egal aux deux IG, AK ; adiouſtant donc ces egaux aux egaux CM, KG le quarré AM ſera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le ſcholie de la 4 prop. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI, auſſi le gnomon OP ſera quadruple du meſme quarré AI : & partant ſi au gnomon OP eſt adiou-



ſté le quarré AI ; CE quarré de DC ſera quintuple de AI quarré de DA. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre encore cette prop. ainſi. Soit la ligne droicte AB couppee en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon, de laquelle AB ſoit fait le quarré ABCD, & ayant couppé AD en deux egalement en E ſoit menee BE, & prolongee EA en F, de ſorte que EF ſoit egale à icelle EB ; & par ce qui eſt demonſtré en la 11. prop. 2. AF ſera egale à AG ; parquoy appert EF eſtre compoſee du grand ſegment AG & de AE, moitié de la toute AB. Ie dis que le quarré de EF eſt quintuple du quarré de EA. Car puis que AB eſt double de AE, le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AE par les choſes demonſtrees au ſcholie de la 4. prop. 2. Mais le quarré de EB eſt egal aux quarrez d'icelles AB, AE par la 47. prop. 1. donc le quarré de BE, c'eſt à dire de EF, ſera quintuple du quarré de AE : Ce qu'il falloit prouuer.



Or tout ainſi qu'en la plus part des prop. du 10. liure nous auons ioinct & appliqué les nombres aux lignes, afin d'en rendre les demonſtrations plus claires & euidentes, auſſi le ferons nous en ceſtuy-cy pour le contentement de ceux qui ſe delectent aux opperations numeralles. Donc en la precedente figure la ligne droicte AB ſoit 10, ſa moitié AE 5 ; & leurs quarrez ſeront 100 & 25 : partant le quarré de BE, ou de EF ſon egale ſera 125, qui eſt quintuple de 25 quarré de la moitié AE, comme veut la propoſition.

De cecy appert qu'eſtant cogneue vne ligne droicte couppee en la moyenne & extreme raiſon, on peut facilement cognoiſtre les ſegmens d'icelle. *Car ladite ligne AB eſtant 10, & couppee en la moyenne & extreme raiſon en G, par ce que deſſus EF eſt trouuee de √125, & AE de 5 ; partant le reſte AF, ou AG, qui eſt le grand ſegment, ſera √125—5, qui oſtez de la toute AB 10, reſteront 15—√125 pour le moindre ſegment BG. Les meſmes ſegmens AG, BG ſeront auſſi cogneus par ce qui eſt cy-deuant enſeigné à la fin du 21. chap. de noſtre ſommaire d'Algebre.*

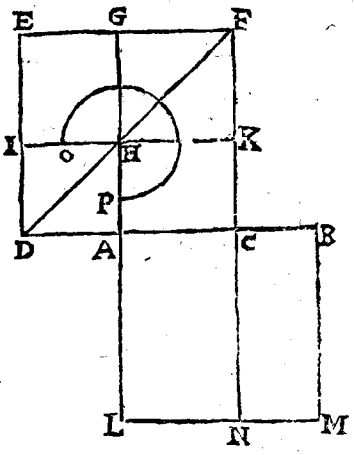
THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple du quarré d'vne partie d'icelle : le double d'icelle partie eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment ſera l'autre partie de la donnee.

Soit la ligne droicte DC diuiſee au poinct A, en ſorte que le quarré d'icelle, ſoit quintuple du quarré de la plus petite partie DA : & ſoit priſe AB double d'icelle AD, laquelle (comme nous demonſtrerons cy apres) ſera plus grande que l'autre partie AC. Ie dis que ſi on diuiſe AB en la moyenne & extreme raiſon, que le grand ſegment ſera AC, autre partie de la donnee DC.

Car ayant fait ſur DC le quarré CE, & acheué la conſtruction comme en la precedente ; les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez par le corol. de la 4. prop. 2. Et puis que AB, c'eſt à dire AL, eſt double de DA, ou AH ſont egale, le rectangle

AN ſera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou egal aux deux AK, IG qui ſont egaux par la 43. prop. 1. Or par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI, & le quarré EC eſt quintuple du meſme par l'hypotheſe: il eſt donc euident que le quarré AM eſt egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, ſont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, ſoit egal au quarré GK, fait ſur vne ligne egale à AC: & partant par la 17. prop. 6. comme BM, c'eſt à dire AB eſt à AC, ainſi AC à CB. Parquoy par la 3. def. 6. la ligne AB ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: & AC autre partie de la totale DC, eſt le grand ſegment d'icelle. Parquoy ſi le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



LEMME.

Que AB double de AD ſoit plus grand que AC, nous le demonſtrerons ainſi. D'autant que par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de AB eſt quadruple du quarré de AD, iceux deux quarrez ſeront enſemble quintuple du ſeul quarré de AD. Mais le quarré de DB eſt plus grand que les quarrez de DA, AB, puis que par la 4. prop. 2. il eſt egal à iceux deux quarrez auec deux fois le rectangle ſous DA, AB. Donc le quarré de DB ſera auſſi plus grand que le quintuple du quarré de AD: & partant plus grand que le quarré de DC, qui eſt poſé quintuple du meſme quarré de AD: parquoy la ligne droicte DB ſera plus grande que la ligne droicte DC: & oſtant DA qui eſt commun, le reſte AB ſera plus grand que le reſte AC.

SCHOLIE.

La ligne donnee DC ſoit 5, & DA √5, afin que le quarré de celle-là, qui eſt 25, ſoit quintuple du quarré de celle-cy, qui eſt 5: Donc le reſte AC ſera 5—√5, & AB double de AD ſera √20: laquelle eſtant diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ainſi qu'il a eſté dit au prec. ſcholie, le plus grand ſegment ſera 5—√5, qui eſt egal à AC, comme veut la propoſition.

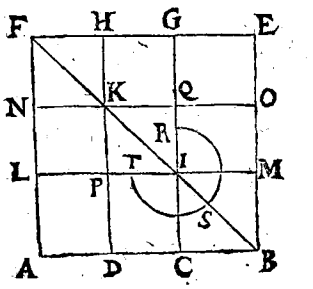
THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon; le quarré du petit ſegment & de la moitié du grand ſegment, comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié du grand ſegment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C, de laquelle le grand ſegment AC eſt couppé en deux egalement en D: ie dis que le quarré du petit ſegment & de la moitié du grand, ſçauoir de BD, eſt quintuple du quarré de DC, moitié du grand ſegment AC.

Car ſur AB ſoit deſcrit le quarré AE, & ayant mené ſon diametre BF, des poincts C & D ſoient menees CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF és poincts I & K, par leſquels ſoient menees LM, NO paralleles à AB, leſquels couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. prop. 2. les quadrilateres LG,

PQ, DO seront quarrez des lignes AC, CD, DB. Donc puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (sçauoir AM) est egal au quarré de la moyenne AC, sçauoir LG, lequel estant par le scholie de la 4. prop. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM sera aussi quadruple de PQ: mais AP & DI estans sur bases egales, sont egaux par la 1. prop. 6. Et DI estant egal à IO par la 43. prop. 1. le gnomon RST sera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: Parquoy adiouſtant à iceluy gnomon le mesme quarré PQ; le quarré DO, descrit de DB sera quintuple d'iceluy quarré PQ, descrit de DC: Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La ligne droicte AB estant 12, le grand segment AC sera √180—6, & le moindre CB 18—√180. Parquoy DC moitié de AC sera √45—3, & son quarré 54—√1620. Mais DB composee de DC & CB sera 15—√45, & son quarré 270—√40500, qui est quintuple du quarré de DC 54—√1620, comme veut la proposition: La conuerse de laquelle est aussi veritable, c'est à sçauoir que

Si vne ligne droicte est couppee en deux segmens inegaux, & que le quarré du moindre segment & de la moitié du grand, comme d'vne seule ligne soit quintuple du quarré d'icelle moitié: cette ligne-là sera couppee en la moyenne & extreme raison.

Soit la ligne droicte AB (en la prec. fig.) couppee inegalement en C, de laquelle le grand segment AC est couppé en deux egallement en D, & le quarré de DB soit quintuple du quarré de CD: Ie dis que la ligne AB est diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison. Car demeurant la mesme construction que dessus, le quarré LG est quadruple du quarré PQ par le scholie de la 4. prop. 2. Mais du mesme quarré PQ est aussi quadruple le gnomon RST, puis que le quarré DO est posé quintuple dudit quarré PQ: donc le gnomõ RST sera egal au quarré LG. Mais il est aussi egal au rectangle AM: donc le quarré LG sera egal au rectangle AM contenu sous AB, BC: & partant par la 17. p. 6. comme AB sera à AC, ainsi AC à CB: Parquoy AB sera couppee en C, selon la moyenne & extreme raison: Ce qui estoit proposé

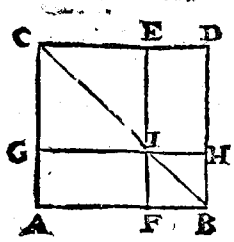
THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & le quarré du petit segment ensemble, sont triples du quarré du grand segment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en F, selon la moyenne & extreme raison, dont AF soit le plus grand segment: ie dis que les quarrez de AB, & FB, sont ensemble triples du quarré de AF.

Car soit descrit sur AB le quarré AD, auquel estant tiré le diametre BC, soit menee de F la ligne EF parallele à AC, couppant BC en I, par lequel soit menee GH parallele à AB. Par le corol. de la 4. prop. 2. les parallelogrammes GE, FH seront quarrez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB,

par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB, FB, ſçauoir AH, eſt egal au quarré de la moyenne AF, ſçauoir GE. Veu donc que AH & FD ſont egaux, le gnomon EBG auec le quarré FH, ſera egal au double du quarré GE: & partant adiouſtant le quarré GE; AD quarré de AB, auec FH quarré de FB, ſera triple de GE quarré de AC. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

La ligne AB ſoit 4; donc le grand ſegment AF ſera √20—2, & le moindre FB 6—√20: & partant leurs quarrez ſeront 16, 24—√320, & 56—√2880: mais celuy-cy adiouſté au premier 16, fait 72—√2880, qui eſt le triple de 24—√320, quarré de l'autre ſegment AF, ainſi que veut la prop. La conuerſe de laquelle eſt auſſi veritable, ſçauoir eſt que

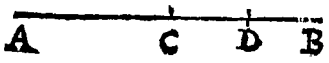
Si vne ligne droicte eſt couppee en deux inegallement, & que le quarré de la toute auec le quarré du moindre ſegment ſoit triple du quarré du grand ſegment: cette ligne là ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux inegallement en F, de ſorte que le quarré de la toute AB auec le quarré du moindre ſegment FB eſt triple du quarré de l'autre ſegment AF. Ie dis que la ligne droicte AB eſt couppee en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Car ayant conſtruit comme deſſus, d'autant que les quarrez AD, FH ſont triples du quarré GE, oſtant le quarré GE, le gnomon EBG auec le quarré FH ſera double du meſme quarré GE. Mais iceluy gnomon EBG auec ledit quarré FH eſt egal aux deux rectangles AH, FD: donc iceux deux rectangles ſont auſſi double du quarré GE: & partant puis que leſdits rectangles AH, FD ſont egaux, le ſeul AH compris ſous AB, BF ſera egal à iceluy quarré GE: & par la 17. prop. 6. comme AB ſera à GI ou AF, ainſi AF ſera à FB: & partant AB eſt diuiſee en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Ce qui a eſté propoſé.

Nous adiouſterons encore icy la demonſtration que fait Maurolic de cet autre theoreme.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & du moindre ſegment comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré du grand ſegment: & vne ligne droicte eſtant couppee inegallement, ſi le quarré de la toute & du moindre ſegment, comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré du grand ſegment; icelle ligne ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon.

Soit premierement la ligne droicte AD *couppee en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, à laquelle ſoit adiouſtee DB egale au moindre ſegment CD: Ie dis que le quarré de* AB *eſt quintuple du quarré de AC. Car d'autant que par la 17. pr. 6. le rectangle de AD, DC eſt egal au quarré de AC (pour ce que les trois lignes* AD, AC, CD *ſont proport.) quatre fois le rectangle de* AD, DC *ſera quadruple du quarré de* AC, *& conſequemment le quarré de* AC *auec quatre fois le rectangle de* AD, DC *ſera quintuple d'iceluy quarré de* AC. *Mais par la 8. p. 2. le quarré de* AD *eſt egal audit quarré de* AC, *auec quatre fois le rectangle d'icelles* AD, DC: *Donc auſſi le quarré de* AD *ſera quintuple du quarré de* AC: *Ce qui eſtoit propoſé.*



Secondement ſoit la ligne droicte AD *diuiſee inegalement en* C, *à laquelle ſoit adiouſtee* DB *egale au moindre ſegment* CD, *& ſoit le quarré de* AB *quintuple du grand ſegment* AC: *Ie dis que* AD *eſt coupppee ſelon la moyenne & extreme raiſon en* C. *Car d'autant que par la*

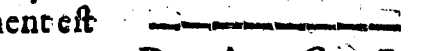
8. pr. 2. le quarré de AB est egal au quarrè de AC auec quatre fois le rectangle de AD, DC, aussi iceux quarré de AC & quatre rectangles de AD, DC, seront ensemble quintuple dudit quarré de AC: & partant le rectangle de AD, DC quatre fois sera quadruple d'iceluy quarré de AC, c'est à dire qu'vn seul rectangle de AD, DC, sera egal à iceluy quarré de AC, & par la 17. prop. 6. comme AD sera à AC, ainsi AC sera à CD: & partant AD est couppee en C, selon la moyenne & extreme raison. Ce qui est proposé.

Cette prop. est aussi euidente par nombres: Car si AD est 4, le grand segment AC sera $\sqrt{20}-2$, & son quarré $24-\sqrt{320}$. mais le moindre segment CD sera $6-\sqrt{20}$, qui adiousté à AD, fait $10-\sqrt{20}$ pour la toute AB, dont le quarré est $120-\sqrt{8000}$, qui est quintuple de $24-\sqrt{320}$ quarrez du grand segment AC.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adiouste vne ligne droicte egale au grand segment; la toute sera couppee en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera la ligne premierement posée.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C, dont le grand segment est AC; & à icelle AB soit adiousteé directement AD egale à AC: ie dis que la toute DB est aussi couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & que le grand segment est AB.



Car puisque comme AB est à AC, c'est à dire AD, ainsi AC est à CB; en changeant, comme DA sera à AB, ainsi BC à AC: & en composant, comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & le grand segment est la ligne AB proposee au commencement. Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qui estoit à prouuer.

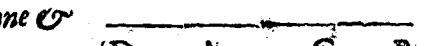
SCHOLIE.

La ligne droicte AB soit 4, le moindre segment CB $6-\sqrt{20}$, & le grand AC $\sqrt{20}-2$: Adiousstant donc à AB le grand segment AC, viendront $\sqrt{20}+2$, pour la toute DB. Or comme $\sqrt{20}+2$ est à 4, ainsi 4 est à $\sqrt{20}-2$; car multipliant $\sqrt{20}+2$ par $\sqrt{20}-2$, le produit est 16, qui est le quarré de 4: Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

Clauius apres Campanus demonstre en cet endroit les deux theoremes suiuans.

1. Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & que du grand segment on retranche le moindre: iceluy grand segment sera aussi couppé en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera cette ligne là, qui estoit le moindre segment de la premiere ligne.

Car la ligne droicte DB soit couppee en A, selon la moyenne & extreme raison, & du grand segment AB soit retranchee AC egale au moindre segment AD: Ie dis que le grand segment AB est



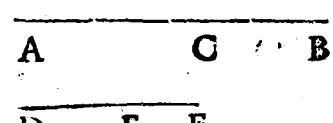
diuisé en C, selon la moyenne & extreme raison, & le grand segment estre AC, qui est egal au moindre segment AD. Car d'autant que comme la toute DB est à la toute AB, ainsi AB retranchee de BD est à AD, c'est à dire AC retranchee de AB, aussi par la 19. prop. 5. AD reste d'icelle BD, c'est à dire AC sera à CB reste d'icelle AB, comme la toute DB à la toute

AB, c'est à dire comme AB à AC: & partant AB sera diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison: Ce qui estoit proposé.

Le mesme est aussi manifeste en nombres: Car si DB est 4, le grand segment AB sera √20—2, & le moindre AD 6—√20, qui retranché de AB restera CB de √80—8. Or comme √20—2 est à 6—√20, ainsi 6—√20 est à √80—8, car le produit des extremes est egal à celuy des moyens, sçauoir est 56—√2880: & partant appert ce qui estoit proposé.

2. Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & de la moitié d'icelle on retranche la moitié du grand segment; la moitié de la toute sera aussi diuisee en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera la moitié du grand segment de la toute.

Car soit AB diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison, & DE soit la moitié de la toute, & DF moitié du grand segment AC: Ie dis que DE est couppee en F, selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segment est DF. Car puis que comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchee AC est à la retranchee DF, (car l'vne & l'autre est raison double) par la 19. prop. 5. le reste CB sera aussi au reste FE, comme la toute à la toute, & partant CB sera aussi double de FE. Mais par la 15. prop. 5. comme AB est à AC, ainsi DE moitié de celle-là est à FE moitié de celle-cy, & par la def. de la ligne couppee en la moyenne & extreme raison AB est à AC, comme AC à CB: donc aussi DE sera à DF, comme DF à FE: & partant par la mesme def. DE sera couppee en la moyenne & extreme raison en F. Ce qui est proposé.



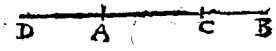
Ce theoreme est aussi manifeste en nombres: car si AB est 4, la moitié DE sera 2, le grand segment AC √20—2, & sa moitié DF √5—1, & partant le reste FE sera 3—√5. Or il est euident que ces trois nombres 2, √5—1, & 3—√5 sont continuellement proport. car le produit des deux extremes est egal au quarre du milieu, sçauoir est à 6—√20.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele est couppee en la moyenne & extreme raison: l'vn & l'autre segment est ligne irrationele, appellee residu.

Soit la ligne droicte rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C: ie dis que chaque segment AC, BC est ligne irrationele appellee residu.

Car au grand segment AC soit adiouſtee directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de DA, il est à iceluy comme nombre à nombre: Et par la 6. prop. 10. iceux quarrez de DC, DA seront commensurables: & par consequent les lignes DC, DA, sont aussi commensurables, au moins en puissance. Or AD est rationele, puis qu'elle est moitié d'vne rationele AB: Donc aussi DC sera rationele. Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longitude, par la 9. prop. 10. & partant rationeles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on oste DA commensurable en puissance seulement,



par

par la 74. prop. 10. le reſte AC ſera irrationele, appellee reſidu.

Derechef AB eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, le quarré de AC ſera egal au rectangle de AB, CB par la 17 prop. 6. Mais le quarré du reſidu AC applicqué à la rationele AB, doit faire l'autre coſté CB reſidu premier par la 98. prop. 10. Parquoy chacun des ſegmens AC, CB, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Si donc vne ligne droicte rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

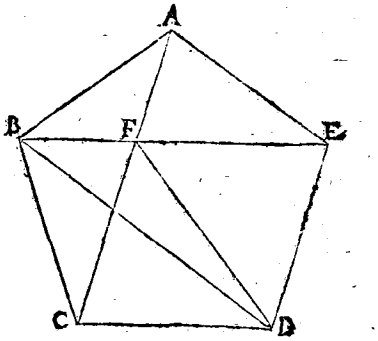
SCHOLIE.

La ligne AB ſoit 4 : donc le grand ſegment AC ſera √10—2, & le moindre ſegment CB 6—√20, l'vn & l'autre deſquels ſegmens eſt reſidu, puis que leurs deux nombres ſont commenſurables en puiſſance ſeulement, &c.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra ſont egaux : il ſera equiangle.

Au pentagone equilateral ABCDE, ſoient trois angles egaux, premierement d'ordre comme A, B, C : ie dis qu'iceluy pentagone eſt equiangle.



Car eſtans tirees à iceux angles egaux A, B, C, les lignes ſubtendantes AC, BE, BD : de F ou s'entrecouppent AC, BE ſoit tiree FD. Or puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BC, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux, auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD ſeront egales, & les angles AEB, BDC egaux. Mais par la 5. prop. 1. les angles BED, BDE ſont auſſi egaux, les deux coſtez BE, BD ayans eſté prouuez egaux : Donc l'angle total AED ſera egal au total CDE. Derechef, puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BA, BC du triangle ABC, & les angles A & B contenus d'iceux egaux, par la 4. prop. 1. la baſe BE ſera egale à la baſe AC, & les angles ABE, AEB egaux aux angles BAC, BCA, chacun au ſien : & partant les angles FAB, FBA du triangle ABF ſont egaux : donc les coſtez AF, BF ſeront auſſi egaux : & partant iceux eſtans oſtez des ſubtendantes egales AC, BE les reſtes FC, FE ſeront egales. Parquoy les deux coſtez FC, CD du triangle CFD ſeront egaux aux coſtez FE, ED du triangle DFE, & la baſe FD commune : donc par la 8. prop. 1. les angles FCD, FED ſeront egaux. Mais ACB, AEB ont eſté prouuez egaux : donc les touts BCD, AED ſont egaux : Parquoy AED, ayant eſté monſtré egal à CDE, tous les angles du pentagone ſeront egaux entr'eux par la 1. com. ſent. & conſequemment iceluy pentagone ABCDE ſera equiangle.

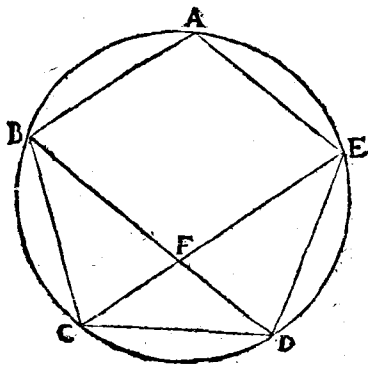
Secondement, ſoient les trois angles A, C, D, non d'ordre, egaux. D'autant que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux aux coſtez CB, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD, & les angles AEB, BDC ſeront egaux : Mais par la 5. pr. 1. les coſtez BE, BD eſtans egaux, les angles BED, BDE ſeront pareillement egaux ; donc l'angle total AED ſera egal

au total CDE. Et puis que les angles BAE, CDE ont esté posez egaux: les trois angles A, E, D, qui sont d'ordre, seront egaux: & partant comme il a esté desia monstré, le pentagone sera equiangle. Donc si en vn pentagone equilateral, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes subtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre; elles se coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs grands segmens seront egaux au costé du pentagone.

Au pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F. Ie dis qu'elles se couppent en la moyenne & extreme raison, & que chacun de leurs grãds segmens BF, EF sera egal à quelconque costé du pentagone.



Car ayant descrit par la 14. prop. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris d'iceux aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF sont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. prop. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 17. prop. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, sont egaux; les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. p. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Parquoy si deux lignes droictes subtendent deux angles d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

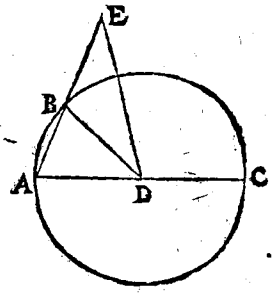
On peut facilement demonstrer que la ligne droicte qui soustient l'angle du pentagone equilateral & equiangle est parallele au costé opposé, c'est à dire que CE est parallele au costé AB, & BD au costé AE: car ayant descrit vn cercle à l'entour du pentagone, d'autant que par la 22. p. 3. tant les deux angles A & BCE, que les deux ABC, AEC sont egaux à deux droicts,

& que A, ABC sont egaux entr'eux, le pentagone estant equiangle, les deux autres BCE, ACE seront aussi egaux. Veu donc que A & BCE sont egaux à deux droicts; A & AEC sont aussi egaux à deux droicts, & par la 28. prop. 1. AB, CE seront paralleles, &c.

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le grand segment est le costé de l'hexagone.

Au cercle ABC soit inscrite la ligne droicte AB, costé du decagone, à laquelle soit adioustee directement BE egale au demy diametre du cercle, c'est à dire au costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle, car il luy est egal par le coroll. de la 15. p. 4. Ie dis que AE est couppee en la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le grand segment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB estant la dixiesme partie de toute la periphere du cercle, sera la cinquiesme de l'arc ABC, moitié d'icelle periphere: & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. prop. 1. l'angle BDC estant exterieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels estans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD est Isoscele, l'vn ou l'autre sera double de ADB: mais l'vn d'iceux DBA estant exterieur, est egal aux deux opposez interieures DEB & BDE: (lesquels sont egaux, estant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont egaux par la construction) donc l'angle DBA sera double de l'angle E; qui par consequent sera egal à l'angle ADB: Parquoy les deux triangles AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, l'angle E egal à l'angle ADB, & par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers: donc par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB: partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B: & BE costé de l'hexagone est le grand segment. Donc la ligne droicte composee du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

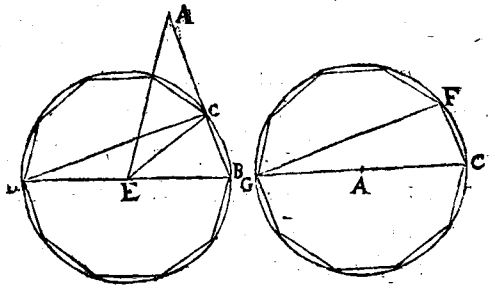
De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant couppé en la moyenne & extreme raison, le grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on couppe vne partie egale à AB: comme la toute AE sera à la toute BE, ainsi la retranchee BE sera à la retranchee de BE, c'est à dire à AB: & partant par la 19. prop. 5. le resté sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le grand segment sera AB costé du decagone.

SCHOLIE.

Clauius demonstre apres Campanus la conuerse de cette proposition ainsi qu'il ensuit.

Si le grand segment d'vne ligne diuisee en la moyenne & extreme raison est le costé de l'hexagone de quelque cercle ; le moindre segment sera le costé du decagone du mesme cercle. Que si le petit segment est le costé du decagone de quelque cercle, le grand segment sera le costé de l'hexagone du mesme cercle.

Car soit AB diuisee en C selon la moyenne & extreme raison, & soit premierement le grand segment AC costé de l'hexagone du cercle BCD : Ie dis que le petit segment BC est le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car BC estant accommodee au cercle, en sorte que CA tombe hors le cercle, soit tiree de B par le centre E le diametre BED, & les lignes EA, EC. Donc puis que comme AB est à AC, ainsi AC est à CB, & que AC est egale au semidiametre EB par le corol. de la 15. prop. 4. Aussi comme AB sera à BE, ainsi EB à BC : & par la 6. prop. 6. les triangles ABE, EBC seront equiangles, puis qu'ils ont les costez de l'angle commun B proportionnaux ; & l'angle A sera egal à l'angle BEC. Derechef, pource que les costez CA, CE sont egaux, par la 5. prop. 1. les angles CAE, CEA seront egaux, & puis que par la 32. prop. 1. à iceux est egal l'angle externe BCE ; iceluy BCE sera double de l'angle A : Mais par la 5. prop. 1. l'angle CBE est egal à l'angle BCE, à cause de l'egalité des costez EB, EC : donc aussi CBE sera double de l'angle A : & partant les deux angles BCE, CBE ensemble seront quadruple du mesme angle A. Et puis que l'angle externe CED est egal aux internes BCE, CBE, aussi CED sera quadruple du mesme angle A, & partant de l'angle BEC son egal : & par la 33. prop. 6. l'arc DC sera pareillement quadruple de l'arc CB : & partant l'arc du demy cercle BCD sera quintuple du mesme arc BC, & consequemment toute la periphere du cercle sera decuple d'iceluy arc BC : Parquoy la ligne droicte BC est le costé du decagone.

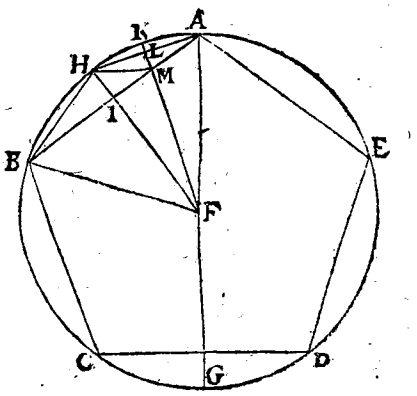


Maintenant, le moindre segment CB soit le costé du decagone du cercle BCD. Ie dis que le grand segment AC est le costé de l'hexagone : Car derechef soit accommodé au cercle BCD, le segment BC, & soit tiré le diametre BED : puis de l'interualle AC soit descrit le cercle CFG, duquel le diametre est CAG, & par le corol. de la 15. prop. 4. AC sera costé de l'hexagone du cercle CFG. Donc puis que AB est couppee en C, selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segm. AC est costé de l'hexagone du cercle CFG, le petit segment CB, comme il a ia esté demonstré, sera costé du decagone du mesme cercle CFG. Soit donc descrit en iceluy cercle CFG, le decagone equilateral & equiangle CFG : Item au cercle BCD, le decagone equilateral & equiangle BCD, & les costez BC, CF seront egaux entr'eux : Mais d'autant que les lignes droittes CD, FG estans tirees, les angles CDB, FGC insistans sur arcs semblables BC, CF, sont egaux, comme nous auons demonstré au scholie de la 22. prop. 3. & que les angles BCD, CFG estans au demy cercle sont aussi egaux, sçauoir droicts par la 31. prop. 3. les costez BD, CG seront pareillement egaux entr'eux par la 26. prop. 1. Parquoy les diametres BD, CG estans egaux, les cercles BCD, CFG seront aussi egaux : & partant puis que la ligne droicte AC est costé de l'hexagone du cercle CFG, aussi la mesme AC sera le costé de l'hexagone du cercle BCD. Ce qui est proposé.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre est F, soit inscrit vn pentagone equilateral, vn costé duquel est AB. Ie dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarrez des costez de l'hexagone, & du decagone inscrits au mesme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG, & ioinct FB, soit couppé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle couppe aussi la ligne droicte AB en I, & soient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres, soit couppé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle couppe aussi la ligne droicte AH en L, & la ligne droicte AB au poinct M, auquel soit menee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH, BFH appuyez sur iceux, par la 27. pr. 3. Parquoy les costez AF, FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la base AI sera egale à la base BI, par la 4. prop. 1. & les angles AIF, BIF aussi egaux, & partant droicts. Par mesme raison seront egales les lignes droictes AL, HL, & les angles ALF, HLF droicts. Or si des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oste arcs egaux ABC, AED, resteront egaux les arcs CG, GD, & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD. Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD sont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estant double de l'arc HK, aussi le sera CG. Et puis que les arcs AB, BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont equemultiplices, sçauoir est doubles des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. prop. 6. Mais par la 20. prop. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB en la circonference: donc les angles BFM, FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB sera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Derechef, puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4. prop. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est egal à l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux: Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA: & partant par la 32. prop. 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis

qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. prop. 6. comme AB ſera à AH, ainſi AH à AM: & par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, AM ſera egal au quarré de AH. Mais il a eſté demonſtré que le rectangle de AB, BM, eſt egal au quarré de BF: donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM enſemble, ſont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. prop. 2. iceux rectangles ſont egaux au quarré de AB: donc le quarré de AB coſté du pentagone eſt egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, coſtez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui eſtoit à prouuer.

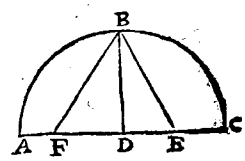
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte qu'vne ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuiſe en deux egalement vn arc, diuiſe auſſi la ligne ſubtendante d'iceluy arc en deux egalement, & à angles droicts.

Eſt auſſi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuiſe en deux egalement l'arc que le coſté oppoſé à iceluy angle ſubtend, comme auſſi iceluy coſté oppoſé, & à angles droicts. Car il a eſté demonſtré que le diametre AG tiré du poinct A, diuiſe en deux egalement l'arc CD, lequel le coſté oppoſé CD ſubtend: Parquoy par ce que deſſus, il couppera auſſi en deux egalement & à angles droicts iceluy coſté CD. La meſme demonſtration ſera en tout polygone equilateral inſcrit au cercle, le nombre des coſtez eſtant impair, tellement que ſi d'vn angle de quelconque polygone regulier dont le nombre des coſtez eſt impair, on meine vne ligne droicte par le centre d'iceluy qui couppe le coſté oppoſé; elle couppera les angles en deux egalement, comme auſſi ledit coſté, & à angles droicts. Mais au contraire, ſi elle couppe l'angle, ou le coſté en deux egalement, ou à angles droicts: icelle ligne paſſera par le centre.

SCHOLIE.

Au quatrieſme liure, Euclide a enſeigné à deſcrire au cercle vn pentagone equilateral: Mais Ptolomee au premier liure de ſa grande conſtruction a enſeigné vn autre moyen, beaucoup plus bref & facile pour deſcrire tant ledit pentagone que le decagone; lequel moyen nous auons deſia rapporté en noſtre Conſtruction de la table des ſinus: & neantmoins nous le rapporterons encore icy. Soit donc vn cercle ABC, duquel le centre eſt D, & ayant tiré le diametre AC, du centre D ſoit eſleuee DB perpendic. à AC; & apres auoir couppé en deux egalement le ſemidiametre DC en E, & menee BE ſoit priſe EF egale à EB, & tiree BF. Ie dis que BF eſt le coſté du pentagone, & DF le coſté du decagone. Car puis que CD eſt couppee en deux egalement en E, & qu'à icelle eſt adiouſtee DF, par la 6. pr. 2. le rectangle de CF, DF auec le quarré de DE eſt egal au quarré de FE, ou EB ſon egale. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EB eſt egal aux quarrez de BD, DE: donc le rectangle de CF, DF, auec le quarré de DE ſera auſſi egal aux quarrez de BD, DE: & oſtant le quarré de DE commun, reſtera le rectangle de CF, FD egal au quarré de BD, c'eſt à dire au quarré de CD: & par la 17. prop. 6. comme CF ſera à CD, ainſi CD à DF: & partant la ligne droicte CF ſera diuiſee en D ſelon la moyenne & extreme raiſon. Veu donc que le grand ſegment CD eſt le coſté de l'hexagone du cercle ABC par le corol. de la 15. prop. 4. le moindre ſegment DF ſera le coſté du decagone du meſme cercle par le ſchol. prec. Et pour ce que par cette 10. prop. le quarré de BD, coſté de l'hexagone, auec le quarré de DF, coſté du decagone, eſt egal au quarré du coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle, & que par la 47. pr. 1. le quarré de BF eſt egal aux ſuſdits quarrez de BD, DF; le quarré du coſté du pentagone ſera egal au quarré de BF; & partant la



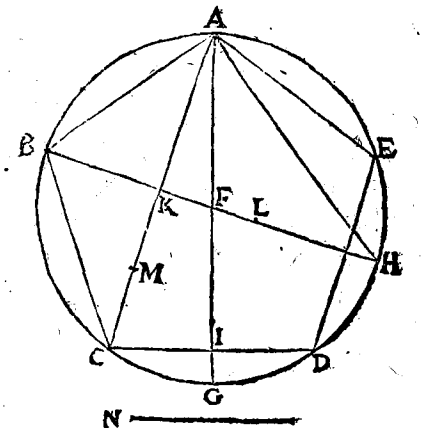
ligne droitte BF est egale au costé du pentagone. Ce qui a esté proposé.

De cecy appert qu'estant cogneu le diametre d'vn cercle, on cognoistra aisement le costé tant du pentagone que du decagone inscriptibles en iceluy cercle. Car le diametre AC estant 8, BD sera 4, & DE 2 : partant BE ou EF sera √20, & ostant DE d'icelle EF, restera DF √20—2, qui est le costé du decagone : Et pource que le quarré d'iceluy costé FD est 24—√320, & celuy de BD 16; le quarré de BF sera 40—√320, & partant icelle BF, qui est egale au costé du pentagone sera √(40—√320).

THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrationel, appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diamatre est rationel : ie dis que AB, costé du pentagone, est irrationel, appellé ligne mineure.



Car soient menez par le centre F les diametres AG, BH, desquels AG couppera le costé CD en deux egalement en I, & à angles droicts par le corol. de la preced, soient aussi tirees les lignes droictes AC, AH, desquelles AC sera couppee par le diametre BH en deux egalemẽt en K par le corol. de la preced. Partant est manifeste que les deux triangles ACI & AKF sont equiãgles : car l'angle du poinct A estant commun à tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC; le tiers sera egal au tiers par la 32. prop. 1. Et par la 4. prop. 6. comme IC à CA, ainsi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel est rationel & egal à A) soit retranchee FL egale au quart de FA, laquelle FL sera rationele, estant le quart d'vne ligne rationele, & par la 16. prop. 10. BL composee des deux BF, FL, & commensurable à chacune d'icelles, sera aussi rationele. Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne : Et par la 15. prop. 5. CI sera à CM quart de CA, comme KF à FL quart de FA : Que si on double les deux CI & CM par la 15. prop. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL : & en composant, comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL : Et par la 22. p. 6. le quarré de la composee de CD & CK sera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC estant couppee en la moyenne & extreme raison (sçauoir est estant tiree la ligne droicte BD) par la 8. prop. 13. son plus grand segment est egal au costé du pentagone, sçauoir à iceluy CD; par la 1. p. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & de CK moitié de la toute CA, sera quintuple du quarré de CK, moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, estant FL quart de FB; donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL au quarré de

FL, c'eſt à dire en raiſon doublee de KL à FL: car iceux quarrez ſont en cette raiſon par la 20. prop. 6. dont s'enſuit que KL ſera moyenne proportionelle entre BL & FL. Mais par le corol. de la meſme propoſition le quarré de BL ſera au quarré de KL, comme BL à FL, c'eſt à dire que le quarré de BL ſera quintuple du quarré de KL: donc iceux quarrez ſeront entr'eux comme nombre à nombre, & partant commenſurables par la 6. pr. 10. & conſequemment les lignes BL, KL ſeront commenſurables ent'relles, au moins en puiſſance: Mais leurs quarrez eſtans entr'eux comme 5 à 1, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré par la 9. prop. 10. icelles lignes BL & KL, ſeront incommenſurables en longitude: & partant BL ayant eſté monſtree rationelle, icelles BL & KL ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 74. prop. 10. BK ſera reſidu.

Maintenant, que la ligne BL puiſſe plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que le quarré de BL, qui eſt quintuple du quarré de KL eſt egal aux deux quarrez de KL & N, iceux quarrez de BL & N ſeront entr'eux comme 5 à 4, & partant commenſ. par la 6. prop. 10. & conſequemment les lignes BL & N, commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance: Mais BL a eſté monſtree rationelle: donc N le ſera auſſi. Et pource que les quarrez d'icelles BL & N ſont entr'eux comme 5 à 4, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre qnarré à nombre quarré, icelles lignes BL & N ſeront incommenſurables en longit. par la 9. p. 10. & partant rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Donc la toute BL eſtant rationelle commenſ. en longitude à la rationelle propoſee BE (car BL eſt de 5 parties telle que BH en a 8) peut plus que ſa conuenable KL du quarré de N, qui luy eſt incommenſ. en longit. partant BK ſera reſidu quatrieſme par la 4. des tierces def. du 10.

Finalement, pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB eſt moyenne proportionele entre BH, BK; (car par la 31. prop. 3. le triangle ABH a l'angle BAH droict, duquel eſt tiree AK perpend à la baſe BH) le quarré de AB ſera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la ſuperficie contenue de la rationele BH & du reſidu quatrieſme BK: par la 95. prop. 10. icelle AB ſera ligne mineure. Parquoy ſi dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

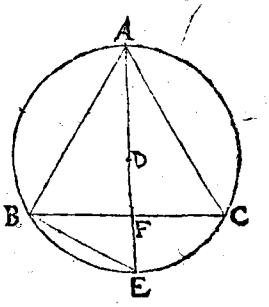
Le diametre BH ſoit 8: donc BF ſera 4, BL 5, & AB $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& par conſequent ſon quarré ſera* $40-\sqrt{320}$, *qui diuiſé par BH 8, viendront* $5-\sqrt{5}$ *pour BK; & conſequemment KL ſera* $\sqrt{5}$, *qui eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à BL, leurs quarrez 5 & 25, eſtans en raiſon quintuple; partant BK eſt reſidu. Et puis que BL peut plus qu'icelle KL du quarré de N, iceluy quarré ſera 20, & N* $\sqrt{20}$, *qui eſt incommenſurable en longitude à la toute BL 5; & partant BK ſera reſidu quatrieſme. Mais le quarré de AB* $40-\sqrt{320}$ *eſtant egal au produit d'iceluy reſidu* $5-\sqrt{5}$ *multiplié par la rationele BH 8; icelle AB* $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *qui eſt le coſté du pentagone, ſera ligne mineure, comme veut la propoſition. Les nombres appliquez aux autres lignes de la fig. ſeront tels qu'ils enſuiuent: KL ſera* $\sqrt{5}-1$, *CK* $\sqrt{(10+\sqrt{20})}$, *AC* $\sqrt{(40+\sqrt{320})}$, *CM* $\sqrt{(2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}})}$, *& CI* $\sqrt{(10-\sqrt{20})}$.

THEOR.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit au cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.



Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. propos. de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E; & aussi la ligne droicte BC en deux egalement & à angles droicts: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiéme partie: partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone, & egale au demy diametre DE par le corol. de la 15. p. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale au demy diametre par le scholie de la 4. pr. 2. & par la 47. prop. 1. il est aussi egal aux deux de BA & BE, l'angle ABE estant droict par la 31. prop. 3. il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce que dessus, que le quarré du diametre d'vn cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquitierce, c'est à dire comme 4 à 3. Car puis qu'il a esté demonstré que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD, posant le quarré de AB 3, le quarré de AD sera 1; & le quarré de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4 à 3.

Et pour ce que par le corol. de la 8. prop. 6. comme AE est à AB, ainsi AB est à AF, perpendiculaire tombant d'vn angle sur vn costé; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4 à 3.

On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE, lequel tombe perpendiculairem. sur BC costé du triangle equilateral, est couppé en deux egalement en F par ledit costé BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE, costé de l'hexagone; si on pose iceluy quarré de AB estre 12, le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1 par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est couppee en deux egalement en F par le costé BC: tellement que la ligne perpendic. tombant du centre du cercle au costé du triangle equilateral inscrit en iceluy est moitié du costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

SCHOLIE.

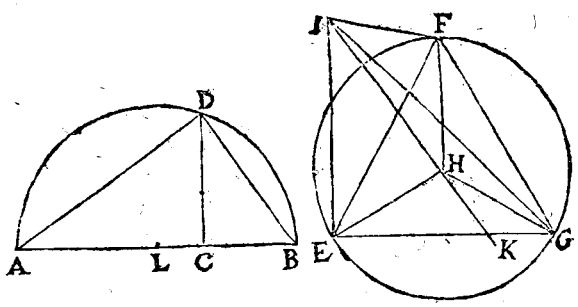
Le diametre AE estant 8, BE sera 4, EF 2, AF 6, AB √48 & BF √12: Parquoy le quarré du costé du triangle sera 48, & celuy du semidiametre 16, &c.

PROB. 1. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale: &

monſtrer que le quarré du diametre d'icelle ſphere, eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté d'icelle pyramide.

Soit AB diametre de la ſphere donnee, & ſoit diuiſé en C, de ſorte que AC ſoit double de BC. Et apres auoir deſcrit ſur AB le demy cercle ADB, leué la moyenne proportionele CD, & mené les lignes droictes DA & DB: Soit deſcrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE ſoit egal à CD: & apres auoir inſcrit en iceluy le triangle equilateral EFG, & tiré HF, HG, chacune deſquelles ſera egale à CD, eſtant egale à HE; du centre H ſoit leuee HI perpendiculaire au plan du cercle EFG par la 12. p. 11. & egale à AC: puis ſoient menees les lignes IE, IF, & IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI eſt equilaterale.



Car par la conſtruction le triangle EFG eſt equilateral, & il eſt euident que les trois lignes IE, IF, IG, ſont auſſi egales entr'elles: (puis que par la 47. prop. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle eſt egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, leſquelles ſont egales.) Et d'autant que les coſtez AC, DC du triangle ADC ſont egaux aux coſtez HI, HE du triangle IHE; & les angles qu'ils comprennent egaux, eſtans droicts: la baſe AD ſera egale à la baſe EI par la 4. prop. 1. En la meſme maniere ſera demonſtré AD eſtre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC eſt double du quarré de CD, (car ils ſont l'vn à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. prop. 6. eſtans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de CD, ou de ſon egale HE: Mais par la prec. prop. le quarré de EF eſt auſſi triple du quarré de HE: donc EF & AD ſont egales: & par la 1. com. ſent EF & EI ſeront egales. Parquoy puis que AD eſt auſſi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI ſeront equilateraux, & egaux entr'eux: Et par conſequent la pyramide EFGI, dõt la baſe eſt le triangle EFG, & le ſommet I, eſt equilaterale.

Ie dis en ſecond lieu qu'icelle pyramide peut eſtre inſcrite en la ſphere, dont le diametre eſt AB. Soit continuee la ligne perpendiculaire IH par deſſous la baſe de la pyramide iuſques en K: tellement que HK ſoit egale à CB, & la toute IK à la toute AB, & ſoit imaginé eſtre poſé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, ſçauoir le poinct A au poinct I, le poinct B au poinct K: & puis que AC & CB ſont egales à IH & HK; & HG egale à DC, faiſant angle droict auec IH, auſſi bien que leurs egales AC & CD, il eſt euident que le poinct D du demy cercle tombera ſur le poinct G: Partant le diametre AB demeurant immobile, ſi le demy cercle fait vne reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (eſtans les lignes HE, HF, HG egales) & par ainſi la pyramide EFGI eſt inſcrite en la ſphere donnee, puis que tous les angles d'icelle E, F, G, I, touchent ladite ſphere.

Finalement, ie dis que le quarré du diametre AB eſt ſeſquialtere au quarré du coſté AD, qui eſt egal à chacun coſté de la pyramide: Car puis que AB eſt triple de BC;

& AC double de la meſme BC, AB ſera en raiſon ſeſquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC ſont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AD. Donc auſſi le quarré de AB ſera au quarré de AD en raiſon ſeſquialtere. Nous auons donc inſcrit vne pyramide equilaterale dans vne ſphere donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De ces choſes on peut facilement colliger, que la puiſſance du diametre de la ſphere eſt quadruple ſeſquialtere de la puiſſance du ſemidiametre du cercle deſcrit à l'entour de la baſe de la pyramide. Car puis que AB diametre de la ſphere, a eſté demonſtré ſeſquialtere en puiſſance à EF coſté de la pyramide, le quarré de EF ſera de 6 parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF eſt triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de 9 telles parties que contiendra le quarré de AB; le quarré de HE en contiendra 2: Et partant le diametre AB eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſance au ſemidiametre HE, puis que la raiſon des quarrez eſt comme 9 à 2.

Auſſi la perpendiculaire tiree du centre de la ſphere au plan de la baſe de la pyramide eſt la ſixiéme partie du diametre de la ſphere, & la tierce partie du ſemidiam. Car L ſoit le centre du demy cercle ADB: L ſera pareillement le centre de la ſphere. Ie dis que la ligne LC, (qui eſt la perpend. tiree du centre de la ſphere à la baſe EFG: car puis que AC eſt egale à HI, & partant le poinct C le meſme que H, ſera auſſi L le meſme que le centre de la ſphere.) eſt la ſixieſme partie du diametre de la ſphere, ſçauoir eſt de AB, & la tierce partie du ſemid. AL. Car puis que AC eſt double de CB, de telles 4 parties qu'eſt AC, de 2 telles ſera CB: & partant de 6 telles ſera la toute AB, & de 3 le ſemid. AL. Parquoy ſi AC eſt 4, & AL 3; LC ſera 1: & partant LC ſera la ſixieſme partie de AB, & la tierce de AL.

Semblablement la hauteur de la pyramide HI ſera deux tierces parties du diametre de la ſphere. Car HI eſt la meſme que AC, laquelle par la conſtruction eſt deux tierces parties d'iceluy diametre.

Auſſi de 9 telles parties que ſera le quarré d'iceluy diametre, le quarré de la hauteur de la pyramide en ſera 4: Car la raiſon de 9 à 4, eſt la raiſon doublee de 3 à 2.

SCHOLIE.

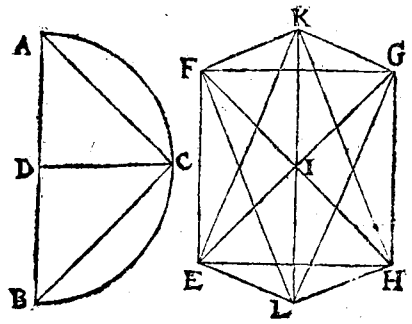
Le diametre AB eſtant 12, AC ou HI ſera 8, CB 4, CD ou HE √32, AD ou EF, EI √96, & BD √48. Parquoy le quarré du diametre AB eſt 144, & celuy de EF coſté de la pyramide eſt 96: tellement que ces deux quarrez ſont entr'eux comme 3 à 2, ainſi que veut la prop. &c.

PROBL. 2. PROP. XIIII.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn octaedre: Et monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt double du quarré du coſté de l'octaedre.

Soit AB le diametre de la ſphere donnee, & iceluy ſoit couppé en deux egalement au poinct D: & apres auoir conſtruict le demy cercle ACB; leué la perpendiculaire DC, & mené les lignes droictes CA, CB, leſquelles ſeront egales entr'elles par la

4. p. 1. ſur la ligne EF egale à l'vne d'icelles AC, CB, ſoit conſtruit le quarré EFGH: dans lequel ſoient menees les deux diagonales FH, GE ſe couppans au poinct I duquel poinct par la 12. p. 11. ſoit eſleuee la ligne IK perpendiculairement ſur le quarré GE, & continuee par deſſous iceluy plan iuſques en L, tellement que IK, IL ſoient chacune egale à AD: puis des poincts L & K, ſoient menees aux angles du quarré les lignes KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, & LH.



Ie dis maintenant que la figure ſolide KL eſt enuironnee de huict triangles equilateraux; & que c'eſt vn octaedre. Car le quarré EFGH, ayant les coſtez egaux à AC: Il eſt euident que les diagonales EG, FH ſeront egales à AB; partant leurs moitiez à AD. Mais les deux lignes IL & IK ſont auſſi egales à AD: & par conſequent elles ſeront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales: & par la 4. prop. 1. les huict lignes LE, LF, LG, LH, KE, KF, KG, KH, ſerõt toutes egales entr'elles; & aux quatre du quarré EFGH par la meſme 4. prop. 1. (eſtans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en conſtituant des angles droicts au poinct I, milieu du quarré.) Et puis que tous les coſtez ſont egaux, tous les triangles ſeront equilateraux, ſçauoir les quatre d'audeſſus du quarré EFGH, ayans leurs baſes ſur les quatre coſtez d'iceluy quarré, & ſe terminans au poinct K: & quatre autres au deſſous du meſme quarré, ayans auſſi leurs baſes ſur les coſtez du quarré, & ſe terminans au poinct L: & partant le ſolide KL compris de huict triangles equilateraux, ſera octaedre.

Ie dis d'auantage qu'iceluy octaedre eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car il eſt euident que la ligne KL, eſt egale au diametre AB, & que l'angle KEL eſt droict: (d'autant que les deux lignes KI, IE eſtans egales, les angles ſur la baſe KE ſeront egaux, & demy droicts, pource que l'angle KIE eſt droict: Et par meſme raiſon l'angle IEL eſt demy droict: & partant le total KEL ſera droict.) Partant le demy cercle ayant pour diametre KL, & faiſant vne reuolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le poinct E: & par meſme diſcours il touchera auſſi les trois autres F, G, H, deſquels les angles ſont egaux à l'angle E, & par conſequent l'octaedre KL ſera inſcriptible en la ſphere dont le diametre eſt AB, puis que tous les angles d'iceluy touchent ladite ſphere.

Finalement, il eſt euident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la ſphere AB ou KL, eſt egal aux deux quarrez de KE, EL, leſquels ſont egaux: & partant iceluy quarré de KL diametre de la ſphere, ſera double du quarré de l'vn d'iceux coſtez de l'octaedre. Nous auons donc inſcrit vn octaedre dans vne ſphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il eſt euident par les choſes cy-deſſus, qu'en l'octaedre trois diametres s'entrecouppent à angles droicts au centre de la ſphere, car le diametre KL eſt perpend. aux deux diametres EG, FH, qui s'entrecouppent au centre I à angles droicts.

Il eſt encore euident que l'octaedre peut eſtre diuiſé en deux pyramides ſemblables & egales, ayans pour baſe commune le quarré EFGH, & pour ſommets K & L, telles que ſont les deux pyramides EFGHK, EFGHL.

Il appert auſsi que ſi le tetraedre & l'octaedre ſont deſcrits en vne meſme ſphere: le coſté du tetraedre ſera ſeſquitierce en puiſſance au coſté de l'octaedre. Car le quarré du diametre de la ſphere eſtant 6 parties, par la prec. prop. le quarré du coſté du tetraedre ſera 4 parties: & par cette 14. prop. le quarré de l'octaedre ſera 3 parties. Donc le quarré du coſté du tetraedre ſera au quarré du coſté de l'octaedre, comme 4 à 3, qui eſt raiſon ſeſquitierce.

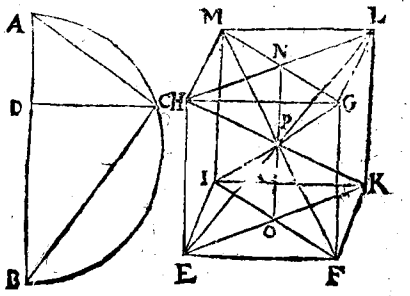
SCHOLIE.

Le diametre AB eſtant 12, AD, ou DC, IK ſera 6, AC ou EFV72, EG 12, & EI 6. Parquoy le quarré AB diam. de la ſphere eſt 144, & celuy de EF coſté de l'octaedre eſt 72: tellement qu'iceux quarrez ſont entr'eux comme 2 à 1, ainſi que veut la prop. &c.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn cube: & monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt triple au quarré du coſté d'iceluy cube.

Soit le diametre de la ſphere donnee AB, lequel ſoit couppé au poinct D, en ſorte que BD ſoit double de AD, c'eſt à dire que AB ſoit triple d'icelle AD: Puis, apres auoir conſtruict le demy cercle ACB, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC & BC; ſur EF egale à AC, ſoit fait le qnarré EFGH, ſur lequel ſoient eſleuees par la 12. prop. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, FK, GL, HM, chacune egale à EF: puis ſoient menees les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK ſont perpendiculaires au plan EFGH, elles ſeront paralleles par la 6. pr. 11. Mais elles ſont auſsi egales: donc par la 33. p. 1. EF, IK ſeront pareillement egales & paralleles: & partant EFKI eſt vn parallelogramme ayant les quatre coſtez egaux. Mais il a auſsi par la 34. prop. 1. les 4 angles droicts, puis que les angles EIK, FKI ſont oppoſez aux droicts KFE, IEF: donc EFKI eſt quarré. Par meſme raiſon FKLG, GLMH, HMIE ſeront quarrez: & partant IKLM ſera auſsi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il eſt egal & ſemblable au quarré oppoſé EFGH: Car EL eſt vn ſolide parallelipipede, pource que par la 15. pr. 11. les plans oppoſez d'iceluy ſont parallels, eſtans tirez par des lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL ſera vn cube: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, & GM, des plans oppoſez EFKI, HGLM, ſoient imaginez eſtre tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, leſquels par la 28. pr. 11. coupperont le cube en deux egalement, & paſſeront par le centre d'iceluy, ſçauoir par le poinct P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entrecoupperont auſsi en deux



egalement: & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P sur le diametre EL; il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, décrira vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de EK est egal aux quarrez des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL: les quarrez de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. p. 1. le quarré de EL est egal aux quarrez de EK, KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB: (car par le corollaire de la 8. prop. 6. AB, AC, AD sont proport. & partant par le corol. de la 20. p. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC. Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres; comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstré que le quarré du diametre EL est triple du quarré du costé du cube KL. Parquoy nous auons fait tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarrez du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC, costez du cube, & du tetraedre.

Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux egalement au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarrez opposez, se couppent en deux egalement au mesme centre de la sphere.

SCHOLIE.

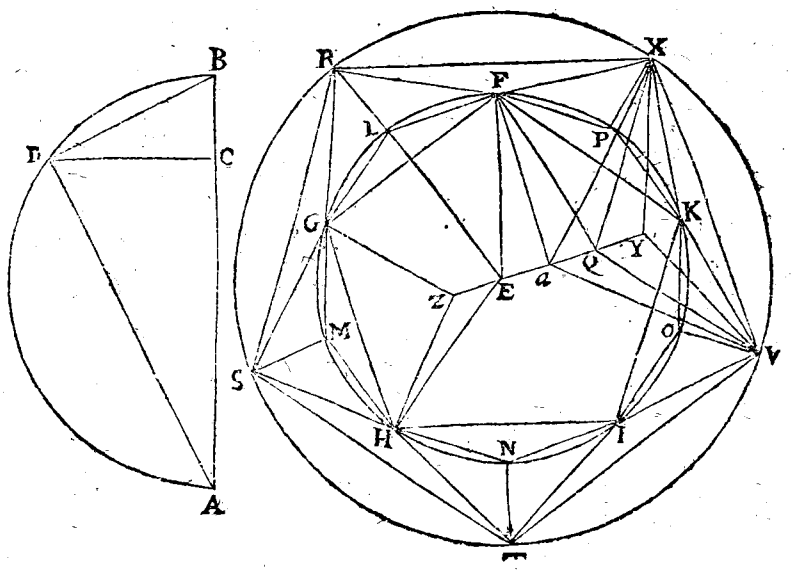
Le diametre AB estant 12, AD sera 4, BD 8, DC √32, BC √96, AC ou EF √48, EK √96, & EL 12. Parquoy appert que le quarré du diametre de la sphere AB, qui est 144, est triple du quarré de EF costé du cube, qui est 48, &c.

PROBL. 4. PROP. XVI.

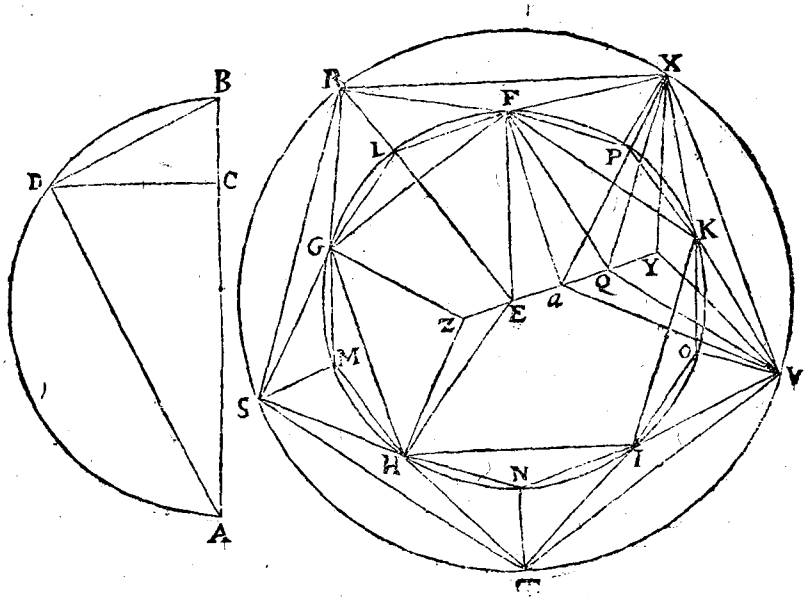
Dans vne sphere donnee, inscrire vn icosaëdre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construict le demy cercle ADB, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes droictes AD, DB; du centre E, & de l'interuale EF egale à BD: soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral: (ce qui se fera en couppant en deux egalement l'arc d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E, & des poincts L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du

cercle FGHIK, chacune desquelles soit posee egale à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conjoignant icelles, sçauoir EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auons tirees pour euiter confusion) seront egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont egales au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. pr. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallel au mesme plan FGHIK, tiré par les lignes EM, EN: mais que le plan tiré par les lignes QR, QS conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS; il est euident par les choses demonstrees à la 16. prop. 11. que ces deux plans en font vn seul. On demonstrera en la mesme maniere, que le plan tiré par QT, QV, auec celuycy en fait vn seul, & aussi celuy tiré par QV, QX & par QX, QR: tellement donc que les 5. lignes QR, QS, QT, QV, QX sont en vn mesme plan: & partant si de Q, & de l'interuale QX, on descrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres poincts R, S, T, V, & sera egal au cercle FGHIK. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autant que LR, PX sont egales & paralleles; si on imagine estre tiree vne ligne droicte LP, aussi par la 33. prop. 1. LP, RX seront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la cinquiesme partie du cercle FGHIK, sçauoir les deux dixiesmes parties LF, FP: Donc aussi RX, prend la cinquiesme partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous conclurons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la cinquiéme partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'hexagone du cercle FGHIK; & que LF est costé du decagone, par la 10. p. 13. le quarré du costé du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarré de FR par la 47. prop. 1 est egal à iceux quarrez de LR, LF: Donc le quarré de FR est egal au quarré du costé



du pentagone; & par conſequent la ligne RF ſera egale à LP coſté du pentagone, ou à FG, c'eſt à dire à RX. Par la meſme raiſon, les autres lignes RG, SG, &c. ſeront egales aux autres coſtez de chaque pentagone: & partant les dix triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, ſeront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant ſoit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que chaque prolongement QY, Ez ſoit egal au coſté du decagone, & ſoient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, Gz, HE, Hz. D'autant que QX eſt ſemidiametre du cercle RSTVX, c'eſt à dire coſté de l'hexagone, & QY eſt coſté du decagone de meſme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de XV, coſté du pentagone, ſera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47. p. 1. à iceux quarrez de QX, QY, eſt auſſi egal le quarré de XY: (car l'angle XQY eſt droict, eſtant EQ perpendiculaire à l'vn & l'autre plan des cercles parallels). Donc le quarré de XY eſt egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à la ligne XV. Par meſme raiſon XV ſera demonſtree egale à VY: & partant le triangle VYX eſt equilateral. Par meſme maniere, (eſtans tirees les lignes RY, SY, TY, leſquelles ne ſont tirees pour euiter confuſion) chacun des 4 triãgles RYX, RYS, SYT, TYV, ſera demõſtré equilateral, & egal au triangle VYX, c'eſt à dire à chacun des dix premiers triangles, puis que tous leurs coſtez ſont egaux aux coſtez du pentagone. Par ſemblable argument ſera prouué que le triangle GZH eſt equilateral, comme auſſi les 4 autres triangles HZI, IZK, KXF, FZG, (deſquels toutesfois nous n'auons auſſi tiré les lignes, afin d'euiter confuſion) tous leſquels ſeront egaux tant entr'eux qu'aux 15 precedans. Veu dõc que tous ces 20 triangles ſont equilateraux, & egaux, & qu'ils ſe conioignent les vns aux autres par lignes droictes; ſera conſtitué d'iceux vn Icoſaedre: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee, de laquelle le diametre eſt AB. Car ayant couppé en deux egalement EQ en *a*, & tiré les lignes *a*F, *a*X, *a*V; les coſtez *a*Q, QV du triangle *a*QV ſeront egaux aux coſtez *a*Q, QX du triangle *a*QX, (car QV, QX, ſont ſemy diametres du cercle RSTVX) & les angles *a*QV, *a*QX ſont droicts: & partant par la 4. prop. 1. les baſes *a*V, *a*X ſeront egales. Par la meſme raiſon, ſi on tire des lignes de *a* & Q, à R, S, T, les lignes *a*R, *a*S, *a*T ſeront demonſtrees egales entr'elles, & à icelles *a*V, *a*X. Et puis que les coſtez *a*Q, QX du triangle *a*QX ſont egaux aux coſtez *a*E, EF du triangle *a*EF,



aEF, (pource que QX, EF ſont demy diametres de cercles egaux, & EQ eſt couppee en deux egalement en a) & les angles aQX, aEF ſont auſſi egaux, ſçauoir droicts: par la 4. prop. 1. les baſes aX, aF, ſeront auſſi egales. Par meſme raiſon, ſi de a & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonſtrera les lignes aG, aH, aI, aK, eſtre egales à icelle aX: & partant les dix lignes droictes tirees de a aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, ſont egales. Et d'autant que QE eſt ſemidiametre, c'eſt à dire coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & EZ coſté du decagone du meſme cercle; par la 9. prop. 13. QZ ſera diuiſee en la moyenne & extreme raiſon en E, & le plus grand ſegment ſera QE. Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ ſera quintuple du quarré de Ea. Mais le quarré de aF eſt auſſi quintuple du meſme quarré de Ea: (car le quarré de EF eſtant quadruple du quarré de Ea par le ſcholie de la 4. prop. 2. pource que EF eſt double de Ea: les quarrez de EF, Ea, ſont le quintuple du quarré de Ea. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de aF eſt egal à iceux quarrez de EF, Ea: donc auſſi le quarré d'icelle aF ſera quintuple d'iceluy quarré de Ea.) Donc les quarrez de aZ, aF, ſont egaux: & par conſequent les lignes aZ, aF ſeront egales. Et puis que aE, aQ, & EZ, QY ſont egales, auſſi aZ, aY ſeront egales: & toutes les lignes droictes tirees de a, à tous les angles de l'Iſcoſaedre pareillement egales. Parquoy la ſphere deſcrite à l'entour du diametre ZY, paſſera par tous les angles de l'Iſcoſaedre. Car d'autant que par la 15. prop. 5. comme aZ eſt à aE, ainſi YZ à QE; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de aZ eſt au quarré de aE, ainſi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de aZ a eſté demonſtré quintuple du quarré de aE: pareillement le quarré de YZ ſera quintuple du quarré de QE, c'eſt à dire du quarré de DB ſon egale. Mais auſſi le quarré de AB eſt quintuple du meſme quarré de BD: (car AB, BD, BC eſtans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB ſera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. prop. 6. & partant AB eſtant quintuple de BC, auſſi le quarré de AB ſera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB ſont egaux: & partant les lignes YZ, AB, & les ſpheres deſcrites à l'entour d'icelles ſeront egales.

Ie dis finalement que le coſté de l'Icoſaedre eſt ligne irrationele, appellee ligne mineure: ce qui eſt euident par la 11. prop. 13. eſtant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou ſon egale BD, ligne rationele commenſurable en puiſſance à la poſee rationele AB, de laquelle nous auons monſtré que le quarré eſtoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc fait ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que le quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarre du ſemidiametre du cercle comprenant 5 coſtez de l'Icoſaedre.

Et auſſi qu'iceluy diametre de la ſphere eſt compoſé du coſté de l'hexagone, & de deux coſtez du decagone deſcrits en vn meſme cercle.

Et encore que le coſté de l'icoſaedre eſt egal au coſté du pentagone, par le moyen duquel eſt conſtruit iceluy icoſaedre.

SCHOLIE.

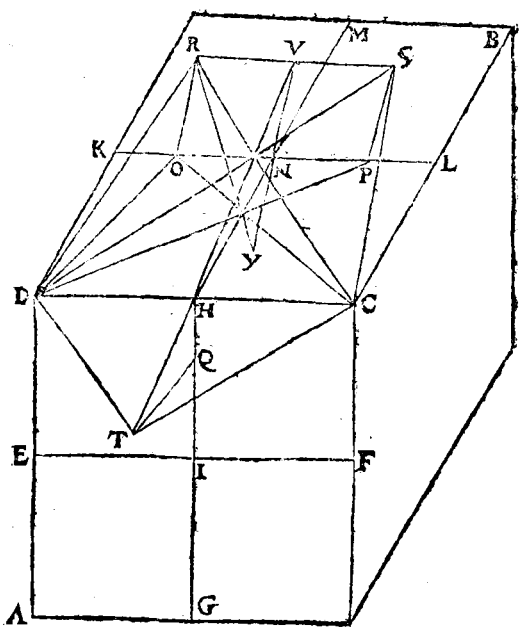
Le diametre AB eſtant 10, AC ſera 8, CB 2, CD 4, AD $\sqrt{80}$, BD ou EF $\sqrt{20}$: & par tant GF ou RX coſté du pentagone ſera $\sqrt{50}-\sqrt{500}$), & LG ou FL $\sqrt{5}-\sqrt{5}$. Mais RL

estant egale au semidiametre, ou costé de l'hexagone EF, est $\sqrt{20}$: donc RG ou RF costé de l'Icosaedre sera $\sqrt{(50-\sqrt{500})}$, qui partant est egal au costé du pentagone GF ou RX, & par consequent ligne mineure comme iceluy. Dauantage Ea ou aQ estant moitié de EQ ou EF egale à QX sera $\sqrt{5}$, EZ ou QY $5-\sqrt{5}$: partant ZQ ou ZY composee du costé de l'hexagone EQ, & de celuy du decagone LF sera $5+\sqrt{5}$, IZ 5, & la toute ZY 10: Parquoy appert que le quarré du diametre de la Sphere est quintuple, &c.

PROB. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee residu.

Soit le cube AB inscriptible en la sphere donnee, duquel les deux plans exterieurs AC & DB, se rencontrent à angles droicts à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les costez soient couppez en deux egalement, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppans au poinct I; & DB, par les lignes KL & HM se couppans au poinct N. Item les trois lignes KN, NL, HI soient couppees en la moyenne & extreme raison aux poincts O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient NO, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11. soient leuees les deux lignes OR, PS perpendiculaires au plan DB: mais QT au plan AC, lesquelles soient posees egales aux trois segmens ON, NP, IQ: Puis soient menees les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Ie dis que DRSCT est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equiangle.



Car soient menees les lignes DO, DP, DS: & d'autant que KN est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct O, & que ON est le plus grand segment, par la 4. prop. 13. les deux quarrez de KN, KO seront triples du quarré de ON: Et KN estant egale à KD, & ON à OR, les deux quarrez de KD & KO, ou le seul de DO, qui leur est egal par la 47. pr. 1. est triple du quarré de OR: & partant le quarré de DR, qui est egal à tous les deux par la 47. prop. 1. sera quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO, son quarré, par le scholie de la 4. pr. 2. sera aussi quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré de DR: Partant les lignes DR, RS seront egales. Par mesme discours on monstrera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD, tant entr'eux qu'aux deux DR, RS: donc le pentagone DRSCT est equilateral.

Ie dis qu'il est aussi en vn mesme plan. Car ayant menee NV parallele à OR, soient tirees TH, & HV, icelles deux lignes se rencontreront directement: tel-

lement que THV ſera vne ſeule ligne droicte. Car d'autant que HI eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct Q; IH ſera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN eſt egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN eſt à NV, ainſi QT à QH. Parquoy les triangles NVH, QTH, ont deux coſtez proportionaux à deux coſtez, & ſont conioincts à l'angle H, tellement que les coſtez homologues HN, TQ; & NV, QH, ſont parallels par la 6. prop. 11. ces deux-là eſtans perpendiculaires au plan AC, & ces deux-cy au plan DB: Donc par la 32. prop. 6. THV ſera vne ſeule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte eſt en vn meſme plan: par conſequent le pentagone DRSCT eſt en vn meſme plan.

Ie dis encores qu'il eſt equiangle: Car puis que KN eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, eſtant ON plus grand ſegment, par la 5. p. 13. en adiouſtant KN à NP, egale au plus grand ſegment ON; la toute BP ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct N, & ſera KN le plus grand ſegment: & partant par la 4. prop. 13. les quarrez de KP & NP (ou PS ſon egale) ſont triples du quarré de KN, (ou de ſon egale KD:) & en adiouſtant le quarré de KD auec les deux de KP & PS: iceux trois quarrez ſeront quadruples du ſeul de KD, (ou par la 47. p. 1. au lieu des deux de KP & KD, le ſeul de DP auec celuy de PS, ou encore le ſeul de DS, ſera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC eſt auſſi quadruple par le ſcholie de la 4. prop. 2. eſtant DC double de KD: partant les deux lignes DC & DS ſeront egales: Mais auſſi eſtans tous les coſtez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien: Et par la 8. prop. 1. l'angle au poinct R ſera egal à l'angle au poinct T. Et ſemblablement nous monſtrerons que l'angle RSC eſt egal à l'angle DTC: partant trois angles du pentagone ſeront egaux, & par la 7. prop. 13. il ſera equiangle. Il eſt auſſi equilateral, & fait ſur DC l'vn des coſtez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que ſi on veut conſtruire de meſme façon vn pentagone, ſur chacun des vnze coſtez reſtans, on trouuera vne figure ſolide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux, qui par les def. ſera dodecaedre.

Ie dis d'auantage qu'il eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car ſi on prolonge VN, qui eſt perpendiculairem. eſleuee ſur le centre du quarré DB, il appert par la 39. prop. 11. qu'elle couppera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la couppe donc au poinct X, auquel poinct ſera le centre de la ſphere enuironnant le cube par le corol. de la 15. prop. 13. & NX eſt egale au demy coſté du cube: Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantoſt monſtré par la 4. prop. 13. que les quarrez de KP & NP ſont triples du quarré de KN: Mais VX eſt egale à KP; & RV à NP: (car NX eſt egale à KN, & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le ſeul de RX, par la 47. prop. 1. eſt triple du quarré de KN: Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcripte au cube, eſt triple du quarré du coſté d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre eſt triple au quarré du demy coſté. Or KN eſt le demy coſté du cube: Partant RX ſera le demy diametre de la ſphere circonſcrite au cube AB, duquel le centre eſt X. Par meſme diſcours nous monſtrerons que du poinct X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, ſont egales au demy diametre de la ſphere circonſcripte au cube. Partant vne meſme ſphere pourra eſtre circonſcripte au cube & au dodecaedre.

Ie dis finalement que le coſté du dodecaedre eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Car d'autant que lesdeux demy coſtez du cube KN, NL ſont chacun couppez en la moyenne & extreme raiſon : par la 15. prop. 5. toute la ligne KL ſera aux deux plus grands ſegmens enſemble, ſçauoir à OP, comme iceux plus grands ſegmens ſont aux plus petits enſemble, ſçauoir à la compoſee de KO & PL. Parquoy ſi KL coſté du cube eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera OP. Mais la toute KL ainſi couppee eſt rationele: (car ſon quarré eſt commenſurable au quarré du diametre de la ſphere, lequel eſt poſé rationel: puis qu'il eſt le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13.) Donc par la 6. prop. 13. le plus grand ſegment OP, c'eſt à dire RS coſté du dodecaedre qui luy eſt egal, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Nous auons donc fait tout ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que le coſté d'vn cube eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en vne meſme ſphere.

Auſsi que le coſté du cube eſt egal à la ligne droicte ſubtendant vn angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle meſme ligne eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, par la 8. prop. 13. le plus grand ſegment eſt coſté d'vn pentagone : & partant par la 5. prop. 13. la ligne droicte compoſee d'icelle, c'eſt à dire du coſté du cube, & du plus grand ſegment, c'eſt à dire du coſté du dodecaedre, eſt ſemblablement diuiſee, & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, mais le plus grand eſt coſté du cube: Il s'enſuit que ſi vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & que le moindre ſegment ſoit coſté du dodecaedre: le plus grand ſegment ſera coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

SCHOLIE.

Nous auons trouué à la 15. prop. que le diametre de la ſphere eſtant 12, le coſté du cube inſcriptible en icelle eſt $\sqrt{48}$, *& partant KN moitié d'iceluy coſté ſera* $\sqrt{12}$, *& eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon en O, le grand ſegment NO ſera* $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, *& le moindre KO* $\sqrt{27}-\sqrt{15}$, *tellement que leurs trois quarrez ſeront* $12, 18-\sqrt{180}$, *&* $42-\sqrt{1620}$. *Mais d'autant que le quarré de DO eſt egal aux deux quarrez de KO, DK, iceluy quarré de DO ſera* $54-\sqrt{1620}$: *& adiouſtant à iceluy le quarré de OR, c'eſt à dire de ON, viendront* $72-\sqrt{2880}$ *pour le quarré de DK coſté du dodecaedre : & partant iceluy coſté ſera* $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, *qui eſt reſidu ſixieſme. Dauantage, adiouſtant à KN ſon grand ſegment ON, viendront* $\sqrt{15}+\sqrt{3}$ *pour la toute KP, dont le quarré eſt* $18+\sqrt{180}$, *auquel quarré eſtant adiouſté celuy de DK, viendront* $30+\sqrt{180}$ *pour le quarré de DP ; & luy adiouſtant le quarré de PS, qui eſt* $18-\sqrt{180}$, *viendront 48 pour le quarré de DS ſubtendante de l'angle du pentagone, qui partant eſt* $\sqrt{48}$, *egal au coſté du cube : lequel coſté eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le moindre ſegment ſera* $\sqrt{108}-\sqrt{60}$, *& le grand* $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, *partant egal au coſté du dodecaedre, qui eſtant adiouſté à la ſubtendante DS, la compoſee ſera* $\sqrt{60}+\sqrt{12}$, *qui eſt le double de KP. Parquoy appert que le coſté d'vn cercle eſtant couppé, &c.*

PROB. 6. PROP. XVIII.

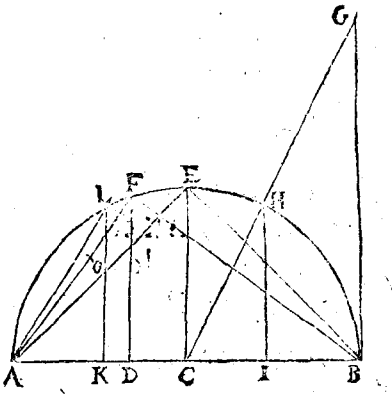
Le diametre d'vne ſphere eſtant donné; trouuer les coſtez des

cinq figures regulieres inſcrites en icelle ; & les comparer entr'eux.

Soit donné AB le diametre d'vne ſphere : & il faut premierement trouuer les coſtez des cinq figures regulieres inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diuiſé le diametre AB en deux egalement au poinct C, mais au poinct D, tellement que AD ſoit la tierce partie de AB : puis ayant deſcrit ſur AB vn demy cercle, ſoient eſleuees les perpendiculaires CE, DF, & tirées les lignes droictes AE, AF, BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF eſt moyenne proportionele entre AB, BD, par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à BD, ainſi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB eſt à BD en raiſon ſeſquialtere : (car par la conſtruction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2.) Donc auſſi le quarré de AB eſt au quarré de BD, en raiſon ſeſquialtere: & partant puis que par la 13. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté du tetraedre : BF ſera le coſte du tetraedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.



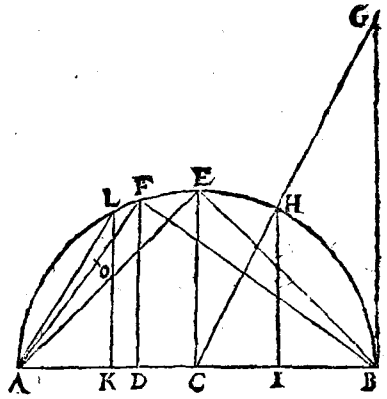
Derechef, puis que par le meſme corol. de la 8. prop. 6. AE eſt moyenne proportionele entre AB, AC : & partant comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB au quarré de AE par le corol. de la 20. prop. 6. & AB eſt double de AC : auſſi le quarré de AB ſera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt double du coſté de l'octaedre, AE ſera coſté de l'octaedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et pour autant que par les meſmes corol. des 8. & 20. prop. 6. le quarré de AB eſt au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la conſtruction AB eſt triple de AD ; le quarré de AB ſera triple du quarré de AF. Parquoy veu que par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré du coſté du cube, AF ſera le coſté du cube inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et d'autant que AF eſt coſté du cube, ſoit iceluy couppé en la moyenne & extreme raiſon au poinct O, duquel le plus grand ſegment ſoit AO : iceluy ſegment (par le corol. de la 17. prop. 13.) ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en la meſme ſphere que le cube, qui eſt celle là meſme qui a pour diametre AB.

Quant au coſté de l'Icoſaedre, ſoit leuee la perpendiculaire BG egale à AB : & apres auoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy poinct ſoit menee HI perpendicul. à AB par la 12. prop. 1. Or BG eſtant egale à AB, elle ſera double de BC : & partant par la 4. prop. 6. HI ſera double de IC : (car les triangles ſont equiangles, pour ce qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts : le tiers G ſera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI ſera quadruple du quarré de IC : & partant le quarré de HC (ou de ſon egale AC) qui par la 47. prop. 1. eſt egal à

tous les deux, ſera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD eſt le tiers du diametre AB, & AC ſa moitié, DC ſera le demy tiers : & partant AC ſera triple de DC, & ſon quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'eſt que quintuple du quarré de CI : & partant la ligne CI ſera plus grande que DC. Soit donc priſe CK egale à CI, & apres auoir leué la perpendiculaire KL, ſoit menee la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC eſt quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) ſera quintuple du quarré de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaedre eſt quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonſcriuant 5 coſtez de l'Icoſaedre: donc IK ſera ſemidiametre, c'eſt à dire coſté de l'hexagone d'iceluy cercle, lequel coſté de l'hexagone auec deux fois le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle, eſt egal au diametre de la ſphere AB, par le corol. de la meſme 16. p. 13. Il faut donc que AK & IB lignes egales, ſoient deux coſtez du decagone inſcrit dans le meſme cercle, dans lequel KI eſt le coſté de l'hexagone. Mais KI & KL ſont egales: (car KL eſt egale à IH, pour eſtre en meſme diſtance du centre C, laquelle eſtant double de CI ſera egale à KI.) Partant KL ſera coſté de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL ſera le coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle. Donc il ſera auſſi le coſté de l'Icoſaedre, par la 16. prop. 13. Nous auons donc trouué les coſtez des 5 figures regulieres inſcriptibles en vne meſme ſphere.



Maintenant, pour le regard de la comparaiſon d'iceux coſtez trouuez. D'autant qu'il a eſté demonſtré que le quarré du diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere au quarré du coſté de la pyramide; mais double de celuy du coſté de l'octaedre, & triple du quarré du coſté du cube : il eſt euident que le quarré du diametre de la ſphere eſtant 6, celuy du coſté du tetraedre ſera 4; celuy du coſté de l'octaedre 3, & celuy du coſté du cube 2. Partant le quarré du coſté de la pyramide eſt ſeſquitierce au quarré de l'octaedre : mais double de celuy du coſté du cube. Item le quarré du coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere à celuy du coſté du cube. Parquoy les quarrez des coſtez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la ſphere, ſont entr'eux comme nombre à nombre : & partant par la 6. prop. 10. iceluy diametre de la ſphere, & les coſtez d'icelles trois figures ſont lignes commenſurables & rationeles, pource que le diametre eſt poſé rationel. Mais les ſuſdits quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainſi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (ſçauoir le diametre de la ſphere, le coſté de la pyramide, le coſté de l'octaedre, & celuy du cube,) ſont incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant elles ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Et quant aux coſtez de l'icoſaedre, & dodecaedre: pource qu'ils ſont lignes ir

rationeles, il eſt euident qu'ils ſont incommenſurables, tant entr'eux, qu'au diametre de la ſphere, & aux coſtez des autres figures.

Or leſquels d'iceux coſtez ſont les plus grands, nous le rendrons manifeſte ainſi: d'autant qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le quarré de AB eſt triple du quarré de AF: mais quintuple du quarré de KI, c'eſt à dire de KL ſon egale, trois quarrez de AF ſeront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF eſt couppé en la moyenne & extreme raiſon en O, & AO eſt le plus grand ſegment, il eſt euident par la 1. pr. 6. que le rectangle compris de AF, AO ſera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles enſemble, ſeront plus grands que le double du rectangle de AF, OF: Mais à iceux deux rectangles enſemble, eſt egal le quarré de AF par la 2. p. 2. & au double du rectangle de AF, OF, eſt egal le double du quarré de AO: (car par la 17. p. 6. le ſimple rectangle de AF, OF eſt egal au ſimple quarré de AO.) Donc auſſi le quarré de AF ſera plus grand que deux fois le quarré de AO: & par conſequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de KL leurs egaux, ſeront auſſi plus grands que 6 quarrez de AO. Parquoy vn ſeul quarré de KL ſera plus grand qu'vn ſeul quarré de AO: & par conſequent la ligne KL ſera plus grande que AO: Partant AL, qui eſt plus grande qu'icelle KL, ſera beaucoup plus grande que la meſme AO, coſté du dodecaedre. Nous auons donc fait ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures ſolides cy-deſſus declarees, on n'en peut pas trouuer d'autres compriſes de ſuperficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou de deux autres ſuperficies planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouuant iceux conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icoſaedre: de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide: car iceux ſont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle ſolide, doiuent eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. pr. 11. Par meſme raiſon on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide: car ce ſeroit touſiours contreuenir à la 21. prop. 11. L'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangles: De quatre pentagones il ſera impoſsible, eſtans iceux plus grans que quatre droicts, puis que chacun vaut les ſix quints d'vn droict par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuiuroit touſiours la meſme abſurdité. Partant il eſt euident qu'outre les cinq figures regulieres cy-deſſus declarees, on n'en trouuera point d'autres equilateres & equiangles.

Quant à l'application des nombres aux lignes de la demonſtration cy-deſſus, le diametre AB eſtant 6, AC ſera 3, AD 2, & DC 1, DB 4: Mais DF ſera √8, BF coſté de la pyramide √24, AE coſté de l'octaedre √18, AF coſté du cube √12, AO coſté du dodecaedre √15—√3, CG √45, CI ou CK √1⅘, HI ou IK ou KL √7⅕, IB ou AK 3—√1⅘, & partant AL coſté de l'Icoſaedre ſera √(18—√64⅘).

Reſte à remarquer icy certaines reigles colligées des choſes demonſtrees en ce 13. liure, au moyen deſquelles il ſera fort aiſé de cognoiſtre les coſtez des cinq corps reguliers inſcriptibles en vne ſphere, dont le diametre ſera cogneu: Et au contraire eſtant cogneu le coſté de quelconqu

deſdits cinq corps, cognoiſtre le diametre de la ſphere, & conſequemment auſsi les coſtez des autres corps.

1. Le quarré du diametre de la ſphere eſt au quarré du coſté du tetraedre, comme 3 à 2; de l'octaedre, comme 2 à 1; & du cube, comme 3 à 1.

2. Le quarré du coſté du tetraedre eſt au quarré du coſté de l'octaedre, comme 4 à 3, & du cube, comme 2 à 1.

3. Le quarré du coſté de l'octaedre eſt au quarré du coſté du cube, comme 3 à 2.

4. Mais le diametre de la ſphere eſtant rationel, le quarré du coſté de l'Icoſaedre eſt reſidu quatrieſme, duquel le grand nom eſt la moitié du quarré dudit diametre, (*ou le double du quarré du ſemidiam.*) & le moindre nom eſt $\sqrt{\frac{1}{20}}$ du quarré dudit diametre: (*ou* $\sqrt{\frac{4}{5}}$ *du quarré du ſemidiam.*)

5. Et le coſté du dodecaedre eſt reſidu ſixieſme, duquel le grand nom eſt $\sqrt{\frac{5}{3}}$ du ſemidiam. (*ou* $\sqrt{\frac{5}{12}}$ *du diam.*) & le petit nom eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$ dudit ſemidiam. (*ou* $\sqrt{\frac{1}{12}}$ *du diam. c'eſt à dire* $\sqrt{\frac{1}{5}}$ *du grand nom*).

Leſquelles Reigles ſeront d'autant plus intelligibles par les exemples, ou propoſitions ſuiuantes.

1 Qu'il faille cognoiſtre les coſtez des cinq corps inſcriptibles en vne ſphere, dont le diametre eſt 8.

Premierement, ie quarre ledit diametre 8, & viennent 64, dont ie prends les $\frac{2}{3}$, *& viennent* $42\frac{2}{3}$ *pour le quarré du coſté du tetraedre ou pyramide equilaterale: & partant iceluy coſté eſt* $\sqrt{42\frac{2}{3}}$.

Secondement, du meſme quarré 64, ie prends la moitié, pour auoir le coſté de l'octaedre: & partant iceluy coſté eſt $\sqrt{32}$.

Tiercement, du meſme quarré 64, ie prends le tiers, pour le quarré du coſté du cube, qui partant eſt $\sqrt{21\frac{1}{3}}$.

Quartement, du meſme quarré 64, ie prends la moitié 32 pour le grand nom du reſidu de l'Icoſaedre; puis ie quarre ledit quarré 64, & viennent 4096, que ie diuiſe par 20, & prepoſant le ſigne $\sqrt{}$ *au quotient, il ſera* $\sqrt{204\frac{4}{5}}$, *qui eſt le petit nom dudit reſidu: Parquoy le quarré du coſté de l'Icoſaedre ſera* $32-\sqrt{204\frac{4}{5}}$, *& partant iceluy coſté eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$.

Finalement, ie diuiſe le meſme quarré 64 par 12, & viennent $5\frac{1}{3}$, *& le quintuple* $26\frac{2}{3}$, *à chacun deſquels deux nombres ie prepoſe le ſigne* $\sqrt{}$ *pour auoir les deux noms du coſté du dodecaedre, qui partant ſera* $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

2. Le coſté du dodecaedre inſcriptible en vne ſphere eſtant $\sqrt{20}-2$: cognoiſtre tant le diametre d'icelle ſphere, que les coſtez des autres corps reguliers.

Premierement, ie multiplie le moindre nom 2 par $\sqrt{3}$, *& viennent* $\sqrt{12}$, *pour le ſemidiametre de la ſphere: & partant tout le diametre ſera* $\sqrt{48}$.

Secondement, ie prends les $\frac{2}{3}$ *du quarré du diametre trouué, & viennent 32 pour le quarré du coſté de la pyramide, qui partant eſt* $\sqrt{32}$.

Tiercement, du meſme quarré 48, ie prends la moitié, qui eſt le quarré du coſté de l'octaedre, qui partant eſt $\sqrt{24}$.

Quartement, du meſme quarré 48, ie prends le tiers pour auoir le quarré du coſté du cube, & partant iceluy coſté ſera 4.

Finallement la moitié du meſme quarré 48, ſera le grand nom du quarré du coſté de l'Icoſaedre, & pour auoir le petit nom, ie quarre ledit quarré 48, & viennent 2304, que ie diuiſe par 20, & prepoſant le ſigne radical $\sqrt{}$ *au quotient, il ſera* $\sqrt{115\frac{1}{5}}$. *Parquoy le quarré*

du

du coſtè de l'Icoſaedre requis ſera $24 - \sqrt{115\frac{1}{5}}$: *& partant iceluy coſté ſera* $\sqrt{(24 - \sqrt{115\frac{1}{5}})}$.

Or quant aux perpendiculaires, ou hauteurs d'iceux corps, enſemble leurs ſuperficies, & contenus ſolides, nous en auons traitté amplement aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, où les curieux & amateurs de telles ſuputations pourront auoir recours, s'ils ne ſe contentent de ce que nous en dirons au liure ſuiuant.

Fin du trezieſme Element.

ELEMENT QVATORZIESME,

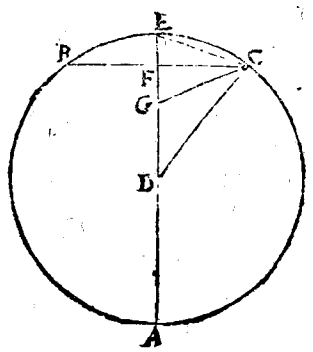
Qu'aucuns attribuent à Hypſicle Alexandrin.

THEOR. 1. PROP. I.

LA ligne droicte perpendiculaire menee du centre au coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié des deux coſtez de l'hexagone, & decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.

Soit le cercle ABC, dont le centre eſt D, & BC le coſté du pentagone inſcrit en iceluy cercle; mais du centre D ſoit menee la ligne DF, perpendicul. à iceluy coſté BC, & icelle eſtant prolongee de part & d'autre iuſques en A & E pour parfaire le diametre AE, elle couppera en deux egalement, tant la ligne droicte BC, que l'arc BEC, ainſi qu'il eſt euident par les 3 & 28. pr. 3. Parquoy eſtant tiree la ligne droicte EC, elle ſera le coſté du decagone, & DE le coſté de l'hexagone. Ie dis que la perpendiculaire DF eſt la moitié des deux coſtez enſemble EC & DE.

Car apres auoir pris FG egale à FE, ſoit menee la ligne GC. Puis que l'arc BEC eſt la cinquieſme partie de la circonference du cercle, EC ſa moitié ſera la cinquieſme partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC ſera quadruple de CE, & par la 33. propoſ. 6. l'angle CDA ſera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. prop. 3. lequel par ce moyen ſera double de CDE: mais par la 4. p. 1. la baſe CE eſt egale à la baſe CG: & par la 5. prop. 1. les deux angles ſur la baſe EG ſeront egaux: donc FGC ſera auſſi double de GDC: Mais iceluy FGC eſtant par la 32. prop. 1. egal à tous les deux GDC, GCD oppoſez interieurement, iceux deux angles ſur la baſe DC ſeront egaux entr'eux: & par la 6. p. 1. GC & GD ſeront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE eſtans egales, la ſeule FD ſera egale aux deux FE, EC enſemble: & partant les trois enſemble DF, FE, EC, c'eſt à dire les deux enſemble DE, EC, ſeront egales au double de la ſeule DF: & par conſequent icelle DF perpendiculairem. tiree du centre ſur le coſté du pentagone, ſera moitié des deux enſemble DE, EC, coſtez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droicte perpend. &c. Ce qu'il falloit prouuer.



COROLLAIRE.

Il eſt donc manifeſte que la perpendiculaire menee du centre au coſté du pentagone eſt egale à la perpendic. tiree dudit centre au coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, puis que par le corol. de la 12. prop. 13. ladite perpendiculaire menee au coſté du triangle equilateral eſt moitié du coſté de l'hexagone.

SCHOLIE.

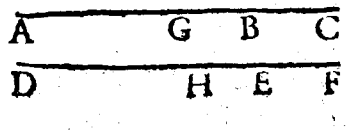
Le ſemidiametre DC eſtant 4, nous auons trouué au Scholie de la 10. pr. 13 que le coſté du pentagone BC ſera $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$: *Parquoy le quarré de FC moitié dudit coſté BC ſera* $10-\sqrt{20}$, *qui oſté du quarré de DC, c'eſt à dire de 16, reſteront* $6+\sqrt{20}$ *pour le quarré de DF; & partant icelle DF eſt* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$. *Mais le ſemidiam. DC, qui eſt 4, eſtant adiouſté auec le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$, *fait* $\sqrt{20}+2$, *dont la moitié* $\sqrt{5}+1$ *eſt egal à* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$: *car le quarré de l'vn & l'autre eſt* $6+\sqrt{20}$: *partant appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 12. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes couppees en la moyenne & extreme raiſon; elles ſeront ſemblablement couppees.

Soient deux lignes droictes AB & DE couppees en la moyenne & extreme raiſon aux poincts G & H: & leurs plus grands ſegmens ſoient AG & DH. Ie dis qu'icelles lignes ſont ſemblablement couppees: c'eſt à dire que comme AB eſt à DE, ainſi AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainſi DH à HE, &c.

Car par la 17. propoſition du 6. le rectangle de AB, & GB, eſt egal au quarré de AG: & le rectangle de DE & HE egal au quarré de DH: & partant comme le rectangle de AB; GB ſera au quarré de AG, ainſi le rectangle de DE, HE ſera au quarré de DH: (y ayant raiſon d'egalité de part & d'autre) & par le 3. theor. du Scholie de la 22. p. 5. quatre fois le rectangle de AB & GB ſera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en compoſant (apres auoir adiouſté directement BC egale à BG; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB auec le quarré de AG, (ou par la 8. prop. 2. le ſeul quarré de AC) eſt au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, auec le quarré de DH, (ou le ſeul quarré de DF) eſt au quarré de DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG, ainſi DF à DH: Et en compoſant, comme la compoſee de AC, AG, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AG, ainſi la compoſee de DF, DH, c'eſt à dire la double de DE, eſt à DH: & en permutant, comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AG à DH: Et par la 15. pr. 5. comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AB à DE. Donc comme AB ſera à DE, ainſi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainſi ſera auſſi le reſte GB au reſte HE. Parquoy comme AG à DH, ainſi ſera GB à HE, puis que l'vne & l'autre raiſon eſt comme AB à DE: & en permutant, comme AG ſera à GB, ainſi DH ſera à HE: & ainſi ſelon toutes les autres manieres d'argumenter és proportions, on demonſtrera toutes lignes & les parties d'icelles eſtre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

La ligne droicte AB estant 4, le grand segment AG sera √20—2, & le petit GB 6—√20. Mais DE estant 2, le grand segment DH sera √5—1, & le petit HE 3—√5. Or le produit de AB 4, en DH √5—1 est √80—4, & le produit de DE 2 en AG √20—2 est aussi √80—4: & partant comme AB à DE, ainsi AG à DH. Le produit de AB 4 en HE 3—√5 est 12—√80: & le produit de DE 2 en GB 6—√20 est aussi 12—√80: partant comme AB à DE, ainsi GB à HE. Le produit de AG √20—2 en HE 3—√5 est √320—16, & le produit de GB 6—√20 en DH √5—1 est pareillement √320—16: Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

Or de ceey appert qu'estant cogneue vne ligne droicte, il est fort aisé de cognoistre combien seront les segmens d'icelle couppee en la moyenne & extreme raison, par le moyen de quelque autre ligne dont les segmens seront cogneus: Et pour tant plus en faciliter la pratique nous auons expressement adapté de petits nombres à la ligne DE: tellement que si on veut, par exemple, cognoistre les segmens d'vne autre ligne de 10 pieds, il faut dire par regle de trois, si 2 donnent √5—1, que donneront 10? & faisant la regle on trouuera √125—5 pour le grand segment, qui osté de la toute 10, resteront 15—√125 pour le moindre segment.

Aussi l'vn ou l'autre des segmens estant cogneu, on cognoistra par la mesme methode tant l'autre segment que la toute: Parquoy estant cogneu le costé d'vn pentagone on peut cognoistre le diametre du cercle circonscriuant iceluy: car puis que par la 8. prop. 13. la subtendante de l'angle d'vn pentagone estant couppee en la moyenne & extreme raison le grand segment est egal au costé dudit pentagone, on cognoistra le petit segment ou reste de ladite subtendante, ainsi qu'il est dit cy-dessus; & le quarré de la moitié d'icelle subtendante estant osté du quarré du costé du pentagone, restera le quarré d'vne ligne par laquelle estant diuisé le quarré de la moitié de la subtendante on aura le diametre du cercle, ainsi qu'il appert des choses demonstrees à la 11 pr. 13. Lequel diametre on obtiendra encore par la regle de proportion; dautant que nous auons demonstré sur le 8. chap. du 2. liu. de la Geometrie d'Errard que la raison du semidiametre du cercle au costé du pentagone inscrit en iceluy est comme de 2 à √(10—√20): parquoy voulant cognoistre le diametre d'vn cercle dont le costé du pentagone est √(40—√320), ie diray, si √(10—√20) donnent 2, que donneront √(40—√320)? & ayant fait la regle ainsi qu'il appartient, le 4. nombre proport. sera 4, dont le double 8 est le diametre requis.

Le mesme se doit entendre de tout autre polygone dont la raison du semidiametre au costé sera cogneue: Et pour ce subiet nous remarquerons icy que le semidiametre du cercle estant 2, le costé du triangle inscrit en iceluy sera √12: celuy du quarré √8: celuy du pentagone √(10—√20): celuy de l'octogone √(8—√32): celuy du decagone √5—1: & celuy du dodecagone √6—√2.

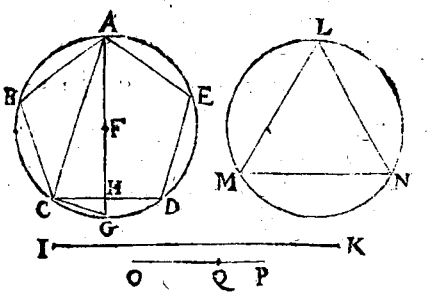
THEOR. 3. PROP. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre inscrits en vne mesme sphere.

Auparauant que d'expliquer ceste prop. il conuient demonstrer que le quarré du costé du pentagone auec le quarré de la ligne qui soustient vn angle d'iceluy, est quintuple du quarré du demy diametre du cercle dans lequel est inscrit iceluy pentagone.

Soit vn cercle ABCDE, le costé du pentagone inscrit en iceluy cercle CD, la

ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel couppe en deux egalement, tant l'arc CGD, que le costé CD, par le corol. de la 10. prop. 13. Ie dis que les deux quarrez de CA & CD sont ensemble quintuples du quarré de FG.



Car si on mene CG, ce sera le costé du decagone: & par le scholie de la 4. pr. 2. le quarré de AG, sera quadruple du quarré du demy diametre FG; & par consequent les deux de AC, CG, qui par la 47. p. 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, seront ensemble quintuple du seul de GF: Mais les deux de CG & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble egaux au quarré de CD costé du pentagone, par la 10. p. 13. partant les deux quarrez de AC & CD sont quintuples du quarré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diametre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'Icosaedre: & d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone ABCDE, & de l'Icosaedre soit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'vn mesme cercle circonscrit le pentagone ABCDE, & le triangle LMN: c'est à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonscriuent sont egaux.

Car estant tiree AC subtendante de l'angle du pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & soit exposee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la sphere, soit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'Icosaedre par le corol. de la 16. pr. 13. soit icelle OP couppee en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est le costé de l'hexagone ou semidiametre, par le corol. de la 9. prop. 13 Mais par la 7. proposit. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB: Donc par la 2. proposit. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB sera au plus grand segment OQ: partant par la 22. p. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré de OQ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP: (pource que le quarré de IK diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube par la 15. pr. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le corollaire de la 16. p. 13. ML costé du triangle de l'Icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demi-diametre: & partant puis que par la 10. propos. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML seront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ: ou à trois de BA, & à trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC estans quintuples du quarré du demidiametre FA,

(comme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) trois quarrez de AB, & AC seront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML est triple du quarré du demy diametre, par la 12. proposit. du 13.) Donc les trois de BA & AC estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux sera egal à vn quarré, & le demidiametre au demi-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux. Donc vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

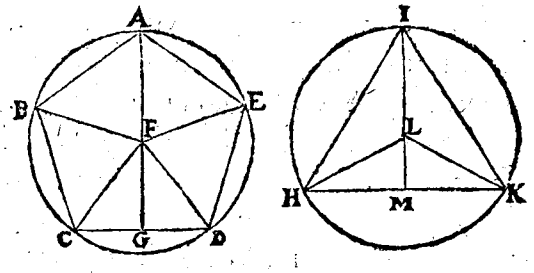
SCHOLIE.

Il appert par ce que nous auons dit à la fin du liure preced. que le diametre de la sphere IK est 8, *AB costé du dodecaedre sera* $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$, *& LM costé de l'Icosaedre* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Mais par ce qui a esté enseigné au scholie prec. le semidiam. du cercle circonscriuant vn pentagone dont le costé est* $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$ *sera trouué de* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$ *: & celuy du cercle circonscriuant vn triangle equilateral dont le costé est* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$ *sera aussi trouué de* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$, *soit qu'on procede par la mesme methode du scholie prec. ou bien qu'on prenne le tiers du quarré dudit costé: car par la 12. pr. 13. iceluy tiers sera le quarré du semidiametre requis: Parquoy appert ce qui estoit proposé.*

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du centre du cercle circonscriuant le pentagone du dodecaedre, on meine vne ligne droicte perpendiculaire sur vn costé d'iceluy pentagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, est egal à la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonscriuant vn pentagone du dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tiree FG perpendiculairement sur le costé CD. Ie dis que trente fois le rectangle compris de FG & CD, est egal à la superficie du dodecaedre.



Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il est euident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre il y a douze pentagones egaux, & chasque pentagone a cinq pareils triangles que CFD, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroiét le double: Donc trente rectangles de FG & CD, leur seront egaux.

Nous demonstrerons semblablement, que si vn triangle equilateral, comme HIK, est inscrit en vn cercle, du centre duquel L, on tire sur le costé HK la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, seront egaux à la superficie de

l'Icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK; & chacun d'iceux se diuise en trois autres triangles egaux entr'eux & semblables, & egaux à HLK, qui font en tout soixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK par la 41. p. 1. Et par consequent soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles: Donc trente rectangles de LM & HK seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre.

COROLLAIRE.

De cecy resulte, par la 15. pr. 5. que comme vn seul rectangle de FG & CD, est à vn seul rectangle de LM & HK, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que le diametre de la sphere estant 8, CD costé du dodecaedre sera $\sqrt{26\frac{2}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$, *HK costé de l'Icosaedre* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$, *& le semidiametre CF ou LH* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$: *Parquoy le quarré de CG sera* $8-\sqrt{35\frac{5}{9}}$, *qui osté de* $10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}}$ *quarré du semidiametre CF, resteront* $2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendic. FG, qui partant est* $\sqrt{(2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *& le produit d'icelle perpendiculaire par le costé CD sera* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$, *lequel produit multiplié par 30, donne* $\sqrt{(51200-\sqrt{524288000})}$ *pour la superficie de tout le dodecaedre. Mais le quarré de HM sera* $8-\sqrt{12\frac{4}{5}}$, *qui osté du quarré de LH, resteront* $2\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendic. LM, qui partant est* $\sqrt{(2\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *le produit de laquelle perpendicul. par le costé HK sera* $\sqrt{(102\frac{2}{5}-\sqrt{5815\frac{19}{45}})}$, *& trente fois ce produit donne* $\sqrt{(92160-\sqrt{4718592000})}$ *pour la superficie de l'Icosaedre.*

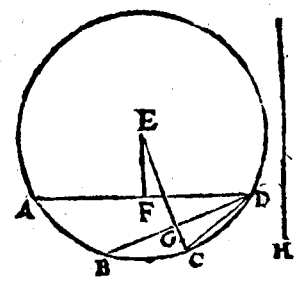
Or en la mesme maniere que dessus on peut aussi trouuer la superficie des trois autres corps reguliers, c'est assauoir du tetraedre, de l'octaedre & du cube: Car si du centre du cercle qui circonscrit le triangle du tetraedre ou de l'octaedre, ou le quarré du cube, est tiree vne perpendic. à vn costé d'iceux; au tetraedre six fois le rectangle compris sous icelle perpendic. & le costé sera egal à la superficie dudit tetraedre: Mais à l'octaedre, & au cube, douze fois ledit rectangle compris sous la perpendic. & le costé sera egal à la superficie de l'octaedre, & aussi egal à la superficie du cube. Car si du centre du cercle circonscriuant le triangle du tetraedre, ou de l'octaedre, on tire des lignes droictes à chaque angle dudit triangle ainsi que dessus, on le diuisera en trois triangles semblables & egaux entr'eux, & par consequent il y aura 12 tels triangles en toute la superficie dudit tetraedre, & 24 en celle de l'octaedre: Mais le rectangle compris sous la base & la perpendic. est double de chacun desdits triangles par la 41. p. 1. & partant ledit rectangle pris six fois sera egal à la superficie dudit tetraedre; & pris douze fois, il sera egal à la superficie dudit octaedre. Mais ayant mené du centre du cercle circonscriuant le quarré du cube des lignes droictes à chasque angle d'iceluy quarré il sera diuisé en quatre triangles egaux & semblables; & par consequent il y en aura 24 en toute la superficie du cube, lesquels sont egaux à 12 rectangles compris soubs le costé & la perpendic. ainsi que nous auons demonstré plus au long sur le 4. chap. du 3. liure de la Geometrie d'Errard.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'icosaedre; ainsi le costé du cube est au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soit pris AD, costé du triangle equi-

lateral de l'icoſaedre, & BD coſté du pentagone du dodecaedre inſcrits en vne meſme ſphere; (ce qui eſt poſſible, puis que par la 3. p. 14. vn meſme cercle comprend le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Et du centre E ſoient tirees ſur AD, BD les perpendiculaires EF, EG: & icelle EG eſtant prolongee iuſques à la circonference, elle couppera l'arc BCD en deux egalement en C: & eſtant tiree la ligne droicte CD, ce ſera le coſté du decagone: & finalement ſoit expoſée la ligne droicte H coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere. Ie dis que la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, comme H coſté du cube eſt à AD coſté de l'icoſaedre.



Car d'autant que EC eſt coſté de l'hexagone, & CD coſté du decagone inſcrit en vn meſme cercle; la compoſée d'iceux coſtez, ſera couppée en la moyenne & extreme raiſon, dont le plus grand ſegment ſera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle compoſée eſt EG; & par le corol. de la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand ſegment EC eſt EF. Et partant, puis que par la 15. p. 5. les toutes ſont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez: il eſt euident que la moitié EG eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la moitié EF ſera le plus grand ſegment: (car la moitié du plus grand ſegment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H coſté du cube eſtant auſſi couppé en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment ſera BD coſté du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, ſera à BD ſon plus grand ſegment, ainſi la toute EG ſera à EF ſon plus grand ſegment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, ſera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H eſt à AD, ainſi le rectangle de H, EF, eſt au rectangle de AD, EF: (car ces deux rectangles ont vne meſme hauteur EF.) Auſſi comme H ſera à AD, ainſi le rectangle de BD, EG (lequel eſt egal à celuy de H, EF) eſt au meſme rectangle compris ſoubs AD, EF. Parquoy, puis que par le Corol. de la preced. comme le rectangle compris ſous BD, EG eſt au rectangle compris de AD, EF, ainſi la ſuperficie du dodecaedre eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre: pareillement comme H coſté du cube ſera à AD coſté de l'icoſaedre, ainſi ſera la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que AD eſt $\sqrt{(32-\sqrt{2045\frac{4}{5}})}$, *BD* $26\frac{2}{3}-\sqrt{53\frac{1}{3}}$, *EC* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$, *EF* $\sqrt{(2\frac{2}{3}-\sqrt{1\frac{19}{45}})}$. *EG* $\sqrt{(2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *& H* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$: *& que le rectangle ou produict du coſté BD en la perpendic. EG eſt* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$, *celuy du coſté AD en la perpendic. EF* $\sqrt{(102\frac{2}{5}-\sqrt{5825\frac{19}{45}})}$: *Mais que la ſuperficie du dodecaedre eſt* $\sqrt{(51200-\sqrt{524288000})}$, *& celle de l'icoſaedre* $\sqrt{(92160-\sqrt{4718592000})}$. *Or le produict de ceſte ſuperficie-là multipliée par le coſté de l'icoſaedre AD* $\sqrt{(32-\sqrt{2045\frac{4}{5}})}$ *eſt egal au produict de ceſte ſuperficie cy multipliée par le coſté du cube H* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$, *car l'vn & l'autre produit eſt* $\sqrt{(1966080-\sqrt{2147483648000})}$: *& partant appert ce qui eſtoit propoſé; & en outre que le rectangle ou produict de H en EF eſt egal à celuy de BD en EG, l'vn & l'autre d'iceux produicts eſtant* $\sqrt{(56\frac{8}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$: *partant que comme le coſté du cube H eſt au coſté du dodecaedre BD, ainſi la perpendic. EG eſt à la perpendic. EF.*

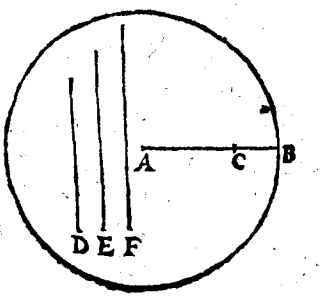
Appert

Appert encore que EF perpendic. de l'icosaedre est moitié du semidiam. EC, le quarré de laquelle perpend. est vn residu, dont le binome correspondant est le quarré de EG perpend. du dodecaedre; & partant ledit semidiam. EC estant cogneu on trouuera fort aisément lesdites perpendiculaires; car prenant la moitié d'iceluy, on aura la perpendicul. EF, & changeant le signe — en + on aura l'autre perpend. EG.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison; comme les quarrez de la toute & du plus grand segment, sont aux quarrez de la toute & du plus petit segment, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, soit couppé en la moyenne & extreme raison en C, dont le plus grand segment soit AC, qui sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le coroll. de la 9. prop. 13. Item soient prises trois lignes, sçauoir D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, & F costé du cube inscriptibles en vne mesme sphere: Ie dis que le quarré de F est au quarré de E, comme les quarrez de AB & AC sont aux quarrez de AB & CB.



Car D estant le costé du pentagone, & E le costé du triangle tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment, par le corol. de la 17. prop. 13. Donc E estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy-diametre AB. par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarrez de AB & CB sont triples du quarré de AC: partant le quarré de E est au quarré de AB, comme les deux quarrez de AB, CB sont au quarré de AC: Et en permutant, le quarré de E sera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB est à son plus grand segment AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainsi le quarré de F au quarré de D: & en permutant, comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarrez de AB & CB sont au quarré de D, costé du pentagone: lequel quarré par la 10. pr. 13. est egal aux deux quarrez de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en vn mesme cercle; & par consequent le quarré de F costé du cube, est à E costé de l'Icosaedre, comme les quarrez de AB & AC, sont aux quar-

rez de AB & CB. Si donc vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Si quelconque ligne droicte AB eſt 2, icelle eſtant couppée en C ſelon la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment AC ſera $\sqrt{5}-1$, *& le petit CB* $3-\sqrt{5}$: *mais puis que F eſt le coſté du cube inſcrit en vne ſphere, iceluy ſoit tel que nous l'auons cy-deuant trouué, ſçauoir eſt* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$, *& E coſté de l'icoſaedre inſcrit en la meſme ſphere ſera auſſi tel que nous l'auons trouué, ſçauoir eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Or le quarré de la toute AB eſt 4, celuy de AC* $6-\sqrt{20}$, *& celuy de CB* $14-\sqrt{180}$: *donc les deux quarrez de AB, AC ſont enſemble* $10-\sqrt{20}$, *& les deux de AB, CB ſont* $18-\sqrt{180}$: *Mais le quarré de F eſt* $21\frac{1}{3}$, *& celuy de E eſt* $32-\sqrt{204\frac{4}{5}}$; *leſquels quatre nombres ſont proportionnaux ; car le produict des deux extremes eſt egal au produict des deux moyens, l'vn & l'autre produict eſtant* $384-\sqrt{81920}$; *partant appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre eſt à l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Ceſte demonſtration eſt facile, les predentes eſtans bien entendues: car puis que par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre ſont inſcrits dans vn meſme cercle : il eſt euident qu'iceux triangle & pentagone ſeront equidiſtans du centre de la ſphere. Parquoy ſi on diuiſe le dodecaedre & l'icoſaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre ſolide ſeront de meſme hauteur : Et par les 5. & 6. prop. 12. elles ſeront l'vne à l'autre, comme leurs baſes; c'eſt à ſçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icoſaedre, comme douze pentagones à vingt triangles : C'eſt à dire que comme la ſuperficie du dodecaedre ſera à la ſuperficie de l'icoſaedre, ainſi tout le dodecaedre ſera à tout l'icoſaedre. Mais par la 5. pr. 14. icelles ſuperficies ſont l'vne à l'autre, comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre: donc par la 11. prop. 5. comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre à l'icoſaedre. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné tant en noſtre Geometrie pratique qu'aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, diuers moyens pour trouuer les ſuperficies & ſoliditez non ſeulement du dodecaedre & icoſaedre, mais auſſi de tout autre corps, c'eſt pourquoy nous n'en dirons rien icy, ſeulement y adiouſterons nous (pour d'abondant ſeruir d'exemple de tout ce que nous auons cy-deuant dit) les coſtez, ſuperficies & ſoliditez des cinq corps reguliers inſcrits en vne ſphere, dont le diametre eſt 6, afin que par le moyen d'icelles on puiſſe plus promptement trouuer les coſtez, ſuperficies & ſoliditez de tout autre corps ſemblable, dont le coſté ſera cogneu, ſuiuant les regles & proportions des figures ſemblables cy-deuant demonſtrees, c'eſt aſſauoir de la raiſon doublee des coſtez, quant aux ſuperficies ; & de la triplee pour les ſoliditez.

Le coſté du tetraedre ſera $\sqrt{24}$, *ſa ſuperficie* $\sqrt{1728}$, *& ſa ſolidité* $\sqrt{192}$.

Le coſté de l'octaedre ſera $\sqrt{18}$, *ſa ſuperficie* $\sqrt{3888}$, *& ſa ſolidité* 36.

Le costé du cube sera $\sqrt{12}$, *sa superficie* 72, *& sa solidité* $\sqrt{1728}$.

Le costé du dodecaedre sera $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, *sa superficie* $\sqrt{(16200-\sqrt{52488000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$.

Le costé de l'Icosaedre sera $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$, *sa superficie* $\sqrt{(29160-\sqrt{472392000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$.

Parquoy appert d'abondant ce qui estoit proposé, sçauoir est que comme $\sqrt{12}$. *costé du cube est à* $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$ *costé de l'Icosaedre, ainsi* $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$ *solidité du dodecaedre est à* $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$ *solidité de l'Icosaedre: car le produit des deux nombres extremes est egal à celuy des deux du milieu, l'vn & l'autre produict estant* $\sqrt{(38880+\sqrt{302330880})}$.

Appert aussi que la superficie de l'octaedre est sesquialtere à la superficie du tetraedre, c'est à dire comme 3 *à* 2: *car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux nombres du milieu, l'vn & l'autre produit estant* $\sqrt{15552}$.

Que l'octaedre est au triple du tetraedre, comme le costé de l'octaedre au costé du tetraedre: car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux moyens, l'vn & l'autre produit estant 31104.

Que la superficie du cube est egale au double du quarré du diametre de la sphere, & la solidité d'iceluy cube triple de la solidité du tetraedre.

Et finalement, que le cube est à l'octaedre, comme la superficie du cube est à la superficie de l'octaedre: car le produit des deux nombres extremes est egal au produit des deux du milieu, l'vn & l'autre produit estant 2592: *& aussi comme le costé du cube au semi-diametre de la sphere, car le produit des deux nombres extremes est* $\sqrt{15552}$ *aussi bien que le produit des deux du milieu.*

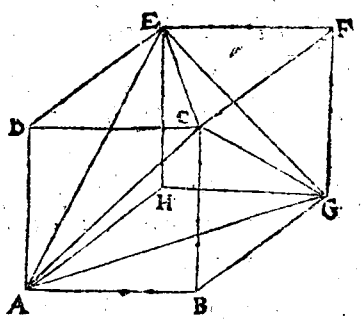
Fin du quatorzieſme Element.

ELEMENT QVINZIESME.

PROBL. 1. PROP. I.

Dans vn cube donné, inſcrire vne pyramide.

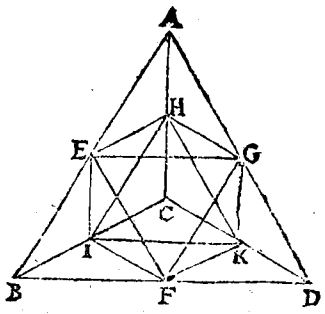
Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. De quelque angle d'iceluy, comme E ſoient menees les diagonales EA, EC, EG; & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menees les diagonales AG, AC, GC: Toutes leſquelles diagonales ſont egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menees ſont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG, ſont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant la pyramide AEGC conſtituee d'iceux triangles eſt inſcrite au cube donné AF, par la 31. d. 11. Car tous les angles d'icelle pyramide ſont colloquez és angles d'iceluy cube AF. Nous auons donc inſcrit vne pyramide dans le cube dõné. Ce qu'il falloit faire.



PROBL. 2. PROP. II.

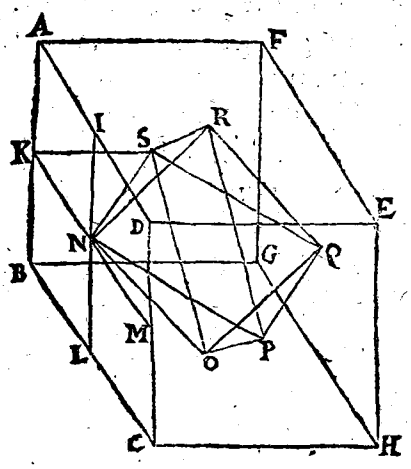
Dans vne pyramide donnee, inſcrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egalement aux poincts E, F, G, H, I, K: Et ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles par la 4. pr. 1. toutes les lignes couppees eſtans egales entr'elles, & les angles des triangles plãs de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGKI a les quatre coſtez egaux, & les quatre triangles EHI, IHK, KHG, GHE, commençans ſur iceluy quadrilatere, & finiſſans au poinct H, ſont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au deſſous du quadrilatere, & finiſſans au poinct F, ſont auſſi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux quatre precedans. Parquoy la figure EIKGHF compoſee d'iceux huict triangles eſt vn octaedre, par la 27. def. 11. & par la 31 d. 11. il eſt inſcrit dans la pyramide donnee ABCD, puis que tous les angles d'iceluy touchent tous les coſtez d'icelle pyramide. Nous auons donc fait ce qui eſtoit requis.



PROBL. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inſcrire vn octaedre.



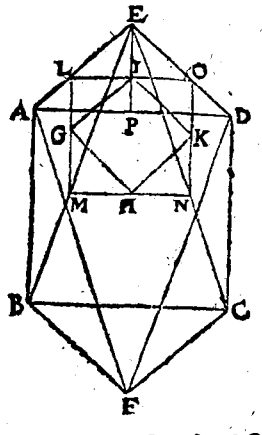
Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez en deux egalement les coſtez du quarré AC, és poincts I, K, L, M, & ſoient menees les deux lignes IL, KM, s'entre-couppans en N, lequel poinct ſera le centre du quarré AC, comme il appert par la demonſtration de la 8. p. 4. Par la meſme maniere ſeront trouuez les centres des 5 autres quarrez du cube, leſquels centres ſoient O, P, Q, R, S: Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres à chaque poinct de la ſection des coſtez de leurs quarrez, telles que ſont NI, NK, NL, NM, KS, &c. ſeront egales aux moitiez d'iceux coſtez, comme il appert par la ſuſdite demonſtration de la 8. p. 4. & par conſequent ſont egales entr'elles. Item ſoient conioincts les centres S, N, P, Q par les quatre lignes droictes SN, NP, PQ, QS, leſquelles ſeront toutes egales par la 4. p. 1. d'autant qu'elles ſont baſes de quatre triangles Iſoſcelles ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, (chacun d'iceux coſtez eſtant egal à la moitié du coſté du cube ainſi que NK, SK du triangle NKS) & l'angle contenu d'iceux coſtez egal à l'angle, ſçauoir droict comme NKS: Il eſt euident qu'icelles quatre lignes ſeront auſſi vn quarré, qui eſt au milieu de l'octaedre, & parallel à la baſe d'iceluy. Or des quatre angles d'iceluy quarré ſoient menees au poinct R, centre du quarré ſuperieur AE, les quatre lignes NR, PR, QR, SR, leſquelles comme il a eſté dit cy-deſſus ſeront toutes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & feront les quatre triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, NRS: Item des meſmes quatre angles du quarré NPQS, ſoient menees au poinct O, centre de la baſe CG, les lignes NO, PO, QO, SO, qui ſeront egales comme deſſus, & feront quatre autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS, leſquels ſeront auſſi egaux aux quatre premiers, car tous leurs coſtez ſont egaux, eſtans baſes de huict triangles Iſoſcelles rectangles, tel qu'eſt NKS. Parquoy le ſolide NOPQRS compoſé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux eſt octaedre inſcrit au cube donné, par les 27. & 31. def. 11. puis que tous les ſix angles d'iceluy, touchent les ſix plans dudit cube à leurs centres. Nous auons donc fait ce qui eſtoit requis.

PROBL. 4. PROP. IV.

Dans vn octaedre donné, inſcrire vn cube.

Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inſcrire vn cube. Des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui ſe terminent au poinct E, ſoient pris les centres G, H, I, K, & ſoient menees les lignes GH, HK, KI, GI: Il eſt euident que GHKI ſera quarré. Car ſi d'iceux quatre centres on meine les lignes droictes LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à ſon coſté du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO ſeront equilateraux, puis qu'ils ſont ſemblables aux triangles equilateraux cy-deſſus par le corol. de la 4. p. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les coſtez communs; & par conſequent les quatre

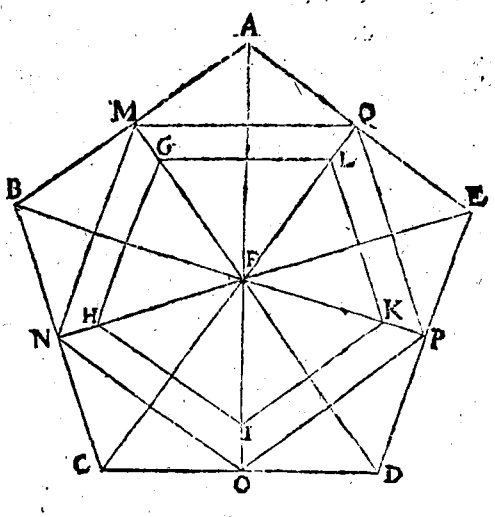
baſes LM, MN, NO, LO ſont egales. Item ſi de E par le centre I on meine EP: elle diuiſera en deux egalement tant l'angle E, que le coſté AD par le corol. de la 10. p. 13. & par conſequent LO eſtant parallele à AD ſera auſſi couppee en deux egalemẽt au centre I: Par meſme raiſon LM, MN, NO ſeront auſſi couppez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainſi les quatre triangles GLI, IOK, GMH, HNK ſont Iſoſceles rectangles. (Car par la 10. p. 11. les angles des poincts L, M, N, O, ſont egaux aux droicts du quarré ABCD.) Parquoy les quatre baſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI eſt quarré. Que ſi ſemblablemẽt des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres eſtans tous conioincts par lignes droictes, ſeront deſcrits encores 5 quarrez, leſquels ayans les coſtez communs ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cube cõpoſé d'iceux 6 quarrez ſera inſcrit dans l'octaedre donné, puiſque les angles d'iceluy touchent les huict baſes de l'octaedre à leurs centres; & par ainſi nous auons fait ce qui eſtoit requis.



PROBL. 5. PROP. V.

Dans vn icoſaedre donné, deſcrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on conſtruit l'icoſaedre, ſur lequel ſoit vne des douze pyramides pentagonales de l'icoſaedre, ayant pour ſommet le poinct F, auquel s'aſſemblent les 5 triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & ſoit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH: Item de F par iceux centres, ſoient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, leſquelles coupperont en deux egalement les coſtez AB, BC, CD, DE, EA, comme il appert par le corol. de la 10. p. 13. & partant eſtant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il eſt euident par la 4 p. 1. qu'elles ſeront egales; & que par la 8. p. 1. les angles qu'elles ſouſtiennent au poinct F ſont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL ſont auſſi egales; (car ce ſont demi-diametres de cercles circonſcriuans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG ſeront pareillement egales, & les angles de deſſus icelles auſſi egaux, par la 4 p. 1. Parquoy le pentagone GHIKL eſt equilateral & equiangle: & il ſe prouuera aiſément comme à la 17. p. 13. qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Que ſi ſemblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres vnze pyramides de l'icoſaedre, ſeront auſſi deſcrits des pentagones equilateraux & equiangles, leſquels puis qu'ils ont des coſtez communs, ſeront auſſi egaux entr'eux. Parquoy 12 tels pentagones conſtitueront vn dodecaedre, lequel ſera inſcrit dans l'icoſaedre, puis que les 20 angles d'iceluy octaedre ſont conſtituez & touchent les vingt baſes de l'icoſaedre à leurs centres. Nous auons donc inſcrit vn dodecaedre, dans vn Icoſaedre donné. Ce qu'il falloit faire.



Fin du quinzieſme & dernier Element.

COMMENTAIRE OV PREFACE DE MARIN PHILOSOPHE SVR LE LIVRE des DONNEZ d'Euclide.

PRemierement, il nous faut mettre comme fondement que c'eſt qu'on appelle DONNE' *: en apres remarquer l'vtilité d'iceluy, & en troiſieſme lieu à quelle ſcience appartient ce Traicté.*

DONNE' *doncques ſe definit en pluſieurs manieres; car les Anciens l'ont defini d'vne façon, & les modernes d'vne autre; dont s'enſuit qu'il ſemble mal-aiſé d'en pouuoir donner la vraye explication. Car quelques vns n'ont point baillé de definition de* Donné, *mais ils ont auec beaucoup de trauail recherché certaines proprietez d'iceluy, & quelques autres raſſemblans & meſlangeans ce qui en auoit eſté dict auparauant par les autres ont eſſayé de definir* DONNE' *: mais non pas de telle façon qu'ils ne ſe ſoient contrariez eux-meſmes, quoy qu'il ſemble que tous fondez ſur vne meſme notion & ſuppoſition en ayent dit quelque choſe: car tous ont eſtimé que le* Donné *eſtoit quelque choſe compriſe; & partant entre ceux qui ont taſché de le deſcrire plus ſimplement & auec quelque ſimple difference, les vns ont creu que* Donné *eſtoit ce qui eſt* Ordonné, *ainſi qu'Apollonius en ſon Traicté des Inclinations, & en ſon Traicté Vniuerſel: & les autres, comme Diodore, ce qui eſt* Cogneu: *car en ceſte ſignification il prend la ligne droicte, & les angles eſtre donnez, & tout ce qui peut venir à noſtre cognoiſſance, encore qu'on ne le puiſſe pas bien exprimer: Mais les autres ont creu que c'eſtoit meſme ce qui eſt* Effable, *comme ſemble auoir voulu Ptolomée, lequel appelle* Donnez *toutes les choſes dont la meſure eſt cogneue, ſoit preciſément, ou à peu prés. Quelques autres auſſi ont penſé que* Donné *eſtoit ce qui nous eſt concedé en l'hypotheſe par le propoſant, veu qu'aux premiers Elemens ils prennent autrement vn poinct donné qu'vne ligne droicte donnée, c'eſt à dire que qui donneroit & determineroit la quantité d'vne ligne droicte: toutes leſquelles choſes veulent ſignifier quelque* Comprehenſion. *Et partant de toutes ces definitions, celles-là aggreent le plus, leſquelles plus appertement declarent la* Comprehention *comme nous ferons veoir par les choſes ſuiuantes.*

Or expliquons maintenant les diuerſes opinions de ceux, leſquels deſcriuans la nature du Donné *n'ont point pris vne ſimple marque, ou vnique caractere pour le definir, & les reduiſons comme en vn ſommaire & abbregé, afin que nous puiſsions aiſément recognoiſtre ou nombrer toutes leurs differences. Les vns donc ont defini* Donné *eſtre ce qui eſt* Ordonné & Porime *enſemble; & les autres, ce qui eſt* Ordonné & Cogneu *enſemble: & les autres, ce qui eſt* Porime & Cogneu *enſemble: c'eſt pourquoy tous ſemblent auoir defini en ſorte qu'ils ont eu eſgard à la* Comprehenſion *ou* Somption & Inuention *du Donné. Et afin que nous conceuions tant mieux leur oppinion, & que des dicts de pluſieurs nous puiſsions tirer vne vraye definition de ce qui eſt propoſé, nous remarquerons en premier lieu la ſignification de tous les termes ſimples dont ils ſe ſeruent, cõme auſſi de leurs oppoſez, aſçauoir de l'*Inordonné, & de l'Incogneu, de l'Apore, &

de l'Irrationel : *car ces choſes-là appartiennent à ceſte matiere Geometrique, aux choſes naturelles, & aux diſciplines Mathematiques.*

Or on appelle Ordonné (*ou reglé*) *cela qui garde & obſerue touſiours ce parquoy il eſt dict eſtre ordonné, ſoit quant à la grandeur, ou quant à l'eſpece, ou touchant quelque autre choſe de ſemblable : On le definit encore ainſi :* Ordonné *eſt ce qui ne peut eſtre fait en diuerſes façons, mais en vne ſeule en quelque lieu determiné : comme pour exemple, vne ligne droicte menée par deux poincts donnez eſt dicte eſtre* Ordonnee, *parce qu'il ne ſe peut faire autrement, ny en pluſieurs façons : Mais vn angle paſſant par deux poincts eſt dict* Inordonné, (*ou deſordonné & dereglé*) *parce qu'il eſt conſtitué en infinies & differentes façons par vn grand ou vn petit cercle deſcrit par deux poincts en l'infini : Et au contraire, vn angle conſtitué par trois poincts eſt dict* Ordonné; *comme auſſi ces choſes ſont dictes eſtre* Ordonnées; *conſtituer ſur vne ligne droicte vn triangle equilateral, car on ne le conſtitue point diuerſement, mais inuariablement ſur l'vne & l'autre extremité de la ligne : Et couppper vne ligne droicte donnée ſelon vne raiſon donnée, car cela ne ſe peut faire qu'en vne partie de la biſſection. Les* Inordonnez, *ſont ceux qui ſe font au contraire de ceux là ; comme conſtruire vn triangle ſcalene, & couppper vne ligne droicte indefiniment. Or ce parquoy le Probleme eſt ordonné eſt propoſé en la determination, attendu qu'vne certaine choſe pourra eſtre* Ordonnée *en vne certaine maniere, &* Inordonnee *en vne autre: comme vn triangle equilateral, entant qu'il eſt equilateral il eſt* Ordonné; *mais quant à la grandeur il eſt* Inordonné, *car il n'eſt nullement determiné.*

Mais on appelle Cognu, *ce qui eſt notoire, comme clair & compris de nous: &* Incognu, *ce qui n'eſt point cognu ny compris de nous ; comme la longueur d'vn chemin eſt ditte cognue quand l'on ſçait combien il contient de ſtades : Item que les trois angles d'vn triangle rectiligne ſont egaux à deux droicts : & pareillement que le binome eſt irrationel ; telles choſes ſont cognues, comme auſſi qu'il n'y a qu'vne ligne droicte qui touche la ligne ſpyralle d'vn poinct donné hors d'icelle de l'vne ou l'autre part: car s'il y en auoit encore vne autre, deux lignes droictes enclorroient vn eſpace, ce qui eſt impoſſible. Au reſte les choſes irrationelles ne s'appellent point incognues, mais celles-là ſeulement qui ne ſont ny cognues, ny compriſes de nous.*

Le Porime (*ou qui a effection*) *eſt ce que nous pouuons faire & conſtruire, c'eſt à dire le reduire en cognoiſſance : On le definit encore en cette maniere,* Porime *eſt ce qui peut eſtre exhibé par demonſtration, ou qui eſt apparent ſans demonſtration ; comme eſt deſcrire vn cercle d'vn centre & interualle, comme auſſi conſtruire non ſeulement vn triangle equilateral, mais auſſi vn ſcalene: ou trouuer vn binome, ou trouuer deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ; & autres choſes que lon cognoit en infinies façons ſont* Porimes, *comme deſcrire vn cercle par deux poincts.*

L'Apore (*ou qui n'a effection*) *eſt totalement oppoſé au Porime, comme par exemple, la quadrature du cercle ; car elle n'a pas encore eſté trouuee, bien qu'il ſoit certain qu'elle le peut eſtre : toutefois le moyen & façon de la trouuer n'a pas iuſques à preſent eſté compriſe: Mais nous parlons icy de ce qui eſt deſia cognu, qui s'appelle* Porime principal ; *car ce qui n'a pas encore eſté fait, & qui neantmoins eſt poſſible, eſt appellé* Poriſte (*ou faiſable*). *Mais l'*Apore, *comme il a eſté deſia dit, eſt oppoſé au* Porime, *& eſt ce dont la recherche n'eſt point encore decidee ny bien determinee.*

L'Effable, (*c'eſt à dire rationel, ou dicible & explicable*) *eſt ce dont nous pouuons*

dire la grandeur, l'espece, & position: Mais cette definition est vn peu trop generale, car proprement & selon soy, Effable, *est ce qui est cogny par certaines choses, & selon vne mesure donnee par position, comme d'vn espam ou d'vn doigt.*

Ces choses doncques estans ainsi expliquees, nous pouuons aisement apperceuoir en quoy conuiennent & different toutes les choses que nous auons dictes cy-dessus: Et premierement comme s'accorde Ordonné *auec* Cognu, *& semblablement leurs oppositez entr'eux; car on ne peut point dire qu'vne de ces choses par contreschange soit l'autre, ny aussi que l'vne n'ait pas plus d'estendue que l'autre, quoy qu'ils s'accordent en plusieurs choses, comme descrire vne ligne droicte par deux poincts, & constituer vn triangle equilateral par trois cercles. Mais quarrer vn cercle, cela est bien* Ordonné, *mais* Incognu *neantmoins: Item qu'à vn poinct d'vne Spyralle il y ait vne seule touchante, cela est bien du genre des* Ordonnez, *& ne se peut faire autrement, mais pourtant la demonstration & construction n'en est pas cognue. Et derechef, la section indefinie, & la constitution du Scalene est bien* Cognue, *mais elle n'est pas* Ordonnee; *tellement qu'il est manifeste qu'entre les* Ordonnez, *il y en a de* Cognus, *& d'autres* Incognus: *Et par le contraire, qu'entre les* Cognus, *il y en a d'*Ordonnez, *& d'autres* Inordonnez: *Et partant ces choses se rapportent entr'elles, comme entre les animaux, celuy qui a raison auec celuy qui a des pieds; car ils ne s'egallent point entr'eux, ny l'vn ne s'estend pas plus que l'autre.*

*Semblablement se comportent entr'eux l'*Ordonné *& l'*Inordonné, *au regard du* Porime *& de l'*Apore, *veu qu'entre iceux il y a vne tres-grande ressemblance, & different entr'eux en la façon susdite: Car à la verité la Spyralle est bien Ordonnee, mais elle n'estoit pas Porime deuant Archimede. Et par mesme raison les choses qui sont inordonnees & cognues par infinis moyens sont Porimes, si quelqu'vn en inuente leur constitution & construction. Et neantmoins elles ne sont pas encore ordonnees, comme est constituer vn triangle Scalene, car il n'est pas difficile de faire cognoistre la constitution d'iceluy par vn equilateral, voire il est tres-facile, quoy qu'il soit inordonné, & cognu en infinies façons.*

*Et de mesme façon se comportent l'*Ordonné *& l'*Inordonné *auec l'*Effable *& l'*Irrationel, *car en plusieurs choses ils s'accordent entr'eux, & different neantmoins par la susdite raison, veu que ces choses-là ne s'egallent point entr'elles, ny vne chose ne contient pas l'autre: Car tous les binomes, & les choses qui sont prises comme irrationelles, sont bien ordonnees; mais elles ne sont pas pourtant effables ou dicibles & expliquables, comme ne l'est pas le diametre du quarré au regard du costé. Or des Effables il y en a plusieurs inordinez, parce qu'ils sont cognus diuersement, & en façons indeterminees: Car on peut mesurer vn triangle Scalene par vne mesure proposee & definie, comme explicable, quoy qu'il soit inordonné.*

Or il est aisé de voir la conuenance du Cognu *auec le* Porime, *mais il est difficile d'en expliquer leur difference, d'autant que leur nature approche l'vne de l'autre, tellement qu'il semblent s'egaler entr'eux: il paroistra neantmoins y auoir quelque difference à qui les considerera de prés. Car qu'il n'y ait qu'vne ligne droicte qui touche la Spyralle en vn poinct, cela est* Cognu; *toutesfois le Probleme n'en est pas* Porime, *n'estant pas encore compris: De maniere que tout ce qui est* Cognu *n'est pas pourtant* Porime: *Mais tout ce qui est* Porime *est aussi* Cognu; *& partant le* Cognu *paroist plus estendu que le* Porime.

Or le Cognu, *le* Porime, *& l'*Effable *conuiennent en certaines choses, & different en d'autres par la mesme raison que nous auons desia ditte: Car ces lignes-là que l'on appelle Irrationelles, à la verité sont cognues, & toutesfois elles ne sont pas effables ou explicables.*

Au contraire tout nombre est bien Effable, *& neantmoins tout nombre n'est pas* Cognu. *Mais l'*Effable *de sa nature est tousiours effable, iaçoit que quelque longueur soit tantost effable, & tantost non, si elle est exigee auec quelque autre selon vne mesme mesure. Mais aussi cette mesme longueur est par fois cognue, & autresfois non, iaçoit qu'elles s'accordent totalement entr'elles. Or il est dificile de trouuer quelque chose qui soit* Effable *&* Incognu *ensemble; car le* Cognu *semble paroistre plus estendu que l'*Effable. *Et par ces choses il est manifeste que le* Porime *& l'*Apore *different du* Rationel *ou* Effable, *& de l'*Irrationel: *Car il se peut faire que des choses* Irrationelles, *quelques vnes soient* Porimes; *mais des* Rationelles, *aucunes ne peuuent estre irrationelles. Et partant il est tres-aisé à voir en quoy s'accordent les choses susdites, neantmoins elles se comportent entr'elles de telle sorte qu'il semble que le* Porime *soit plus estendu que l'*Effable.

Or par ces choses on peut recognoistre la difference des choses qui ont esté dittes, car à la verité Effable *&* Irrationel *se dit au respect de la mesure, laquelle neantmoins n'est pas paruenue à nostre cognoissance; veu que quelque chose qui est rationel, peut n'estre pas cognu de nous, & semblablement estre rationel, & n'estre iamais compris qu'il le soit. Mais l'*Ordonné *& l'*Inordonné *se dit selon soy, & selon la propre nature de la chose qui vient en contemplation, encore qu'il ne soit pas compris de nous, comme Archimede a apperceu quelques choses estre ordonnees de leur nature, lesquelles Serenus auoit auparauant contemplees. Mais le* Cognu *& l'*Incognu *se dit au regard de nous; tellement que les choses susdites different entr'elles: car celles-cy se rapportent à nous, celles-là à la propre nature, & les autres à la mesure.*

Ayant donc expliqué les conuenances & differences des choses qui ont esté proposees il reste à considerer que c'est que Donné: *Car de tous ceux-là qui croient que ce qui est concedé en l'hypothese par le proposant soit le* Donné, *se fouruoient de ce qui est cherché, parce que tous les Elemens des Donnez ne sont pas composez de cette sorte de* Donné, *qui est selon l'hypothese, comme on peut voir aux traictez qui ont esté faits du* Donné: *C'est pourquoy delaissant cette opinion il nous faut iuger des definitions des autres. Donc ce qui est concedé en l'hypothese, est quelque chose qui est consequemment cognue par les principes: mais ceux qui se seruent des definitions d'vn seul mot, le definissent & le marquent par quelques vns des susdits, comme il a esté dit au commencement; tellement que presque tous semblent auoir eu cette commune notion du* Donné, *sçauoir est qu'il est compris, comme aussi le mot de* Donné *le manifeste: Et entre ceux-cy, sont les principaux ceux qui le definissent par l'hypothese ou supposition: Et les autres ont eu egard à ce qui est concedé. Mais nous vsant des choses dites comme d'vne regle & addresse pour bien iuger, nous pourrons trouuer vne parfaitte definition de* Donné: *Car il est certain qu'il faut qu'elle s'egale & conuertisse auec la chose definie, qui est vne chose propre aux bonnes definitions. Or telle semble estre la definition du proposé, laquelle entre les expliquees le plus simplement, le definit* Porime; *& entre les complexes, celle qui le definit* Porime *&* Cognu *ensemble, mais toutes les autres sont imparfaittes: Car celle qui le definit* Ordonné, *ne suffit pas pour la comprehension & intelligence du* Donné, *parce que ny tout ordonné, ny le seul ordonné n'est pas compris, veu qu'il y a des choses inordonnees qui ont la mesme condition, comme il a esté monstré. Celle-là ne satisfait pas non plus, laquelle descrit qu'il est le* Cognu: *car tout cognu n'est pas compris, encore que le seul cognu soit compris. Celle-là n'est pas aussi parfaitte laquelle definit que c'est l'*Effable: *car l'effable n'est pas seul compris, puis que quelques vnes des irrationelles sont aussi compriſes: Semblablement tout effable n'est pas compris, comme nous auons declaré cy-dessus. Or entre les definitions qui*

s'expliquent par vn seul mot, reste celle qui le definit Porime, *laquelle semble grandement manifester la comprehension; car tout Porime & le seul Porime est compris : Pourtant Euclide mesme a vsé d'vne telle definition descriuant toutes les especes de Donnez par luy conceues & regardees. Mais entre les definitions composees celle-là est parfaitte, laquelle definit le Donné estre le* Cognu *& le* Porime *ensemble, ayant le Cognu pour genre analogique, & le Porime pour difference. Mais celle-là est imparfaitte, laquelle dit l'*Ordonné *& le* Porime *ensemble : car les choses qui sont telles ne sont pas seules donnees. Et celle-là qui le definit* Ordonné *&* Effable *ensemble, comprend semblablement le Donné auec deffaut. Mais celle du* Cognu *&* Ordonné *ensemble, n'est pas aussi receuable, veu qu'elle excede ce qu'on definit : car ce qui est tel n'est pas donné seul. Donc ceux-là seuls qui ont dit que le* Donné *est le* Cognu *& le* Porime *ensemble, semblent auoir atteint la notion du Donné : car ce qui est tel, est tout & seul compris, lesquelles deux choses doiuent estre aux definitions bien donnees. Mais ceux-là approchent bien prés de ceux-cy, lesquels ont defini ainsi :* Donné *est ce à quoy nous pouuons trouuer vn'egal, selon les choses que nous auons proposees aux premieres hypotheses & principes. Du nombre desquels est Euclide ayant vsé par tout du verbe* πορίσαι δεῖ *qui signifie exhiber ou inuenter, quoy qu'il delaisse le* Cognu *comme consequent du* Porime. *Quelqu'vn pourroit neantmoins le reprendre de ce qu'il n'ait auparauant defini* Donné *en general, mais immediatement quelques vnes des especes de* Donné, *iaçoit qu'aux Elemens de Geometrie il ait defiy la ligne simple auant que de definir les especes.*

Quelle est l'vtilité du traicté des Donnez.

Donques apres auoir expliqué vniuersellement & selon qu'il nous a semblé necessaire pour l'vsage present, que c'est que Donné, *il faut consequemment que nous facions voir les vtilitez de ce traicté. Or ce traicté est tel, qu'il n'est pas seulement institué pour l'amour de soy-mesme, mais aussi pour quelque autre chose : car il est grandement necessaire au lieu que lon appelle* Resolu. *Et nous auons desia dit ailleurs combien de force obtient le* Lieu resolu *aux disciplines Mathematiques & en l'Optique & Canonique, lesquelles approchent grandement d'icelles, tant pource que la* Resolution *est vne inuention de la demonstration, que parce qu'en choses semblables elle nous sert de beaucoup pour l'inuention de la demonstration, ou parce qu'il est beaucoup plus excellent de rencontrer vne puissance resolutiue, que de posseder plusieurs demonstrations particulieres.*

A quelle science se rapporte le traicté des Donnez.

Or veu que la consideration des Donnez est vtile à toutes les sciences, attendu qu'elle sert de beaucoup à la Resolution, *elle sera dite à bon droict estre reuoquee non pas à vne seule science, mais à la Mathematique vniuersellement, laquelle traicte des nombres, des temps, de la velocité, & choses semblables; qui traitte mesme des raisons, comme aussi des proportions, & pour dire en vn mot de toutes medietez. Parquoy pour la parfaitte & demonstratiue cognoissance des* Donnez *tant vtile, Euclide a trauaillé à ce liure des* Donnez, *lequel autheur entre tous ceux qui ont composé des Elemens de Geometrie obtient à bon droict le premier rang, & lequel ayant elaboure les Elemens, ou plustost les introductions presque de toutes les disciplines Mathematiques, assauoir de toute la Geometrie en 13 liures; de l'Astronomie es Phœnomenes, de la Musique, & Optique, il a laissé par escrit les Elemens resolutifs du traicté de* Donné. *Mais comme il estoit Geometre, il a particulierement accommodé aux grandeurs ce qui estoit du Donné, & toutesfois commun aux autres choses, laquelle methode a aussi esté obseruee par luy, lors que traittant vniuersellement des raisons & proportions, il les a appropriees aux grandeurs au 5. liure des Plans.*

Maintenant il a esté dit en general que c'est que Donné, *à quelle science il appartient, & combien en est vtile la contemplation: Adiouſtons donc à ce qui a eſté dit la deſcription d'icelle ſcience, laquelle traitte du* Donné, *attendu qu'elle eſt, comme il appert par ce qui a eſté dit, vne comprehenſion en toutes manieres de* Donnez, *& de leurs accidens & proprietez. Mais eu egard au liure propoſé nous dirons que c'eſt vne doctrine Elementaire de toute la cognoiſſance du* Donné: *dont s'enſuit qu'elle ſera fort vtile, cõme auſſi les choſes y contenues, entant qu'elles ſe referent au* Donné. *Or ce liure eſt diuiſé ſelon les eſpeces des Donnez, & en la premiere ſection ſont contenues les choſes qui ſont donnees par raiſon: ſecondement, celles qui ſont donnees par poſition; & en apres, celles qui ſont donnees par eſpece. Car ce qui eſt* Donné *par grandeur, eſt ſimple & particulierement contenu aux autres, & principalement aux Donnez par eſpece. Or il a commencé aux choſes donnees par raiſon & poſition, d'autant que celles qui ſont donnees par eſpece en ſont conſtituees. Euclide donne encore vne autre diuiſion à ce liure; car il le diuiſe en vniuerſelles grandeurs, en lignes, en ſuperficies, & en theoremes circulaires; lequel ordre il a auſſi gardé es definitions & ſuppoſitions de ce liure. Outre ce il s'eſt ſerui d'vn genre d'enſeigner qui ne procede point par la compoſition, mais par la reſolution, ainſi que Pappus a fait voir amplement aux Commentaires qu'il a fait ſur ce liure.*

FIN.

LES DONNEZ D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. LES plans ou eſpaces, les lignes, & les angles, auſquels nous en pouuons trouuer d'egaux ſeront dits eſtre donnez par grandeur.

2. Vne raiſon eſt dicte eſtre donnee, lors que nous en pouuons trouuer vne meſme, ou egale à icelle.

3. Les figures rectilignes dont les angles ſont donnez, & auſſi les raiſons que les coſtez ont entr'eux, ſont dictes eſtre donnees par eſpece.

4. Les poincts, les lignes, & les angles, qui ont & gardent touſiours vn meſme lieu & ſit, ſont dicts eſtre donnez par poſition ou ſitution.

5. Vn cercle eſt dit eſtre donné par grandeur, lors qu'on en donne le demi-diametre par grandeur.

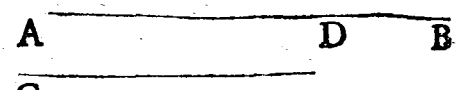
6. Vn cercle eſt dit eſtre donné par poſition, & par grandeur, lors qu'on en donne le centre par poſition, & le demi-diametre par grandeur.

7. Les ſegmens de cercles auſquels les angles, & les baſes ſont

donnees par grandeur, ſont dicts eſtre donnez par grandeur.

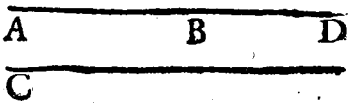
8. Les ſegmens de cercle, auſquels les angles ſont donnez par grandeur, & les baſes des ſegmens par poſition & grandeur, ſont dicts eſtre donnez par poſition & par grandeur.

9. Vne grandeur eſt plus grande qu'vne autre, d'vne grandeur donnee, lors qu'en ayant oſté la donnee, le reſte eſt egal à cette autre.



C'eſt à dire que s'il y-a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant oſté de AB vne grandeur donnee BD, le reſte AD ſoit egal à l'autre grandeur C; icelle AB ſera dite plus grande que C, d'vne grandeur ou excez donné.

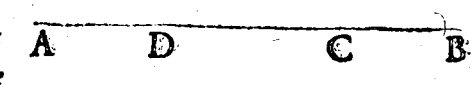
10. Vne grandeur eſt moindre qu'vne autre, d'vne grandeur donnee, lors qu'ayant adiouſté la donnee à icelle, la toute eſt egale à cette autre.



C'eſt à dire que s'il y a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant adiouſté à la moindre AB, vne grandeur donnee BD, toute la grandeur AD ſoit egale à l'autre grandeur C: Icelle AB ſera dicte moindre que C, d'vne grandeur ou excez donné.

11. Vne grandeur eſt dite plus grande qu'vne autre grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon, lors qu'oſtant d'icelle grandeur la donnee, le reſte a à cette autre vne raiſon donnee.

Soient par exemple deux grandeurs AB & CB, & ayant oſté de AB, vne grandeur donnee AD, le reſte DB ait à l'autre grandeur CB, vne raiſon donnee: Icelle AB ſera dicte plus grande que CB d'vne donnee, qu'en raiſon; pource qu'ayant oſté d'icelle AB la donnee AD, le reſte DB a à l'autre grandeur CB vne raiſon donnee.



12. Vne grandeur eſt dite moindre qu'vne autre d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon; lors que la donnee luy eſtant adiouſtee, la toute a à cette autre vne raiſon donnee.

Soient par exemple deux grandeurs AB, BC; & ayant adiouſté à AB, vne grandeur donnee AD, la toute DB ait à l'autre grandeur BC vne raiſon donnee: Icelle AB ſera dicte moindre que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon: car ayant adiouſté à icelle AB, la grandeur donnee AD, la compoſee DB a à l'autre grandeur BC, vne raiſon donnee.

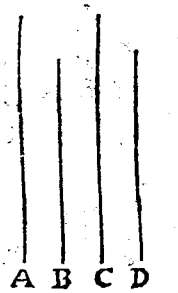


13. Vne ligne droicte est au long ou vis à vis par position, quand par vn poinct donné elle est menee parallele à vne autre ligne.

PROPOSITION I.

Des grandeurs estans donnees, la raison qu'elles ont entr'elles est aussi donnee.

Soient donnees les grandeurs A & B: Ie dis que la raison de A à B est donnee.



Car puis que la grandeur A est donnee, [a] nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle soit C: Derechef, d'autant que la grandeur B est donnee, nous en pouuons aussi trouuer vne egale à icelle: & soit D. Donc puis que A est egale à C, & B à D, comme A est à C [b] ainsi B à D: & en permutant, [c] comme A sera à B, ainsi C à D. Donc [d] la raison de A à B est donnee: car c'est la mesme raison que de C à D, que nous auons trouuée. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 1. d. donn.
b 7. 5.
c 16. 5.
d 2. d.

PROP. II.

Si vne grandeur donnee a à quelque autre grandeur vne raison donnee, cette autre est aussi donnee par grandeur.

Que la grandeur donnee A ait à vne autre grandeur B vne raison donnee: Ie dis qu'icelle B est aussi donnee par grandeur.

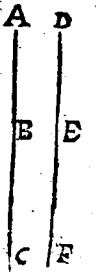
Car puis que A est donnee, nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle soit C: Et d'autant que la raison de A à B est aussi donnee, nous en pouuons trouuer [e] vne de mesme: Qu'elle soit trouuee, & soit la raison de C à D. Or puis que comme A est à B, ainsi C à D; en permutant, comme A à C, ainsi B à D: Mais A est egale à C: Donc [f] B sera aussi egale à D. Partant [n] la grandeur B est donnee, veu qu'à icelle en a esté trouuee vne egale D.

e 2. d.
f 14. 5.
n 1. d.

PROP. III.

Si des grandeurs donnees sont composees, aussi sera donnee cette grandeur-là, qui est composee d'icelles.

Soient composees les grandeurs donnees AB, BC: Ie dis que la grandeur AC, qui est composee des grandeurs AB, BC, est donnee.

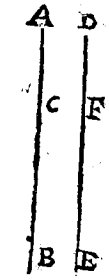


Car puis que AB est donnee, nous en pouuons trouuer vne egale à icelle; laquelle soit DE. Derechef, veu que BC est donnee, nous en pouuons aussi trouuer vne egale à icelle, laquelle soit EF. Donc puis que à icelle DE est egale AB, & à EF est egale BC, la toute [g] AC est egale à la toute DF. Donc AC [n] est donnee, puis que à icelle a esté posee egale DF.

g 2. ax.

PROP. IIII.

Si d'vne grandeur donnee, on oſte vne grandeur donnee, auſſi ſera donnee la grandeur reſtante.



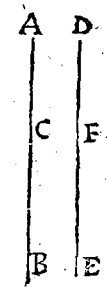
Que d'vne grandeur donnee AB, ſoit retranchee la grandeur donnee AC: Ie dis que la grandeur reſtante CB eſt donnee.

Car d'autant que AB eſt donnee on en peut trouuer vne egale à icelle; laquelle ſoit DE. Derechef, puis que AC eſt donnee nous en pouuons auſſi trouuer vne egale à icelle, laquelle ſoit DF. Veu donc que la grandeur AB eſt egale à la grandeur DE, & la grandeur AC à la grandeur DF; le reſte CB[h] ſera egal au reſte FE. Parquoy CB eſt donnee: car à icelle en a eſté baillee vne egale FE.

h 3. ax.

PROP. V.

Si vne grandeur a vne raiſon donnee à quelque partie d'icelle, elle aura auſſi à la partie reſtante vne raiſon donnee.



Que la grandeur AB ait vne raiſon donnee à quelque partie d'icelle AC: Ie dis qu'elle aura auſſi à la partie CB vne raiſon donnee.

Car ſoit expoſee vne grandeur donnee DE; & pource que la raiſon de la grandeur AB à la grandeur AC eſt donnee,[d] nous en pouuons trouuer vne de meſme, laquelle ſoit DE à DF: Donc la raiſon d'icelle DE à DF eſt donnee: Mais DE eſtant donnee, auſſi l'eſt ſa partie DF, & conſequemment[l] le reſte FE: Donc[m] puis que DE & FE ſont donnees, la raiſon d'icelle DE à FE eſt auſſi donnee. Et d'autant que comme DE eſt à DF, ainſi AB à AC, en conuertiſſant[n] comme DE à FE, ainſi AB à CB. Mais la raiſon de DE à FE eſt donnee, comme il a eſté demonſtré: Donc auſſi la raiſon de AB à CB eſt donnee.

d 2. d. conu.
i 2 p.
l 4 p.
m 1 p.
n ſch. 19. 5.

SCHOLIE.

De cecy eſt euident que ſi vne grandeur a à quelque partie d'icelle vne raiſon donnee, en diuiſant ſera auſſi donnee la raiſon d'vne partie à l'autre. Car puis que comme DE eſt à FE, ainſi AB eſt à CB; en diuiſant, comme DF à FE, ainſi AC à CB. Mais il a eſté demonſtré que les parties DF & FE ſont donnees, & conſequemment leur raiſon eſt auſſi donnee: pareillement donc eſt donnee la raiſon de AC à CB.

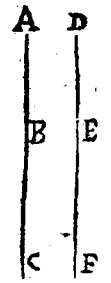
PROP. VI.

Si deux grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnee ſont compoſees, auſſi la grandeur compoſee d'icelles aura à l'vne & à l'autre vne raiſon donnee.

Soient compoſees deux grandeurs AB, BC ayans entr'elles vne raiſon donnee: Ie dis que la toute AC a vne raiſon donnee à chacun d'icelles AB, AC.

Car ſoit expoſee vne grandeur donnee DE; & pource que la raiſon de AB à

BC eſt donnee, en ſoit fait vne meſme d'icelle DE à EF: Donc la raiſon d'icelle DE à EF eſt donnee: & partant[o] la grandeur DE eſtant donnee, l'vne & l'autre d'icelles DE, FE eſt donnee. Parquoy[p] la toute DF ſera auſſi donnee. Donc[q] la raiſon de la meſme DF à chacune d'icelles DE, EF ſera donnee. Et d'autant que comme AB à BC ainſi DE à EF: en compoſant,[r] comme AC à BC, ainſi DF à EF: Donc en conuertiſſant,[s] comme AC à AB, ainſi DF à DE. Parquoy comme la toute DF eſt à l'vne & à l'autre grãdeur DE, EF, ainſi la toute AC eſt à l'vne & à l'autre grandeur AB, BC. Donc[t] la raiſon d'icelle AC à chaque grandeur AB, BC eſt dõnee.



o 2 p.
p 3 p.
q 1 p.
r 18 5.
s sch. 19. 5.
t 2. d.

PROP. VII.

Si vne grandeur donnee eſt couppee en raiſon donnee, chaque ſegment eſt donné.

Que la grandeur donnee AB ſoit couppee en vne raiſon donnee, ſçauoir eſt de AC à CB: Ie dis que chaque ſegment AC, CB ſera donné.



Car d'autant que la raiſon de AC à CB eſt donnee, la raiſon de[u] AB à chacune d'icelles AC, CB eſt auſſi donnee. Mais AB eſt donnee: donc[x] chacun des ſegmens AC, CB eſt auſſi donné.

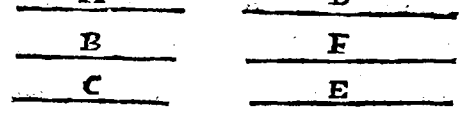
u 6 p.
x 2 p.

PROP. VIII.

Les grandeurs qui ont à vne meſme vne raiſon donnee, ſeront entr'elles en vne raiſon donnee.

Que chaque grandeur A & C ait vne raiſon donnee à la grandeur B: Ie dis que la raiſon de la grandeur A à la grandeur C eſt auſſi donnee.

Car ſoit expoſee vne grandeur donnee D: & puis que la raiſon de A à B eſt donnee, ſoit faite la meſme d'icelle D à E. Or veu que D eſt donnee[y] auſſi E eſt donnee. Derechef, puis que la raiſon de B à C eſt donnee, ſoit faite la meſme de E à F. Mais E eſt donnee: & partant F eſt auſſi donnee. Mais puis que D eſt donnee,[z] la raiſon d'icelle D à F eſt donne. Et d'autant que comme A à B, ainſi D à E, & cõme B à C, ainſi E à F, en raiſon egale,[a] comme A à C, ainſi D à F. Mais la raiſon d'icelle D à F eſt dõnee: Donc la raiſon de A à C eſt auſſi donnee.

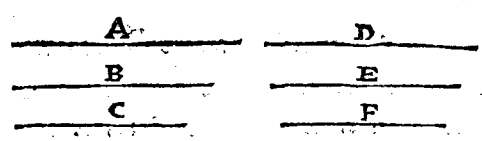


y 2. p.
z 1. p.
a 22. 5.

PROP. IX.

Si deux ou dauantage de grandeurs ſont entr'elles en raiſon donnée: & que les meſmes grandeurs ayent à quelques autres grandeurs des raiſons donnees, iaçoit qu'elles ne ſoient les meſmes: ces autres grandeurs ſeront auſſi entr'elles ne raiſons donnees.

Que deux ou dauantage de grandeurs A, B, C, ſoyent entr'elles en raiſon donnee; & que ces meſmes grandeurs A, B, C, ayent à quelques autres grandeurs D, E, F, les raiſons donnees, non toutesfois les meſmes: Ie dis qu'icelles D, E, F ſeront entr'elles en raiſons donnees.



Car d'autant que la raiſon de A à B eſt donnee, & auſſi celle de A à D; la raiſon de D à B ſera donnee: Mais la raiſon de B à E eſt auſſi donnee: Donc la raiſon d'icelle D à E ſera pareillement donnee.

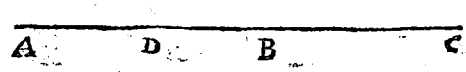
Derechef, puis que la raiſon de B à C eſt donnee, & auſſi celle de B à E; la raiſon de E à C ſera donnee. Mais la raiſon de C à F eſt auſſi donnee: Donc[b] la raiſon de E à F ſera donnee. Mais il a eſté demonſtré que la raiſon de D à E eſt auſſi donnee: & partant[b] la raiſon de D à F ſera donnee. Donc les grandeurs D, E, F, ſont entr'elles en raiſons donnees.

b 8. p.

PROP. X.

Si vne grandeur eſt plus grande qu'vne grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon: la compoſee des deux ſera auſſi plus grande que cette meſme grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon: Mais ſi cette compoſee eſt plus grande que la meſme grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon; ou le reſte ſera auſſi plus grand qu'icelle meſme d'vne donnee, qu'en raiſon; ou bien ſera donné iceluy reſte auec la ſuiuante, à laquelle l'autre grandeur a raiſon donnee.

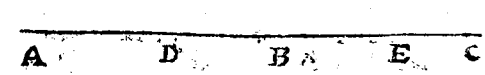
Soit la grandeur AB plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que la toute AC eſt auſſi plus grande que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AD: Donc[c] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnee; & en compoſant,[d] la raiſon de DC à BC eſt auſſi donnee. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnee: Donc AC eſt plus grande que[e] la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.

c 11. d.
d 6.
e 8.

Derechef, ſoit la grandeur AC plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que le reſte AB eſt ou plus grand que la meſme BC d'vne donnee qu'en raiſon, ou que la meſme AB auec celle qui ſuit, à laquelle BC a vne raiſon donnee, eſt donnee.



Car d'autant que la grandeur AC eſt plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee. Or icelle grandeur donnee eſt, ou moindre que la grandeur AB, ou plus grande. Soit premierement moindre, & ſoit AD: donc la raiſon[c] du reſte DC à CB eſt don-

nee. Parquoy en diuiſant [e] la raiſon de DB à BC eſt donnee. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnee : Donc la grandeur AB eſt plus grande [f] que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon. Soit maintenant la grandeur donnee plus grande que la grandeur AB; & ſoit poſee AE egale à icelle : Donc [f] la raiſon du reſte EC à CB eſt donnee : Et en conuertiſſant, [g] la raiſon d'icelle BC à BE eſt auſſi donnee. Mais icelle EB auec BA eſt donnee, pource que la toute AE eſt donnee : Donc eſt donnee AB auec celle qui ſuit BE, à laquelle BC a vne raiſon donnee.

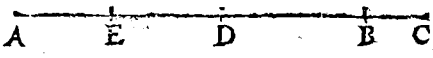
[e] 5ch. 5 pr.
[f] 11.d.
[g] 5.p.

PROP. XI.

Si vne grandeur eſt plus grande qu'vne grandeur d'vne donnee, qu'en raiſon, la meſme grandeur ſera auſſi plus grande que la compoſee d'icelles d'vne donnee, qu'en raiſon : Et ſi la meſme grandeur eſt plus grande que les deux enſemble d'vne donnee, qu'en raiſon ; cette meſme grandeur ſera auſſi plus grande que le reſte d'vne donnee, qu'en raiſon.

Que la grandeur AB ſoit plus grande que la grandeur BC d'vne donnee, qu'en raiſon : Ie dis que la meſme AB eſt auſſi plus grande que la toute AC d'vne donnee, qu'en raiſon.

Car puis que la grandeur AB eſt plus grande que BC d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee vne grandeur donnee AD. Donc [h] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnee ; & partant [i] la raiſon de DC à BD ſera auſſi donnee. Soit fait la meſme de AD à DE : Donc la raiſon d'icelle AD à DE eſt donnee. Mais AD eſt donnee : Donc [l] DE eſt auſſi donnee, & conſequemment [m] le reſte AE eſt auſſi donné. Mais d'autant que comme AD à DE, ainſi DC à BD, en permutant, [n] comme AD à DC, ainſi DE à DB : Donc en compoſant, [o] comme AC à CD, ainſi EB à DB; & en permutant, [n] comme AC à EB, ainſi DC à DB. Mais la raiſon de DC à DB eſt donnee : Donc auſſi le ſera celle de AC à EB, conſequemment celle de EB à AC. Mais il a eſté demonſtré que AE eſt donnee : Donc [h] AB eſt plus grande que AC d'vne donnee AE, qu'en raiſon.



[h] 11.d. [i] 6.p. [l] 2.p. [m] 4.p. [n] 16.5. [o] 18.5.

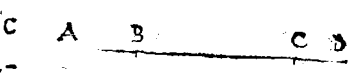
Mais maintenant ſoit AB plus grande que AC d'vne donnee, qu'en raiſon : Ie dis que la meſme AB eſt auſſi plus grande que le reſte BC d'vne donnee, qu'en raiſon. Car d'autant que AB eſt plus grande que AC d'vne donnee qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee AE. Donc la [h] raiſon du reſte EB à AC eſt donnee, & conſequemment auſſi le ſera celle de AC à EB. Soit faite la meſme de AD à DE : Donc la raiſon de AD à DE eſt donnee; & en conuertiſſant, [p] la raiſon de AD à AE ſera auſſi donnee, & conſequemment celle de AE à AD. Or AE eſt donnee : Donc la toute AD [l] ſera auſſi donnee. Et d'autant que comme la toute AC eſt à la toute EB, ainſi la retranchee AD eſt à la retranchee ED ; ainſi auſſi ſera [q] le reſte DC au reſte DB. Mais la raiſon de AC à EB eſt donnee : Donc auſſi le ſera celle de DC à DB. Parquoy en diuiſant,

[p] 5.p. [q] 19.5.

r *sch.* 5. *pr.* h 11. *d.* r la raiſon de BC à DB eſt donnee, & conſequemment auſſi le ſera celle de DB à BC. Mais il a eſté demonſtré que AD eſt donnee: Donc h AB eſt plus grande que la meſme BC d'vne donnee, qu'en raiſon.

PROP. XII.

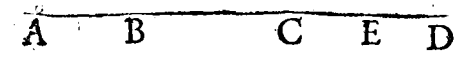
S'il y a trois grandeurs, & que la premiere auec la ſeconde ſoit donnee, mais la ſeconde auec la tierce ſoit auſſi donnee: ou la premiere ſera egale à la tierce, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee.



Soient trois grandeurs AB, BC, CD; & AB auec BC, ſçauoir AC ſoit donnee: mais BC auec CD, ſçauoir BD ſoit auſſi donnee: Ie dis que la grandeur AB eſt ou egale à la grandeur CD, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee.

Car d'autant que chacune des grandeurs AC, BD eſt donnee, les grandeurs donnees ſont ou egales entr'elles, ou inegales: Qu'elles ſoient premierement egales. Donc AC eſt egale à BD; ſoit oſtee la commune BC, & demeurera s AB egale à CD. Mais qu'elles ſoient inegales, comme en cette autre figure. Et ſoit BD plus grande que AC. Soit donc poſee BE egale à AC. Or puis que AC eſt donnee, BE eſt auſſi donnee. Mais la toute BD eſt auſſi donnee: le reſte ED t le ſera donc auſſi. Et d'autant que BE eſt egale à AC oſtant la commune BC, s reſtera AB egale à CE. Mais ED eſt donnee: Donc CD eſt plus grande que AB d'vne donnee ED.

s 3. *ax.*



t 4. *pr.*

SCHOLIE.



Que ſi la premiere auec la ſeconde, ſçauoir AC eſtoit plus grande que la ſeconde auec la tierce, ſçauoir BD, comme en cette autre figure, on feroit CE egale à icelle BD; & par meſmes raiſons que deſſus on demonſtreroit AE eſtre donnee, & egale à CD: & partant AB eſtre plus grande que CD d'vne donnee.

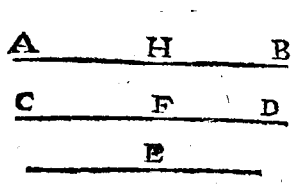
PROP. XIII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere d'icelles ait à la ſeconde vne raiſon donnee, mais la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon; auſſi la premiere ſera plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, E; & icelle AB ait à CD vne raiſon donnee: mais la grandeur CD ſoit plus grande que la grandeur E, d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que la grandeur AB eſt plus grande que la grandeur E d'vne donnee, qu'en raiſon.

Car puis que CD eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee vne grandeur donnee CF: Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnee. Et

d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnee, ſoit faite la meſme de AH à CF. Donc la raiſon d'icelle AH à CF eſt donnee. Mais CF eſt donnee: Donc[u] AH eſt auſſi donnee. Et veu que comme la toute AB eſt à la toute CD, ainſi la retranchee AH eſt à la retranchee CF, & ainſi[x] auſſi le reſte HB eſt au reſte FD: la raiſon d'icelle HE à FD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de FD à E eſt auſſi donnee: Donc[o] la raiſon de HB à E eſt donnee. Mais il a eſté demonſtré que AH eſt donnee: Donc[l] AB eſt plus grande qu'icelle E d'vne donnee, qu'en raiſon.

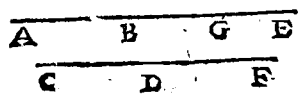


u 2. *pr.*
x 19. 5.
o 8. *pr.*
l 11. *d.*

PROP. XIIII.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raiſon donnee, & qu'à chacune d'icelles on adiouſte vne grandeur donnee: ou les toutes auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs AB, CD ayans entr'elles vne raiſon donnee; & à chacune d'icelles ſoit adiouſtee vne grandeur donnee, ſçauoir BE & DF: Ie dis que les toutes AE, CF, ou ſont entr'elles en vne raiſon donnee, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car d'autant que chacune d'icelles BE, DF eſt donnee, [y] la raiſon d'icelle BE à DF eſt auſſi donnee: Et ſi cette raiſon eſt la meſme que de AB à CD; celle de la toute AE à la toute CF[z] ſera encore la meſme: & partant la raiſon d'icelle AE à CF eſt donnee.

y 1. *pr.*
z 12. 5.

Maintenant, la raiſon de BE à DF ne ſoit la meſme que de AB à CD; & ſoit fait comme AB à CD, ainſi BG à DF: Donc la raiſon d'icelle BG à DF eſt donnee. Mais la grandeur DF eſt donnee: Donc[a] BG eſt auſſi donnee. Et puis que la toute BE eſt donnee, [b] le reſte GE ſera auſſi donné. Mais d'autant que comme AB à CD, ainſi BG à DF; [z] ainſi auſſi eſt la toute AG à la toute CF: & partant la raiſon d'icelle AG à CF eſt donnee: Mais la grandeur GE eſt donnee: Donc[l] la grandeur AE eſt plus grande que la grandeur CF d'vne donnee, qu'en raiſon.

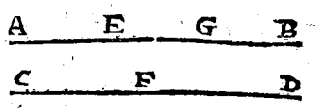
a 2. *pr.*
b 4. *pr.*
z 12. 5.
l 11. *d.*

PROP. XV.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raiſon donnee, & que de chacune d'icelles on oſte vne grandeur donnee: les grandeurs reſtantes, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs AB, CD, ayans entr'elles vne raiſon donnee, & que de chacune d'icelles ſoit retranchee vne grandeur donnee, c'eſt aſſauoir de

AB la grandeur AE, & de CD la grandeur CF: Ie dis que les restes EB, FD, ou sont entr'eux en vne raison donnee, ou bien que l'vn est plus grand que l'autre d'vne donnee, qu'en raison.

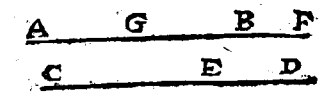


Car d'autant que chaque grandeur AE, CF est donnee, la raison de AE à CF est donnee: Et si elle est la mesme que de AB à CD, celle du reste EB au reste
c 19.5. FD[c] sera aussi la mesme; & partant la raison d'icelle EB à FD sera aussi donnee. Mais si elle n'est la mesme, soit fait comme AB à CD, ainsi AG à CF. Or la raison de AB à CD est donnee: Donc aussi celle de
d 2 pr. AG à CF sera donnee. Mais CF est donnee: Donc[d] AG est donnee. Mais AE
e 4 pr. est aussi donnee: Donc[e] le reste EG est donnee. Et d'autant que comme AB à CD, ainsi la retranchee AG à la retranchee CF, & ainsi aussi[e] le reste GB au reste FD; la raison d'icelle GB à FD est aussi donnee. Partant puis que EG est
o 11.d. donnee, EB est plus grande que FD[o] d'vne donnee qu'en raison.

PROP. XVI.

Si deux grandeurs ont entr'elles vne raison donnee, & que de l'vne d'icelles on oste vne grandeur donnee, & à l'autre on en adiouste vne donnee: la toute sera plus grande que le reste d'vne donnee, qu'en raison.

Soient deux grandeurs AB, CD, ayans entr'elles vne raison donnee, & que de CD on oste vne grandeur donnee DE, mais à AB soit adioustee la grandeur donnee BF: Ie dis que la toute AF est plus grande que le reste CE d'vne donnee, qu'en raison.



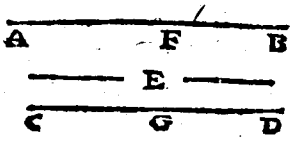
Car puis que la raison de AB à CD est donnee, soit
f 2.d. faicte la mesme de BG à DE: Donc[f] la raison d'icelle BG à DE est donnee.
g 2.p. Mais DE est donnee: Donc[g] BG est aussi donnee. Mais BF est aussi donnee:
h 3.p. Donc[h] la toute GF est donnee. Et puis que comme AB à CD, ainsi la retran-
i 19.5. chee BG à la retranchee DE, & [i] ainsi aussi le reste AG au reste CE; la raison d'icelle AG à CE est donnee: Mais GF est donnee: Donc la grandeur AF est plus grande[o] que la grandeur CE d'vne donnee, qu'en raison.

PROP. XVII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere soit plus grande que la seconde d'vne donnee, qu'en raison, mais la tierce soit aussi plus grande que la mesme seconde d'vne donnee, qu'en raison: la premiere aura à la tierce, ou vne raison donnee, ou l'vne sera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raison.

Soient trois grandeurs AB, E, CD, & que chacune des grandeurs AB, CD, soit

ſoit plus grande que la grandeur E d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que les grandeurs AB, CD, ou ſont entr'elles ſelon vne raiſon donnee, ou que l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que E d'vne donnee qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AF: Donc la raiſon du reſte FB à E eſt donnee. Derechef, puis que CD eſt plus grande que la meſme E, d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee CG; & la raiſon du reſte GD à E ſera donnee: Donc [l] la raiſon de FB à GD ſera auſſi donnee. Mais à icelles FB, GD, ſont adiouſtees les grandeurs donnees AF, CG: Donc les toutes AB, CD, [m] ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

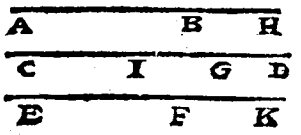
l 8.p.

m 14.p.

PROP. XVIII.

S'il y-a trois grandeurs, & que l'vne d'icelles ſoit plus grande que chacune des autres d'vne donnée qu'en raiſon, ou les deux autres auront entr'elles vne raiſon donnée, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, EF, & l'vne d'icelles, ſçauoir CD, ſoit plus grande que chacune des autres AB, EF, d'vne donnée qu'en raiſon: Ie dis que les deux grandeurs AB, EF, ou ſeront entr'elles ſelon vne raiſon donnée, ou que l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnée, qu'en raiſon



Car d'autant que la grandeur CD eſt plus grande que la grandeur AB d'vne donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée la grandeur donnée DG: donc la raiſon du reſte CG à AB eſt donnée. Soit faicte la meſme de GD à BH: donc la raiſon d'icelle DG à BH eſt donnée. Mais DG eſt donnee: donc [n] BH eſt auſſi donnee. Et d'autant que comme CG à AB, ainſi GD à BH, [o] ainſi auſſi eſt la toute CD à la toute AH; la raiſon d'icelle CD à AH ſera auſſi donnee.

n 2.p.

o 12.5.

Derechef, puis que la meſme CD eſt plus grande que EF, d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee DI: Donc la raiſon du reſte CI à EF eſt donnee: Soit faite la meſme de DI à FK. Donc la raiſon d'icelle DI à FK ſera auſſi donnee. Mais DI eſt donnee: Donc FK eſt auſſi donnee. Et veu que comme CI à EF, ainſi ID à FK; ainſi auſſi eſt la toute [o] CD à la toute EK: la raiſon d'icelle CD à EK ſera donnee. Mais la raiſon de la meſme CD à AH eſt auſſi donnee: Donc [p] la raiſon d'icelle AH à EK ſera donnee. Et puis que d'icelles AH, EK ſont retranchees les grandeurs donnees BH, FK; les grandeurs AB, EF, [q] ou ſont entr'elles en vne raiſon donnee, ou l'vne eſt plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

p 8.p.

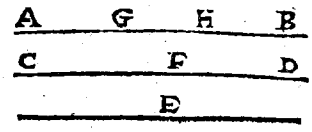
q 15.p.

PROP. XIX.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere ſoit plus grande

que la ſeconde, d'vne grandeur donnee, qu'en raiſon, & la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon: Auſſi la premiere grandeur ſera plus grande que la tierce d'vne donnee, qu'en raiſon.

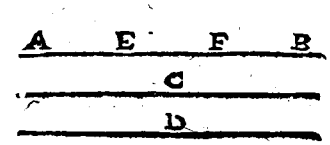
Soient trois grandeurs AB, CD, E; & la grandeur AB ſoit plus grande que CD d'vne donnee, qu'en raiſon; mais CD ſoit auſſi plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon: Ie dis que AB eſt plus grande que la meſme E d'vne donnee qu'en raiſon.



Car puis que CD eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee CF: Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnee. Derechef, veu que AB eſt plus grande que la meſme CD d'vne donnee, qu'en raiſon, en ſoit oſtee la grandeur donnee AG: Donc la raiſon du reſte GB à CD eſt donnee. Soit faite la meſme de GH à CF: Donc la raiſon d'icelle GH à CF eſt donnee. Mais CF eſt donnee: Donc auſſi GH eſt donnee.
t 3. p. Et puis AG eſt auſſi donnee, la toute[t] AH ſera auſſi donnee. Mais comme GB
f 19. 5. à CD, ainſi GH à CF, & ainſi auſſi le[f] reſte HB au reſte FD: Donc la raiſon d'icelle HB à FD eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme FD à E eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de HB à E eſt pareillement donnee; & eſt auſſi donnee la gran-
l 11. d. deur AE: Parquoy la grandeur AB[l] eſt plus grande que E d'vne donnee, qu'en raiſon.

AVTREMENT.

Soient trois grandeurs AB, C, D, & que AB ſoit plus grande que C d'vne donnée, qu'en raiſon; mais icelle C ſoit auſſi plus grande que D d'vne donnée, qu'en raiſon: Ie dis que AB eſt plus grande que D d'vne donnée, qu'en raiſon.



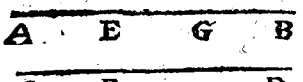
Car d'autant que AB eſt plus grande que C d'vne donnees, qu'en raiſon, en ſoit retranchee la grandeur donnee AE: Donc la raiſon du reſte EB à C eſt donnee. Mais la grandeur C
t 13. p. eſt plus grande que la grandeur D d'vne donnee, qu'en raiſon: Donc[t] EB eſt plus grande que D d'vne donnee qu'en raiſon. Parquoy en ſoit retranchee la
u 3. p. grandeur donnee EF; & la raiſon du reſte FB à D ſera donnee. Mais AF[u] eſt
l 11. d. donnee: Donc[l] AB eſt plus grande que D d'vne donnee, qu'en raiſon.

PROP. XX.

S'il y a deux grandeurs donnees, & que d'icelles ſoient oſtees des grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnee: ou les grandeurs reſtantes auront entr'elles vne raiſon donnees, ou l'vne ſera pas grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs donnees AB, CD, deſquelles ſoient oſtees les grandeurs AE, CF ayans entr'elles vne raiſon donnee: Ie dis que les grandeurs

EB, FD, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon. Car puis que l'vne & l'autre grandeur AB, CD eſt donnee, la raiſon d'icelle AB à CD eſt [z] auſſi donnee : Et ſi c'eſt la meſme que de AE à CF celle du reſte EB au reſte FD ſera [x] auſſi la meſme; & par tant la raiſon d'icelle EB à FD ſera auſſi donnee. Mais ſi elle n'eſt la meſme, ſoit fait que cõme AE à CF, ainſi AG à CD. Or la raiſon d'icelle AE à CF eſt donnee: donc la raiſon d'icelle AG à CD eſt dõnee. Mais CD eſt donnee: Donc [a] AG eſt auſſi donnee. Mais la toute AB eſt pareillement donnee: Donc [b] le reſte BG eſt donné. Et puis que comme AE à CF, ainſi AG à CD, & auſſi le reſte EG au reſte FD: la raiſon d'icelle EG à FD eſt donnee. Mais GB eſt auſſi donnee : Donc la grandeur EB eſt plus grande [l] que la grandeur BD d'vne donnee, qu'en raiſon.

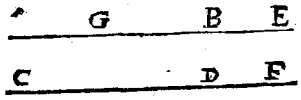


z 1. p.
x 19. 5.
a 3. p.
b 4. p.
l 11. d.

PROP. XXI.

S'il y a deux grandeurs donnees, & qu'à icelles on adiouſte d'autres grandeurs ayans entr'elles vne raiſon donnée : ou les toutes auront entr'elles vne raiſon donnee, ou l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs donnees AB, CD, & à icelles ſoient adiouſtees les grandeurs BE, DF ayans entr'elles vne raiſon donnee : Ie dis que les toutes AE, CF, ou auront entr'elles vne raiſon donnee, ou bien que l'vne ſera plus grande que l'autre d'vne donnee, qu'en raiſon.



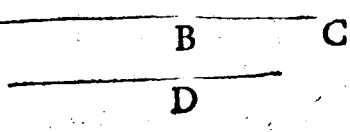
Car puis que l'vne & l'autre grandeur AB, CD eſt donnee, leur raiſon [c] eſt auſſi donnee : Et ſi c'eſt la meſme raiſon que de BE à DF, auſsi ſera donnee la raiſon de la toute AE à la toute CF; car ce ſera encore [d] la meſme. Mais ſi ce n'eſt la meſme, ſoit fait que comme BE eſt à DF, ainſi BG à CD : Donc la raiſon d'icelle BG à CD eſt donnee. Mais CD eſt donnee : Donc [e] le ſera auſsi BG. Mais la toute AB eſt donnee : Donc le ſera auſsi [f] le reſte AG. Et puis que comme BE à DF ainſi BG à CD, & auſsi [d] la toute GE à la toute CF; la raiſon d'icelle GE à CF ſera pareillement donnee. Mais AG eſt donnee : Donc la grandeur AE eſt plus grande que la grandeur CF d'vne donnee, qu'en raiſon.

c 1. p.
d 12. 5.
e 2. p.
f 4. p.

PROP. XXII.

Si deux grandeurs ont à quelque autre vne raiſon donnée, auſſi leur compoſée aura à la meſme vne raiſon donnée.

Que les deux grandeurs AB, BC ayent à quelque autre grandeur D vne raiſon donnée : Ie dis que la compoſée AC a auſſi à la meſme D vne raiſon donnée.



Car puis que chaque grandeur AB, BC a vne raiſon donnée à D, la raiſon [g] de

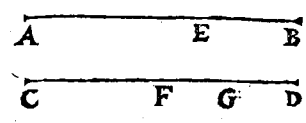
g 8. p.

AB à BC eſt donnée: & en compoſant[h] la raiſon de AC à BC eſt donnée. Mais celle de BC à D eſt auſſi donnée: donc[g] la raiſon d'icelle AC à D ſera pareillement donnée.

h 6. pr.
g 8. pr.

PROP. XXIII.

Si le tout eſt au tout en raiſon donnée, & que les parties ſoient aux parties en raiſons données, iaçoit que ce ne ſoient les meſmes: les toutes ſeront aux toutes en raiſons données.



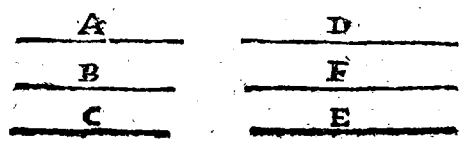
Que le tout AB ait au tout CD vne raiſon donnée; mais les parties AE, EB ſoient aux parties CF, FD en raiſons donnees, bien qu'elles ne ſoient les meſmes: Ie dis que toutes ces grandeurs ſeront auſſi entr'elles en raiſons donnees, c'eſt à dire qu'vne chacune d'icelles AB, AE, BE, CD, CF, FD ſera à chacune des autres en raiſon donnee.

Car puis que AE eſt à CF en raiſon donnee, ſoit faicte la meſme de AB à CG: Donc la raiſon d'icelle AB à CG eſt donnee, & conſequemment auſſi celle[i] du reſte EB au reſte FG. Mais la raiſon de FD à la meſme EB eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de FD à FG[l] eſt pareillement donnee: & partant[m] celle de FD au reſte GD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de AB à chacune d'icelles CD, CG eſt donnee: Donc le ſera auſſi[l] celle de CD à CG, & encore[m] celle de CD au reſte GD. Mais la raiſon de FD à DG eſt donnee: Donc le ſera auſſi[l] celle de la meſme CD à FD, & conſequemment celle de[m] CD au reſte FC: Donc auſſi ſera dõnee la raiſon de CF à FD. Mais la raiſon de EB à FD eſt poſee donnee: Donc la raiſon de CF à EB ſera donnee. Derechef, pource que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & auſſi celle de CD à chacune d'icelles FC, FD; la raiſon de la meſme AB à chacune deſdites FC, FD[l] ſera pareillement donnee. Mais la raiſon d'icelle FD à EB eſt donnee: Donc auſſi ſera donnee la raiſon de AB à BE, & conſequemment au reſte[m] AE. Parquoy en diuiſant, [n] la raiſon de AE à EB ſera pareillement donnee. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnee. Donc le ſera auſſi[l] celle de AE à FD. Semblablement pource que la raiſon de CD à AB eſt donnee, & celle de AB à chacune de ſes parties AE, EB: auſſi la raiſon d'icelle CD à chacune deſdites AE, EB[l] ſera donnee. Parquoy chacune des grandeurs AB, CD, AE, EB, CF, FD eſt à chacune des autres en raiſon donnee.

i 19. 5.
l 8. p.
m 5. p.
n ſch. 5. p.
l 8. pr.

PROP. XXIV.

Si de trois lignes droictes proportionnelles, la premiere a à la tierce vne raiſon donnée; elle aura auſſi à la ſeconde vne raiſon donnée.

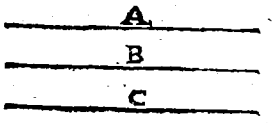


Soient trois lignes droictes proport. A, B, C, & ſoit A à B, ainſi que B à C: mais A ait à C vne raiſon donnee: Ie dis que A aura auſſi à B vne raiſon donnee.

Car ſoit expoſee vne autre ligne droicte D; & puis que la raiſon de A à C eſt donnee ſoit faite la meſme de D à F: Donc la raiſon de D à F eſt donnee. Mais D eſt donnee: donc F eſt auſſi donnee. Entre les deux lignes droictes D, F ſoit priſe [o] la moyenne proportionnelle E. Donc le rectangle faict ſous D, F eſt eſgal [p] au quarré de E. Mais iceluy rectangle de D, F eſt [q] donné: (car tous les angles d'iceluy rectangle ſont donnez, eſtans droicts, & les raiſons qu'ont les coſtez entr'eux ſont auſſi donnees) donc le quarré de E [r] eſt donné, & conſequemment icelle ligne droicte E eſt auſſi donné: (car on en peut trouuer vne egale à icelle [s], puis que le rectangle de D, F eſt dõné.) Mais D eſt donnee: Donc [t] la raiſon de D à E eſt donnee; & comme A eſt à C, ainſi D à F. Mais comme A à C, [u] ainſi le quarré de A au rectangle de A, C; & auſſi comme D à F, ainſi le quarré de D au rectangle de D, F. Donc comme le quarré de A eſt au rectangle de A, C, ainſi le quarré de D eſt au rectangle de D, F. Mais le rectangle de A, C eſt eſgal au quarré de B, (puis que A, B, C ſont proportionnelles) & celuy de D, F, au quarré de E. Donc comme le quarré de A eſt au quarré de B, ainſi le quarré de D eſt au quarré de E. Parquoy [x] comme A à B, ainſi D à E. Mais la raiſon de D à E eſt donnee: donc [y] auſſi la raiſon de A à B eſt donnée.

o 13.6.
p 17.6.
q 3.d.
r 1.d.
s 14.2.
t 1.p.
u 1.6.
x 22.6.
y 2.d.

AVTREMENT.

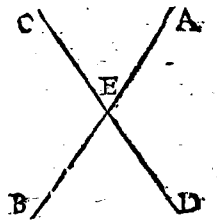


D'autant que la raiſon de A à C eſt donnee, & que comme A eſt à C, ainſi le quarre de A au rectangle de A, C: la raiſon d'iceluy quarré de A au rectangle de A, C eſt auſſi donnee. Mais à iceluy rectangle de A, C eſt eſgal le quarré de B (puis que A, B, C ſont proport.) donc la raiſon du quarré de A au quarré de B eſt donnee, & par conſequent eſt auſſi donnee la raiſon de la ligne A à la ligne B: Car à chacune d'icelles A, B, nous en auons exhibé vne egale au propre quarré de chacune.

PROP. XXV.

Si deux lignes données par poſition s'entrecouppent, le poinct auquel elles ſe couppent eſt donné par poſition.

Soient deux lignes AB, CD donnees par poſition, qui ſe couppent l'vne l'autre au poinct E: Ie dis que le poinct E eſt donné par poſition: Car s'il changeoit de lieu l'vne ou l'autre des lignes AB, CD changeroit ſa poſition: Or eſt-il que par l'hypotheſe elle ne change point: Donc [a] le poinct E eſt donné par poſition.



a 4.d.

PROP. XXVI.

Si les extremitez d'vne ligne droicte ſont données par poſition: icelle ligne droicte eſt donnée par poſition, & par grandeur.

De la ligne droicte AB les extremitez A, B soiét donnees par position : Ie dis que la ligne droicte AB est donnee par position, & par grandeur.

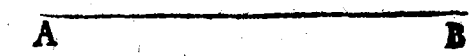


Car si le poinct A demeurant en son lieu ; la position, ou la grandeur de la ligne droicte AB change, le poinct B tombera ailleurs : Or est-il que par l'hypothese il n'y tombe point. Donc la ligne droicte AB est donnee par position, & par grandeur.

PROP. XXVII.

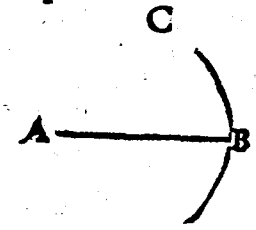
Si d'vne ligne droicte donnée par position, & par grandeur vne extremité est donnée, aussi l'autre extremité sera donnée.

De la ligne droicte AB donnee par position, & par grandeur soit donnee vne extremité, sçauoir A : Ie dis que l'autre extremité B est donnée.



Car si le poinct A demeurant en son lieu le poinct B change & tombe en vn autre lieu, ou la position de la ligne droicte AB, ou sa grãdeur changeroit : or est-il que selon l'hypothese l'vne ny l'autre ne chãge. Donc le poinct B est dõné.

AVTREMENT.



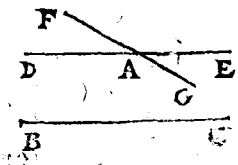
Du centre A, & de l'interualle AB soit descritte la circonference BC. Donc [b] icelle circonference BC est donnee par position. Mais la ligne droicte AB est aussi donnee par position : Donc le poinct B [c] est donné.

b 6.d.
c 25.p.

PROP. XXVIII.

Si par vn poinct donné est tirée vne ligne droicte vis à vis d'vne ligne droicte donnée par position, la ligne droicte menée est donnée par position.

Que par le poinct donné A soit menee vis à vis d'vne ligne droicte BC donnee par posion, vne ligne droicte DAE : Ie dis que la ligne droicte DAE est donnee par position.



Car si elle n'est donnee, le poinct A demeurant en son lieu, la position de la ligne droicte DAE changera. Qu'elle change donc s'il est possible, & tombe ailleurs demeurant parallele à BC, & soit FAG. Donc BC est parallele à icelle FAG. Mais [d] la mesme BC est aussi parallele à DAE. Donc [e] DAE est parallele à icelle FAG : Ce qui est absurde, veu qu'elles se ioignent & rencontrent en A. Donc la posirion de la ligne droicte DAE ne tombe pas ailleurs. Parquoy icelle ligne DAE est donnée par position.

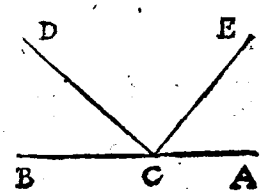
d 13.d.
e 30.1.

PROP. XXIX.

Si à vne ligne droicte donnée par position, & à vn poinct don-

né en icelle eſt menée vne ligne droicte qui faſſe angle donné ; la ligne menée eſt donnee par poſion.

Qu'à vne ligne droicte donnee AB, & à vn poinct donné en icelle C, ſoit menee la ligne droicte CD, qui fait l'angle donné ACD : Ie dis que la ligne droicte CD eſt donnée par poſition.

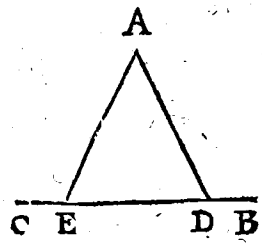


Car ſi elle n'eſt donnee par poſition, le poinct C demeurant en ſon lieu, la poſition de la ligne CD obſeruant la grandeur de l'angle ACD tombera ailleurs : Qu'elle y tombe donc, s'il eſt poſſible ; & ſoit CE. Donc l'angle ACD eſt egal à l'angle ACE, le grand au moindre. Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droicte CD ne tombera ailleurs : & partant icelle ligne CD eſt donnee par poſition.

PROP. XXX.

Si d'vn poinct donné eſt tiree à vne ligne droicte donnee par poſition vne ligne droicte faiſant vn angle donné : la ligne tiree eſt donnee par poſition.

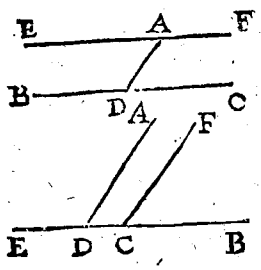
D'vn poinct donné A ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, vne ligne droicte AD faiſant l'angle ADB donné : Ie dis que la ligne AD eſt donnee par poſition.



Car ſi elle n'eſt donnee, le poinct A ne bougera de ſon lieu la poſition de la ligne droicte AD gardant la grandeur de l'angle ADB changera. Qu'elle change donc ; & ſoit la ligne droicte AE. Donc l'angle ADB eſt egal à l'angle AEB, le grand[f] au moindre : Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droicte AD ne change point : & partant icelle ligne AD eſt donnee par poſition. [f] 16.1.

AVTREMENT.

Par le poinct A ſoit tirée la ligne EAF parallele à la ligne droicte BC. Donc puis que par le poinct donné A, vis à vis & contre vne ligne droicte BC donnee par poſition, eſt tirée la ligne droicte EF ; icelles lignes EF, BC ſont paralleles, mais auſſi ſur icelles tombe la ligne droicte AD : Donc[g] l'angle FAD eſt egal à l'angle donné ADB ; & partant il eſt auſſi donné. Parquoy à la ligne droicte EF donnee par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tiree la ligne droicte AD faiſant l'angle donné FAD : Donc[h] icelle AD eſt donnee par poſition.



[g] 29.1.

[h] 29.1.

AVTREMENT.

En la ligne BCE ſoit pris vn poinct donné C, & par iceluy ſoit menee CF pa-

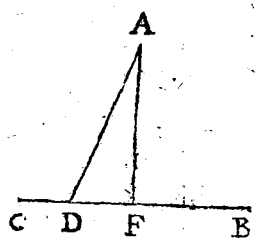
rallele à icelle DA. D'autant que AD, FC ſont paralleles & que ſur icelles tombe la ligne droicte BCE : l'angle FCB eſt egal[g] à l'angle donné ADB: & partant il eſt auſſi donné. Et puis que à la ligne droicte BC donnee par poſition, & à vn poinct C donné en icelle eſt tiree la ligne droicte FC faiſant vn angle donné FCB; icelle ligne FC[h] eſt donnee par poſition. Mais par le poinct donné A, eſt tiree vis à vis de la ligne FC donnee par poſition, la ligne AD : Donc icelle [i] AD eſt donnee par poſition.

g 29.1.

h 29 p.

i 28. p.

AVTREMENT.



Soit pris en la ligne droicte BC quelque poinct F, & ſoit tiree AF. D'autant que chaque poinct A, F eſt donné, la ligne AF eſt donnee[l] par poſition. Mais la ligne BC eſt auſſi dõnee par poſition: Donc † l'angle AFD eſt donné. Mais par l'hypotheſe l'angle ADF eſt donné: Donc DAF (qui eſt le reſte[n] de deux droicts) eſt donné. Et puis que à la ligne droicte AF donnee par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tiree la ligne droicte DA faiſant l'angle donné DAF, [m] icelle ligne DA eſt donnee par poſition.

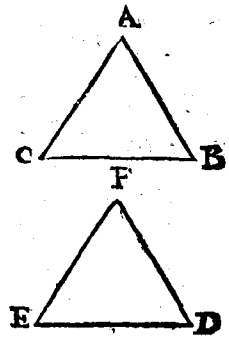
l 26 p.

n 32.1.

m 29.p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que deux lignes droictes eſtans donnees par poſition, & inclinees entr'elles font vn angle donné; ce qu'aucuns demonſtrent ainſi. D'autant que les deux lignes droictes donnees par poſition ſont inclinees entr'elles, l'inclination d'icelles lignes eſt donnee : Mais l'angle eſt l'inclination des lignes : Donc l'angle que font les lignes droictes donnees par poſition, & inclinees entr'elles eſt donné.*



Mais le ſieur Hardy le demonſtre preſque ainſi. Soient deux lignes droictes inclinees AB, CB donnees par poſition, & en AB ſoit pris quelque poinct donné A, & en BC auſſi quelque poinct C, & ſoit tiree la ligne droicte AC. Puis que tant le poinct B, que chacun des poincts A & C eſt donné, [o] les trois lignes droictes AB, BC, AC ſont donnees par grandeur. Parquoy de trois lignes directes egales à icelles, on pourra conſtituer vn triangle : ſoit donc fait le triangle FDE ayant le coſté FD egal au coſté AB, le coſté FE egal au coſté AC, & la baſe DE egale à la baſe BC. Veu donc que les angles compris des lignes droictes egales ſont eſgaux, nous auons trouué l'angle FDE egal à l'angle ABC : & partant iceluy[d] angle ABC eſt donné.

o 26.p.

d 1.def.

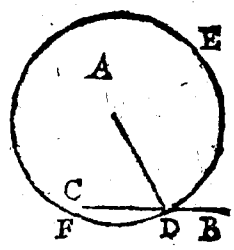
PROP. XXXI.

Si d'vn poinct donné, on tire à vne ligne droicte donnée par poſition, vne ligne droicte donnée par grandeur: elle ſera auſſi donnée par poſition.

Que d'vn poinct donné A, ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, la ligne droicte AD donnee par grandeur: Ie dis qu'icelle AD eſt donnée par poſition.

Car

Car du centre A, & de l'interualle AD ſoit deſcrit le cercle DEF. D'autant que le centre A eſt donné par poſition, & le ſemidiam. AD par grandeur; le cercle DEF [p] eſt donné par poſition. Mais la ligne droicte BC eſt auſſi donnee par poſition : Donc le poinct d'interſection D [q] eſt donné. Et puis que le poinct A eſt auſſi donné : [r] la ligne droicte AD eſt donnee par poſition.



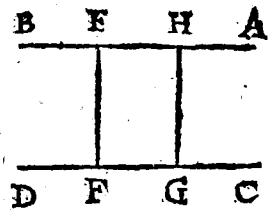
p 6.d.
q 25.p.
r 26.p.

PROP. XXXII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, on tire vne ligne droicte, faiſant des angles donnez; la ligne tiree ſera donnée par grandeur.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, ſoit tiree la ligne droicte EF faiſant les angles donnez BEF, EFD : Ie dis que la ligne EF eſt donnee par grandeur.

Car ſoit pris en la ligne CD vn poinct donné G, & d'iceluy ſoit tiree GH parallele à FE. D'autant que les lignes EF, HG ſont paralleles, & que ſur icelles tombe la ligne CD [s] l'angle EFD eſt egal à l'angle FGH. Mais l'angle EFD eſt donné : donc l'angle FGH eſt auſſi donné. Et d'autant qu'à la ligne droicte CD donnee par poſition, & au poinct G donné en icelle eſt tirée la ligne droicte GH faiſant l'angle donné FGH; [t] icelle ligne GH eſt donnee par poſition. Mais AB eſt auſſi donnee par poſition : Donc [u] le poinct H eſt donné. Mais le poinct G eſt auſſi donné: Donc [x] la ligne GH eſt donnee par grandeur, & eſt [y] egale à EF. [z] Parquoy icelle ligne EF eſt donnee par grandeur.



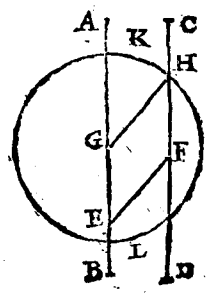
s 29. 1.
t 29.p.
u 25.p.
x 26.p.
y 34.1.
z 1.d.

PROP. XXXIII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, on tire vne ligne droicte donnée par grandeur, elle fera les angles donnez.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, ſoit tiree vne ligne droicte EF donnee par grandeur : Ie dis qu'elle fera les angles BEF, DFE donnez.

Car ſoit pris en la ligne droicte AB le poinct G, & par iceluy ſoit tiree GH parallele à EF. Donc EF eſt egale à icelle [y] GH. Mais EF eſt donnee par grandeur: Donc GH eſt auſſi donnee par grandeur. Mais le poinct G eſt donné, & partant ſi d'iceluy, & de l'interualle GH eſt deſcrit vn cercle [a] il ſera donné par poſition. Qu'il ſoit donc deſcrit, & ſoit HKL. Iceluy cercle HKL eſt donc donné, par poſition:

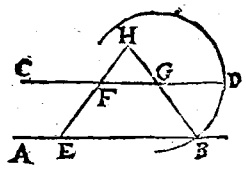


y 34.1.
a 6.d.

Mais la ligne CD qui couppe la circonference KHL en H est aussi donnee par
b 25.p. position: donc iceluy point d'intersection H[b] est donné. Mais le poinct G
c 26.p. est donné: donc[c] la ligne droicte GH est donnée par position. Mais la ligne
d sch. droicte CD est aussi donnee par position: Donc[d] l'angle GHF est donné.
30.pr. Mais à iceluy est egal[e] l'angle EFD: Donc l'angle EFD est donné; & partant
e 29.1. aussi l'angle BEF, car c'est le reste de la somme de deux[e] droits.

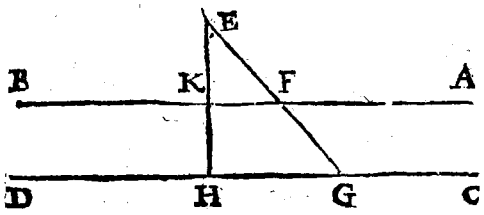
AVTREMENT.

Soit pris en la ligne droicte CD le poinct G; & soit posee GD egale à EF: puis du centre G & interualle GD soit descrit vn cercle DBH, & tiré GB. D'autant que le centre G est donné par position, & le semidiametre GD par grandeur, le cercle BDH[a] est donné par position. Mais la ligne AB est aussi donnee par position: Donc[b] le poinct B est donné. Mais le poinct G est aussi donné: Donc[c] la ligne droicte GB est donnee par position. Mais la ligne droicte CD est aussi donnee par position: Donc[d] l'angle BGD est donné. Parquoy si EF est parallele à BG, l'angle EFD,[e] sera donné, & consequemment aussi l'autre angle BEF. Mais les lignes droictes BG, EF n'estans paralleles, qu'elles se rencontrent au poinct H. D'autãt que EB est parallele à FG, & EF est egale à GD,
f 14.5. c'est à dire à BG; aussi FH[f] sera egale à GH. (car EH, BH estans couppees pro-
g 2.6. portionnellement[g] par la parallele FG, comme EF à FH ainsi BG à GH, & en
h 5.1. permutant, cõme EF à BG ainsi FH à GH.) Donc[h] l'angle HFG est egal à l'an-
i 15.1. gle HGF. Mais iceluy HGF est donné: (car il est egal[i] au donné BGD.) Donc l'angle HFG est aussi donné. Mais à iceluy est egal l'angle BEF; & partant est donné, comme aussi le restant EFG.



PROP. XXXIV.

Si d'vn poinct donné on tire à des lignes droictes paralleles donnees par position, vne ligne droicte; elle sera couppée en raison donnee.

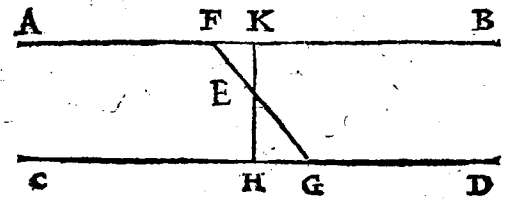


Qu'aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par position, soit tiree du poinct donné E, la ligne droicte EFG: Ie dis que la raison de EF à FG est donnée.

Car du poinct E soit tiree EH perpendiculaire à la ligne CD. D autant que du poinct donné E est tiree à CD
l 30.p. la ligne droicte EH, faisant l'angle donné EHG,[l] icelle ligne EH est donnee
m 25.p. par position. Mais l'vne & l'autre ligne AB, CD est aussi donnee par position.
n 26.p. Donc[m] les poincts d'intersection K, H sont donnez. Mais le poinct E est aussi
o 1.p. donné: Donc[n] chaque ligne EK, KO est donnee. Parquoy[o] la raison d'icelle EK à KO est donnée. Mais comme EK à KO, ainsi EF à FG: (car au triangle GEH, la ligne KF estant parallele à HG, les costez EH, EG sont couppez proportionnellement.) Donc la raison d'icelle EF à FG est donnée.

AVTREMENT.

Aux lignes droictes paralleles AB, CD donnees par position, soit tiree du poinct donné E la ligne droicte FEG: Ie dis que la raison de GE à EF est donnee. Car du poinct E soit tiree à CD la perpendiculaire EH, & produicte iusques au poinct K. Puis donc que du poinct E à la ligne droicte CD donnee par position, est tiree la ligne EH faisant l'angle donné EHG, [l] icelle EH est donnee par position. Mais chaque ligne AB, CD est aussi donnee par position: Donc [m] chaque poinct d'intersection H, K est donné. Mais le poinct E est aussi donné. Donc [n] chacune des lignes EH, EK est donnee par grandeur: & partant [o] la raison d'icelle EH à EK est donnee. Mais [p] comme EH à EK ainsi EG à EF: (car les angles opposez du poinct E estans egaux, & les lignes AB, CD paralleles, les triangles EHG, EKF sont equiangles, & partant comme EH à EG ainsi EK à EF; & en permutant comme EH à EK ainsi EG à EF.) Donc la raison d'icelle EG à EF est donnee.

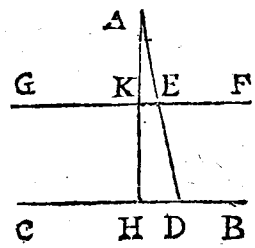


l 30 p.
m 25. p.
n 26. p.
o 1. p.
p 4. 6.

PROP. XXXV.

Si d'vn poinct donné à vne ligne droicte donnee par position, est tiree vne ligne droicte, laquelle soit couppée en vne raison donnee, & que par le poinct de section soit menée vne ligne droicte vis à vis de la ligne droicte donnee par position: la ligne menee sera donnee par position.

Que d'vn poinct donné A soit tiree à vne ligne droicte BC donnee par position, la ligne droicte AD, & soit couppee en E selon vne raison donnee, c'est à sçauoir de AE à ED, mais par le poinct E soit menee FEG parallele à BC: Ie dis que FG est donnee par position.



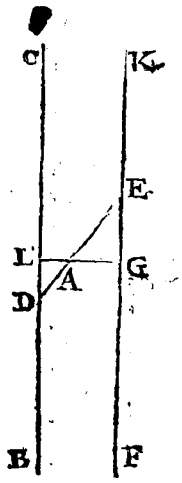
Car du poinct A soit tiree AH perpendiculaire à BC. D'autant que du poinct donné A est tiree à BC donnee par position, la ligne droicte AH faisant l'angle AHD donné; [q] icelle AH est donnee par position. Mais BC est aussi donnee par position: Donc [r] le poinct H est donné. Mais le poinct A est aussi donné: Donc [s] la ligne AH est donnee par grandeur, & par position. Et d'autant que [t] comme AE à ED, ainsi AK à KH, & que la raison de AE à ED est donnee; aussi la raison de AK à KH est donnee: & en composant, [u] la raison de AH à AK est donnee. Mais AH est donnee par grandeur: Donc [x] aussi AK est donnee par grandeur. Mais AK est aussi donnee par position, & le poinct A est donné: Donc [y] le poinct K est aussi donné. Et puis que par iceluy poinct K donné est menee la ligne droicte FG, vis à vis de la ligne droicte BC donnée par position; icelle ligne FG [z] est donnee par position.

q 30. p.
r 25. p.
s 26. p.
t 2. 6.
u 6. p.
x 2. p.
y 27. p.
z 28. p.

PROP. XXXVI.

Si d'vn poinct donné on tire à vne ligne droicte donnee par position vne ligne droicte, & qu'à icelle on adiouſte quelque ligne droicte ayant vne raiſon donnee à la meſme; mais que par l'extremité d'icelle adiouſtee, on mene vne ligne droicte vis à vis de la ligne donnee par poſition: icelle ligne menee ſera donnee par poſition.

Que du poinct donné A ſoit tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition, la ligne droicte AD, à laquelle ſoit adiouſtee la ligne droicte AE qui ait à AD vne raiſon donnee; mais par le poinct E ſoit menee FEK parallele à icelle BC: Ie dis que FK eſt donnée par poſition.



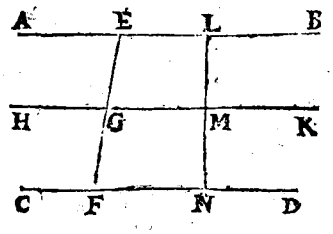
Car du poinct E ſoit menee à BC la perpendiculaire AL, & prolongee iuſques au poinct G. D'autant que du poinct donné A eſt tiree à la ligne droicte BC donnee par poſition la ligne droicte GL, qui fait vn angle GLD donné; [q] icelle ligne GL eſt donnée par poſition. Mais BC eſt auſſi donnee par poſition: [r] Donc le poinct L eſt donné. Et puis que le poinct A eſt auſſi donné, [f] la ligne AL eſt donnee. Mais d'autant que la raiſon [t] de AE à AD eſt donnee, & que comme icelle AE à AD, ainſi [&] AG à AL; (à cauſe que les triangles ALD, AGE ſont equiangles) la raiſon de AG à AL eſt auſſi donnee. Mais AL eſt donnee par [b] grandeur: Donc AG eſt donnee par grandeur. Mais elle l'eſt [c] auſſi par poſition, & le poinct A eſt donné: Donc le poinct G eſt auſſi donné. Et puis que par iceluy poinct donné G, eſt menee [d] la ligne FK, vis à vis de la ligne droicte BC donnee par poſition; icelle ligne FK eſt donnee par poſition.

q 30. p.
r 26. p.
f 26. p.
t 4. 6.
& 16. 5.
b 2. p.
c 27. p.
d 28. p.

PROP. XXXVII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par poſition, eſt tiree vne ligne droicte, qui ſoit couppee en raiſon donnee: mais par le poinct de ſection ſoit menee vis à vis des lignes droictes donnees par poſition, vne ligne droicte: icelle ligne menee ſera donnee par poſition.

Soient des lignes droictes paralleles AB, CD donnees par poſition, & à icelles ſoit tiree la ligne droicte EF couppee en la raiſon donnee de EG à GF; & par le poinct G ſoit menee HGK parallele à laquelle on voudra d'icelles AB, CD: Ie dis que KH eſt donnee par poſition.



Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné L, & d'iceluy poinct ſoit tiree LN perpendiculaire à CD. Et puis que du poinct

donné L, est tiree à la ligne droicte CD, la ligne LN faisant l'angle LND donné icelle LN [e] est donnee par position. Mais CD est aussi donnee par position. Donc le poinct N [f] est donné. Mais le poinct L est aussi donné: Donc [g] la ligne LN est donnee. Et veu que la raison de FG à GE est donnee, & que † comme FG à GE, ainsi NM à ML; la raison d'icelle NM à ML est donnee: Et en composant [h], la raison de LN à LM est aussi donnee. Mais LN est donnee par grandeur: Donc ML est [i] donnee par grandeur. Mais elle l'est aussi par position, & le poinct L donné: Donc le poinct M [l] est aussi donné. Et attendu que par iceluy poinct M est menee la ligne droicte KH vis à vis de la ligne droicte CD donnee par position: icelle ligne KH est aussi donnee par position.

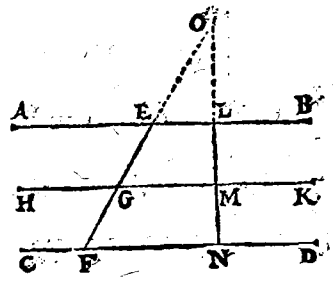
e 30. p.
f 25. p.
g 26. p.
h 6. p.
i 2. p.
l 27. p.

SCHOLIE.

† *Euclide suppose icy que comme FG est à GE, ainsi NM est à ML, mais le sieur Hardy l'a demonstré ainsi. Les lignes EF, LN sont paralleles, ou non: Qu'elles soient donc premierement paralleles. Et d'autant que par l'hypothese les lignes EL, FN, EF, LN, sont paralleles, EN sera vn parallelogramme; & partant le costé EF est egal au costé LN. Derechef, veu que MG est parallele à FN: & GF à MN; GN sera aussi parallelogr. & partant le costé GF est egal au costé MN. Parquoy les egales EF, LN, auront aux egales FG, MN [m] vne mesme raison: Donc comme EF à FG, ainsi LN à MN; & en diuisant, [n] comme GE à GF, ainsi LM à MN.*

m 7. 5.
n 17. 5.

Maintenant que les lignes EF, LN ne soient paralleles, mais qu'elles se rencontrent au poinct O. D'autant qu'au triangle OFN est menee HK parallele à vn des costez FN; [o] les costez OF, ON sont couppez proportionnellement; & partant comme FG à GO ainsi NM à MO. Derechef, veu qu'au triangle OGM est menée EL parallele au costé GM, les costez OG, OM sont couppez proportionnellement: Parquoy [p] comme OE à EG, ainsi OL à LM; & en composant, [q] comme OG à EG, ainsi OM à LM. Mais il a esté demonstré que comme FG à GO, ainsi NM à MO: Donc par raison egale, [q] comme FG à GE ainsi NM à ML.



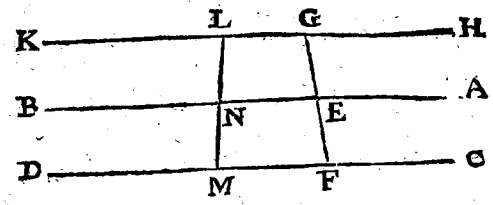
o 2. 6.
p 18. 5.
q 22. 5.

PROP. XXXVIII.

Si à des lignes droictes paralleles donnees par position, on tire vne ligne droicte, & qu'à icelle on adiouste quelque autre ligne droicte qui ait vne raison donnee à la mesme; mais par l'extremité de l'adioustee soit menee vne ligne droicte vis à vis des paralleles donnees par position: la ligne menee sera aussi donnee par position.

Soient des lignes droictes paralleles AB, CD donnees par position, & à icelles soit tiree la ligne droicte EF, à laquelle soit adioustee la ligne droicte EG ayant vne raison donnee à la mesme EF, mais par le poinct G soit menee la ligne droicte HK parallele à l'vne ou à l'autre des lignes AB, CD: Ie dis qu'icelle ligne HK est donnee par position.

Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné N, & d'iceluy ſoit tiree à CD la perpendiculaire NM, & ſoit prolongee iuſques au poinct L. D'autant que du poinct donné N eſt tiree à la ligne droicte CD donnee par poſition, la ligne droicte NM faiſant vn angle donné

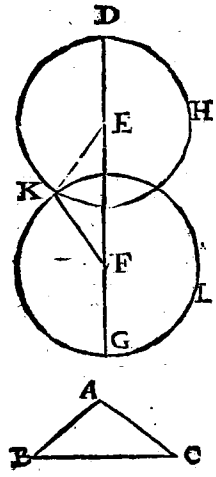


r 30. p. NMF; icelle NM[r] eſt donnee par poſition. Mais la ligne CD eſt auſſi donnee
s 25. p. par poſition: Donc[s] le poinct M eſt donné. Mais le poinct N eſt auſſi donné:
t 26. p. Donc[t] la ligne NM eſt donnee. Et pour ce que la raiſon de EG à EF eſt donnee, & que (par les choſes demonſtres au Scholie prec.) comme EG à EF ainſi LN à NM, la raiſon de LN à NM eſt auſſi donnee. Mais NM eſt donnee† Donc
u 2. p. LN[u] eſt auſſi donnee. Mais le poinct N eſt donné: Donc[x] le poinct L
x 27. p. eſt auſſi donné. Veu donc que par le poinct donné L, eſt menee la ligne droicte
y 28. p. HK vis à vis de la ligne AB donnee par poſition;[y] icelle HK eſt auſſi donnee par poſition.

PROP. XXXIX.

Si chaques coſtez d'vn triangle ſont donnez par grandeur, le triangle eſt donné par eſpece.

Du triangle ABC ſoient donnez chaques coſtez par grandeur: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car ſoit expoſee vne ligne droicte DG donnee par poſition, & finie au poinct D, mais infinie vers l'autre partie G. En icelle ſoit priſe DE egale à AB. Or puis que icelle AB eſt donnee par grandeur, DE l'eſt auſſi, mais la meſme DE eſt
z 27. p. auſſi donnee par poſition, & le poinct D donné: Donc[z] le poinct E eſt donné. Derechef, ſoit poſee EF egale à BC. Et veu que BC eſt donnee par grandeur, EF le ſera auſſi. Mais icelle EF eſt ſemblablement donnee par poſition, & le poinct E eſt donné: Donc[z] le poinct F eſt donné. Soit encore priſe FG egale à AC. Or d'autant que icelle AC eſt donnee par grandeur, FG l'eſt auſſi. Mais FG eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct F eſt donné: Donc le poinct G eſt auſſi donné. Maintenant du centre E, & interualle ED ſoit deſcrit le cercle DHK,
a 6. d. [a] & iceluy ſera donné par poſition. Derechef, du centre F & interualle FG ſoit deſcrit le cercle GLK: Donc[a] iceluy cercle GLK eſt donné par
b 25. p. poſition; & partant[b] le poinct d'interſection K eſt donné. Mais chacun des
c 26. p. poincts E, F eſt donné: Donc chaque ligne[c] EK, EF, FK eſt donnee par poſition & grandeur. Donc le triangle EKF eſt † donné par eſpece: Mais il eſt egal & ſemblable au triangle ABC; & partant le triangle ABC eſt auſſi donné par eſpece.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy qu'vn triangle dont les coſtez ſont donnez par grandeur & poſition*

est donné par espece, mais l'ancien interprete le demonstre presque ainsi. D'autant que les lignes droictes KE, EF, sont donnees [d] *la raison qu'elles ont entr'elles est donnée. Item les lignes droictes EF, FK estans donnees, leur raison est aussi donnee. Et semblablement est donnee la raison d'icelles EK, FK. Derechef, pource que les mesmes lignes KE, EF sont donnees par position* [e] *l'angle KEF est donné par grandeur: Item les lignes droictes EF, FK estans donnees par position, l'angle EFK est donné par grandeur; comme est aussi le restant EKF. Par ainsi au triangle EKF tous les angles sont donnez, & aussi les raisons des costez: Donc* [f] *iceluy triangle EKF est donné par espece.*

d 1. p.

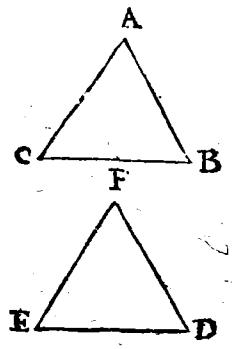
e sch. 30. pr.

f 3. def.

PROP. XL.

Si les angles d'vn triangle sont donnez par grandeur, le triangle est donné par espece.

Que chacun angle du triangle ABC soit donné: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece.



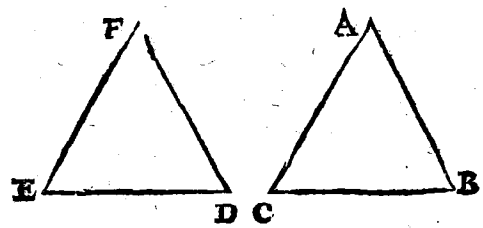
Car soit exposee la ligne droicte DE donnee par position & par grandeur, & soit constitué au poinct D l'angle EDF egal à l'angle CBA, mais au poinct E l'angle DEF egal à l'angle BCA: Donc le troisiesme angle BAC est egal au troisiesme angle DFE. Or chacun des angles constituez aux poincts A, B, C est donné: Donc chacun de ceux qui sont posez aux poincts D, F, E est aussi donné. Et puis que à la ligne droicte DE donnee par position, & au poinct D donné en icelle est tiree la ligne droicte DF, qui fait l'angle donné EDF; [g] la ligne DF est donnee par position. Et par mesme raison la ligne EF est donnee par position: Donc [h] le poinct F est donné par position. Mais chacun des poincts D, E est donné: Donc [i] chacune des lignes DF, DE, EF est donnee par grandeur. Parquoy le triangle DFE [l] est donné par espece; & est semblable au triangle ABC: Donc le triangle ABC est donné par espece.

g 29. p.
h 25. p.
i 26. p.
l 39. p.

PROP. XLI.

Si vn triangle à vn angle donné, & que les deux costez qui le constituent ayent entr'eux vne raison donnee; le triangle est donné par espece.

Que le triangle ABC ait l'angle BAC donné, & que les costez BA, AC qui font iceluy angle soient entr'eux en raison donnee: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece.



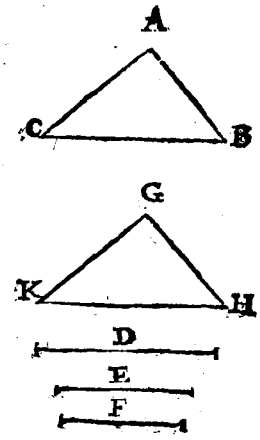
Car soit exposee la ligne droicte DF donnee par grandeur & position; mais sur icelle & au poinct donné F soit constitué l'angle DFE egal à l'angle BAC. Or l'angle BAC est donné: Donc aussi est donné l'angle DFE. Et puis que à la li-

gne droicte DF donnee par position & du poinct F donné en icelle est tiree vne
m 29 p. ligne droicte FE faisant l'angle donné DFE; [m] icelle ligne FE est donnee par position. Mais veu que la raison de AB à AC est donnee, soit faicte la mesme de DF à FE, puis soit tiree DE. Donc la raison de DF à FE est donnee: Mais
n 2. pr. DF est donnee: Donc [n] FE est donnee par grandeur. Mais la mesme FE est
o 27 p. aussi donnee par position, & le poinct F est donné. Donc [o] le poinct E est aussi
p 26. p. donné. Mais chacun des poincts D, F est donné: Donc [p] chacune des lignes
q 39. p. droictes DF, FE, DE est donnee par position & grandeur. Parquoy [q] le triangle DEF est donné par espece. Et veu que les deux triangles ABC, DEF ont vn angle egal à vn angle, c'est à sçauoir l'angle BAC à l'angle DFE, & les costez
r 6. 6. qui constituent iceux angles egaux, proportionnaux; [r] le triangle ABC est semblable au triangle DEF. Mais le triangle DEF est donné par espece: Donc le triangle ABC est donné par espece.

PROP. XLII.

Si les costez d'vn triangle sont entr'eux en raisons donnees, le triangle est donné par espece.

Que les costez du triangle ABC soient entr'eux en raisons donnees: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece. Car soit exposee la ligne droicte D donnee par grandeur; & puis que la raison de BC à AC est donnee, soit faicte la mesme de D à E. Or D est donnee: Donc
s 2. pr. [s] E est aussi donnee. Derechef, veu que la raison de AC à AB est donnee, soit faicte la mesme de E à F. Or E est donnee: Donc [s] F est aussi donnee. Maintenant de trois lignes droictes egales aux trois donnees D, E, F, & desquelles deux en quelque façon qu'elles soient prises sont plus grandes que l'autre, soit constitué le triangle GHK, tellement que D soit egale à HK; mais E à KG, & GH à F. Donc chacune desdictes lignes HK, KG, GH est don-
t 39. p. nee par grandeur. Parquoy [t] le triangle HGK est donné par espece. Et d'autant que comme BC à CA, ainsi D à E, & que D est egale à HK, & E à KG: comme BC à CA ainsi HK à KG. Derechef, pour ce que comme CA à AB, ainsi E à F, & que E est egale à KG, & F à GH: comme CA à AB, ainsi KG à GH. Mais il a esté demonstré que comme BC à CA, ainsi HK à KG: Donc par egalité de raison, comme BC à AB,
u 5. 6. & 1. d. 6. ainsi HK à GH. Donc [u] le triangle ABC est semblable au triangle GHK. Mais le triangle GHK est donné par espece: Donc le triangle ABC est aussi donné par espece.

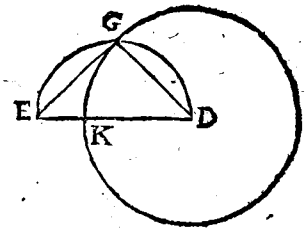


PROP. XLIII.

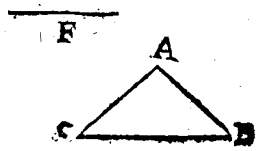
Si les costez d'autour vn des angles aigus d'vn triangle rectangle, ont entr'eux vne raison donnee; le triangle est donné par espece.

Soit

Soit vn triangle ABC ayant l'angle A droict, & les costez BC, BA d'allentour vn des angles aigus soient entr'eux en raison donnee: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece.



Car soit exposee la ligne droicte DE donnee par grandeur & position, & sur icelle DE soit descrit le demy cercle DGE. Donc[b] le demy cercle DGE est donné par position: (car la ligne DE estant donnee, & couppee en deux egalement, le centre dudit cercle est donné par position, & le semidiam. par grandeur.) Et d'autant que la raison de BC à BA est donnee, soit faicte la mesme de DE à F: Donc la raison de DE à F est donnee. Mais DE est donnee: Donc F est[c] aussi donnee. Or BC est plus grande que[d] AB: Donc ED est[e] aussi plus grande que F. Soit accommodee DG egale à F, & tiré EG; puis du centre D & interualle DG soit descrit le cercle GK. Or iceluy cercle[f] est donné par position, puis que le centre D est donné, & le semidiametre DG aussi donné par grandeur. Mais le demy cercle DGE est aussi donné par position: Donc[g] le poinct d'intersection G est donné. Mais les poincts D, E sont aussi donnez: Donc[h] chacune des lignes droictes DE, DG, EG est donnee par position & grandeur. Parquoy[i] le triangle DGE est donné par espece. Et puis que les triangles ABC, DGE ont vn angle egal à vn angle, sçauoir l'angle droict BAC à l'angle droict DGE, & les costez d'allentour les angles CBA, EDG proportionnaux, mais chacun des autres ACB, DEG moindre qu'vn droict: iceux triangles ABC, DEG[l] sont semblables. Mais le triangle DGE est donné par espece: Donc le triangle ABC est aussi donné par espece.

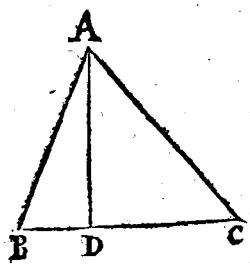


b 6. def.
c 2. pr.
d 19. 1.
e 14. 5.
f 25. p.
g 26 p.
h 39 p.
i 31. 3.
l 7. 6. 4. 6. & 1 def. 6.

PROP. XLIV.

Si vn triangle a vn angle donné, & que les costez d'autour vn autre angle ayent entr'eux vne raison donnee; le triangle est donné par espece.

Soit le triangle ABC qui ait l'angle B donné, & les costez BA, AC d'autour vn autre angle BAC ayent entr'eux vne raison donnee: Ie dis que le triangle ABC est donné par espece.



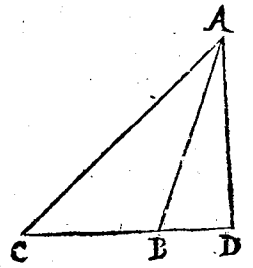
Or l'angle donné B est aigu ou obtus; (car il estoit droict à la prop. prec.) soit premierement aigu, & du poinct A soit tiree AD perpend. à BC: Donc l'angle ADB est donné: Mais l'angle B est aussi donné; & partant le troisiesme BAD est donné. Parquoy[m] le triangle ABD est donné par espece: & partant[n] la raison de BA à AD est donnee. Mais la raison de la mesme BA à AC est aussi donnee: Donc[o] la raison

m 40 p.
n 3 def. connuer.
o 8 pr.

p 43. p. n. 3. def. de AD à AC eſt donnee; & l'angle ADC eſt droict. Parquoy le triangle p ACD eſt donné par eſpece: Donc n l'angle C eſt donné. Mais l'angle B eſt auſſi donné; & partant l'autre angle BAC eſt donné: Donc q le triangle ABC eſt donné par eſpece.

q 40. p.

Maintenant, l'angle ABC donné ſoit obtus, & ſur le coſté CB prolongé ſoit tiree la perpendiculaire AD. D'autant que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD qui eſt de ſuite ſera donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme DAB eſt donné. Parquoy q le triangle ABD eſt donné par eſpece: & partant n la raiſon de DA à AB eſt donnee. Mais la raiſon de AB à AC eſt auſſi donnee: Donc o la raiſon de DA à AC eſt donnee; & l'angle D eſt droict: Donc le triangle DAC eſt donné par eſpece; & partant l'angle ACB eſt donné. Mais l'angle ABC eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme angle BAC eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece.



n 3. def.

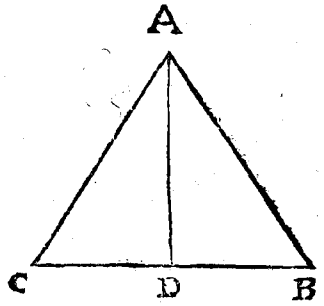
o 8. pr.

PROP. XLV.

Si vn triangle a vn angle donné, & que le compoſé des deux coſtez d'autour iceluy angle donné ait à l'autre coſté vne raiſon donnee: le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC, qui ait l'angle BAC donné, mais la ligne compoſee des deux coſtez AB, AC qui conſtituent iceluy angle BAC ait au troiſieſme coſté BC vne raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

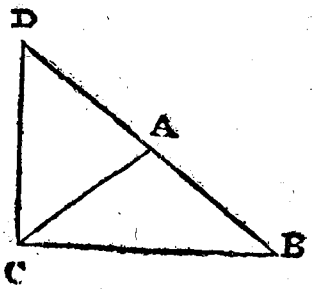
Car l'angle BAC ſoit couppé en deux egalement par la ligne AD. Donc r l'angle CAD eſt donné. Et puis que comme AB à AC, ainſi s BD à CD: en compoſant, t comme la compoſee CAB eſt à CA, ainſi BC à CD; & en permutant, comme la compoſee CAB à CB, ainſi CA à CD. Mais la raiſon de la compoſee BAC à BC eſt donnee: Donc la raiſon de CA à CD eſt auſſi donnee; & l'angle CAD eſt donné: Donc u le triangle ACD eſt donné par eſpece; & partant l'angle C eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme B eſt donné. Parquoy x le triangle ABC eſt donné par eſpece.



r 7. pr.
s 3. 6.
t 18. 5.
u 44. p.
x 40. p.

AVTREMENT.

Soit prolongee BA directement iuſques en D, tellement que AD ſoit egale à AC, puis ſoit ioinct CD. D'autant que la raiſon de la compoſee CAB à CB eſt donnee, & que AD eſt egale à AC; la raiſon de la toute BD à BC eſt donnee. Mais l'angle ADC eſt auſſi donné, car il eſt moitié de l'angle donné BAC: (pource qu'iceluy BAC y eſt egal aux deux angles interieurs ACD, ADC qui ſont z egaux en-



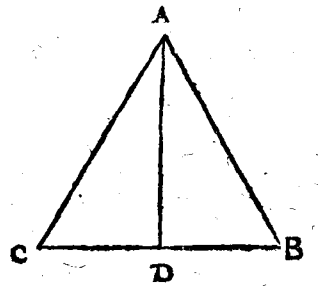
y 32. 1.
z 5. 1.

tr'eux eſtans les coſtez AC, AD egaux.) Parquoy le triangle BDC[a] eſt donné par eſpece; & partant l'angle B eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le reſté ACB eſt donné. Parquoy[b] le triangle ABC eſt donné par eſpece. a 44. p. b 40. p.

PROP. XLVI.

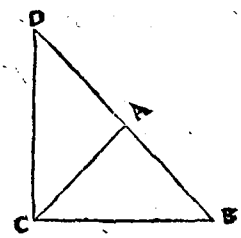
Si vn triangle a vn angle donné, & que la compoſee des deux coſtez d'autour vn autre angle ait à l'autre coſté vne raiſon donnée; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle B donné, mais la compoſee des deux coſtez d'autour vn autre angle BAC, c'eſt à dire CAB, ait à l'autre coſté BC vne raiſon donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car ſoit couppé l'angle BAC en deux egalement par la ligne AD: Donc (comme il a eſté demonſtré à la prec. prop.) la compoſee CAB eſt à CB, comme AB à BD. Mais la raiſon d'icelle compoſee CAB à CB eſt donnee: Donc auſſi la raiſon de AB à BD eſt donnee. Mais l'angle B eſt auſſi donné: Donc le triangle ABD[c] eſt donné par eſpece; & partant[d] l'angle BAD eſt donné. Mais l'angle BAC eſt double d'iceluy BAD; & partant il eſt auſſi donné: Donc le troiſieſme angle C eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece. c 41. p. d 3. def. conu.

AVTREMENT.



Soit prolongee BA directement, & poſe AD egale à AC, puis ioinct CD. D'autant que la raiſon de la compoſee CAB à CB eſt donnee, & que AD eſt egale à AC: la raiſon de BD à BC eſt dõnee; & l'angle B eſt auſſi donné: Donc le triangle CDB[c] eſt donné par eſpece; & partant[d] l'angle D eſt donné: Donc l'angle BAC, qui eſt double d'iceluy, eſt auſſi donné. Parquoy l'autre angle ACB eſt donné: Donc le triangle ABC eſt donné par eſpece.

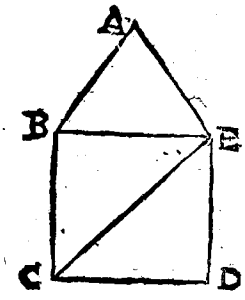
PROP. XLVII.

Les rectilignes donnez par eſpece, ſe diuiſent en triangles donnez par eſpece.

Soit vn rectiligne ABCDE donné par eſpece; Ie dis qu'il ſe diuiſe en triangles donnez par eſpece.

Car ſoient tirees les lignes droictes EB, EC. D'autant que le rectiligne ABCDE eſt donné par eſpece, l'angle[d] BAE eſt donné, & la raiſon du coſté AB à AE: Donc[e] le triangle BAE eſt donné par eſpece. Parquoy l'an- d 3. def. conuer. e 41. p.

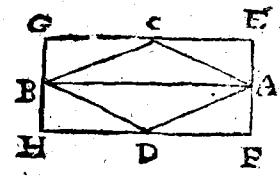
gle ABE est donné. Mais tout l'angle ABC est aussi
f 4. p. donné : Donc[f] le reste EBC est donné. Mais la raison du costé AB à BE, & aussi celle de AB à BC est don-
e 8. pr. nee : donc[e] la raison de BC à BE est donnee ; & l'an-
e 41. p. gle CBE est aussi donné : partant[e] le triangle BCE est donné par espece. Par mesme discours on demonstrera que le triangle CDE est donné par espece. Donc les rectilignes donnez par espece se diuisent en triangles donnez par espece.



PROP. XLVIII.

Si sur vne mesme ligne droicte sont descris des triangles donnez par position, ils auront entr'eux vne raison donnee.

Sur la mesme ligne droicte AB soient descris deux triangles ACB, ABD donnez par espece : Ie dis que la raison de ACB à ABD est donnee.

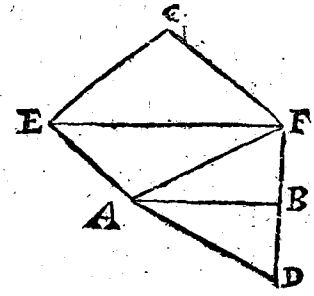


Car des poincts A B soient tirees à angles droicts sur la ligne AB, les lignes AE, BG, & prolongees iusques aux poincts F H : mais par les poincts C, D, soient menees ECG, FDH paralleles à AB. D'autant donc que
g 3. def. conu. le triangle ABC est donné par espece,[g] la raison de CA à BA est donnee, & l'angle CAB aussi donné. Mais l'angle BAE est donné : Donc le reste CAE est aussi donné. Mais l'angle CEA est
h 40 p. donné ; & partant l'autre angle ACE est aussi donné. Parquoy[h] le triangle
o 8 pr. AEC est donné par espece. Or la raison de EA à AB[o] est donnee : (car[d] la rai-
d 3. def. son de EA à AC, & celle de AC à AB est donnee.) Et semblablement est donnee la raison de FA à AB. Donc[o] la raison de EA à AF est donnee. Mais com-
i 1. 6. me AE est à AF[i] ainsi le parallelogramme AH est au parallelogr. AG. Mais
l 41. 1. ACB est[l] moitié de AH, & ADB moitié de AG : Donc la raison du triangle
m 1. 5. 5. ACB au triangle ADB est donnee ; car c'est la mesme raison que de[m] AH à AG, c'est à dire de EA à AF, qui est donnée.

PROP. XLIX.

Si sur vne mesme ligne droicte sont descris deux quelconques rectilignes donnez par espece ; ils auront entr'eux vne raison donnee.

Sur vne mesme ligne droicte AB soient descris deux quelconques rectilignes AECFB, ADB donnees par espece : Ie dis que la raison de AECFB à ADB est donnee.



Car soient menees FA, FE : Donc chacun des
n 47. p triangles[n] ABF, AFE, ECF est donné par espece. Et veu que sur vne mesme ligne droicte EF sont descris les triangles ECF, EAF donnee par espece ; la
o 8. p raison de ECF à EAF[o] est donnee. Donc en com-

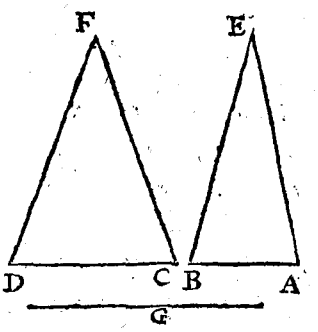
poſant, [p] la raiſon de AECF à EAF eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy EAF à FAB eſt donnee, [o] puis que ce ſont triangles donnez par eſpece deſcris ſur vne meſme ligne droicte AF: Donc [q] la raiſon de AECF à FAB eſt donnee. Parquoy en compoſant, [p] la raiſon de AECFB à FAB eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy FAB à ABD [o] eſt donnee: Donc [q] la raiſon de AECFB à ABD eſt auſſi donnee.

p 6. pr.
q 8. pr.
o 48. p.

PROP. L.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raiſon donnee, & que ſur icelles ſoient deſcris des rectilignes ſemblables & ſemblablement poſez; ils auront entr'eux vne raiſon donnee.

Soient deux lignes droictes AB, CD ayans entr'elles vne raiſon donnee, & ſur icelles ſoient deſcris les rectilignes AEB, CFD ſemblables & ſemblablement poſez: Ie dis que la raiſon qu'ils ont entr'eux eſt donnee.



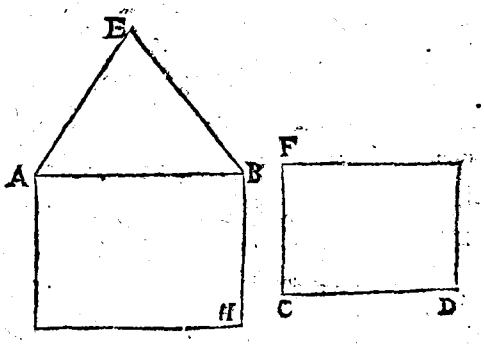
A icelles AB, CD ſoit priſe vne troiſieſme proport. G. Donc comme AB à CD, ainſi CD à G. Mais la raiſon de AB à CD eſt donnee: Donc la raiſon de CD à G eſt auſſi donnee. Parquoy [q] la raiſon de AB à G eſt donnee. Mais [r] comme AB à G, ainſi AEB à CFD: Donc la raiſon d'iceluy AEB à CFD eſt donnee.

q 8 pr.
r corol. 19. ou 20. 6.

PROP. LI.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raiſon donnee, & ſur icelles ſoient deſcris quelconques rectilignes donnez par eſpece; ils auront entr'eux vne raiſon donnee.

Soient deux lignes droictes AB, CD ayans entr'elles vne raiſon donnee, & ſoient deſcris ſur icelles quelconques rectilignes AEB, CFD donnez par eſpece: Ie dis que la raiſon de AEB à CFD eſt donnee.



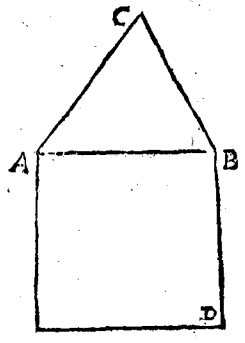
Car ſur AB ſoit deſcrit le rectiligne AH ſemblable & ſemblablement poſé à DF. Or DF eſt donné par eſpece: Donc auſſi AH eſt donné par eſpece. Mais AEB eſt auſſi donné par eſpece & deſcrit ſur la meſme ligne AB: Donc [s] la raiſon de AEB à AH eſt donnee: Et [t] puis que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & que ſur icelles lignes ſont deſcris les rectilignes AH, DF ſemblables & ſemblablement poſez: la raiſon d'iceluy AH à DF eſt donnee. Mais la raiſon de AEB à AH eſt auſſi donnee: Donc la raiſon [u] de AEB à DF eſt donnee.

s 49. p.
t 50. p.
u 6. pr.

PROP. LII.

Si sur vne ligne droicte donnee par grandeur, est descrite vne figure donnee par espece: Icelle figure est donnee par grandeur.

Sur la ligne droicte AB donnee par grandeur soit descrite la figure ACB donnee par espece: Ie dis que la figure ACB est donnee par grandeur.



Car sur la mesme ligne AB soit descrit le quarré AD. Donc AD est donné par espece † & par grandeur. Et veu que sur la ligne droicte AB sont descrits les deux
x 49. p. rectilignes ACB, AD donnez par espece; x la raison de
z 2. p. ACB à AD est donnee. Donc z ACB est donnee par grandeur.

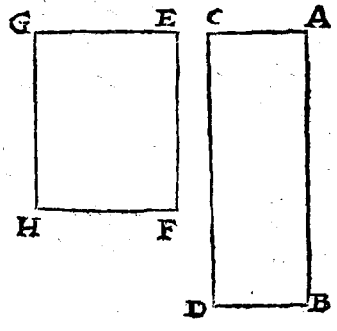
SCHOLIE.

† *L'ancien interprete à remarqué icy que tout quarré est donné par espece, pour ce que tous les angles en sont donnez, estans tous droicts & egaux: Mais aussi les raisons des costez sont donnees; car iceux costez estans tous egaux, aussi les raisons en sont egales. D'auantage, toutesfois & quantes qu'vn quarré est exposé, on en peut exhiber vn egal à iceluy; & partant le quarré est donné par grandeur, & aussi chaque costé d'iceluy.*

PROP. LIII.

S'il y a deux figures donnees par espece, & qu'vn costé de l'vne ait à vn costé de l'autre vne raison donnee: les autres costez auront aussi aux autres costez raisons donnees.

Soient deux figures AD, EH donnees par espece, & la raison de BD à FH soit donnee: Ie dis que la raison des autres costez aux autres costez est donnee.



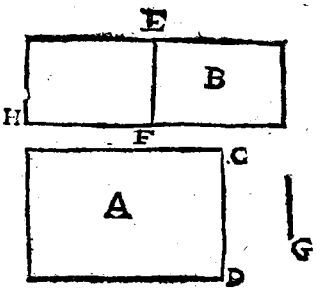
Car puis que la raison de BD à FH est donnee, &
a 3. d. aussi celle a de BD à BA: b la raison d'icelle AB à FH
b 8. p. est donnee. Mais la raison d'icelle FH à FE a est aussi donnee: donc b la raison de AB à EF est donnee: Aussi est semblablement donnee la raison des autres costez aux autres costez.

PROP. LIIII.

Si deux figures donnees par espece ont entr'elles vne raison donnee, aussi les costez d'icelles seront entr'eux en raison donnee.

Soient deux figures A, B donnees par espece, qui ayent entr'elles vne raison donnée: Ie dis que leurs costez auront entr'eux vne raison donnee.

Car ou la figure A eſt ſemblable, & ſemblablement poſee à B, ou non. Qu'elle ſoit premierement ſemblable & ſemblablement poſee, & ſoit priſe G troiſieſme porportionelle aux lignes droictes CD, EF. Donc comme CD à G, [c] ainſi A à B. Mais la raiſon de A à B eſt donnee: donc auſſi la raiſon de CD à G eſt donnee. Et veu que CD, EF, G ſont proport. [d] auſſi la raiſon de CD à EF eſt donnee. Mais A & B ſont donnees par eſpece: donc [e] les autres coſtez auront raiſon donnee aux autres coſtez.



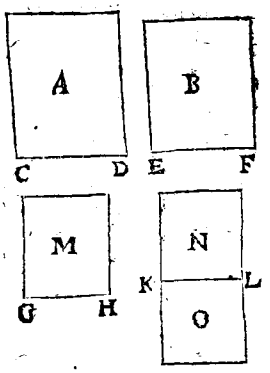
c *coroll. 19. ou 20. 6.*
d *24. p.*
e *53. p.*

Maintenant, la figure A ne ſoit ſemblable à la figure B; & ſoit deſcrite ſur EF la figure EH ſemblable & ſemblablement poſee à A: donc la figure EH eſt donnee par eſpece. Mais la figure B eſt auſſi donnee par eſpece: donc [f] la raiſon de B à EH eſt donnee; & partant la raiſon de A à icelle EH [g] eſt auſſi donnee. Mais A eſt ſemblable à EH: donc (par ce que deſſus) la raiſon de CD à EF eſt donnee: & ſemblablement la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez eſt donnee.

f *49. p.*
g *8. p.*

AVTREMENT.

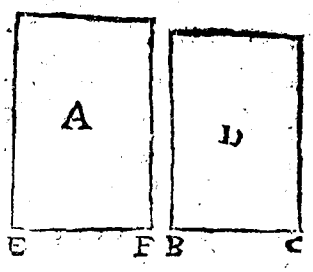
Soit expoſee vne ligne droicte donnee GH. Maintenant ou la figure A eſt ſemblable à la figure B, ou non. Soit premierement ſemblable; & ſoit fait comme CD à EF, ainſi GH à LK: puis ſur GH, LK ſoient deſcrites les figures M, N ſemblables & ſemblablement poſees à icelles A, B: leſquelles M, N ſeront conſequemment donnees par eſpeces. Donc puis que comme CD à EF, ainſi GH à LK, & que ſur icelles lignes CD. EF, GH, LK ſont deſcrites les figures A, B, M N ſemblables & ſemblablement poſees: [h] comme A à B, ainſi M à N. Mais la raiſon de A à B eſt donnee: donc la raiſon de M à N eſt donnee. Mais [i] M eſt donnee, attendu que c'eſt vne figure donnee par eſpece deſcrite ſur vne ligne droicte donnee par grandeur: donc N eſt auſſi donnee. Maintenant, ſur LK ſoit deſcrit le quarré O: donc [l] la figure O eſt donnee par eſpece. Parquoy la raiſon de K à N eſt donnee. Mais N eſt donnee: donc K eſt donnée; & conſequemment [m] auſſi KL. Mais GH eſt donnee: donc [n] la raiſon de GH à KL eſt donnee. Mais comme GH à LK, ainſi CD à EF: donc la raiſon de CD à EF eſt donnee; & partant les figures A & B eſtans donnees par eſpeces: [o] les autres coſtez d'icelles auront auſſi aux autres coſtez vne raiſon donnee. Mais ſi les figures ne ſont ſemblables, ſera procedé comme en la derniere partie de la demonſtration cy-deſſus.



h *22. 6.*
i *52. p.*
l *sch. 52. p.*
m *3. pr.*
n *53. p.*

PROP. LV.

Si vn eſpace eſt donné par eſpece & par grandeur, les coſtes d'iceluy ſeront donnez par grandeur.

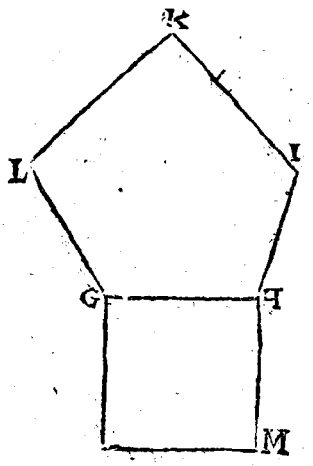


Soit vn eſpace A donné par eſpece & par grandeur: Ie dis que les coſtez d'iceluy ſont donnez par grandeur.

Car ſoit expoſee la ligne droicte BC donnee par poſition & par grandeur; & ſur icelle BC ſoit deſcrit l'eſpace D ſemblable & ſemblablemẽt poſé à A: parrant iceluy eſpace D eſt donné par eſpece. Et pour ce qu'il eſt deſcrit ſur la ligne BC donnee par grandeur; il eſt auſſi donné [o] par grandeur. Mais la figure A eſt auſſi donnee: donc [m] la raiſon de A à D eſt donnee. Mais icelles figures A, D ſont donnees par eſpece: donc [p] la raiſon de la ligne EF à la ligne BC eſt donnee. Mais BC eſt donnee: donc [m] EF eſt auſſi donnee. Mais la raiſon d'icelle EF à FG eſt donnee: donc [r] FG eſt donnee. Et par meſmes raiſons on demonſtrera chacun des autres coſtez eſtre donné par grandeur.

o 52. p.
p 54 p.
m 3 p.
q 3. d. conu.
r 2. p.

AVTREMENT.



Soit l'eſpace GHIKL donné par eſpece & par grandeur: Ie dis que les coſtez d'iceluy ſont donnez par grandeur.

Car ſoit deſcrit ſur la ligne droicte GH le quarré GM: donc [s] GM eſt donné par eſpece. Mais l'eſpace GHIKL eſt auſſi donné par eſpece: donc [t] la raiſon d'iceluy eſpace GK à GM eſt donnee. Mais GK eſt donné par grandeur: donc [r] GM eſt auſſi donné par grandeur. Et veu que GM eſt le quarré de la ligne GH; [s] icelle ligne GH eſt donnee par grandeur. Parquoy ſemblablement chacune des autres lignes HI, IK, KL, LG eſt donnee.

s 5ch. 52. p.
t 49. p.
r 2. p.

PROP. LVI.

Si deux parallelogrammes equiangles ont entr'eux vne raiſon donnee, comme vn coſté du premier eſt à vn coſté du ſecond, ainſi l'autre coſté du ſecond eſt à celle à laquelle l'autre coſté du premier a la raiſon donnee que le parallelogramme a au parallelogramme.

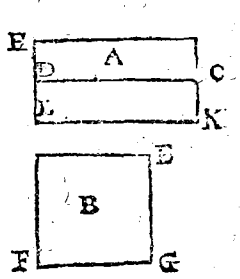
Soient deux parallelogrammes equiangles A B ayans entr'eux vne raiſon donnee: Ie dis que comme CD eſt à FG ainſi GE eſt à celle à laquelle DH a la raiſon donnee que le parallelogr. A a au parallelogr. B.

Car ſoit prolongé directement HD iuſques en L, tellement que comme CD eſt à FG, ainſi HD ſoit à DL; & ſoit acheué le parallelogramme DK. D'autant que comme CD à FG, ainſi HD à DL, & que [a] CD eſt egal à KL: comme LK à FG, ainſi GE à DL; & par ainſi les coſtez d'autour les angles egaux DLK, EGF,

a 34. 1.

EGF, ſont reciproquement proportionnaux: parquoy [b] DK eſt egal à B. Et partant puis que la raiſon de A à B eſt donnee, & que B eſt egal à DK; la raiſon de A à DK eſt donnee. Mais comme [c] A à DK (c'eſt à dire B) ainſi HD à DL: donc la raiſon de HD à DL eſt auſſi donnee. Et veu que comme CD à FG, ainſi GE à DL, & que la ligne droicte HD a à DL raiſon donnee, ſçauoir celle qu'a l'eſpace A à l'eſpace B: comme CD eſt à FG, ainſi GE eſt à celle à laquelle HD à la raiſon donnee qu'a l'eſpace A à l'eſpace B, c'eſt à dire la raiſon de HD à DL.

b 14. 6.



c 1. 6.

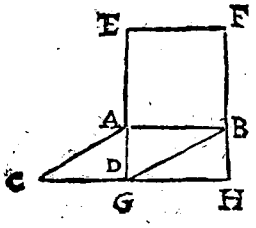
PROP. LVII.

Si vn eſpace donné eſt appliqué à vne ligne droicte donnee en angle donné, la largeur de l'application eſt donnee.

A la ligne droicte donnee AB ſoit appliqué l'eſpace donné AD, en angle donné CAB: Ie dis que CA eſt donnee.

Car ſur AB ſoit deſcrit le quarré AF: donc [d] iceluy AF eſt donné. Soient prolongees les lignes EA, FB CD aux poincts G, H. Veu donc que chaque eſpace AD, AF eſt donné, leur raiſon eſt auſſi donnee. Mais [e] AD eſt egal à AH: donc la raiſon de AF à AH eſt donnee. Parquoy la raiſon de EA à AG eſt donnee. (car [f] c'eſt la meſme que de AF à AH.) Mais EA eſt egale à AB: donc la raiſon de AB à AG eſt donnee. Maintenant puis que l'angle CAB eſt donné, & l'angle GAB auſſi donné; le reſte CAG eſt donné. Mais l'angle CGA eſt auſſi donné, pour ce qu'il eſt droict: donc le reſte ACG eſt donné. Parquoy le triangle [g] CAG eſt donné par eſpece. Donc la raiſon de CA à AG eſt donnee. Mais la raiſon de AB à la meſme AG eſt auſſi donnee: Donc la raiſon de CA à AB eſt donnee; & icelle AB eſt donnee. Parquoy CA eſt auſſi donnee.

d ſch. 52. pr.



e 36. 1.

f 1. 6.

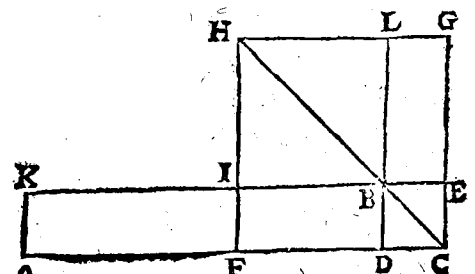
g 40. 1.

PROP. LVIII.

Si vn eſpace donné eſt appliqué à vne ligne droicte donnée, deffaillant d'vne figure donnée par eſpece; les largeurs du default ſont donnees.

Soit vn eſpace donné AB appliqué ſelon la ligne droicte donnee AC deffaillant de la figure DE donnee par eſpece: Ie dis que chacune des lignes droictes BD, DC eſt donnee.

Car ſoit couppee AC en deux egalement au poinct F: donc tant AF, que FC eſt donnee. Sur icelle FC ſoit deſcrit le rectiligne FG ſemblable & ſemblablement poſé à DE, & ſoit conſtruite la figure. Donc FG eſt donné par eſpece: & puis qu'il eſt deſcrit ſur la ligne droi-

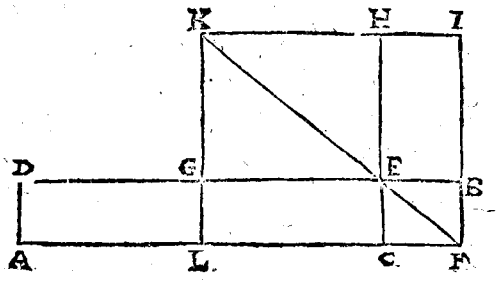


h 52. p. cte FC donnee par grandeur, iceluy rectiligne FG est h aussi donné par grandeur. Mais FG est egal à AB, IL; (car i AI, FE estans egaux, & l FB, BG aussi egaux, le gnomon ICL est egal à AB, & partant leur adiouttant IL commun, FG sera egal à AB, IL:) Donc les figures AB, IL en semble sont donnees par grandeur. Mais AB est donnee par grandeur: donc m la restante IL est aussi donnee par grandeur. Mais elle est aussi donnee par espece, puis qu'elle est n semblable à DE: Donc o les costez d'icelle IL sont donnez. Parquoy IB est donnee: & puis qu'elle est egale p à FD; icelle FD est aussi donnee. Mais FC est donnee: Donc le reste DC m est donné; & q a raison donnee à BD: & partant r BD est donnee.

i 36. 1.
l 43. 1.
m 4. p.
n 24. 6.
o 55. p.
p 34. 1.
q 3. d.
r 2. pr.

PROP. LIX.

Si vn espace donné est appliqué selon vne ligne droicte donnee, excedant d'vne figure donnee par espece; les largeurs de l'excez sont donnees.



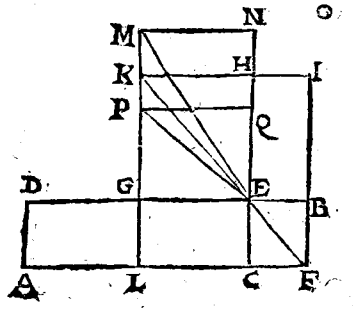
Soit vn espace donné AB appliqué selon la ligne droicte donnee AC, excedant de la figure CB donnee par espece: Ie dis que chacune des lignes CE, CF est donnee.

Car DE estant couppee en deux egalement en G, soit descrit sur GE le rectiligne GH semblable & semblablement posé à CB; & soit construite la figure. Or puis que CB est semblable à GH; iceux CB, GH † sont autour d'vn mesme diametre, & GH est donné par espece, tout ainsi que CB. Mais il est descrit sur la ligne donnee GE: Donc s iceluy GH est aussi donné par grandeur. Mais AB est donné: Donc AB, GH sont donnez par grandeur. Or iceux AB, GH sont egaux à LI: (car AG, LE, EI estans egaux, le gnomon GFH est egal à AB; & partant adiouſtant GH commun, LI sera egal à AB, GH.) Donc LI est donné par grandeur. Mais il est aussi donné par espece, attendu qu'il est t semblable à CB: Donc x les costez d'iceluy LI sont donnez; & partant le costé LF est donné Mais LC est aussi donné, veu qu'il est egal à GE: Donc y le reste CF est donné, & a raison donnee z à CE. Parquoy a CE est donnee.

s 2. p.
t 24. 6.
x 55. p.
y 4. p.
z 3. d.
a 2. p.

SCHOLIE.

† *Euclide suppose icy que CB, GH sont allentour d'vn mesme diametre; mais nous le demonstrerons ainsi. Soient deux parallelogr. semblables CB, GH, disposez en la mesme sorte que dessus, c'est à dire que les angles egaux se conioignans en E le costé CE rencontre directement son homologue EH; & le costé BE son correspondant EG: Et soit tiré le diametre FE: Ie dis qu'iceluy diametre FE prolongé passera par le poinct K; c'est à dire les parallelogr. GH, CB consister allentour vn mesme diametre. Car s'ils n'y consistent*

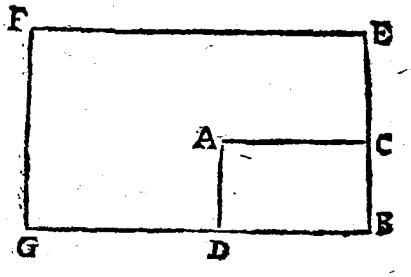


le diametre FE eſtant produit paſſera au deſſus du poinct K, ou au deſſous. Qu'il tombe premierement au deſſus, & couppe GK prolongé en M, & par le poinct M ſoit menee MN parallele à KH, laquelle rencontre EH prolongé en N & FB en O. D'autãt que les parallelogr. GN, CB ſont auec le parallelogr. LO autour d'vn meſme diametre, ils ſont [b] *ſemblables entr'eux. Parquoy comme FC à CE, ainſi EG à GM. ſemblablement pource que les parallelog. CB, GH ſont ſemblables, comme FC à CE, ainſi EG à GK: Donc* [d] *comme EG à GM, ainſi EG à GK. Parquoy* [e] *GM & GK ſont egales; la partie au tout: Ce qui eſt abſurde. On demonſtrera par meſmes raiſons que le diametre prolongé ne tombera pas au deſſous du poinct K. Donc les parallelogrammes CB, GE conſiſtent allentour d'vn meſme diametre.*

b 24.6.
d 11.5.
e 9.5.

PROP. LX.

Si vn parallelogramme donné par eſpece & par grandeur eſt augmenté ou diminué d'vn gnomon les largeurs du gnomon ſont données.



Que le parallelogramme AB donné par eſpece & par grandeur, ſoit premierement augmenté du gnomon CFD. Ie dis que chacune des lignes droictes CE, DG eſt donnee.

Car puis que AB eſt donné, & le gnomon CFD auſsi donné, tout le parallelogramme BF eſt donné: Mais il eſt auſsi donné par eſpece, attendu qu'il eſt ſemblable à BA. Donc [f] les coſtez d'iceluy BF ſont donnez; & partant chacune des lignes BE, BG eſt donnee. Mais chacune des lignes BC, BD eſt donnee: Donc chacune des lignes reſtantes CE, DG eſt auſſi donnee.

f 55.1.

Maintenant que le parallelogramme BF donné par eſpece & par grandeur ſoit diminué du gnomon donné CFD: Ie dis que chacune des lignes CE, DG eſt donnee. Car d'autant que BF eſt donné, & le gnomon CFD donné; le reſte AB eſt auſsi donné. Mais il eſt auſsi donné par eſpece, veu qu'il eſt ſemblable à BF: Donc [f] les coſtez d'iceluy AB ſont donnez; & partant chacune des lignes CB, BD eſt donnee. Mais chacune des lignes BE, BG eſt donnee: Donc auſsi chacune des reſtees CE, DG eſt donnee.

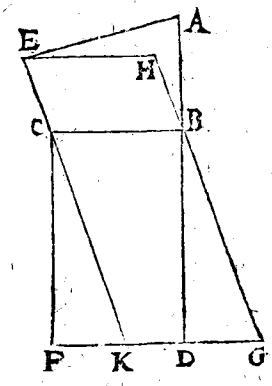
PROP. LXI.

Si à vn coſté d'vne figure donnee par eſpece eſt appliqué vn eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure donnee ait au parallelogramme vne raiſon donnee: le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Qu'à vn coſté de la figure ABCE donnee par eſpece ſoit appliqué vn eſpace parallelogr. CD en angle donné BCF, & ſoit donnee la raiſon de la figure AC

au parallelogr. CD: Ie dis que CD eſt donné par eſpece.

Car par le poinct B ſoit tiree BH parallele à CE, & par le poinct E ſoit menee EH parallele à CB, & ſoient prolongees EC, HB aux poincts K, G. D'autant que
g 3.d. l'angle BCE eſt donné, & la raiſon de EC à CB, g le parallelogramme CH, eſt donné † par eſpece: Mais la figure ABCE eſt auſsi donnee par eſpece, & eſt deſcrite ſur la meſme ligne BC que le parallelog. CH
h 49.p. donné par eſpece: Donc h la raiſon de la figure ABCE au parallelogr. CH eſt donnee. Mais par l'hypotheſe la raiſon d'icelle figure ABCE au parallelogr. CD eſt
i 36. 1. 18.p. auſsi donnee; & CD eſt i egal à CG: Donc la raiſon de CH à CG eſt donnee. Parquoy la raiſon de la ligne EC à la ligne CK eſt
m 1.6. donnee: (car m comme CH à CG, ainſi EC à CK.) Mais la raiſon de EC à CB eſt auſsi donnee: Donc la raiſon d'icelle CB à CK eſt donnee. Et veu que
n 13.1. & 4.pi l'angle ECB eſt donné, auſsi l'angle de ſuitte BCK n eſt donné: Mais l'angle BCF eſt poſé donné: & partant le reſté FCK eſt donné. Item l'angle CKF eſt
o 29.1. donné, attendu o qu'il eſt egal à l'angle BCK: Donc l'autre angle CFK eſt
p 40.p. donné. Parquoy p le triangle FCK eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de FC à CK eſt donnee. Mais la raiſon de CB à la meſme CK eſt auſsi donnee: Donc la raiſon de FC à CB eſt donnee; & l'angle BCF eſt auſsi donné. Parquoy le parallelogramme CD eſt donné par eſpece.



SCHOLIE.

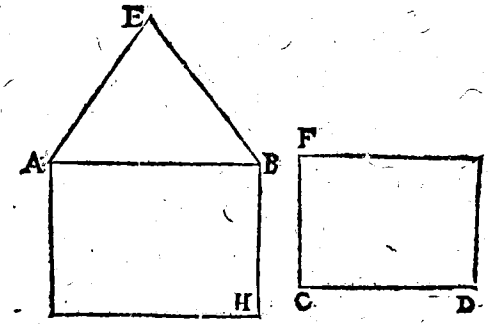
† *Encore qu'il ſoit manifeſte qu'vn parallelogramme qui a vn angle donné, & la raiſon des coſtez d'autour iceluy angle auſsi donnee, ſoit donné par eſpece ainſi que le dit icy Euclide, ſi eſt-ce que l'ancien interprette l'a voulu demonſtrer ainſi. Pource qu'au parallelogramme CH l'angle ECB eſt donné, auſsi l'angle CEH eſt donné: car la ligne droicte EC tombant ſur les paralleles EH, CB fait les deux angles interieurs d'vne meſme part egaux à deux droicts: Et partant puis que l'angle ECB eſt donné, les autres angles ſont donnez. Et pource que la raiſon de EC à CB eſt donnee, & que BH eſt egale à CE, & EH à BC la raiſon des coſtez entr'eux eſt auſsi donnee.*

PROP. LXII.

Si deux lignes droictes ont entr'elles vne raiſon donnee, & ſur l'vne d'icelles eſt deſcrite vne figure donnee par eſpece, mais ſur l'autre vn eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure ait au parallelogramme vne raiſon donnee; le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Que les deux lignes droictes AB, CD ayent entr'elles vne raiſon donnee, & ſur AB ſoit deſcrite la figure AEB donnee par eſpece, mais ſur CD le parallelogramme DF en angle donné DCF; & la raiſon d'icelle figure AEB au parallelogramme DF ſoit donnee: Ie dis que le parallelogramme DF eſt donné par eſpece.

Car ſur la ligne AB ſoit deſcrit le parallelogramme AH ſemblable & ſemblablement poſé à DF. Veu donc que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & ſur icelles lignes ſont deſcrits les rectilignes AH, FD ſemblables & ſemblablement poſez; [q] la raiſon de AH à FD eſt donnee. Mais la raiſon de FD à AEB eſt auſsi donnee: Donc [r] la raiſon de AH à AEB eſt donnee. Mais l'angle ABH eſt auſsi donné, eſtant egal à l'angle FCD: par ainſi la figure AEB eſt donnee par eſpece, & à AB l'vn des coſtez d'icelles eſt appliqué le parallelogr. AH en angle donné ABH, & la raiſon de ladicte figure AEB à iceluy parallelogramme AH eſt donnee: Donc [s] le parallelogr. AH eſt donné par eſpece; & partant FD, qui luy eſt ſemblable, eſt auſſi donné par eſpece.



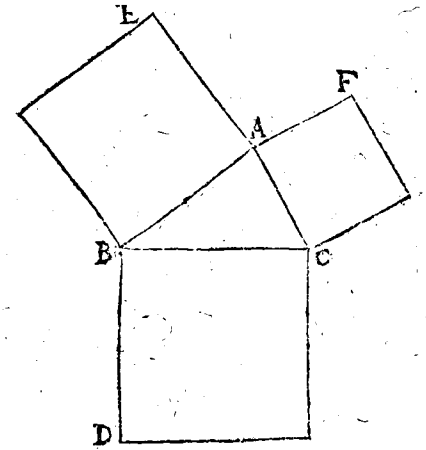
q 50. p.
r 8. p.
s 61. p.

PROP. LXIII.

Si vn triangle eſt donné par eſpece, le quarré qui eſt deſcrit ſur vn chacun des coſtez aura raiſon donnée au triangle.

Soit le triangle ABC donné par eſpece, & ſoient deſcris ſur chacun des coſtez d'iceluy les quarrez BE, CD, CF: Ie dis que chacun des quarrez EB, CD, CF aura vne raiſon donnee au triangle ABC.

Car puis que ſur vne meſme ligne droicte BC ſont deſcritts les deux rectilignes ABC, CD donnez par eſpece; [t] la raiſon d'iceluy ABC à CD eſt donnee: Et partant eſt auſſi donnee la raiſon de l'vn & l'autre des quarrez BE, CF au triangle ABC.



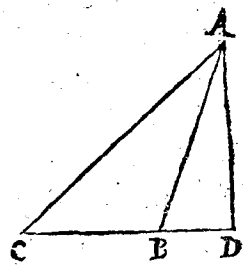
t 49. p.

PROP. LXIV.

Si vn triangle a vn angle obtus donné, cet eſpace là duquel le coſté ſouſtendant l'angle obtus peut plus que les coſtez comprenant iceluy angle, aura vne raiſon donnee au triangle.

Soit le triangle ambligone ABC ayant l'angle obtus ABC donné; & ayant prolongé directement CB, de A ſoit tiree la perpendiculaire AD: Ie *dis* que l'eſpace duquel le quarré de la ligne AC excede les quarrez des *lignes* AB,

x 12.2. BC, c'eſt à dire[x] le double du rectangle ſoubs CB, BD; aura vne raiſon donnee au triangle ABC.



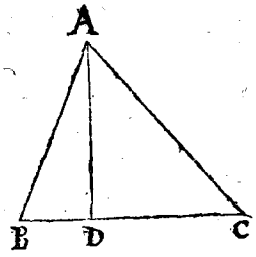
Car puis que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD eſt donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné: Donc l'autre angle BAD eſt donné. Parquoy[y] le triangle ABD eſt donné par eſpece: Donc[z] la raiſon de AD à DB eſt donnee. Mais comme AD à DB, ainſi[a] le rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Mais la raiſon de AD, DB eſt donnee: Donc auſſi eſt donnee la raiſon du rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Parquoy la raiſon du double d'iceluy rectangle de BC, BD au rectangle de AD, BC eſt auſſi donnee: Mais iceluy rectangle de AD, BC a auſſi raiſon donnee au triangle ABC: (c'eſt à ſçauoir la raiſon double, car le rect. eſt[b] double du triangle) donc la raiſon du double rect. de BC, BD[c] au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy double rectangle de CB, BD, eſt cet eſpace là duquel le quarré de la ligne AC, excede les quarrez des lignes AB, BC: Donc iceluy eſpace a raiſon donnee au triangle ABC.

y 40.
z 3. d.
a 1. 6.
b 41.1.
c 8. p.

PROP. LXV.

Si vn triangle a vn angle aigu donné, cet eſpace là duquel le coſté ſubtendant ledit angle aigu peut moins que les coſtez comprenans iceluy angle aigu, aura au triangle vne raiſon donnée.

Soit le triangle ABC ayant l'angle aigu ACB donné, & du poinct A ſoit menee AD perpendiculaire à BC: Ie dis que cet eſpace là duquel le quarré de la ligne droicte AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, CB, c'eſt à dire[d] le double du rectangle de BC, CD, à vne raiſon donnee au triangle ABC.



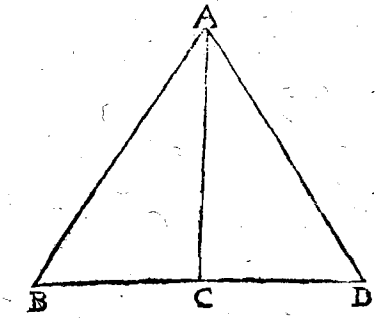
Car d'autant que l'angle C eſt donné, & l'angle ADC auſſi donné, l'autre angle DAC eſt donné: parquoy[e] le triangle ADC eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de AD à DC eſt donnee, & conſequemment auſſi[f] celle du rectangle de BC, CD au rectangle de BC, AD. Donc la raiſon du double rectangle de BC, CD au rect. de BC, AD eſt donnee. Mais eſt auſſi donnee la raiſon d'iceluy rectangle de BC, AD au triangle ABC: (car[g] le rect. eſt double du triangle) donc[h] la raiſon du double rectangle de BC, CD au triangle ABC eſt donnee. Et veu que iceluy double rectangle de BC, CD, eſt ce dont le quarré de la ligne AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC; cet eſpace là duquel le quarré de la ligne droicte AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC aura raiſon donnee au triangle ABC.

d 13.2.
e 40.p.
f 1.6.
g 41.1.
h 8.p.

PROP. LXVI.

Si vn triangle a vn angle donné, le rectangle des lignes comprenans iceluy angle aura vne raiſon donnee au triangle.

Soit le triangle ABD, qui ait l'angle B donné: Ie dis que le rectangle compris sous AB, BD a raison donné au triangle ABD.



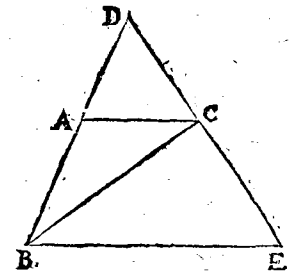
Car du poinct A soit tiree AC perpendiculaire à BD. Donc puis que l'angle B est donné, & aussi l'angle ACB; l'autre angle BAC est pareillement donné. Parquoy le triangle ABD [i] est donné par espece: & consequemment est donnee la raison de AB à AC. Mais comme AB à AC, [l] ainsi le rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC: Donc la raison du rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC est donnee. Mais la raison d'iceluy rectangle de BD, AC au triangle ABD est aussi donnee: (car c'est la raison double, le rectangle estant double [m] du triangle) donc [h] la raison du rectangle de AB, BD au triangle ABD est donnee.

i 40. p.
l 1. 6.
m 41. p.

PROP. LXVII.

Si vn triangle a vn angle donné, cet espace là duquel la composee des deux costez comprenans iceluy angle peut plus que l'autre costé, aura raison donnee au triangle.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle BAC donné: Ie dis que cet espace là duquel le quarré de la composee de BA, AC est plus grand que le quarré de BC, aura raison donnee au triangle ABC.



Car soit prolongee BA, tellement que AD soit egale à AC, puis estant tiree DCE indeterminement du poinct B soit menee BE parallele à AC rencontrant icelle DE en E. D'autant que AD est egale a AC; [n] DB est egale à BE: (car les deux triangles ADC, BDE sont semblables) & du sommet B est tiree à la base DE la ligne droicte BC. Donc [†] le rectangle de DC, CE auec le quarré de BC est egal au quarré de BD. Mais icelle BD est composée de BA, AC: Donc le quarré de la composee d'icelles AB, AC est plus grand que le quarré de BC du rectangle de DC, CE.

n 4. 6.
& 14.
5.

Maintenant, ie dis que le rectangle de DC, CE a raison donnee au triangle ABC. Car d'autant que l'angle BAC est donné, aussi est donné l'angle DAC. Mais chacun des angles ADC, ACD est dõné, car il est moitie de l'angle BAC, qui est donné: Donc [o] le triangle ADC est donné par espece; & partant la raison de DA à DC est donnee. Donc [p] aussi est donnee la raison du quarré d'icelle DA au quarré de DC. Et veu que comme BA à AD, [q] ainsi EC à CD, & aussi comme BA à AD [r] ainsi le rectangle de BA, AD au quarré de AD; & comme EC à CD [r] ainsi aussi le rectangle de EC, CD au quarré de CD: En permutant, comme le rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD, ainsi le quarré de AD au quarré de DC. Mais la raison d'iceluy quarré de AD au quarré

o 40. p.
p 50. p.
q 2. 6.
r 1. 6.

de DC est donnee: Donc la raison du rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD est aussi donnee. Mais AD est egale à AC: Donc la raison du rectangle de BA, AC au rectangle de EC, CD est donnee. Mais la raison du rectangle de BA, AC au triangle ABC [f] est donnee, pource que l'angle BAC est donné: Donc [t] la raison du rectangle EC, CD au triangle ABC est donnee. Mais le rectangle de EC, CD est ce dont le quarré de la composee de BA, AC est plus grand que le quarré de BC: Donc cet espace là duquel le quarré de la composee de BA, AC est plus grand que le quarré de BC, aura raison donnee au triangle ABC.

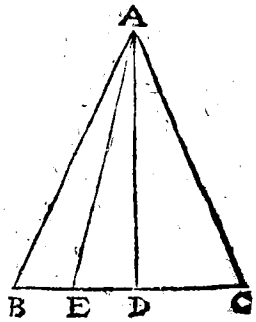
f 66. p.
t 8. pr.

SCHOLIE.

† *Euclide suppose icy que lors qu'en vn triangle Isoscelle est tirée du sommet à la base quelque ligne droicte; le quarré d'icelle ligne auec le rectangle contenu soubs les segmens de la base est egal au quarré de l'vne ou l'autre des iambes: Ce que l'ancien Interprete demonstre ainsi.*

Soit le triangle Isoscelle ABC, duquel les iambes soient AB, AC, & du sommet A soit tirée à la base BC quelconque ligne droicte AD: Ie dis que le quarré de AD auec le rectangle de BD, DC est egal au quarré de l'vne ou l'autre des Iambes AB, AC. Or la ligne AD est perpend. à BD, ou non: Quelle soit premierement perpendiculaire: Donc [u] *elle couppera la base BC en deux egalement au poinct D; & partant le rectangle soubs BD, DC est egal au quarré d'icelle BD, & leur adiouttant le commun quarré de AD: le rectangle de BD, DC auec le quarré de AD sera egal aux quarrez de DB, AD. Mais à iceux quarrez de AD, DB, est* [x] *egal le quarré de AB: donc le quarré de AB est egal au rectangle de BD, DC, & quarré de AD ensemble.*

u sch. 26. 1.
x 47. 1.



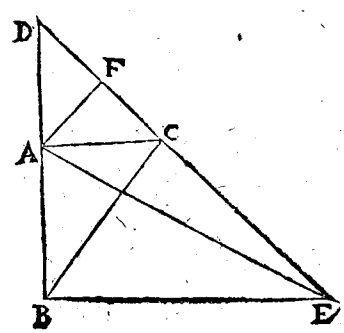
Maintenant AD ne soit perpendiculaire, mais que du poinct A tombe sur BC la perpendiculaire AE: Cela estant ainsi, BC sera couppée en deux egalement en E, & inegalement en D; parquoy le rectangle de BD, DC auec le quarré de DE [y] *est egal au quarré de BE: & adiouttant le commun quarré de AE, le rectangle de BD, DC auec les quarrez de DE, AE sera egal aux quarrez de BE, AE. Mais* [x] *le quarré de AD est egal aux deux quarrez de DE, AE: Donc le rectangle de BD, DC auec le quarré de AD est egal aux quarrez de BE, AE. Mais à iceux quarrez de BE, AE est egal le quarré de AB; Donc le quarré de AD auec le rectangle de BD, DC, est egal au quarré de AB.*

ý 5. 2.
x 47. 1.

AVTREMENT.

Ayant construict comme en la demonstration prec. du poinct A soit tirée AF perpendic. à CD, & soit menée AE. D'autãt que l'angle BAC est donné, [...]le sera ACF moitié d'iceluy. Mais l'angle [...]C est donné; & partant le triangle AFC est donné par espece: Donc la raison de AF à FC est donnée. Mais la raison de CD à la mesme FC est aussi donnee, attendu que CD [a] est double de FC; Donc [b] la raison de CD à AF est donnée; & par-

a sch. 26. 1.
b 8. p.



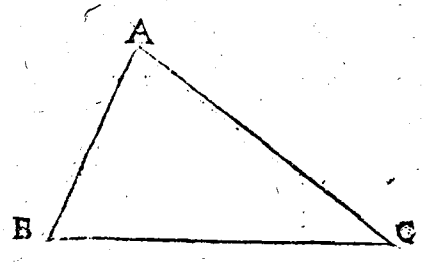
tant

tant eſt auſſi donnee la raiſon du rectangle de CD, EC au rectangle de AF, EC: (car c'eſt la meſme raiſon [c] que de CD à AF) Mais la raiſon du rectangle de AF, EC au triangle ACE eſt donnee, veu qu'il eſt double d'iceluy [d] triangle: donc la raiſon du rectangle de CD, CE au triangle ACE eſt auſſi donnée. Mais le triangle ACE eſt egal au triangle ABC [e], car l'vn & l'autre eſt conſtitué ſur vne meſme baſe AC, & entre meſmes paralleles AC, BE: donc [b] la raiſon du rectangle de CE, CD, au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy rectangle de CE, CD eſt l'eſpace duquel le quarré de la compoſee de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC, a raiſon donnee au triangle ABC.

c 1.6.
d 41.1.
e 37.1.
b 8.5.

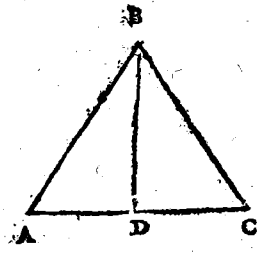
AVTREMENT.

Car l'angle donné A eſt ou droict, ou aigu, ou obtus. Qu'il ſoit premierement droict: donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC de deux fois le rectangle de BA, AC: (pource que [f] le quarré de BC eſt egal aux deux quarrez de BA, AC; & le quarré de la compoſee BAC [g] eſt egal à iceux deux quarrez de BA, AC, & deux fois le rectangle d'icelles BA, AC.) Parquoy la raiſon du double rectangle de BA, AC au triangle ABC eſt donnee.



f 47.1.
g 4.2.

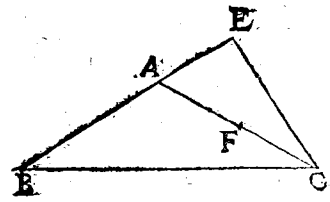
Maintenant, ſoit l'angle A aigu, & du poinct B ſoit tiree ſur AC la perpendic. BD. D'autant que le triangle ABC eſt oxigone, & eſt tiree la perpendic. BD, les quarrez de AB AC ſont egaux [h] au quarré de BC auec deux fois le rectangle de AC, AD: adiouſtant donc le commun double rectangle de AB, AC; les quarrez de AB, AC, auec le double rectangle d'icelles AB, AC, c'eſt à dire [i] le ſeul quarré de la compoſee BAC, ſont egaux au quarré de BC auec le double rectangle de AD, AC, & en outre le double rectangle de BA, AC, c'eſt à dire le double rectãgle ſoubs la compoſee BAD, AC: (car le rect. de BAD AC eſt [l] egal aux rectang. de BA, AC, & de AD, AC.) Donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC, du double rectangle de BAD, AC. Et puis que l'angle BAC eſt donné, & l'angle ADB auſſi donné; l'autre angle ABD eſt donné: donc [m] le triangle ABD eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de AD à AB eſt donnee, & par conſequent la raiſon de la compoſée BAD à AB [n] eſt auſſi donnee. Parquoy eſt auſſi donnee la raiſon du rectangle d'icelles compoſee BAD, AC [o] au rectangle de BA, AC. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de BA, AC au triangle ABC [p] eſt donnee, pource que l'angle A eſt donné: donc la raiſon du double rectangle de la compoſee BAD, AC au triangle ABC eſt donnee.



h 13.2.
i 4.2.
l 1.2.
m 40.3.
n 6.5.
o 1.6
p 66.5.

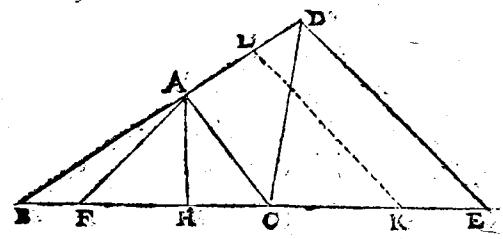
Finablement, ſoit l'angle BAC obtus, & ayant prolongé BA du poinct C ſoit tiree ſur icelle la perpendicul. CE, puis ſoit poſee AF egale à AE D'autant

que l'angle BAC eſt obtus, & eſt tiree la perpendic. CE, les quarrez de AB, AC, & le double rectangle ſoubs BA, AE, ou AF, ſont enſemblement
q 12.2. egaux [q] au quarré de BC: & adiouſtant le commun double rectangle de BA, AC, les quarrez d'icelles AB, AC auec le double rectangle des meſ-
r 4.2. mes AB, AC, c'eſt à dire [r] le quarré de la compoſee BAC, & le double rectangle de BA, AF ſont enſemble egaux au quarré de BC auec le double rectangle de BA, AC. Soit oſté le commun double rectangle de BA, AF, & reſtera le quarré de la compoſee BAC egal au quarré de BC auec le rectangle de AB CF: (car
s 1.2. le rectangle de AB, AC eſt egal [s] aux deux rect. de AB, AE, & AB, CF) donc le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC du double rectangle de AB, CF. Et d'autant que l'angle BAC eſt donné, l'angle
t 13.1. CAE [t] eſt donné. Mais l'angle AEC eſt auſſi donné: donc l'autre angle ACE
u 49.p. eſt donné. Parquoy [u] le triangle ACE eſt donné par eſpece; & partant la
x 5.p. raiſon de CA à AE, c'eſt à dire à AF, eſt donnee: donc [x] la raiſon d'icelle CA à FC eſt auſſi donnee. Mais la raiſon de la meſme CA à CE eſt donnee: donc [y] la raiſon de CE à CF eſt auſſi donnee. Parquoy la raiſon du
y 8.p. rectangle de EC, AB au rectangle de FC, AB eſt donnee; (car le rectan-
z 1.6. gle eſt au rect. [z] comme CE à CF) & auſſi celle du rectangle de AC, AB au rect. de EC, AB: donc [y] la raiſon du rectangle de FC, AB au rectang. de AC, AB eſt donnee. Mais la raiſon du rectangle de AC, AB au triangle
a 66.p. ABC [a] eſt donnee: donc auſſi la raiſon du double rectangle de FC, AB au triangle ABC eſt donnee. Mais iceluy double rectangle de FC, AB eſt ce dont le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC a raiſon donnee au triangle ABC.



AVTREMENT.

Soit prolongee la ligne BA iuſques au poinct D, en ſorte que AD ſoit egale à AC, & ſoit menee CD. D'autant que l'angle BAC eſt donné, auſſi chacun des angles ADC, ACD qui eſt moitié d'iceluy ſera donné; & partant l'autre angle DAC eſt auſſi donné: donc [u] le triangle ACD eſt donné par eſpece. Parquoy la raiſon de AC à CD eſt donnee. Et d'autant que l'angle ADC eſt donné, ſoit fait chacun des angles DEC, AFC † egal à iceluy ADC. Donc puis que l'angle BDC eſt egal à l'angle DEC, & l'angle DBE eſt commun aux triangles DBE, DBC, l'autre angle BDE eſt egal à l'autre angle BCD; & partant le triangle BDE eſt equiangle
b 4.6. au triangle BDC. Donc [b] comme EB à BD, ainſi BD à CB: parquoy le
c 3.2. rectangle de EB, CB, c'eſt à dire [c] le rectangle de EC, CB [c] auec le quarré
d 47.6. de CB, eſt egal [d] au quarré de BD, c'eſt à dire au quarré de la compoſee BAC, car AD eſt egale à AC; & partant le rectangle de EC, CB auec le



quarré de CB, c'eſt à dire le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré du rectangle de BC, CE: Ie dis donc que la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au triangle ABC eſt donnee.

Car d'autant que l'angle BDE eſt egal à l'angle BCD, & l'angle ADC egal à l'angle ACD, l'autre angle CDE eſt egal à l'autre ACB: Mais l'angle DEC eſt auſſi egal à l'angle AFC; donc le reſte CAF eſt egal au reſte DCE. Parquoy le triangle AFC eſt equiangle au triangle DCE; & partant [b] comme CA à AF, ainſi CD à CE; & en permutant, comme AC à CD, ainſi AF à CE. Mais la raiſon de AC à CD eſt donnee: donc auſſi la raiſon de AF à CE eſt donnee. Du poinct A ſoit menee AH perpendiculaire à BC. D'autant que l'angle AFC eſt donné, & l'angle AHF auſſi donné, le troiſieſme HAF eſt donné. Parquoy [e] le triangle AHF eſt donné par eſpece; & par conſequent la raiſon de AF à AH eſt donnee. Mais la raiſon de AF à CE eſt auſſi donnee: donc [f] la raiſon de AH à CE eſt donnee; & partant la raiſon du rectangle de AH, BC [g] au rectangle de BC, CE eſt auſſi donnee. Mais la raiſon du rectangle de AH BC au triangle ABC eſt pareillement donnee; (car le rectangle [h] eſt double du triangle) & le rectangle de BC, CE eſt-ce dont le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC: donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC à raiſon donnee au triangle ABC.

b 4. 6.
e 40. pr.
f 8. pr.
g 1. 6.
h 41. 1.

SCHOLIE.

† *L'ancien Interprete pretendant enſeigner à conſtruire l'angle DEB egal à l'angle ADC, dit qu'on faſſe ſur la ligne droiſte BD, & au poinct D, l'angle BDE egal à l'angle BCD, & qu'on tire les lignes BC, DE iuſques à ce qu'elles s'entrecouppent en E: tellement qu'il ſuppoſe l'angle BCD eſtre donné, & il ne l'eſt pas.*

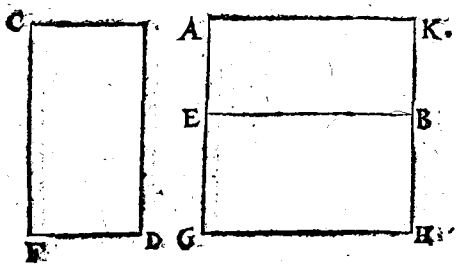
Le meſme Interprete enſeigne puis apres comment on peut vniuerſellement d'vn poinct donné mener à vne ligne droicte donnee par poſition vne ligne droicte faiſant angle egal à vn angle donné, mais nous delaiſſons auſſi ce moyen là pource que nous en auons enſeigné vn autre beaucoup plus bref & aiſé au 44. de nos Probl. Geometriques. Car par exemple, voulant du poinct donné D mener à la ligne BC donnee par poſition vne ligne droicte faiſant angle egal à l'angle donné ADC, ainſi qu'il eſt icy requis; il n'y a qu'à prendre en icelle BC quelconque poinct K, & à iceluy faire l'angle CKL egal à l'angle donné ADC: Que ſi la ligne KL rencontre le poinct D, elle ſera la ligne requiſe, mais ne le rencontrant pas, ſoit menée d'iceluy poinct D la ligne DE parallele à icelle KL couppant BC prolongé en E, & l'angle DEC ſera egal au donné ADC. Car ſur les deux lignes paralleles LK, DE tombe la ligne BE, & partant l'angle DEC [i] eſt egal à l'angle LKC, qui a eſté fait egal au donné ADC; & par conſequent iceluy DEC eſt auſſi egal à ADC. i 29. 1.

PROP. LXVIII.

Si deux parallelogrammes equiangles ont entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait auſſi vne raiſon donnee à vn coſté;

l'autre coſté aura pareillement vne raiſon donnee à l'autre coſté.

Soient deux parallelogrammes equiangles AB, CD ayans entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait à vn coſté vne raiſon donnee, & ſoit la raiſon de BE à FD donnee: Ie dis que la raiſon de AE à FC eſt auſſi donnee.



Car à la ligne droicte EB ſoit appliqué le parallelogramme EH egal à iceluy CD, & conſtitué de ſorte que AE & EG faſſent vne ligne droicte: † donc KB, BH feront auſſi vne ligne droicte. Et d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnee, & que EH eſt egal à iceluy CD; la raiſon de AB à EH eſt donnee; & partant la raiſon de AE à EG [l] eſt auſſi donnee. Veu donc que EH eſt egal & equiangle à CD, comme [m] EB à FD, ainſi FC à EG. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnee: donc auſſi la raiſon de FC à EG eſt donnee. Mais la raiſon de AE à la meſme EG eſt auſſi donnee: donc la raiſon de AE à FC eſt donnee.

l. 1. 6.
m 14. 6

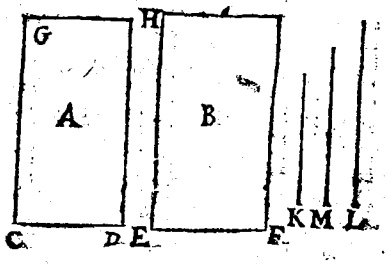
SCHOLIE.

† *Euclide ayant poſé AE, EG directement en vne ſeule ligne droicte, conclud auſſi toſt que KB & BH feront auſſi vne ligne droicte, mais nous le demonſtrerons ainſi. D'autant que les lignes droictes AE, EG ſont poſees directement les angles AEB,* a 13. 1. *BEG, [a] ſont egaux à deux droicts. Et puis que AB eſt vn parallelogramme, les lignes AK, EB ſont paralleles, ſur leſquelles tombe la ligne AE, & partant les deux* b 29. 1. *angles interieurs A, BEA [b] ſont auſſi egaux à deux droicts; & oſtant l'angle commun BEA, demeurera l'angle A egal à l'angle BEG, & conſequemment leurs oppoſez EBK & H ſont auſſi egaux entr'eux. Derechef, puis que EG eſt vn parallelog. les deux lignes BE, HG ſont paralleles ſur leſquelles tombe BH: & partant les deux angles interieurs H, EBH [b] ſont egaux à deux droicts. Mais il a eſté demonſtré que H eſt egal à EBK: donc les deux angles EBK, EBH ſont auſſi egaux à deux droicts;* c 14. 1. *& partant [c] les deux lignes KB, BH ſe rencontrent directement comme le dit Euclide.*

AVTREMENT.

Soit expoſee la ligne droicte donnee K: & puis que la raiſon de A à B eſt donnee, ſoit faicte la meſme de K à L: donc la raiſon de K à L eſt auſſi donnee. Mais K eſt donnee: donc [n] L eſt auſſi donnee. Derechef, puis que la raiſon de CD à EF eſt donnee ſoit faite la meſme de K à M: donc la raiſon de K à M eſt donnee. Mais K eſt donnee: donc [o] M eſt auſſi donnee: & partant la raiſon de L à M eſt donnee. Or d'autant que A eſt equiangle à B, [p] la raiſon d'iceluy A à B, eſt compoſee de celle des coſtez, c'eſt à dire de CD à EF, & de CG à EH. Mais auſſi la raiſon de K à L eſt compoſee de K à M, &

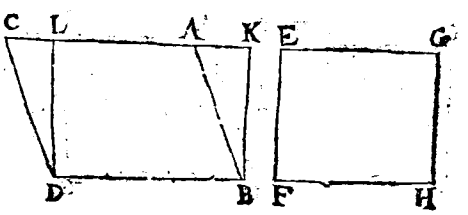
n 2. pr.
o 1. pr.
p 23. 6.



de M à L : donc la raiſon compoſee de CD à EF, & de CG à EH, eſt la meſme que la compoſee de K à M, & de M à L. (la raiſon de K à L eſtant la meſme que de A à B.) Mais la raiſon de CD à EF eſt la meſme que de K à M : donc l'autre raiſon de CG à EH eſt auſſi la meſme que de M à L. Mais icelle raiſon de M à L eſt donnee : donc auſſi la raiſon de CG à EH eſt donnee.

PROP. LXIX.

Si deux parallelogrammes ayans les angles donnez, ont entr'eux vne raiſon donnee, & qu'vn coſté ait auſſi vne raiſon donnee à vn coſté ; pareillement l'autre coſté aura vne raiſon donnee à l'autre coſté.



Que les deux parallelogrammes CB, EH ayans les angles aux poincts D & F donnez, ayent entr'eux vne raiſon donnee, & que la raiſon de DB à FH ſoit auſſi donnee : Ie dis que la raiſon de AB à EF eſt donnee.

Car ſi CB eſt equiangle à HE, il eſt manifeſte par la prec. prop. Mais s'il n'eſt equiangle, ſoit conſtitué ſur la ligne droicte DB, & au poinct B donné en icelle l'angle DBK egal à l'angle EFH, & ſoit acheué le parallelogr. DK. D'autant que chacun des angles BKL, BAK, eſt donné, † l'autre angle KBA, eſt donné : Parquoy le triangle [r] ABK eſt donné par eſpece ; & partant la raiſon de AB à BK eſt donnee. Mais la raiſon de CB à EH eſt ſuppoſée donnee, & [t] CB eſt egal à DK : donc la raiſon de DK à EH eſt donnee. Et pour ce que DK eſt equiangle à EH, & la raiſon d'iceluy DK à EH eſt donnee, comme auſſi celle de DB à FH ; [u] la raiſon de BK à FE eſt donnee. Mais la raiſon d'icelle BK à BA eſt auſſi donnee : donc [x] la raiſon de AB à FE eſt donnee.

r 40. p.
t 35. p.
u 68. p.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy qu'vn parallelogramme ayant vn angle donné, tous les autres angles ſont auſſi donnez : & tant l'ancien Interprete que le ſieur Hardy en deduiſent les raiſons, qui ſont que l'angle F eſtant donné, l'autre angle E ſera auſſi donné eſtant le reſte de deux droicts, pour ce que ſur les lignes droictes paralleles EG, FH tombe la ligne EF, qui fait* [x] *les deux angles interieurs de meſme part F & E egaux à deux droicts : Mais à iceux angles ſont egaux* [y] *les oppoſez G & H, & partant ils ſont auſſi donnez.*

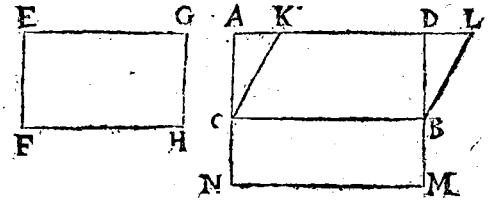
x 29. 1.
y 34. 1.

Dont s'enſuit que les angles BDC & F eſtans donnez par l'hypotheſe, tous les autres angles des deux parallelogr. CB, EH ſont auſſi donnez : partant l'angle DBK ayant eſté faict egal à l'angle F, l'angle K ſera egal à l'angle E, & donné comme iceluy : Mais l'angle BAL, qui eſt oppoſé au donné BDC eſt auſſi donné ; & partant BAK qui eſt le reſte de deux droicts ſera auſſi donné, tellement qu'au triangle ABK les deux angles BAK & BKA ſont donnez, ainſi qu'Euclide le dit icy.

PROP. LXX.

Si de deux parallelogrammes, les costez d'autour angles egaux, ou bien d'autour des inegaux, toutesfois donnez, ont entre eux vne raison donnee; aussi les mesmes parallelogrammes auront entr'eux vne raison donnee.

Soient deux parallelogrammes AB, EH desquels les costez d'autour les angles egaux des poincts F, C, ou d'autour des inegaux, toutesfois donnez ayent entr'eux vne raison donnee, c'est à dire que la raison de AC à EF soit donnee, & aussi celle de CB à FH: Ie dis que la raison de AB à EH est aussi donnee.



Car soit AB equiangle à EH, & sur la ligne droicte CB soit applicqué le parallelogramme CM egal au parallelogr. EH, tellement que AC soit directement à CN, & par consequent DB sera directement[a] auec BM. D'autant donc que CM est equiangle & egal à EH, les costez d'autour les angles egaux seront reciproquement[z] proportionnaux: Parquoy comme BC à HF, ainsi FE à NC. Mais la raison de BC à HF est donnee: donc la raison de FE à NC est aussi donnee. Mais la raison de AC à la mesme EF est donnee: donc[a] la raison de AC à NC est aussi donnee. Parquoy la raison de AB à CM est donnee: (car c'est la mesme[b] que de AC à CN.) Mais CM est egal à EH: donc la raison de AB à EH est donnee.

a *sch.* 68. *p.*
z 14. 6.
a 8. *p.*
b 1. 6.

Maintenant, AB ne soit equiangle à EH, & sur la ligne droicte CB, & au poinct C donné en icelle, soit constitué l'angle BCK egal à l'angle donné F, & soit acheué le parallelogramme CL. D'autant que l'angle ACB est donné, & l'angle BCK aussi donné, le reste ACK est donné: donc le triangle ACK[c] est donné par espece; & partant la raison de AC à CK est donnee: Mais la raison de AC à EF est aussi donnee: donc la raison de CK à EF est donnee. Mais la raison de BC à HF est aussi donnee, & l'angle BCK est egal à l'angle F: donc (par la premiere partie de ceste prop.) la raison de CL à EH est donnee. Mais à icelluy CL est egal AB: donc la raison de AB à EH est donnee.

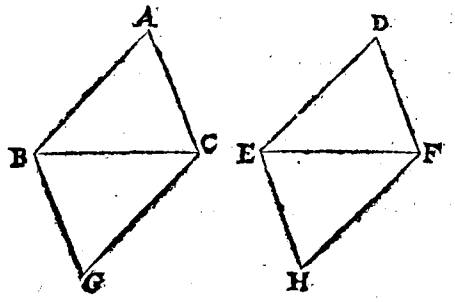
c 40. *p.*

PROP. LXXI.

Si de deux triangles les costez d'autour angles egaux, ou bien d'autour des inegaux, toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee: les mesmes triangles auront aussi entr'eux vne raison donnee.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels les costez d'autour les angles A & D egaux, ou bien inegaux, toutesfois donnez ayent entr'eux vne raison donnee, c'est à sçauoir que la raison de AB à DE soit donnee, & aussi celle de

AC à DF: Ie dis que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee.



Car ſoient accomplis les parallelogram. AG, DH. Donc puis que des deux parallelog. AG, DH, les coſtez d'autour les angles egaux A & D, ou bien inegaux & toutesfois dõnez, ont entr'eux raiſon donnee; [d] la raiſon d'iceluy AG à DH eſt donnee: Mais le triangle ABC eſt moitié de AG, [e] & le triangle DEF moitié de DH: donc la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee.

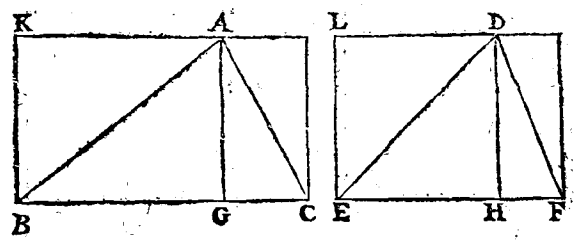
d 70.p

e 34.1

PROP. LXXII.

Si de deux triangles, les baſes ſont en raiſon donnee, & que des angles ſoient tirées à icelles baſes des lignes droictes faiſans angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, leſquelles ayent entr'elles raiſon donnee: iceux triangles auront auſſi entr'eux raiſon donnee.

Soient deux triangles ABC, DEF, & ſoient tirées aux baſes les lignes droictes AG, DH, qui faſſent les angles AGC, DHF egaux, ou bié inegaux, mais toutesfois donnez; & ſoit la raiſon de BC à EF donnee; mais la raiſon de AG à DH auſſi donnee: Ie dis que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee.



Car ſoient accomplis les parallelogrammes KC, LF, d'autant que les angles AGC, DHF ſont egaux, ou bien inegaux & toutesfois donnez, & que l'angle AGC [f] eſt egal à l'angle KBC, mais l'angle DHF à l'angle LEF: les angles aux poincts B, E ſont egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez. Et pource que la raiſon de AG à DH eſt donnee, & AG eſt egale à KB. mais DH à LE: auſſi la raiſon de KB à LE eſt donnee. Mais la raiſon de BC à EF eſt auſſi donnee, & les angles aux poincts B, E ſont egaux ou bien inegaux, & toutesfois dõnez: donc [g] la raiſon du parallelog. KC au parallelog. LF eſt donnee: & partant la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnee, attendu qu'iceux triangles [h] ſont moitié des parallelogrammes.

f 29. 1

g 70.p

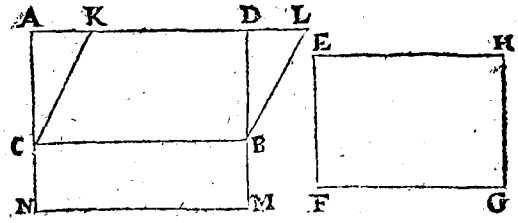
h 41.1.

PROP. LXXIII.

Si de deux parallelogrammes les coſtez d'autour angles egaux, ou bien d'alentour des inegaux, mais toutesfois donnez, ſont tellement entr'eux, que comme le coſté du premier eſt au coſté du ſecond, ainſi l'autre coſté du ſecond, ſoit à quelque autre ligne droicte, mais que l'autre coſté du premier ait

aussi à la mesme ligne droicte vne raison donnee : iceux parallelogrammes auront aussi entr'eux vne raison donnee.

Soient deux parallelogrammes AB, EG, desquels les costez d'autour les angles des poincts C, F egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, soient tellement entr'eux que comme CB à FG, ainsi EF à quelque autre ligne droicte CN, mais la raison de AC à icelle CN soit donnee : Ie dis que la raison du parallellogramme AB au parallelog. EG est donnee.



Car le parallelogramme AB soit premierement equiangle à EG, & ayant posé CN directement à AC, soit acheué le parallelogr. CM. D'autant que comme CB ou NM son egale est à FG, ainsi EF à CN, & que les angles N & F sont egaux; (car N est egal à l'angle ACB qu'on a posé estre egal à F) les parallelogrammes CM, EG i sont egaux. Mais comme AC à CN l ainsi le parallelogr. AB à CM ou EG : partant puis que la raison de AC à CN est donnee; aussi la raison de AB à EG est donnee.

i 14. 6.
l 1. 6.

Maintenant, le parallelogramme AB ne soit equiangle au parallelog. EG, & soit constitué à la ligne droicte CB, & au poinct C donné en icelle, l'angle BCK egal à l'angle EFG. & soit paracheué le parallelog. CL. Donc puis que chacun des angles ACB, KCB est donné, le reste ACK est aussi donné. Mais m l'angle CAK est donné, comme aussi le restant AKC : donc n le triangle ACK est donné par espece; & partant la raison de AC à CK est donnee Mais la raison d'icelle AC à CN est aussi donnee : donc o la raison de CK à CN est donnee. Et puis que comme CB à FG, ainsi EF a la ligne droicte CN, à laquelle l'autre costé KC a raison donnee, & que l'angle BCK est egal à l'angle F, la raison du parallelog. CL au parallelog. EG est donnee, (par la premiere partie de cette prop.) Mais le parallelog. CL est egal au parallelog. AB : donc la raison du parallelog. AB au parallelog. EG est donnée.

m *sch.* 69. *pr.*
n 40. *p.*
o 8. *p.*

PROP. LXXIV.

Si deux parallelogrammes en angles egaux, ou bien en inegaux, mais toutesfois donnez ont vne raison donnee; comme vn costé du premier sera à vn costé du second, ainsi l'autre costé du second sera à celle à laquelle l'autre costé du premier à raison donnee.

Que les deux parallelogrammes AB, EG ayans aux poincts C, F angles egaux ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, soient entr'eux en raison donnee : Ie dis que comme CB à FG, ainsi EF à celle que AC a raison donnee.

Car ou AB est equiangle ou non : soit premierement equiangle, & à la ligne droicte BC soit appliqué le parallelog. CM egal à EG, & tellement posé que

AC,

AC, CN soient directement: donc [p] DB, BM seront aussi directement. Et puis que la raison de AB à EG est donnee, & que CM est egal à EG; la raison de AB à CM est aussi donnee: & partant la raison de AC à CN est donnee: (attendu que AB est à CM [q] comme AC à CN.) Et pour ce que CM est egal & equiangle à EG: les costez d'autour les angles egaux d'iceux CM, EG [r] sont reciproquement proportionnaux; & partant comme CB à FG, ainsi EF à CN: Mais la raison de AC à CN est donnee: donc comme CB est à FG, ainsi EF est à celle que AC a raison donnee. (*Voyez la figure precedente.*)

p *sch.* 68. *p.*

q 1.6.

r 14.6.

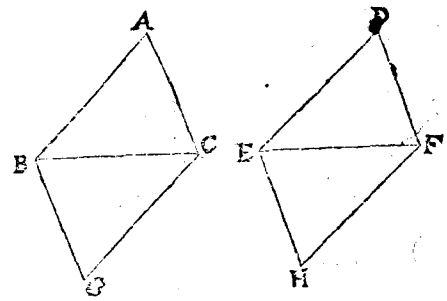
Maintenant, AB ne soit equiangle à EG, & soit constitué à la ligne droicte CB & au poinct C donné en icelle, l'angle BCK egal à EFG, & soit acheué le parallelog. CL. Donc puis que la raison de AB à EG est donnee, & [s] que AB est egal à CL; aussi la raison de CL à EG est donnee, & l'angle BCK est egal à l'angle F: & partant CL [t] est equiangle à EG. Donc (par la premiere partie de cette prop.) comme CB à FG, ainsi EF à celle à laquelle CK a raison donnee. Mais la raison de AC à CK est donnee: (ainsi qu'il appert par ce qui a esté demonstré à la derniere partie de la prec. prop.) donc comme CB à FG ainsi EF à celle que AC a raison donnee.

s 36.1.

t *sch.* 69. *p.*

PROP. LXXV.

Si deux triangles en angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee; comme le costé du premier sera au costé du second, ainsi l'autre costé du second sera à cette ligne droicte-là à laquelle l'autre costé du premier a raison donnee.



Soient deux triangles ABC, DEF qui ayent entr'eux vne raison donnee, & aux poincts A, D, soient angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez: Ie dis que comme AB est à DE, ainsi DF est à celle que AC a raison donnee.

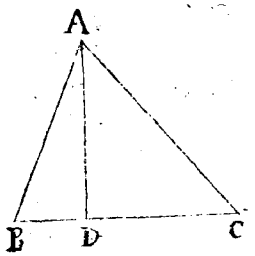
Car soient accomplis les parallelogrammes AG, DH. Donc autant que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnee, aussi la raison du parallelog. AG au parallelog. DH est donnee. Veu donc que les deux parallelog. AG, DH en angles egaux, ou bien inegaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux vne raison donnee; comme [x] AB est à DE, ainsi DF à celle à laquelle AC a raison donnee.

x 74. *p.*

PROP. LXXVI.

Si du sommet d'vn triangle donné par espece est tirée à la base vne ligne perpendiculaire, elle aura à la base vne raison donnee.

Soit le triangle ABC donné par eſpece, & du poinct A ſoit tirée à la baſe BC la perpendiculaire AD: Ie dis que la raiſon d'icelle AD à BC eſt donnee.

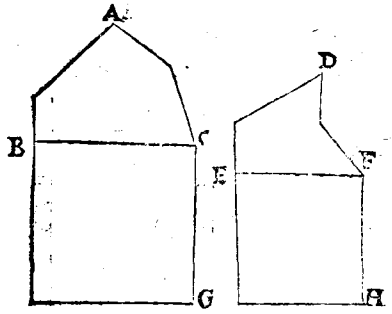


Car puis que le triangle ABC eſt donné par eſpece, la raiſon de AB à BC eſt donnee, & l'angle B auſſi donné. Mais l'angle ADB eſt donné: Donc l'autre angle
a 40 p. BAD eſt donné. Parquoy[a] le triangle ABD eſt donné par eſpece; & partant la raiſon de AB à AD eſt donnée.
b. 8. pr. Mais la raiſon de AB à BC eſt donnee: Donc[b] la raiſon de AD à BC eſt donnee.

PROP. LXXVII.

Si deux figures donnees par eſpeces ont entr'elles vne raiſon donnee; auſſi ſera donnee la raiſon duquel on voudra des coſtez de l'vne d'icelles figures auquel on voudra des coſtez de l'autre.

Que les deux figures ABC, DEF donnees par eſpece ayent entr'elles vne raiſon donnee: Ie dis que lequel que ce ſoit des coſtez de ABC a raiſon donnee auquel que ce ſoit des coſtez de DEF.



Car ſur les lignes droictes BC, EF ſoient deſcris les quarrez BG, EH. D'autant que ſur vne meſme ligne droicte BC ſont deſcriptes deux
c 49. p. figures ABC, BG donnees par eſpece[c] la raiſon d'icelle ABC à BG eſt donnee. Semblablement la raiſon de DEF à EH eſt donnee. Et puis que la raiſon de ABC à DEF eſt donnee, & auſſi celle de la meſme figure ABC à BG; & en-
d 8. pr. core la raiſon de DEF à EH: [d] la raiſon de BG à EH eſt donnee; & partant la raiſon de BC à EF eſt auſſi donnee.

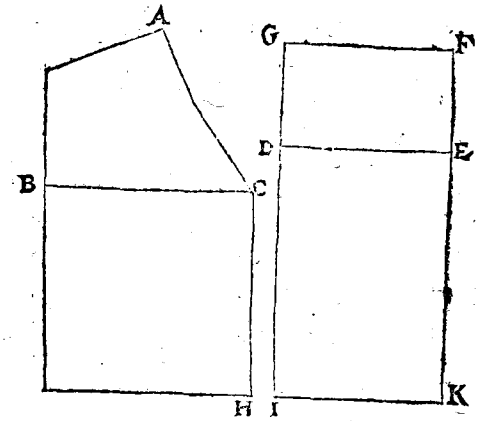
PROP. LXXVIII.

Si vne figure donnee a raiſon donnee à quelque rectangle, & qu'vn coſté ait raiſon donnee à vn coſté; le rectangle eſt donné par eſpece.

Que la figure donnee ABC ait raiſon donnee au rectangle DF, & ſoit donnee la raiſon de BC à DE: Ie dis que le rectangle DF eſt donné par eſpece.

Car ſur la ligne droicte BC ſoit deſcrit le quarré BH, & à la ligne droicte DE ſoit appliqué le parallelogr. DK egal à BH, de telle ſorte que GD, DI
e ſch. ſoient poſees directement, [e] & par conſequent FE, EK auſſi directement.
68. pr. Donc puis que ſur vne meſme ligne droicte BC ſont deſcrits les deux rectili-
f 49. p. gnes ABC, BH donnez par eſpece, [f] la raiſon de ABC à BH eſt donnee. Mais la raiſon d'icelle ABC à DF eſt auſſi donnee: Donc[d] la raiſon de BH à DF eſt donnee. Mais BH eſt egal à DK: Donc la raiſon de DK à DF eſt auſſi

donnee. Et puis que BH eſt egal & equiangle à DK, l'vn & l'autre eſtant rectangle; [g] les coſtez d'iceux ſont reciproquement proportionnaux, & comme BC à DE, ainſi DI à CH. Mais par l'hypotheſe la raiſon de BC à DE eſt donnee: Donc auſſi la raiſon de DI à CH eſt donnee. Mais la raiſon de DI à DG eſt auſſi donnee: (car DI eſt à DG [h] cõme DK à DF) donc la raiſon de DG à CH eſt donnee. Mais CH eſt egale à BC, attendu que BH eſt quarré: Donc la raiſon de BC à DG eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme BC à DE eſt auſſi donnee: Donc [i] la raiſon de DE à DG eſt donnee, & l'angle à D eſt droit: Donc [l] DF eſt donné par eſpece.

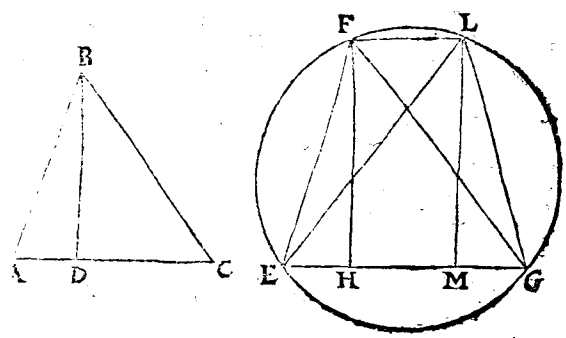


g 14.6.
h 1.6.
i 8. pr.
l 5ch. 61. pr.

PROP. LXXIX.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, mais des angles egaux ſoient tirees des perpendiculaires aux baſes, & que comme la baſe du premier triangle eſt à la perpendiculaire, ainſi auſſi la baſe de l'autre ſoit à la perpendiculaire: iceux triangles ſont equiangles.

Soient les triangles ABC, EFG ayans les angles aux poincts B, F egaux, & d'iceux poincts B & F ſoient tirees les perpendiculaires BD, FH; & comme AC à BD, ainſi EG ſoit à FH: Ie dis que le triangle ABC eſt equiangle au triangle EFG.



Car allentour du triangle EFG ſoit deſcrit le cercle EFLG, puis ſur la ligne droicte EG, & au poinct E donné en icelle ſoit fait l'angle GEL egal à l'angle C, & ſoient tirees FL, LG, & la perpendiculaire LM. Veu donc que l'angle GEL eſt egal à l'angle C, & l'angle ELG eſt egal à l'angle EFG, [m] iceux eſtans en vn meſme ſegment de cercle: le troiſieſme angle EGL eſt egal au troiſieſme angle A. Parquoy le triangle ABC eſt ſemblable au triangle ELG, & ſont tirees les perpendiculaires BD, LM: Donc [†] comme AC à BD, ainſi EG à LM. Mais par l'hypoteſe comme AC à BD, ainſi EG à FH: Donc [n] LM eſt egale à FH. Mais icelle LM eſt [o] parallele à FH: Donc [p] FL eſt auſſi parallele à EG; & partant l'angle FLE [q] eſt egal à l'angle LEG. Mais l'angle C eſt auſſi egal à iceluy angle LEG; & l'angle FLE à l'angle [m] FGE: Donc auſſi l'angle C eſt egal à l'angle FGE. Mais par l'hypoteſe l'angle ABC eſt egal à l'an-

m 11. 3.
n 7. 5.
o 28. 1.
p 33. 1.
q 29. 1.

gle EFG: Donc le troiſieſme angle BAC eſt egal au troiſieſme angle FEG. Par quoy le triangle ABC eſt equiangle au triangle EFG.

SCHOLIE.

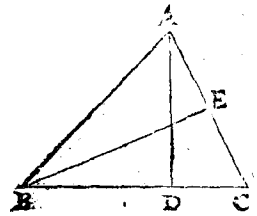
† *Or que comme AC à BD, ainſi EG ſoit à LM, le ſieur Hardy la demonſtré ainſi. D'autant que l'angle C eſt egal à l'angle GEL, & l'angle BDC à l'angle LME, chacun eſtant droict; l'autre angle CBD eſt egal à l'autre ELM: Donc* [a] *comme EM à ML, ainſi CD à DB. Derechef, pource que l'angle ABC eſt egal à l'angle ELG, & l'angle CBD à l'angle ELM, le reſte ABD eſt egal au reſte MLG: mais l'angle ADB eſt auſſi egal à l'angle LMG, & partant le troiſieſme angle A eſt egal au troiſieſme LGM: Donc* [c] *comme AD à DB, ainſi GM à ML. Mais il a eſté demonſtré que comme CD à DB, ainſi EM à ML: Donc* [d] *comme AC à BD, ainſi EG à LM.*

a 4. 6.

b 24. 5.

PROP. LXXX.

Si vn triangle a vn angle donné, & que le rectangle ſoubs les coſtez cõprenans iceluy angle donné ait vne raiſon donnee au quarré de l'autre coſté; le triangle eſt donné par eſpece.



Soit le triangle ABC ayant l'angle A donné, & que le rectangle contenu ſoubs AB, AC ait raiſon donnee au quarré de la ligne droicte BC: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car des poincts A & B ſoient menees les perpendiculaires AD, BE. D'autant que l'angle BAE eſt donné, & auſſi l'angle ABE, le triangle ABE eſt donné [b] par eſpece: & partant la raiſon de AB à BE eſt donnee: Donc la raiſon du rectangle de AB, AC, au rectangle de BE, AC eſt auſſi donnee. (Car c'eſt la meſme raiſon [u] que de AB à BE.) Mais le rectangle de AC, BE eſt egal au rectangle de BC, AD, pource que chacun d'iceux rectangles eſt [x] double du triangle ABC: Donc la raiſon du rectangle de AB, AC au rect. de BC, AD eſt auſſi donnee. Mais la raiſon du rectangle de AB, AC au quarré de BC eſt donnee: Donc [y] auſſi la raiſon du rectangle de BC, AD au quarré de BC eſt donnee; & partant la raiſon de la ligne droicte BC à la ligne droicte AD eſt donnee. (Pource que [a] le rectangle eſt au quarré, comme AD à BC.) Maintenant ſoit expoſee la ligne droicte FG donnee par poſition & par grandeur, & ſur icelle ſoit deſcrit le ſegment de cercle FIG capable d'vn angle egal à l'angle A. Et puis que iceluy angle A eſt donné, auſſi ſera donné l'angle au ſegment FIG; & partant [z] iceluy ſegment eſt donné par poſition. Du poinct G ſoit erigee à angles droicts ſur FG la ligne GH; laquelle [a] eſt donc donnee par poſition. Soit fait que comme BC eſt à AD, ainſi FG ſoit à GH & puis que la raiſon de BC à AD eſt donnee, auſſi le ſera celle de FG à GH. Mais FG eſt donnee: Donc [b] GH eſt donnee par grandeur. Mais elle eſt auſſi donnee par poſition, & le poinct G eſt donné: Donc le poinct H eſt [c] auſſi donné. Maintenant par le poinct H ſoit menee HI parallele à FG: & icelle ſera donnee [d] par poſition. Mais le ſegment de cercle FIG eſt auſſi donné par poſition: Donc [e] le

u 1. 6.

x 41. 1.

y 8. pr.

z 8. def.

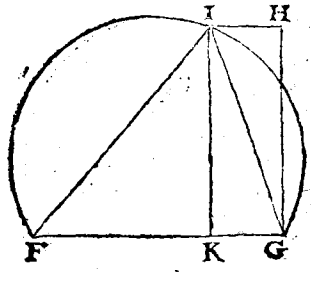
a 4. def.

b 2. pr.

c 27. p.

d 28 p.

e 25. p.

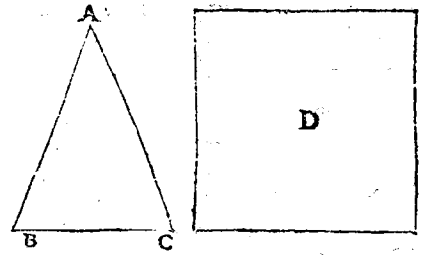


poinct I eſt donné. Soient tirees les lignes droictes IF, IG, & la perpendiculaire IK. Donc IK eſt donnee par poſition. Mais le poinct I eſt donné, comme auſſi chacun des poincts F, G: Donc [f] chacune des lignes FG, FI, IG eſt donnée par poſition & par grandeur. Parquoy [g] le triangle FIG eſt donné par eſpece. Et puis que comme BC à AE ainſi FG à GH, & [h] qu'à icelle GH eſt egale IK; comme BC à EA, ainſi FG à IK; & l'angle A eſt egal à l'angle FIG: Donc [i] le triangle ABC eſt equiangle au triangle FIG. Mais iceluy FIG eſt donné par eſpece: Donc auſſi le triangle ABC eſt donné par eſpece.

f 26. p.
g 39. p.
h 34. 1.
i 79. p.

AVTREMENT.

Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle A donné, & la raiſon du rectangle ſoubs AB, AC au quarré de BC ſoit donnee: Ie dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



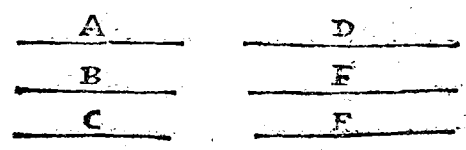
Car puis que l'angle A eſt donné, cet eſpace là duquel le quarré de la compoſee BAC eſt plus grand que le quarré de BC [l] a raiſon donnee au triangle ABC: Or cet eſpace là ſoit D. Donc la raiſon d'iceluy D au triangle ABC eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy triangle ABC au rectangle de AB, AC eſt donnee, [m] veu que l'angle A eſt donné. Donc [n] la raiſon de l'eſpace D au rectangle de AB, AC eſt donnee. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de AB, AC au quarré de BC eſt auſſi donnee: Donc [o] la raiſon de l'eſpace D au quarré de BC eſt donnee: Parquoy en compoſant, [p] la raiſon de l'eſpace D auec le quarré de BC à iceluy quarré de BC eſt donnee: Donc la raiſon du quarré de la compoſee BAC au quarré de BC eſt donnee; (pource que l'eſpace D auec le quarré de BC eſt egal à iceluy quarré de la compoſee BAC) & partant [p] la raiſon d'icelle compoſee BAC à BC eſt donnee. Mais l'angle A eſt auſſi donné: Donc [q] le triangle ABC eſt donné par eſpece.

l 67. p.
m 66. p.
n 8. pr.
o 6. pr.
p ſch. 52. pr.
q 46. p.

PROP. LXXXI.

Si de trois lignes droictes proportionnelles à trois lignes droictes proportionnelles, les extremes ſont en raiſon donnee, auſſi les moyennes ſeront en raiſon donnee: Et ſi vn extreme a raiſon donnee à vn extreme, & la moyenne à la moyenne; l'autre aura auſſi à l'autre vne raiſon donnee.

Que les trois lignes droictes A, B, C, ſoient proportionnelles à trois lignes droictes proportionnelles D, E, F, & que les extremes ſoient en raiſon donnee, c'eſt à ſçauoir que A ſoit à D, & C à F en raiſon donnee. Ie dis que la raiſon de B à E eſt donnee.



Car d'autant que la raiſon de A à D & de C à F eſt donnee, le rectangle de A, D [r] aura raiſon donnee au rectangle de C, F. Mais le rectangle de A, D, eſt egal [ſ] au quarré de B; & le rectangle de C, F au quarré de E: Donc la raiſon

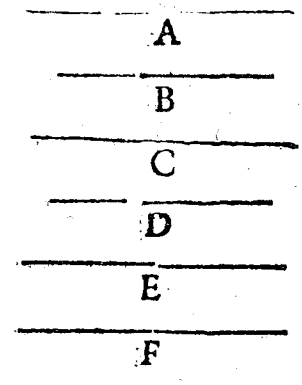
r 70. p.
ſ 17. 6.

du quarré de B au quarré de E est donnee, & partant [p] la raison de la ligne B à la ligne E est aussi donnee. [p] 5ch. 52. pr.

Derechef, soit donnee la raison de A à D, & de B à E: Ie dis que la raison de C à F est aussi donnee. Car puis que la raison de A à D, & de B à E est donnee; aussi la raison du quarré de B [t] au quarré de E est donnee. Mais le quarré de B est egal au rectangle de A, C, & le quarré de E au rect. de D, F: Donc la raison du rectangle de A, C au rect. de D, F est donnee. Mais la raison d'vn costé A à vn costé D est donnee: Donc [u] la raison de l'autre costé C à l'autre costé F est aussi donnee. [t] 50. p. [u] 68. p.

PROP. LXXXII.

S'il y a quatre lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à celle à laquelle la secondé a raison donnee, ainsi la tierce sera à celle à laquelle la quatriesme a raison donnee.

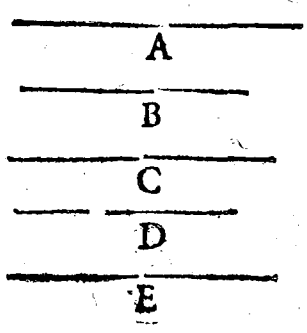


Soient quatre lignes droictes proport. A, B, C, D; & soit A à B, comme C à D: Ie dis que comme A est à celle que B a raison donnee, ainsi C est à icelle à laquelle D a raison donnee.

Car E soit celle à laquelle B a raison donnee; & soit faict que comme B est à E ainsi D soit à F. Or la raison de B à E est donnee: Donc est aussi donnee la raison de D à F. Et puis que comme A à B, ainsi C à D, & en outre comme B à E ainsi D à F; par raison egale comme A à E, ainsi C à F. Mais E est celle à laquelle B a raison donnee, & F celle à laquelle D a aussi raison donnee: Donc comme A est à celle à laquelle B a raison donnee, ainsi C est à celle à laquelle D a raison donnee.

PROP. LXXXIII.

Si quatre lignes droictes sont tellemẽt entr'elles, que de trois d'icelles qu'elles qu'elles soient, & d'vne quatriesme prise proportionnelle à laquelle celle qui reste des quatre lignes ait vne raison donnee, se fassent quatre lignes droictes proportionnelles: comme la quatriesme sera à la tierce, ainsi la seconde sera à celle à laquelle la premiere a raison donnee.



Soient quatre lignes droictes A, B, C, D, telles qu'ayãt pris E quatriesme proportionnelle à trois quelconques d'icelles A, B, C, à laquelle D a raison donnee, icelles quatre lignes A, B, C, E sont proportionnelles: Ie dis que comme D à C, ainsi B à celle que A à raison dõnee.

Car d'autant que comme A à B, ainsi C à E, le rectangle contenu sous A, E est [a] egal à celuy compris sous B, C. Et puis que la raison de D à E est donnee, aussi sera [a] 16.6.

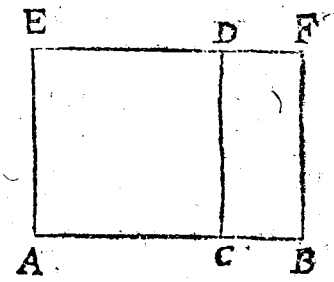
donnee la raiſon du rectangle de A, D au rectangle de A E (car[b] c'eſt la meſme raiſon que de D à E.) Mais le rectangle de A, E, eſt egal à celuy de B, C; Donc la raiſon du rectangle de A, D à celuy de B, C eſt donnee. Parquoy [c] comme D eſt à C, ainſi B à celle à laquelle A a vne raiſon donnee. [d]

b 1. 6.

d 74. p.

PROP. LXXXIV.

Si deux lignes droictes comprenent vn eſpace donné en angle donné, & que l'vne ſoit plus grande que l'autre d'vne donnee, auſſi chacune d'icelles ſera donnee.



Que les deux lignes droictes AB, AE comprenent vn eſpace donné AF en angle donné BAE, & ſoit AB plus grande que AE d'vne donnee CB: Ie dis que chacune des lignes AB, AE, eſt donnee.

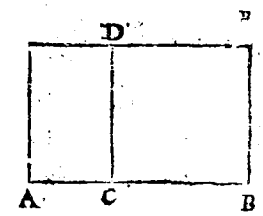
Car puis que AB eſt plus grande que AE de la donnee CB, le reſte AC eſt egal à AE: Soit accomply le parallelogr. AD. Donc puis que AE eſt egale à AC, la raiſon de AE à AC eſt donnee; & l'angle A eſt auſſi donné: Donc[e] AD eſt donné par eſpece. Parquoy l'eſpace donné AF eſt appliqué à la ligne droicte donnee CB, excedant de la figure AD donnee par eſpece; & partant[f] la largeur de l'excez eſt donnee: Donc AC eſt donnee. Mais CB eſt auſſi donnee: Donc la toute AB eſt donnee. Mais AE eſt auſſi donnee: Donc chacune des lignes droictes AB, AE eſt donnee.

e *ſch.* 61 *p.*

f 59. *p.*

PROP. LXXXV.

Si deux lignes droictes comprenant vn eſpace donné en angle donné, la compoſee d'icelles eſt donnee; auſſi chacune d'icelles ſera donnee.



Soient deux lignes droictes AC, CD comprenant vn eſpace donné AD en angle donné ACD, & la compoſee d'icelles lignes ACD ſoit donnee: Ie dis que chacune deſdictes lignes AC, CD eſt donnee.

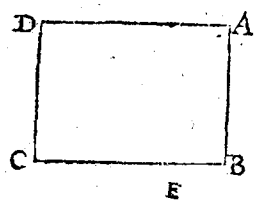
Car ſoit prolongee AC, iuſques au poinct B, & poſé CB egale à CD, puis par le poinct B ſoit menee BF parallele à CD, & acheué le parallelogramme CF. Veu donc que CB eſt egale à CD, & l'angle DCB eſt donné; car celuy qui eſt de ſuitte eſt le donné; & partant[e] le parallelogr. DB eſt donné par eſpece: & en outre puis que la compoſee ACD eſt donnee, & CB eſt egale à CD; auſſi AB eſt donnee. Par ainſi à la ligne droicte AB eſt appliqué l'eſpace donné AD defaillant de la figure DB donnee par eſpece; & partant[g] les largeurs du deffaut ſont donnees: Donc les lignes droictes DC, CB ſont donnees. Mais la compoſee ACD eſt auſſi donnee: Donc[h] chacune des lignes AC, CD eſt donnee.

g 58. *p.*

h 4. *p.*

PROP. LXXXVI.

Si deux lignes droictes comprenant vn espace donné en angle donné, le quarré de l'vne est plus grand que le quarré de l'autre d'vn donné, qu'en raison; aussi chacune d'icelles sera donnee.



Soient deux lignes droictes AB, BC comprenant l'espace donné AC en angle donné ABC, & le quarré de la ligne BC soit plus grand que le quarré de AB d'vn donné qu'en raison: Ie dis que chacune des lignes AB, BC est donnee.

Car puis que le quarré de BC est plus grand que le quarré de AB d'vn espace donné qu'en raison, soit osté le donné, c'est à sçauoir le rectangle sous CB, BE: Donc[i] la raison du reste,[d] qui est le rectangle sous BC, CE au quarré de AB est donnee. Et d'autant que le rectangle,† sous AB, BC est donné, & aussi celuy de CB, BE;[m] leur raison est donnee. Mais comme le rectangle sous AB, BC au rectangle sous CB EB,[n] ainsi AB à BE; & partant la raison de AB à BE est donnee: Parquoy est aussi donnee la raison du quarré de AB au quarré de BE. Mais la raison du quarré de AB au rectangle sous BC, CE est donnee: Donc[p] aussi est donnee la raison du rectangle sous BC, CE au quarré de BE. Parquoy la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE au quarré de BE est donnee; & en composant,[q] la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE, auec le quarré de BE au quarré de BE est donnee. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE, auec le quarré de BE, est le quarré de la composee BCE: Donc la raison du quarré de la composee BCE au quarré de BE est donnee: Parquoy[t] la raison de la composee de BC, CE à BE est donnee; & en composant,[q] la raison de la composee des lignes BC, CE, BE, c'est à dire le double de BC, à BE est donnee; & partant la raison de la seule BC à BE est aussi donnee. Mais comme BC à BE,[t] ainsi le rectangle sous BC, BE au quarré de BE: Donc la raison du rectangle sous BC, BE au quarré de BE est donnee. Mais le rectangle de BC, BE est donné: Donc[u] le quarré de BE est aussi donné, & consequemment la ligne BE est donnee. Parquoy BC est aussi donnee[y], puis que la raison de BE à BC est donnee. Mais l'espace AC est donné, & aussi l'angle B: Donc[x] AB est donnée. Parquoy chacune des lignes AB, BC est donnee.

i 11. d. d 2. 2. m 1. p. n 1. 6. o 50. p. p 8. pr. q 6. pr. r 8. 2. f 54. p. t 1. 6. u 2. pr. x 57. p.

SCHOLIE.

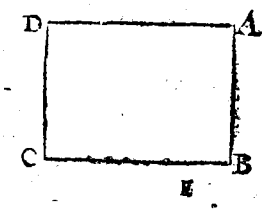
† *Au lieu de dire icy* ce qui est sous *&c. nous auons vsé du mot* rectangle, *estant manifeste par la suite de ceste demonstration que l'intension d'Euclide est telle, puis qu'il se sert en ladicte demonstration des deux & huictiesmes propositions du deuziesme element: & aussi que l'espace ou parallelogramme donné n'estant rectangle, il y peut-estre reduit faisant sur BC, & au poinct de l'angle donné B, vn angle droict CBA, tellement qu'on auroit deux parallelogrammes constituez sur vne mesme base BC, & entre mesmes paralleles, ainsi qu'en la 69. prop. au moyen de laquelle se tireroit la conclusion de ceste-cy.*

Cecy a aussi lieu à la proposition suiuante.

PROP. LXXXVII.

Si deux lignes droictes comprenant vn eſpace donné en angle donné, le quarré de l'vne eſt plus grand que le quarré de l'autre d'vn donné; auſſi chacune d'icelles ſera donnee.

Soient deux lignes droictes AB, BC, comprenant vn eſpace donné AC en angle donné B, & le quarré de BC ſoit plus grand que le quarré de AB d'vn donné: Ie dis que chacune d'icelles AB, BC eſt donnee.



Car puiſque le quarré de BC eſt plus grand que le quarré de AB d'vn eſpace donné, ſoit oſté le donné, & ſoit le rectangle ſous BC, BE: Donc le reſte, [f] qui eſt le rectangle de BC, CE, eſt egal au quarré de AB. Et puis que le rectangle de BC, BE eſt donné, & auſſi l'eſpace ou rectangle AC; la raiſon d'iceluy rectangle de BC, BE à AC eſt donnee. Mais comme [a] le rectangle de BC, BE au rectangle de AB, BC, ainſi BE à AB: Donc la raiſon de BE à AB eſt donnee; & partant [b] eſt auſſi donnee la raiſon du quarré d'icelle BE au quarré de AB. Mais à iceluy quarré de AB eſt egal le rectangle de BC, CE: Donc la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE eſt donnee; & partant eſt auſſi donnee la raiſon du quadruple d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE. Et en compoſant, [c] la raiſon de quatre fois le rectangle de BC, CE auec le quarré de BE à iceluy quarré de BE eſt donnee. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE auec le quarré de BE [d] eſt le quarré de la compoſee BCE: Donc la raiſon du quarré d'icelle compoſee BCE au quarré de BE eſt auſſi donnee; & partant [e] la raiſon de la compoſee BCE à BE eſt donnee. Parquoy en compoſant, [f] eſt auſſi donnee la raiſon d'icelles BCE, EB, c'eſt à dire deux fois BC à BE: Donc la raiſon de la ſeule BC à BE eſt donnee. Mais la raiſon de la meſme BE à AB eſt auſſi donnee: Donc [g] la raiſon de AB à BC eſt donnee. Et puis que la raiſon de BC à BE eſt donnee, & que comme icelle BC à BE, ainſi le quarré de BC [a] au rectangle de BC, BE; la raiſon du quarré de BC au rectangle de BC, BE eſt auſſi donnee. Mais iceluy rectangle de BC, BE eſt donné, car c'eſt ce qui a eſté oſté qui eſtoit donné: Donc le quarré de BC [h] eſt donné; & partant eſt donnee la ligne BC. Mais la raiſon d'icelle BC à BA eſt donnee: Donc AB eſt auſſi donnee.

f 2. 84

a 1. 6

b 50. 10

c 6. pri

d 8. 2

e 54. 10

f 6. pri.

g 8. pri

h 2. pri

PROP. LXXXVIII.

Si en vn cercle donné par grandeur eſt tiree vne ligne droicte laquelle oſte vn ſegment qui comprent vn angle donné; icelle ligne eſt donnee par grandeur.

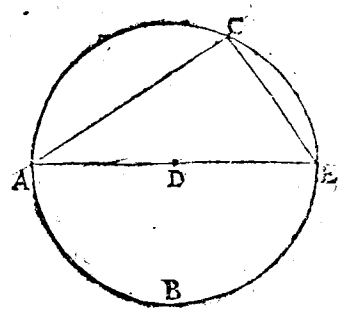
Au cercle ABC donné par grandeur, ſoit tiree la ligne droicte AC oſtant le ſegment ABC qui comprent l'angle donné AEC: Ie dis que la ligne AC eſt donnee par grandeur.

Car ſoit pris le centre du cercle D, tiré le diametre ADE, & ioint BC Donc

l 31. 3. l'angle ACE est donné, car[l] il est droit: Mais l'angle AEC est aussi donné; & partant l'autre angle CAE est donné. Parquoy le triangle ACE[m] est donné par espece; & partant la raison de EA à AC est donnee. Mais AE est donnee par grandeur, puis que le cercle ABC est donné par grandeur: Donc[n] AC est aussi donnee par grandeur.

m 40. p.

n 2. pr.



PROP. LXXXIX.

Si en vn cercle donné par grandeur, est tiree vne ligne droicte donnee par grandeur; elle ostera vn segment comprenant vn angle donné.

Au cercle ABC donné par grandeur soit tiree la ligne droicte AC donnee par grandeur: *(voyez la figure precedente)* Ie dis qu'elle oste vn segment qui comprent vn angle donné.

Car ayant pris le centre du cercle D, soit tiré le diametre ADE, & la ligne droicte EC. D'autant que chacune des lignes droictes AE, AC est donnee, la

o 1. pr. raison d'icelle AE à AC[o] est donnee; & l'angle ACE est droict: Donc[p] le

p 43. p. triangle ACE est donné par espece, & partant l'angle AEC est donné.

PROP. XC.

Si en la circonference d'vn cercle donné par position, & par grandeur on prend vn poinct donné, & que d'iceluy poinct à la circonference du cercle se flechisse vne ligne droicte faisant vn angle donné; l'autre extremité d'icelle ligne flechie sera donnee.

En la circonference du cercle ABC donné par position & par grandeur soit pris vn poinct donné B, & d'iceluy poinct B soit flechie ou brisee à la circonference la ligne droicte BAC, qui face l'angle BAC donné: Ie dis que le poinct C est donné.

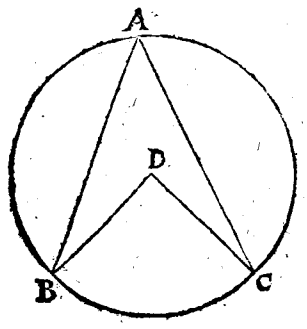
Car soit pris le centre du cercle D, & tirees les lignes BD, CD. D'autant que chaque poinct B, D est

q 26. p. donné, la ligne droicte BD[q] est donnee par position: & veu que l'angle BAC est donné, l'angle BDC est aussi donné. Parquoy à la ligne droicte BD dõnée par position, & au poinct D donné en icelle est menee la ligne droicte CD qui faict l'angle donné BDC: &

r 29. p. partant[r] la ligne DC est donnee par position. Mais le cercle ABC est donné par position & grandeur:

6. def. Donc[t] la ligne droicte DC est donnee par position, & par grandeur. Mais le

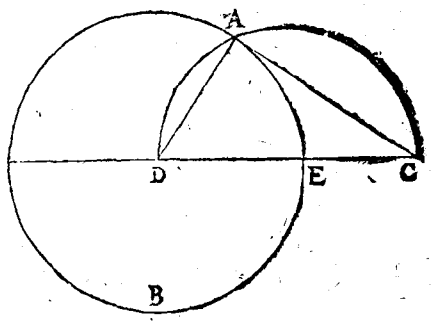
t 27. p. poinct D est donné: Donc[t] le poinct C est aussi donné.



PROP. XCI.

Si d'vn poinct donné est tiree vne ligne droicte qui touche vn cercle donné par position; icelle ligne est donnee par position & par grandeur.

D'vn poinct donné C soit menee la ligne droicte CA touchant le cercle AB donné par position: Ie dis qu'icelle ligne droicte AC est donnee par position & par grandeur.



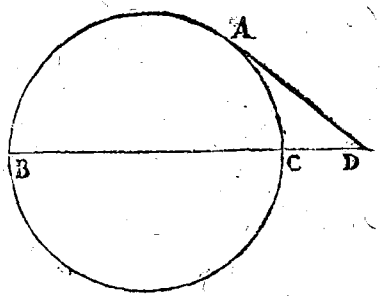
Car ayant pris le centre du cercle D, soient tirees les lignes droictes DA, DC. D'autant que chaque poinct C, D est donné, la ligne droicte CD [a] est donnee par position & par grandeur. Mais l'angle CAD [x] est droict; & partant [z] le demy cercle descrit sur CD passera par le poinct A: Qu'il y passe donc, & soit DAC: D'autant qu'iceluy DAC [y] est donné par position, & aussi le cercle ABE, [a] le poinct A est donné. Mais le poinct C est aussi donné: Donc [b] la ligne droicte AC est donnée par position & par grandeur.

a 26 p.
x 18. 3.
z sch. 31. 3.
y 6. def.
a 25. p.
b 26. p.

PROP. XCII.

Si hors vn cercle donné par position, on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct donné soit tiree quelque ligne droicte couppant le cercle; le rectangle compris sous toute la ligne & la partie d'entre le poinct & la circonference conuexe sera donné.

Hors le cercle ABC donné par position soit pris quelque poinct, c'est à sçauoir D, duquel soit menee la ligne droicte DB couppant le cercle: Ie dis que le rectangle soubs BD, DC est donné.



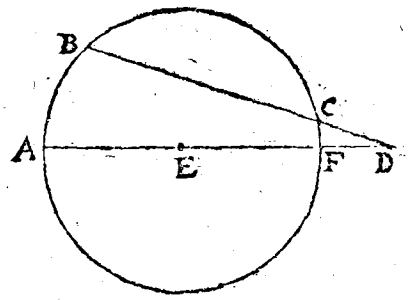
Car du poinct D soit menee la ligne droicte DA qui touche le cercle en A: Donc icelle DA [c] est donnee par position & par grandeur; & partant le quarré d'icelle DA [d] est donné. Mais iceluy quarré de DA est egal [e] au rectangle de BD, DC: Donc iceluy rectangle de BD, DC est aussi donné.

c 91. p.
d 52. p.
e 36. 3.

AVTREMENT.

Soit pris le centre du cercle E, & par iceluy soit tiree de D la ligne droicte

DA. D'autant que chaque poinct D, E eſt donné, la ligne droicte DE [f] eſt donnee par poſition & par grandeur. Mais le cercle ABC eſt auſſi donné par poſition & par grandeur: Donc chaque point A, F [g] eſt donné; & le poinct D eſt auſſi donné; & partant [f] chaque ligne AD, FD eſt donné. Parquoy le rectangle d'icelles AD, DF eſt auſſi donné. Mais iceluy rectangle de AD, DF eſt egal [h] au rectangle de DB, DC: Donc le rectangle de DB, DC eſt donné.

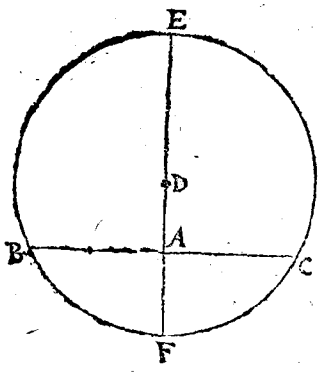


f 26. p.
g 25. p.
h Cor. 36. 3.

PROP. CXIII.

Si dans vn cercle donné par poſition on prend quelque poinct donné, & par iceluy on tire quelque ligne droicte au cercle; le rectangle compris ſoubs les ſegmens d'icelle ligne ſera donné.

Dans vn cercle donné par poſition ſoit pris quelque poinct donné A, & par iceluy ſoit tiree la ligne droicte BC: Ie dis que le rectangle contenu ſoubs AB, AC eſt donné.



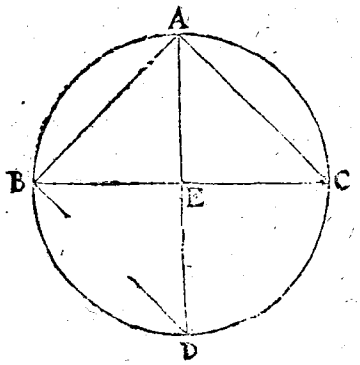
Car ſoit pris le centre du cercle D, & ayant tiré la ligne droicte AD ſoit prolongee iuſques aux poincts E, F. D'autant que chaque poinct A, D eſt donné, la ligne droicte AD [i] eſt donnee par poſition. Mais le cercle BEC eſt auſſi donné par poſition: donc chaque poinct E, F eſt auſſi donné par poſition; & le poinct A eſt donné. Parquoy chaque ligne [l] AE, AF eſt donnee: Donc le rectangle d'icelles AE, AF eſt donné; & eſt egal au rectangle [l] de AB, AC; partant iceluy rectangle de AB, AC eſt donné.

i 26. p.
l 35. 3.

PROP. XCIV.

Si dans vn cercle donné par grandeur eſt tiree vne ligne droicte, laquelle oſte vn ſegment qui comprenne vn angle donné, & qu'iceluy angle eſtant au ſegment ſoit couppé en deux egallement: la compoſee des lignes droictes qui comprenant l'angle donné aura raiſon donnée à la ligne qui couppe iceluy angle en deux egalement; & le rectangle contenu ſoubs la compoſee d'icelles lignes comprenant l'angle donné, & la partie d'icelle ligne couppante

qui eſt au deſſous du ſegment entre la baſe & la circonference ſera donné.



Au cercle ABC donné par grandeur ſoit tiree vne ligne droicte BC, laquelle oſte vn ſegment qui comprenne l'angle donné ABC, & iceluy angle ſoit couppé en deux egalement par la ligne droicte AD: Ie dis que la raiſon de la compoſee des lignes droictes BA, AC, c'eſt à dire BAC à AD eſt donnee; & auſſi que le rectangle contenu ſoubs la compoſee BAC & la ligne droicte ED eſt donné.

Soit menee BD. D'autant que dans le cercle ABC donné par grandeur eſt tiree la ligne droicte BC, qui oſte le ſegment BAC comprenant vn angle donné BAC; icelle ligne BC [m] eſt donnee: & partant BD eſt auſſi donnee: Donc la raiſon d'icelle BC à BD [n] eſt donnee. Et puis que l'angle donné BAC eſt couppé en deux egalement par la ligne droicte AD; [o] comme BA à CA, ainſi BE à CE; & en compoſant, comme BAC à CA, ainſi BC à CE: & en permutant, comme BAC à BC, ainſi CA à CE. Et veu que l'angle BAE eſt egal à l'angle CAE, & l'angle ACE [p] à l'angle BDE; l'autre angle AEC eſt egal à l'autre angle ABD; & partant le triangle ACE eſt equiangle au triangle ABD: Donc [r] comme AC à CE, ainſi AD à BD. Mais comme AC à CE, ainſi la compoſee BAC à BC: Donc comme la compoſee BAC à BC, ainſi AD à BD; & en permutant, comme la compoſee BAC à AD, ainſi BC à BD. Mais la raiſon d'icelle BC à BD eſt donnee: Donc la raiſon de la compoſee BAC à AD eſt auſſi donnee. Ie dis en outre que le rectangle ſoubs icelle compoſee BAC & ED eſt donné. Car d'autant que le triangle AEC eſt equiangle au triangle BDE, (car l'angle ACE [p] eſt egal à l'angle BDE, & l'angle AEC [q] à l'angle BED) comme BD à DE, ainſi AC à CE. Mais comme AC à CE, ainſi eſt auſſi la compoſee BAC à BC: Donc [r] comme la compoſee BAC eſt à BC, ainſi BD à DE Parquoy le rectangle d'icelle compoſee BAC & DE [s] eſt egal au rectangle de BC, BD. Mais iceluy rectangle de BC, BD eſt donné: (pour ce qu'icelles lignes BC, BD ſont donnees) donc le rectangle ſous la compoſee BAC & ED eſt auſſi donné.

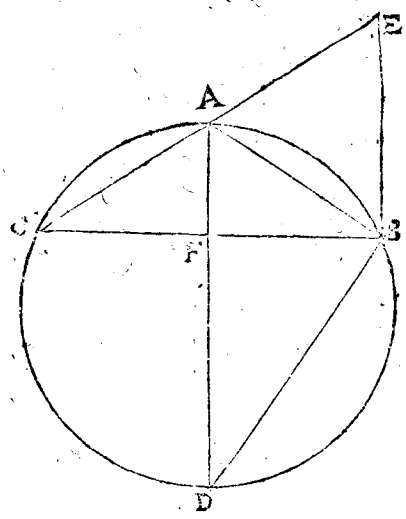
m 88. p.
n 1 pr.
o 3 6.
p 21. 3.
r 4. 6.
q 15. 1.
s 16. 6.

AVTREMENT.

Soit prolongee CA iuſques au poinct E, & poſé AE egale à BA, & ſoient conioincts BE, BD. D'autant que l'angle BAC eſt double de chacun des angles CAD, AEB; (car iceluy BAC eſt couppé en deux egalement par AD, & egal [t] aux deux angles ABE, AEB, qui ſont [u] egaux) l'angle ABE eſt egal à l'angle CAD, c'eſt à dire [x] à l'angle CBD: adiouſtant donc l'angle commun ABC, l'angle total ABD ſera egal au total FBE. Mais l'angle ACB [z] eſt egal à l'angle ADB: Donc le troiſieſme angle AEB eſt egal au troiſieſme BAD; & partant le triangle CFB eſt equiangle au triangle ABD: Parquoy comme CE à CB, ainſi AD à BD. Mais la ligne droicte CE eſt compoſee des deux CA,

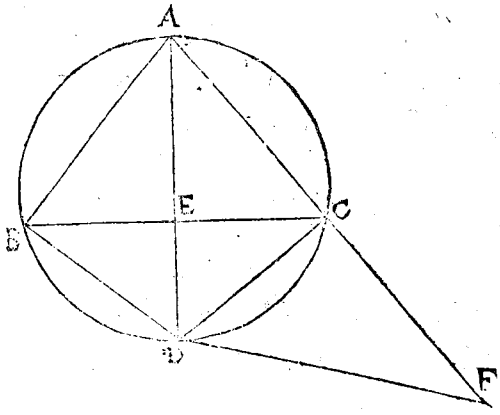
t 32. 1.
u 5. 1.
x 21. 3.

AB: Donc comme la composee BAC est à CB ainsi AD à BD; & en permutant, comme la composee BAC est à AD, ainsi CB à BD. Mais la raison de CB à BD est donnee, attendu que chacune d'icelles lignes est donnee: Donc la raison de la composee BAC à AD est aussi donnee. Et puis que le triangle CEB est equiangle au triangle FBD: (car
y 15. 1. l'angle AFC est egal[y] à l'angle BFD & l'an-
x 21. 3. gle ECB[x] à l'angle ADB) comme EC à CB ainsi BD à DF. Mais EC est egale à la composee BAC: Donc comme la composee BAC
z 16. 6. est à CB, ainsi BD à DF. Parquoy[z] le rectangle de la composee BAC & DF est egal au rectangle de CB & BD. Mais iceluy rectangle de CB, BD est donné, attendu que chacune des lignes CB, BD est donnee: Donc le rectangle de la composee BAC & DF est donné.



AVTREMENT.

Soit prolongee AC iusques en F, & pose CF egale à AB, & soient menees BD, DF. D'autant que BA est egale à
a 26. & 29. 3. CF, & [a] BD à DC; les deux costez AB, BD sont egaux aux deux CD, DF, chacun au sien, & l'angle ABD est egal à
b 22. 3. & 13. 1. l'angle DCF; [b] puis que le quadrilatere ABDC est dans le cercle: Donc la
c 4. 1. base AD est [c] egale à la base DF, & l'angle DAB à l'angle DFC. Mais iceluy angle BAD est donné: (car c'est la moitié du donné BAC.) Donc l'angle DFC l'est aussi. Mais DAF est aussi donné: Donc le triangle ADF est donné par espece. Parquoy la raison de FA à AD est donnee. Mais AF est la composee de BA, AC, attendu que CF est egal à AB: Donc la raison de la composee BAC à AD est donnee. Or par mesme raison que dessus nous demonstrerons que le rectangle contenu soubs la composee BAC & ED est donné.

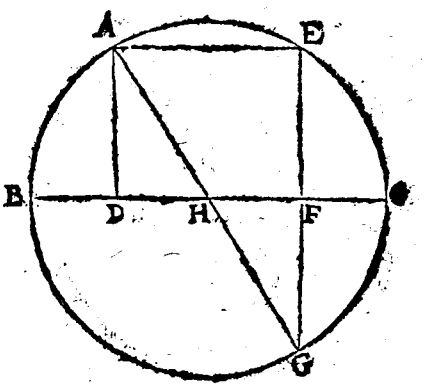


PROP. XCV.

Si au diametre d'vn cercle donné par position on prend vn poinct donné, & que d'iceluy poinct on tire quelque ligne droicte à la circonference du cercle, mais que de la section d'icelle on mene vne ligne droicte perpendiculaire à cette-là, & par le poinct auquel ceste perpendiculaire rencontre-

ra la circonference on mene vne parallele à la premiere ligne tiree: ce poinct là auquel la parallele rencontre le diametre est donné, & le rectangle contenu soubs les lignes paralleles est aussi donné.

Soit le cercle ABC donné par position, & son diametre AC, auquel soit pris le poinct donné D, & d'iceluy soit tiree la ligne droicte DA couppant la circonference en A, duquel soit menee la ligne droicte AE perpendiculaire à DA, & par le poinct E où elle rencontre la circonference soit menee EF parallele à AD: Ie dis que le poinct F est donné, & aussi le rectangle compris soubs AD, EF.



Car soit prolongee la ligne droicte EF iusques au poinct G, & tiree la ligne droicte AG. D'autant que l'angle AEG est droict, la ligne droicte AG est diametre du cercle. Mais AB est aussi diametre: Donc le poinct H est le centre du cercle. Or le poinct D est donné: & partant [d] la ligne DH est donnee par grandeur. Mais puis que AD est parallele à EG, & AH egale à GH; [e] DH est egale à FH & AD à FG: (car les angles AHD, FHG [f] sont egaux, & DAH, FGH [g] aussi egaux.) Mais la ligne DH est donnee: Donc FH est aussi donnee. Mais vne chacune d'icelles lignes DH, HF est aussi donnee par position, & le poinct H est donné: Donc [h] le poinct F est aussi donné. Et puis que dans le cercle ABC donné par position est pris vn poinct donné F, & par iceluy est tiree la ligne droicte EFG; le rectangle soubs EF, FG [i] est donné. Mais FG est egale à AD: Donc le rectangle compris soubs AD, EF est donné: Ce qu'il falloit demonstrer.

d 26. p.
e 26. p.
f 15. 1.
g 29. 1.
h 27. p.
i 23. d.

Fin des Donnez d'Euclide.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR Priuilege du Roy, il eſt permis à D. HENRION, *Profeſſeur és Mathematiques de faire imprimer toutes ſes œuures, ſçauoir eſt,* Les quinze Liures des Elements Geometriques d'Euclide, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur, auec le Liure des Donnez du meſme Euclide, traduict en François par ledit HENRION auparauant ſon decedz, *ſoit conioinctement ou ſeparément, cõme bon luy ſemblera, & l'impreſſion faite, les vendre & diſtribuer ainſi qu'il voudra, & ce iuſques au terme de neuf ans, à compter du iour que chacun de ſeſdicts liures ſera acheué d'imprimer, en vertu des preſentes: pendant lequel temps, defenſes ſont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque eſtat, qualité, ou condition qu'ils ſoient, d'imprimer, alterer, traduire, ny extraire aucune choſe des œuures dudit* HENRION, *d'achepter, eſchanger, vendre ny diſtribuer aucuns de ſeſdits liures, ſinon de ceux qu'il aura fait imprimer, ſur peine de ſix mille liures d'amende, & confiſcation des exemplaires qui ſe trouueront d'autres impreſſions que de celles qu'aura fait faire ledit* HENRION. *Voire meſme ſi aucun Imprimeur ou Libraire eſt trouué ſaiſi d'aucun exemplaire d'autre impreſſion que de celles dudit* HENRION, *ou faites de ſon conſentement, ſera procedé contre luy, extraordinairement, & condamné en pareille amende que s'il l'auoit imprimé ou fait imprimer. Voulant en outre ſa Majeſté, qu'en appoſant au cõmencement ou à la fin deſdits liures vn extraict des preſentes, elles ſoient teniües pour bien notifiees & ſignifiees, nonobſtant quelconque lettre au contraire: Car tel eſt le plaiſir de ſa Maieſté Donné à Paris, le 24. de Decembre. l'an de grace 1624. & de noſtre regne le quinzieſme. Par le Roy en ſon conſeil,* RENOVARD.

Acheué d'imprimer le 24. Iuillet 1632.