

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

1537
M. Ambrosio Rhodio
EVCLIDIS
ELEMENTO-
RUM

LIBRI XIII.

Succinctis & perspicuis demon-
strationibus compre-
hensi

a

M. AMBROSIO RHODIO
Kembergense, Mathematicum Pro-
fessore extraordinario in
Academia Leucorea.

Typis Gormanianis,
Impensis Pauli Helvvigij.

M. DC. IX.

p.



A D

Serenissimum ac Potentissimum
Principem ac Dominum,

DN. CHRISTIA-
NUM II. DUCEM SAXONIAE,
SACRI ROM. IMP. ARCHIMAR-
schallum & Electorem , Landgravium
Thuringiæ, Marchionem Misniæ, Burg-
gravium Magdeburgensem; Dominum
suum Clementissimum.

M. AMBROSII RHODII Kembergensis
epistola dedicatoria.

 **UM I A M à MULTIS AN-**
nis, Princeps Serenissime,
Domine Clementissime, non
in schola modò, quæ ad Mol-
dam est, Illustris; sed & Academia, quæ ul-
tra seculum floret ad Albim, cum multis
alijs Munificentiam Illustrissimæ Celsitu-
dinis vestræ quasi ordinariam expertus
(:) 2 sim;

sim; ejus imprimis memoriam nulla mihi unquam ex animo eripiet ætas, quam pro diligentiore opera studiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hîsce proximis supra Academiæ seculum primum excurrentibus, paulò expertus sum largiorem. Hujus enim adminiculi ope, non modò academicam hanc vitam, quæ vel unica studijs urgendis optatissima videtur, continuare; verùm etiam de quamplurimis Academiæ civibus, quod citra jactantiam dictum velim, varias subinde Mathematicum partes docendo, benè mereri mihi licuit. Cùm autem animo jam certò constituisssem, etiam ad penitiora harum disciplinarum, præcipuè verò Astronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ sacra plures deducere; mearum quod partium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè illi principijs tum Geometriæ, tum Arithmeticiæ prius informarentur, per quæ veluti scalas duas, summa ima quævis in Mathematicum amplissimo theatro attingere copia sit. Quod cū unus optime præstet ipsa antiquitate, per tot jam iteratas imperiorum mutationes, singulari

Dei

DE I PROVIDENTIA, clarus Euclides, in suis Elementis, quæ hæctenus ab alijs doctissimis Viris sine imperfectione; imò cum abundante perfectione edita sunt: à quorum tamen lectione vel cognitione caritas partim exemplarium, partim prolixitas, quæ ingeniosis tædium, tardioribus exiguum præstat commodum, multos deterrent; id inii consilium, ut, quantum possem, Elementorum tamen probè considerata natura & ingenio, ne vel necessaria deficerent, vel minus necessaria abundarēt, Euclideæ Elementa cum suis demonstrationibus integra, sed forma quadam contracta, præcioq; exiguo redimenda cederem. Ita enim effecturum me spero, ut calamitædio, & tot literarum in demonstrationibus iterandarum scriptione, devitato, intra paucas septimanas, solis ocularibus demonstrationibus crebrius repetitis, multa de Elementis hisce universos studiorum ordini summo opere necessarijs, cognoscantur, quæ aliàs totidem mē-sibus, & quod excurrit, vix perciperentur. Huic verò operæ meæ, ut Illustrissima ~~vestra~~ Celsitudo imprimis & maximè, se-

cundum DEum, favere, eamq; in tutelam
suam clementer suscipere velit, unice mi-
hi exoranda videtur: Quod quidem
non impetraturum me modo spero; sed
planè jam impetratum, futurumque esse
confido, ut Clementiam illam pristinam
erga me majora atque majora subinde in-
crementa sumsisse re ipsa experiar; & hoc
quasi stimulo incitatus, majori, si potero,
industria, hoc disciplinarum Mathematicarum
studium decurrere & cōficere por-
rò etiam enitar. Hoc quidem certè ha-
beo polliceri, si quid benedictione divina
carius; valetudine optima acceptius; i-
psoq; divino favore gratius; id omne, ut
pro Illustrissima Cels. vestra, & inclyta
Domo Saxonica precibus à Deo æterno
pijs impetretur, me vota cum alijs innu-
meris perpetuò conjuncturum. VVi-
tebergæ X. Calend. August,
ANNO M. D. CIX.

M. AMBROSIUM

RHODIUM, Nepotem ex
forore cariss.

CVM sic ingenium noctesq, diesq, fatiget,
Et sit magnarum nada MATHESIS opum
Esse aliquem res mira, sui qui prodigus, avum
In sterili, ut vulgus judicat, arte terat.
Verum animam ceu nemo suam videt: Haud secus, alter,
Gaudia qua capiat pectore, nemo videt.
Hic tabula insensus quarit, num pranderis! urbem.
Nen sentit, formans pulvere signa, capi.
Alter, jô reperi! geminat, nudusq, per urbem.
Evolat inventi. catum amore novi.
Nobile qui tandem effinxit diagramma, Camænia.
Offert, mactato pinguis sacra bove.
Eas modò sit Phœbi speciem sibi cernere, flamma.
Haud neget hic uri cum Phaëthonte pari.
Hoc igitur felici inaspectabile mentis
Delicium RHODI premia summa putas:
Dum vigil EUCLIDIS tractas ELEMENTA, beati
Ingenijq, penu divite promissus opes.
Præmia jam studij capis haud spernenda: sed olim
Majora à grata posteritate feres.

Johannes VVanckelius,
Hist. P. P.



In.

AMBROSII RHODII
Mathematici

Elementa Euclidea.

Hoc erat insignem Rhodijs spirare colossū,
Hoc dignum ambrosio nomine pignus
EUCLIDI lucere facem, lucere juventæ (erat
Recta Euclideas vadere scire vias.
En Rhodus, en saltus: hoc auspicio Harpocrateū
Posse timere senem Leucoris alma nequis.

Adamus Theod.

Adami F. Siberius.



A D

M. AMBROSII RHODII
Saxonem,

EUCLIDIS GEOMETRIAM
illustrantem.

Docti pulveris Hercules, an Hermes?
EUCLIDES, per & has Scholas & istas

Illustra

Idem scribitur manuq. lora.

Et haec sacramatheseos adaeque

Omnes scire putant. Sciuntne, RHODIA?

Tu scis, optime mystagoga, tu scis.

QUI tendit moderamen arripendi,

Non statim bonus agrimensor idem est.

Plus est esse Geometren: & hoc plus

EUCLIDEM simile. Nunc ut omnem

Euclidis Genium adsequantur omnes,

DEMONSTRATIO LINEALIS exstat.

Auctor RHODIUS est. Catum hoc alumnus

Alumen tibi gratulare, Saxo.

EUCLIDES tenebris opertus, et quid

Euclides mihi sit? profecto non est.

Quem nunc RHODIA lucubrat et ae

EUCLIDES tibi LUCULENTUS esto.

Frid. Taubmanus.



DE ELEMENTIS EUCLIDIS

PRÆFATIO.



QUOD in plerisque rebus usu venire solet, ut nullum simul opus & inceptum & perfectum sit, siue quod dies diem docet; siue quod oculi plus vident quam oculus; siue quod Deus ipse Sapientia sua semina in homines ita dispergit, ut accrementa in aliis magis iuvet & promoveat; idem cum in universa Philosophia, tum vel maxime in Mathematicis observare licet. Sicut enim in illa primitus tantum non infinita, eaq; absurdissima à varijs Sophistis disseminata erant opiniones, quas tandem Plato & Aristoteles melle feliciore omnes collegerunt, refectione, & rejectione, ingenij pariter & iudicii acie mira, tum absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & perfectum quoddam Philosophia corpus relinquere posteritati voluerunt: Ita etiam olim, cum maximo essent in precio studia mathematica; varia à varijs erant inventa theorematum & problematum, qua tandem nacta sunt Geometria acutissimum Euclidem, paulo post obitum quod vero simile videtur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis principijs collegit, elegantissimoq; disposuit ordine, & eruditione tanta contexuit, ut Aristarcho nulla indignisset, nisi communi quodam præstantissimorum virorum fato & ipse illo carere nequisset. Nam quod Euclides ædificium Sphaericum,

ricum, proportionē elegantissimā, mirabiliorum quin-
que Regularium inscriptione exornat, & multorum
jam seculorum etatem tulerat; id anatomia syn-
taxiq; nova, in Hortum quendam, unumquodq; suo con-
venienti loco reponens, ut velle videtur, permulavit. &c.
clufis multis ignorantia mirum in modum necentibus,
herbū. Quā Horti illius amonitatem labilem praterimus,
& cum magnis illis Geometriā, Archimede, Apollonio, Pap-
po, Sereno, Hypsiclē, Ptolemaeo, Copernico alijsq; innuere-
tis, edificij huius Euclidē commoditatibus fruimur, quod
nos contra omnis generis tempestates tueri potest, quovis
& anni & etatis tempore. Caterum ELEMENTO-
RUM hoc nomen jure sibi vendicat hic tractatus, quod
consideratio omnium, ad aliorum, per universam Ma-
thefin, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum, quā
in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio; sine quibus quā
impudenter aliquis adibit scientias mathematicas, tam
infeliciter easdem tractabit. Neq; ulla deest ipsi conditio-
num, quā in Elementis reperiri solet. Supervacuum enim
omne, tanquam impedimentum est sublatum; eliguntur
cuncta, quae propositum continent & concludunt; diluci-
datatē ac brevitatis cura habetur maxima, ne contraria
perturbent cogitationem: Deniq; etiam universalis
theorematum in terminis comprehensio suū hic lo-
cum invenit; nam quavis cognitio incomprehensibilis effi-
citur ijs, quae doctrinam in particularia frustra dissecant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides.
Cum Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in fi-
gurarum contemplatione, quae vel planae vel solidae sunt
Linearum enim, tanquam terminorum, non requirebatur
peculiaris

peculiaris consideratio : de planis quidem Libris sex prioribus ; de Solidis in tribus ultimis agere voluit. Caterum, ne imperfecta esset illa Stereometria, quam plurimum iuvat notitia linearum Commensurabilium & incommensurabilium, tribus illis præmisit decimum, in quo copiose de illis differit. Tandem neq; hæc quidem tractatio in se perfecta esse poterat absq; numerorum notitia ; ideoq; ipsorum quoq; affectiones tribus, decimum precedentibus libris demonstrare abundè voluit. Sunt itaq; veluti quatuor principalia Elementorum Euclidæcorum membra, quorum primum est Geometricum, quatuor quidem prioribus libris absolutam figurarum contemplationem absolvens, quinto proportionales magnitudinū in genere persequens ; sexto proportionales figurarum planarum inter se exponens. Secundum Arithmeticum, tribus libris, numerorum, quibus cum magnitudinibus, tanquam binis omnium quantitatum radicibus, magna intercedit communio & societas, demonstrans affectiones proposito sufficientes. Tertium quasi mixtum de lineis commensurabilibus & incommensurabilibus agit, quarum natura maximè in numeris evidens est, ususq; maximus & necessarius ad rectè percipiendas proportionales laterum in quaque corporibus regularibus, plerūq; incommensurabilium. Quartū Stereometricum scientiam tradit Solidorum, quæ præcipue corporum affectiones demonstrantur, in primis autem quinq; corporum regularium Sphæra inscribendorum constructio, & mutua proportio ; unde tandem elegantissimum illud Mathematicum ædificium constat, quod propositione ultima libri decimæ tertij absolvitur. Possunt quidè de Corporibus plura, eaq; iucundissima demonstrari, ut ex libris illis tribus decimum tertium sequentibus.

bus, qui Euclidis vulgò solent addi, perspicuum est, quibus
Doctissimus Clavius magnam operam, magnumq; laborem
impendit: Ceterum Euclidis tredecim nobis pro nostro in-
stituto sufficiant, quibus cognitù, qui sese rotos huic studio
sunt tradituri, non Campanum modò & Clavius; sed
quosvis alios nobiliores Geometras magno cum fructu le-
gent, intelligent. Ut autem quatuor operis Euclidis no-
stri posuimus membra; ita, singulis illis sua propria præ-
mittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium
mathematicarum longè accuratissimarum, certissima-
rumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; principio-
rũ tria genera: primum Definitiones seu Hypotheses, qui-
bus explicantur vocabula artis, ne qua nominum ambi-
guitate vel obscuritate circumventi, paralogismos incur-
ramus; & has unumquodq; illorum membrorum habes
peculiares. Deinde sunt axiomata seu postulata, quæ
adò sunt clara & perspicua in subjecta scientia, ut nulla in-
digeant confirmatione, sed nudum auditoris assensum re-
quirunt, ne in demonstrando ulla vel hesitatio vel difficul-
tas obortatur. Deniq; sunt Communes notiones, seu A-
xiomata & dignitates, quæ non in hac tantùm, sed in o-
mnibus aliis Scientiis ita sunt manifesta, ut nemo non ul-
trò assensum addat, qui tantùm vocabula intelligit. Ex
hiscè principiis constituuntur & demonstrantur duplices
propositiones; Problemata, in quibus ponitur aliquid, quod
nondum est, constituendum: & Theoremata, in quibus a-
liquid vel inesse vel non inesse constituta quantitati de-
monstratur. Differuntq; 1. sine; illorum enim est con-
structio, horum cognitio, quod etiam clausula distincta in-
dicare solemus; Quod erat faciendum, in illis; Quod e-
rat

1. At ostendendū, in his. 2. Vsu: illa enim Mechanicū, hac de-
 monstrationibus inserviunt. 3. Accidentibus, quæ in illis
 non sunt perpetua, nec perpetuò comitantur sua subiecta,
 quia viciosa potest esse constructio; in his verò semper sunt
 eadem. Ipsæ Demonstrationes sex absolvuntur partibus.
 Prima πρότασις est generalis propositio demonstrationis,
 quæ monet, quibus positis & concessis, quæ quasita sint de-
 monstranda. Hæc si theorema sit, habet duas partes, ὑπό-
 θέσις & πρότερον: Sin problema, διδούμενον, quod consti-
 tuit subiectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur;
 vel quomodocunq, queritur; & ἐπεὶ, quod ostendit,
 quid in subiecto sit demonstrandum. Secunda est ἰσχυρισ-
 expositio seu declaratio dati vel antecedentis, quæ datum
 seorsim repetit & explicat: Sicut tertia διαπίκνυσις quasi-
 sum; quam utramq, partem commodissimè exhibent li-
 bere contextui propositionum inserta, sed formæ distinctæ,
 citra ullam cursus propositionum confusionem. Quarta
 constructio κατασκευὴ seu delineatio, quæ preparat & ac-
 commodat ea, quæ ad demonstrationem accidentium dati
 requiruntur & necessaria sunt. Quinta, ἐκδοχή, præcipua
 ἀπόδειξις demonstratio, quæ per prima, nota & concessa,
 vel etiam antè demonstrata demonstrat id, quod de da-
 to ostendendum est. Et hæc progressum observat duplicem.
 Vel enim à principijs natura notis, ut sunt definitiones,
 postulata & axiomata, vel etiam antea demonstratis,
 quæ & ipsa ad principia possunt reduci, procedimus, quæ
 Methodus συνθετικὴ dicitur; vel procedimus à quasito &
 posteriore ad prius & principia, quæ vel est διαιρητικὴ τῶν ἀρ-
 χῶν & πρὸς ἀναλυτικὴ dicitur; vel ἀναλυτικὴ τῶν ἀρχῶν &
 ἀπὸ γὰρ τῶν ἀδύνατον dicitur. Sexta συμπέρασμα, quæ
 demon-

demonstrata ad propositionem refert, eamq, rectè demonstratam esse affirmat. Propositionibus cognatum est aliud, quæ in Geometricis est propositio indigens probatione, acciditq, tum constructioni, tum demonstrationi, hoc differens a principijs, quod hæc nulla indigent demonstratione; illud autem demonstrari cum possit, absq, demonstratione sumitur, ad aliorum faciendam fidem. Corollarium etiam theorema est, quod per se ex demonstrationibus propositionum sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione. Hæc tanquam necessaria ad plenioram cognitionem auctoris præmittenda mihi videbantur. Fragilissimæ itaq, hæc disciplinas, Geometriam & Arithmeticam, in hisce Elementis Euclidæis exornatas, (quam parùm *περί τε ἀριθμῶν καὶ μέτρων* facere censentur; ut & difficiles; sed illis, quæ vel antè pronunciant, quàm inspiciant: vel priùs abijciunt studium, quàm periculum fecerint:) si quis impensius coluerit, ipso experietur opere, plus habuisse in recessu, quàm magnifica minus fronte promiserunt: in primis autem, si non Magnitudinum & Numerorum hæc Philosophia, veritatis quendam amorem ingeneratum; at saltem divinitus innatum sibi confirmari & cōservari percipiet; sentietq, quàm notabili fruge vegetior sibi reddatur, luxurietvè toris animosi pectoris ardor. Opere verò etiam experietur ipso, si quarūvis rerum fuerint expedienda dimensiones, veluti longitudinum, latitudinum, planitiesum, agrorum, insularum; altitudines turrium, montium; cœlestia phaenomena per instrumenta accuratè observanda & examinanda; chronologia sciōterica delineāda; machinæ variæ extruēda, usur-

usurpanda; ponderum rationes exponenda; phenomena
ex illuminatione diversa specularum, picturarum aqua &
aeris excusanda; Deniq; siue speculationibus indulgere ve-
lit caelestibus, siue elementaribus qua aytouitento non se-
runt, quanto & incitante & adjuvento, addo et-
iam complemento hac elementa sua
futura.



EUCLI-

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M

L I B E R P R I M U S .

Definitions.

I.

Punctum est, cujus
pars nulla est, id est, pun-
ctum est quiddam indivi-
sibile, quod mente tan-
tum concipitur. *Non enim punctum
est quantitas, sed omnium quantitarum
continuarum principium, quae potentia
in infinitum sunt divisibiles. Illud au-
tem quod creta pingitur punctum, Phy-
sicum, non mathematicum est, quippe
non omni carens latitudine, quo interim
facilioris doctrinae gratia utimur.*

A

2. Linea

2. Linea est longitudo latitudinis expers, seu, ut Gellius loquitur, Longitudo illatabilis. *Hac prima species est quantitatum continuarum duntaxat longa.*

3. Termini linearum sunt puncta actu quidem in linea recta terminata; in peripheria circuli potentia.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta, id est, in qua nihil flexuosum reperitur. *Archimedes brevissimam esse dicit earum, quæ eosdem habent terminos: vel est brevissima à puncto ad punctum extensio.*

5. Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantum habet. *Hac secunda magnitudinum species est, quæ præter dimensionem, quam secundum longum communem habet cum linea, etiam secundum latitudinem mensurabilis est; omni tamen mensura in profundum destituta.*

6. Super

6. Superficie extremæ sunt lineæ. Sic trilatæ figura tribus, quadrilatæ quatuor, multilatæ multis terminantur lineis; Circulus una.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas. Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima & brevissima.

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alterum inclinatio. Iacentes enim in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protractæ & sic angulos non efficiunt.

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-



inceptis, angulos aec , eed b æquales inter se fecerit; rectus est uterque angulorum: & quæ insistit,

nea ee , perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

11. Angulus obtusus est aed , qui recto maior est;

12. Angulus autem acutus bed , qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus extremum est. Sic puncta linearum, lineæ superficierum; superficies corporum sunt termini. Corpora verò, quia ab alia quantitate nulla dimensione superantur, nullius etiam termini esse possunt.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur. Ita videlicet, ut circumquaque illis terminis claudatur.

15. Circulus est figura plana, sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ linæ inter se sunt æquales.

16. Hoc

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in peripheriam terminata, quæ circulū bifariam secat, & totum planum contentum peripheria, & ipsam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro & sub ea linea, quæ de circuli peripheria auferitur, *id est, semiperipheria.*

19. Figuræ rectilineæ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *Ideoq; curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtis lineis continentur.*

20. Trilateræ quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria

latera habet æqualia. *Duplicem habet divisionem triangulorum, alteram ex lateribus, alteram ex angulis.*

24. Isoscèles est, quod duo tantum æqualia habet latera ; *tertio vel maiore vel minore.*

25. Scalenum est , quod tria inæqualia habet latera.

26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum , rectangulum , quidem est triangulum quod rectum habet angulum : *sive illud sit Isosceles sive scalenum.*

27. Amblygonium , quod obtusum habet angulum ; *itidem vel isosceles vel scalenum.*

28. Oxygonium , quod tres habet acutos angulos. *Estq, vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum.*

29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est , quod & æquilaterum est, & æquiangulum.

30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. Habet enim tantum duo opposita latera equalia. Alij oblongum: alij rectangulum vertunt.

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est. Sunt enim bini tantum oppositi anguli æquales.

32. Rhomboides, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula. Opposita est quadrato omni ex parte.

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur. Vocantur irregulares, quoniam infinitis possunt variari modis. Estque Trapezium aliud Isosceles, quod duo latera opposita parallela, duo verò equalia: aliud scalenum, quod duo tantum opposita parallela habet. Trapezoiles, quod neque parallela, neque equalia habet latera.

34. Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex u-

traque parte in infinitum producuntur, in neutra sibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia. *Vt sunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*

36. Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non transit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur. *Vide proposition. 43.*

PETITIONES, SIVE *postulata.*

1. Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.
3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES
sive Axiomata, quæ & Pronunciata
dici solent & dignitates.

1. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.

2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.

4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si æqualibus inæqualia sint adjecta, majori

A 5 majus,

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. *Idem intelligendum est de triplo & quadruplo, & ceteris.*

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. *Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia vel quarta, &c. inter se sunt æquales.*

8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. *Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem speciei,*

dei, quatum una superposita alteri, nen-
ta alteram excedit. Sic linea linea
congruens, eidem equalis est, non au-
tem applicari dicitur linea superficiei.
Neque tamen confundenda est ista quo-
vis hac mathematica, cum applicatione
Mechanica vel Physica.

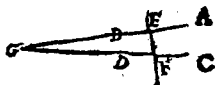
9. Totum sua parte majus est. *Ali-*
às ablata parte tolleretur totum.

10. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. *Quia latera sine inclinatione ulla sibi perpendiculariter insistant.*

ii. Si in duas rectas ab, cd , altera recta linea ef incidens, internos, ad easdem partes, angu-

los *bef*, *dfe*, duobus
rectis minores faci-
at; duæ illæ rectæ li-

neæ in infinitum productæ, sibi mu-
tuò incident in g . ad eas partes, ubi
sunt anguli, duobus rectis mino-
res.



12. Du22:

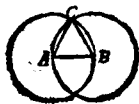
12. Duæ rectæ lineæ spacium non comprehendunt. Si enim coëant in uno puncto ad efficiendum angulum, ex altera parte necessario magis ac magis disjungentur. Ad minimum ergo requiruntur lineæ tres rectæ ad simplicissimam figuram rectilineam constituendam.

PROPOSITIO I.

Problema 1.

Super data recta ab terminata, Triangulum æquilaterum abc construere.

Intervallo ab ex a & b describantur duo circuli, quorum intersectio c connectatur cum a & b . Quoniam igitur eidem ab ρ æquales sunt bc & ac , erunt etiam inter



¶ 1. Postul.
¶ 5. def: 1.
¶ 1. axiom.

se γ æquales, & triangulum abc æquilaterum. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

Ad datum punctum b , datæ rectæ lineæ a , æqualem rectam bd ponere.

Inter-

Intervallo a linea a describa-
tur centro b circulus $c d$. Cum ergo
ipsi $b c$ sint a quales $\beta b d$ & γa .
Proinde ad punctū b posita $\beta b d$, e-
rit etiam ipsi $a d$ a qualis, Quod erat
faciendum.



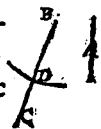
α Postul.
 β 15. def. 1.
 γ ex hyp:
 δ 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæquali-
bus; de maiore $c b$, minori
 a a qualem rectam $d b$, ab-
scindere.

Centro b intervallo a a secetur c
 b in d , & erit $d b$ β a qualis ipsi a .



α 2. I.
 β 15. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

Si duo Triangula $b c d$, $d e f$, duo
latera $b c$, $e d$, duobus lateribus $b d$,
 $e f$ a qualia habeant, utrumq; utriq;
habeant verò & angulum $c b d$, an-
gulo $d e f$ a qualem, sub a qualibus
rectis lineis contentum: & basin $c d$
basin $d f$, a qualem habebunt; eritque
Trian-

Triangulum cbd Triangulo def æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

3. l.

Si basis cd est major, quàm basis df , & auferatur ex cd , cg æqualis ipsi df , & ducatur bg . Si jam bc , bg sunt æquales ipsis ed , ef , & basis cg , basi df ; non

9. axio.



erit tamen angulus $c b g$ angulo e æqualis, defectu anguli $g b d$. Quod est contra hypothesein. Ideoque si

8. axio.

tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquis etiam congruere, & totum toti æquale esse necessum est. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V.

Theorema 2.

Isoſcelium Triangulorum abc , quia ad basin sunt anguli abc & acb , inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis ab , ac lineis, quibus sub basi sunt anguli dbc & ecb , inter se sunt æquales.

Lateribus

Lateribus ab, ac equalibus, equaliter extensis in d & e , ducantur cd, be . Quoniam ergo in Triangulis dac & eab dantur duo latera, ad, ac equalia duobus lateribus ae & ab , & angulus a utriq³ communis; erit etiam basis be basis d equalis, & angulus d , angulo e , & angulus abe angulo acd .



Rursus in Triangulis bdc & ceb equalium laterum ce & bd , be & cd , & angulorum d ipsi e : erunt etiam anguli ecb, dbc sub basi^a ae $equales$, sunt & ebc & $dc b$ $equales$, quibus ablatis ab equalibus abe & acd , relinquentur acb & abc anguli ad basin ae $equales$. Idem quoque de Triangulis $equilateralis$ verum est. Vnde sequitur Triangula $equilatera$ etiam esse $equiangula$. a 4. l. p 3. ax.

PROPOSITIO VI.

Theorema 3.

Si Trianguli abc duo anguli b, c , $equales$ inter se fuerint, etiam sub $equalibus$ angulis subtensa latera ab & ac $equalia$ inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, angulis b, c $equalibus$ $equalia$ opponi latera ab, ac ; dicat ab esse longius ac , cui $equale$ sit db ex ab $abscessum$. Ducta linea dc ; a ex hyp. p 3. l. e

ex dato.

4. l.

9. ax.

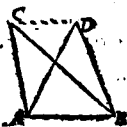


dc: in Triangulis acb & dbc propter latera equalia, ac ipsi d**b** & bc commune; angulumq; b angulo c aequalem: necessario etiam bases dc, ab erunt & aequales, & totum Triangulum acb, toti dcb, pars toti, quod est impossibile.

PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta ab duabus eisdem rectis ac, bc alia duæ rectæ ad, bd æquales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, supra vel infra, eodemq; terminos a & b, cum duabus ac, bc initio ductis habentes.



ex hyp.

5. l.

9. ax.

Constituantur, si potest, ad aliud punctum d alia duæ rectæ prioribus æquales ad ipsi ac & b d ipsi bc, & cōnectantur puncta d c. Erunt Triangulorum a Isoscelium acd & bdc æquales anguli ad basin acd ipsi, ada, & bdc ipsi bcd. Vnde fit, ut, quia acd æqualis est partiali adc, quo major totalis bdc æqualis est partiali bcd, totus acd fiat partiali bcd minor. Quod & absurdum.

PRO-

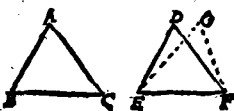
PROPOSITIO IIX.

Theorema 5.

Si duo Triangula abc, def , duo latera ab, ac , duobus lateribus de, df , utrumque utrique æqualia; habuerint verò & basin bc basi ef æqualem; angulum quoque a sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo d æqualem habebunt.

Convertit primam partem propositionis 4.

Quando latera singula singulis, basiꝝ, basis applicata conveniunt, convenire etiam totum



æ 8. axiom.

Triangulum toti oportet & angulum a , angulo d .

Nisi enim a cadat in d , sed in g , super eadem linea $e f$, duabus eisdem rectis de, df , alie duæ rectæ æquales eg, gf utrꝫ, utrꝫ, ad eandem partem, eosdemq; terminos constituentur. Quod est β impossibile.

β 7. l.

PROPOSITIO IX.

Problema 4.

Datum angulum bac rectilinum b fariam secare.

Ex ab abscindatur ad , pro libitu assumpta ac æqualis; atq; ad ductam lineam dc β ponatur

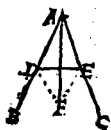
æ 3. l.
 β 1. l.

B

tur

γ ex constr.

δ 8. 1.



tur Triangulum equilaterum, vel etiam Iſoſceles dfe , & connectantur af . Erunt in Triangulis daf & caf γ equalium laterum ad ipsi ac , & af communi, & basiſe df, ef ; anguli daf & caf δ equales, ſectusq; β angulus a in duos equales angulos. Sed in praxi ſufficit in utraque parte punctum ſupremum f per occultam interſectionem arcuum notaſſe.

PROPOSITIO X.

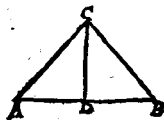
Problema 5.

Datam rectam finitam ab , bifariam ſecare.

α 1. 1.

β 9. 1.

γ ex constr.



Super data recta ab α conſtituti trianguli abc angulum c β biſecans linea cd , biſecat & ab lineam datam in d . Quia enim in triangulis acd & bcd , γ equalia ſunt latera ac & bc , cd vero commune, & anguli comprehenſi c β equales; erunt & baſes ad & db δ equales; & recta ab in d biſariam ſecta.

δ 4. 1.

PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Datae

Data recta ab , à puncto c in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c impositus circinus utringq, transferat æquales partes cd , ce , ac super tota de consti-

tuitur Triangulum vel

equilaterum vel Isosceles

def , ducaturq, fc .

Iterum propter latera cd ,

ce æqualia & cf com-

mune; & bases df , ef æquales, & æquales sunt anguli ad c contigui, id est, recti, & fc perpendicularis ex puncto c erecta.



1. l.

ex constr.

8. l.

10. def. l.

PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam ab , à dato puncto c , quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c arcus circuli interfecet ab in d & e

& de dividatur bisariam in f , erit fc perpen-

dicularis: uterque enim ad f

coniguus est, & æqualis seu rectus.

propter latera fd , fe æqualia

& fc commune, propterq, ba-

ses dc , ce æquales.



10. l.

10. def. l.

3. l.

15. def. l.

PROPOSITIO XIII.

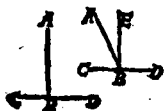
Theorema 6.

Utut recta ab super rectam cd consistens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

10. def. 1.

11. 1.

8. ax.



In perpendiculariter insistentibus, eb nimirum ipsi cd res est manifesta. Sed si ab non sit perpendicularis, ex puncto b erecta perpendiculari be , videmus angulos abc & abd simul sumtos tantundem occupare spacij, quantum duo recti ebc & ebd atq; mutuo congruere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam ab atque ad punctum c in ea, duæ rectæ cd & ce non ad easdem partes ductæ d vel e , eos qui sunt deinceps angulos acd , ace , duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ: rectæ lineæ cd , ce , seu recta una.

13. 1.



Si dce non est recta una, esto def. In hanc ergo rectam incidens recta ac , faciet duos angulos duobus rectis æquales acd

& a c f. Erant autem & a c d & a c e β *equales* β ex hypot: duobus rectis. Ablato itaq; communi a c d, & *aqua-* γ 3. axiom. *les relinquentur* a c f, a c e minor majori, vel pars toti. Quod absurdum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Si duæ rectæ a b & c d se invicem secuerint, angulos ad verticem: inter se æquales efficient.

Sunt enim a e c & a e d duobus rectis = *equales*. Sunt item a e d & d e b duobus rectis *equales*. Ablato ergo communi a e d, β *relinquentur* a e c & d e b *equales*, anguli ad verticem.



a 13. l.

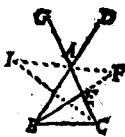
 β 3. axiom.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli a b c uno latere b a producto externus angulus d a c utroq; interno, tam a c b, quàm a b c, & opposito major est.

a Dividatur a c bisariam in e; & ducta recta, b e β continetur *a-* *qualis usq;* in f; conjungaturq; a f. Iam in Triangulis c e b & a e f la- *tera* a e & e c, e b & e f sunt *a-* *qualia*; δ anguliq; a e f & b e c.



a 10. l.

 β 3. l. γ ex constr. δ 15. l.

14. l.

B 3

Ergo

14.1.

Ergo & totum triangulum toti erit: aequale, & angulus $e c b$ ipse $e a f$, quo tanquam parte externus totus $c a d$ est major.

Ita pro angulo $a b c$ dividatur latus $a b$ bifariam, & recta ch in continuum abscindatur β equalis $h i$, connectaturq; $i a$. Rursum in Triangulis $ch b$ & $a h i$ & equalia sunt latera $a h$ & $h b$, $h c$ & $h i$, & angulique $ch b$ & $a h i$. Totum ergo triangulum toti est: aequale, & angulus $i a h$ ipse $h b c$, cui equalium duorum ad verticem alter $d a f$ tanquam pars minor est toto externo $c a d$.

PROPOSITIO XVII.

Theorema IO.

Omnis Trianguli $a b c$ duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.

a 16.1.

 β 4. axio. γ 13.1.

Pro ducto latere $c b$, angulus externus $a b d$ major est interno opposito $a c b$. Si utrique jungatur angulus communis $a b c$, β majores erunt $a b c$, $a b d$ ceu duobus rectis & equales, quàm interni duo $a b c$ & $a c b$. Itaq; minores sunt duobus rectis.

PRO-

PROPOS: XIIX.

Theorema 11.

Omnis trianguli abc majus latus ac majorem angulum $a b c$ subtendit.

a Abscindatur ex $a c$ ipsi $a b$ equalis ad & *a* 3. l.
 ducatur $b d$. In triangulo β Isosceli ergo β ex conste.
 bad , anguli abd & adb *a* 5. l.
 sunt & *a* 16. l.
 equales. Sed hic tanquam externus d major est interno opposito $b c d$. Ergo ex abd . Ejus autem $a b c$ multo erit major. Idem demonstratur eodem modo de altero angulo a .



PROPOS: XIX.

Theorema 12.

Omnis trianguli abc major angulus b majori lateri ac subtenditur.

Sin minus, esset latus ac vel aequale lateri ab ,
 & sic anguli c & b essent *a* *a* equales contra datum: *a* 5. l.
 aut minus, atque sic oporteret $a c$ *a* *a* ex hyp.
 tanquam latus minus β majorem *a* 18. l.
 angulum b subtendere, latusq;
 majus $a b$. minorem c . Quod &
 absurdum.



EVCLIDIS ELEMENTA PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omnis trianguli abc duo latera ab, ac , reliquo bc sunt majora, quomodocunque sumta.



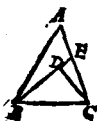
Est enim bc inter b & c omnium a brevissima.

α 4. def. 1.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si super trianguli abc uno latere bc , ab extremitatibus, duæ rectæ bd, cd , interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus ba, ca minores quidem erunt, majorem verò angulum d continebunt.



Producto latere bd in e , in triangulo bae , latera ba, ae simul a majora sunt tertio be , additoq; ec communi, ba, ac β majora erunt be, ec simul sumtis: a ita &

ce, ed quàm dc , sic bd, dc simul β minores ipsi be, ec : Ideoq; ϵ minores sunt majoribus ba, ac . Sic tanquam externus d angulus γ major est angulo e interno opposito; & hic itidem tanquam externus interno a : itaq; ϵ d major est ipso a .

PRO.

α 20. l.

β 4. axiom.

γ 16. l.

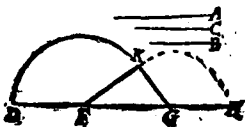
PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis fg, fk, kg , quæ sunt datis tribus, abc , æquales, triangulum $fk g$ constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumtas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera quomodocunq; sumta reliquo sunt majora.

Datæ æquali fg utrinque apponantur in directum fd & gh æquales ipsis b & c , & illarum intervallo descriptorum circularum intersectio k cum g & f connexa,

exhibet triangulum $fk g$, cujus latera datis tribus rectis sunt æqualia. In



maxi sufficit tantum ad tertia linea extremitates & ex const. & 15. def. 1. intervallo reliquarum duarum intersectionem notare, eamque cum illis extremitatibus copulasse per rectas.

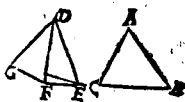
PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , datumque in ea punctum c , dato angulo recti-

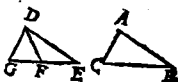
B 5 lineo

egf, anguli ad basin dgt & dfg erunt δ æquales: Quo angulo d g f cum minor sit, egf, angulo autē dfg maior efg, utique minori e g f minus latus ef, & majori efg majus latus eg subtendetur, id est, huic æqualis bc basis major erit basi ef. Si in ipsam, necessariò eg γ æ-

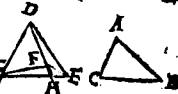


δ 5. 1.

qualis ipsi bc, ζ major est basi ef. Denique si infra; productis pf in h, & dg in i, ductaq; eg: ζ s. axio. erit rursus eg basis γ æqualis basi bc; angulus item hfg δ æqualis angulo fgi, quo sanè ζ minor est egf, adeoq; & angulo efg. Ideoq; angulo efg adhuc majori majus latus eb subtendetur quod æquale est ipsi bc, quàm angulo egf, quod est ef. Sic patet propositum.



δ 19. 1.



PROPOS. XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula *abc*, *def*, duo latera *ab*, *ac*, duobus lateribus *de*, *df* æqualia habuerint, utrumq; utrique: basin vero *bc* basi *ef* majorem, & angulum *a* sub æqualibus rectis contentum, angulo *d* majorem habebant.

Sic



Sin minus, erit vel æqualis, atque sic contra hypothesin etiam bases bc , ef erunt æquales: vel major

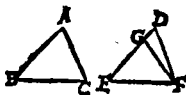
*æ 4. l.
ß 24. l.*

d ipso a, atque sic basis ef basi bc contra hypothesin ß major. Erit itaq; a major quàm d.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triangula abc , def , duos angulos b , c , duobus angulis e , dfe æquales habuerint, utrumq; utriq; : unumq; latus unilateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis bc , ef seu quod uni æqualium angulorum subtenditur : ac & df & reliqua latera reliquis æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum a , reliquo d æqualem habebunt.



Nisi ergo ab & de sint æqualia, fiat ge æquale ipsi ab , ducaturq; gf . Iam cum ab , bc æquantur ipsis ge ,

æ ex hypot. æ 4. l.

γ 1. axiom.

δ 9. axiom.

ef , anguliq; b & e sint æquales, ß erunt & anguli æqualibus lateribus oppositi æquales. c & efg . Cui c quoniam etiam æqualis est dfe , γ erunt dfe totus & gfe partialis æquales, quod δ absurdum.

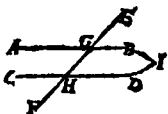
PRO.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 18.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, alternatim agh & ghd , angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.

Si non sunt, æ concurrent productæ in i : eritque ghi triangulum, cuius latere gi producto in a , angulus externus agh , β major sit interno opposito ghi ; cui tamen ex hypothesis æqualis erat. Sunt ergo parallelæ.



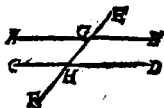
α 34. def. 1.
 β 16. 1.

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, externum age angulum, interno & opposito, chg , & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos agh & ghc & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.

Eidem enim age æquales sunt αhgb & βchg ; hi ergo tanquam alterni inter se æquales, δ parallelas arguunt ab & cd . Deinde



α 15. 1.
 β ex hypot.
 γ 1. axiom.
 δ 17. 1.

cum

e 13. l.

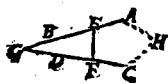
e 3. axio.

cum $\beta a g h$, & $c h g$: itemq³, $a g h$ & $h g b$ duobus rectis sint æquales; erunt, ablato communi $a g h$, anguli reliqui $h g b$ & $c h g$ alterni & æquales: ideoq³, rectæ parallelæ.

L E M M A.

Si in duas rectas $a b$ & $c d$, recta $e f$ incidens, internos & ad easdem partes angulos $b e f$ & $d f e$ duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere



in h , ubi non sunt duobus rectis minores sed majores, fierent in triangulo $e h f$ duo illi anguli duobus rectis majores. Quod = absurdum.

e 17. l.

PROPOS: XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas $a b$, $c d$, recta $e f$ incidens, & alternatim angulos æquales efficit $a g h$, $g h d$; & externum $b g e$ interno & opposito $d h g$, & ad easdem partes æqualem; & internos $b g h$, $g h d$ ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

Si

Si quis alternos negaverit aequales, alter ag h
 esto major altero g h d. His inaequalibus additus
 communis b g h, cum contiguo quidem h g a duo-
 bus rectis α aquantur; sed
 cum g h d duobus rectis e-
 runt β minores, id est duo
 interni, & ita a b, c d non
 erunt parallelae contra
 hypothesin. Quoniam igitur alternorum aequali-
 tas uni a g h δ aequalis e g b, erit etiam hic exter-
 nus interno ad easdem partes opposito aequalis. De-
 niq; cum internus b g h cum externo e g b duobus
 rectis sint α aequales, cum eodem b g h alter inter-
 nus g h d duobus rectis δ aequales erunt. Patet ergo
 propositum.

 α 13. I. β 4. axiom. γ 11. ax. δ 15. I. δ 1. ax.

PROPOS: XXX.

Problema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ e f sunt
 parallelæ a b, c d, & inter se sunt pa-
 rallelæ.

Recta g h secet illas parallelas in i k l. Iam
 in a b, e f parallelas incidens g h, facit alternos
 a i h & i l f α aequales. α 1.
 Itemque externum i k d in-
 terno opposito k l f, vel i l f; β
 Erunt ergo & a i k & i k d
 alterni aequales, rectæq; a b
 & c d γ parallelae.

 α 29. I. β 1. ax. γ 27. I.

PRO.

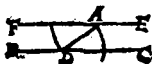
EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXI.

Problema 10.

Per datum punctum a , datæ rectæ bc , parallelam rectam ef ducere.

α 23. l.
 β 27. l.

Ducta ad , fiat angulo adc equalis daf alternus, continueturq; f a in e . β Erunt illæ propter alternos æquales parallelæ.



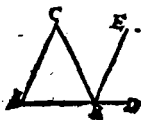
PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Omnis trianguli acb , uno latere ab producto in d ; externus angulus cbd duobus internis oppositis a & c est æqualis: & trianguli tres anguli, duobus rectis sunt æquales.

α 31. l.
 β 29. l.

Lateri ac agatur per punctum b parallela be . In duas ergo has parallelas ac & bc incidens cb , efficit alternos cbe & $c\beta$ æquales; ad verò linea externum cbd interno opposito a . Sic totus externus internis duobus oppositis æqualis est. Quibus si addatur tertius internus cba communis, erunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales.



γ 13. l.

PRO-

PROPOS: XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ $a c, d b$, quæ æquales
 $a b, c d$ ad partes easdem conjungunt,
 & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Ducta ad efficit alternos $b a d, a d c$ æqua- 29. l.
 les, comprehensos duorum triangulorū & æqualibus ex hypoten
 lateribus $a b$ ipsi $c d$ & $a d$
 communi. Bases itaque $a c$
 & $b d$ seu rectæ æquales pa-
 rallelas connectentes sunt & æquales: & anguli
 $c a d, a d b$ æquales: qui alterni etiam paralle- d 27. l.
 las easdem $a c$ & $b d$ ostendunt.

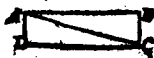


PROPOS: XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spacio-
 rum $a b c d$; æqualia sunt inter se, quæ
 ex aduerso & latera & anguli; atque
 illa bifariam secatur diameter $a c$.

Ducta diameter $a c$ facit alternos $a c d$ & $c a b$;
 $c a d$ & $a c b$ æquales, quos angulos æquales 29. l.
 cōmunis interjacens basis $a c$ Triangulorū $a b c$ &
 $a d c$, reliqua latera reliquis
 seu opposita efficit æqualia,
 & reliquos angulos b, d op-
 positos, sicut & ex æqualibus compositi a & c & a - 2. axiom.
 & c æquales



24. 1.

quales sunt; & tota triangula abc & adc sunt
 & equalia, sectum nimirum est bisariam paral-
 logrammum per diametrum.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma $cdea$, $cdbf$,
 super eadem basi cd , & in eisdem pa-
 rallelis ab , cd constituta, inter se
 sunt æqualia.

a 34. 1.

β 1. ax.

γ 2. ax.

δ ex hyp.

ε 29. 1.

ζ 4. 1.

η 3. axio.

Eidem cd æquales ac & fb inter se sunt
 & æquales, quibus eadem c & f , addita γ æquales fa-
 cit af & eb . tam triangula fac & bed & æ-



qualium laterum af & eb , ac &
 ed , & angulorum ipsis compre-
 hensorum caf , deb erant & æqua-
 lia, à quibus ablatum commune triangulum cgd ,
 relinquit trapezia $aegc$, $bfgd$ æqualia, qui-
 bus commune additum triangulum cgd , paral-
 logramma $cdea$ & $cdbf$ super eadem basi in
 iisdem parallelis ostendit, æqualia.

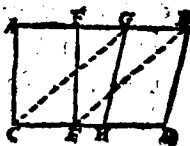
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 26.

Parallelogramma $acef$, $gbdb$,
 super æqualibus basibus ce , bd , & in
 eisdem

eisdem parallelis ab, cd constituta, inter se sunt æqualia.

Coniunctis gc, be fi-
unt parallelogramma data
eidem $ceb g$, ideoque &
inter se æqualia.



æ 35. l.
p 1. axio.

PROPOS: XXXII.

Theorema 27.

Triangula abc, dbc super eadem
basi bc , & in eisdem parallelis bc, ad ,
inter se sunt æqualia.

Per puncta b & c a ducantur parallela be ,
 cf ipsi ca, bd , quæ concurrant cum ad utrinq;
producta. Sunt ergo super
eadem basi bc in iisdem
parallelis constituta pa-
rallelogramma $bcae$, b
 $cf d$ æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia trian-
gula data γ æqualia.



æ 35. l.
p 34. l.

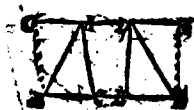
PROPOS: XXXIIX.

Theorema 28.

Triangula bac, edf , super æqua-
libus basibus bc, ef constituta, & in
eisdem parallelis, inter se sunt æqua-
lia.

31. l.

Iterum per puncta b, f ducta parallela bg .
 In ipsis ca, ed ; & utring, continuata ad sunt



parallelogrammum cg &
 eh super equalibus basibus
 β equalia, & proinde i-
 psorum γ dimidia seu data
 duo triangula d equalia.

36. l.

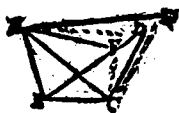
34. l.

6. axiom.

P POS: XXXIX.

Theorema 29.

Triangula abc, dbc æqualia su-
 per eadem basi bc , & ad easdem par-
 tes constituta, in eisdem quoq; sunt
 parallelis bc, ad .



Sin minus, fiat $a f$
 parallela ipsi bc & ducatur
 fc . Erunt Triangula
 eidem bac equalia Tri-

31. l.

37. l.

ex hypot.

9. axiom.

angula βbfc parziale & γbdc totale. Quod
 d absurdum.

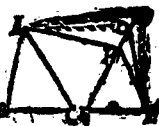
PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Triangula abc, def æqualia su-
 per æqualibus basibus bc, ef , & ad
 easdem partes constituta, in eisdem
 quoque sunt parallelis ad, bf .

Sin

Si minus, a fiat ah
 parallela ipsi bf & ducatur hf . Iterum eidem triangulo bac equalia erunt triangula $\beta e hf$ partiale & γed totale. Quod absurdum.



a 31. l.
 β 38. l.
 γ ex hyp.
 d 9. axiom.

PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum $a c d e$ cum triangulo $b c d$ eandem basin $c d$ habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis ab, cd ; duplum erit parallelogrammum trianguli.

Ducatur diagonus ad .

Erit Trianguli $a c d = a$.

qualis Triangulo $c b d \beta$

duplu parallelogrammum

$a c d e$. Ideoq; & ipse $c b d \gamma$ duplum erit.



a 37. l.
 β 34. l.
 γ 6. axiom.

Corollarium.

Si Triangulum $b c f$ duplam habuerit basin $c f$, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo $a c d e$, erit triangulum parallelogrammo aequale.

Ducta enim bd , ejusdem trianguli $b c d$ dupla



ϵ 3

sunt,

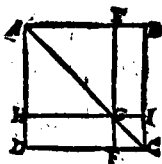
hec duplasunt triangulum bef & parallelogrammum abcd, etiam inter se sunt æqualia. p 38. l. γ 41. l. δ 6. axiom.

PROPOS: XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo *abcd*, Complementa *dfgh*, *begi*, eorum quæ circa diametrum *ac* sunt, parallelogrammorum *aegh*, *cfgi*, sunt inter se æqualia.

Ab æqualibus triangulis ad c, abc, ablatis triangulis æqualibus ahg, aeg, relinquuntur Trapezia hgcd, egcb æqualia; à quibus iterum sublati æqualibus triangulis gfc, gic, relinquuntur complementa duo gb & gd æqualia.



p 34. l.

p 3. ax.

PROPOS: XLIV.

Problema 12.

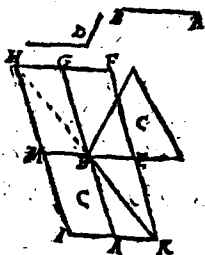
Ad datam rectam *ab*, dato triangulo *c*, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo *d*.

*c**Fiat*

42. 1.

¶ Fiat triangulo c æquale parallelogrammum $ebfg$. habens angulum e bg æqualem angulo dato d ; producaturq; gb in a , ut ab sit data a b æqualis; ac per punctum a ipsi eb β agatur paral-

31. 1.



lela, qua cum linea fe producta concurrir in puncto k . Per hoc $\&$ punctum b ducitur diagonus concurrens in puncto h cum gf producta: per quod ipsi ag β ducitur parallela hl , ac idemq; eb continuatur in m . Quia .n. eidem parallelogrammo geb f æqualia

43. 1.

42. 1.

1. axiom.

sunt, γ triangulum c $\&$ δ parallelogrammum ab in l , erit parallelogrammum ab in l ad datam lineam a b in angulo rectilineo d triangulo dato: æquale constitutum.

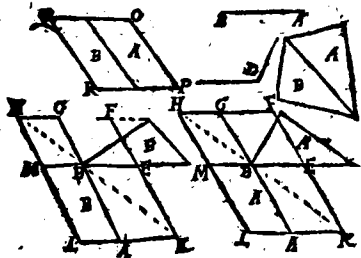
PROPOSITIO XLV.

Problema 13.

Ad datam rectam lineam a b , dato rectilineo b , a , æquale parallelogrammum $opqr$ constituere, in dato angulo rectilineo d .

44. 1.

Resoluto rectilineo dato in sua triangula, a , b α construantur triangulis singulis æqualia parallelogramma a $\&$ b , qua deinde in linea pr iuxta æquales



equales suas altitudines conjungantur. & Brit p. 9. axiom.
totum hoc parallelogrammum toti rectilineo dato
equale, cum singula partes respondeant singulis.

PROPOS: XLVI.

Problema 14.

A data recta linea ab , quadra-
tum $abcd$ describere.

Ex alterutro termino a lineae datae erige- a 11. l.
tur perpendicularis ad equalis lineae datae & per d
agatur linea ab parallela & equalis dc , jun- p 31. l.
ganturq; c & b . & Aequales & parallelas, ab , & ex constr.
 dc , connectentes da & cb orunt. d 33. l.
& aequales, & parallelogrammum o 1. axio.
factum: equilaterum; & propter q 34. l.
angulos c, b , oppositos rectis $a d$ & a 26. def. l.
rectos, rectangulum: idemq; qua-
dratum.



C 5

PRO.

PROPOS: XLVII

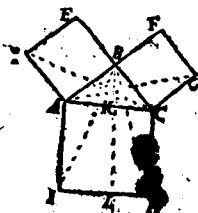
Theorema 33.

In rectangulis triangulis $a b c$, quadratum, quod à latere a erectum angulum $a b c$ subtendente describitur; æquale est quadratis $a b e d$, $b e g f$, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

a 45. L.
 β 14. L.
 γ 31. L.

a Descriptis tribus quadratis $a h$, $a e$, $c f$, in directum β jacent linea $a b$, $b f$ & $c b$, $b e$; & ducta q^{ue} $b i$ parallela ipsi $a i$, ducantur etiam $b h$, $b i$, $a g$, $c d$.

δ 2. ax.
 ϵ 4. l.
 ζ 41. l.
 η 6. ax.



Addito communi angulo $b a c$ ad rectos $d a b$ & $i a c$ punct d æquales anguli $i a b$, $d a c$, & ipsæque triangula $d a c$, $i a b$, eorumque ζ duplicata parallelogramma $a c$ & $a l$ æqualia; eodemque modo $c f$ & $c l$ demonstrantur æqualia: Erunt ergo quadrata $a e$, $c f$, quadrato $a h$, quod ex parallelogrammis $a l$ & $c l$ componitur æqualia.

PROPOS: XLIIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno latere a et trianguli $a b c$ descriptum aequale sit eis, quæ à reliquis $a b, b c$ trianguli lateribus describuntur quadratis: angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus rectus est.

Erigatur ex b linea $a b$ perpendiculari $b d$ aequalis ipsi $b c$ & connectantur $a d$. Quoniam Quadrata $a a d$ & $p a$ & $a b d$ aequalia quadratis $a b, b d$ itemq; $a b, b c$ erunt etiam inter se, & aequalia: & sic in triangulis aequalium laterum $a b c$ & $a b d$ etiam anguli $a b c$ & $a b d$ æquales erunt: quorum uno $a b d$ existente recto, etiam alter $a b c$ rectus erit.



a 47. l.
 β ex hyp.
 γ 1. ax.
 δ 8. l.

EUCLI-



EUCCLIDIS

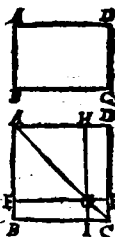
ELEMENTORUM

LIBER II.

Definitiones.

I.

QUone parallelogram-
mum rectangulum *abcd*
contineri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, *ab, ad*
quæ rectum comprehen-
dunt angulum *b ad*.



2. In omni parallelo-
grammo spacio *abcd* u-
nūquodlibet *ag* vel *gc* co-
rum, quæ circa diametrū
sunt parallelogrammorum,
cum duobus complementis *bg & gd*
Gnomon vocetur.

PRO-

LIBER II.
PROPOSITIO I.

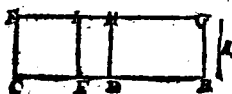
45

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & $b c$,
secteturq; ipsarum altera $b c$ in quot-
cunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectā-
gulum $b f$ comprehensum sub illis
duabus rectis lineis a & $b c$ æquale est
his, quæ sub infecta $a d b g$, & quoli-
bet segmentorum $b d, d e, e c$ com-
prehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$
ip[s]i a æqualis, compleaturque rectangulum $b f$
comprehensum sub $b c$ & $d g$. Rursus etiam ex

punctis sectionum d &
 e erigantur perpen-
diculares $d h$ & $e i$ æ
quales & parallela



æ 11. l.
ß 31. & 34. l.

lineæ $g h$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, quæ
tanquam partes simul sumptæ æqualia sunt toti $b f$
subdactis lineis comprehenso. Quod erat ostenden-
dum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea $a b$ secta sit utcun-
que in c : rectangula $a f$ & $c d$, quæ sub
tota, & quolibet segmentorum $a c$ &
 $c b$

cb comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, Quadrato $a d$.

46. 1.
31. 1.

Super recta $a b$ describatur quadratum $a d$, & p ducatur per cipsis $a e$ & $d b$ parallela & æqualis $c f$. Fiunt ergo $a f$ & $c d$ parallelogramma, tanquam partes simul sumptæ equalia toti $a d$ quadrato.

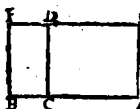


PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si recta linea $a b$ secta sit utcumque: rectangulum $a f$ sub tota $a b$ & uno segmentorum $a c$ comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis $a c$, $c b$ comprehenditur, rectangulo $c f$ & illi, quod à prædicto segmento $a c$ describitur, Quadrato $a d$.

46. 1.



Ex utrovis segmento, ut $a c$ fiat quadratum $a c d e$, & producta recta $e d$ fiat æqualis ipsi $a b$, & constantur $f b$. Erit $c f$ rectangulum ex segmentis; & totum rectangulum $a f$ æquale quadrato segmenti $a c$.

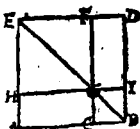
ma cum illo segmentorum rectangulo, tanquam
totum suis partibus simul sumtis.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea ab lecta sit utcun-
que in c ; Quadratum ad , quod à to-
ta ab describitur, æquale est & illis,
quæ à segmentis ac , cb describuntur,
quadratis hf , ci , & ei , quod his sub
segmentis comprehenditur, rectan-
gulo ga , gd .

In Quadrato ad , ex ab a descripto, ducatur
diagonus be , & ex puncto sectionis c β aga- 46. l.
tar ipsi ac parallela cf secans diametrum in g
puncto, per quod parallela β fiat hi ipsi ab . Ut β 31. l.
ergo in triāgulis isoscelibus rectangulis cab & ed
 b anguli ad basin γ æquales sunt δ 5. l.
semirecti; ita in triāgulis efg
& chg rectangulis, ad basin eg
angulis existentibus δ æqualibus,
etiam latera ipsa opposita æqualia
sunt, quibus similiter sua opposita sunt, æqualia, 34. l.
adeoque hf est ζ quadratum, ut & ci , utrumq; ζ 43. l.
videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam
segmentis, complementa ga & gd ζ æqualia, com-
prehensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis
quadrato totius sunt æqualia.



Corol.

Corollarium.

In quadratis quæ circa diametrum sunt parallelogramma, quadrata sunt.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab secetur in æqualia ac, cb & non æqualia ad, db : rectangulum ab sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, unum cum quadrato kg , quod ab intermedia sectionum cd æquale est ei, quod à dimidia cb describitur, quadrato cf .

46. l.

11. l.

31. l.

36. l.

43. l.

cor. 4. l.

Ex cb dimidia describatur quadratum cf , & ducatur diagonus, quam ex d erecta perpendicularis secet in pū-



cto h , per quod æqualis & parallela li agatur ipsa b , & l cum a conjungatur. Iam si rectangulorum d æqualium unum $a k$ adjiciatur, complementorum æqualium unum ch ; alteri vero ci alterum hf , & utriq; commune g quadratum intersegmenti kg ; erit ah rectangulum inæqualium segmentorum unum cum illo intersegmenti quadra-

to,

to, k g e quale gnomoni m n o cum eodem qua-
drato, seu quadrato c f dimittit c d.

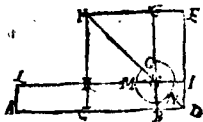
PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab secetur in c , & illi recta quædam linea bd in rectum adjiciatur: rectangulum ai comprehensum sub tota cum adjecta ad & adjecta bd , unâ cum quadrato kg à dimidia cb æquale est quadrato ce à linea, quæ cum ex dimidia cb tum ex adjecta bd componitur, tanquam ab una descripto.

a Describatur ex c d
quadratum ce cum dia-
metro d f, quam ex b s e-
recta perpendicularis in-
tersecet in h puncto, per

quod ipsi a d, ducatur parallela & equalis i l. Re-
ctangulo eidem ch & equalibus a k & h e, addito
communi e i, equalia sunt rectangulum a i &
gnomon m n o; adeoque & aucta communi quadrat-
e k g.



46.L

C.I.L.

221.

236.8421

1.2X.

D

PRO-

EVCLIDIS ELEMENTA

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si recta-linea $a b$ secetur utcumq;
in c , quod à tota $a d$, quodque ab uno
segmentorum $b f$, utraq; simul qua-
drata, æqualia sunt & illi, quod bis
sub tota, & dicto segmento compre-
henditur, rectángulo $a f$, $b d$, & illi
quod à reliquo segmento fit, qua-
drato $g b$.

a 46. l.

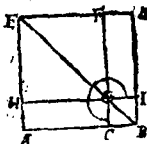
β 11. l.

γ 31. l.

δ 4. ll.

ϵ 8. ax.

Iterum super $a b$ describatur quadratum
& ducta diagonis ex c perigatur perpendicularis $c f$
& per g data $a b$ parallela γ fiat $h i$. Cum ergo
gnomoni $i e c m$, unà cum qua-
drato $g b d$ æquale sit quadra-
tum $a d$; addito communi $h f$, i-
erunt quadrata $a d$ ex tota, &
 $h f$ ex segmento æqualia rectan-
gulis $a f$ & $b d$, sub tota & se-
gmento comprehensis, unà cum reliqui segmenti
quadrato $g b$.



PROPOS: IIX

Theorema 8.

Si recta linea $a b$ secetur utcum-
que

Sirecta linea ab secetur in æqualia ac, cb , & non æqualia ad, db : Quadrata ad, db , quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia, sunt & ejus, quod à dimidia ac , & ejus, quod ab intermedia sectionum $c d$ fit, quadrati.

Dimidia ac æqualis a erigatur perpendicularis ce , & etum a & b connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula ace & bce , quorum anguli ad bases b erunt æquales & semirecti, & totus acb ex duobus semirectis rectus. Rursum erigatur ex d perpendicularis df , & per f ipsi cd fiat parallela & æqualis.



β Erunt ergò in duobus rectangulis triangulis bdf & cgf semirecti ad bases, & his

subtensa latera d æqualia. Deniq, ducatur af . In triangulo ace quadratum hypotenuse ac , æquale est quadratis ex ac & ce , vel duplum quadrati dimidia ac , itemq, quadratum ef duplum erit quadrati gf vel cd intermedia: ac proinde quadrata ac & ef simul sumpta erunt dupla quadratorum ac dimidia & cd intermedia. Cumq, quadratum af , æquale sit, & quadratis ac & ef simul sumtis; & quadratis ad & df vel db inæqualium segmentorum; erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum dupla quadratorum ex dimidia & intermedia. Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Sirecta linea ab secetur bifariam in c ; adjiciatur autem ei in rectū quæpiam recta linea bd ; quod à tota cum adjuncta & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata ad & bd , duplicia sunt & ejus, quod à composita ex dimidiâ & adjuncta, tanquam ab una cd , descriptum sit, quadrati.

Iterum ex c erecta perpendiculari ce equali ipsi ac , fiant duo triangula isoscelia ace & bce , in quibus anguli ad bases e æquales & semirecti.



Deinde compleatur $p. 5. l.$ Rectangulum cf , productæq; fd & eb concurrant $\gamma 32. l.$ in g , & g connectatur cum a . Erunt triangula rectangula efg & $b d g$ etiam isoscelia, & anguli ad bases semirecti. Est ergo quadratum ac $\delta 47. l.$ duplum quadrati ac , & quadratum eg quadrati cf vel cd , quadratum ag quadratis ac & eg est δ æquale; idemq; quadratum ag etiam δ æquale est quadratis ad totius cum adjuncta & δg adjuncta: ideoq; etiam hæc duo quadrata to-

segmenti ag : aequale rectangulo gc comprehenso sub data recta ab & altero segmento gb .

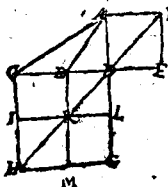
PROPOSITIO XII.

Theorema II.

In amblygonijs triangulis abc , quadratum quod fit à latere ac angulum obtusum abc subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus ab, bc , obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo ck bis comprehenso & ab uno laterum cb , quæ sunt circa obtusum angulum, in quod cum protractum fuerit, cadit perpendicularis ad , & ab assumpta bd exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a demittatur perpendicularis ad in latus cb protractum. Quadratum ex cd æquale est quadratis segmentorum cb & bd , unà cum rectangulo bis sub segmentis

D + sumto:



E. 47. l.

E. 47. l.

sumto: quibus si addatur commune quadratum perpendicularis ad , & erunt tria quadrata ex segmentis & perpendiculari, una cum rectangulo bis sub segmentis equalia duobus quadratis ex cd & ad , quibus

d aequale est quadratum ac . Cumq; quadratum ab tantum sit d aequale quadratis ad & bd , erit quadratum ca majus quadratis laterum obtusum angulum includentium rectangulo bis sub uno laterum cb & assumta bd comprehenso.

PROPOS: XIII.

Theorema 12.

In oxygonijs triangulis abc quadratum à latere ab angulum acutum acb subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus ac , bc acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bi & dh , bis comprehenso & ab uno laterum bc , quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis ad cadit, & ab assumta interiorius linea dc sub perpendiculari prope acutum angulum.

Demis-

Demittatur perpendicularis a d in latus b c angulo dato c adjacentis. Est quadratum recte a b β æquale quadrato a d & b d: quadrato autem b d minus est quadratum recte b c, gnomone n o p: quadratum vero a c β æquale est quadrato a d & d c, majus nimirum quadrato a d per quadratum d c. Sic ergo quadratum recte a b minus est quadrato rectarum b c & c a, rectangulo bis sumto sub tota b c, & segmento d c, id est, rectangulis b i & d h.



a 12.1.

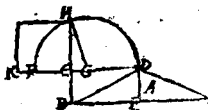
a 47.2.

PROPOS: XIV.

Problema 2.

Dato rectilineo a, æquale quadratum c i constituere.

Fiat rectilineo a, æquale rectangulum b c de; extendaturq; latus d e in f, intervallo c b,



a 43.1.

ipsaq; d f β secetur bisariam in g, & ex g intervallo g d vel g f describatur semicirculus d h f, producta b c in h. Cum ergo recta d f secta sit æqualiter in g & inequaliter in c, erit rectangulum e c sub d c & c f, una cum quadrato g c

a 10.2.

D 5

v. æquale

75. II.
 47. I.

1. AX.

75. II. γ *equale quadrato recte gf & gh. Quadrato autem gh δ equalia sunt quadrata g c & c h. Ergo & rectangulum e c una cum quadrato g c, δ *equale est quadratis rectarū g c & c h. Ablato communi quadrato g c; remanebunt equalia rectangulum e c vel α , & quadratum recte c h. Quod erat faciendum.**



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

Definitiones.

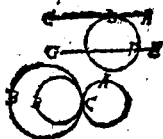
I.



ÆQUALESCIRCVLI
 sunt *a f b*, *b g c*,
 quorum diametri *a b*,
 & sunt æquales; & quorum quæ ex
 cen-

centris rectæ $d f$, $e g$ sunt æqua-
les.

2. Recta $a b c$ circu-
lū $b f d$ tangere dici-
tur; quæ cum circu-
lū tangit in b , si pro-
ducatur, circulum nō
secat.



3. Circuli sese mutuò tangere in e
dicuntur, qui sese mutuò tangentes,
sese mutuò non secant.

4. In circulo $a b d$ rectæ $a b$, $b i$ æ-
qualiter à centro c distare dicuntur;
cum perpendiculares $c k$, $c f$, quæ à
centro c in ipsas ducuntur, sunt æqua-
les. Longius abesse illa di-
citur $d e$, in quam major $c g$
perpendicularis cadit.



5. Segmentū e circuli est fi-
gura, quæ sub recta linea, b
 d & circuli peripheria $b a d$
comprehenditur.





6. Segmenti angulus bac est, qui sub recta linea ac & circuli peripheria comprehenditur.



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum b , & ab illo inter terminos rectæ a, c , qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus abc , ab adjunctis illis comprehensus.



8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ da, ba aliquam assumunt peripheriam; ille angulus bad peripheriæ db insistere dicitur.



9. Sector Circuli est, cum ad ipsius circuli centrum e constitutus fuerit angulus aec estque figura comprehensa à rectis ae, ec angulum continentibus, & à peripheria $adç$ ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

EVCLIDIS ELEM:

Quot in circulo æquibifecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Si in circuli peripheria duo quælibet, puncta accepta fuerint, recta linea ab quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

¶ 16. l.



¶ 5. l.
¶ 19. l.

In recta ab assumatur quodcunque punctum d & ducantur ex centro ca, cb, cd . Cum ergo angulus cda major sit angulo cdp seu angulo cad ; erit etiam ca semidiametri & major linea cd . Ideoque & punctum d , & quævis alia intermedia puncta lineæ ab cadunt intra circulum.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si in circulo bcd recta quædam linea ce per centrum extensa, quandam non per centrum extensam $b d$ bifariam secet in f , eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos rectos

Quos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulis afb , afd laterum a equalium etiam lateribus equalibus oppositi anguli sunt a equales, erunt afb , afd recti



a ex constm
& 15. def. 1.
 β 8. l.
 γ 10. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ a b , ad sese mutuò secent in e , non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f ducta recta $f e$ utramq; secaret ad angulos rectos β aequales in e , partemq; toti aequalem efficeret. Quod est, absurdum.



a 3. lll.

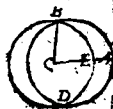
β 10. def. 1.
 γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli $a b d$, $b e d$ sese mutuò secent in b & d ; non erit illorum idem centrum c .

Si centrum commune esset c , ductis lineis, $c b$ & $c a$ erunt $c b$, $c e$ & $c a$ aequales, pars toti. Quod absurdum.



a 15. def. 2.
 β 9. ax.

PRO.

PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli $a b$, $c b$ sese mutuo
interius tangant in b ; eorum non erit
idem centrum d .

17. def. 1.
9 ax.



Si centrum commune esset d ,
ductis lineis $d b$ & $d a c$, erunt $d b$,
 $d a$, & $d c$ = *equales, pars toti. Quod*
est absurdum.

PROPOSITIO VII.

Theorema 6.

III. 2

Si in diametro circuli $a b$ quod-
piam sumatur punctum g , quod cir-
culi centrum non sit, ab eoque pun-
cto g in circulum quædam rectæ li-
neæ $g c$, $g d$, $g e$ cadant: maxima qui-
dem erit $e a g$ in qua centrum; mi-
nima verò reliqua $g b$; aliarum verò
propinquior illi, quæ per centrum
ducitur, remotiore semper major $g a$
ipsa $g c$, & hac ipsa $g d$: duæ autem so-
lùm rectæ æquales $g b$, $g e$ ab eo pun-
cto

Etog in circulum cadunt ad utraq;
partes minimæ $g b$ vel maximæ $g a$.

Ex centro f ducantur semidia-
metri fc, fd, fe, fh , & ponaturq;
angulo efb equalis $b f h$, & ducatur
recta $g h$. Quia enim fc & fg .



23. l.

pho est, $g a$, & majores sunt latere

$g c$; d hoc latere $g d$, quia in triangulis equalium

15. de f. l.

laterum majori angulo subrensum; d hoc rursus la-

20. l.

tere $g e$: Quia etiam $e f$, hoc est, $f b$ minor est $f g$.

44. l.

& $g e$ simul sumtis, ablato communi $f g$, etiam $g e$

20. l.

major erit $g b$: adeoq; maxima est $g a$ minima

$g b$; reliquæ quo viciniores minima, eò sunt mino-

res. Quia deniq; in triangulis $e f g$ & $g f h$ a-

qualium laterum æquales angulos comprehenden-

tium, bases $g e$ & $g h$ sunt æquales; ex utraque

parte minima $g b$ æqualiter distantes sunt æqua-

les: Reliquæ omnes sunt vel minores versus b , vel

maiores versus a . Quod erat propositum.

PROPOS: IIX.

Theorema 7.

Si extra circulum sumatur pun-
ctum quodpiam a , adeoque ad circu-
lum ducantur quædam rectæ ab, ac ,
 ad, ae , quarum una quidem ab per
cen-

centrum k protendatur; reliquæ ve-
rò utcunque: in concavam periphe-
riam cadentium rectarum $a f, a g, a b,$
 $a i$, maxima quidem est ea $a i$ quæ per
centrum ducitur; aliarum autem pro-
pinquior $a b$ illi $a i$, quæ centrum tran-
sit remotior $a g$ semper major est, in
convexam verò peripheriam caden-
tium rectarum linearum, minima
quidem est illa $a b$ quæ inter punctum
 a & diametrum $b i$ interponitur; ali-
arum autem ea, $a c$, quæ propinquior
est minimæ, remotior $a d$ semper mi-
nor est. Dux autem tantum rectæ
lineæ $a c, a l$ quales ab eo puncto in
ipsum circulum cadunt, ad utrasque
partes minimæ $a b$ vel maximæ $a i$.

$a 23. l.$



Ex centro k ducantur semidi-
ametri ad singula sectionis puncta,
fiatq; angulus $a k c$ angulo $a k l$
equalis.

Quia enim rectæ $a k, k h$ vel
 $a i \beta$ major est rectæ $a h$; atq; ita
 $a h$ major quàm $a g$, & hæc quàm
 $a f$, maxima itaq; est $a i$, & reliquæ quò remotio-
res ab ea, hoc γ minores. Contra cum $a k \beta$, minor
sic

$\beta 30. l.$
 $\gamma 24. l.$

fit quàm $a c$ & $c k$, ablatiſ equalibus $k b$ & $k c$; 21. 1.
 relinquetur $a b$ minor quàm $a c$. Ita, cum d minores
 ſint $a c$ & $c k$; quàm $a d$, $d k$ & $h a$ d minores
 quàm $a e$, $e k$, $h a$ quàm $a m$, $m k$, demtis
 equalibus ſemidiameſtris, relinquentur $a d$ minor
 quàm $a e$, & $h a$ quàm $a m$, atq; ita illorum mi-
 nima eſt $a b$. Deniq; quia in triangulis $a k c$ &
 $a k l$ ſub equalibus lateribus comprehenduntur,
 anguli ad k æquales, illis æqualia opponuntur la-
 tera $a l$ & $a c$, quibus nulla alia æqualis ex eodem
 puncto ad circumferentiã illam duci poteſt. Quod
 erat demonſtrandum. 4. 1.

PROPOS. IX.

Theorema 8.

Si in circulo acceptum fuerit pũ-
 ctum aliquod a , & ab eo puncto ad
 circulum cadant plures, quàm duæ,
 rectæ lineæ æquales; acceptum pun-
 ctum centrum eſt ipſius circuli.

Si minus a fuerit centrum,

eſto e , & per e a ducatur diameter

$f g$. Ex puncto ergo a duæ ad ſum-

um rectæ ad circumferentiã

æquales cadere poterunt; tertiãq;

vel maior vel minor erit.

Quod eſt contra hypo-

theſin præter a ergo aliud centrum non erit.



7. III.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO X.

Theorema 9.

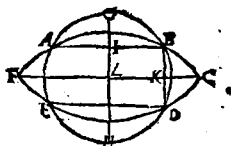
Circulus $abcdef$ circulum agb
 dhe in pluribus quàm duobus pun-
ctis non secat.

Secent se, si possibile
est in tribus punctis a, b, d

duo circuli, qui rectis $ab,$

bd connectantur, per qua-

rum puncta media i & k β
erigantur perpendiculares il & kl . γ Erit com-
munis illarum intersectio l centrum utrius q_3 circu-
li. Quod est δ absurdum.



α 10. I.

β 11. I.

γ 1. III.

δ 5. III.

PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli c, d sese intus con-
tingant in e , atque accepta fuerint
eorum centra a, b , ad eorum centra
adjuncta recta linea ab & producta
in contactum e circulorum cadet.

Si in recta ae centrum b non fuerit. pon-
tur in f , & ducatur linea $afgh$. Erunt fec & $fg,$
 ac &

ae & ah aequales. Cumq; fe &
 fa β aequales ipsis af , fg , & majores
 sint quàm ae seu ah ; erit pars ab
 major tota ah . Quod δ absurdum.



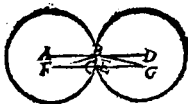
α 15. def. 1.
 β 2. ax.
 γ 20. l.
 δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Siduo circuli sese externus con-
 tingant in b , linea recta ad quæ ad
 centra eorum adjungitur, per con-
 tactum b transibit.

Sin minus recta conne-
 ctens centra per contactum b
 transis, esto fg , & connectan-
 tur bf , bg . α Erunt hæc dua
 vel ge , fc majores quàm fg , pars toto. Quod β ab-
 surdum.



α 20. l.
 β 9. ax.

PROPOS: XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit
 in pluribus punctis, quàm uno a sive
 intus sive extra tangat.

Recta per centra e & f α cadit in contactum a ;
 si præter a ponatur aliud contactus punctum b ,

E 3

quod

pro. 1.
75. ax.



quod connectatur cum utroq; centro
f & e. Cum ergo b f, f e sint & ma-
jores quam e b, id est e a, ablata
communi e f, & major erit f b quam
f a & punctum b cadet extra circu-
lum interiorem, ubi nullus fit con-
tactus. Sic tangente se duo circuli

exterius itidem in a; recta connectens centra a ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,
sum b g & b e fierent & aequales linea e a g. Quod
& absurdum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo aequales rectae ab, d c æ-
qualiter distant à centro e, & quæ æ-
qualiter distant à centro, aequales
sunt inter se.



In rectis ab, d c aequales ex centro
e a ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta & media, item e a,
& e d & aequales. Quia ergo quadra-
ta ex e a, e d aequalia, quadratis a f
e f & d g e g sunt & aequalia; ablati aequalib. qua-
dratis laterum & aequalium a f, d g; residua qua-
drata & aequalia, erunt aequalium laterum e f,
e g qua-

pro. 12. l.
pro. 3. lll.
715. def. 1.

pro. 47. l.
72. ax.

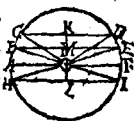
et quadrata, id est, inscripta equales equaliter a centro distant.

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter af ; aliarum autem propinquior hi centro g remotiore cd semper major est.

In lineas hi , cd ex centro g aducantur perpendiculares gl , gk ; ipsarum gl aequalis gm abscindatur de gk , & per m erigatur perpendicularis ipsi hi



et equalis; ducanturque semidiametri in puncta b , c , d , e . Cum ergo gb , gc , id est, af maiores sint, quam be , & angulus bge major angulo cgd ; erit af major quam be , & hi seu bi est major quam cd . Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

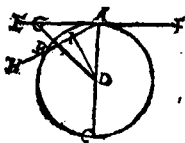
Quae se ab extremitates cujusque dia-

E

4

mc-

metri ca circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum caderet; & in locum inter ipsam rectam lineam ae & peripheriam comprehensum, altera linea non caderet: & semicirculi quidem angulus dab quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem bae (contactus) minor.



a ex hypot.
 β 17. l.
 γ 17. l.
 δ 12. l.

Sumatur in linea a e punctum g & connectatur cum centro d . Erit angulo a recto a oppositum latus d g , quam d a , oppositum β acuto g & majus g , punctum q_3 g cum

ceteris omnibus illius linea extra circulum. Deinde ducta alia a h infra ipsam a c , d demittatur in ipsam perpendicularis d i . Angulo itaq; l recto opponetur δ majus latus d a , β acuto d a b minus d i . Ideo q_3 i punctum intra circulum cadit, & linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangentem & circulum alia duci potest. Proinde neque minor erit angulus, angulo contactus e a b ; nec major angulo semicirculi seu corniculari d a b inter quosvis rectilineos.

Corollarium.

Recta tangens circulum, in unico

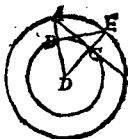
nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto a rectam ac ducere, quæ datum circulum tangat in c .

Dati circuli centrum d connectatur cum a & ex intersectionis puncto b erigatur perpendicularis infinita, & ex centro d intervallo da descriptus circulus secet infinitam illam in e , quod cum centro d connectum, secat circulum datum in c puncto, ad quod ex a ducta recta ac tangit circulum.



11.1.

Sunt enim in triangulis acd & dbe β æqualia β 15. def. 1. sum laterum cum angulo comprehenso communi γ 4. 1. d , etiam reliqui anguli reliqui γ æquales, δ recto δ 12. def. 1. b , rectus c : $\therefore$ Ideo ac Tangens. Quod erat sciendum. 16. 11.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Sicirculum tangat recta quæpiam
 E s linea

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam linea ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

§ 19. I.
p. 2. 27.



Si angulus ecb non est rectus, esto ec rectus. Hujus ergo oppositum latus ec vel ed erit majus quàm ef pars toto. Quod β absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum d tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

§ 19. III.
p. ex const.
& hypot.
p. 2. 27.



Si centrum non est in ce , esto extra illam f , quod cum ca perpendiculari linea connectetur. β Erunt ergo ecb rectus & fc b pars recti æqua. Quod absurdum.

PRO.

PROPOS: XX

Theorema 18.

In circulo $a b c$ angulus ad centrum $b d c$ duplex est anguli a, e, f ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria $b c$ basis angulorum.

Primo si latus $b a$ sit commune cum $b d$; erit externus $b d c$ interiorum a equalium alterius $b a c$, anguli ad peripheriam duplus.



$a, 32. l.$
 $b, 5. l.$

Deinde includantur $a b, a c$ duos $b d, d c$ & ducatur diameter $e g$; Erunt rursus $b d, d c$ & $g d c$ dupli duorum $b e g, g e c$; totiusq; $b d c$, totius $b e c$.

Tertio si secet latus $b a$, & ducatur diameter $f h$. Erit similiter angulus externus totius $h d b$ duplus interiori totius $h f b$; sic etiam externus $h d c$ auferendus ex toto $h d b$ duplus est anguli $c f h$, etiam à suo toto $h f b$ auferendi. Reliquus ergo ad centrum $c d b$ est reliqui ad peripheriam $c f b$ duplus. Quod erat demonstrandum.

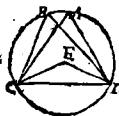
PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento ac sunt, anguli a, b , sunt inter se æquales.

20. III.
§ 7. ax.



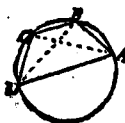
Ductis semidiametris ed, ec :
Quia angulus e utriusq, a & b dup-
lus est, erunt β æquales.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum $abcd$ in circulis descriptoꝝ $b a d, b c d$ anguli, qui ex adverso a, c duob. rectis sunt æquales.

22. I.
§ 21. I.



Ducantur diagonij ac, bd .
Cum ergo trianguli bcd tres an-
guli duobus rectis sint æquales, par-
tesq, anguli a sint duobus ad basin
 β æquales, cad & cbd ; cab &
 bdc ; erunt etiam oppositi a & c duobus rectis
æquales.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea ab , duo
segmen-

segmenta circulorum similia, & in-
aqualia non constituentur ad easdē
partes.

Ductis $a c d, c b, d b$: Erunt
in similibus segmentis anguli c &
 d æquales. Quod γ absurdum.



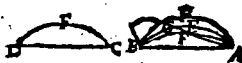
α ex hypot.
 β 10. def. III.
 γ 10. l.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis $a b$,
 $c d$, similia circulorum segmenta,
sunt inter se æqualia.

Propter bases e-
rim $a b, c d$ æqua-
les congruentes, con-



α 8. ax.

gruere sibi debent ipsa segmenta $a e b, c f d$. Sin
minus, erunt vel inæqualia, sed non β similia con-
tra hypotesin: vel circulus circulum in pluribus,
 γ a, g, b quàm duobus punctis secabit. Quod γ ab-
surdum.

β 23. III.
 γ 10. III.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento $a b c$ dato, de-
scribere circulū, cujus est segmentū.

α See

10.1.

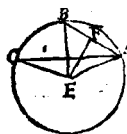
3 cor. 1.111.

21.1.

4.1.

9.111.

Secetur basis $a b$ segmenti bisariam per line-



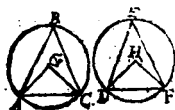
am, quae centrū circuli continebit. Secetur itē aliā inscripta $a b$ bisariam per aliā lineam, quae priorem secabit in e centro. Vel ad a ipsi $a b$ angulo γ fiat aequalis $b a c$ ductis $a e$ & $e c$; erunt tres lineae $a e, e c, e b$ & aequales

& e : centrum circuli.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema. 23.

In circulis æqualibus, æquales anguli æqualibus peripherijs $d f, a c$ insistent; siue ad centra g, h , siue ad peripherias b, e constituti insistant.



4.1.

20.111.

7.22.

10.def.111

24.111.

3.22.

Ducantur rectæ $a c, d f$ æquales. Erunt ergo æquales g & h ad centra γ æqualū b, e ad peripheriam dupli & segmenta $a b c, d e f$ & similia

& super æqualibus basibus $a c, d f$ æqualia. Aequalibus ergo peripherijs $a b c, d e f$, ablatis ex totis circulis æqualibus, relinquentur peripheria $a c, d f$ æquales. Quod erat propositum.

PRO

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs *ac, df* insistant, sunt inter se æquales, sive ad centra *g, h*, sive ad peripherias *b, e* constituti insistant.

Sin minus, esto angulus g angulo h maior, cui æqualis fiat a gi. Erunt ergo etiam bases a i pars & d f vel a c totum æ equalia. Quod, absurdum.



a 23. l.
 β 26. ill.
 γ 9. ax.

PROPOS: XXIIX.

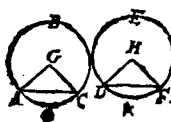
Theorema 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *ac, df* æquales peripherias auferunt, majorem quidem *ab e* majori *def*, minorem autem *a i c* minori *d k f*.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, Erunt ergo anguli *g, h* æquales, qui etiam æqualibus

p 26. III.

y 3. ax.



libus β insistant peripherijs a i c, d k f. Quibus ablatis ab æqualibus circulis, reliquæ peripheriæ sunt γ æquales a b c, d e f.

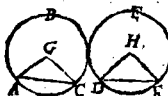
PROPOS: XXIX.

Theorema 26.

In æqualibus circulis, æquales peripherias a b c, d e f æquales rectæ lineæ a c, d f subtendunt.

a 27. III.

p 4. l.

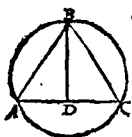


Ductis semidiamentris a g, g c, d h, h f. Erunt α æqualibus angulis g & h oppositæ bases a c, d f inter se β æquales. Quod erat propositum.

PROPOS: XXX.

Problema 4.

Datam peripheriam a b c bifariam secare.



Ex puncto medio d subtenfa a c α erigatur perpendicularis b d & ducantur b c, b a, quæ inter se β æquales etiam γ æquales peripherias a b & b c subtendunt. Secta ergo est peripheria bifariam in b.

a 11. l.

p 4. l.

y 18. III.

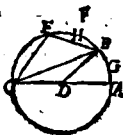
PRO-

PROPOS: XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus abc qui in semicirculo aec rectus est: qui autem in maiore segmento bac , minor recto: qui verò bcc in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus gbc maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris autem segmenti angulus $b'bc$ minor est recto.

Quoniam a equales sunt anguli dab, abd & dbc, bcd ; erunt bini conjuncti, binis β equales, $a b c$ & bac cum $a c b$, quibus duobus γ equalis est externus $c b f$; ac proinde abc est δ rectus. Angulus autem a in maiori segmento recto: minor. Sed angulus c in segmento ζ minori recto: maior. Cum denique angulus abc rectus sit tantum pars anguli segmenti maioris gbc ; & angulus segmenti minoris $c b h$ tantum pars recti $c b f$; erit illa maior, hic minor recto.



PROPOS: XXXII.

Theorema 28.

F

Si

Sicirculum tetigerit aliqua recta linea ab , à contactu e autem producaturs quædam recta linea ce circulum secans: angeli ace , ecb quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis d & g .

a 31. III. &
 i 8. III.
 p 3 2. I.
 y 21. III.
 d 3. ax.



Ducantur cf diameter & fe .
 Cum a recti sint anguli cef , fca , & efc , ecf recto p æquales; ablato communi ecf , anguli efc , & ide est egc in maiori segmento, & ace erunt æquales. Horum æqualium d æqualia erunt complementa ad duos rectos, anguli ecb & d in segmento minore æquales.

PROPOS: XXXIII.

Problemata. 5.

Super data recta linea ab describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo c .

a 23. I.
 s 11. I.

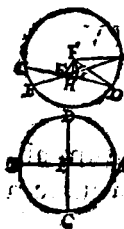
Super recta ab fiat ad a angulo c dato æqualis dab , & erigatur perpendicularis ae ex a ipsi ad & rursus angulo eab æqualis fiat abf .

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab ,
 cd sese mutuo secuerint, rectangu-
 lum comprehensum sub segmentis
 de, eb unius, æquale est ei, quod sub
 segmentis alterius de, ec comprehē-
 ditur, rectangulo.

12. I.
 3. III.
 5. III.



Ex centro f demittantur per-
 pendiculares fg, fh , quæ illas lineas
 æqualiter secant in g & h , ducatur
 fc . Erit ergo rectangulum ex
 ae, eb , unà cum quadratis eg &
 gf vel ef , æquale quadratis ag &
 gf seu quadrato semidiametri af .
 Sic etiam rectangulum ex ce, cd

47. I.

unà cum quadratis eh & hf seu ef , æquale
 quadratis ch & hf seu quadrato semidiametri
 fd . Ablato ergo utrinque ex rectangulis quadrato
 fe communi, residua rectangula ex inequalibus
 segmentis sunt æqualia.

3. AX.

Si in centro secant se duo diametri, planum
 est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiame-
 tris fiant æqualia quadrata.

PRO-

PROPOS: XXXVI.

Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod d , ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera da quidem circulum secet; altera db verò tangat: Quod sub tota secante da & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta dc comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente db describitur, quadrato.

Transseat primò secans da per centram e , ducaturq; ac perpendicularis Tangenti db . Erit rectangulum sub tota da cum adjecta ac adjecta ac , una cum quadrato dimidia ec æquale quadrato ed ex dimidia ac adjecta, id est, quadratis db , be . Sublati quadratis equalibus semidiametrorum be & ec , erit rectangulum ex ad & dc æquale quadrato Tangentis db .



æ 18. III.
§ 6. II.

γ 3. æ.

Deinde non transeat secans da per centram, & ducantur eb , ed , ec & ef perpendiculares. Erit rursus rectangulum ex ad & cd , una cum



quadrato fc aequale quadrato ex fd ,
additoq; quadrato communi ef , a-
quale erit rectangulum ex ad & cd ,
una cum quadratis fc & fe , id est,
quadrato ec , quadrato de , seu qua-
dratis dh , be . Ablati aequalibus
quadratis be & ce , relinquuntur γ equalia rect-
angula ex ad , dc & quadratum Tangentis dh .

PROPOS: XXXVII.

Theorema 31.

Si extra circulum sumatur pun-
ctum aliquod d , ab eoque puncto in
circulum cadant duæ rectæ lineæ,
quarum altera da circulum secet, al-
tera db in eum incidat; sit autē quod
sub tota secante da & exterius inter
punctum & convexam peripheriam
assumpta dc , comprehenditur rectan-
gulum, æquale ei, quod ab incidente
 db describitur, quadrato; incidens
ipsa db circulum tanget.

36. III.

Ducta Tangente df , & semidiametri ef ,
 eb , ed . * Erit quadratum Tangentis df aqua-
le rectan-

Rectangulo ex $a d$ & $d c$, id est
 quadrata $d b$ incidentis; & d ipsi
 d equalis. Cumq; angulus d sit an-
 gulus rectus & equalis; erit $d b$ Tan-
 gens.



Ex hypot.
 y 1. ax.
 d 3. l.
 s 18. III.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER IV.

Definitiones.

Figura rectilinea $f d e$ in figura rec-
 tilinea $a b c$ describi dicitur, cum
 singuli figuræ descriptæ anguli,

F 4 singu-



singula latera ejus, in qua describitur, tangunt.

2. Figura $g h i$ circa figuram $k l m$ describi dicitur, cum singula descriptæ latera, singulos angulos ejus, circum quam describitur, tangunt.

3. Figura rectilinea $a b c$ in circulo describi dicitur, cū singuli figuræ descriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.



4. Figura rectilinea $a b c$ circa circulum describi dicitur, cum singula descriptæ latera circuli peripheriam tangunt.

5. Circulus in figura rectilinea describi dicitur, cum circuli peripheria singula latera ejus, in qua describitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi, aut figura rectilinea circulo circumscribi dicitur, cum

circu-

circuli peripheria singulos angulos
ejus, circa quam describitur, tangit.

7. Recta *ab* in circulo a-
ptari dicitur, cum ejus ex-
trema in circuli periph-
ria fuerint.

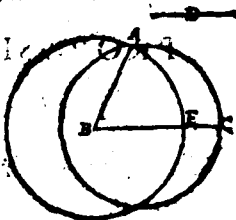


PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam
accommodare, æqualem datæ rectæ
lineæ *d*, quæ circuli diametro non sit
major.

Cum enim dia-
meter inscriptarum
in circulo sit maxi-
ma, major ipsa inscri-
bi non potest: sin ipsi
sit æqualis, quavis di-
gnetur ducta erit a-
ptata: Sin minor,
intervallo lineæ datæ



a 15. III.

d, describatur circulus super *bc* diametro circuli
dati, & connectatur *b* cum *a*. Erit hæc lineæ
circulo aptata æqualis datæ.

a 15. def. I.
& 1. ax.

F 5

PRO.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

In dato circulo triangulum describere, dato triangulo $d e f$ æqui-
angulum.

a 23. l.

a 32. III.

γ 32. l.



Ad ducta tangenti
gh punctum a, fiant an-
guli g a b ipsi f, & h a c
ipsi e equalis; connectan-
turq; b c. p. Erit ergo an-
gulus c equalis angulo
g a b, id est angulo f, & angulus b angulo e. & c
& angulus bac angulo d, triangulum inscriptum
a b c, triangulo d e f æquiangulum.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Circa datum circulum a b c tri-
angulum describere, dato triangulo
d e f æquiangulum.

a 23. l.

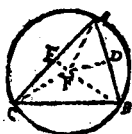
γ 32. l.

Producta utrinq; ex anguli basi in g & h ang-
ulis externis a fiant æquales ad centrum e; a i b
ipsi d e g; & b i c ipsi d f h; ad extremitates
vero semidiametrorum a, b, c ducantur perpendi-
culares

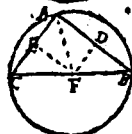
PROPOSITIO V.

Problema. 5.

Circa datum triangulum *abc* circulum describere.



10. I.



4. I.
29. III.



Duo quævis latera^a dividantur bisariam per lineas perpendiculares concurrentes in *f*, ex quo ad angulos singulos ducantur lineæ, italicumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergo *fa*, *fb*, *fc* æquales, & ex *f* centro descriptus circulus circa triangulum datum.

Corollarium. 1.

3. I. III.

Si centrum *f* cadat in latus, erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majoti segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium. 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem, Connexis enim punctis tribus habeo triangulum,

Scholia

Cuius figura regulari quæ & æquilatera & æquiangula est, circulus tum α inscribitur intervallo perpendicularium concurrentium; tum β circumscribitur, intervallo angulos duos quosq; bisariam secantium.

α 4. IV.

β 6. I.

PROPOS: VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum describere.

Ducantur duo diametri ad angulos rectos se α interfecantes, eorumq; extremitates jungantur rectis ab, bc, cd, da . Quatuor angulis ad centrum β rectis, æquales sunt quatuor arcus quibus insistant. & his sub-
tensa quatuor latera d equalia. Anguli etiam omnes sunt in semicirculo recti. Ergo γ quadratum $abcd$ inscriptum.



α 11. I.

β ex const.

γ 16. III.

δ 29. III.

ϵ 31. III.

ζ 29. def. 1.

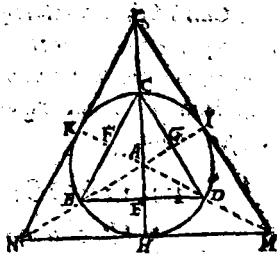
L E M M A.

Figura regularis circa circulum descri-

describitur à perpendicularibus lm ,
 ln , nm ab extremitate semidiamet-
 rorum b , k , & latera figuræ prius in-
 scriptæ bc , bd , cd bifariam dividunt
 in e , f , g excitatis.

per aliquā
 prop. 14.

Inscribatur in
 circulo figura equi-
 latera & equian-
 gula, qualis requi-
 ritur, & per ipsius
 angulos ex centro
 utrinque continuen-
 tur lineæ ad peri-
 pheriam in h , i , k



8.1.

& ultra peripheriam in l , m , n , & secantes angulos
 & latera datæ figuræ bifariam, & tres ad centrum
 efficiuntur æquales bad , dac , bac . Denique ad ex-
 tremitates h , i , k excitentur perpendiculares lm ,
 ln , nm . Cum itaque æquales sint anguli $a b c$
 $a c h$, & $a d e$, $a m h$, id est, toti n & b , m & d ;
 l & c ; erit figura & circumscripta equiangulara.
 Deinde in triangulis anm , aml , anl æqualitatem
 angulorum, & æqualia etiam erunt inter se latera
 am , al , an ; quæ comprehendunt angulos æqua-
 les, etiam bases inter se & æquales efficiunt nm ,
 ml , ln , figuram quæsitam constituentia.

7.11.1.
 29.1.

2. ax.
 1. ax.
 6.1.

4.1.

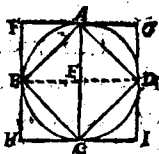
PRO-

PROPOS. VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

Inscripto prius quadrato, aliud etiam & circumscribetur.



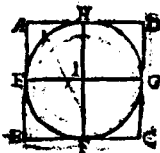
6. IV.
per Lemma ejusdē.

PROPOS. IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex 4. IV.



PROPOSITIO IX.

Probl. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.



Scholium.

Estq; quadratum circumscriptum inscripti, 47. l.

duplum, quia illud ex diagonio inscripti vel diametro fit, tanquam ex hypotenusa.

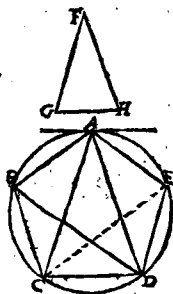
PRO.

PROPOSITIO XI.

Problema II.

Indato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructo triangulo Isosceli fgh , cujus anguli ad basin g & h sunt dupli tertij f : β inscribitur circulo dato æquiangulum acd , & anguli ad γ 9. l. basin γ secantur bisariam per lineas db, ce & ducantur rectæ ab, bc, cd, de, ea . Insistent ergo quinque anguli d æquales ace, ccd, adb, bdc, cad : æqualibus peripherijs quinque totum circulum comprehendentibus quibus 2 æqualia subtensa quinque latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod & æquiangulum est, quod omnes ipsius anguli æqualibus peripherijs circuli insistent.



d ex constr.

26. III.

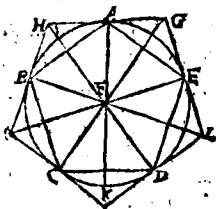
29. III.

27. III.

PROPOS: XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum; pentagonū



G

æqui-

æquilâterum & æquiangulum describere.

u. IV.

Inscripto prius pentagono, circumscribitur aliud per lemma sexta hujus.

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilatere & æquiangulo circulum inscribere.

u. 9. l.

proho. 5. IV

Duo quique anguli proximi asecantur bisariatis per lineas fi , fk , quarum concursu f intervallo perpendicularis fc circulus perit inscriptus.

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æquilâterum & æquiangulum circulum describere.

§ 19. l.

proho. 5. IV

Iterum duo anguli asecantur bisariatis per lineas, quarum intervallo ex illarum concursu a circumscribitur circulus.

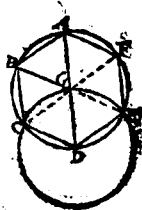
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum & æqui-

æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ducto diametro circuli $a d$, ex d describatur alius priori equalis circulus secans priorem in c & e punctis, per quæ ducantur diametri $e b$, $c f$, itemq; $a b$, $b c$, $c d$, $d e$, $e f$, $f a$. Erunt triacula $c g d$ & $d g e$ æquilatera & β æquiangula, & anguli ad centrum omnes γ



α 15. def. 1.

β 5. 1.

γ 32. & 15. E.

æquales, vel $\frac{1}{2}$ duorum rectorum. Ideoq; omnes δ 16. III.
 & æqualibus insistent peripherijs, quibus æquales li- δ 19. III.
 neæ, id est, latera hexagoni sex equalia subten- δ 27. III.
 duntur, quæ etiam æquales includunt angulos sex,
 æqualibus peripherijs insistentes. Hexagonum
 ergo & æquilaterum & æquiangulum est inscri-
 ptum.

Corollarium.

Latus Hexagoni æquale est semidiametro ejusdem circuli. Circulo autem dato circumscribetur hexagonum per Lemma 6. IV. Circulus ipsi inscribetur & circumscribetur per scholion 5. IV.

G

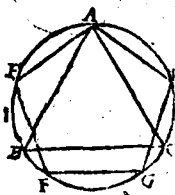
a

PRO:

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

In dato circulo quindecagonum
& æquilaterum & æquiangulum de-
scribere.



Inscribatur in circulo da-
to æquilaterum & pentagonum. Cum ergo la-
trigeni ab $\frac{1}{3}$ vel $\frac{5}{7}$: latus autē
pentagoni a e $\frac{2}{7}$ quatuor re-
ctorum: illorum duarum pe-
ripheriarum differentia e b

habet $\frac{2}{7}$; Ipsius ergo diuidium erit $\frac{1}{7}$, cui sub-
tensum latus e i est quindecagoni æquilateri & æ-
quianguli latus. Ejusdem circumscripſio fiet per
Lemma 6. IV: Ipsi autem & inscribetur &
circumscribetur circulus per
Schol. 5. IV.

a 2. IV.
β 11. IV.

γ 29. III.
α 27. III.





EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER V.

Definitiones.

I.

Magnitudo est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur maiorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur maiorem.

Intelligitur hic pars aliquota, qua aliquoties præcisè continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoq; & æquemultiples sunt magnitudines, qua multitudine æquales partes habent.

3. Ratio, λόγος, est duarum magni-

G 3

tudi-

tudinum, ejusdem generis, *numeri cum numero, linea cum linea*, mutua quædam secundum quantitatem habitudine *quatenus una est major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, est rationum similitudo, *Vt enim magnitudines, ita earum rationes inter se comparantur.*

5. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare.

6. In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unâ deficiunt, vel unâ æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent, *Multiplex prima cum multiplice secunda; & tertia cum quarta multiplice. Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, si mediabus sumatur.*

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cum verò æque multiplicum multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam maiorem habere rationem dicetur, quam tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberi possint duo Antecedentes & duo consequentes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem, *multiplicata in se vel quadratè ratione prima ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam, *cubicè in se multiplicata ratione prima ad secundam*, rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

diu proportio extiterit. *Loquitur definitio tantum de cōtinua proportionalitate.*

ii. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Ante proportionem dixerat rationum similitudines: nunc ejus terminos etiam dicit similes. Sequuntur jam sex argumentandi modi Geometris usitati.*

12. Alterna ratio est sumtio Antecedentis ad Antecedentē, & consequētis ad consequentem. *Oportet hīc omnes terminos esse ejusdē generis. Non n. si sit ut numerus ad numerum, sic linea ad lineam, rectē colligeris alternē, ut numerus ad lineam; sic numerus ad lineam.*

13. Inversa ratio est sumtio consequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam consequentem.

14. Compositio rationis est sumtio Antecedentis cum consequente ceu
unius

unius, ad ipsam consequentem vel compositio rationis est sumtio terminorum simul ad alterutrum eorundem. Et contra, est sumtio alterutrius termini ad compositum ex utrisque. *Hic in compositione rationum tantum intelliguntur termini: ipsæ rationes in 5. def. VI.*

15. Divisio rationis est sumtio excessus, quo consequentem superat Antecedens, ad ipsam consequentem. Vel est sumtio excessus termini majoris supra minorem, ad ipsum minorem: Et contra minoris ad excessum majoris.

16. Reversio rationis est sumtio Antecedentis ad excessum, quo Antecedens superat consequentem. Vel est sumtio termini majoris ad excessum supra minorem. Et contra, excessus terminorum ad ipsum majorem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliz multitudine pares quæ binæ su-

G 5 man-

mantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum per subductionem mediorum. *Hi modi argumentandi demonstrantur in aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

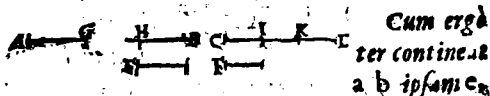
19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinib. & alijs, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitudinibus

gnitudinibus aliud quidpiam ad Antecedens.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Si sint quotcunque magnitudines a, b, c, d , quotcunque magnitudinum e, f , æqualium numero, singulas singularum æque multiplices a b ipsas e, c, d ipsius f , quam multiplex est unius e una a, b magnitudo; tam multiplices erunt & omnes a, b, c, d , omnium e, f .



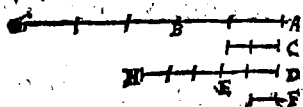
& c, d ipsam f ; singulis earum utriusque partibus, a, g, h, b , addantur singula alterius c, i, k, d ; Erunt ipsæ e & f junctæ ter bina ter æquales: α 2. ax. β 2. def. V.
ac proinde β æquemultiplex totum ex a, b, c, d , totius ex e, f . Si itaq; partes sint æquemultiplices partium, totum etiam totius est æquemultiplex. Inde q; idem est multiplicare per partes ac per unum.

PRO-

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si prima ab secundæ c fuerit æquemultiplex, atque tertia d quartæ f ; fuerit autem & quinta bg secundæ c æquemultiplex, atque sexta ch quartæ f ; erit & composita prima cum quinta ag secundæ c æquemultiplex, atque tertia cum sexta dh æquemultiplex quartæ f .



ex hypot.

2. ax.

2. def. v.

Si enim aqualibus multitudinibus a b & d c æquales multitudines bg & ch addantur; perunt etiam compositæ ag & dh æquales, & suarum partium c æquemultiplices.

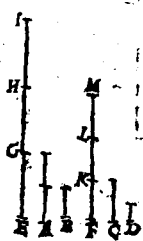
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima a secundæ b æquemultiplex, atque tertia c quartæ d ; sumantur autem æquemultiplices e i , *super* pri-

primæ a & tertiæ c : Erit & ex æquo
summarum e i ad b & f m ad d utraque
utriusque æque multiplex; altera e i
quidem secundæ b , altera f m autem
quartæ d .

Quia enim prima a , illig³ a
æquales e g, g h, h i sunt æque
multiplices secundæ b , atq, ter-
tia c , illig³ æquales f k, k l, l m,
quarta d ; perunt etiam com-
positæ e i & f m earundem, se-
cundæ b & quartæ d æque mul-
tiplices. id est, v extreme vel ex.
æquali sumtæ.



a ex hypot.

a 2. v.

γ 17. def. v.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima a ad secundam b ean-
dem habuerit rationem, & tertia c
ad quartam d : etiam æque multipli-
ces primæ e & tertiæ f , ad æque mul-
tiplices secundæ g & quartæ h , juxta
quamvis multiplicationem, eandem
habebunt rationem, si prout inter se
respondent, ita sumtæ fuerint.

Atque

s. V.



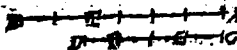
Aequemultiplicitum ē & sumantur alia aequemultiplices & k; itemq, aequemultiplicium g & h alia l & m; & erunt ex aequali i & k aequemultiplices prima a & tertia c: itemq, l & m, aequemultiplices secunda b & quarta d. Cumq, sit, ut prima ad secundam; sic tertia ad quartam, quarū aequemultiplices sunt demonstrata i k & l m directe

p. 6. def. V. sumte, & fiet, si i superat l, etiam k superabit m, ut hoc loco: Camq, eadem etiam sint aequemultiplicium e f & g h aequemultiplices constructae; & Er-
gōnt e ad g, ita f ad h.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo ab magnitudinis e d aequae fuerit multiplex, atque ablata a e ablata e f: etiam reliqua e b reliqua f d ita multiplex erit, ut tota ab totius cd.



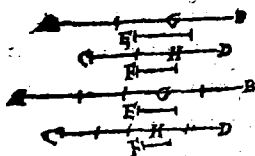
Ponatur quadam g c, cujus aequemultiplex sit e b, atq, est ablata

Si autem ablata e & f , vel tota a & totum e & d : a erit
 plures, quod tota a & totum g & f æque multiplex, atque ab -
 olutum lata a & e , ablata e & f . & erit g & f æqualis ipsi c & d , & ab .
 et ex ablata communi e & f , erunt g & c & f & d æquales. Cum
 res g & c & e & b reliqua sit tam multiplex ipsius g & c , quam
 & a multiplex est a & b ipsius c & d ; tam multiplex etiam
 b & c erit e & b reliqua reliqua f & d . Quod erat propositum.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a & b , c & d dua-
 rum magnitudinum e & f sint æque
 multiplices; & detractæ quædam ag ,
 & b sint earundem e & f æque multi-
 plices: & reliquæ g & b & b & d , eisdem e
 & f aut æquales sunt, aut æque ipsa-
 rum multiplices.



A multitudinibus
 æqualibus a & b , c & d , ex hypot.
 ablatis æqualibus mul-
 titudinibus ag , ch ; re-
 siduæ quoque multitudi-
 nes erunt æquales; & g & h .

sive ex constructione æquales sunt ipsis e & f , ut in
 priori figuratone; sive earundem æque multipli-
 ces, ut in posteriore.

PRO.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Aequales a, b ad eandem c , eandem habent rationem; & eadem c ad aequales a, b .

Sint aequalium

a & b aequè multiples d & e

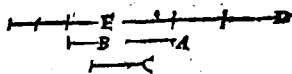
a 6. ax.

aequales, & ipsius c multiplex ut-

cunq. Quia ergo multiplex d est minor multipli-

β 6. def. v.

ce f , eadem minor quoq. est multiplex e . Ideoq. β erit, ut a ad c , sic b ad c : & convertendo β ut c ad a , sic idem c ad b .



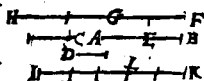
PROPOS: IIX

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum maior a b ad eandem d , maiorem rationem habet, quàm minor c : & eadem d ad minorem c maiorem rationem habet, quàm ad maiorem a b .

Sit maior a b prima, c tertia, d secunda & quarta

quarta; ipsiq; c ex a b au-
feratur equalis ae, & ipsa-
rum a e vel c & e b fiant
aequemultiples h g, g f,



a. 1. V.

quarum utraq; major sit quàm d, & sic h f tota
etiam totius a b majoris aequemultiplex erit, atq;
h g ipsius ae vel c. Fiat item secunda & quarta
d aequemultiplex i k, proximè major multiplice h
g, sed minor multiplice h f, & de i k abscin-
datur ipsi d equalis l k. Non erit ergò i l ma-
jor quàm h g, sed vel equalis vel minor (aliàs non
esset i k multiplex ipsius d, proximè major quam
h g) Et cum g f major sit quàm d vel l k; ideòq;
etiam tota h f major erit quàm i k. Et proinde,
cum f h, h g sint aequae multiplices prima a b &
tertia c, atq; i k multiplex d secunda & quarta;
sicq; f h major quam i k; & g verò minor quàm
i k; major erit proportio a b prima ad d secun-
dam, quàm c tertia ad d quartam. Et conver-
tendo, cum tertia d multiplex i k sit major mul-
tiplice prima h g; & ejusdem d tertia multiplex ea-
dem i k minor h f multiplice quarta: Ideòq; d ma-
jorem habet rationem ad c, quàm ad a b. Quod
erat propositum.

p. 3. def. V.

PROPOSITIO IX.

Problema 9.

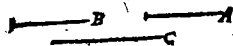
Quæ a & b ad eandem c, eandem

H

ha-

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas a & b eadem c eandē habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

8.V.

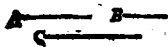


Si a major esset quàm b , a esset major majoris a proportio ad c , quàm b minoris ad eandem, contra hypotesin. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si c habeat eandem rationem ad utramq; a & b , etiam æquales sunt. Sin minus, esto a major, tum c ad b minorem, majorem haberet rationem, quàm ad a , quod est contra hypotesin.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem & rationem habentium, quæ a majorem rationem habet, illa major est: ad quam b autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.



7.V.

Nisi enim a majorem habens rationem ad c , quàm b ad c , esset major b , foret vel æqualis, & sic contra hypotesin a haberet eandem rati-

rationem ad c, vel minor, & sic b ad c maiorem
 & haberet rationem, quàm a contra hypothesein. § 8. V.
 Vice versa, si c habeat rationem maiorem ad b,
 quàm ad a, rursus erit major a, quàm b: sin minus,
 erit ipsi vel equalis & contra hypothesein = erit ipsius
 c ad utramq, eadem ratio; vel minor, & sic major
 erit ratio c ad a, quàm ad b, contra hypo-
 thesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema II.

Quæ eidem sunt eadem ratio-
 nes, inter se sunt eadem.

Sumantur & An-

tecedentium a, e, c,

æque multiples g, h,

i; & consequentium

b, f, d, æque multiples k, m, l.

Quia ergo est, ut

a ad b, sic c ad d, = fiet; si g superat i, etiam k

superet m, & si equalis, equalis; & si minor, mi-

nor sit. Quia etiam est, ut e ad f, sic c ad d; fiet

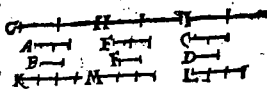
etiam, si h superat i, etiam m superet l & si aqua-

lis, equalis; & si minor, minor. Cum ergo æque

multiples directe summa, habeant hanc triplicem

conditionem, excessus, aequalitatis & defectus, = erit,

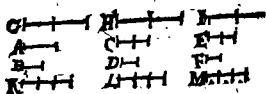
ut a ad b, sic e ad f.



PROPOS: XII.

Theorema 12.

Si sint magnitudines quoruncq;
proportionales a, b, c, d, e, f ; quemad-
modum se habuerit una a Antece-
dentium, ad unam b consequentium;
ita se habebunt omnes anteceden-
tes a, c, e , ad omnes consequen-
tes b, d, f .



Sumantur aequi
multiplices tum An-
tecedentium a, c, e ,
quae sint g, h, i ; tum

a 1. V.

consequentium b, d, f , quae sint k, l, m : a Erit com-
posita g, h, i , composita k, l, m aequè multiplex, ac a
ipsius b . Cumq; sit, ut a ad b , sic c ad d & e ad f ;
 β fiet; si g superat k , etiam h superet l & i superet
 m ; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor: Atq;
ita g, h, i simul ad k, l, m simul triplicem illam
conditionem β recipiant. Ideoq; ut a ad b ; sic
omnes antecedentes a, c, e ad omnes consequen-
tes g, d, f .

¶ 6. def. V.

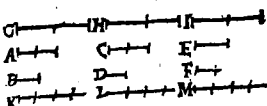
PROPOS: XII.

Theorema 13.

Si prima a , ad secundam b , ean-
dem habuerit rationem, quam ter-
tia

tia c ad quartam d ; tertia verò ad quartam majorem rationem habuerit, quàm quinta e ad sextam f : prima quoque ad secundam, majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquæ multiples tum Antecedentiũ a, c, d , quæ sint g, h , i tum consequentiũ b ,



d, f , quæ sint k, l, m , ut in præcedente propositione.

Quia ergò eadem est ratio a ad b , quæ c ad d : sed a 6. def. V. c ad d major est ratio, quàm c ad f : a fiet, si g superat k , etiam h superet l , sed i quandoq; deficiat ab m . Atq; ita, cum g superet k , l non superet m , a habebit a ad b majorem rationem, quàm c ad f .

PROPOS: XIV.

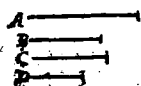
Theorema. 14.

Si prima a , ad secundam b , eandem habuerit rationem, quam tertia c ad quartam d ; prima verò quàm tertia major fuerit, erit & secunda major quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

H 3

cun-

cunda æqualis quartæ: si verò minor,
& minor erit.



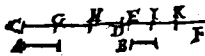
α 8. V.
β 10. V.

Sit a major quàm c : Ergò
α habet maiorem rationem a ad b
quàm c ad b : & cum sit, ut a ad
 b , ita c ad d ; β erit etiam c ad d
major ratio, quàm c ad b & d erit minor quam
 b . Ob easdem etiam rationes quarta est maior se-
cunda, si tertia maior sit prima; æqualis etiam,
si æqualis.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes a, b , cum pariter multi-
plicibus cd, ef , in eadem sunt ratione,
si, prout sibi mutuò respondent, ita
sumantur. At a ad b , sic c ad e .



α 12. V.

Cum ergò partes æque
multiplicium numero sine
æquales, cg, gh, hd ipsius a ;
 ei, ik, kf ipsius b ; quæ erit ratio unius Antecedentium
 cg , ad unam consequentium ei ; eadem α erit
omnium cd , ad omnes ef .

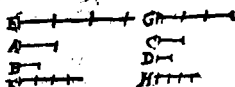
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint ut a ad b , sic c ad d ; & vicissim proportionales erunt ut a ad c , si b ad d .

Sumantur æque
multiplices primæ e ,
& secundæ f ; item ter-
tiæ g & quartæ h .



Erit ut a ad b ; sic e ad f ; & ut c ad d ; sic g ad h :
Idcirco etiam, ut c ad f : ita g ad h . Si itaq; e
uerit maior quàm g , etiam f erit maior quàm
 h ; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. atque
sic, ut a ad c , ita b ad d .

α 15. V.

β 11. V.

γ 14. V.

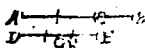
PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint ut a b , ad c b , sic d e , ad f e ; hæ quoque diuisæ proportionales erunt, ut a c ad c b ; ita d f ad f e .

H 4

Sic.



Si enim magnitudo de
non est in fsecta, ut a b in
c, esto secta in g. Erunt

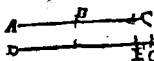
α 16. V.

ergò duæ Antecedentes conjunctæ, hoc est a b, ad
duas consequentes, hoc est, d e, ut b c ad e g. Sed
tot a ab ad ed ponebatur, ut tot a d e ad e f. Itaq;
erit, ut ab ad de; ita b c ad e f. Quare e f equa-
lis erit ipse e g, pars toti. Quod absurdum.

PROPOS: XIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint pro-
portionales ut a b ad b c; ita d e ad e f;
etiam compositæ proportionales e-
runt, ut a c ad b c; ita d f ad e f.



α 17. V.

β 14. V.

Sin minus, ba-
beat d f ad aliam d g
eam rationem, quam
ac ad ab, Erit ergò dividendo, ut a b ad b c
ita d g ad g f: Sed ut a b ad b c, ita erat d e ad
e f: Ideoq; β erit etiam, ut d e ad e f; ita d b ad
g f. Cumq; prima d e sit minor tertia d g; et-
iam secunda e f erit minor quarta g f, pars totum
parti. Quod absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum ab ad totum cd ; ita ablatum ae se habuerit ad ablatum ef : & reliquum eb ad reliquum fd ; ut totum ad totum se, habebit.

Cum igitur sint, ut ab

$ad cd$; ita $ae ad ef$; α erit

$eb ad fd$; ut $ab ad ae$; ita cd

$ad ef$: & β dividendo, ut $eb ad ae$; ita $fd, ad ef$

& γ componendo, ut $ab tota ad eb reliquam; ita α 16. V.$

$cd tota ad fd reliquam: & α permutando, ut β 17. V.$

$ab ad cd$; ita $eb reliqua, ad fd reliquam.$ γ 18. V.

PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
& aliae ipsis numero æquales d, e, f ,
quæ binæ, & in eadem ratione su-
mantur, ut $a ad b$, ita $d ad e$; & ut $b ad$
 c , ita $e ad f$: ex æquo autem prima a
quàm tertia c major fuerit & quarta
H 3 d quàm

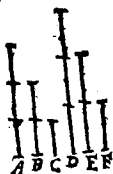
d quàm sexta *f* major. Quod si prima *a* tertiæ *c* fuerit æqualis; erit & quarta *d* æqualis sextæ *f*: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

8. V.

13. V.

10. V.

7. V.



Si enim prima a major quàm tertia c; tum a ad b habet maiorem rationem, quàm c ad b; & quia d ad e eandem habet rationem, quàm a ad b; & erit etiam major d ad e, quàm c ad b, hoc est, quàm f ad e: ideoq; major erit d quarta, quàm sexta. Sic, si a est æqualis c, etiam d est æqualis f, & si minor, minor.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si sint tres magnitudines a, b, c & aliæ ipsis æquales numero d, e, f, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur ut a, ad b, sic e ad f; & ut b ad c, sic d ad e; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia major fuerit: erit & quarta quàm sexta major. Quod si prima

ter-

tertiæ fuerit æqualis ; erit & quarta æqualis sextæ ; Sin illa minor , hæc quoque minor erit.

Sit enim a major quam c , & sic a ad b maiorem habet rationem, quam c ad b ; adeoque c ad f maiorem, quam c ad b . hoc est, quam c ad d : eritque d major quam f ; Sic, si a est æqualis c , etiam d æqualis erit f ; & si minor, minor.



a 8. V.
 b 13. V.
 c 10. V.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, a, b, c , & alie ipsi æquales numero d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f ; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c ; ita d ad f .

Prioribus tribus adjungatur g , & posterioribus h . Sitque, ut a ad b , ita c ad g ; & cumat ergo ut a ad c , ita b ad g : Sit item ut d ad e , ita f ad h ;



a 16. V.

erit h f e d c b a

ex hypot.

a erit iterum ut d ad f , ita e ad h . Cum ergo consequentes β sint in eodem ordine cum antecedentibus; Ideoque est, ut a ad c , sic d ad f .

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines a, b, c , aliarque ipsis numero æquales d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic e ad f , & ut b ad c ; sic d ad e ; fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex qualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c , sic d ad f .



a 61. V.
 β 11. V.

Sin minus, fiat ut b ad c , ita f ad g assumptam: eritq; d ad e ut f ad g , quatuor nimirum proportionales; ac proinde a ut d ad f , ita e ad g . Sed e ad g est f ut a ad c , β itaq; & d ad f est, ut a ad c .

PROPOS: XXIV.

Theorema 24.

Si prima a b ad secundam c eandem

dem habuerit rationem, quam tertia de ad quartam f ; habuerit autem & quinta bg ad secundam c eandem rationem, quam sexta eb ad quartam f : etiam composita ag prima cum quinta, ad secundam c eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta dh ad quartam f .

Quia enim
est, ut bg ad c , ita eh ad f ;
erit convertendo, ut c ad bg ; ita f ad eh . Cum
que sit ut a ad b , ita d ad e ; & ut c ad bg , ita a ad f .
 f ad eh , = erit ex equali, ut a ad b , ita d ad e ; & ut c ad bg , ita f ad eh .
Ergo, cum & componendo, ut ab ad bg , ita dh ad eh : & ut bg ad c , ita eh ad f ; = erit
ex equali ag ad c , ut dh ad f .

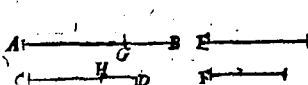
PROPOS: XXV.

Theorema 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, ut a ad b , ita c ad d ; sic e ad f : maxima ab & minima f reliquis duabus c & e maiores erunt.

Ex a & b equalis c auferatur a , & ex c & d ipsi f , ch . Fit; ut ab ad cd ; sic ag ad ch ; Et ut
 ab ad

19. V.
 ex hypot.
 14. V.



$ab ad cd$; a sit
 reliqua $gb ad h$
 d . Cumq, β

major sit ab quàm cd , & major erit $\&$ gb quàm
 hd ex similitudine rationum. Additis ergo æ-
 qualibus f & ch ad æquales ag & e , æquales sunt
 ag & f simul, ipsis e & ch simul; quibus si rursus
 addantur inæquales gb major & hd minor, erunt
 ab maxima & f minima, simul majores medijs cd
 & e simul.

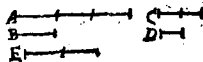
Sequentes propositiones ideò hinc inter Euclī-
 deas tolerantur, quia scriptores gravissimi, Archi-
 medes, Apollonius & Pappus ijs utuntur.

PROPOS: XXVI.

Theorema 26.

Si prima a ad secundam b habu-
 erit maiorem proportionem, quàm
 tertia c ad quartam d : habebit con-
 vertendo secunda ad primam mino-
 rem proportionem, quàm quarta ad
 tertiam.

10. V.
 8. V.



Habeat quædam e ean-
 dem rationem ad b , quàm
 habet c ad d . Quia ergo a
 ad b , maiorem habet rati-
 onem, quàm c ad d , id est, quàm e ad b ; erit etiam

a ad c

a maior quàm *c* ; & *b* ad *a* minorem β habebit rationem, quàm ad *c* minorem, id est, quàm *d* ad *c* :

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima *a* ad secundam *b*, habuerit maiorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d* : habebit quoq; vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

Intelligatur *e* esse ad *b*, ut *c* ad *d*. Quia ergò ad *b* maiorem habet rationem *a* quàm *c* ; *a* erit maior *c* : β maiorq; erit proportio *a* ad *c*, quàm *e* ad *c* Cumq; permutando sit, ut *e* ad *c*, ita *b* ad *d*. maiorq; sit ratio *a* quàm *e* ad *c*; etiam *a* ad *c* quàm *b* ad *d* maiorem rationem habebit. 10. V.
78. V.

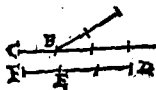
PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si prima *a* ad secundam *b* maiorem habuerit proportionem, quàm

quàm tertia de ad quartam ef , habebit quoque composita prima cum secunda ac , ad secundam bc maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta df ad quartam ef .

G



Habeat gb ratio-

nem ad bc , quàm de ad

ef , eritq; ab ad bc ma-

jor proportio, quàm gb ad

bc , & ab = major quàm gb . Addita ergò com-

muni bc , fiet abc major, quàm gbc , & majorq; e-

rit proportio abc quàm gbc ad bc . Sed & com-

ponendo: ut est gbc ad bc ita df ad ef . Major

itaq; est proportio ac ad bc , quàm df ad ef .

α 10.V.

β 8.V.

γ 18.V.

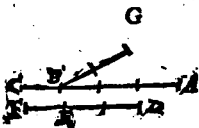
PROPOS: XXIX.

Theorema 29.

Si composita ac prima cum secunda ad secundam bc maiorem habuerit proportionem, quàm composita df tertia cum quarta ad quartam ef : habebit quoque dividendo prima ab ad secundam bc maiorem proportionem, quàm tertia de ad quartam

tām ef.

Habeat gbc ad bc rationem, quam d f ad e f , erit g , major ac , quam gbc ratio ad bc , a major ac quam gbc . Hinc ablata communi bc , major erit ab quam gb ; adeoque β major proportio ab quam gb ad bc . Sed γ dividendo, ut gb ad bc , ita de ade f . Ergo major est proportio ab ad bc , quam de ade f .



= 10. V.

 β 8. V. γ 17. V.

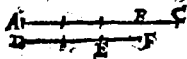
& ex hypo.

PROPOS: XXX.

Theorema. 30.

Si composita ac prima cum secunda, ad secundam bc maiorem habuerit proportionem, quam composita d f tertia cum quarta, ad quartam e f : habebit per conversionem ratio, nis, ac prima cum secunda, ad primam ab , minorem proportionem, quam d f tertia cum quarta, ad tertiam de .

Quia enim ac ad bc major est proportio, quam d f ad e f ; etiam = dividendo ma-



= 19. V.

I

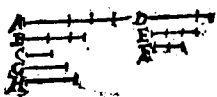
jor

- α 26.V. *ior est proportio ab ad bc, quàm de ad ef. Ideoq;*
 β convertendo, minor proportio bc ad ab, quàm ef
 γ 28.V. *ad de; eaq;* propter γ componendo minor propor-
 tio totius a c ad ab, quàm totius df ad de.

PROPOS: XXXI.

Theorema, 31.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 & aliæ ipsis æquales numero d, e, f ,
 sitque major proportio primæ a pri-
 orum, ad secundam b ; quàm primæ
 posteriorum d ad secundam e ; item
 secundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quàm secundæ e posteriorum ad
 tertiam f : erit quoque ex æqualitate
 major proportio primæ a priorum ad
 tertiam c ; quàm primæ d posteriorum
 ad tertiam f .



α 13.V.
 β 10.V.
 γ 2.V.

Estoenim g ad c , ut
 e ad f , & a erit major
 ratio b quàm g ad c , Ama.
 iorq; b quàm g . Ideoq; γ
 major erit ratio a ad g minorem, quàm a ad b
 maiorem. Cum autem major ponatur ratio a
 ad b , quàm d ad e ; multò erit major a ad g ,
 quàm

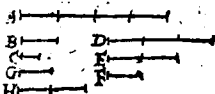
quàm d ad c . Rursus esto h ad g , ut d ad e , & erit
 a ad g major quàm h ad g , & major g , a quàm h .
 Ideoq; ad c major a maiorem habet rationem,
 quàm h . Sed ut h ad c , ita d ad f , ex equali
 (quia ut d ad e , ita h ad g , & ut e ad f , ita g ad c)
 Ergo etiam major est ratio a ad c , quàm d
 ad f .

PROPOS: XXXII:

Theorema 32.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 & alia ipfis æquales numero d, e, f , sita
 que major proportio primæ a prio-
 rum ad secundam b , quàm secundæ
 posteriorum ad tertiam f ; item se-
 cundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quàm primæ d posteriorum ad se-
 cundam e : erit quoque ex æqualita-
 te major proportio primæ a priorum
 ad tertiam c , quàm primæ d postero-
 rum ad tertiam f .

Esto g ad c , ut d ad
 e , eritq; b major ratio,
 quàm g ad c , & b ma-
 jor quàm g . & Major er-
 go est ratio a ad g minorem quàm ad b .



æ 10. V.
 & 8. V.

I 2

Cumq;

a 10. V.

β 8. V.

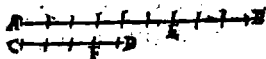
γ ex hypot.

Cumq; a ad b sit major quàm e ad f, multò major est a ad g quàm e ad f. Rursus esto h ad g ut e ad f, eritq; a ad g major ratio, quàm h ad g, & a major quàm h. Ideoq; & a major quàm h ad g habet maiorem rationem. γ Sed ut h ad c, ita e ex quali d ad f. Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f.

PROPOS: XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius ab ad totum cd, quàm ablati ae ad ablatum cf: erit & reliqui eb ad reliquum fd major proportio, quàm totius ab ad totum cd.



Quia enim
major est ratio a
b ad cd, quàm

a 23. V.

β 30. V.

ae ad cf; a erit etiam permutando major ratio ab ad ae, quàm cd ad cf: & per β conversionem rationis minor erit ratio ab ad eb, quàm cd ad fd. Itaq; a permutando, minor erit ratio ab ad cd, quàm eb reliqua ad fd reliquam.

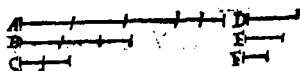
PROPOS: XXXIV.

Theorema 34.

Si.

Si sint quotcunque magnitudi-
nes a, b, c , & aliæ ipsis æquales nume-
ro d, e, f ; sitque major proportio pri-
mæ a priorum ad primam d posteri-
orum, quàm secundæ b ad secundam
 e ; & hæc major quàm tertiæ c ad ter-
tiam f , & sic deinceps: Habebunt o-
mnes priores simul, ad omnes poste-
riores simul majorem proportio-
nem, quàm omnes priores b, c relictæ
prima a ad omnes posteriores e, f , re-
lictæ quoque prima d ; minorē autem,
quam prima priorum a , ad primam
posteriorum d ; majorem denique
etiam, quàm ultima c priorum ad
ultimam f posteriorum.

Quia enim major
est ratio a ad d ,
quàm b ad e ; etiā



a 27. V.

b 28. V.

permutando major est a ad b , quàm d ad e & si
componendo major a, b simul ad b , quàm d, e si-
mul ad e : rursumque permutando major a, b simul
ad d, e simul, quàm b ad e . Itaque cum ab tota ad
de totam habeat majorem rationem, quam abla-
ta b ad ablatam e , & etiam reliqua a ad reli-
quam d majorem rationem habebit, quam ab to-
ta ad de totam. Pari modo major erit ratio b
ad e , quàm bc ad ef ; ac proinde multo major a ad

I 3

 d , quàm

d, quàm bc ad ef; & α permutando major ratio
a ad bc, quàm d ad ef; & β componendo major
abc ad bc, quàm def ad ef; & rursus permutando,
major omnium simul abc ad omnes simul def,
quàm bc ad ef. Quod est primum. Cum igitur
totius abc ad totum def sit major ratio, quàm
ablati bc ad ablatum ef; erit etiam reliqui a ad
reliquum d major, quàm totius abc ad totum def.
Quod est secundum. Quia etiam major est ratio
b ad e, quàm e ad f; erit α permutando major quo-
que b ad c, quàm e ad f; & β componendo major
totius bc ad c, quàm totius ef ad f. Cum autem
major sit ratio abc ad def, quàm bc ad ef: ex
demonstratis: multò ergò major erit ratio omnium
abc ad omnes def, quàm ultima c ad ultimam f.
Quod est tertium.

PROPOSITIO XXXV.

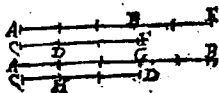
Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus a b,
ad majoris in æqualitatis aliæ æqua-
les be, df addantur; component ra-
tionem minorem ae ad cf: Si æqua-
les demantur bg & dh, relinquent ra-
tionem majorem ag ad ch.

α 14. V.

Permutatur, ut ab ad cd, ita be addi: α Erit
bc hoc

be, hoc est gb major quàm
di: & ideoq; cd ad di mi-
norem habebit rationem
majorem, quàm ad df ma-



C 8. VI.

jorem. & Quare etiam ab ad be majorem ratio-
nem habebit, quàm cd ad df: & d componendo γ 13. V.
ac ad be majorem rationem habebit, quàm cf δ 28. V.
ad df: Sed: revertendo a e ad ab minorem ratio- ϵ 30. V.
nem habebit, quàm c f ad cd. Quare & permutan- ζ 27. V.
do ac ad cf minorem rationem habebit, quàm a b
ad cd. Quod erat propositum. Eodemq; modo
altera propositionis pars demonstratur.

Hinc patet: Data rationaliam paulò mi-
norem majoremve dati, equalib; quantitatib; addi-
tione vel subtractione.





EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

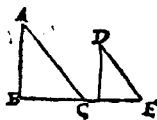
LIBER VI.

Definitiones.

I.



Similes figuræ rectilinæ
sunt abc, dec , quæ & angu-
los singulos singulis æqua-
les habent $a, d; b, c; c, f$; atq;
etiã latera quæcircũ æquales angu-



los, proportionalia, ut
 ab ad bc ; ita dc ad ce .
Utraq; enim hac in figu-
rarum similitudine, & æ-
qualitatem angularum, & proportiona-
lita-

ſitatem laterum oportet cōcurrere. Ideoq;
etiam tantum habet locum in ejusdem
ſpeciei figuris, circulis & circulis, quadra-
tis & quadratis, &c.

2. Reciproca figuræ ſunt $abcd$ & $efgh$ cum in utraque
figura antecedentes
 ad, hg & conſequentes
 eh, bc rationum termi-
ni fuerint. Hic nulla
ſequitur figurarum ſimilitudo.



3. Secundum extremam & medi-
am rationem recta linea ſecta eſſe
dicitur, cum ut tota ad majus ſe-
gmentum; ita majus ad minus ſe
habuerit.

Extrema & media ratione eſt in ex-
tremum & medium terminum dividi.

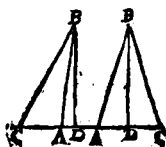
Quæ prout in 30 propoſ. docebitur & a-
lijs verbis in 11.11. eſt tradita. Ex uſu au-
tem maximo in ſtereometria potiffimum,
quod libro 12. conſtabit, dicta eſt divina
hac proportio.

4. Altitudo bd cujuſque figuræ
 abc eſt linea perpendicularis à verti-

I 5

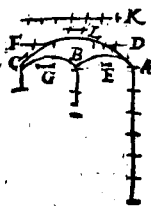
ce b

ce b ad basin a deducta. Hinc æ
quæ altæ dicuntur figuræ quarû perpen-



diculares sunt æquales,
ita enim etiam, consiste-
re possunt intra duas pa-
rallèlas sua basi & ver-
tice.

5. Ratio a ad c ex rationibus a ad
 b , & b ad c componi dicitur, cum ra-
tionum a ad b & b ad c quantitates de-
nominatores d ad e & f ad g , inter se
multiplicatæ d in f & e in g , aliquam
effecerint rationem a ad c .



Quantitas rationis est
denominator proportionis
dictus, quod indicet quã-
ta sit magnitudo anteces-
dens respectu consequen-
tis. Ex duabus ergo
vel pluribus rationibus

componi dicitur ratio, quando ipsarum
denominatores inter se multiplicati eam
efficiunt. Ut duodecupla componatur ex
dupla & sextupla, quia denominator
duodeuple proportionis producitur ex
mul-

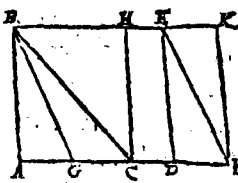
multiplicatione denominatorū dupla 2. & sextupla 6. Ideoq; quocunq; magnitudinib; ordine positus, ratio extremorum componitur ex rationibus intermediorum.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Triangula abc , item def parallelogramma $ahdk$, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se; ut bases abc ad def , & ah ad dk , ut ac ad df .

Est basis ac dupla ad basin df , & a secetur bisariam in g , connectaturq; g ad b . Erunt Triangula abg gbc & def æqua-



lia & Triangulum abc duplum Trianguli def , videlicet ut basis ac ad basin df , ita Triangulū abc ad Triangulū def . Quod primum est. Ita etiam cum parallelogramma ah & dk sint 2 dupla Triangulorum abc & def ; deris ut abc ad def ita parall. ah ad dk parall. Quare etiam ut basis ac ad basin df , ita parall. ah ad parall. dk . Quod est secundum.

Hinc

Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelograma quæ æquales habent bases, sunt ut altitudines. Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima hujus patet propositum.

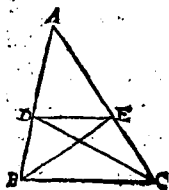
PROPOS: II:

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli abc latus bc parallela ducta fuerit recta, quædam linea de , hæc proportionalitate ut ad ad db , ita ae ad ec secabit ipsius Trianguli latera. Et si Trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, de , erit ad reliquum ipsius Trianguli latus bc parallela.

Ducantur rectæ be , cd .

Est enim ut a equalia Triangula dbe & dce ad Triangulum dae ; & ita bases bd ad da , & ce ad ea . Quod est primum. Et rursus: ut basis bd ad basin da ; & ita bed ad eda .
d: Qua-



α 37. I.

β 7. V.

ϵ 1. VI.

δ 11. V.

d: Quare Triangula $\triangle bed$ & $\triangle ced$ erunt equalia, 29. V.
 Seruq; de ipsi bc parallela: Quod est secundum. 39. I.

PROPOS: III.

Theorema 2.

Si Trianguli bac angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea ad secuerit & basin: basis segmenta bd , ad dc eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera ba ad ac . Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat Trianguli ipsius angulum.

Per punctum b agatur ipsi ad parallela be , concurrens cum ca producta in e . Quia ergo sunt equaliter anguli dab & abe ; dac & e ; erunt quoq; his opposita latera ea & ab equalia. Quare ba ut ea , hoc est ba ad ac , ita bd ad dc . Quod primum. Rursus etiam est, ut bd ad dc ita



ex hypot.
 & 29.
 6. 2. VI.

dc ita

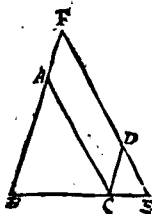
de ita ba velea ad ac; erunt recta ba & ea & y
 æquales anguli eba & bad, e & dac erunt d æ
 quales. Angulus nimirum a bisariam est sectus per
 da. Quod erat propositum.

§ 5. I.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Acquiangulorum abc, def. Tri-
 angulorum proportionalia sunt la-
 tera, ut ab ad bc; ita cd ad de, ut bc ad
 ca; ita ce ad ed, ut ba ad ac; ita cd ad de,
 quæ circum æquales angulos, b & d c
 e, b ca & e, a & d, & homologa sunt la-
 tera, ab ad dc, bc ad ce, ac ad de, quæ æ-
 qualibus angulis bca & ea & cd, b & dce,
 subtenduntur.



Sint bases bc & ce Tri-
 angulorum & secundum an-
 gulorum æqualitatem simili-
 ter positorum, in directum. &
 concurrant ba & ed productæ
 in f. Quia ergo anguli dce &
 b, item acb & e sunt æuales,
 erunt parallele bf & cd;
 item ac & ef, & acdf parallelogrammum.
 Erit ergo ut ba ad af, hoc est, cd, ita bc ad ce;
 & permutando ut ab ad bc, ita dc ad ce. Rursus
 erit

§ 28. I.

§ 34. I.

§ 2. VI.

§ 7. V.

§ 16. V.

verit etiam, ut bc ad ce , ita fd ad hoc est, ac ad de , & permutando ut bc ad ca , ita ce ad ed .
 Erit ergo etiam ex æquali, ut ab ad ac ; ita cd ad de . 22.V.
 Corollarium.

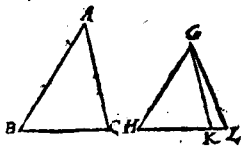
Hinc patet: Recta ac uni laterum se Trianguli bfc parallela, aufert Triangulum bac , 19.I.
 Simile toti bfc & Aequales enim sint anguli f & a , 4.VI.
 e & c & b communis. Quare latera b proportionalia 11. def. VII
 lia & ipsa Triangula, similia.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si duo abc , $h g k$ Triangula latera proportionalia habeant, ut ab ad bc ; ita $g h$ ad $h k$, ut bc ad ca , ita $h k$ ad $k g$, ut $b a$ ad ac , ita $h g$ ad $g k$, æquiangula erunt Triangula, a & g , b & h , c & k , & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera bc ad hk , ac ad gk , ab ad gh subtenduntur.

Conversa preceden-
 tis. Si Triangulo abc
 non Triangulum $h g k$,
 sed $h g l$ esset æquiangu-
 lum: a Essent ergo gh
 ad hl , sicut & gh & hk , ut ab ad bc ; & hl ,
 æquale ipsi hk ; totam parti. Quod absurdum.



a 4. VI.

β ex hypot.

7.9.V

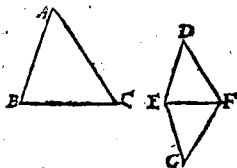
PRO-

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si duo abc, def Triangula unum b
angulum uni e angulo æqualem, &
circum æquales angulos latera pro-
portionalia, ut $a b$ ad bc , ita $d e$ ad $e f$,
habuerint: æquiangula erunt Trian-
gula, æqualesque habebunt $a \& d, c \& f$
angulos, sub quibus homologa bc ad
 $e f, ab$ ad $d e$, latera subrenduntur.

α 23. l.
 β 32. l.
 γ 4. VI.
 δ ex hypot.
 ϵ 9. V.
 ζ 4. l.



Ad e f recta pun-
ctae & fiant anguli
æquales angulis b & c
 β Erit etiam g æqualis
a; & Triangula a h c
& e f g æquiangula. γ

Ideoq, ut ab ad bc , ita ge vel $d e$ ad $e f$; eruntq;
 ge & $d e$, æquales; & reliqui anguli reliquis an-
gulis, & Triangula abc, def æquiangula.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

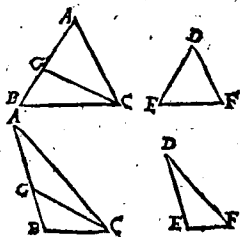
Si duo abc, def Triangula unum
 a an-

angulum uni d æqualem, circum autem alios angulos c & f latera proportionalia habeant; ut ac ad cb , ita df ad fe : reliquorum verò simul utrumque b & c aut minorem, aut non minorem recto: Acquiangula erunt Triangula, & æquales habebunt eos angulos, c & f , circum quos proportionalia sunt latera.

Esto primum uterq, tertius angulus b & c acutus. Si abc & def non sunt equiangula = fiat angulus agc

æqualis angulo e ; & erit ergò bgc obtusus, & ut d ad fe , ita ac ad ecg & cb & sic gc

& cb , anguliq, ad basin bc sunt æquales; obtusus acuto Quod absurdum. Idem absurdum sequitur, si b & c , anguli sint obtusi.



23. l.

13. l.

4. VI.

ex hypot.

5. l.

PROPOSITIO IIX.

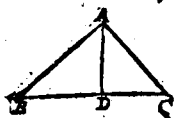
Theorema 8.

Si in Triangulo abc rectangulo, ab angulo a recto in basin bc perpendicu-

K

dicu-

dicularis adducta sit: quæ ad perpen-
dicularem Triangula bda & adc tum
toti bac Triangulo, tum ipsa inter se
similia sunt, bda & adc .



Quia enim bac & bda
rectangula præter angulum
rectum, & communem habent
 b , etiam tertius, tertio est

a 32. I.

p 4. VI.

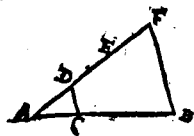
γ 1. def. VI.

aqualis, & Triangula, illa sex equiangula late-
raq; habent circa aequalis angulos proportionalia,
laterum homologia observata, videlicet, ut cb ad
 ba , ita ab ad bd ; & ut ba ad ac , ita bd ad
 da . Itaq; sunt & similia Triangula. Eadem etiam
Triangula cæst demonstratio.

PROPOSITIO IX.

Problema i.

A data recta ab linea imperatam
partem auferre ag .



Auferenda sit pars tertia.

Ex a ergò ducatur sub quovis
angulo recta infinita ac , ex
qua auferantur tres aequales
partes ad , de , ef , & f conne-

a 31. I.

γ 2. VI.

γ 18. V.

ctatur cum b , cui per d agatur parallela dg . Erit
 ag pars tertia desiderata. Quia enim est; bus
 ad ad df , in ag ad gb ; erit, componendo; Vt tota
 af ad

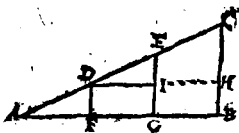
af ad partem ad; ita data ab ad partem desideratam ag. Quod erat faciendum,

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam ab rectam lineam in se-
ctam similiter secare, ut data altera
a recta secta fuerit in d & e.

Efficiant duæ re-
cte ab & ac angulum
quemcunq; a, & ducatur
cb, cui per d & e
a agentur parallele eg



31. I.
& df: item per d ipsi ab parallela dh. Est ergo $\frac{af}{ad} = \frac{df}{de}$ VI.
ut ad ad d e, sic af ad fg: item ut de ad ec; ita di y 34. l.
ad ih, id est, fg ad gb: atq; ita ab ipsi ac simi-
liter secta. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XI.

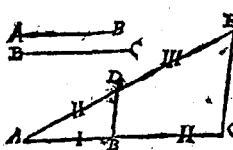
Problema 3.

Duabus datis rectis lineis ab, bc,
tertiam proportionalem adinve-
re.

Data duæ rectæ a b, bc ponantur in dire-
ctam, & quovis angulo c a e ducatur recta

K a inf-

31. I.
2. VI.



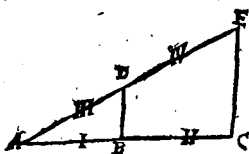
in infinita ae , à qua ab-
scindatur ad equalis
ipfi bc ductaq; db a-
gatur ce = parallela per
 c . β Erit ergo, ut ab pri-
ma ad bc secundam; ita

huic equalis ad , ad de tertiam quaesitam.

PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam pro-
portionalem invenire.



Data due ab pri-
ma. & bc secunda po-
nantur in directum, &
quovis angulo cae du-
catur recta infinita, in
qua sumatur tertia ad

ductaq; db parallela c e per c agatur. β Erit ut
 ab prima, ad bc secundam; ita ad tertia, ad d e
quarta m quaesitam.

31. I.
2. VI.

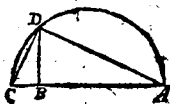
PROPOSITIO XIII.

Problema 5.

Duabus a, b , b, c , datis rectis, me-
diam

diam proportionalem adinvenire.

Data dua recta ab , bc ponantur in directum, & super tota ac describatur semicirculus adc , & erigaturq; ex b



perpendicularis bd , & ducantur ad , cd . Erit ergo adc in semicirculo rectus; & db perpendicularis efficit duo Triangula abd & cbd & æquiangula. Ideoq; d proportionalia, Vt ab ad bd , ita bd ad bc . Est ergo bd media proportionalis.

α 11. I.
 β 3 1. III.
 γ 8. VI.
 δ 4. VI.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 9.

Aequalium, & unum abc uni ebg æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, bd , bf , reciproca sunt latera, ut ab ad bg ; ita eb ad bc quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum bd bf unū abc angulum uni ebg angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia bd , bf .

Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verti-

K 3 " calco

¶ 1. 1.

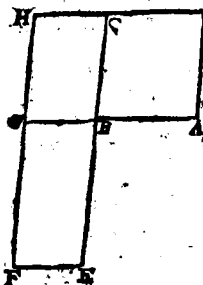
¶ 7. V.

¶ 1. VI.

¶ 2. def. VI.

¶ 1. VI.

¶ 9. V.



dales ad b, & ita a in dire-
ctum erunt ab, bg, item
bc, & be: compleaturq;
gnomon ahe. Habebunt
equalia parallelog. bd &
bf & eandem rationem ad
bh, quam bases ab ad
bg, & be, ad bc i. e. sunt &
reciproca. Contra sunt late-
ra circum æquales angulos

ad b reciproce proportionalia, ut ab ad bg, ita be
ad bc, erunt parall. bd & bf equalia. Habent e-
nim bd & bf ad bh eandem rationem. Ideoq;
sunt & equalia.

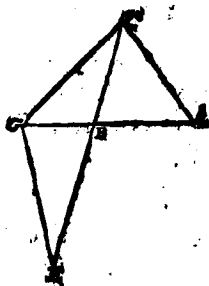
PROPOSITIO XV.

Theorema 10.

Æqualium, abc , ebg , & unum abc
uni ebg æqualem habentium angu-
lum, Triangulorum, reciproca sunt
latera, ut ab ad bg , ita eb ad bc , quæ
circum æquales angulos. Et quo-
rum Triangulorum abc , ebg , unum
angulum abc uni ebg æqualem habē-
tium reciproca sunt latera, ut ab ad
 bg , ita eb ad bc , quæ circum æquales
angulos; illa sunt æqualia.

Deo

*Demonstratio cum
priori. coincidit, quod Pa-
rallelogramma sint Triā. u-
lorum dupla. Rursum ex-
gō anguli aequales fiant
verticales, ut ab, bg &
 cb, be sint α in directum,
& ducatur cg . Erit
ut equalia Triangula abc
& cbg ad Triangulum
 cbg , ut abases erunt ad bases, δ ut ab ad bg , ita
 eb ad bc , id est, reciproce. Et contra: Lateri-
bus datis reciprocis vel sabibus. Erit ut aequales
rationes data basiū ab ad bg , vel eb ad bc , ita
triangulum acb , vel bgc ad triangulum bcg ;
Ideoq, triangula acb & beg , erunt equalia.
Quod erat ostendendum.*



α 4. I.
 β 7. V.

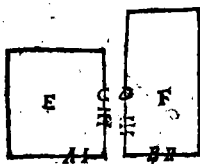
γ 1. VI.
 δ 11. V.

ϵ 1. VI.
 ζ 9. V.

PROPOS: XVI.

Theorema 11.

Si quatuor rectę lineę a, b, c, d pro-
portionales fuerint: ut a ad b ; ita d ad c
quod sub extremis a & c comprehenditur
rectangulū e , æquale est ei, quod
sub medijs b & d comprehenditur,
rectangulo f . Et si sub extremis a & c cō-
prehensum rectangulū e æquale fue-
rit ei f , quod sub medijs b & d conti-
netur, rectangulo: illę 4. lineę rectę
 a, b, c, d proport. erūt ut a ad b , ita d ad c .



$\alpha 2$. def. VI.
 $\beta 14$. VI.

Quia enim, α . da-
 ta recta proportionales, ut
 α ad b , ita d ad c ; ponit-
 tur in duobus rectangulis
 e & f , circa aequales re-
 ctos α reciproca; erunt
 rectangula e & f β aequa-

lia. Et contra rectangula e & f aequalia habebunt
 circa aequales angulos latera reciproce proportio-
 nalia, ut a ad b , ita d ad c ; & ut a ad d , ita b ad c .
 Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac
 & sequenti proportionem.

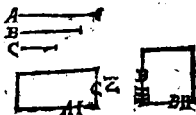
PROPOS: XVII.

Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportio-
 nales: ut a ad b ; ita b ad c ; quod sub
 extremis a & c comprehenditur re-
 ctangulum e , æquale est ei, quod à
 media b describitur, quadrato f ; Et
 si sub extremis a & c comprehensum
 rectangulum e æquale sit ei, quod à
 media b describitur quadrato e : illæ
 tres rectæ lineæ a , b , c , proportiona-
 les erunt ut a ad b ; ita b ad c .

Quia

Quia enim media proportionalis b bis est ponenda, erunt ut in precedente propositione 4. recta circum angulos aequales



rectos & reciprocè proportionales. Ideoque rectangula $\mathcal{C}$ & $\mathcal{B}$ aequalia. Et contra, aequalia rectangula circa angulos rectos habent latera reciprocè proportionalia, videlicet, ut a ad b , ita eadem b ad d . Quod erat ostendendum.

22. def. VI.

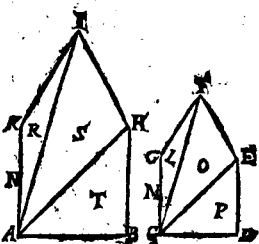
§ 4. VI.

PROPOSITIO XIX.

Problema 6.

A data recta ab linea dato rectilineo $cdefgm$ simile similiterque positum rectilineum $ab h i k n$ describere.

Rectilineum datum in resolvatur in Triangula per lineas equales ce, cf , ex eodem angulo c . Fiant aequales angulis dce quidem hab , & d ipse b ; erunt Triangula abh & cde



23. I.

K S

§ equi-

A. 231.
24. V.

2. 2. ax.

4. VI.
22. V.

1. def. VI.

aequali angula & latera γ proportionalia, ut &c ad
cd, ita ha ad ab, atq; ita Triangula similia simili-
literq; posita. (secundum eundem situm quoad late-
ra & angulos) ita Triangulo cef super ah, fiat si-
mile similiterq; positum Triangulum ahi. & de-
rit quadrangulū abhi, quadrangulo cdef equi-
angulum. Ideoq; cum ex similitudine Trian-
gulorum, ex quib. sunt facta, sit ut cd ad ce, & ce
ad cf, ita ab ad ah & ah ad ai, & erit ex equali, ut
cd ad cf, ita ab ad ai, latera nimirū circa aequales
angulos sunt proportionalia; & ita etiā quadran-
gulum abhi simile est similiterq; positum qua-
drangulo cdef. Deniq; super ai simile simili-
terq; positum fiat Triangulo cfg Triangulum aik,
quod additum quadrangulo efficit pentagonum
pentagonum e aequiangulum & simile similiterq;
positū. Quia enim rursus ut cd ad cf & cf ad cg,
ita ab ad ai, & ai ad ak; & ergo ex equali ut cd ad
cg, ita ab ad ak: atq; ita circa reliquos angulos
reliqua latera sunt proportionalia; & ipsi ita simi-
le similiterq; positum Pentagonum. Quod erat fa-
ciendum.

PROPOS. XIX.

Theorema 13.

Similia abc, def Triangula inter
se sunt in duplicata ratione laterum
homologorū. bc & ef (hoc est quadra-
ta quā refertur bc ad tertiā proport. bg.

Late-

Lateribus duobus
homologis bc & ef

inquaratur tertia

Proportionalis bg .

ducaturq; ag . Quia

ergo est θ ut ab ad bc , ita de ad ef ; ergo γ per

mutando, ut ab ad de , ita bc ad ef ; & data ef ad

bg videlicet reciprocando circa aequales angulos, b

& c . Itaq; equalia erunt Triangula bac & def ,

ad quae utraq; ζ eandem habet rationem abc ;

eam videlicet η quae est basis bc ad basim bg , id est,

prima bc ad tertiam bg , & duplicatam rationem

homologorum laterum bc ad ef . Itaq; etiam tri-

angula bac & def habebunt rationem duplicatam

homologorum laterum.

Hinc patet. Si tres bc , ef , bg , rectae sint

proportionales, ut de ad e , ad bg , ut est pri-

ma, bc ad tertiam, ef , ita est Triangulum ab

super primam bc , descriptum ad Triangulum

def super secundam ef , simile sive litemq; descriptum:

Ita etiam Triangulum super secundam ef ad Tri-

angulum super tertiam bg .

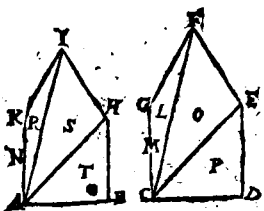
PROPOSITIO XX.

Theorema 14.

Similia polygona m & n in similia
triangula dividuntur, l & r , o & s , p & t &
numero equalia: & homologa totis:

m & n &

& polygona duplicatam *quadratam* habent eam rationem inter se, quam latus homologum *c d* ad homologum latus *a b*.



Ab angulis equalibus *c* & *a* ad angulos oppositos *f* & *e*, *h* & *i*, ducantur lineae dividentes polygonam & *n* in terena equalia Triangula *lop* & *rst*. Quae

α 6. VI.

β 1. def. VI.

γ 22. V.

Triangula bina inter se ut *p* & *t*, quia circum aequales angulos *b* & *d* sunt latera proportionalia, sunt α equiangulara & β similia: ita cum sit, ex similitudine figurarū, *cc* ad *de* & *de* ad *ef*; ita *ha* ad *hb* & *hb* ad *hi*; etiam ex equali sit, ut *ce* ad *ef*, ita *ah*, ad *hi*, latera circa residuos aequales angulos ex toto *h* ipsi c equali; α & β erunt ο & s Triangula equiangulara aequè similia ac *p* & *t*. Ita deniq, α & β aequè similia sunt l & r, ut *p* & *t*. Cum ergò sint in ratione duplicata *p* & *t*, & ο & s & communium laterum homologorū *ce* ad *ah*, Itē ut ο & s, sunt etiam l & r in ratione duplicata communium homologorum laterum *cf* & *ai*; erunt etiam, ut *p* ad *t*, ita l ad r, & ο ad s. Ideoque etiā ita ut *m* ad *n*, ut *p* ad *t*, id est, Triangula similia sunt etiam homologa ipsis polygonis; Proindeq,

indeq; ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, cd ad ab . Quod erat propositum.

Hinc sequitur.

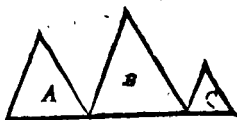
Si tres rectæ sint proportionales ut est prima ad tertiam, ita est figura super primâ descripta, ad figuram, super secūdā similem similiterq; descriptam: Et ita figura super secūdā descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 15.

Quæ eidem a & b rectilineo c sunt similia, & inter se a ipsi b sunt similia.

Quia enim utrumq; a & b est simile tertio c , eidem erit æquiangulum, & ita a & b inter se e-



runt æquiangula, & habebuntq; circa æquales angulos latera proportionalia, & inter se erunt d similia. Quod erat propositum.

a 1. def. VI.

β 1. ax.

γ 4. VI.

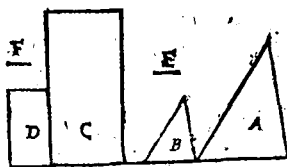
δ 1. def. VI.

PRO-

PROPOS: XXII:

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, & ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt, ut a ad b, ita c ad d. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta proportionalia fuerint rectilinea, ut a ad b, ita c ad d: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt; prima ad secundam, ut tertia ad quartam.



Quæritur primæ & secundæ, tertia proportionalis c, item tertia & quartæ, tertia proport.

¶ 10. def. V. f. Aequalium ergo rationum primæ ad secundam, & tertia ad quartam, etiam duplicate rationes, primæ a ad c, & tertia ad f: β a ad b & c ad d, æquales erunt.

Deinde, sint figure similes ut a ad b, ita c ad d β duplicate ratione homologorum laterum eadem, ut prima ad c, ita tertia ad f; erunt etiam dimidiatae rationes eadem, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam. Quod erat propositum.

PROQ

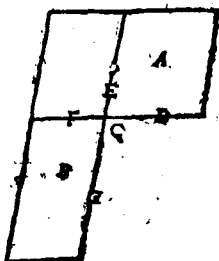
LIBER VI.
PROPOSITIO XXIII.

179

Theorema 17.

Aequiangula, ad verticem c , parallelogramma a & b inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus componitur.

Compleatur parallelogrammum h . Quia extremorum parallelogrammorum a ad b ratio a componitur ex intermedijs, a ad h , & h ad b , quibus β eadem sunt rationes laterum d ad f & e ad g : Itaque ex his γ rationibus laterum composita erit ratio a ad b . Quæ erat propositum.



α 5. def. VI.
 β 1. VI.

γ 11. V.

PROPOSITIO XXIV.

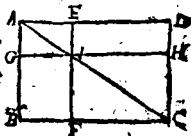
Theorema 18.

In omni parallelogrammo, bd , quæ circa diametrum ac sunt parallelogramma, ge , & fh & toti bd & inter se sunt similia.

(Diagonale est, quod & angulos & diagonium habet communem cum toto)

α Aequales n. sunt anguli aig

& eah ; cih & icf ; Item anguli gai ; aie , fic & ich



α 29. L

β 21.

¶ 34. I.

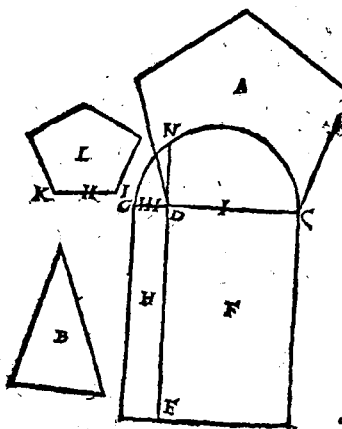
anguli item, e, g, h, f, ideoq; 4. illa Triangula sunt
 equiangula, & latera habent circum æquales an-
 gulos & proportionalia ut ae ad ei, ita i h ad hc,
 & ut a g ad gi; ita i f ad fc. Sunt ergo Diago-
 nalia & inter se & toti simili.

¶ 4. VI.

PROPOS: XXV.

Problema 7.

Dato rectilineo simile, similiter
 que positum & alteri dato æquale
 constituere.



¶ 44 v. 45. I.

Dato rectili-
 neo a cui con-
 struendum est
 simile ad latus
 c d sub an-
 gulo quovis c
 de = applice-
 tur parallelo-
 grammum f
 æquale; rur-
 susq; ad huius
 latus de sub
 angulo conti-
 guo ed appli-
 cetur parall.
 h. æ-

b. aequale rectilineo b, cui aequale est construendum.

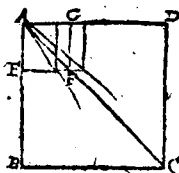
*Inter cd & id g β queratur media proportionalis β 13. V.
dn vel ik, super qua rectilineo a simile rectilineu 17. VI.
y construatur, quod erit aequale ipsi b. Quia e- 1. VI.
nim est, ut prima cd ad tertiam d g, data facit h, & 7. V.
id est, a ad b, & a ad l; etiam ex n aequali est 11. V.
aequale ipsi b, quod etiam est constructum simile ipsi 22. V.
a. Quod erat faciendum,*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

*Si à parallelogrammo b d paral-
lelogrammum ablatum sit e g; & si-
mile toti & similiter positum, com-
munem cum eo habens angulum;
hoc circum eandem cum toto dia-
metrum a c consistit.*

*Si quis ei dicat dia-
gonale, = erit illud simile
toti bd. Itaq; ut ba
ad a d; ita ea ad ag, &
ai equalia partem & to-
tum. Quod absurdum. I-
gitur non ei, sed eg est
diagonale. Quod erat d. monstrandum.*



24. VI.
31. def. VI.
7 9 V.

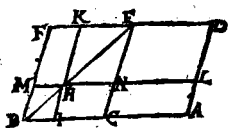
L

PRO.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 20.

Omniū ae & h parallelogram-
morum ad eandem rectam ab appli-
catorum, deficientiumque parallelo-
grammis cf & im similibus similiter-
que positis, ei ae quod à dimidia ae
describitur; maximum id est ae , quod
ad dimidiam applicatur parallelo-
grammum simile existens defe-
ctui im .



Ad data ab dimi-
diam ae quodcunque con-
stituatur parallelogram-
mum ae , & à completo
parallelogrammo af de-

ficiat ae simili parall. cf , dico ae esse maximū ap-
plicatorum secundum rectam ab , deficientiumque
parallelog. similibus. Postea enim ducatur Diagonus
 be in qua servatur ubicunque punctum h , per quod
ipsis ab & b f agantur parallele lm & ki . Erit
 ah deficiens parallelogr. & simili im minus ae & p vel
 cf . Quia enim complementa ch & hf sunt æqualia
erit nf vel nd , majus, quam ch , additisque commun-
ni an, erit ae totum majus toto ah . Quod erat pro-
positum.

PRO-

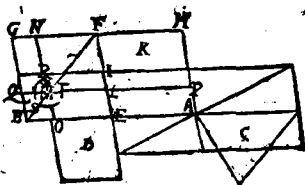
α 24. VI.
 β 43. I.
 γ 34. I.
 δ 36 I.
9. ax.

PROPOSITIO XXIX.

Problema 8.

Ad datam lineam ab rectam,
dato rectilineo c æquale parallelo-
grammum e applicare, deficiens fi-
gura parallelogramma d , quæ simi-
lis sit alteri parallelogrammo dato
 d . Oportet autem datum rectiline-
um c , cui æquale applicandum est,
non majus esse eo af , quod ad dimi-
dium applicatur, cum similes fuerint
defectus & ejus, quod ad dimidiam
applicatur, & ejus cui simile eg & o q
deesse debet.

Super dimidia
eb fiat paralle-
logrammum eg
simile d , comple-
atur a g & du-
catur g . si c
æquale fuerit



a 18. VI.

parallelogrammo a f vel e g , factum est, quod
jubet propositio. Si minus c a i sit minus

a f , tunc excessui k , p construaturs æquale ^{a 25. VI.}
L a paral-

726. VI.

parallelog. ipsi cg vel d simile similiterque positum
eritq; In ex eg secundum communem angulum al-
latum diagonale ipsius cg , Completa tota figura
ponq; Dico am ipsi c æquale esse.

Dex constr.

3. ax.

43. & 36. I.

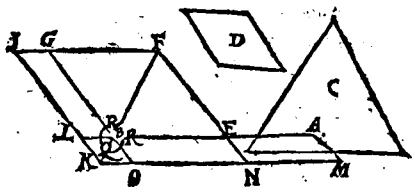
14. VI.

Ablatis enim ab d æqualibus af & c g , &
æqualibus k & ln , relinquitur ai vel rectilineum
 c æquale gnomoni rsx vel huic æquale parallelo-
grammo oq simili similiterque posito ipsi cg vel da-
to d . Quod erat faciendum.

PROPOS: XXIX.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , dato recti-
lineo c , æquale parallelogrammum
 ml applicare, excedens parallelogra-
mmo ol , quod simile similiterque sitū
sit alteri dato d .



18. VI.

25. VI.

Ad data ab & rectam cb applicetur a parall.
 cg , simile similiterque situm dato d . Deinde β fiat
paral-

parallelogrammum ni equale duobus rectilineis
 c & eg, simile verò eidem eg; erit eg dia- 26.VI.
 gonale, ipsius ni; inversa nimirum recta si ponatur
 homologa lateri f g & compleatur figura a k
 ge. Dico ml equale esse ipsi c.

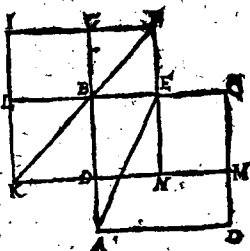
Aequalia enim erunt rectilineo c gnomon d^{lex const.}
 p gr & parallelog. ml, quod excedit datā a b & 2. ax.
 parallelogrammo ol, simili similiterq; fito, ipsi eg,
 five dato d. Quod erat faciendum.

PROPOS: XXX.

Theorema 10.

Propositam rectam ab lineam
 terminatam extrema, ac media ra-
 tione secare.

Adata ab a de-
 scribatur quadrangulum bd, cui ad re-
 ctam cb applicetur p
 equale parallelogr.
 ml excedens ipsam
 c b similiter qua-
 drato ol (super di-
 midia nimirum, beco-



46. I.
 29. VI.

struatur quadratum eg, & ducatur ea, quæ erit
 latum quadrati f k, quod quadrat is duobus b d &

L 3

eg est

747.1.

eg est & aequale. Id. oq, ipsi ea sit similis si homologia lateri fg, & compleatur Figura, (fm l) Dico ab scdam esse proportionaliter.

d 3. ax.

Stenim ab equalibus bd & lm auferatur commune mb, & relinquetur rectangulum d o sub tota ad siye ab & segmento a o comprehensum aequale quadrato o l facto a segmento ob. Ideoq, tres rectæ a b, b o & o a sunt proportionales, a-

17. VI.

deoq, ab in o secta secundum mediam & extre-

3. def. VI. mani rationem, Quid eras faciendum.



In praxi commodissime adhibetur II. II. ut ad datam ab ad punctum b erigatur perpendicularis equalis bc, quo secetur equaliter in e, intervalloq, ea ponatur equalis el, & ipsi b l equalis bo, erit o sectio ipsius ab.

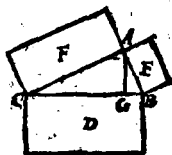
PROPOS: XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis abc triangulis, figura d quævis, à latere bc rectum angulum bac subtendente descripta, æqualis est figuris e & f, quæ priori illi similes, & similiter positæ, à lateribus

bus ab & ac rectum angulum continentibus describuntur.

Quia enim tria sunt
proportionales bc, ba, bg ;
& bc, ca, cg erit, ut bc ad
 bg ita d ad e , item ut bc ad
 cg ita d ad f . Est autem re-
cta bc aequalis ipsis bg & gc



28. VI.

3 cor. 10. VI

simul sumtis: Ideoque figura d aequalis erit figuris
 e & f simul sumtis. Quod erat ostendendum.

PROPOS. XXXII.

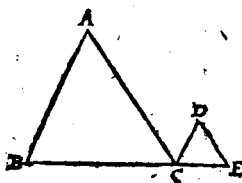
Theorema 22.

Si duo triacula, abc , dec quæ duo la-
tera duobus lateribus proportiona-
lia habeant, ut ba ad bc , ita cd ad de
secundum unum angulum acd com-
posita fuerint, ita ut homologa eo-
rum latera sint etiam parallela ba &
 cd , ac & de : tum reliqua illorum tri-
angulorum latera bc & cd in re-
ctam lineam collocata reperien-
tur.

E

Quia

α 29. I.
 β 6. VI.



Quia enim *aequales*
sunt anguli α *alterni*
acd, d & a; β erunt
Triangula aequiangula
& dce & b aequales;
quibus adduntur aequa-
les alterni acd & a,

erit totus ace duobus b & a aequalis, rursusq; ad-
dito communi acb, γ erunt duo acb & ace tribus
trianguli abc angulis, hoc est, duobus rectis aequa-
les. Ideoq; bases bc, ce erunt in eadem rectam seu
linea una be. Quod erat ostendendum.

γ 2. ax.
 δ 32. I.
 ϵ 14. I.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 23.

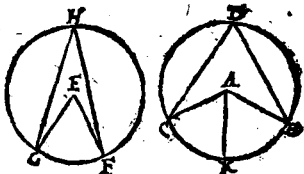
In aequalibus circulis, anguli e-
 andem habent rationem cum peri-
 pherijs *bc & fg*, quibus insistant, siue
 ad centra *bac, feg*, siue ad peripheri-
 as *bdc, fhg* constituti insistant: Insu-
 per verò & sectores *bca & fge*, quippe
 qui ad centra consistunt.

α 30. III.
 β 27. III.
 γ 41. V

Sic enim duplex arcus bc ipsius fg & bc ase-
ctur bisariam in f per rectam ak: Erunt anguli
bak, kac, feg aequales; ideoq; totus bac duplex
anguli feg, γ hoc est, ut arcus bc ad arcum fg;

ita

ita angulus ad
centrum bac
ad alterum fe
g. Quia vero
his ad centrum
d duplis e pro-
portionales sunt



anguli ad peripherias d & h, rursus erit: ut ar-
cus bc ad arcum fg, ita angulus d ad angulum h. $\times 8. 2x.$
Denique, sectores bka, kca, fge sibi mutuo congru-
entes erunt, & aequales, ideoque, & sector bca duplus
est sectoris fge, id est, & sector ad sectorem est, ut & 4. def. V.
arcus bc ad arcum fg.

Corollarium. 1.

Vt angulus ad angulum, & sic se-
ctor ad sectorem. $\times 11. V.$

Corollarium. 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos;
& ita arcus eidem angulo subtensus
ad totam peripheriam, scil. 4. rectos
subtendentem.

L 5

EU.



EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER VII.

Definitiones.

I.



Nitas est, secundum
quam unumquodque
eorum, quæ sunt, unū
dicitur. *Ita secundū u-*
nitatem, unam dicimus
ulnam, unū corpus, &c.

Hac indivisibilis esse concipitur, ut &
punctum.

2. Numerus autem ex unitatibus
composita multitudo. *Ita 7 ex septem*
unita-

unitatibus seu partibus constat. Quae earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur maiorem. Ita 5 est numeri 20 pars, quatenus de denominatione habet ab eo, per quem metitur numerum, cuius est pars, ubi est pars quarta 20, quia metitur illi per 4.

4. Partes autem, cum non metitur. Si nimirum minor maiorem non metiatur, ut 5 numerum 18, tum ipsius non pars sed partes dicitur, quia continet quinque unitates, quae singulae sunt decima octavae partes numeri 18. Nomen partium est ex illis numeris, per quas communis mensura utrumque metitur, ut cum 3 metiatur 6 partes 6, cuius non est partes, per 2 6, senarius dicitur duae tertie partes novenarii Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non qualibet magnitudo alteri ginequalis vel pars

pars vel partes est, quia saepe sunt incommensurabiles.

5. Multiplex verò major minoris, cum maiorem metitur minor. *Talis est omnis qui partes habet aliquotas, Ut 9. multiplex est 3.*

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur. *Ut 24.*

7. Impar verò qui bifariam non dividitur; vel qui unitate differt à pari: *Ut 3. 5. 7. Unde indivisibilem, hinc intelligi debere unitatem constat, aliàs quilibet numerus esset par. Ut 3. habere et dimidium $1\frac{1}{2}$ unitatem cum semisse.*

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem; *Ut 24. est pariter par, quia 4. cum metitur per 6. parem.*

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per imparem: *Ut 24. etiam est pariter impar quia 8. metitur, illum per 3. imparem. Ideo quod multi sunt numeri, qui & pariter pares & pariter impar se sunt.*

10. Impariter verò impar numerus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem. *Ut 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2. 5. 7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiam intelligantur numeri, qui per se primi non sunt modo ut inter se præter unitatem nullam habeant communem mensuram, ut 7. 10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illi 5. & 3. metiuntur. Omnes primi præter binarium sunt impares & omnes pares præter binarium compositi.*

14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur. *Etiam de ijs accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7. 14. 21. quia 7. eos metitur.*

15. Nu-

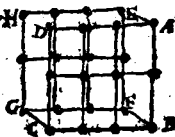
14. Numerus numerum multiplicat redigitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Ut 4 dicetur multiplicare 5, si quinarius fuerit quater compositus, quot in 4 sunt unitates, &c. Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. Ut ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4 ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuò sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Quæverò numeri mutuò sese multiplicarint, latera illius dicentur. Possunt enim ita procreari numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cuius latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliqua penè infinita planorū numerorū genera hic in Euclide nullius usus præterimus.

17. Cum

17. Cum verò tres numeri mutuò se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuò se multiplicarint, latera illius dicentur.

Ut 1, 2, & efficiunt 8 numerum solidum, cujus basis bfi latitudo est, longitudo bc 4, cui alia ba-



sis similis & equalis superposita facit, ut prius numerus habeat 8 & altitudo ab duas unitates. Unitas improprie & planus & solidus numerus appellari solet, eò quod & ex duabus unitatibus & tribus inter se multiplicatis producat.

18. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. Ut 16. est numerus quadratus, cujus dispositio refert accuratum quadratum cuius gradus est quaternarius.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. Sic 8 est cubus, cujus dispositio refert

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera sint equalia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: vel certè cū primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemque insuper illius partem vel easdem partes. Ut $\frac{6}{3} \frac{3}{6} \frac{8}{4} \frac{4}{8}$ numeri sunt proportionales, quia primus secundi æquè duplus est, ac tertius quarti, & rursus primus secundi æquè dimidium est ac tertius quarti. Ita 5. 4. 10. 8. sunt proportionales quia primus æquè secundum continet semel cum $\frac{1}{2}$ ac tertius quartum.

21. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera. Cum unus planus numerus possit varijs modis disponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, sed sufficit ut uno queat modo.

Ita

Ita similes sunt planè 6. & 24. quia laterum 2. ad 3. & 4. ad 6. eadem est proportio, etiam si 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 9. & 24 sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem, quam 4. 3. 2.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est aequalis. Loquitur de parte aliquota, de qua & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti futuri secundum quartam definitionem partium. Vt 6. est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1, 2, 3. simul sumptæ illum restituunt, ita 28 & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt majores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclidean definitiones addit Clavius ex Camparo sequentes.

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum producit. Sic 2 metitur 14 per 7 quia 2 multiplicatus per 7 producit 14.

M

24. Pro-

24. Proportio numerorum est habirudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet semel aut aliquoties & aliquam insuper illius partem vel partes. *Sic si numerus 24 comparetur cum 6 ea ratione qua ipsius multiplex est, nimirum quadruplus, dicitur illa habirudo proportio.*

25. Termini, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionè nequeunt sumi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint; primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundum: & semper deinceps uno amplius, quam dñi proportio extiterit. *In 10. def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot-

27. Quotlibet numeris ordinare possitis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI. fuerunt declarata. Ex V. verò etiam libro possunt peti argumentorum forma; qua etiam hoc VII in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi aequales vel multiplices.

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

M a AXI.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numero-
rum, vel ejusdem æquè multiplices
sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè
multiplex est, vel æquè multiplices
sunt, æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numero-
rum vel ejusdem eadem pars, vel
eadem partes fuerint, æquales inter
se sunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æ-
quales, eadem pars vel eadem par-
tes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Unitas omnem numerum per
unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per
ipsummet numerum metitur. *Quia*
unitas toties sumpta, quot in ipso sunt uni-
tates, ipsum numerum constituit.

Omnis

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem. *Semel enim sumptus numerus quilibet, sibi ipsi est æqualis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

IIX.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem. *Vt quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. *Vt 3 metiens 12*

M 3 per

*per 4, multiplicatus per 4 producit 16
quem metitur.*

X.

Numerus quocunque numero metiens, compositum quoque ex ipsis metitur. *Ut quia 3 metitur 6 & 9: Ideoque 3 metitur 15 ex 6 & 9 compositum.*

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur. *Ut quia 3 metitur 6 qui metitur 12: Ideoque etiam 3 metitur 12.*

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. *Ut quia 3 metitur 15 totum & 9 ablatum, ergo etiam metitur reliquum 6.*

PRO.

PROPOS: I.

Theorema 1.

Si duobus numeris ab, cd inæqualibus propositis, detrahatur semper minor cd de maiore ab alterna quadam detractiōe cd ex ab , eb ex cd ; fd ex eb , neque reliquus eb unquam metiatur præcedentem cd , quoad assumpta sit unitas gb ; qui principio propositi sunt numeri, ab & cd primi inter se erunt.

A E . . G . B

C . . . F . . D

H

Sin minus, metietur eos numerus, ceu communis mensura ut h . Cum itaq; h α metiatur ab & cd ; cd verò metiatur ae , etiam h & β . 11. ax. β ae & eb & reliquum metietur. Cumque eb γ 12. ax. α metiatur cf , etiam b & metitur c f & ipsius & reliquum fd . Cum denique fd α metiatur e etiam h metietur β e g & ipsius reliquum & gb unitate h numerus ceu totum suam partem.

M 4

Quod

Quod absurdum. Sunt ergo inter se primi, Quod erat propositum.

PROPOS: II.

Problema 1.

Duobus nuineris *ab*, *cd* datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram *f d* invenire.

A.....E.....B

C.....E...D

G---.

a ex hypot.
β 11. ax.
γ 10. ax.

Detrahatur minor *cd* ex maiore *ab* & residuum *eb* ex minore *cd* & ita alternatim procedendo propof. dum perveniatur ad numerum *fd*, qui precedentem *eb* metiatur. Erit *fd* communis mensura maxima. Cum enim *fd* *a* metiatur *eb*, & *eb* ipsum *cf*, etiā *fd* metietur *β* *cf*; Cumq; & seipsum etiam totum *cd* *γ* metitur. Metitur autem *cd* ipsum *ae*, ergo & *fd* eundem *a* *e*, & cum etiam *eb* metiatur, totum quoq; *a* *b*, & ita utrumq; *ab*, *cd* metietur.

Quod si quis etiam maximam hanc communem mensuram esse neget, esto *g* major quā *fd*. Cum ergo *g* metiatur & *a* *b* & *cd*; *cd* verò ipsum

ipsum ac ; itaq; e eb residuum: & cum e b metiatur cf , etiam g metietur cf & residuum fd , major minorem, quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Quod numerus metiens duos numeros etiam communem eorum maximam mensuram metiatur. Si enim totum & ablatum metiatur, metitur etiam reliquum, quod communis est mensura maxima.

PROPOS: III.

Problema 2.

Tribus numeris abc , datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram d e reperire.

A.....

B.....D....

C.....E..F....

Si d a inventa communis mensura a & b etiam metiatur c erit maxima communis mensura inventa. Si enim major quaedam sit quam d , eadem cum metiatur a , b , c etiam communem mensuram d metitur, major minorem Quod absurdum. Quod si d non metiatur c erunt in ter se compositi. Proinde cum eadem mensura

2. VII.

3. 2. VII.

M 5

com-

communis quæ a, b, c metitur, etiam β metiatur d
 p cor. 2. VII maximam mensuram a & b , α erit e mensura
 2. VII. communis ipsius d & c , etiam communis maxima
 mensura numerorum a, b, c . Quia enim e metitur
 c & d , d verò a & b , α metietur etiam e ipsos a
 & b . Caterum quod maxima communis mensu-
 ra sit e patet, si aliam fesse velimus: Tum enim
 f metiens a & b , β metiretur etiam d eorum com-
 munem mensuram: & cum metiatur d & c , etiam
 horum communem mensuram e metiretur. Non
 igitur esset hæc major. Atq; ita e est communis
 mensura maxima trium numerorum a, b, c . Quod
 erat faciendum.

Vnde nascitur Corollarium, quod numerus
 metiens tres numeros, communem etiam illorum
 mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema 2.

Omnis numerus omnis numeri
 minor a , majoris b , aut pars est, aut
 partes.

A.....

B.....

A....

B.....

A.....

B.....

C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes majoris b . Si sint compositi, & a metiatur b , a erit ipsius pars. Si a non metiatur b , sed c , & sit communis eorum mensura quoties a 3. def. VII numerum c continet b , tot partes continere dicitur b numeri a . Sic patet propositum. 2. VII.

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Si numerus a numeri bc pars fuerit, & alter d alterius ef eadem pars: & simul uterque a & d , utriusque bc & ef simul eadem pars erit, quæ unus a unius bc .

A.....

D.....

B..... G..... C E..... H..... F

Quia enim eadem pars est a ipsius bc , quæ d ipsius ef , continebit bc tot a , i.e. bg & gc , quot d i.e. eh , hf continet ef . Itaq; quot numeri a sunt in bc totidem numeri d & a simul sunt in bc & ef simul.

PROPOS: VI.

Theorema 4.

Si numerus a b numeri c partes fuerit,

rit, & alter *de* alterius *f* eadem partes: & simul uterque utriusque *ab* & *de*, *c* & *f* simul eadem partes erit, quæ unus unius *ab* ipsius *c*.

A...G...B | D... H.... E
C..... | F.....

5.VL

Cum aequales numero partes habeant *ab* & *de*, quæ pars est *a* *g* ipsius *c* & *gh* ipsius *f*, eadem erunt *a* *g* & *d* *h* ipsorum *c* & *f*. Similiter prioribus aequales *g* *b* & *h* *e*. Itaq; uterq; *ab* & *de* ipsorum *c* & eadem partes erit, quæ unus *a* *b* unius *c*. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si numerus *ab* numeri *cd* pars fuerit, qualis ablatus *a* *e* ablati *c* *f*: etiam reliquus *e* *b* reliqui *f* *d* eadem pars erit, qualis totus *ab* totius *cd*.

A...E...B
G....C.....F....D

Si ponatur *eb* numeri *gc* eadem pars, quæ est *ae*

est ae ipsius cf vel ab ipsius cd α erit uterq, ae , eb α s.VII.
 simul eadem pars utriusq, gc & cf , id est, quæ to-
 tius ab totius cd . Cum ergo ab sit eadem pars
 utriusq, gf & cd , erunt numeri æquales, à quibus
 ablato communi cf , relinquantur gc & fd æqua-
 les. Itaq, eadem pars est eb ipsius fd , quæ ab
 ipsius cd . Quod erat propositum.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus ab numeri c d partes
 fuerit, quales ablati ae ablati cf : &
 reliquus eb reliqui fd eadem partes
 erit, quales totus ab totius cd .

A.....E.....B

G.....C.....F.....D

Assumpto gc , cuius eadem partes sit eb , ac α e
 ipsius cf , α erit uterq, ae , eb simul utriusq, cf &
 gc eadem partes, quæ ae ipsius cf vel ab ipsius cd ,
 ideoq, & ab utriusq, cd & gf eadem partes e-
 rit, & fg , cd erunt æquales; communiq, adempto
 cf , gc & fd æquales erunt. Quapropter eb et-
 iam ipsius fd erit eadem partes quæ totus ab to-
 tius cd . Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *b* pars fuerit, & alter *d* alterius *e*, eadem pars: & vicissim, quæ pars est, aut partes primus & tertij *d*, eadem pars erit, vel eadem partes & secundus *b* & quartus *e*.

A....

B....G....C

D.....

E.....H.....F

Divisis *bc* & *ef* in partes *bg*, *gc*, & *eh*, *hf* æquales ipsis *a* & *d*, erit multitudo partium numerorum *bc* & *ef* æqualis. Cumq; æquales inter se *bg*, *gc*, sint minores ipsis *eh*, *hf* inter se æqualibus, quia totus *bc* ponitur minor toto *ef*: erit *bg* ipsius *eh* eadem pars aut partes, quæ *gc* ipsius *hf*. Itaq; uterq; *bg*, *gc* simul, id est, *bc* secundus utriusq; *eh*, *hf* simul, id est, *ef* quartus eadem pars vel partes erit, quæ *bg* ipsius *eh*, id est, quæ a primi ipsius *d* tertij. Quod erat propositum.

PRO.

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus $a b$ numeri c partes fuerit, & alter $d e$ alterius f eadem partes: & vicissim, quæ partes est primus $a b$, tertij e , aut pars; eadem partes erit & secundus c , quartij f ; aut pars.

A . . . G . . . B

C

D H E

F

Divisis $a b$ & $d e$ in partes $a g$, $g b$ & $d h$, $h e$ numerorum c & f : erit multitudo partium $a b$ & $d e$ equalis & tam $a g$ quam $g b$ eadem pars numeri, c , quæ tam $d h$ quam $h e$ numeri f . Itaq; vicissim eadem pars vel partes, erit $a g$ ipsius $d h$ & $g b$ ipsius $h e$, quæ c ipsius f est: ac propterea eadem pars vel partes erit $a g$ ipsius $d h$, quæ $g b$ ipsius $h e$, & adeoq; uterq; $a g$, $g b$ simul, utriusq; $d h$, $h e$ simul eadem pars vel partes erit, quæ $a g$ ipsius $d h$, id est, quæ c ipsius f . Quod erat demonstrandum.

* 9. VII.

§ 5. v. 6. VII

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus $a b$ ad totum $c d$
ita

ita ablatus $a e$ ad ablatum $c f$: Et reli-
quus $e b$ ad reliquum $f d$ erit, ut totus
 $a b$ ad totum $c d$.

A.....E.....B

C.....F...D

- 20. def. VII.** Quia enim proportionales sunt ab ad cd ut
 ae ad cf , erit primus $a b$ secundi cd , ut tertius
 ae quarti cf , vel aequè multiplex vel eadem pars,
aut partes, vel continet aequaliter cum aliqua par-
te vel partibus. Cum ergo cf eadem pars sit ae ,
7. v. 8. VII quæ cd ipsius ab , igitur & reliquus fd reliqui eb
eadem pars erit, quæ totus cd totius ab . Erit igitur
ut totus ab , ad totum cd ; ita reliquus eb ad reli-
quum fd .

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Sifint quotcunque numeri pro-
portionales ut a ad b , ita c ad d & e ad
 f , erit quemadmodum unus a an-
tecedentium, ad unum consequen-
tium b ; ita omnes antecedentes $a c e$
ad omnes consequentes $b d f$.

Quia

A...C...E...

B.....D....F.....

Quia enim a vel multiplex est vel eadem pars vel partes a ipsius b quae c ipsius d & c ipsius f ; a erit & ac simul utriusque bd simul aequè multiplex, eadem pars vel partes, quae a ipsius b vel c , ipsius f . Sic & ac tanquam unus & c simul, amborum bd tanquam unus & f simul aequè multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quae a ipsius b . Itaque & omnium a c & f simul eadem est proportio ad omnes c , d , f simul, quae a ad b . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si quatuor numeri proportionales sint: ut a ad b , ita c ad d , & vicissim proportionales erunt, ut a ad b , ita b ad d .

A...C.....

B....D.....

Propter eandem proportionem a ipsius b & c ipsius d eadem pars aut partes vel aequè multiplex a est. β Itaque vicissim a ipsius c & b ipsius d vel VII.

d vel eadem pars aut partēs vel quæ multiplex erit, & atq; ideo m a ad c m b add. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri abc , & alij def illis æquales multitudine, quibini sumantur & in eadem ratione ut a ad b, ita d ad e & ut b ad c, ita e ad f: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt ut a ad c ita d ad f.

A D
 B E
 C F

Quia enim est, ut a ad b, ita d ad e; etiam a vicissim erit ut a ad d, ita b ad e, & ob id rationem eandem b ad e, ut c ad f. Itaq; ut a ad d, ita c ad f, & a vicissim ut a ad c, ita d ad f. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si

E.

A

B

C

D

Sumta unitate e , cum a multiplicans b faciat c , erit c ex b toties compositus, quot in a sunt unitates, & unitas e numerum a , & b numerum c 15 def. VII 6 15. VII. a què metitur; Ergo & vicissim unitas e numerum b , & a numerum c què metitur. Rursus quia b multiplicans a facit d , erit d ex a toties compositus, quot in b sunt unitates, & e què metitur b ac a ipsum d . Ideoq; & vicissim e numerum a , & b numerum d què metitur. a igitur metitur què & d & c , qui proinde sunt inter se æquales, Quod erat propositum.

PROPOS: XVII.

Theorema 15.

Si numerus a duos numeros b & c multiplicans fecerit aliquos d & e ; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut b ad c , ita d ad e quam multiplicati.



PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit, & alter *d e* alterius *f* eadem partes: & vicissim, quæ partes est primus *ab*, tertij *e*, aut pars; eadem partes erit & secundus *c*, quartif; aut pars.

A .. G .. B

C

D H E

F

Divisis *ab* & *d e* in partes *ag*, *gb* & *d h*, *he* numerorum *c* & *f*: erit multitudo partium *ab* & *d e* equalis & tam *ag* quam *gb* eadem pars numeri, *c*, quæ tam *dh* quam *he* numeri *f*. Itaq; vicissim eadem pars vel partes, erit *ag* ipsius *dh* & *gb* ipsius *he*, quæ *c* ipsius *f* est: ac propterea eadem ^{9. VII.} pars vel partes erit *ag* ipsius *dh*, quæ *gb* ipsius *he*, ^{5. v. 6. VII} adeoq; uterq; *ag*, *gb* simul, utriusq; *dh*, *he* simul eadem pars vel partes erit, quæ *ag* ipsius *dh*, id est, quæ *c* ipsius *f*. Quod erat demonstrandum.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus *a b* ad totum *c d*
ita

ita ablatu*s* *a* e*ad* ablatu*m* *c* *f*. Et reli-
quu*s* *e* *b* ad reliquu*m* *f* *d* erit, ut totu*s*
a *b* ad totu*m* *c* *d*.

A.....E.....B

C.....F...D

• 20. def.
VII.

Quia enim proportionales sunt ab ad cd ut
ac ad cf, & erit primu*s* a b secundu*m* cd, ut tertiu*s* ut
ae quarti cf, vel aequè multiplex vel eadem pars,
aut partes, vel continet aequaliter cu*m* aliqua par-
te vel partibus. Cum ergo cf eadem pars sit ac,
¶ 7.v.8.VII qua cd ipsius ab, & igitur & reliquu*s* fd reliqui eb
eadem pars erit, qua totu*s* cd totiu*s* ab. Erit q*ue*
ut totu*s* ab, ad totu*m* cd; ita reliquu*s* eb ad reli-
quu*m* f d.

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Si sint quotcunque numeri pro-
portionales ut a ad b, ita c ad d & e ad
f, erit quemadmodum unus a an-
tecedentium, ad unum consequen-
tium b; ita omnes antecedentes a c e
ad omnes consequentes b d f.

Quia

A...C...E...

B.....D....F.....

Quia enim a vel multiplex est vel eadem pars vel partes a ipsius b quæ c ipsius d & e ipsius f ; a erit & ac simul utriusq; bd simul æquæ multi-^{20. def. VII.} plex, eadem pars vel partes, quæ a ipsius b vel c , & $5. v. 6. VII$ ipsius f , Sic & ac tanquam unus & c simul, amborum bd tanquam unus & f simul æquæ multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ a ipsius b . Itaq; & omnium a c e simul eadem est proportio ad omnes c , d , f simul, quæ a ad b . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si quatuor numeri proportionales sint: ut a ad b , ita c ad d , & vicissim proportionales erunt, ut a ad b , ita b ad d .

A...C.....

B....D.....

Propter eandem proportionem a ipsius b & c ipsius d eadem pars aut partes vel æquæ multiplex a est. ^{20. def. VI} Itaq; vicissim a ipsius c & b ipsius d ^{9. v. 10 VII.} c vel d .

A

B D

C

Sumto d equali b, erit ut b ad c, hoc est, ut
 a ad b; ita d ad c, = eritq³ numerus ex a in c =
 = 19. VII. qualis numero ex b in d, hoc est ex b in seipsum.

Sit jam etiam productus ex b in seipsum =
 equalis producto ex a in c, erunt tres numeri pro-
 portionales. Rursum enim assumpto d equali ipsi b
 erit ut b ad c ita d ad c. Quis ergo numerus
 factus ex a primo in c quantum equalis est facto
 ex b secundo in d tertiu³, = erunt 4 numeri a b d c
 proportionales. Sed b est idem cum d. Quod
 erat propositum.

PROPOSITIO XXI

Theorema 19.

Minimi numeri ab, cd omnium
 e & f eandem cum eis rationem ha-
 bentium, ut a b ad cd, ita c ad f, meti-
 untur æquè numeros, eandem cum
 eis rationem habentes, major ab,
 quidem majorem e, minor verò cd
 minorem f.

Cum

A . . . G . . B

C . . H . D

E

F

Cum enim sit $a b$ ad $c d$, ut e ad f , etiam a vicissim est $a b$ ad e , ut $c d$ ad f ; & cum $a b$, $c d$ sint minores ipsis e & f , β erit $a b$ ipsius e , & $c d$ ipsius f eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim $a b$ & $c d$, si fieri potest in partes ag, gb & ch, hd que multitudine erunt æquales, atq; ideo ag ipsius e , & ch ipsius f eadem pars. β Erit ergo, ut ag ad e ; ita ch ad f , & vicissim ut ag ad ch , ita e ad f , vel $a b$ ad $c d$: ac proinde numeri ag, ch , minores quàm ab, cd eandem quàm ab, cd minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, a, b, c & alij ipsis multitudine æquales, d, e, f , qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; ut a ad b , ita e ad f , & ut b

N s ad c

E.

A

B

C D

Sumta unitate c, cum a multiplicans b faciat c, a erit c ex b toties compositus, quot in a sunt unitates, & unitas e numerum a, & b numerum c ut 5 def. VII aequè metitur; Ergo & vicissim unitas e numerum b, & a numerum c aequè metitur. Rursus quia b multiplicans a facit d, a erit d ex a toties compositus, quot in b sunt unitates, & e aequè metitur b ac a ipsum d. Ideoq, & vicissim e numerum a, & b numerum d aequè metitur. a igitur metitur aequè & d & c, qui proinde sunt inter se aequales. Quod erat propositum.

PROPOS: XVII.

Theorema 15.

Si numerus a duos numeros b & c multiplicans fecerit aliquos d & e; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut b ad c, ita d ad e quam multiplicari.

Assu.

F.

A...

B...C....

D.....E.....

Assumpta unitate f , erit d ex b compositus toties, quoties unitas f est in a : similiterq; toties c compositus ex c , quoties unitas eadem est in eadem a . Itaq; b ipsum d & c ipsum e aequè metitur.

Quare b ipsum d & c ipsum e eadem pars est, & a 20. def. VII.
 fit, ut b ad d , ita c ad e , & β permutando, ut b ad e , ita d ad c . Quod erat ostendendum. β 13. VII.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si duo numeri a & b quempiam numerum c multiplicantes, fecerint aliquis d & e : Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut a ad b , ita d ad e , quam multiplicantes.

A.....B.....

C...

D.....E.....

Cum enim ex a in c fiat d , idem a fiat ex b in c 16. VII.

N

c in

c in *a*. Eodem modo cum *e* in *b* fiat *e*, idem *a* fiat
 17. VII. *e* in *b*. Quoniam igitur idem *c* multiplicans i-
 plos *a* & *b* facit *d* & *e*, erit ut *a* ad *b* ita *d* ad *e*.

PROPOS. XIX.

Theorema 17.

Si quatuor *a*, *b*, *c*, *d* numeri pro-
 portionales fuerint ut *a* ad *b*, ita *c* ad
d, qui ex primo *a* & quarto *d* fit nu-
 merus *e*, æqualis erit ei, qui ex secun-
 do *b* & tertio *c* fit numerus *f*. Et *f*
 qui ex primo *a* & quarto fit, numerus
e æqualis fuerit ei, qui ex secundo *b*
 & tertio *c* fit numerus *f*; ipsi 4 nume-
 ri proportionales erunt ut *a* ad *b*, ita
e ad *f*.

A.....

B.....

C.....

D.....

E.....

F.....

G.....

17. VII. Fiat *g* ex *a* in *c*. Quia idem *a* multiplicans
d facit *e* & *g* erit *e* ad *d* ut *g* ad *c*. Erat au-
 tem

tem a ad b , ut c ad d : Est igitur $\odot a$ ad b ut g ad e . Rursus, quia a & b multiplicantes idem c faciunt f & g , β erit ut a ad b , ita g ad f . Erat β 18. VII. γ 9. V. etiam g ad e , ut a ad b . Ergo e & f sunt γ aequales.

Sint jam aequales e & f , Erunt & illi numeri proportionales. Quia enim a multiplicans c & d facit g & e erit, ut e ad d , ita g ad e vel f ipsi aequalem. Rursus cum a & b multiplicantes c faciant g & f , β erit a ad b , ut g ad f . Quare ad eandem proportionem g & f eadem a & b , c & d erunt eadem. Quod erat ostendendum.

PROPOS. XX.

Theorema 18.

Si tres numeri a, b, c , proportionales fuerint, ut a ad b , ita b ad c , qui sub extremis a & c continetur, aequalis erit, qui a medio b efficitur: Et si qui sub extremis a & c , continetur aequalis fuerit ei, qui a medio b describitur, ipsi tres numeri proportionales erunt a ut a ad b , ita b ad c .

A.....

B.....D.....

C....

Sumto d equali b, erit ut b ad c, hoc est, ut
 a ad b; ita d ad c, eritq, numerus ex a in c
 = 19. VII. qualis numero ex b in d, hoc est ex b in seipsum.

Sit jam etiam productus ex b in seipsum
 equalis producto ex a in c, erunt tres numeri pro-
 portionales. Rursum enim assumpto d equali ipsi b
 erit ut b ad c ita d ad c. Quia ergo numerus
 factus ex a primo in c quantum equalis est factus
 ex b secundo in d tertiu, erunt 4 numeri a b d
 proportionales. Sed b est idem cum d. Quod
 erat propositum.

PROPOSITIO XXI

Theorema 19.

Minimi numeri ab, cd omnium
 e & f eandem cum eis rationem ha-
 bentium, ut a b ad c d, ita c ad f, meti-
 untur æquè numeros, eandem cum
 eis rationem habentes, major ab,
 quidem maiorem e, minor verò cd
 minorem f.

Cum

A... G... B

C... H... D

E.....

F.....

Cum enim sit ab ad cd , ut e ad f , etiam a
 vicissim est ab ad e , ut cd ad f ; & cum ab , cd
 sint minores ipsis e & f , & erit a b ipsius e , & c d
 ipsius f eadem pars vel partes. Sed partes esse non
 possunt. Divisio enim ab & cd , si fieri potest in
 partes ag , gb & ch , hd quae multitudine erunt
 aequales, atq; ideo ag ipsius e , & ch ipsius f eadem
 pars. & Erit ergo, ut ag ad e ; ita ch ad f , & vicissim
 ut ag ad ch , ita e ad f , vel ab ad cd : ac proinde
 numeri ag , ch , minores quam ab , cd eandem quā
 ab , cd minimi illius proportionis, habebunt ratio-
 nem. Quod absurdum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, a , b , c &
 alij ipsis multitudine æquales, d , e , f ,
 qui bini sumantur, & in eadem rati-
 one; fuerit autem perturbata eorum
 proportio; ut a ad b , ita e ad f , & ut b

N s ad c

ad c, ita d ad e; Etiam ex aequalitate in eadem ratione erunt ut a ad c, ita d ad f.

A.....

D.....

B...

E.....

C.....

F.....

p. 19. VII.

Cum enim sit, ut a ad b ita c ad f, erit numerus ex a in f genitus aequalis numero ex b in c ita ex b in e factus aequalis erit ex c in d productus, cum sit, ut b ad c, ita d ad e; adeoque numerus ex a primo in f quartum productus numero ex c secundo in d tertium genitus equalis erit. a Quare ut a ad e ita d ad f. Quod ostendendum erat.

PROPOS. XXIII.

Theorema 21.

Primi inter se numeri a & b minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

Si enim, sunt c, d in eadem proportionem ipsi

ipsi a, b minores minimi. Metitur ergo c i.
 psum a, & d ipsum b æque; c videlicet ipsum a per
 tot unitates per quot d metitur ipsum b. Quæ uni-
 tates sint in a. Cuius ergo c & d metiantur a &
 b per c unitates, & metietur e ipsos a & b per uni-
 tates ipsorum c & d. Idem enim e per c, quod c
 per e efficit. Itaq; a & b contra hypothesein non
 erunt primi, sed compositi.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi a, b numeri omnium e-
 andem cum eis rationem habentium
 primi inter se sunt.

A. B.

C.

D. E.

Sint autem, e sic compositum ipsorum mensurum

c. Itaq; quoties e est in a & b tot erunt unitates
 in d & e, & c multiplicans d & e producit a &
 b. Proinde est a ad b ut d ad e. Addeq; cum d &
 e partes ipsorum a & b minores sint, a & b non
 sunt minimi in eadem ratione. Quod est contra
 hypothesis.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri a & b primi inter se fuerint; quoniam unum a eorum metitur numerus c , ad reliquum b primus erit.

A..... B.....

C.... D----

a 11.22.

Sin minus, esto communis eorum mensura d . Quia ergo d metitur c , & ipsum a , etiam d metitur a . Cumq; idem d metiatur etiam b . Non igitur a & b erunt inter se primi contra hypothesis.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri a & b ad quempiam e primi fuerint; etiam ex illis genitus d ad eundem e primus erit.

A.....B....

C.....

D.....

E----F----

Sin minus esto communis ipsorum mensura e , quo

quæ d metiatur toties, quot in f sunt unitates.
 Itaq, e multiplicans f a producit d. Sic d est fa-
 ctus ex a in b. Ergo cum ex e primo in f quar-
 tum fiat idem numerus d, qui ex a secundo in b a 9. ar.
 tertiâ, perit ut e ad a, ita b ad f. Cumq, a & c
 sint primi, & e ponatur metiri ipsum c, erit e ad p 19. VII.
 a primus; adeoq, c & a tanquam primi in sua pro-
 portione d erunt minimi. Proinde æquæ: meti-
 tur b & f eandem proportionem habentes, c ipsum d 23. VII.
 b & a ipsum f; Et e metiens b & c faciet illos cõ-
 tra hypothesin compositos. e 21. VII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Etiam ex uno a eorum ge-
 nitus e ad reliquum b primus erit.

A....B.....

C.....

D....

Sumto d ipsi a equali, erit d ad b primus.
 Quia ergo a & d ad b sunt primi, a erit c geni-
 tus ex a in d, id est, ex a in se ipsum ad eundem b a 10. VII.
 primus. Similiter ex b in se genitus ostenditur
 primus ad a.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si duo numeri a & b ad duos numeros c & d , uterque ad utrumque primi fuerint, qui ex eis e & f gignentur, primi inter se erunt.

A.....B....

E.....

C.....D.....

F.....

a 26. VII.

Ex a in b fiat e & ex c in d fiat f , erunt e & f inter se primi. Cum enim uterque a & b ad c sit primus, genitus ex ipsis ad eundem c primus erit; & ita e cum c ad d primus erit. Quia ergo uterque c & d ad e est primus, etiam f ex ipsis genitus ad e primus erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si duo a & b numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem, & geniti ex ipsis

ipsis *c* & *d* primi inter se erunt; Et si, qui in principio *a* & *b* genitos *c* & *d* ipsos multiplicantes, fecerint aliquos *e* & *f*; & hi quoque primi inter se erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

A

B . .

C

D

E

F

G 81

H 16

I 243

K 32

Cum enim *a*, *b* sint inter se primi, *a* erit *c* ex *a* in se factus ad reliquum *b* primus: Sic etiam *d* factus ex *b* in se erit ad *c* primus quia *b* & *c* sunt inter se primi, adeoque duo facti *c* & *d* inter se primi. Rursus, quia *b* & *a* inter se sunt primi, erit & *c* ex *a* in se factus, ad *b*, & *d* genitus ex *b* in se ad *a* primus: Est autem & *c* ad *d* primus. Uterque igitur *ac* ad utrumque *bd* primus *a* erit, & *e* factus ex *a* in *c* primus ad *f* factum ex *b* in *d*. Ita si ex *a* in *e* fiat *g*, & ex *b* in *f* fiat *h*, *a* erant *g* & *h* primi. Item si ex *a* in *g* & ex *b* in *h* fiant *i* & *k*, erunt & ipsi primi; idemque circa extremos semper eveniet.

PRO.

PROPOS: XXX.

Theorema, 28.

Si duo numeri ab, bc primi inter se fuerint: Etiam uterque simul ac ad quemlibet illorum ab vel bc primus erit: & si uterque simul ac ad unum aliquem illorum ab primus fuerit; etiam qui in principio, ab & bc , numeri primi inter se erunt.

A B C

D

12. AX.

10. AX.

Si ac ad bc non est primus, metiatur eds communis mensura d . Quia ergo d metitur a & totum & ab ablatum, etiam a metitur reliquum bc . Ideoque ab, bc contra hypothesein non sunt primi. Similiter si ac sit primus ad ab , dico etiam ab, bc esse primos inter se. Sin minus mensor communis d metiens ab & bc , etiam ac ex ipsis compositum β metietur. Ideoque contra hypothesein a & ab primi non erunt.

Hinc patet Corollarium: Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositum.

Ve

*ut quia d metitur ab & b c etiam metitur ex il-
lis compositum ac.*

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad o-
mnem numerum *b*, quem non meti-
tur, primus est.

A B
C - - -

*Si minus, esto communis mensur c. c er-
go metiens a & b non potest esse idem cum a, qui
non metitur b. Proinde cum alius numerus c me-
tiatur ipsum a, non potest esse primus contra hy-
pothesin,*

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuo
multiplicantes fecerint aliquem *c*:
genitum *c* autem ex ipsis metiatur a-
liquis primus numerus *d*: is etiam
unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio
metitur.

O

Si d

A...¹... B.....

C.....

D...E.....

Si d non metiatur a, erunt d & a primi. Sint autem in e tot unitates, quoties d continetur in c. Itaq; d multiplicans e producit c. ut & a multiplicans b, & est ut d ad a, ita b ad e. Cumq; d ad a sit primus, ut supra patet, & erunt d & a in sua proportionem minimi, & aequè γ metientur ipsos b & c. Proinde si d non metitur ipsum a, metitur ipsum b. Idem inferretur de a si d non metiretur b.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum numerum a aliquis numerus metitur.

D.....

B.....C...

Si b metiens a esset primus, pateret propositum. Sed cum sit compositus, metitur ipsum c, qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse metiens d a metitur etiam a. Sin compositus, alius ipsum metiens esset primus. Quia oportet

tan

*tandem venire ad numerum primum nisi infinite
diminuat numeros posse statuerimus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis a numerus aut primus est,
aut eum aliquis primus metitur.

A

*Cum enim omnis numerus sit vel primus ;
vel compositus : compositum autem omnem metia-
tur primus. Igitur omnis numerus primus est, 33. VII.
aut eum primus metitur.*

PROPOS: XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quocunque
 a, b, c , reperire minimos omnium, e-
andem rationem habentium cum
ipsis siue sit a ad b , ut b ad c , siue non.

A..... B.... C.....

D..

E... F.. G....

H---- I---- K----

L-----

O 2

Si a ,

α 21. VIII. Si a, b, c essent primi, a pateret propositum.
 β 3. VII. Si non primi, β inveniatur mensur eorum maximus
 γ 1.5 VII. d , qui ipsos a, b, c , metiatur per e, f, g , quos in eadem ratione minimos dico. Cum enim e, f, g multiplicantes eundem d producant a, b, c , eos in eadem ratione esse oportet. Si autem e, f, g negentur minimi, ipsis minores in eadem ratione sint h, i, k , qui ipsos a, b, c aequè metientur per l , & vicissim ipsos a, b, c per h, i, k . Ideoq; l multiplicans h, i, k producit abc & l metitur abc per hik . Cum ergo eundem a producant e primus multiplicans d , quartum & h secundus multiplicans l tertium, d erit ut e primus, ad h secundum; ita l tertium, ad d quartum. Sed e maior est quàm h , igitur & l maior est quàm d : adeoq; l metiente ipsos a, b, c , non erit d communis maxima mensura contra hypothesein.

δ 19. VII.

Hinc patet maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem portione minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris a & b datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum c .

Si a

A....B.....

C.....

D.....

E-----F-----

Si a & b dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus c est minimus omnium, quae a & b metiuntur. Cum enim c factus sit ex a in b, patet, quod a ipsum c per b, & b ipsum c per a metiantur. Si quis autem c neget etiam minimum, metiantur a & b alium d minorem ipso c, per e & f. Cum ergo idem d fiat ex a primo in e quartum, & ex b secundo in f tertium, Be-rit ut a ad b, ita f ad e; adeoque a & b tanquam primi k in sua proportionem minimi eque d metientur ipsos f & e. Quoniam vero & multiplicans b & e facit c & d, erit c ad d, ut b ad e: ac propterea cum b metiatur ipsum e, metietur & c ipsum d, major minorem. Quod absurdum.

A....B.....

C...D...

E.....

F-----

G-----H-----

Deinde dati numeri a & b non sine primi: & c inveniantur c, d in eadem proportionem mini-

O 3 mi,

mi. & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a & quarto d a sit idem e qui ex b secundo in c tertium; eritq; factus e minimus quem a & b metiuntur. Cam enim e ex a in d , & ex b in c sit factus, utrunq; a & b ipsum e metiri constet. Si quis minimum eum esse negaverit, esto f minor ipso e , quem metiantur a & b per g & h . Cum ergo idem f fiat ex a primo in g quartum, & b secundo in h tertium, a erit ut a ad b ita h ad g , adeoq; c & d minimi in proportione a ad b , vel h ad g , d metiuntur ipsos h & g aequè. Quoniam verò a multiplicans d & g facit e & f , erit e ad f , ut d ad g ; ac propterea cum d ipsum g metiatur, metietur & e ipsum f , major minorem. Quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri a & b multiplicent minimos c & d eandem rationem habentes, major b minorem c , & minor a maiorem d producitur minimus e , quem illi metiuntur.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 33.

Si duo numeri a & b numerum quempiam c metiantur: Etiam minimus

nimuse quem illi metiuntur a, b , eundem c, d metietur.

A . . . B . . .
C F - - - - D
E

Sin minus, auferatur e ex cd quoties potest, & relinquatur fd minor ipso e . Cum itaq; tam a quàm b metiatur ipsum e , & ipsum c, f , a metietur etiam tum a tum b ipsum cf : adeoq; a & b $\alpha 11. ax.$ metientes & cd totum & cf ablatum, etiam $\beta 12. ax.$ metientur reliquum fd . Sed fd est minor, quàm e . Non igitur e est minimus quem a & b metiuntur, contra hypothesis.

PROPOSITIO XXXIIX.

Problema 5.

Tribus numeris abc datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum d .

A . . . B . . . C
D
E - - - - -

α Invento d minimo, quem a & b metiantur, eundem etiam vel metietur c vel non. Si metiatur factum est quod jurebatur. Siq; d non sit minimus, minor ipso fiat e , quem abc metiantur. $\alpha 36. VII.$

Q. 4

Quo.

B37.VII.

Quoniam igitur a & b metiuntur e , & d est minimus, quem a & b metiuntur, β metietur quoque d ipsum e major minorem. Quod est absurdum.

A... B... C....

D.....

E.....

F-----

γ 11.VII.

Deinde, si C non metiatur ipsum d , a invento e minimo, quem c & d metiantur, erit e numerus minimus, quem a , b , c metiuntur. Cum enim a & b metiantur ipsum d , & d ipsum e , etiam a & b ipsum e metientur, metitur autem & c eundem e . Ergo omnes a , b , c ipsum e metiuntur.

Si c non esset minimus, minor ipso sit f quem a , b , c metiantur. Quia igitur a & b ipsum f metiuntur, β metietur etiam eundem f numerus d , adeoque cum c & d metiantur ipsum f minorem, quam e , non erit e minimus, quem c & d metiuntur. Quod est contra hypotesin.

Hinc nascitur Corollarium: Si tres a , b , c , numeri numerum quempiam f metiantur, etiam minimum e , quod illi metiuntur, eundem f metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c ponebantur metiri ipsum
 f ; etiam c minimum, quem a, b, c metiuntur, e-
 undem f metiri.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum a numerus b quis-
 piam metiatur; ille a , quem meti-
 tur, partem habebit à dimetientet b
 denominatam.

A.....

B....C....

Quoties b metitur a , tot sint in c unitates. n. 15. VI.

Quia ergo b ipsum a metitur per unitates ipsius c , p. 13 def. VII
 idem c metietur a per unitates b . Itaq, uni-
 tas toties metitur b , quoties ipsum a . Sed uni-
 tas a metitur b per partem à b denominatam; Er-
 go & c metitur a per partem à metiente b deno-
 minatam. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si numerus a partem b habuerit
 O 5 quam-

quamlibet; metietur illum a numerus c a parte b denominatus.

A

B...C....

Cum enim pars b denominetur a c; sit autem & unitas pars ipsius c, ab eodem c denominata; metietur unitas ipsum c & b ipsum a aequè.
 15. VII. Metietur ergo & unitas ipsum b, & c ipsum a metietur.

PROPOSITIO XLI.

Problema 9.

Numerum g reperire, qui minimus cum sit, habeat partes datas abc.

D.. A secunda

E... B tertia.

F... C quarta

G

H

Numeri a partibus a, b, c denominati sunt d.
 38. VII. e, f, qui minimum suum g metiantur. Erit hic minimus partes datas continens. Partes quidem habet: Cum enim d, e, f ipsum g metiantur, a habebit g partes a d, e, f denominatas, hoc est, a, b, c, quæ a d, e, f denominatas. Si autem minimus non sit, est h minor habens easdem partes a, b, c. Ha

ergo cum habeat, & metientur ipsi d, e, f numeri, à partibus illis denominati: adeoque cum h sit minor, non erit g minimus quem d, e, f metientur. contra hypothesein.



EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER IIX.

PROPOS: I.

Theorema I.

SI fuerint quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales, extremi verò a & d ipsorum primi inter se fuerint, ipsi minimi sunt omnium, eandem cum eis rationē habentiū.

Sin

A.....	C....
B.....	F----
C.....	G.----
D.....	H-----

*Sin minus, sint in eadem ratione minores
 efgh. Quod ergo ipsis a, b, c, d bini & in eadem
 ratione sumti sunt alij e, f, g, h multitudine a-
 • 14. VII. quales, ex equali = erit, ut a ad d, ita e ad h. Sed
 p 23. VII. a & d sunt in sua ratione p minimi quia primi.
 711. VII. Ergo tam a ipsum e, quam d ipsum h & equè me-
 tistur, major minorem. Quod absurdum.*

PROPOS: II.

Problema 1.

*Numeros, e de reperire deinceps
 proportionales minimos, quotcun-
 que jusserit quispiam in data ratio-
 ne a ad b.*

A, 2.	C, 4.	F, 8.	K, 16.
B, 3.	D, 6.	G, 12.	L, 24.
	E, 9.	H, 18.	M, 36.
	I, 27.		N, 54.
			O, 81.

Tres

Tres ita inveniuntur. a multiplicans seipsum & b; producit c & d; b in se tertium f. Quia ergo ex a in a & b facti sunt c & d: a ergo est, ut a ad b, ita c ad d. Ita cum d & e sint ex b in a & b, erit, ut a ad b, ita d ad e. Sunt itaq; continuè proportionales in ratione a ad b. Sed minimi e iā sunt in ratione eadem. Quia enim extremi c & e facti sunt ex e primis a & b in seipsos etiam c, e verunt inter se primi & in eadem ratione minimi. Iam ex a in inventos c, d, e fiant f, g, h & ex b in ultimum e fiat i. Erunt quatuor f, g, h, i in ratione data minimi. Quia enim f, g, h, i ex a in c, d, e sunt facti, retinent eandem rationem; & quia a & b multiplicantes e fecerunt h & i, erant etiam h i in ratione a ad b. Sunt vero et iā minimi ex modo data ratione. Non aliter ex a in f, g, h, i fiunt k, l, m, n; & ex b in l ultimum o, ut sint quinque continuè proportionales in ratione a, b proposita. Et consequenter quotcunq; sex, 7, 8 vel 9. &c. continuè proportionales in ratione proposita possunt inveniri. Hinc sequuntur Corollaria.

Corollarium 1.

Si tres minimi numeri sint continuè proportionales, extremi erunt quadrati: Si autem quatuor fuerint, cubi. Quia extremi illi trium fiunt

ex ductu a & b in se: Extremi verò ipsorum quatuor sunt ex ductu radicum a & b in quadratos e & f . Quare f & i necessum est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quocunque proportionalium, ex hujus proportionis sensu inventorum in data ratione minorum, inter se sunt primi. Hoc patet ex multiplicatione, qua numeri proportionales producantur ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quocunque minimorum in eadem ratione. Producantur enim ex illorum multiplicatione in alios numeros.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si sint quocunque numeri deinceps proportionales a, b, c, d , minimi omnium eandem cum eis rationem

nem

habentium; illorum extremis, *d* sunt inter se primi.

A, 8.

K, 8.

B, 12.

E, 2.

G, 4.

L, 12.

C, 18.

F, 3.

H, 6.

M, 18.

D, 27.

I, 9.

N, 27.

Inventis duobus in data ratione *a* ad *b*, vel *b* ad *c*, vel *c* ad *d*, minimis *e*, *f*, & in eadem ratione *c* ad *f*, tribus minimis *g*, *h*, *i*, & quatuor ejusdem rationis *k*, *l*, *m*, *n*, & ita si opus foret, etiam quinque vel sex, donec respondeant multitudinem initio propositis numeris *a*, *b*, *c*, *d*. Quoniam ergo *a*, *b*, *c*, *d*, & *k*, *l*, *m*, *n* sunt minimi in data ratione, oportet ut singuli singulis sunt equales, *a* ipsi *k* & *d* ipsi *n*. Cumq; *k* & *n* sint inter se primi, etiam *a* & *d* inter se primi erunt. 2. IIX;
β 2. cor. 2.
IIX.

PROPOS: IV.

Problema 2.

Rationibus datis quotcunque *a* ad *b*, *c* ad *d* in minimis numeris, reperire numeros *f*, *e*, *g* deinceps minimos in datis rationibus.

Pro

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.

G, 4. F, 24. E, 20. G, 15.

I ---- K L ----.

a 36. VII. Pro tribus *a* inveniatur *e* minimus, quem
b secundus & *c* tertius metiantur: & quoties *b*
 metitur *e*, toties *a* ipsum *f*, & quoties *c* eundem *e*,
 toties *d* metiatur *g*. Erunt *f*, *e*, *g* continue pro-
 portionales in rationibus datis. Quia enim *a* & *b*
 ipsos *f* & *e* aequè metiuntur, per eundem *h*, etiam
a & *b* multiplicantes *h* producunt *f* & *e*; & β
 est, ut *a* ad *b*, ita *f* ad *e*. Ita cum *c* & *d* aequè me-
 tiantur ipsos *e* & *g*, β erit etiā, ut *c* ad *d*, ita *e* ad
g; adeoque, *f*, *e*, *g* in rationibus *a* ad *b* & *c* ad *d* sunt
 continue proportionales.

y 11. VII. Quod si ydem negentur esse minimi, mino-
 res sint *i*, *k*, *l*. Quia ergo *a* & *b* sunt minimi,
 in sua ratione, & aequè metientur ipsos *i* & *k*, in ean-
 dem ratione constitutos e consequens *b* ipsum *k*,
 consequentē: Sic etiam *c* & *d* ipsos *k* & *l*, ante-
 cedens *c* antecedentem *k*. Itaque cum *b* & *c* me-
 tiantur ipsum *k*, minimus *e* quem *b* & *c* metiun-
d 37. VII. tur, eundem *k*, major minorem *d* metietur. Quod
 absurdum.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Deinde

Deinde trium rationum datarum a ad b, c ad d, e ad f quatuor minimi, deinceps proportionales inveniantur. Primo quidem g a minimus, quem b & c metiuntur, & simul h & k ut prius. Quod si e metitur ipsum i, toties etiam f metiatur k, eruntq; h, g, i, k minimi in rationibus datis asserens fundamentis ut prius.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si e non metiatur i, a invento minimo k, quem e & i metiantur, quoties i ipsum k, g ipsum l & h ipsum m; & quoties e ipsum k, toties f ipsum n metiatur. Erunt m, l, k, n minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.

Deniq; 2 rationum datarum in numeris minimis inveniantur quinq; directe proportionales, expditis primum, juxta precedentem modum, quae pro quatuor erant faciendae; & deniq; cum ratione quarta s ad t fiat ut antea cum tertia. Ut in exemplis patet, in quorum priore s metitur n; in posteriore non.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 4. S, 3. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

P

PRO

PROPOSITIO V.

Theorema. 3.

Planinumeri a & b rationem inter se habent ex lateribus compositam c ad e , & d ad f ; vel ex c ad f , & d ad e .

A, 24. B, 48.

G, 18.

C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

A, 24. B, 48.

G, 96.

C, 4. D, 6. F, 16. F, 3.

Ex multiplicatione d in e fiat g . Cum ergò d multiplicans c & e producat a & g , erit a ad g , ut c ad e ; & g ad b , ut d ad f , quia c in d & fillos producit. Sunt ergò deinceps proportionales a, g, b in laterum c ad e , & d ad f proportionibus. Sed ratio a ad b componitur ex rationibus a ad g , & g ad b , Ergò & ex rationibus laterum c ad e , & d ad f . Eodem modo ostenditur a ad b ratio composita ex rationibus c ad f , & d ad e .

a. 17. VII.

§ 27. def.
VII.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e , deinceps proportionales, primus, a autem secundum b non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

F, 4. G, 6. H, 9.

Quia enim eadem duorum proximorum sunt rationes, patet, si primus secundum non metiatur, quod nec secundus tertium & hic quartum, & hic quintum possit metiri. Quod verò nec quisquam quemquã reliquorum metiatur, ita patet. Sumtis n. f, g, h minimis in a, a d b ratione erit ex æquo, ut a ad c, ita f ad h. Cumq; sit etiam ut a ad b, ita f ad g, Ergo f nō ex & a non metiatur b; Ergo nec f metiatur g, & proinde non est unitas. Quare cum β i. IIX. f & h β sint primi, f non metitur h, adeoq; nec a ipsum c. Quod ipsum de reliquis etiam demonstratur.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e

P 2

de.

deinceps proportionales, primus autem a extremum e metiatur; is a etiam metietur secundum b .

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

6. IIX.

Si enim a non metiretur b , neq^{ue} metiretur aliorum quenk^{um}, atq^{ue} ita nec a ipsum e , contra hypotbesin.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros a, b , medij, c, d continua proportionē ceciderint; quot inter eos medij continua proportionē cadunt numeri: tot & inter alios e, f eandem cum illis habentes rationem medij l, m , continua proportionē cadent.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.

G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.

E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
 G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
 E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
 G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
 E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

a Sumtis enim totidem *g, h, i, k* in ratione ^{a 2. VII.}
^a *ad c* minimis, ex aquo est, ut *a ad b*, & *e ad f*, ^{β 23. VII.}
 ita *g ad k*. Cumq; *g* & *k* inter se sint primi tan- ^{γ 21. VII.}
 quam extremi minimorum & in sua ratione β mi-
 nimi, & aequè metietur, *g* ipsum *e*, & *k* ipsum *f*.
 Quoties autē *g* & *k*, metiuntur *e* & *f*, toties me-
 tiantur *h* & *i* alios *l* & *m*. Itaq; cum *g, h, i, k*,
 per eundem numerum metiantur *e, l, m, f*, erunt
 hi producti ab illo numero *d* in *g, h, i, k*, in eadem
 cum ipsis ratione. Sunt autem *g, h, i, k* continuè
 proportionales. Ergo & *e, l, m, f*. Et cum mul- ^{d 18. VII.}
 titudine sint pares numeris *a, c, d, b*, cadent tot
 medij inter *ef*, quot inter *ab*.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Siduo numeri *a, b* sint inter se
 primi, & inter eos medij *c, d*, conti-

P 3 nua

nua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum a & b , ac unitatem g , medij e , g , & f continua proportione cadent.

			K, 8.	A, 8.
	E, 2.	G, 4.	L, 12.	C, 12.
O, 1.	F, 3.	H, 6.	M, 18.	D, 18.
		I, 9.	N, 27.	B, 27.

¶ 2. IIX.

¶ 1. IIX.

¶ 7. 2X.

¶ 5. 2X.

¶ 20. def.

VII.

Inuentis e, f in ratione a ad c minimis, a sumantur in eadem ratione tres g, h, i & quatuor k, l, m, n vel plures, dum multitudine aequales fiant initio positis a, c, d, b . Itaq; cum ab sint primi, a erunt a, c, d, b minimi in ratione e ad f ; sint verò & k, l, m, n in eadem ratione minimi; erunt ipsi a, c, d, b aequales, singuli singulis. Caterum quia e multiplicans seipsum producit g ; multiplicans verò ipsum g facit k ; & metietur e ipsum g per e , & g ipsum k per eundem e . Metitur verò & o ipsum e per e . Aequè igitur metitur o ipsum e , & e ipsum g , & g ipsum k : Ideoq; eadem pars erit o ipsius e , & e ipsius g , & g ipsius k ; adeoq; proportionales deinceps o, e, g, k ; Perinde ut & o, f, i, n . Cumq; & o, e, g, k , & o, f, i, n sint multitudine a-

qua-

quales ipsis k, l, m, n vel a, b, c, d cadent tot medij
 continue proportionales inter o, k vel o, a , ac inter
 o, n vel b, o , quot inter a, b .

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si inter duos numeros a, b & unitatem p continue proportionales ceciderint numerici d, e ; quot inter utrumque ipsorum a vel b , & unitatem p deinceps medij continua proportionione cadunt numeri, totidem & inter ipsos a & b medij, m, n, o continua proportionione cadent,

P	1	C	3	D	9	E	27	A	81.
								M	162
								N	324
								O	648
								R	1296
		F	6	I	18	K	54		
				L	108				
				H	216				

^a Completis spacijs intermedijs. i, k & h, m ,
 n & o , ut i fiat ex c in f , k ex c in g ; m, n, o
 ex c in k, l, h . Cum ergo sit ut p ad c , ita c ad d ,
 & d ad e , & c ad a , & aequè p metietur ipsum ^a 2.IIX.

P 4

c &

7 9.2X.

8 18.VII.

c, & c ipsam d, & sic deinceps. Sed p metitur,
 e per c: Ergo & c ipsum d, & d ipsum e & e ipsum
 a per c metietur. Quare c multiplicans seipsum
 fecit d, multiplicans d fecit e, & multiplicans e fe-
 cit a. Idemq, de f, g, h, b est statuendum. Pro-
 inde, cum c multiplicans & f, faciat d & i, derit
 ut c ad f, ita d ad i; itemq, ut c ad f, ita i ad g.
 Sunt ergo dig continuè proportionales in ratione,
 c ad f. Rursus & e, k, l, h sunt continuè proporti-
 onales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l, ejusdem d
 erunt e k l rationis cujus dig, id est, c ad f; itemq,
 & c & f in g fecerint l & h; erit, ut c ad f, ita l
 ad h. Eodemq, modo continuè proportionales osten-
 duntur a, m, n, o, b in ratione c ad f, quia ex c in
 e k, l, h sunt a, m, n, o, & ex c & f in h, sunt o &
 b. Tot itaq, medij proportionales inter a & b a-
 dent, quot inter a vel b & unitatem c, quia mul-
 titudine conveniunt.

PROPOS; XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum nume-
 rorum a & b, unus e medius propor-
 tionalis est numerus; & Quadratus a
 ad Quadratum b duplicatam habet
 lateris, ead, latus d rationem

Si c

A, 9. E, 21. B, 49.

C, 3. D, 7.

Excind siate: & a erit, ut c ad d, ita a
 ad e & e ad b, adeoq, tres continuè proportionales
 in ratione c ad d; ceditq, inter a & b medius pro- ^{a 17. VI.}
 portionalis e. Cum vero a ad b habeat rationem, & ^{β 6. def.}
 duplicatam ejus, quam a ad e, habet quoq, duplicatā
 a quadratum ad b quadratum ejus, quam c latus,
 ad d latus, quod eadem hic sit ratio, quæ ibi. ^{VII.}

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum
 a & b, duo medij proportionales sunt
 numeri, h, i. & cubus a ad cubum b
 triplicatam lateris c ad latus d. habet
 rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.

E, 9. G, 12. F, 16.

C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, & h, i, ut in 10.
 hujus fiebat. Et æ erunt e, g, f tres continuè
 proportionales in ratione c ad d, ut & a, h, i, b, ^{a 17. VII.}

P 5

qua-

16. def.
VII.

quatuor; cadentq; inter cubos a, b dua medij; Cum
verò primus a ad quartum b habeat rationem tri-
plicatam ejus quam primus a ad h secundum; ha-
bebit etiam a cubus, ad b cubum rationem triplica-
tam, laterum c ad d, cum a ad b sit, ut c ad d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Si sint quotlibet numeri a, b, c de-
inceps proportionales, & multipli-
cans quisque seipsum, faciat aliquos
d, e, f; qui ab illis producti fuerint,
proportionales erunt: Et si numeri,
a b c, primùm positi multiplicantes
jam factos d, e, f, fecerint aliquos g, h, i
ipsi quoque proportionales erunt: Et
semper circa extremos hoc eve-
niet.

A, 2.			B, 4.			C, 8.		
D, 4.			N, 8.			E, 16.		
O, 32.			F, 64.					
G, 8.			P, 16.			Q, 32.		
H, 64.			K, 128.			S, 256.		
I, 512.								
J, 16.			L, 256.			T, 512.		
Z, 1024.			a 2048.			m, 4096.		

Ex a in b fiat n, & o ex b in c: Fiant item
 p, q ex a in n, e; & r, s, ex b in o, f: Item e, n, x,
 ex a in p, q, h; & y, z, a ex b in r, s, i. Cum ergo
 a multiplicans seipsum & b fecerit a & n; a erit,
 ut a ad b, ita d ad n: Ita, cum n & e sint ex b in
 se & a; erit etiam, ut a ad b, ita n ad e, & ita d,
 n, e continuè proportionales sunt in ratione a ad
 b. Proportionales etiam sunt continuè e, o, f, quia
 ex b in se & in c fieret e & o; ex c in se & in b
 fiunt o & f, = ejusdem rationis cum b, c, id est, cum
 a, b. Quoniam ergo d, n, e & e, o, f sunt in eadem
 ratione continuè proportionales, ex aquo erit, ut d
 ad e; ita e ad f; & ita d, e, f continuè propor-
 tionales erunt. Deinde in eadem ratione conti-
 nuè proportionales sunt g, p, q, h, cum g, p, q fiant
 ex a in d, n, e, & ex a, b in e fiant q & h: Simili-
 ter & h, r, s, i, cum h, r, s fiant ex b in e, o, f, & s,
 i ex b, c in f. Est ergo ex aquo ut g ad h, ita
 h ad i.

Eodemq, modo k, l, m continuè demonstran-
 tur proportionales.

PROPOS: XIV.

Theorema 12.

Si Quadratus numerus a Qua-
 dra-

dratum numerum b metiatur: & latus unius a metietur latus d , alterius b . Et, si unius Quadrati a latus c metiatur latus d alterius b ; & Quadratus a Quadratum b metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.

C, 2. D, 6.

α 11. IIX.
 β 7. IIX.

Fiat e ex c in d , a Erunt a , e , b continuè proportionales in ratione c ad d . Cumq; a primus b tertium metiatur, β metietur etiam c medium. Ideoq; cum sit, ut a ad e , ita c ad d , β metietur etiam latus c latus d . Rursus, si latus c metiatur latus d , m etietur etiam quadratus a quadratum b , cum in eadem ratione continuè a proportionalibus existentibus a , e , b ; a ipsum e aequè β metiatur, atq; c ipsum d , & ita etiam a quadratus b quadratum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus a , eubum numerum b metiatur; & latus c unius a metietur latus d alterius b . Et si latus c unius a cubilatus d alterius b meti-

metiatur; & cubus a cubum b metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.

E, 4. G, 12. F, 36.

C, 2. D, 6.

Completis iterum spacijs $e, g, f,$ & h , i ut in a 12. IIX, 20, huius factum est. Erunt & e, g, f & a, h, i , β 7. IIX, b continue proportionales. Cumq; a primus metiatur extremum b , β metietur etiam secundum h & propter eandem rationem latus c quoq; d latius metietur. Rursus si c latus metiatur latus d , metietur etiam cubus a cubum b . Continue enim existentibus proportionalibus a, h, i, b in ratione c ad d , aequè metietur c ipsum d , & a ipsum h , & sic etiam extremum b , cubus cubum,

PROPOS: XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus a Quadratum numerum b non metiatur; neque latus c unius a metietur alterius b latus d . Et si latus βc unius a quadrati non metiatur latus d alterius

us b : neque quadratus a quadratum b metietur.

A, 16. B, 81.

C, 4. D, 9.

α 14. IIX.

Si Clatus metiretur latus d , etiam a quadratus c , a metiretur quadratum b contra hypothesin. Et contra, si quadratus a , quadratum b metiretur, etiam Clatus d itidem contra hypothesin.

PROPOS: XVII.

Si cubus numerus a cubum numerum b non metiatur: neq; latus c unius a latus d alterius b metietur. Et si latus c cubi unius a latus d alterius b non metiatur: neq; cubus a cubum b metietur.

A, 8.

B, 27.

C, 2.

D, 3.

α 15. IIX.

Si enim latus c , metiretur latus d , etiam a cubus a cubum b contra hypothesin. Et contra, si cubus a cubum b metiretur; etiam latus c latus d metiretur, itidem contra hypothesin.

PROPOS: XIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorum numerorum a & b unusquodque proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homom.

*alogic vel d ad latus homologum e
vel fractionem.*

A, 12. G, 18. B, 17.

C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

*Fiat g ex d in e. Cum sit ut c ad d, ita e ad f;
erit permutado c ad e, ut d ad f. Cum ergo d mul-
tiplicans c & e producat a & g, erit a ad g, ut c
ad e. Sic etiam erit g ad b, ut d ad f, quia e multi-
plicans d & f producit g & b. Itaq, a, g, b sunt
proportionales in rationibus c ad e & d ad f, adeoq,
inter a & b cadit g medius proportionalis. Et quia
proportionales sunt a, g, b, habebit a ad b ratione
duplicatam eius, quam a ad g, i. e. c ad e vel d ad
f. Itaq, planus a ad planum b duplicatam habet
rationem laterum homologorum.*

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

*Duorum similium solidorum nume-
rorum a, b duo m, n medij proportionales
sunt numeri: Et solidus a ad solidum b tri-
plicatam habet rationem lateris homologi-
ci vel d vele ad latus homologum f vel g, vel h.*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.

I, 6. L, 12. K, 24.

C, 1. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

*Fiat i ex c in d, & k ex f in g, & l ex d in f. &
m, n ex e, h in l. Cum ipsis f, g, h proportionales
sint c, d, e, etiam permutando proportionales
erunt, ut c ad f, ita d ad g & e ad h. Et quia
d multiplicans c & f producit i & l, erit, ut c
ad f*

ad f, ita i ad l: & ut d ad g, ita l ad k; quia l & k sunt ex f in d, g; adeoque i, l, k sunt continuè proportionales in ratione c ad f, vel d ad g. Quia verò a solidus factus est ex c, d, e lateribus, & i ex c in d, fit, ut e multiplicans i, faciat a. Ita cum b solidus sit factus ex f, g, h lateribus, k verò ex f in g, fit ut b solidum faciat, h multiplicans k. Quare cum e multiplicans i, l fecerit a, m; erit a ad m ut i ad l, id est, ut c ad f, vel d ad g, vel e ad h; Sic etiam n ad b, ut l ad k, id est, ut c ad f; cum h multiplicans l, k, fecerit n, b. Est autem & m ad n, ut e ad h, quod e, h multiplicantes l facerint m, n. Sunt ergo a, m, n, b continuè proportionales in ratione c ad f; adeoque, inter ab similes solidos cadunt medij proportionales m, n. Et quia a, m, n, b sunt 4. continuè proportionales & habebit solidus a ad solidum b similem rationem ejus, quam a ad m, id est, c ad f, d ad g, & e ad h, id est, triplicatam ex ratione c ad f laterum homologorum.

p. 18. VII.

y 26. def.
VII.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si inter duos a, b numeros unus medius proportionalis cadat numerus c; similes plani erunt illi numeri a & b.

A, 18.

A, 18. C, 24. B, 32.

D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

Sunt minimi d, e in ratione a, c a metiuntur aque ipsos a, c per f, & ipsos c, b per g. Itaq; f multiplicans d, e a producit a, c, & g eosdem d, e multiplicans producit c, b. Itaq; cum e multiplicans f, g faciat c, b, & erit, ut c ad b, id est, ut d ad e, ita f ad g; & permutando, ut d ad f, ita e ad g. Cum vero a fiat ex d in f, erit planus, cuius latera d & f, sunt proportionalia lateribus e & g, ex quibus fit b planus. Erunt itaq; a b plani similes.

21. VII.

9. IX.

17. VII.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros a, b duo medij proportionales cadant numeri c, d; similes solidi sunt illi numeri a, b.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.

E, 1. F, 3. G, 9.

H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

Cum a sumtu tribus minimis e, f, g in ratione a, c, d, b, inter e & g cadat medius proportio-

9. IIX.

p 10. IIX.

nalis f ; β erunt e & g plani-similes, quarum latera sint h, i, k, l . Et quia e, f, g sunt in ratione data minimi, a quæ metiuntur ipsos a, c, d rationis ejusdem per m ; & eodem modo e, f, g minimi ipsos c, d, b , ejusdem rationis metiuntur per n ; ita ut m & n multiplicantes e, f, g producant a, c, d & c, d, b . Facti autem sunt e & f ex suorum laterum h, i , & k, l , multiplicatione mutua. Ergo, a, b producuntur ex multiplicatione mutua h, i, m , & k, l, n , & sunt solidi. Quia verò ex m, n inf sunt c, d , ut supra patet, γ erit c ad d , ut m ad n . Sed c ad d defl, ut e ad f , (quia n multiplicans e facit c & d) id est, ut h ad k , vel i ad l . Inter planos enim similes e, g , est medius proportionalis f in ratione laterum homologorum h, k vel i, l : Igitur h ad k & i ad l erunt, ut m ad n ; & permutando h ad i , ut k ad l ; & i ad m , ut l ad n . Sunt ergò latera h, i, k proportionalia lateribus k, l, n ; & propterea similes a, b solidi.

p 18. VII

p 17. VII.

p 19. IIX.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri a, b, c deinceps sint proportionales, primus a , autem sit quadratus; & tertius c quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.

D, 6. E, 8.

F, 1.

Sumto

Sumto d latere quadrati a, cum d in se faciat a, erunt d & a ab unitate continuè proportionales, & convertendo a ad d, ut d ad f. Cum ergo inter a & c cadant 10. medij, quot inter eundem a & f cadent etiam inter c & f tot; videlicet 9. Cum itaq, f, e, c continuè proportionales sint, produceretur c ex e in se, eritq, quadratus. a 9. IIX.
p 10. IIX.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri a, b, c, d sint deinceps proportionales, primus a autem sit cubus; Et quartus d cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.

F, 16.

H, 100.

E, 4.

H, 10.

I, 1.

Sumto e latere cubi a, ex e in se fiat f; & ex f in e, cubus a. Quia ergo in se facit f, & in f facit a, erunt e f a ab unitate continuè proportionales; & convertendo a, f, e, i continuè proportionales. Cum ergo inter eundem a & d, cadant 10. medij continuè proportionales, quot inter a & i, 6 cadent inter d & i totidem. Quare cum i, c, h, d sint continuè proportionales, fiet h ex g in se, & d ex g in h, eritq, d cubus. a 9. IIX.
p 10. IIX.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habeant inter se, ut a ad b , quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum ita c ad d , primus a autem sit Quadratus, & secundus b Quadratus erit.

A, 36. F, 48. B, 64.

C, 9 E, 12. D, 16.

α 11. IIX.

β 8. IIX.

γ 22. IIX.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d , inter q , c & d cadat medius proportionalis, etiam inter a , b , & c cadet medius f . Cum ergo a , f , b sint continui proportionales, & a primus Quadratus, etiam b tertius Quadratus γ erit.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant a ad b , quam cubus numerus ad cubum numerum c ad d , primus a autem sit cubus, & secundus b cubus erit.

A, 8.

A,8. G,12. H,18. B,27.

C,64. E,96. F,144. D,216.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d ; inter g, c & a 12. IIX.
 d & a cadant duo medij proportionales, c & f , & a 8. IIX.
 dent etiam g, h inter a & b . Cum ergo a, g, h , & b 13. IIX.
 sint continuè proportionales, & a primus cubus
 sit, & b quartus cubus.

Corollarium 1.

Proportio cujusvis numeri Quadra-
 ti ad quemlibet non quadratum, non
 potest reperiri in duobus numeris
 Quadratis. Quia ex 24. hujus ipsi
 quoque Quadrati essent.

Corollarium 2.

Nec inter cubum & non cubum
 cadit ratio cuborum; ob eandem cau-
 sam ex 25.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Similes plani numeri inter se ra-
 tionem habent a ad b , quam quadra-
 tus numerus ad quadratum numerū
 ut d ad f .

Q 3

A, 20

A, 20. C, 30. B, 45.

D, 4. E, 6. F, 9.

Cum a & b sint plani similes, a cadit inter eos unus medius proportionalis c: Sumtis ergo tribus minimis in a, c, b ratione continua, b erunt extremi d, f quadrati. Quare cum sit ex aequo a ad b, ut d ad f, patet a ad b esse ut d quadratus ad f quadratum.

218. IIX.
 § 1. cor. 2.
 IIX.

PROPOS: XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri a ad b rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum c ad b.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.

E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

Cum a & b sint solidi similes, a cadunt inter eos duo medij proportionales c, d, Sumtis ergo quatuor minimis e, f, g, h in ratione continua a, c, d, b, b erunt extremi e, h cubi. Quare cum sit ex aequo a ad b, ut e ad h patet, h; ad b esse, ut e cubus ad h cubum. Quod erat propositum.

219. IIX.
 § 1. cor. 2.
 IIX.



E U C L I D I S

E L E M E N T O -

R U M

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.



I duo similes plani numeri
 a, b multiplicantes se mu-
 tuo faciant quēdam c ; pro-
 ductus c erit Quadratus.

A, 6. E, 54.

D, 36. E, 108. C, 324.

A multiplicans seipsum faciat d quadratum. • 17. VII.

Cumq; itaq; ex a in a & b fient d & c erit,
 ut a ad b , ita d ad c . Sed inter a & b

Q

497

18. IIX. *cen planos similes unus β cadit medius proportiona-*
 2. 8. IIX. *lis. Ergo & inter d & c unus γ cadit, nempe E.*
 22. IIX. *Itaq, cū tres d, e, c sint continuē proportionales, &*
primus sit quadratus, δ erit etiam c tertius qua-
dratus.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duo numeri a , b se mutuò multiplicantes, faciant Quadratum c ; similes plani erunt a , b .

A, 6. B, 54.
 D, 36. C, 324.

17. VII.
 11. IIX.
 8. IIX.
 20. IIX.

A multiplicans seipsum faciat δ quadratum.
Erit, ut a ad b, ita d ad c, quia a multiplicans a &
b, produxit d & c. Sed inter d, c quadratos ca-
dit unus medius proportionalis: Ergo & inter a, b
 γ cadit unus, ac propterea a, b δ erunt plani simi-
les.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si cubus numerus a seipsum mul-
 tiplicans, procreet aliquem b ; pro-
 ductus b cubus erit.

A, 8.

A, 8.

E, 16.

D, 4.

F, 32.

C, 2.

B, 64.

I, 1.

Sit Clatus cubi a , ex quo in se fiat d , & ex
 c in d ipse cubus a . Itaq; a metietur c ipsum d per
 c . Sed & unitas i eundem c β metitur per c . Ergo
 unitas ipsius c est eadem pars, quae c ipsius d . γ Qua- α 7. ax.
 re ut unitas ad c , ita c ad d . Rursus etiam d β 5. ax.
 metitur a per c , quod c multiplicans d fecit a . Sed γ 20. def.
 quia etiam c metiebatur d per c ; Ergo d ipsius a
 erit eadem pars, quae c ipsius d . γ Ergo est ut c
 ad d , ita d ad a . Sed ut est c ad d , ita erat u-
 nitas ad c . Ideoq; ut unitas ad c ita c ad d & d
 ad a : adeoq; inter unitatem & a cadunt duo me-
 dy proportionales.

Caterum quia a metitur b per a ; quod a in
 se producebat b , & unitas eundem a per a metitur,
 erit unitas eadem pars ipsius a , quae a ipsius b ; &
 sic, ut i ad a , ita a ad b . Sed cum inter i & a
 cadant duo medij proportionales, ergo totidem in-
 ter a & b , cadent f & e . Cum itaq; inter qua- δ 8. IIX.
 tuor a, e, f, b continue proportionales primus sit cu- ϵ 23. IIX.
 bus, erit etiam quartus b cubus.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Q s

Si

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si cubus numerus a cubum numerum b multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit.

A, 8, B, 27.
D, 64. C, 216.

17. VII.
12. IIX.
8. IIX.
3. IX.
23. IIX.

A in se perducatur d. Quia ergo ex a in a & b fiunt d & c , erit ut a ad b , ita d ad c . Sed inter a & b cubos β eadum duo medij proportionales: γ Ergo & inter d & c . Quare cum d primus δ sit cubus, & c quartus ρ cubus erit.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si cubus numerus a numerum quendam b multiplicans faciat cubum c ; & multiplicatus b cubus erit.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

3. IX.

A in se producat d , = cubum. Cum ergo ex a in a

in a & b fiat d & c, & erit, ut a ad b, ita d ad c. β 17. VII.
Sed inter d, c, cubos cadunt duo medij proportiona- γ 12. IIX.
les. & Ergo & totidem inter a & b; adeoque, a exi- δ 8. IIX.
stente cubo etiam b cubus erit. ϵ 23. IIX.

PROPOS. VI.

Theorema 6.

Si numerus *a* seipsum multipli-
 cans, faciat cubum *b*; Et ipse *a* cubus
 erit.

A, 8. B, 64. C, 512.

Ex a in b fiat c, qui ex definitione est cubus. α 3. IIX.

Quoniam ergo b cubus multiplicans a, fecit c, = e-
rit & a cubus.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus *a* aliquē
b multiplicans, quempiam *c* faciat:
 factus *c* solidus erit.

A, 6. B, 7. C, 42.

D, 2. E, 3.

Quia enim a est solidus, = metitur ipsum a-
lius præter unitatem, usq; per e; Ergo & d in e & pro- α 13. def.
ducit a. Cum ergo b in a faciat c, erit c ex trium VII.
d, e, b, seu laterum multiplicatione mutua ortus, β 9. XX.
adeoque, ex definitione solidus.

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quotcunque numeri
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$, deinceps pro-
 portionales fuerint: Tertius b qui-
 dem ab unitate Quadratus est, & unū
 intermittentes d, f, h, k, m , omnes:
 Quartus c autem est cūbus, & duos
 intermittentes f, i, m , omnes: Septi-
 mus f verò cūbus simul & Quadra-
 tus, & quinque intermittentes m o-
 mnes.

Vn. I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.
 G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049.
 L, 177147. M, 531441.

Cum enim unitas a metiatur a per a , metie-
 tur quilibet sequentem per ipsum a , quia continue
 proportionales sunt: β Ideoq, a multiplicans seipsum
 producit b quadratum. Cumq, b, c, d sint conti-
 nue proportionales, & b Quadratus, etiam d erit
 Quadratus: ita & trium sequentium proportiona-
 lium tertius f erit Quadratus, & iterum h, k, m
 & c. Rursus cum a in se faciat b , & idē a in b faciat
 c , erit

α 5. 2x.

β 9. 2x.

γ 22. IIX.

e, erit ex definitione *c* cubus. Ergo cum *a*. proportionalium *c, d, e, f* primus *c* sit cubus *d* erit & quartus *f* cubus. Deniq, cum seprimus ab unitate *f* & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissis quinq, *g, h, i, k, l, m* erit & Quadratus & cubus. d 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quocunque numeri *a, b, c, d, e, f*, deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem *a* sit Quadratus; & reliqui omnes *b, c, d, e, f*, Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem *a* sit cubus, & reliqui omnes *b, c, d, e, f*, cubi erunt.

A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024.
1. Unitas. F, 4096.

A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768
F, 262144.

Quia enim *b* tertius ab unitate *a* est Quadratus, & unum intermittentes, omnes *d, f*, sunt q. a 8 IX.
a, b, c continuè proportionales, & *a* primus quadratus, *b* erit & *c* Quadratus. Eodem modo inter *e* a 22. IIX.

ter c, d, e proportionales c existente quadrato, etiam e quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si a primus ab unitate sit cubus: Quia c ab unitate quartus a est cubus & duo intermittentes omnes, etiam f erit cubus. Cumq; unitas metiatur a per a , & a cubus metiatur b per seipsum, & erit & b cubus. Cum itē a, b, c, d sint
 4. continuè proportionales, & a primus sit cubus, d erit & d quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continuè proportionalibus, ut b, c, d, e . Quia enim b est cubus. Ergo & e &c.

73. IX.
 223. IIX.

PROPOS: X.

Theorema 10.

Si ab unitate quocunque numeri ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$) deinceps proportionales fuerint, qui a verò post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium b ab unitate & unum intermittentes omnes d, f, h, k, m . At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartum c ab unitate, & duos intermittentes omnes f, i, m .

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

1. Unitas.

G, 128. H, 256.

I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus
 esto c. Quoniam est, ut a ad b, ita b ad c; conver-
 tendo c ad b erit, ut b ad a. Sed c est quadratus ex
 hypothesi. Ergo & a. Quod absurdum. Quia ponitur a 12. IIX.
 non quadratus. Idē etiā de ceteris concludendū. Ita, a^2 3. IIX.
 si quis alium, ut d præter c ponat cubum, quia a, b,
 c, d sunt continue proportionales, conversim pro-
 portionales erunt. Itaq, cum d primus sit cubus,
 etiam a quartus cubus b erit. Quod est contrā
 hypothesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si ab unitate quocunque nu-
 meri a, b, c, d, e, f, deinceps proportio-
 nales fuerint, minor b majorem f,
 metitur per aliquem d eorum, qui in
 proportionalibus sunt numeris.

1. Vn. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 242.

F, 729.

Cū ex equo sit ut b ad f, ita unitas ad d, quod 3.
 a, b, c, d; e, f, cū 3. numeris & unitate abcd e andē
 rati-

20. def.
VII.
5. ax.

rationem habeant, a a quæ etiam Unitas metietur numerum d , atq; b ipsum f . Sed p unitas metietur d per b , ergo & b ipsum f per d metietur. Eodem modo d metietur ipsum e pro a , quod sit, ut d ad e , ita unitas ad a . Sic & a ipsum f per e metietur, cum sit ut a ad f , ita unitas ad e . Et ita de cæteris.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum d metiuntur, iidem & cum a , qui unitati proximus est, metientur.

1. Vn. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

31. VII.
27. VII.
26. VII.

Sin minus. Si primus numerus e metiens quidem d , nō a metitur erūt a & e primi; & cum a multiplicans seipsum producat b , β erunt & e & b inter se primi; γ itemq; e & c , cum c ex a in b primis ad numerum e fiat. γ adeoq; e & d inter se erunt primi, cum d ex a in c fiat. Quod est contra hypothesin, quæ e ipsum d metiri ponebat.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si ab unitate quocunque nume-
ri a, b, c, d , deinceps proportionales
fuerint, qui verò a post unitatem, pri-
mus sit, Maximum d nullus alius me-
tictur, præter eos a, b, c , qui sunt in nu-
meris proportionalibus.

1. Vn. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.

H-----G-----F-----E----

Metiatur ipsum d , diversus ab a, b, c , qui sit
 e ; erit ille vel primus, vel compositus. Si sit pri-
mus, metiens extremum d , a metietur etiam a . 12. IX.
primum. Quod absurdum. Cum ergo e non sit a 33. VII.
primus, esto compositus, β metiens ipsum primus a 71. IX.
lius præter a nullus erit. Nam cum e metiatur
extremum d , quilibet primus metiens e , γ metie-
tur $\& d$, metiens verò d maximam, a metitur $\&$
 a unitati proximum; proinde duo primi se mutuo
metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum e pri-
mus, erit ipse a .

Porro metiatur a ipsum e per f . Itaq, a 17. VII.
multiplicans f $\& c$ binos, faciet binos e $\& d$; d eritq,
 e ad d , ut f ad c . Quare si e metitur d , etiam f

R

meti-

metitur c ; adeoque f eodem modo, ut e , compositus erit, quem solus a metitur. Metiatur ergo a ipsum f per g . Ideoque a binos g & b multiplicans producet f & c , d' eritq, f ad c , ut g ad b : Sed f metitur ipsum c , ergo & g metitur b . Si jam g esset primus meties b , metiretur etiam a . Quod absurdum. Nullus ergo alius metitur g præter a . Deniq, metiatur a ipsum g per h . Binos ergo a & h multiplicans a producet b & g , d' eritq, g ad b , ut h ad a . Sed g metitur ipsum b . Ergo & h ipsum a primum. Itaq, h æqualis est ipsi a . Cum autem ex h & g producatür idem b , qui ex a in seipsum, erit a medius proportionalis inter h & g ; cumq, a metiatur g , etiam h metietur a , primum primum. Quod absurdum. Itaq, præter proportionales a, b, c , nullus alius extremum d metitur.

20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum a , primi numeri b, c, d metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, præter eos b, c, d qui à principio metiebantur.

A.....

B...C...D.....

E---F---

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f .
 Idem ergo e multiplicans f a facit a . Ideoq; singuli a 9. IX.
 b, c, d alterum illorum e vel f metientur. Non c 32. VII.
 ipsum e primum; ergo ipsum f minorem ipso a .
 Quod contra hypotesin.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Si tres numeria a, b, c deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, duo quilibet a, b simul, b, c , a, c numeri ad reliquum c, a, b primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e in eadem cum illis proportionem minimis, a patet d in seipsum & e producere a & b , & e in se facere c . Cum itaq; d & e in sua proportione minimi, etiam b sint primi & utique d, e simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus, ex d, e

R a quam

26. VII. quā ipse d ad e primus sit, d erit quoq; ex d, e tan-
 quam uno factus numerus in d ad eundem e pri-
 mus. • Qui autem sit ex d, e tanquam uno in d e-
 qualis est & numero a facto ex d in se & numero b
 27. VII. facto ex d in e . Igitur a, b compositi primi sunt
 ad e , & ita ad c , qui sit ex e in seipsum.

B, 12. C, 16.

A, 9.

D, 3. E, 4.

Deinde quia uterq; d, e simul γ est primus
 ad quemlibet ipsorum d, e sit, ut numerus ex d, e
 tanquam uno factus in e , d primus sit ad d (cum
 tam ex d, e compositus, quā ipse e primus sit ad d)
 Sed qui sit ex d, e , tanquam uno in e equalis est &
 numero c facto ex e in se; & b facto ex d in e . Ergo
 & b, c simul compositi ad d primi sunt, eadeq; ad
 ipsum a qui ex d in se est factus; primi sunt b, c
 simul compositi.

A, 9. C, 16.

B, 12.

D, 3. E, 4.

Deniq; quia, ut antea uterq; d, e simul ad
 quemlibet ipsorum γ primus est; & d contrario qui-
 libet ipsorum d, e primus est ad compositum ex d, e ;
 d erit

& erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e
 Primus, & sic ex d in e factus ad cum, qui ex d e
 tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d ^{4. 11.}
 e tanquam uno in se equalis est eis, qui fiunt ex d
 & e in seipfos, una cum eo qui ex d in e bis. Queni-
 amo itaq; duo numeri simul; nempe compositus ex
 ijs, qui fiunt ex d & e in seipfos & ex eo, qui fit
 ex d in e , atq; is qui fit d in e primi sunt ad ali-
 quem ipsorum, cum videlicet, qui fit ex d in e , ut
 ostensum est, & erunt etiam duo illi, compositus ex ijs ^{437. VII.}
 qui fiunt ex d & e in seipfos & ex eo, qui fit ex d
 in e , atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rur-
 sus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs,
 qui fit ex d & e in seipfos, atq; is, qui fit ex d in e
 ad aliquem ipsorum, cum nimirum, qui fit ex d in
 e , primi sunt ostensi; & erunt etiam duo illi, compo-
 situs ex ijs, qui fiunt ex d & e in seipfos, atq; is, qui
 fit ex d in e , inter se primi. Itaq; cum ex d & e in
 seipfos fiunt a & c , item ex d in e fiat b ; erunt a &
 c simul compositi primi ad b .

PROPOS.: XVI

Theorema 16.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b , ita secundus b ad alium
 quendam c .

R 3

Ea

A

B

C

Est, si potest tertius proportionalis c. Cum
 a) 23. VII. ergo a & b sint primi, & in sua ratione a minimi;
 c) 21. VII. ipsi a & b metientur b & c numeros in eadem ra-
 tione; a ipsum b, & b ipsum c. Cumq; a etiam me-
 tiatur seipsum. Duos ergo a & b inter se primos
 metietur numerus a. Quod absurdum.

PROPOS: XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri
 a, b, c, d, deinceps proportionales, ex-
 tremi autem ipsorum a, d primi in-
 ter se sint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b, ita ultimus d, ad alium
 quempiam e.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E

a) 23. VII. Est, si potest, ut a ad b, ita d ad e. Erit er-
 p) 21. VII. go permutando, ut a ad d, ita b ad c: sunt au-
 y) 11. AX. tem a, d primi sue rationis a minimi: igitur a &
 b metientur, ipsos b & c. Est verò, ut a ad b, ita b
 ad c. Si ergo a metitur b, etiam b & metitur c.
 Quia item est, ut b ad c, ita c ad d; cum b me-
 tiatur

fiatur etiam c metietur d: Quare a metiens c
metietur etiam d. Metitur vero & a seipsum. Er-
gò metitur a, d inter se primos. Quod absurdum.

PROPOSITIO XLIX.

Problema I.

Duobus numeris a, b datis, con-
siderare, an ipsis possit tertius, pro-
portionalis inveniri.

A, 4.

B, 7.

Si a & b dati sint primi, non potest reperi- a 16. IX.
ri tertius proportionalis. Si non primi, cum b mul-
tiplicans seipsum faciet c , Aut ergò a metitur c ,
per d , & d est ipse tertius proportionalis: Cum e- a 9. 37.
nim a metitur c per d , β fiet c ex a in d . Fit autem y 20. VII.
idem c ex b in b : Ergò qui sub extremis a, d con-
tinetur c factò ex b in seipsum medio equalis est.
Quare erit ut a ad b , ita b ad d .

A, 4. B, 6. C, 36.

Aut a non metitur c , & tum nequit reperiri
tertius proportionalis. Si verò ponatur d tertius.
Quia est, ut a ad b , ita b ad d , idem numerus sub ex-
tremis a, d contentus, equalis est ei, qui sit a medio
 b , id est, c . Cum itaq; c ex a in d fiat, metietur a
ipsum c per d , quod absurdum. Quia ponebatur
non metiri.

A, 6. B, 4. D ---- C, 16.

R 4

PRO

PROPOS: XIX.

Problema 2.

Tribus numeris a, b, c datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri. (*Sive deinceps proportionales sint sive non*)

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

B multiplicans c faciat d. Aut a metitur d
 29. 22. per e quantum proportionalem. • Fit enim d ex a
 19. VII. per cōstr. in c, & ex b in c. Ideoq, cum sub extremis c, e
 comprehensus, equalis sit ei, qui sub intermedijs,
 7 erit, ut a ad b, ita c ad e.

A, 4. B, 6. C, 9. E - - - D, 54.

A, 3. B, 4. C, 10. E - - - D, 40.

Aut a non metiatur d, & tunc nequit inveniri quartus proportionalis. Si tamen potest, sit e. Cum 4 a, b, c, e sint proportionales, extremis a, c contentus, equalis β erit contento intermedijs b, c, hoc est, d. Cum itaq, d ex a in e fiat, metietur a ipsum d per e, quod est absurdum. Quis ponebatur non metiri.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni
proposita multitudine primorum
numeratorum a, b, c .

A 2.

B 3.

C 5.

D.....

Sumto minimo d , quem a, b, c metiantur, c. 38. VII.
apponatur ipsi unitas e . Si totus $d e$ est pri-
mus, factum est, quod vult propositio, quia tam plu-
res sunt primi a, b, c, d, e .

A 3.

B 5.

C 7.

D, 105. E

G 53.

Si totus $d e$ sit non primus, β metietur ipsam
 g , qui nulli propositorum a, b, c , idem esse potest. Si c. 33. VII.
tamen sit, metietur etiam g ipsam d , sicut cum me-
riuntur a, b, c . Ideoque g metiens totum $d e$, & de-
tractum d , metietur etiam reliquum e unitatem
quod absurdum. Ergo g primus, idem non est, γ 21. ax.

R. s.

qui

qui unus ipsorum a, b, c . Sunt ergo a, b, c, g primi plures, quam a, b, c . Adeoque & in infinitum plures primi inveniri possunt.

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

Si pares numeri quotcunque $a b, b c, c d$ componantur; totus par erit $a d$,

A..... B.... C..... D

Cum enim quilibet par habeat partes duas aequales; si equalibus addantur aequales, omnes dimidia dimidijs sunt aequales. Quare totus $a d$ erit par, dimidiarum compositorum duplex ex definitione.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si impares numeri quotcunque $a b, b c, c d, d e$ componantur; multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit $a e$.

A... B..... C..... D.... E

Cum propositi numeri sint impares, quilibet differt unitate à pari, ex definitione. Singulis unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par. a 21. IX.
Quare & à reliquis compositus = par erit. Sed uni-
zatum detractarum multitudo est par. Ergo & to-
tus a c par erit.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quotcunque
 a, b, c, e , componantur, multitudo
 autem ipsorum sit impar; & totus $a e$
 impar erit.

$A \dots B \dots C \dots D, E$

Ablata unitate d ex ce , erit $c d$ par. Sed
 $a c$ ex imparibus multitudo paribus est compositus. a 22. IX.
 Ergo & par a erit, huic si addatur $c d$ totus a 21. IX.
 $a d$ par ϕ erit. Sed addita unitate d numero $a d$,
 totus $a e$ impar erit, quia par à pari differt per unitatem.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero $a b$ detrahatur
 par $c b$: & reliquus $a c$ par erit.

$A, D \dots C \dots B$

Si non detracta $a d$ unitate erit $d c$ par.
 Ideoq; & compositus $d b$ = erit par: ac proinde cō- a 21. IX.
 posito $d b$ addita unitate $a d$, totus $a b$ impar fiet.
 Quod est absurdum; quia ponitur par.

PRO,

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si à pari numero a b impar c b
detrahatur; & reliquus a c impar
erit.

$A \dots C \dots D \dots B$

*Ex impari c b ablata unitate c d , reliquus
 d b par erit. Quia ergo totus a b ponitur par
ablatopari db , reliquus a b par erit, ablataq;
unitate cd reliquus a c impar erit.*

24. IX.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero a b impar
 c b detrahatur: reliquus a c par erit.

$A \dots C \dots D \dots B$

*Ex imparibus ab , cb unitate db detracta,
reliqui a d , c d pares erunt. Ex pari a d ablato
pari cd , reliquus a c par erit.*

24. IX.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si

Si ab impari numero a b par c b
 tetrahatur; reliquus a c impar erit.

A . D C B

Ab impari a b unitate a d sublata, erit re-
 liquus db par; cui db rursus auferatur cb
 par, reliquus dc par quoque a erit: ac proinde uni-
 tate a d addita, fiet a c impari.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si impar a numerus parem b ,
 multiplicans, fecerit aliquem c , fa-
 ctus par erit.

A . . . B

C

Cum c fiat ex a in b ; componetur c ex tot
 numeris ipsis b equalibus, quot fuerint unitates in
 a . Est autem b par. Ergo & c ex tot b paribus
 compositus, quot in a sunt unitates, par quoque
 erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus a imparem b
 mul-

multiplicans fecerit aliquem c ; factus impar erit.

A . . . B

C

Cum c ex a in b fiat, componetur c ex tot numeris ipsi b equalibus, quot in a fuerint unitates. Est autem b impar. Ergo & c ex tot imparibus compositus, quot in a sunt unitates, impar quoque erit. Hinc nascuntur duo Corollaria.

23. IX.

Corollarium 1.

Par numerus in se multiplicatus, producit parem.

Corollarium 2.

Impar numerus in se multiplicatus producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 28.

Si impar numerus a parem b metiatur, & illius b dimidium d metietur.

A . . . C E . .

B

D

M.

Metiatur a ipsum b per c . Erit utiq; c par
 & enim esset impar, sequeretur a imparem in c
 imparem efficiere imparem. Quod absurdum,
 utia b ponitur par: Ergo & c erit par. Itaq;
 uno a per omnes c unitates efficiat totum b : Idem
 per dimidium unitatum c ipsum d efficiet, ipsius
 dimidium. Metietur ergo a ipsum d per dimi-
 dium unitatum c , id est, c .

PROPOS: XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus a ad aliquem
 numerum b , primus sit: & ad illius
 duplum c primus erit.

A.....B.....

C.....

D---

Si a non sit primus ad c , metiatur eos d , qui
 omnino erit impar. Si enim esset d par, cum me- 28. IX.
 tiatur a imparem, a erit a , factus ex d pari, in cum 30. IX.
 numerum, per quem metitur, par; Quod absur-
 dum, quia ponebatur a impar. d ergo impar
 metiens c parem, a metietur quog; dimidium nu-
 meri c . Idem autem d metitur & a . Ergo & a , b
 inter se primos metietur d . Quod absurdum. a ergo
 ad c est primus.

Hinc

Hinc patet Corollarium: Numerum imparem, quia ad numerum aliquem est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum eius (c. 23. IX.) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplam in infinitum excurrendo. *Quia semper sequentes precedentium sunt dupli.*

PROPOS: XXXII.

Theorema 30.

Numerorum a, c, a' à binario a duplorum, unusquisque est pariter par tantum.

1. Un. $A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.$

■ 11. IX.

Exposita enim unitate sunt numeri ab unitate a deinceps proportionales: Quare a quemlibet b, c, d , & minor maiorem per aliquem ipsorum a, b, c, d metietur; Qui cum omnes sint pares, & binarii nimirum dupli ipsorum quemlibet a metietur numerus par per parem. Erit ergo quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantum ita ostenditur. Cum enim ab unitate sint continuè proportionales, & unitati proximus primus

fit primus, utpote binarius, nullus præter ipsos a, b, c, d quemlibet ipsorum & metietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem & metietur. 813.IX.
715.IX.

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticoꝝ inveniendi omnes numeros pariter pares. Nulli enim præter duplos à binario a, b, c, d, e, f, &c. tales esse possunt. 832.IX. Si enim esset quispiam g, ejus h dimidium par esset; quia si impar esset, g esse f & pariter impar contra hypothésin; ipsius h, dimidium sit i, qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium i sit unitas, h, g erunt dupli ab unitate atq; ita in ordine priorum, contra hypothésin.

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.

I --- H --- G -----

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus a dimidium b habeat imparem: pariter impar est tantū.

A

B C . .

D --- E ---

Cum a habeat dimidium b imparem, metietur binarius c par numerus ipsum a per b. a itaq;

S

ex de

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen esse talis negetur, erit quoque pariter par. Ideoque ipsum aliquis par per d parem c metitur, & ex d secundo in tertium e fiet a qui ex c primo in b quartum a eritque, ut c ad d , ita c ad b . Metitur autem c parem d . Ergo & c par metitur ipsum b imparem. Quod absurdum.

Scholium.

Imparium omnium dupli omnes sunt, pariter impares, tantum.

PROPOS: XXXIV.

Theorema. 32.

Si par a numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat impari: pariter par est, & pariter impar.

A + + + + +

Cum enim dimidium habeat parem per eum metitur ipsum binarius par, & sic pariter par est. Sed & pariter impar. Diviso enim a bisaria, ejusque dimidio rursus bisariam & sic deinceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si enim ultimo occurreret binarius a esset a duplus à binario, quod contra hypothesein. Cum ergo occurrat impar, ille metietur a per parē, non per imparem, quia impar multiplicans imparem, produceret imparem a ; Contra hypothesein. Est itaque & pariter impar.

Scholium.

Omnes, relictis duplis à binario, & qui dimidios habent impares, pa-

fit primus, utpote binarius, nullus præter ipsos a, b, c, d quemlibet ipsorum θ metietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem γ metietur. $\beta 13. IX.$
 $\gamma 15. IX.$

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticoꝝ inveniendi omnes numeros pariter pares. Nulli enim præter duplos à binario a, b, c, d, e, f, & c. tales esse possunt. Si enim esset quispiam g, ejus h dimidium par esset; quia si impar esset, g esse f & pariter impar contra hypothefin; ipsius h, dimidium sit i, qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium i sit unitas, h, g erunt dupli ab unitate atq; ita in ordine priorum, contra hypothefin. $\delta 31. IX.$

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.

I --- H --- G -----

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus a dimidium b habeat imparem, pariter impar est tantū.

A

B C . .

D --- E ---

Cum a habeat dimidium b imparem, metietur binarius c par numerus ipsum a per b. a itaq;

S

ex dē

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen ef-
 se talis negetur, erit quoque pariter par. Ideoque ipsū
 aliquis par per d parem c a metitur, & ex d secun-
 do in tertium e fiet a qui ex c primo in b quartum
 a eritque, ut c ad d, ita e ad b. Metitur autem c
 parem d. Ergo & e par metitur ipsum b imparem.
 Quod absurdum.

Scholium.

Imparium omnium dupli omnes
 sunt, pariter impares, tantum.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 32.

Si par a numerus neque à binario
 duplus sit, neque dimidiū habeat im-
 parē: pariter par est, & pariter impar.

A

Cum enim dimidium habeat parem per eum
 metiatur ipsum binarius par, & sic pariter par est.
 Sed & pariter impar. Diviso enim a bisaria, ejusque
 dimidio rursus bisariam & sic deinceps, tandem in
 imparem aliquem incidemus. Si enim ultimò oc-
 curreret binarius a esset a duplus à binario, quod
 contra hypothefin. Cum ergo occurrat impar, ille
 metiatur a per parē, non per imparem, quia im-
 par multiplicans imparem produceret imparem a;
 Contra hypothefin. Est itaque & pariter impar.

Scholium.

Omnes, relictis duplis à binario,
 & qui dimidios habent impares, pa-
 res

res; reliqui & pariter pares & pariter
impares sunt.

PROPOS: XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunque numeri $a, b, c,$
 $d, e, f,$ deinceps proportionales, de-
trahantur autem à secundo $b, c,$ & ul-
timo $e, f, g, c, b, f,$ æquales ipsi primo a :
Erit ut secundi excessus $b, g,$ ad primū
 a , ita ultimi excessus e, h ad omnes, $a,$
 $b, c, d,$ ipsum antecedentes.

A.....

B... G..... C

D.....

E..... K..... I..... H..... F

Abef detrabantur fi, & fk ipsis bc & d æ-
quales. Quoniam fi est æqualis bc & ablatas fh
ablatog c, etiam reliquus fi, reliquio gb æqua-
lis erit. Sed quia est, ut a ad bc, ita bc add, &
d ad ef; convertendoq, ut ef add, ita d ad bc,
& bc ad a: estq, k f ipsi d & i f ipsi bc, & h f
ipsi æqualis; erit etiam ut ef ad k f, ita k f ad
a f & i f ad h f. Igitur dividendo ut ek ad k f, ita
ki ad i f, & i h ad h, ac proinde ita etiam ærunt a: 12. VII.
omnes e k, ki, i h ad omnes k f, i f, h f, id est, to-
tus eh add, bc, a simul (quibus k f, i f, h f, summi
sunt æquales) ut i h ad h f, hoc est, ut b g ad a, qui
illis sunt æquales.

S 2

Scholium.

Per hoc theorema summam continuè proportionalium ex primo, secundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque a, b, c, d numeri deinceps exponantur in dupla proportionc, quoad totus compositus fiat primus e ; & totus e hic in ultimum d multiplicatus faciat aliquem f , Factus erit perfectus.

1. *Vn.* A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G --- 62. H, 124. I, 248. F --- 496.

K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.

O --- P ---

Sumantur ab e tot dupli; quot sunt a, b, c, d videlicet e, g, h, i : erit ex aquo ut a ad d , ita e ad i , factusq; ex a , in i & equalis est facto ex d in e . Sed f est factus ex d in e . Idem ergo f ex a in i fit. Itaq; i metitur f per a binarium, & ita bipartitus est.

14. VII.

19. VII.

i est duplus. Quare e, g, h, i, f, deinceps sunt dupli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur equalles ipse e, qui sunt k, l, relictis m, n excessibus; & Erunt ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g, h, i simul. Sed m est equalis ipse e, dimidius videlicet dupli g. Ergo & n equalis ipsis e, g, h, i 73. IX.
 fiant. At unitas & a, b, c, d equalles sunt l, l ipse e & k equalis. Itaq; totus l, n, id est, f equalis erit unitati & numeris a, b, c, d, e, g, h, i simul. Quare cum unitas & a, b, c, d, e, g, h, i metiantur ipsum f (Quia enim f ex e in d est factus, & metiatur ipsum f e eundemq; f unitas & a, b, c, d, 7. IX.
 qui ipsum d metiuntur. Rursus enim i metiatur i ipsum f, eundem f & metiatur e, g, h, per ipsum l 11. IX.
 metiantur. ob proportionem duplam) nec alius ullus metiatur ipsum f. Erunt ergo unitas & numeri a, b, c, d, e, g, h, i omnes partes quas f habere potest; quibus simul sumtis equalis cum sit f, erit f perfectus ex definitione. Si alius quidam numerus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergo ex e primo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p secundo in o tertium. Ergo ut e ad p, ita o ad d. Cum autem a, b, c, d sint proportionales ab unitate, & a primus, nullus prater illos o metiatur d; Ergo nec o alius ab ipsis a, b, c positus; & cum sit e ad p, ut o ad d, neq; e ipsum p metiatur, quicumq; e sit primus, & inter se sunt primi, 31. VI.

Et in sua ratione minimi, & o ipsum e æque ac
 a 23. VII. p ipsum d metiantur. Ergo cum d nullus prater
 p 21. VII. a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sit idem
 qui b, & quot b, c, d, totidem e, g, h, sumantur,
 a eritq, ut b add ita e ad h, & idem numerus fi-
 et ex b in h, qui ex d in e, id est, qui ex o in p.
 Itaq, ut p ad b ita h ad o. Sed p est idem qui b.
 Ergo & o idem qui h. Quod absurdum.

Ponebatur enim alius.





EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER X.

Definitiones.

L



Omnimensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadē mensura metitur. *Ita etiam 21 & 13 palmorum lineae sunt commens. quia & unus palmus & dimidius & $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, quae corpus idem metitur, intelligitur.*

2. Incommensurabiles autem, quarum nullā communem mensuram

S 4

con-

contingit reperiri. Tales sunt latera & Diagonius quadrati, ut in propositione ultima demonstratur, & multa alia lineae de quibus in propositionibus. Itemque superficies & corpora.

3. Rectae lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur.

Anteali-
neae commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicatae: hae vero longitudine alias incommensurabiles insus per intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communem commensurabilia.

Quae quadrata in 47. l. appellantur potentia laterum vel linearum. Tales lineae etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nullum spacium, quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. Intelligit eas, quae neque mensuram communem, quoad longitudinem, neque quoad quadrata habent.

5. His positis, ostenditur, cuicumque

que rectæ & propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia; alias verò potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis. *Dicit ad datam rectam alias infinitas & commensurabiles tum longitudine, tum potentia, & incommensurabiles posse inveniri, eamq. cuius respectu reliqui tales sunt dici p^{ri}m^o, Rationalem, quod semper ponatur certa & nota, reliquis ut plurimum ignoratis.*

6. Et huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potētia tantum Rationales. Omnes lineæ quæ data quomodocunq. sunt commensurabiles dicuntur Rationales, non quidem positione, ut illa, sed quia in illa comparatione cum data commensurabiles inveniuntur. Ideoq. & lineas quarum quadrata 20 & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16 vel 100. commensurabiles, rectè etiam rationales appellamus.

7. Huic verò incommensurabiles,

S S

Irratio-

Irrationales vocentur. *Itidem hic ex adverso omnibus modis incommensurabiles ostendit, quas nec in longitudine neq. in potestate exactius aliquis numerus exprimit.*

8. Et Quadratum, quod à proposita dicta recta fit, dicatur Rationale. *Non fecius enim, ac linea illa certa & nota dicebatur rationalis, etiam quadratum ex ea factum Rationale est dicendum.*

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia. *Ita & omnes superficies planæ, Quadrato Rationalis linea propositæ commensurabiles, Rationales sunt dicenda non positione sed collatione.*

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur. *Etiā superficies quacūq. irrationales dicuntur, quarum linea sunt incommensurabiles rationali linea.*

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irrationales. *Si nimirum sunt quadrata ipsa, intelliguntur biclatera per lineam; si verò sint alia quæpiam recti lineæ, re-*

Et, describentes equalia quadrata spacijs incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Qualibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

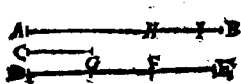
1. Magnitudo quocunq; magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus ab , c , inæqualib. propositis, si à majore ab auferatur majus a b quàm dimidiū; & ab eo, quod

quod reliquū bb est, rursus detraha-
tur majus hi , quàm dimidium; & hoc
semper fiat: Relinquetur tandem
quædam magnitudo, ib , quæ minor
erit proposita minore magnitudi-
ne. c .



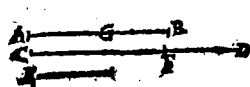
Sumatur ipsius c mul-
tiplex d e proximè ma-
jor quàm a , b , in partes
ipsi c æquales divisa; quibus partibus multitudinē
æquales sint partes a h , h i , i b , in lineā a b . Cum
ergo d e sit major quàm a , b , & ex d e minus di-
midio d g (vel etiam dimidium, si d e esset du-
pla ipsius) ex a b verò plus dimidio a h sit ablatum,
erit reliquum g c reliquo h b majus. Rursus, cum
 h b , quàm g c sit minor; & ex g c ablatum sit di-
midium f g (vel minus dimidio) ex h b verò majus
dimidio h i erit reliquum f e id est c reliquo i b
majus. Quod erat propositum.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus ab ,
 cd inæqualibus propositis, detraha-
tur semper minor ab de majore cd ,
alterna quadam detractioe, &
reliqua

reliqua fd minimè præcedentem ab metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines ab, cd .



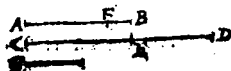
*Sin minus, esto cōmunis
mensor e, qui vel aqua-
lis est, ipsa b vel minor.*

Facta ergo detractio ab ex cd quoties potest, relinquat fd , se minorem, & detracta fd ex a relinquat se minorem gb &c. adeoque relinquetur tandem vel ex c vel a b quadam ut gb minor ipsa e : Quoniam itaque metitur ipsam ab , & a ipsam cf , etiam e metietur ipsam cf , cumque metiatur etiam cd , metietur totam etiam reliquam fd . Sed fd metitur ipsam ag & ergo metitur ipsam ag , cumque metiatur a , metietur etiam reliquam gb , major minorem. Quod absurdum.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus ab, cd magnitudinibus commensurabilibus datis; maximam earum communem mensuram fb invenire.



Facta detractio altera, metiatur tandem fb ipsam cd , nisi datas duas

2. X.

2. 22.

3. 22.

3. 22.

duas a, b, c, d voluerimus esse incommensurabiles, eritq; f, b maxima communis mensura. Cum enim f, b metiatur e, d , e, d verò ipsam a, f , etiam f, b metietur a, f ; & quia metitur seipsam, & etiam totam a, b ; & ita etiam ipsam c, e quam metitur a, b ; adeoque cum c, e & e, d metiatur f, b , & metiatur totum c, d , eritq; utriusq; a, b & c, d mensura communis. Si quis verò etiam neget eam esse maximam, major sit g , quæ & a, b & c, d metietur, & f ipsam c, e , quam metitur, a, b ; Cumq; metietur & c, d & c, e , etiam d metietur e, d reliquam; quæ cum metiatur a, f , eandem a, f metietur etiam g : sed cum & a, b & a, f metiatur d metietur etiam f, b reliquam, major minorem. Quod absurdum.

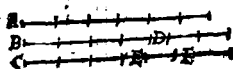
Hinc patet Corollarium.

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROPOSITIO IV.

Problema 2.

Tribus magnitudinibus a, b, c , commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.



Esto d communis men-
 sura a & b ; quæ si &
 metitur c , a habetur

a. 3. X.

β cor. 3. X.

propositum. Si enim major quædam quam d eri-
 am communis mensura, β metietur & d communem
 mensuram a & b major minorem. Si autem d
 non metiatur c , erunt saltem commensurabiles:
 Cum enim a , b , c sint commensurabiles, qualibet
 earum communis mensura, maximam mensuram
 ipsarum a & b β metietur. Sit itaq; commu-
 nis e inter c & d quæ erit maxima trium a , b , c
 communis mensura. Sin minus, major quam
 e sit f . Quia ergo f metitur a & b , metietur et-
 iam d . Cumq; metiatur etiam c & d , β metietur
 communem earum mensuram, e , major minorem.
 Quod absurdum.

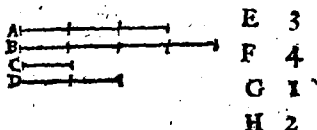
Hinc manifesta sunt Corollaria.

1. Magnitudo metiens tres magni-
 tudines, metitur quoq; maximam
 earum communem mensuram.
2. Pluribus quam tribus magnitu-
 dinibus datis, illarum communis
 maxima mensura inveniri potest.
 Si enim sunt 4, invenitur prius trium.

LEMMA.

Si sint quotcūq; magnitudines, a, b, c ,
 d , & totidē etiā numeri, e, f, g, h , qui bini
 in

in eadem ratione sumantur, in qua
binæ magnitudines; & ex æqualitate
in eadem ratione erunt, *Ad D* ma-
gnitudines & numeri *e ad h*.

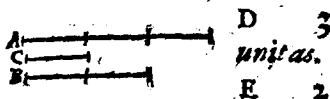


Demonstratio est ex V. & VII. manifesta.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Commensurabiles *a b* magnitu-
dines inter se rationem habent,
quam numerus ad numerum.



a 3. X.

a Sit *c* earum mensura communis maxima, qua
quoties metitur *a* & *b*, toties unitas metiatur
d & *e* numeros. Cum igitur magnitudo *c* metia-
tur magnitudinem *a* quoties unitas numerum *d*,
erit ut *c* ad *a* ita unitas ad *d*: sed ut est *c*

a Lemn. X.

ad *b* ita est unitas ad *e*, *a* Ergo ex æquo ut magni-
tudo *a* ad magnitudinem *b* ita numerus *d* ad
numerus *e*.

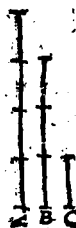
PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines a, b , proportionem habeant, quam numerus d ad numerum c ; commensurabiles erunt a, b , magnitudines.

D 4 E 3 unitas.



Quot unitates sunt in d , in tot partes æquales ipsi c sit divisa a magnitudo. Cum ergo sit ut c ad a ita unitas ad d , quia æquè metiuntur c ipsam a & unitas ipsum d ; cumq; ponatur ut a ad b , ita d ad c , ærit ex æquo ut c ad b ita unitas ad c . Sed unitas metitur numerum c . Igitur & c metitur

Lemma
4. X.

magnitudinem b . Sed & c metitur ipsam a . Ergo a & b eandem communem mensuram c habent, & β 1. def. X. β sunt commensurabiles.

Corollarium.

Si fuerint duo numeri & recta, dari potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data, recta secetur in tot partes æquales, quot

T

unita.

unitates continet alteruter numero-
rum; assumaturq; earundem parti-
um alia, quot unitates continet alter
numerus habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis c & e , & li-
nea recta hb , oportet efficere ut nu-
merus c ad numerum e , sic quadratum
lineæ hb datæ ad quadratum alte-
rius bd .

13. VI.



Reperiatur bg , quæ sit ad hb ut
 c ad e : & sitq; inter hb & bg
media proportionalis bd . Cum er-

20. VI.

C 5. E 2. go sit ut c ad e , ita hb ad bg ; sed
ut hb ad bg , ita quadratum ex hb ad qua-
dratum ex bg . Itaq; ut c ad e , ita quadratum
ex hb ad quadratum ex bg .

PROPOS: VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudi-
dines a, b inter se proportionem non
habent, quam numerus ad nume-
rum.

6. X.

Si haberent & essent commensurabiles, Quod est
contra hypotesin.

PRO.

PROPOS: IIX.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a, b proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*) = 5. Z.

Si enim commensurabiles acciperentur, a esset earum proportio, quæ numeri ad numerum, contra hypothesein.

LEMMA.

Si sint tres quantitates a, b, c , continuè proportionales, & aliæ tres d, e, f continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum a , ad tertiam c , ita prima d harum ad tertiam f ; erit & ut prima a illarum ad secundam b ; ita prima harum ad secundam e .

D 29 E 42 F 36

Cum enim rationes a ad c & d ad f duplicata sint eadem, etiam dimidia a ad b , & d ad e eadem erunt.

PROPOS: IX.

Theorema 7.

T 2

Quæ

Quæ à rectis lineis a, b , longitudinis commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f : Et quadrata ex a & b inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; & latera a & b habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis a, b longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f : & quadrata ex a & b inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; neque latera a & b habebunt longitudine commensurabilia.

Fig. X.



Cum rectæ a, b sint commensurabiles longit. a erunt ut numeri ad numerum. Sit autem a ad b ut c numerus ad numerum d , quarum quadrata sint e & f . Quoniam ergo a ad b est ut c ad d ; quadratum autem ex a ad quadratum

quadratum ex b & β habes duplicatam ratione laterum
 & sicut & numerus quadratus e ad numerum qua-
 dratum f laterum c & d , erit eadem proportio
 quadratorum ex a & b , quae est numerorum qua-
 dratorum e & f .

Deinde sit quadratum ex a ad quadra-
 tum ex b ut numerus quadratus e ad nu-
 merum quadratum f , erunt rectae a &
 b longitudine commensurabiles. Cum
 enim rationes eadem quadratorum ex re-

ctis a & b , & numerorum quadratorum e & f & γ
 sint duplicatae suorum laterum a & b & c , d , erit
 ut numerus a ad numerum d , ita recta a ad re-
 ctam b , & erunt q , a , b , commensurabiles.

Terzio sint a & b incommensurabiles, etiam qua-
 drata ex ipsis non erunt ut numerus quadratus ad
 numerum quadratum; quia ita forent a , b , com-
 mensurabiles contra hypothesin. Denique quadra-
 tum ex a non habeat rationem ad quadratum ex
 b , quam numerus quadratus ad quadratum, e-
 runt etiam longitudine incommensurabiles a & b ;
 si enim essent commensurabiles, etiam quadrata
 ex ipsis essent ut numerus quadratus, ad quadra-
 tum, contra hypothesin.

PROPOS: X.

Theorema 8.

Si quatuor a b c d magnitudines

T 3

propor-

proportionales fuerint, prima a verò secundæ b fuerit commensurabilis; & tertia c quartæ d commensurabilis erit. Et si prima a secundæ b fuerit incommensurabilis, & tertia c , quartæ d incommensurabilis erit.

5. X.



6. X.

7. X.

EF

32

Cum enim a & b sint commensurabiles, a habebunt rationem numerorum, e ad f : Est verò etiam c ad d ut a ad b , ergo etiā c ad d est ut e ad f . β Sunt ergo inter se commensurabiles.

Contra si a & b sint incommensurabiles, etiam c non sunt ut numerus ad numerum. Ideoq; nec c ad d , quæ ponuntur ut a ad b , erunt ut numerus ad numerum, adeoque etiam c & d incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quâ Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

16. IIX.

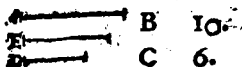
Inventi plani non similes, omnes non habent rationem quam quadratus ad quadratum, Suntq; tales

Tales numeri primi omnes, & quorum unus quadratus, alter non. &c.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ *a* invenire duas rectas lineas *d* & *e* incommensurabiles, alteram *d* quidem longitudine tantum, alteram *e* verò etiam potentia.



* Assumtis numeris *b* & *c*, si investigetur recta *d*, ad cuius quadratum sit quadratum rectæ *a*, ut *b* ad *c*, erit *d* ipsi *a* longitudine tantum incommensurabilis. Quia enim quadratum ex *a* ad quadratum ex *d* est, ut numerus *b*, ad numerum *c*, sed *b* & *c* non sunt quadrati: Ergo quadratum ex *a* ad quadratum ex *d* non erit ut numerus quadratus ad numerum quadratum: & Ideoque *a* & *d* sunt rectæ longitudine incommensurabiles; & longitudine quidem tantum. Cum n. quadrata *b* ad *c*, earum habeant proportionem numerorum *b* ad *c*, *d* erunt commensurabilia. Deinde inter rectas *a* & *d* longitudine tantum incommensurabiles

a per lemma 10. X.
* per lemma 6. X.

7. 9. X.

8. 6. X.

T 4

inve-

6. 13. VI.

invenitur media proportionalis e, quæ & longi-
tudine & potentia incommensurabilis erit ipsi a.
Quia enim quadratum ex a, ad quadratum ex e
est, ut a ad d: sed a ipsi d est longitudine incom-
mensurabilis; igitur erit ergo quadratum ex a quadrato
ex e incommensurabile, & ita rectæ a e etiam po-
tensia incommensurabiles.

7. 10. X.

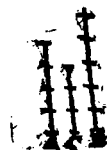
PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ a, b, eidem c magnitudini sunt
commensurabiles, & inter se a & b
sunt commensurabiles.

8. 5. X.

9. 4. IIX.



Cum enim a, c sint commensurabiles,
a habent rationum numerorū d, e,
sicut & c b numerorum f, g. Assum-
tis autē h, i, k, tribus numeris minimis
in rationibus datis d ad e, & f ad g;
DIO E 8 erit h ad i, ut d ad e, id est, a ad c;
F2 G 3 & i ad k, ut f ad g, id est c ad b. Itaque
H5. I4. K6 que ex æquo erit a ad b, ut h ad k.
id est, ut numerus ad numerum, & ita
a & b commensurabiles.

10. 6. X.

PROPOS: XIII.

Theorema 10.

Si

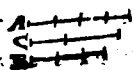
Si sint duæ magnitudines a b , & altera a quidem eidem c sit commensurabilis, altera b verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines a b .

Sin minus, & eidem a sit commensurabilis b , a & c erunt etiam b & c commensurabiles, contra hypothesin.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 1^a.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera a autem ipsatum magnitudini cuiuspiam c incommensurabilis fuerit: & reliqua b eidem c incommensurabilis erit.



Sin minus, cum a ipsi b sit commensurabilis, a erunt etiam a & c commensurabiles, contra hypothesin.

Scholium.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

T 3

LEM.

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus
 $h g$ & c , invenire id, quo major $h g$
 plus potest quàm minor. c .

61. EV.



Descripto semicirculo super $h g$
 a paretur $h d$ equalis ipsi c , jun-
 ctis $d g$; plus poterit recta $h g$
 quàm $h d$ vel quadrato recte $d g$.

63. I. III.

7. 47. I.

Cum enim $h d g$ angulus β sit re-
 ctus erit quadratum ex $h g$ equale γ quadrato ex
 $d h$, & $d g$. Atq; sit $h g$ recta plus potest quàm
 quadrato $d g$.

PROPOSITIO XV.

Theorema 12.

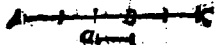
Si quatuor a, b, d, e , rectæ lineæ
 proportionales fuerint, prima a ve-
 rò tantò plus possit, quàm secunda b ,
 quantum est Quadratum rectæ lineæ
 e , sibi commensurabilis longitudine:
 Et tertia d tantò plus poterit, quàm
 quarta e , quantum est quadratum
 rectæ f , lineæ sibi cōmensurabilis lō-
 gitudine: Quòd si prima a tanto plus
 pos-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines $a b$, $b c$ commensurabiles componantur; & tota magnitudo $a c$ utriq; ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo $a c$, uni $a b$ ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines $a b$ & $b c$ commensurabiles erunt.

23. X.



23. 22.

* Sit communis mensura d . Cum ergo d metiatur $a b$, $b c$, etiam

$a c$ tota d metietur, eruntq; $a c$ & $a b$ commensurabiles propter communem mensuram d ; sicut & $a c$ & $b c$; eaq; propter utriq; $a b$ & $b c$ commensurabilis est $a c$. Deinde sit tota $a c$ alteri; ex quibus composita est ut $a b$ commensurabilis, erunt $a b$ & $b c$ commensurabiles. Assumta enim communi mensura d , erit eadem d reliquæ $b c$ mensura. Ideoq; commensurabiles sunt $a b$, $b c$ propter communem mensuram d .

Corollarium.

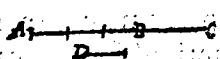
Si tota magnitudo $a c$ ex duabus $a b$, $b c$ composita, commensurabilis fuerit

fuerit alteri $a b$ ipsarum, eadem $a c$ & reliquæ $b c$ commensurabilis erit.

PROPOS. XVII.

Theorema. 14.

Si duæ magnitudines $a b$, $b c$ incommensurabiles componantur, & tota magnitudo $a c$ utriq; $a b$, & $b c$ ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo $a c$ uni ipsarum $a b$ incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudinem $a b$, & $b c$ incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantum alteri, ut $a b$, sit commensurabilis, habens

commensuram communem. Itaq; d metiens totam $a c$, & ablatam $a b$, etiam a metietur reliquam $a b c$, & commensurabiles erunt $a b$, $b c$, contra hypothesin. Deinde tota $a c$ uni ipsarum $a b$ incommensurabilis existens, etiam alteri $b c$ incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypothesin ipsi $a b$ commensurabilis pforet.

§ 16. X.

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus compo-

Super ab describatur quadratus, sitq; eg radius $ad b$ perpendicularis. Secta cd bisariam in f , sumatur ch equalis cf recte; & h puncto agatur hi parallela ipsi ae , & i puncto ikl parallela ipsi ge , sumtaque kl equali ipse ak , perficiatur lb rectangulum, & la quadratum. Dico lb rectangulum quarta pars quadrati ex cd esse equale, applicatum ad rectam ab , deficientis figura quadrata la . Quoniam ki media proportionalis est inter ak , kb erit rectangulum akb quadrato ki equale, id est, a 34. I. quadrato ex peh vel cf , & quod quarta pars γ 4. II. est quadrati ex cd .

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ ab, cd , inæquales, & ad maiorem ab applicetur quarta pars lb Quadrati, ex minore cd descripti, deficientis figura quadrata la , non erunt segmenta ak, kb , quæ ex applicatione sunt, æqualia.

Si æqualia sunt segmenta ak, kb & siquidem parallelogrammum applicatū ad ab deficientis figura quadrata ex ak descripta, æquale est rectangulo akb : Est verò sub æqualitate ak, kb quadratum: erit parallelogrammum dictum

dictum quadratum ex $b k$, dimidio ipsius $a b$ descriptum, & quadratum ex $a b$ quadruplum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypothesis quadratum ex $c d$ ejusdem parallelogrammi applicatum sit quadruplum, nempe quartæ partis quadrati $c d$. Igitur quadrata rectarum $a b$, $c d$ sunt æqualia, ipsæq; rectæ contra hypothesein æquales.

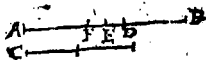
PROPOSITIO XIIX.

Theorema 15.

52. Lem.
17. X.

Si fuerint duæ rectæ lineæ $a b$ & c inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori c æquale parallelogrammum ad majorem $a b$ applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes $a b$, $d b$ longitudine commensurabiles ipsam dividat; major $a b$ tantò plus poterit, quàm minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major $a b$ tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

drati, quod fit à minori e, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes a d, d b longitudine commensurabiles ipsam dividet.



Quoniam enim a d s major est quam d b, secetur a b bisariam in e, ipsiusq; e d sumatur æqualis e f. Cū autē tota a e & e b, ablataq; e d & e f sint æquales, erunt & reliquæ a f, d b æquales. Cumq; recta a b in æqualia in e, itemq; in æqualia in d, sit sectus, erit rectangulum super a d b unā cum quadrato e d æquale quadrato ex e b: & quadruplum rectanguli a d b & quadrati ex e d æquale erit quadruplo quadrati ex e b. Sed quadruplo rectanguli a d b æquale est quadratum ex c: & quadruplo quadrati ex e d æquale est quadratum ex f d (cum quarta pars quadrati ex tota aliqua recta descripti æqualis sit quadrato ex totius recta dimidio descripto) & quadruplo quadrati ex e b æquale est quadratum ex a b. Quadrata igitur ex c & f d simul æqualia sunt quadrato ex a b; rectaq; a d plus potest recta c quadrato rectæ f d. Hæc dico commensurabilem toti a b. Cum enim a d, d b sint commensurabiles, erit tota a b partibus d b commensurabili longitudine: cum item ipsi d b composita ex d b &

12 X.

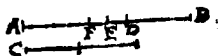
db & a f sit longitudine commensurabili (quæ
 pla est ipsius db) Ergò cum utraq; a b & comp
 sita ex db , a f longitudine sit commensurabi
 ipsi db , erunt etiam a b & composita ex db ,
 longitudine inter se commensurabiles: adeoq; cum
 a b composita ex a f , db tanquam una recta &
 2 cor. 16. X. fd commensurabilis sit longitudine composita ex
 a f , db , eadem a b reliqua fd longitudine com
 mensurabilis erit. Ergò a b plus potest quàm
 c quadrato recta fd longitudine sibi commensura
 bilis.

Contra si a b plus potest quàm c quadrato
 recta sibi longitudine commensurabilis & c , erunt
 segmenta a b , db commensurabilia. Eodem
 mirum modo ostenditur ab plus posse quàm c qua
 drato recta fd , longitudine sibi commensurabili.
 Cum autē a b tota composita ex fd , a f & db tan
 quam una sit longitudine cōmensurabilis ipsi fd ,
 eadem cōmensurabilis & erit reliqua ex a f , db com
 posita. Est verò & a f , db , composita seu dupla iō
 mensurabilis ipsi db . Itaq; cum utraq; a d & db
 cōposita ex a f , db longitudine sit cōmensurabili,
 erunt etiam a b , db longitudine commensurabi
 les: adeoq; cum tota a b ex a d , db composita
 ipsi db sit commensurabilis longitudine, ipse a d ,
 db etiam inter se commensurabiles & erunt longi
 tudine.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si fuerint duæ rectæ lineæ ab , & c inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major ab tantò plus poterit quam minore, quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major ab tantò plus possit, quàm minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autē parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammū ad maiorem ab applicetur, deficiēs figura quadrata; in partes ad , db longitudine incommensurabiles ipsam dividet.



Omnia constituentur ut in præcedenti propositione, nisi ut ad , db fiant incommensurabiles longitudine. Quodcum ita sit = erit etiam tota ab parti db longitudine incommensurabilis. Sed db est commensurabilis sua dupla ex db , at cōposita.

V 2

Igitur

p 14. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, d & b composita ex d , b , a , f , una d & b incommensurabilis sit ipsi a , b , etiam reliqua ex d , b , a , f composita eadem a , b incommensurabilis β erit: adeoque cum a , b ex a , f , f , d & d & b composita sit incommensurabilis longitudine composita ex a , f , d , b erit eadem a , b etiam reliqua f , d incommensurabilis, atque sic a , b plus potest quam c , quadrato recta f , d , longitudine sibi incommensurabilis.

Contra in partes a , d , d , b incommensurabiles divisa ostenditur linea a , b . Ipsidem enim, ut prius retentis, erit a , b ipsi f , d incommensurabilis. Itaque cum tota, a , b , ex f , d , a , f , d & b composita, ipsi f , d longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam a , b reliqua ex a , f & d & b composita incommensurabilis erit. Sed una recta ex a , f & d , b ipsi d , b longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaque commensurabilium, composita ex a , f , d & b & d , b ; ipsa composita ex a , f , d & b incommensurabili ipsi a , b , β erit etiam reliqua d , b eadem a , b incommensurabilis. Cum itaque tota a , b , composita ex a , d , d & b longitudine incommensurabilis sit ipsi d , b , α erunt & ipsa a , d , d & b inter se incommensurabiles.

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transendum est ad Rationes & Medias.

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, li.

neas

neque longitudine commensurabiles,
omnino & potentia commensura-
biles esse, potentia vero commensu-
rabiles non omnino & longitudine,
sed posse & longitudine commen-
surabiles esse & incommensurabi-
les; manifestum est, si expositæ Ra-
tionali aliqua linea commensura-
bilis fuerit longitudine, illam voca-
ri Rationalem, & ipsi commensura-
bilem non solum longitudine, sed
etiam potentia: longitudine enim
commensurabiles, omnino & poten-
tia commensurabiles sunt. Si vero
expositæ Rationali aliqua linea fue-
rit potentia commensurabilis, si qui-
dem & longitudine, dicetur & sic,
Rationalis & commensurabilis ipsi
longitudine & potentia. Quod si ex-
positæ Rationali rursus aliqua linea
commensurabilis existens potentia,
longitudine fuerit incommensura-
bilis, dicetur & sic Rationalis, potē-
tia tantum ipsi commensurabilis.

p. 14. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, d & b composita ex d , b , a , f , una d & b incommensurabili sit ipsi a , b , etiam reliqua ex d , b , a , f composita eadem a , b incommensurabilis β erit: adeoque cum a , b ex a , f , f , d & d , b composita sit incommensurabili longitudine composita ex a , f , d , b ; erit eadem a , b etiam reliqua f , d incommensurabilis, atque sic a , b plus potest quam c , quadrato recte f , d , longitudine sibi incommensurabilis.

Contra in partes a , d , d , b incommensurabiles divisa ostenditur linea a , b . Ipsa enim, ut prius retentis, erit a , b ipsi f , d incommensurabilis. Itaque cum tota, a , b , ex f , d , a , f , d , b composita, ipsi f , d longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam a , b reliqua ex a , f & d , b composita incommensurabilis erit. Sed una recta ex a , f & d , b ipsi d , b longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaque commensurabilium, composita ex a , f , d , b & d , b ; ipsa composita ex a , f , d , b incommensurabili ipsi a , b , β erit etiam reliqua d , b eidem a , b incommensurabilis. Cum itaque tota a , b , composita ex a , d , d , b longitudine incommensurabilis sit ipsi d , b , erunt & ipsa a , d , d , b inter se incommensurabiles.

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transcendamus ad Rationes & Medias.

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, lineas

neque longitudine commensurabiles,
omnino & potentia commensura-
biles esse, potentia vero commensu-
rabiles non omnino & longitudine,
sed posse & longitudine commen-
surabiles esse & incommensurabi-
les; manifestum est, si expositæ Ra-
tionali aliqua linea commensura-
bilis fuerit longitudine, illam voca-
ri Rationalem, & ipsi commensura-
bilem non solum longitudine, sed
etiam potentia: longitudine enim
commensurabiles, omnino & poten-
tia commensurabiles sunt. Si vero
expositæ Rationali aliqua linea fue-
rit potentia commensurabilis, si qui-
dem & longitudine, dicetur & sic,
Rationalis & commensurabilis ipsi
longitudine & potentia. Quod si ex-
positæ Rationali rursus aliqua linea
commensurabilis existens potentia,
longitudine fuerit incommensura-
bilis, dicetur & sic Rationalis, potē-
tia tantum ipsi commensurabilis.

EUCLIDIS ELEM:
 LEMMA II. EX
 PROCLO.

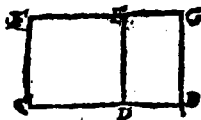
Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; cōmensurabiles, inquam, inter se, vel longitudine & potentia vel potentiâ solum: Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales lōgitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiā potentia commensurabiles esse; si verò potentia inter se solum sunt cōmensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales; potentia solum inter se commensurabiles.

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ, cd, bd , erit, ut prima cd ad secundam bd : ita quadratum df , quod fit à prima cd , ad rectangulum.

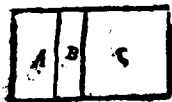
Et angulum dg , quod sub duabus illis
 rectis lineis continetur: & ut secunda
 ab ad primam db ; ita rectangulum
 dg sub ipsis, ad quadratum ce ex prima.

Cum enim rectangula ce , . 1. VI.
 cg sint equalia, = sunt ut lon-
 gitudines.



LEMMA 4.

Spacium a Rationali spacio b commē-
 surabile & a ipsum
 Rationale est.



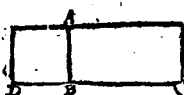
Sit enim c quadratum rationale. Cum ergo b
 sit rationale, = erit Rationali c commensurabile: = 9 def. X.
 Cumq; & a ipsi b sit commensurabile, etiam a &
 c tanquam commensurabilia ipsi b , inter se
 & commensurabilia erunt, & sic etiam Rationali c . 12. X.
 commensurabile a , ipsum quoq; = rationale erit.

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitu-
 dine commensurabilibus, rectis li-
 neis a, b, c , secundum aliquem præ-
 dictorum modorum, (in lemmate
 secundo propositorum, ut longit.)
 continetur Rectangulum, = ratio-
 nale est.

9. def.
 1. VI.
 10. X.



Super alterutra illarum, ab fiat quadratum ad rationale. Quia autem ab , id est, bd , & b c rationales commensurabiles sunt longitudine, & β est, ut db ad bc , ita a ad ad & a c , erunt etiam a d & a c commensurabilia, atque a d rationali, commensurable a etiam c rationale.

PROPOS: XXI.

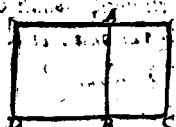
Theorema 18.

Si Rationale a c ad Rationalem ab applicetur, latitudinē b c efficit Rationalem, & c ab , ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

12. X.

1. VI.

6 def. X.



Ex a b fiat quadratum, quod est rationale; erunt a d , ac rationalia; adeoque a commensurabilia. Sed β ut a d ad a c , ita est d b , id est, a b ad b c , & a b rationale.

LEMMA 1.

Recta linea potens spacium irrationale, irrationalis est.

Si enim

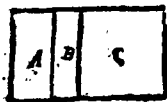
Rectangulum dg , quod sub duobus illis
rectis lineis continetur: & ut secunda
 db ad primam db ; ita rectangulum
 dg sub ipsis, ad quadratum ce ex prima.

Cum enim rectangula ce , & cg sint equalia, sunt ut latitudines.



LEMMA 4.

Spacium a Rationali spacio b commensurabile & a ipsum Rationale est.



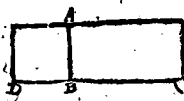
Sit enim c quadratum rationale. Cum ergo b sit rationale, erit Rationali c commensurabile: α 9 def. X. Cumq; a ipsi b sit commensurabile, etiam a & c tanquam commensurabilia ipsi b , inter se β commensurabilia erunt, & sic etiam Rationali c β 12. X. commensurabile a , ipsum quoq; rationale erit.

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitudine commensurabilibus, rectis lineis a, b, c , secundum aliquem predictorum modorum, (in lemma secundo propositorum, ut longit.) continetur Rectangulum, a, c , rationale est.

29. def.
 1. VI.
 10. X.

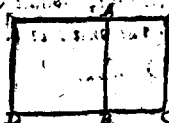


Super alterutra illarum, in ab fiat quadratum ad rationale. Quia autem ab , id est, $b d$, & $b c$ rationales commensurabiles sunt longitudine, & β est, ut db ad bc , ita ad ad $a c$, erunt etiam ad & $a c$ commensurabilia, atq; $a d$ rationali, commensurabile $a c$ etiam rationale.

PROPOS: XXI.

Theorema 18.

Si Rationale $a c$ ad Rationalem $a b$ applicetur, latitudinē $b c$ efficit Rationalem, & $e i a b$, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



12. X.

1. VI.

6 def. X.

Rationalis ad $b c$ rationalem.

Ex $a b$ fiat quadratum, quod est rationale; erunt $a d$, ac rationalia; adeoq; commensurabilia. Sed β ut $a d$ ad $a c$, ita est $d b$, id est, $a b$

LEMMA I.

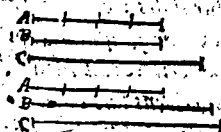
Recta linea potens spacium irrationale, irrationalis est.

Si enim

Si enim linea illius quadratum aequalis sit spacio
 irrationali, ipsum irrationale esse oportet, aut
 quadratum illud foret contra hypothese[m] rationalem
 propter ipsam lineam rationalem.

LEMMA 2.

Duas rectas ac Rationales potentia
 solum commensurabiles invenire.



He, ut & rationa-
 les longitudine commesu-
 rabiles, duplices tantum
 sunt; Aut enim illarum
 una, ut b, longitudine est
 commensurabilis data a,
 & tunc ipsi a equali assum-
 ta b rationali invenia-

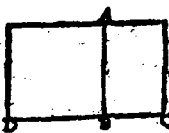
tur potentia tantum commensurabilis, vel longitudi-
 ne tantum incommensurabilis, quae & ipsa β ratio-
 nalis est: Aut neutra illarum longitudine ipsi a
 est commensurabilis, & tunc illi primum b, & ha-
 bit c inveniat potest commensurabilis. Erunt ex constr.
 ergo rationali a potentia commensurabiles α b &
 α c, ipsae quoque β rationales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod sub Rationalibus, a b, b c po-
 tentia tantum commensurabilibus,
 V 5 rectis

rectis lineis cōtinetur rectangulum
 ac ; Irrationale est: & recta linea i-
 psūm potens, rationalis est. Vocetur
 autem Media.



Ex altera, ut $a b$, descri-
 ptum sit quadratum ad, quod
 rationale est. Quoniam verò
 a est ut $b d$, id est, $a b$ ad $b c$;
 ita $a d$ ad $a c$; & $a b$, $b c$

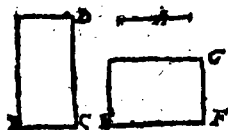
sunt longitudine incommensurabiles; & erunt &
 $a d$, $a c$ incommensurabilia; cūq; quadratum
 $a d$ sit rationale, & irrationale erit $a c$ rectangulū,
 & ipsi aequalē quadratum describens linea d irra-
 tionalis. Hec autem linea cū inter $a b$ & $b c$ sit
 media proportionalis, vocatur Media, & rectan-
 gulum dicitur medium, quod vel sub duobus poten-
 tia tantū commensurabilibus continetur, ut $a c$;
 vel quod alteri cuiuspiam, sub talibus lineis compre-
 hensio, aequalē est, quia aequalē eis quadrato sit
 per media proportionali descripto.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Quod à Media a fit, ad Rationa-
 lem $b c$ applicatum, latitudinem ef-
 ficat Rationalem cd , & $c b c$, ad quam
 applicatum est, longitudine in-
 commensurabilem.

Quoniam



Quoniam a est Me-
dia, potest rectang. e g
duabus rationalibus e f,
f g potentia tantum
commensurabilibus con-
tentum, & rectangu-
le b d, e g sunt equalia, 14. VI.

laterum a reciproce proportionalium, ut b c ad
e f; ita f g ad c d. 7 Et ut quadratum ex b c, ad 12. VI.
quadratum ex e f, quia super rationalibus lineis
sunt commensurabilia; ita quadratum ex f g, ad
quadratum ex c d inter se commensurabilia, ipse
recte f g & c d commensurabiles; & cum f g 10. X.
sit rationalis, utraq; etiam Rationalis erit. Sed
c d ipsi b c est incommensurabilis. Cum enim e f,
f g sint rationales potentia tantum commensura-
biles; sitq; ut e f ad f g, ita quadratum ex e f, 11. ma.
ad rectang. e g, d erit quadratum ex e f rectan- 19. X.
gulo e g incommensurabile, & sic rectangulo b d.
At quadratum ex e f commensurabile est quadrato
ex c d (quia lineae illae sunt rationales & potentia
tantum commensurabiles.) Itaq; cum eidem qua-
drato ex e f rectangulum b d sit incommensurabi-
le, etiam b d rectang. 2 erit incommensurabile; 13. X.
quadrato c d. Cū vero c d & b c sint ut quadra-
tum c d & rectang. b d incommensurabilia: d-
erunt ipse quoq; longitudine incommensurabiles.
Est ergo rationalis c d, & rationali b c poten-
tia tantum commensurabilis seu longitudine in-
commensurabilis.

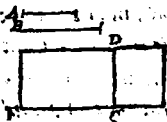
PRO.

EVCLIDIS ELEM. PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Media a commensurabilis, b , Media est.

45. I.
23. X.



1. VI.
10. X.

14. X.

22. X.

Sit d rationalis, ad quam applicetur rectang. $d e$ quale quadrato ex a , & erit c rationalis ipsi $c d$ longitudine incommensurabilis. Eidem $c d$ applicetur rectangulum $d f$ quale quadrato ex b . Cum ergo a, b sint commensurabiles; ipsarum quadrata, id est, rectangula $d e, d f$ etiam commensurabiles erunt. Est autem, ut $d e$ ad $d f$, ita recta $a c$ ad rectam $c f$, & $c c$, & $c f$ longitudine sunt commensurabiles. Sed $c c$ est rationalis, ipsi $c d$ potentia tantum commensurabilis: itaq; & $c f$ eidem $c d$ longitudine incommensurabilis erit. Et quia rationalis est $c f$; cum rationali $c d$ commensurabilis sit potentia, potentia etiam commensurabiles erunt $c d, c f$. Ac proinde b recta potens rectangulum $d f$ sub rectis $c d, c f$ potentia tantum commensurabilibus, media est.

Corollarium.

Spacium $d f$ Medio spacio $d e$ commensurabile, medium est.

Patet

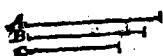
*Patebat, quod utraq; continebantur rectis po-
tentia tantum commensurabilibus.*

LEMMA 1.

Congruit hoc omniquaq; cum lem-
mate 1, 19 propos. nisi quod loco Ra-
tionalis semper legendum est Me-
dium.

LEMMA 2.

Duas rectas Medias *ab* longitu-
dine commensurabiles; item duas
ac potentia tantum commensura-
biles invenire.



*Si b ipsa Media longitudine;
c vero eidem a potentia tantum
commensurabilis inveniatur,
utraq; etiam a erit Media, a b quidem longitudi-
ne, a c vero potentia tantum commensurabiles me-
dia.*

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sub Mediis Longitudine
commensurabilibus rectis lineis *ab*,
bc continetur rectangulum *ac*, Me-
dium est.

Ex

a. VI.



Ex a b media fiat quadratū ad, quod erit Medium cum a sit, ut db ad bc, ita a d ad ac: sunt autem db

id est ab & bc longitudine commensurabiles. Itaq; a d, a c & erunt commensurabilia. & Quare spaciū a c mediis a d commensurabile Medium est.

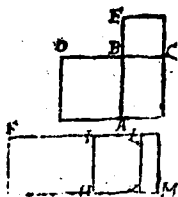
§ 10. X.
γ Cor.
34. X.

PROPOS: XXVI.

Theorema 23.

Quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis ab, bc continetur rectangulum, ac, vel Rationale est, vel Medium.

a 11. X.
§ 45. I.



Descriptū quadratū ex a b & bc a medijs ad Rationalem fg & applicentur rectangula fh, hl, lm equalia spacijs ad, ac, ce, ut fm fiat rectangulum unum.

Cum itaque a d & ce

γ 23. X.
§ 34. I.

sint media, etiam fh, lm erunt medijs, & eorumq; latitudines gh, km rationales propter fg, kl & aequales rationales, quibus sunt applicatae, & potentia commensurabiles erunt. Cumq; ab, bc sint potentia commensurabiles, etiam earum quadrata ad, ce, & his equalia rectangula fh, lm

com-

commensurabilia erunt. Sed ut fh ad lm ita .i. VI.
 recta gh ad km . & Sunt igitur gh, km longi- 10. X.
 tudine inter se commensurabiles. Et quia ra- 11. X.
 tionali fg potentia sunt commensurabiles; etiam
 rectangulum sub gh, km comprehensum, ratio-
 nale erit. Quia verò est, ut db ad bc ; ita a d
 ad ac : & ut a b ad be , ita a c ad ce ; erit ut
 a d ad ac , ita a c ad ce ; cum sit bd ad bc , ut
 a b ad be , quia utriq; utraq; equalu. Proinde
 & ipsis equalia rectangula fh, hl, lm erunt
 proportionalia, ut & ipsorum Bases $gh, hk,$
 km : & adeoq; rectangulum sub gh, km ratio- 17. VI.
 nale quadrato ex hk erit aequale, quod & ipsum
 & ipsius latu hk rationale est; & ob id, fg ra-
 tionali exposita longitudine vel potentia = com- 6. def.
 mensurabilis est hk . Et si hk ipsi hi id est fg
 longitudine commensurabilis fuerit, & erit re-
 ctangulum hl rationale: Sed si tantum poten-
 tia = erit Medium. Est ergo rectangulum sub
 Medijs potentia tantum commensurabilibus vel
 Rationale vel Medium

Scholium.

Facilius quàm per 45. I. potest da-
 re a c rectangulo æquale fieri ad h l ra-
 tionalem datam, si tribus his a applice- 12. VI.
 tur quarta proportionalis h k. Rectan-
 gulum enim sub extremis hi, hk æ. 16. V.
 quale est rectangulo a c ex intermediis.

Siqui.

7 20. X.

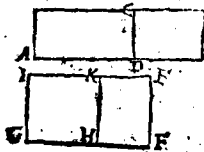
7 22. X.

Siquidem verò rectangulum sub duabus medijs potentia tantum cōmensurabilibus vel rationale vel medium est, docetur propof. 28. quomodo inveniende sint illa media, quae comprehendunt rationale; & 29; quae Medium. Atq; sic ex hactenus demonstratis colligitur, 7 Rectangulum sub duabus Rationalibus longitudine cōmensurabilibus, Rationale esse, potentia verò Medium. Rursus & rectangulum sub medijs longitudine cōmensurabilibus esse Medium: Sub Medijs verò potentia tantum cōmensurabilibus vel Rationale vel Medium esse. (Sub Medijs verò nec potentia nec longitudine cōmensurabilibus, est Medio Medium, aequale rectangulo sub Rationali & Irrationali Media; quā speciem Euclides non habet.)

PROPOS: XXVII.

Theorema 24.

Medium *ab* non superat Medium
ac Rationali. *db*



Si enim *db* est Rationale, posita *ef* linea rationali applicetur e *g* medio *a b* aequale, & medio *a c* rectangulum *eh* aequale, critq; *db*

rationale

rationali aequale k.g. Cum ergo Media e.g., e.h. ad
 rationalem e.f. sint applicata β , erunt fg, fh Ra. β 23. X.
 rationales incommensurabiles longitudine ipsi e.f. fra-
 tionali. Cum item rationale h.i. ad rationalem
 h.k., id est, e.f. sit applicatum, verit. h.g. rationa- γ 21. X.
 lis longitudine ipsi e.f. commensurabilis. Sed e.f. ipsi
 f.h. longitudine est incommensurabilis. Ergo h.g.
 eidem f.h. longitudine incommensurabilis δ erit. Ve- δ 14. X.
 ram ut f.h. ad h.g., ita quadratum ex f.h., ad re- ϵ 3. Lemma
 ctangulum fhg. Itaq; quadratum ex fh incommen- ζ 19. X.
 surabile ζ erit rectangulum fhg. Sed quadrato η 10. X.
 ex f.h. commensurabile est quadratum ex h.g.
 (quia utraq; ex rationalibus lineis sunt descripta)
 adeoq; duo quadrata ex fh, h.g. simul commensu- θ 16. X.
 rabilia sunt quadrato ex fh; & rectangulum fhg
 commensurabile est bis sub fh, h.g. sumto rectan-
 gulo (quia duplum) Itaq; quadrata fh, h.g. simul
 incommensurabilia δ erunt rectangulo bis sumto sub
 fh, h.g. $\circ$ Quare & compositum ex quadratis θ 17. X.
 rectarum fh, h.g. & ex bis sumto rectangulo
 fhg incommensurabile est composito ex quadratis
 rectarum fh, h.g. Sed quadratis fh, h.g., una
 cum rectangulo fhg bis sumto = aequale est qua- κ 4. II.
 dratum fg. Ergo quadratum ex fg, com-
 posito ex quadratis rectarum fh, h.g. incommen-
 surabile erit. Quod compos. cum sit λ ratio- λ 4. Lemma
 nale: etiam ipsi incommensurabile quadratum ex μ 19. X.
 fg erit irrationale, & sic etiam recta fg irratio-
 nalis,

nalis, contra hypothesein, qua illam longitudinem incommensurabilem ipsi esse ponebant.

Scholium.

Rationale $e g$ superat Rationale $e h, h g$ Rationali.

u. 9. def. X.

u. 13. X.

u. cor. 16. X.

u. 4. Lemma

19. X.

Quia enim $e g, e h$ sunt rationalia, & erunt eadem commensurabilia quadrato rationali expressa; & quare & inter se commensurabilia. Itaque cum totum $e g$ ex $e h, h g$ compositum, ipsi $e h$ sit commensurabile, erit quoque idem $e g$ reliquo $k g$ commensurabile. Sed $e g$ est rationale. & Ergo & $k g$ Rationale erit.

PROPOSITIO XIIX.

Problema 4.

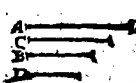
Medias $c d$ invenire, potentia tantum commensurabiles, quae Rationale comprehendant.

Lemma 2.

u. 1. X.

u. 13. VI.

u. 12. VI.



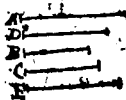
Inter a assumtas a, b rationales potentia tantum commensurabiles, praecadatur media c , & fiat, ut a ad b , ita c ad d . Erunt $c d$ media potentia tantum commensurabiles, quae comprehendunt Rationale. Rectangulum sub $a b$ rationale

libus potentia tantum commensurabilibus. Medi-
um est, & illud potens. Media. Sed ut a ad b ,
ita a est c ad d : a & b sunt potentia tantum com-
mensurabiles. Ergo & c , d : & propter c Mediam
etiam d Media. Sunt itaq; inventa c & d me-
die potentia tantum commensurabiles; Que et-
iam Rationale continebunt. Cum enim sit ut a ad
 b , ita c ad d ; etiam permutando est, ut a ad
 c , ita b ad d . Sed ut a ad c , ita c ad b . Ergo
ut c ad b , ita b ad d : ideoq; b media propor-
tionalis inter c & d , poterit rectangulum sub c & d
comprehensum. Sed quadratum ex rationali
est rationale. Ergo & rectangulum sub c & d , ratio-
nale est.

PROPOS. XXIX.

Problema. 5.

Medias de invenire, potentia tan-
tum commensurabiles, quæ Medi-
um contineant.



Sumtis tribus potentia tantum commensura-
bilibus, interq; a , b Media d . & fiat, ut b ad
X 2 c , ita
Lemma 2.
21. X.
13. VI.
12. VI.

2.12. X. c , ita d ad e . Erunt d , e mediae potentiae tantum
 17. VI. commensurabiles continentes Medium. Cum a,
 10. X. rationales potentiae tantum commensurabiles sit
 24. X. ex illis rectangulum d erit medium, & illud po-
 tens d media. Sed, quia, ut b ad c potentia tan-
 tum commensurabilis sit d ad e & etiam potentia tantum
 commensurabiles sunt d & e , & Media d commensurabilis est media. Sic itaque d , e mediae potentiae
 tantum commensurabiles, sunt inventae; quae etiam
 continebunt Medium. Quia enim est, ut b ad c ,
 ita d ad e ; & permutando, ut b ad d , ita c ad e
 16. VI. erit. Ut autem b ad d , ita a ad a ; erit ergo d ad a ut
 c ad e . Itaque rectangulum sub d , e , aequale est ei,
 quod sub a , c . Hoc autem sub rationalibus potentia
 solum commensurabilibus & Irrationale est, & Me-
 dium. Ergo & rectangulum sub d , e .

Scholium, 1.

Duos numeros planos similes invenire.

A, 6. c , 12.

B, 4. D, 8.

E, 24. F, 96.

Assumptis quatuor quibuscumque numeris proportion-
 alibus, ut a ad c , ita b ad d , ex a in b , ut & ex c in
 d facti numeri e & f sunt similes plani, quia con-
 stant lateribus proportionalibus, ut patet ex con-
 structione.

LEM.

LIBER X.
 LEMMA I.

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A.....E.....D.....B

C.....

Inveniantur per Scholion pracedens duopla-
 ne similes ab & c , ambo pares vel impares. Cumq;
 sublato pari à pari vel impari ab impare semper
 remaneat par, ex a b sublato d b ipsi c equali re-
 liquus a d par erit. Quo diviso bisariam in c ,
 dico factum ex a b in b d , (qui quidem β quadra-
 tus est) cum quadrato ex c d compositum, facere
 quadratum. Quia enim numerus a d bisariam se-
 ctus est in e , ipsiq; additis d b , γ erit qui sit ex
 ab in b d quadratus, una cum quadrato d c , e .
 qualis numero quadrato ex e b .

Corollarium.

Quando a b & c sunt plani similes,
 quadrati ex e b & e d se excedunt qua-
 drato ex a b in b d . Cum autem a b
 & c non sunt similes, sed tamen vel
 pares simul, quadrati e b & e d non ex-
 cedunt se quadrato: Si enim exces-
 sus hic ex a b , d a factus esset quadra-
 tus.

2. IX. tus, essent ab & c plani similes, contra hypoth.

Scholium, 2.

Huic facile inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alij duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A . . H . . I . E . F . G . . D B

C

Sint plani similes ab & c , eademq; adhibita constructione ut in lemmate præcedere, asseratur ex d e unitas ef . Erit quadratus ex df minor quadrato ex de propter inequalitatem laterũ. Duo quadratos ex ab in d b, & ex df in se cõpositos nõ efficere quadratum. Si enim quadratus esset, esset quadrato b f vel major vel æqualis vel minor.

Primo

Primo. Si esset major, latus ipsum esset majus latere $b e$, essetque ipsi $b e$ vel aequale vel majus, (quod minus esse nequit, cum inter $b f$ & $b e$ unitate tantum differentes non cadat medius) Si aequale, ita, ut quadrato ex $b e$ aequalis sit quadratus, compositus ex quadrato, factus ex $a b$ in $b d$ & ex quadrato $d f$, cum eidem quadrato ex $b e$ ex precedente Lemma aequalis sit numerus factus ex $a b$ in $b d$ & ex $d e$ in se, erant, factus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$, & ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$ aequales. Ablatoque communi, qui ex $a b$ in $b d$ fit, erunt quadrati $d e$, & $d f$ aequales, ipsaque latera $d e$, totam & $d f$ pars aequalia. Latus itaque quadrati ex quadratis compositi, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $f e$ in se fit, nequit esse aequale numero $b e$. Neque eodem est majus. Si tamen esset, ut aequale $b i$. Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex $b e$ minore latere, etiam compositus ex quadratis, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $d f$ in se fit, major quadrato ex $b e$, cui per Lemma precedentis aequalis est numerus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$. Itaque, ablato communi ex $a b$ in $b d$ & $d e$ reliquus quadratus ex $d f$ aequalis reliquo quadrato ex $d e$ major, latusque $d f$ latere $d e$ majus, pars toto. Compositi ergo ex quadratis $a b$ in $b d$ & ex $d f$ in se quadrati latus majus esse nequit latere $b e$: adeoque, ut ostensum, nec aequale, nec minus. Ideoque quadratus ille compositus non est major quadrato ex $b e$.

7.VII.

6.II.

8.VII.

Deinde ponatur quadratus ex a b in b d & d in se, equalis quadrato ex b f , & a h sit duplus unitatis e f . Quoniam totus a d totius e d est duplus (quia a d in e est bisariam sectus) & ablatum a h ablato unitatis e f ; erit & reliquum h d , reliqui f d duplus & h d in f bisariam sectus. Factus itaq; ex h b in b d , una cum quadrato ex d f , equalis erit quadrato ex b f . Sed eidem equalis ponitur factus ex a b in b d & quadrato ex d f . Itaq; ablato communi quadrato ex d f , relinquuntur ex a b , in b d & ex h b in b d aequales. Atq; sic ab & hb eundem bd multiplicantes, producentes numeros aequales, & erunt ipsi quoq; aequales, pars toti. Non ergo factus ex a b in b d cum quadrato ex d f quadrato ex b f equalis est.

Deniq; ponatur quadratus ex a b in b d cum quadrato d f minor quadrato b f ; unde & latere b f minus erit, ut b g ; sumaturq; ipsius e g duplus a i . Quoniam ergo totus a d totius e d duplus est, & ablatum a i ablati e g ; erit & reliquum i d reliqui g d duplus; & i d in g divisus bisariam. Numerus ergo ex i b in b d cum quadrato ex d g equalis quadrato ex b g . Sed eidem quadrato ex b g equalis ponitur ex a b in b d cum quadrato ex d f . Ablatis igitur quadratis d g , d f quorum d g minor est; remanebit ex i b in b d major eo qui ex a b in b d pars toto. Non est ergo ex a b in b d cum quadrato ex d f minor quadrato ex b f . Sicut neq; major, neq; equalis ostens-

ostensus est. Non itaq³ est quadratus ex $a b$ in $b d$ eum quadrato ex $d f$. Quod erat propositum.

Scholium. 3.

Hinc inventu faciles sunt duo numeri, ut compositus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim est compositus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam sunt minimi non quadrati, in quas quadratus aliquis dividitur.

PROPOS. XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales $a b$, $a f$ potentia tantum commensurabiles, ita ut major $a b$, quam minor $a f$, plus possit quadrato rectæ lineæ $b f$ longitudine sibi commensurabilis.



Assumta recta Rationali $a b$, et

$a f$ duob. numeris totis $c d$, $c e$ quorū

excessus $d e$ non sit quadratus, & si

at, ut $c d$ ad $d e$, ita quadratum

rectæ $a b$ ad quadratum $a f$ quæ se-

X 5

micirculo

a 2. Scholii
propos.
preced.
& per lem.
ma 6. X.

micreulo super $a b$ apsetur & $f b$ connectatur.

31. III. Cum ergo f in semicirculo & sit rectus, equale est quadratum $a b$ quadratis $a f$, $f b$ & $a b$ quam $a f$ plus potest quadrato $f b$. Cumq; quadratum ex $a b$ sit ad quadratum $a f$, ut $c d$ ad $d e$,

6. def. Derunt illa quadrata inter se commensurabilia, adeoq; erit aequè quadratum $a f$ Rationale, & ipsa $a f$ Rationalis; atq; quadratum $a b$ super Rationali $a b$ descriptum Rationale est. Rationales ergo sunt $a b$, $a f$ & potentia tantum commensurabiles. Longitudine enim commensurabiles esse,

9. X. nequeunt erunt, & cum non habeant rationem quam numerus quadratus ad numerum quadratum quia $d e$ non est quadratus.

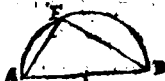
24. IIX. Iam verò quoniam est ut $c d$ ad $d e$, ita quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $a f$, erit convertendo, ut numerus quadratus $c d$ ad numerum quadratum $d e$, sic quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $a f$. Sunt ergo $f b$, $a b$ longitudine incommensurabiles.

PROPOS: XXXI.

Problema 7.

Invenire duas $a b$, $a f$ Rationales potentia tantum commensurabiles, ita, ut major $a b$ quam minor $a f$ plus possit Quadrato rectæ lineæ $f b$ sibi Longitudine incommensurabilis.

Assum.



CI44. E 16. D C. 166. D.

C, ... E - . . . D.

Assumta Rationali ab , a inveniatur dua a per Lem-
 quadrati numeri ce , ed , quarum summa cd ma 2.29. X.
 non sit numerus quadratus: vel quadratus cd in
 duobus ce , ed non quadratos dividatur; β habe- 24. IIX.
 bit cd ad neutrum ce , vel ed proportionē nu-
 merum quadratorum, β sitq, ut cd ad de β Lemma
 sit quadratum ab ad aliud, ut af ; & applica- 6. X.
 ta a f ad semicirculum super ab descriptum, con-
 nectantur fb iam poterit ab plus quam af qua-
 drato recta fb , d eruntq, ab , af Rationales d 30. X.
 potentia tantum commensurabiles. Sed cum
 convertenda sit, ut prius, quadratum ab ad qua-
 dratum fb , ut cd ad ce : ed autem ad c non
 sit ut quadratus ad quadratum. Non itaq, ab
 ad af habet rationem numeri quadrati ad nu-
 merum quadratum, & sunt Longitudine in- 9. X.
 commensurabiles. Inventae ergo sunt duae rectae
 ab , af potentia solum commensurabiles, ut ab
 maior plus possit quam minor af quadrato recta
 fb sibi longitudine incommensurabilis.

L E M M A.

Si sint duae rectae lineae inaequa-
 les, erit ut maior ad minorem;
 ita

ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.

Demonstratio eadem est cum Lemmatis 3. in propos. 19. demonstratione.

PROPOS: XXXII.

Problema 8.

Invenire duas Medias c , d potentia tantum commensurabiles, quae rationale contineant; ita, ut major c , plus possit quam minor d , quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

so. X.



Inveniantur duae Rationales a , b potentia tantum commensurabiles, ut a major plus possit quam minor b , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, inter quas sit media proportionalis c ; fiatque, ut a ad b , ita c ad d . Quoniam ergo a , b Rationales potentia tantum sunt commensurabiles, erit sub ipsis rectangulum irrationale, & c recta illud potens Media. Et quia est c ad d , ut a ad b , quae potentia tantum sunt commensurabiles, etiam c & d potentia tantum commensurabiles, & erunt; & Media c commensurabilis d. Media.

p 11. X.

710. X.

d 24. X.

Com,

Comprehendens haec due Medias c, d potentia tantum commensurabiles Rationales quod ex 28. lib. 10. patet. Quia enim est ut a ad b , ita c ad d : Sed a quam b , plus potest quadrato rectae longitudine, ex const. sibi commensurabilis; & poterit c plus quam d quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Patet ergo propositum. Si autem a, b , rationales se excederent quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, eodem numero ostenderetur c, d medias potentia tantum commensurabiles continere Rationale, ut major c plus possit quam d , quadrato lineae sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint tres lineae rectae $a b, b c, c d$, erit ut prima $a b$ ad tertiam $c d$ ita rectangulum $a e$ sub prima $a b$ & secunda $b c$ contentum ad id $c f$, quod sub secunda $b c$ & tertia $c d$ continetur.



Describatur ex $b c$, quadratum $c e$ compleaturque rectangulum $a f$. Erit $a e, a d$ ut $a b$ ad $c d$.

PROPOSITIO XXXIII.

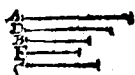
Problema 9.

Invenire duas Medias de potentia solum

solum commensurabiles, quæ Mediū contineant, ita ut major d plus possit quàm minor, e, quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.

30. X.

per Lem.
ma. 2. 21. X.



Inventis duabus a, c, assumatur b a utriq; longitudine incommensurabilis ut habeantur tres Rationales a b c potentia tantam commensurabiles; ita ut a plus possit quàm c quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sumaturq; d media proportionalis inter a & b;

13. VI.

12. VI.

per Lem.
ma 31. X.

17. VI.

16. VI.

3. Lem.
19. X.

10. X.

22. X.

24. X.

ut tres Rationales a b c potentia tantam commensurabiles; ita ut a plus possit quàm c quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sumaturq; d media proportionalis inter a & b; d & sit d ad b, ut c ad e. Quia ergo est, ut a ad c, ita rectangulum sub a b, ad rectangul. sub b c. Sed rectangulo sub a b, & æquale est quadratum ex d, & rectangulo sub b c, rectangulum sub d e. Ergo ut a ad c, ita quadratum ex d, ad rectangulum sub d e; Sed ut quadratum d, ad rectangulum d e, ita recta d ad rectam e. Est ergo d ad e, ut a ad c: quæ cum potentia tantum sint commensurabiles; Ergo & d e. Et quia d potest spacium, sub Rationalibus a b potentia solum commensurabilibus, irrationalis est & Media & erit etiam ipsi commensurabilis E Media. Sunt ergo d, e duæ Media potentia solum commensurabiles, Cum verò ostenderimus rectangulo sub b c Medio æquale esse rectangulo sub d e,

De, & ori hoc quoq, medium. Deniq, cum ostensum sit esse d ad e , ut a ad c ; Sed a plus posse quam c , quadrato recte sibi longitudine commensurabilis; similiter pl⁹ etiā poterit d quam e . Quod erat faciendum.

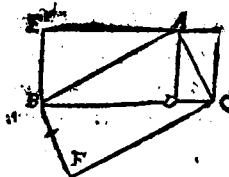
Quod si Rationalem a & b c assumptam potentia commensurabilium a plus posset quam c , quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur, d , e , duas medias inventas potentia solum commensurabiles, continere medium, ut major d plus possit quam minor e , quadrato recte linea sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA. I.

Sit unum rectangulum abc , angulum habens bac rectum, à quo perpendicularis ad esto demissa. Dico, rectangulum sub cb , bd æquale esse quadrato ab ; & contentum sub bc , cd æquale quadrato ac , & contentum sub bd , dc , æquale quadrato ad : contentum deniq, sub bc , ad æquale contento sub ab , ac .

Quia

28. VI.
 17. VI.
 16. VI.
 41. I.



Quia enim ab est inter
 bc & bd , media pro-
 portionalis; rectangulus
 ex bc & bd æqualis
 est quadrato ab . Et
 deq, modo rectangulus ex

bc, cd , & ex bd, dc æqualia sunt quadrato ca
 & da . Deniq, quia triangula abc , abd sunt
 similia, erit, ut bc ad a , ita ab ad a , quare
 rectangulum ex bc, ad æquale est rectangulo sub
 ab, ac ; vel ejusdem trianguli abc dupla re-
 ctangula cc, cb sunt æqualia.

LEMMA 2.

Si recta linea ab secetur in duas
 partes inæquales ac, cb ; erit, ut ma-
 jor pars ac ad minorem cb , ita re-
 ctangulum af , sub tota ab & majore
 parte, ad rectangulum cd sub tota ab
 & minore parte cd contentum.

21. VI.

Super ab describatur quadratũ, & ex c eriga-
 tur perpendicularis. Quoniam a est, ut ac ad cb ,
 ita af ad cd , patet propo-
 situm.



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ li-
 neæ inæquales ab ,
 bc minor autem bc se-
 cetur

cetur in d bifariam; erit rectangulū
 $a c$ sub ipsis contentum duplū rectan-
 guli $a d$, quod sub maiori linea $a b$ &
 dimidia parte $b d$, minoris $b c$ con-
 tinetur.

Completo $a c$ rectangulo, & ducta parallela $a i$. VI.
 per d ipsa b , a patet propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema. 10.

Invenire duas rectas lineas $a b$,
 $g b$, potentia incommensurabiles,
 quæ faciant compositum quidem ex
 ipsarum quadratis, Rationale; Re-
 ctangulum verò sub ipsis conten-
 tum, Medium.



a Inveniantur due Ra-
 tionales lineæ $a b$, $c d$,
 minorq; $c d$ secetur bifa-
 riā in e , β fiatq; rectan-
 gulum sub $a f$, $f b$ æquale

a 31. X.
 β Lemma 2
 17. X.

quadrato $c e$. Describatur etiam semicirculus $a g b$
 & ipsi $a b$ perpendicularis $f g$ agatur, cōnectanturq;
 $a g$, $g b$. Quia ergò $a b$ plus potest quàm $c d$ qua-
 drato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, ap-
 plicatumq; est ad $a b$ rectangulum $a f b$, æquale

T

quarta

19. X. quarta parti quadrati cd , deficiens figura quadrati
 Lemma 2. ai verit a f ipsi fb longitudine incommensurabilis.
 33. X. Sed ut a f ad fb , ita rectangulum baf ad abf re-
 Lemma 1. ctang. Que duo rectangula equalia sunt quadrati
 33. X. ag , gb , quia g in semicirculo est rectus. Erit igitur,
 § 31. XI. ut a f ad fb , ita quadratum ag , ad quadratum gb . Sed a f , fb sunt longitudine incommensurabiles. Ergo & quadrata ag , gb , ipsaeque rectae ag , gb potentia incommensurabiles. Et quia quadratum ex a b Rationali Rationale & equale est quadratis ag , gb , etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia a f b rectangulum, equale quadrato cc & equale est quadrato fg , erant quadrata fg , cc , equalia, & ipsae rectae fg , cc aequales; eritque cd dupla ipsius cc , etiam dupla ipsius fg . Quare rectangulum sub a b , cd , duplum erit rectanguli sub a b , fg . Sed sub a b , cd Rationalibus conceptum est Medium: Ergo & sub a b , fg ipsi incommensurable, utpote duplum, est & Medium. Sed sub a b , fg rectangulo: equale est rectangulum sub ag , gb : Ergo sub ag , gb est medium. Sed ex duorum quadratis compositum erat Rationale. Ergo inventae sunt duae ag , gb potentia incommensurabiles, quae faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXV.

Problema 11.

Invenire duas rectas lineas ag , gb , potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum Quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.



Inveniantur duo Media ab, cd ad mentem paræ
is posterioris prop. 32. fiantq; reliqua, ut in præce-
ptis; erunt ag, gb potentia incommensurabi-
les. Quia enim Media ab quadratum æquale ære-
tarum ag, gb quadratis est Medium, etiam
compositum ex ag, gb quadratis est Medium,
ut supra, ut in antecedenti propositione ostenditur
rectangulum sub $a b, c d$, duplum esse rectangu-
li sub $a b, f g$; Eo verò existente Rationali, erit &
hoc ipsi commensurabile; & huic æquale ex ag , p Lemma,
est b Rationale. Cum ergò sub ag, gb etiam sit
Medium, patet propositum.

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas,
ag, gb potentia incommensurabiles,
quæ faciant & compositum ex ipsa-
rum Quadratis Medium, & Rectan-
gulum sub ipsis contentum Medium
incommensurabileq; composito ex
ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. parti
propof. 33. due Medie a b, c d, & reliqua sicut
ut in 34. huius. Ostenditur similiter a g, gb
rectas incommensurabiles esse potentia; compo-
situmq; ex ipsarum quadratis esse Medium, ipsum
rectangulum sub a b, gb esse Medium. Sed quia
ab ipsi c d est incommensurabilis longitudo, c:
verò ipsi c b, ut dupla commensurabilis longi-
tudo, etiam a b ipsi c e longitudo incommensur-
abilis perit. Sed ut a b ad c e; ita quadratum
a b, ad rectangulum sub a b, c e, id est, ad b
f g, vel a g, gb. Ergo quadratum a b est. in-
mensurabile rectangulo a g, gb. Quosine autem
et inveniendæ.

ex hypo.

813. X.

73. Lemma

29. X.

81. Lemma

33. X.

819. X.

Præ-

*Principium Senariorum per
Compositionem.*

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Siduz Rationales a, b, c poten-
tia tantum commensurabiles com-
ponantur; tota a, c Irrationalis erit.
Vocetur autem ex Binis nominibus,



a Invenia dua a, b, c componantur. Fiet tota
 a, c Irrationalis. Quia enim a, b ipsi b, c est longi-
tudine incommensurabilis, estq; ut a, b ad b, c , ita
 a, b c rectangulum ad b, c quadratum, et erit re-
ctang. a, b, c quadrato b, c incommensurable: Sed
rectangulo a, b, c ipsius duplum est commensurabi-
le; & quadrato b, c quadratum a, b est commen-
surabile (quia sunt Rationalia) adeoque ex quad-
ratis a, b, b, c compositum eidem b, c quadrato com-
mensurable est. Itaque quod bis sub a, b, b, c con-
tinetur, composito ex quadratis rectarum a, b, b, c
incommensurable erit. Quare & compositum
ex eo, quod bis sub a, b, b, c & ex composito qua-
dratorum a, b, b, c , id est, ex tota a, c quadra-
tum, composito ex quadratis rectarum a, b, b, c
incommensurable erit. Sed quod ex quadratis re-

Et arum a b, b c, est Rationale; quia commensurabile est quadrato rationalis b c. Igitur ex a c quadratum, Rationali ex b c quadrato incommensurabile, irrationalis est ipsa q, recta a c Irrationalis. Vocetur autem ex binis nominibus vel Binomium, quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia, solum commensurabilibus componitur.

A. 10. def. X.

Scholium.

Ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas, est Irrationalis, & itemq; ex ipsis composita seu Binomium.

A. 22. X.

P. 37. X.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 26.

Si duæ Medix *ab, bc* potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota *ac* Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

A. 28. X.

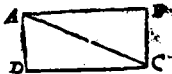


Quia enim a b ad b c est, ut a b c rectangulum

ad quadratum bc : Sed ab, bc sunt longitudines
incommensurabiles. β Sunt ergo abc rectangu- $\beta 10. X.$
lum & quadratum bc incommensurabilia. Est au-
tem rectangulo abc bis sub ab, bc commensu-
rabile; & γ quadrato bc compositum ex quadratis $\gamma 16. X.$
 ab, bc . Igitur rectangulum sub ab, bc bis,
& compositum ex quadratis rectarum ab, bc ,
sunt δ incommensurabilia inter se. Ergo compo- $\delta 14. X.$
situm ex quadratis ab, bc una cum rectangulo
 abc bis, id est, quadratum ac ϵ incommensura- $\epsilon 4. II.$
bile est rectangulo abc bis sumto. Sed eidem $\epsilon 17. X.$
 abc rectangulo bis, est commensurabile ipsum
semel. α Igitur quadratum ex ac est incommensu- $\alpha 13. X.$
rabile rectangulo abc . Sed abc rectangulum $\alpha 10. def. X.$
ponitur Rationale. Ergo quadratum ac est θ Ir-
rationalis, ipsa ac θ Irrationalis. Vocetur autem $\theta 12. def.$
ex Binis Mediis prima vel Bimediale prius.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali ab &
Irrationali bc continetur rectangu-
lum, Irrationale est.

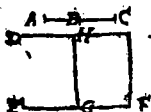


Sin minus, ipsum Rationale ad Rationalem ab
applicatum, α faciet latitudinem bc Rationalem $\alpha 21. X.$
contra hypothesis.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ a, b, b c potentia tantum commensurabiles & componantur quæ Medium contineant; tota a, c Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.



Expositæ Rationali d, e , applicetur rectangulum d, f æquale quadrato, a, c ; & composita quadratis a, b, b, c æquale sit

d, g . Erit itaq; h, f æquales bis sumto rectangulo a, b, c . Quodcum sit d Medium; erit & h, f ipsius duplum medium. Et quia quadrata mediarum a, b, b, c commensurabilia sunt potentia, etiam ex ipsis compositum rectangulum d, g utrivis ipsorum & commensurabile erit. Sed utrumq; quadratum ex Medijs est Medium Ergo & d, g erit Medium: Quoniam ergo d, g, h, f Media ad d, e Rationalē applicatur, erunt latitudines eorum e, g, g, f Rationales ipsi d, e longitudine incommensurabiles. Rursus quia longitudine incommensurabiles sunt a, b, b, c , & est, ut a, b ad b, c , ita quadratum a, b ad rectangulum a, b, c ; erunt, quadratum a, b & rectang. a, b, c longitudine incommensurabilia.

Sed.

Sed quadrato ab compositum ex ab , bc quadrato, & rectangulo abc solum duplū ostensum est commensurabile. $\wedge$ Ergo compositum ex quadrato ab , bc id est db incommensurabile est $\lambda 14. X.$
 his sumto rectangulo abc id est hf , μ Est vero $\mu 1. VI.$
 ut dga ad hf , ita eg ad gf . μ Sunt itaq; eg , gf longitudine incommensurabiles. Quae cum sint offensa Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, & composita ef , irrationalis. $\nu 37. X.$
 Est itaq; rectangulum cdf sub Rationali de id est ef irrationali, irrationale & ξ Lemma
 ipsi aequale quadratum ac irrationale, ipsaq; $38. X.$
 ac irrationalis. Hac vocetur ex Binis mediis, vel Bimediale posterius.

LEMMA

Si Recta linea ad non secetur bifariam in b , erit compositum ex quadratis partium ab , bd majus, quam Rectangulum sub partibus ab , bd bis comprehensum, quadrato ejus lineae ac qua major pars a b minorem b d superat.



Quoniam quadrata ab , bc aequalia $\alpha 7. II.$
 sunt rectangulo abc bis sumto, cum quadrato α
 & ac ; estq; bc ipsi bd aequalis, erunt quoque
 quadrata ab , bd aequalia rectangulo abd bis

$\wedge$ sumto

sumto una cum quadrato $a c$: Quare ex $a b$, $b d$ quadrata maiora sunt rectangulo $a b c$ bis sumto quadrato $a c$. Quod erat propositum.

Corollarium.

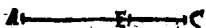
Quadrata partium inequalium simul maiora sunt rectangulo bis sub partibus inequalibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

• 34. X.

Si duæ rectæ $a b$, $b c$ potentia incommensurabiles componantur; quas faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota $a c$ recta linea irrationalis erit. Vocetur autem Major.



Quia $a b c$ rectangulum ponitur Medium,

¶ Cor.
24. X.

ergo etiam duplum b erit Medium & Irrationale. Sed compositum ex quadratis $a b$, $b c$ ponitur Rationale: Bis ergo sumtum $a b c$ rectangulum

ibi

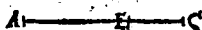
est est, incommensurable. Quare & rectan-
 gulum ab cum quadratis ab , bc , id est
 quadratum ac incommensurable est compo-
 situm ex quadratis ab , bc . Cum autem compo-
 situm ex quadratis, ponatur rationale erit ac
 quadratum irrationale, ipsa ac recta irratio-
 nalis, que vocetur Major: Quia cum possit duo
 quadrata ex ab , bc & rectangulum ab bc bis,
 compositum ex quadratis ab , bc majus est re-
 ctangulo ab bc bis. Quare cum compositum ex
 quadratis sit Rationale, & ab bc rectangulum
 Medium, recte dicitur ac Major, siquidem a Ra-
 tionali, quod majus est, convenit imponere
 nomen.

PROPOS: XLI.

Theorema 29.

Si a duæ rectæ lineæ ab , bc po-
 tentia incommensurabiles compo-
 nantur, quæ faciant compositum
 quidē ex ipsarum quadratis Medium;
 quod autem sub ipsis continetur, Ra-
 tionale: tota recta linea ac irratio-
 nalis erit. Vocetur autem Rationa-
 le ac Medium potens.

Que



Quoniam compo-
situm ex quadratis $a b$,

¶ 10. X.

$b c$ est Medium, rectangulum verò $a b c$ bis sum-
tum Rationale, & erit compositum ex quadratis
incommensurable rectangulo bis sum:o. Igitur

¶ 4. II.

¶ 17. X.

¶ 10. def.

¶ 11. def.

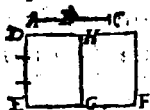
& compositum ex quadratis cum bis sumto re-
ctangulo vid est, quadratum $a c$ erit duplo re-
ctangulo $a b c$ incommensurable. Cum autem
duplum rectanguli $a b c$ sit Rationale, & erit $a c$
quadratum irrationale, ipsaq; $a c$ & irrationalis.
Qua vocetur, Rationale ac Medium potens,
quia potest Medium ex quadratis $a b$, $b c$ com-
positum, & Rationale scilicet bis sumtum rectan-
gulum $a b c$. Verum Rationale anteponitur ir-
rationali quod natura sit prius, ut ut ordine bis
sit posterius.

PROPOSITIO XLII.

Theorema, 30.

¶ 36. X.

Si & duæ lineæ rectæ $a b$, $b c$ po-
tentia incommensurabiles compo-
nantur, quæ faciant & compositum ex
ipsarum quadratis Medium, & quod
ubi ipsis continetur, Medium, incom-
mensurableq; composito ex quadra-
tis ipsarum: tota recta lineæ $a c$ irratio-
nalis erit. Vocetur autem binæ Medis
potens.



Iterum exponatur Ra-
tionalis de , ad quam p appli- p. 45. L
catum sit rectangulum df e-
quale quadrato ac ; & dg e-

quale composito ex quadratis ab , bc , & eritq; 7 4. II.
 hf equale bis sumto rectangulo abc . Quoniam
igitur tum compositum ex quadratis ab , bc id
est dg , quam rectangulum abc bis sumtum
id est hf sunt Media, & facient dg , hf applica- d 23. X.
ta ad rationalem de latitudines eg , gf Ratio-
nales longitudine incommensurabiles. Et quia
compositum ex quadratis ab , bc id est dg in-
commensurabile ponitur rectangulo abc , cuius
duplum est hf , erunt dg , hf incommensura- 13. X.
biles. Sed ut dg ad hf , ita eg ad gf , & erunt § 1. VI.
itaq; eg , gf rationales longitudine incommen- 10. X.
surabiles vel potentia commensurabiles, adeoq;
rationalis, & irrationalis. Est ergo df subratio 37. X.
nali de & irrationali ef contentum irrationalis 38. X.
le, & quadratum ex ac illi equale irrationale,
ipsaq; ac irrationalis, qua vocetur Bina Media
potens, quia & compositum ex quadratis ab , bc
& rectangulum abc erant Media.

LEMMA I.

Si recta linea ab in partes in-
quales in c & d secetur, & rursus in a-
lias partes in quales i erunt quadrata
par-

partium ac , cb magis inæqualiſſi ſimul
 majora quadratis partium $a d$, db mi-
 nus inæqualium ſimul.

 Biſecta ab in e , cadit d
 punctum vel inter ec , vel in-
 ter ea . Primo cadat inter ec . « Quoniam $ac b$

rectangulum cum quadrato ec æquale eſt qua-
 drato eb , ut & $a d b$ rectangulum cum ed qua-
 drato eidem eb quadrato æquale, erunt, rectan-
 gulum $ac b$ cum quadrato ec , & rectangulum
 $a d b$ cum quadrato $d e$ equalia. Ablatis autem
 inæqualium rectarum ec , ed quadratic, cum
 quadratū ec fit majus quadrato ed , reliquum
 rectangulum $ac b$ minus erit reliquo $a d b$, &
 propterea biſ ſumtum $ac b$ rectangulum, biſ
 ſumto $a d b$ erit minus. Sed quadratum ab eam
 rectangulo $ac b$ biſ cum quadratic ac , cb , quàm
 rectangulo $a d b$ biſ cum quadratic ad , db eſt
 æquale: Sunt ergo equalia rectangulum $ac b$
 cum quadratic ac , cb & rectangulum $a d b$
 cum quadratic ad , db : & cum $ac b$ fit minus
 quàm $a d b$, erunt reſidua quadrata ac , cb , ma-
 jora quadratic ad , db Quod erat propoſitum.

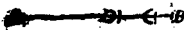
Deinde cadat d intra ae . Quoniam ac , cb par-
 tes magis ſunt inæquales quàm ad , db , erit ad
 major quàm cb , ac proinde cum ae , $e b$ ſunt æ-
 quales, erit ec reliqua major reliqua ed . Itaq;
 quia rectangulum $ac b$ cum quadrato ec qua-
 drato

quadrato ex $c b$ aequale est, itemq; $a d b$ rectan-
gulum cum quadrato $c d$, aequale eidem qua-
drato $c b$ erit $a c b$ rectangulum cum quadrato
ex $c e$ aequale rectangulo $a d b$ cum quadrato
ex d . Ergo ut prius $a c$, $c b$ quadrata, maiora
sunt quadratis $a d, d b$.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema. 31.

Quæ $a b$ ex binis nominibus, ad
unum duntaxat punctum c dividitur
in nomina $a c, c b$.

 Si potest in duas alias Ra-
tionales potentia tantum com-
mensurabiles juxta 37 X dividi, fiat illa divi-
sio in d . Neq; c neq; d dividit lineam $a b$ equa-
liter, quia ita æquales etiam commensurabiles
essent longitudine $a d, d b$ contra hypothefin, sed
partes inæquales $a c, c b$ vel magis vel minus in-
æquales sunt partibus $a d, d b$ atq; ita quadra-
ta $a c, c b$ sunt vel minora vel maiora quadratis $a d, d b$. Quia vero si ab æqualibus demantur in-
æqualia, residuorum excessus est ablatorum excessui
æqualis. ρ Sunt autem ex $a c, c b$ quadrata cum ρ 4. II.
rectangulo $a c b$ bis sumta; æqualia quadratis a
 $d, d b$, cum $a d b$ rectangulo bis sumto, sit ut
qui fuerit excessus compositorum ex quadratis,
idem

7 8. 9. Def.
8 34. X.

17. X.
Schol.

22. X.

27. X.

idem sit binorum sumtorum rectangulorum: Sed excessus compositorum ex quadratis est spatium Rationale (et Rationalium enim ac , cb quadrata et ipsi d compositum sunt Rationalia; itemque, ex ad , db quadrata una cum suo composito sunt rationalia. Cum ergo Rationale superet Rationale rationali, manifestum est rationalem esse excessum compositorum ex quadratis) Igitur et excessus rectanguli acb et adb quolibet binorum sumto, est spatium Rationale. Sed acb rectangulum est et Medium. Ergo et duplum, scilicet adb rectangulum. Cum vero Medium non superet medium Rationali; non potest excessus rectangulorum esse Rationale, quod tamen in precedentibus concludebatur. In alio itaque pacto quam c secari ab in sua nomina impossibile est.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima ab , ad unum duntaxat punctum d dividitur in nomina ad , db .

Dividatur, si potest, in

II + ad et db in nomina vel duas Medias potentia commensurabiles, quæ comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Pari hęc ratione, ut in precedenti propositione erit idem

excessus

excessus reſtangularum abc & adb bis, qui com-
 poſitorū ex quadratis ac , cb & ad , db . Sed Ratio-
 nalium reſtangularum bis excessus a eſt Rationa-
 le ſpaciū. Ergo & excessus compoſitorum ex qua-
 dratis & ſpaciū Rationale. Cum verò a , d , b
 ſint Media, & potentia commenſurabiles, erunt
 & eorum quadrata Media & cōmmenſurabilia,
 atq; ita ex ipsis compoſitū utrumq; erit & com-
 menſurabile & γ Medium. Cum verò medium
 d non ſuperet Mediū rationali. itaq; excessus com-
 poſitorū ex quadratis non erit Rationale ſpaciū,
 quod tamen modo concludebatur. In alio itaq;
 puncto quam c ſecari ab in ſua nomina eſt im-
 poſſibile.

2. Scholii

27. X.

16. X.

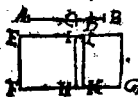
24. X.

27. X.

PROPOS. XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secunda ab ,
 ad unum duntaxat punctum c divi-
 ditur in nomina ac , bc .



Dividatur, ſi poteſt in alia ad
 d ut reſpondeant ſenſui 32. hu-
 jus. Vbiunq; ergo ſit d , ut in
 43. oſtenditur, quadrata ex ac ,
 cb vel majora vel minora ſunt
 quadratis ad , db . Exponatur autem Ra-
 tionalis ef , ad quam applicetur eg reſtang.
 Z a 43. l.
equale

p 4. II.

y Lemma

39. X.

p 1. VI.

p 16. X.

p cor. 2 4. X

p 23. X.

p 3. Lem.

19. X.

p 10. X.

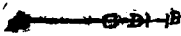
aequale quadrato ab , & eh aequale quadrato cb , & ek quadratis ex ad , db . β Erit ergo ig aequale duplo rectanguli ac & lg aequale duplo rectanguli ac & lg aequale duplo rectanguli ad . Et quia quadrata ex ac , cb quadrata ad , db , sunt inequalia, etiam rectangula eh , ek erunt inequalia: quare & recte fh , fk sunt inequales. Rursus, quia quadrata ex ac , cb sunt maiora rectang. ac bis, erit eh maius ipso ig , atq; ita fh maior dimidio ipsius fg , quod de fk ostendetur. Quare bg , fh , hg sunt partibus fk , kg inaequales singulis singula. Quia vero ac , cb sunt Mediae potentia commensurabiles, erunt etiam ipsarum quadrata media & commensurabilia, adeoque compositum ex ipsis utriusque ipsorum commensurabile; idcirco, & eh , & ek sunt media. Cumq; ita ef sit Rationalis, erunt fh , fk Rationales longitudine ipsi incommensurabiles. Sic etiam rectanguli ac b Medij duplum ig erit medium & hg Rationalis longitudine incommensurabilis; perinde ut & lg Medij, kg Rationalis longitudine incommensurabilis ipsi ef ostendetur. Rursus quia ac , cb longitudine sunt incommensurabiles, & est, ut ac ad cb , sic quadratum ac ad rectangulum ac b , erunt haec etiam incommensurabilia. Sed quadrato ac compositum ex quadratis ac , cb est commensurabile, ut antea constat; & rectangulo ac b suum duplum est commensu-

inmensurabile. Itaq, compositum ex quadratis $a c$, $c b$, id est, $e h$ est incommensurabile duplo rectanguli $a c b$, id est, $i g$. Sed ut $e h$ ad $i g$, ita $f h$ ad $h g$. Sunt ergo $f h$, $h g$ longitudine incommensurabiles. Cum vero etiam sint Rationales, erunt Rationales potentia solum commensurabiles. Tota ergo $f g$ est Irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur, divisæq, in nomina ad punctum; nec potest $f g$ in alio puncto ut k dividi in alia nomina. Itaq, nec $a b$ bimediale posterius in alio puncto quam c dividi potest in nomina.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

Major $a b$ ad unum duntaxat punctum c dividitur in nomina $a c$, $c b$.

 Si potest, dividatur in d in nomina, qualia $a o$. propo. requirit. Erit excessus quadratorum $a c$, $c b$ & $a d$, $d b$ idem cum excessu rectangulorum $a c b$ dupli & $a d b$ dupli. Sed excessus duorum compositorum ex quadratis binis est spatium Rationale. Igitur & excessus rectangulorum binorum. Sed rectangulum $a c b$ ponitur Medium; & ideoq, duplum ipsius etiam est Medium; eodemq, modo & $a d b$ Medium erit. Sed Medium non superat Medium Rationale. Itaq, excessus binorum rectangulorum non erit spatium Rationale, quod tamen assignabatur. Non ergo in alio quam c puncto secabitur Major.

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: XLVII

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens ab
ad unum duntaxat c punctum divi-
ditur in nomina ac, cb .



43. X.

27. X.

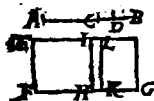
Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. pro-
pos. requirit. Et it excessus quadratorum ac ,
 cb & ad, db idem cum excessu rectangulorum
 acb , & adb duplorum. Qui excessus in rectan-
gulis est spacium Rationale. Ergo & in compo-
sitis quadratorum. Quae composita ex quadratis;
 ac, cb , & ad, db cum ponantur Media. Et itaq;
excessus non potest esse spacium Rationale, ut jam
sequebatur. Non ergo in alio quam c puncto seca-
bitur Rationale & Medium potens.

PROPOS: XLIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens ab , ad unum
duntaxat punctum c dividitur in Me-
dia nomina. ac, cb .

Si potest, dividatur in d in nomina, qualis re-
quirit 42. hujus. Cōstructione adhibita eadem, quae



in 45. patet, partibus fh , hg ,
partes fk , kg singulis singulas
esse inaequales. Cum ergo com-
positum ex quadratis ac , cb ponat-

ur Medium, erit ce Medium, cumq; rectan-
guli ac b duplum sit Medium, erit ci Medium:

Erantq; fh , hg Rationales longitudine incom-

mensurabiles ipsi e f ut ci k kg . Cum vero
compositum ex quadratis ac , cb id est, ch sit in-

commensurabile rectanguli ac b duplo, id est,

ig , sitq; ut ch ad ig ita fh ad hg , erunt ce ba

longitudine incommensurabiles. Cumq; sint o-

stense Rationales, erunt Rationales potentia tan-

tum commensurabiles, totaq; fg Irrationalis est,

ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina.

Sed eodem modo dividi ea non patitur in puncto

k . Igitur nec ab in alio puncto quam c dividitur

in nomina. Quod erat propositum.

Definitiones secundæ.

Iam investigat auctor omnia binomia,

quorum sex habet idem. Quia enim No-

mina Binomij sunt due Rationales, quæ

nequeant amba esse expositæ Rationali

commensurabiles, nisi ipsa quoq; velint

esse longitudine inter se commensurabi-

les

tes, vel una tantum sive Major sive Minor, vel neutra tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inaequalia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Unde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis una cum dictis tribus generibus tres diversa linea binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum ijs tribus, itidem tres oriuntur.

Exposita ergo Rationali, & quae ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quam minus quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositae Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.
2. Si minus nomen expositae Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus secunda.
3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositae Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si maius nomen plus possit quàm minus quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

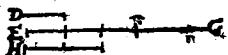
6. Quod si neutrum ipsorum nominum: vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.

A C B



a Inventis duobus numeris a b, c b, quorum a 1. Scholi. excessus a c non sit quadratus, ita ut a b, c b proportionem habeant numeri quadrati ad quadratum a b, a c non. Expenatur autè Rationalis β quæpiam d, cui, ef sumatur longitudine cōmensurabilis, quæ ef ob id quoq, Rationalis erit. Fiat deinde ut a b ad ac ita quadratū ef ad quadratū fg. Erit eg ex binis nominib.

Z 4.

Quanti

7 6. X.

9. X.

37 X.

Lemma
14. X.

Quoniam quadrata ef , fg sunt γ communisurabilia, erunt ipsa recta etiam commensurabiles solum potentia. Sed ef est Rationalis. Ergo & fg . Quia vero ab ad ac non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam quadrata ef , fg non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. δ Sunt ergo ef , fg longitudine incommensurabiles; atque ita Rationales potentia solum commensurabiles; ipsa quoque eg irrationalis, quae ex binis nominibus dicitur. Erit etiam prima. Cum sit ut numerus ab ad ac ita quadratum ef ad quadratum fg , sit etiam ab maior quam ac , etiam quadratum ef erit majus quadrato fg . & quidem quadrato h . Quia ergo est, ut ab ad ac , ita quadratum ef ad quadratum fg ; etiam convertendo erit, ut ab ad cb , nempe ad excessum, quae antecedens ab superat consequentem ac , ita quadratum ef ad quadratum h . Habet autem ab ad cb rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata ef & h ; erunt quoque commensurabiles longitudine ef , & h . Quoniam majus nomen ef exposita Rationali δ est longitudine commensurabile, ut patet; & potest plus quam minus fg quadrato rectae h sibi longitudine commensurabilis; erit eg per defin. ex binis nominibus prima.

PROPOS: L.

Problema 14.

Inven.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Repertis duobus

A C B

D ———

E ——— F ——— G

H ———

a b, c b quadratis,

sumtaq; d Rationali.

cui longitudine com-

mensurabilis sit f g, quæ ideo est Rationalis,

« Fiat ut a c numerus ad a b, ita quadratum g f

ad quadratum f e: Erit eodem modo ut in pra-

cedenti e g binomialis. Quæ & erit secun-

da. Cum enim sint ut a c, a b, Quadrata recta-

rum g f, f e; etiam sunt convertendo ut a b ad

a c ita quadratum e f ad f g. Sed ab quàm a c est

major, erit ergò quadratum e f majus quadrato

f g, & quidem sit quadrato recta h. Iterum

hic ut in precedenti ostendetur h ipsi e f longitu-

dine commensurabilis esse. Quoniam ergò majus

nomen e f plus potest quàm unius f g exposita Ra-

tionali d longitudine commensurabile, ut patet

ex prioribus, quadrato recta h sibi longitudine

commensurabilis: Erit e g ex binis nominibus

per defin. secunda;

PROPOSITIO LI.

Problema 15.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

A C B

I

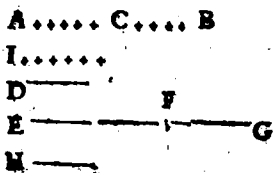
D ———

E ——— F ——— G

H ———

Z

R



Reperta dñm
 quadratis a b, e b
 ut antea, sumam
 alim i qui ad neu-
 trum habeat pro-
 portionem quam

quadratus ad quadratum. Assumpta d ratio-

Cor. 6. X
 16. X.

nalis fiat, ut i ad a b, ita quadratum recte d
 ad quadratum e f, que quadrata perunt com-
 mensurabilia, cum habeant proportionē numeri-

9. X.

rum: Sed cum non quadratorum erunt d & e f
 longitudine incommensurabiles. Fiat rursus ut
 a b ad a c, ita quadratum e f ad quadratum f g,
 que etiam perunt commensurabilia; sed latera
 ipsa r incommensurabilia. Sum ergo e f, f g

17. X.

Rationales potentius tantum commensurabiles,
 Et tota e g irrationalis ex binis nominib9.
 Que & erit tertia. Quia enim d ut i ad a b, ita
 quadratum d ad quadratum e f. Sed i ad a b
 non est ut numerus quadratus ad quadratum.
 Ergo nec d ad e f, & sunt longitudine r incommensurabiles. Quia etiam est ut a b ad a c, ita

Lemma.
 14. X.

quadratum e f, ad quadratum f g; Sed a b ma-
 jor est quam a c, etiam e f erit majus f g. Sit
 autem majus quadrato recte h. Erit ut quar-
 tus h ipsi e f longitudine incommensurabili.
 Quoniam majus nomen e f pl9 potest quam min9
 f g quadrato recte h sibi longitudine incommensu-
 rabili, & neutrum e f, g f exposita Rationali

dñm

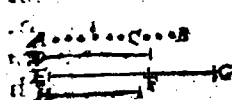
est longitudo commensurabile. Ergetur ergo e g
ex def. ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur fa-
cilius si similes pluri numeri à se mutuo auferan-
tur; reliquus enim vel est quadratus, & oritur bi-
nominum secundum, vel non quadratus, & oritur
Binomium tertium.

PROPOS. LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



Inventis duobus nume- 35. schol
ris ac, c b ex quibz com- 19. X.
positus a b ad neutrum i-
pforum habeat proportio-

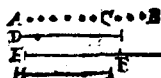
nem, quam quadratus ad quadratum, & assam-
ta rationali d, cui longitudine commensurabile
sit e f perficianturq; cetera ut in 49. huius.
Erit ut ibi e g ex binis nominibus: & qui-
dem Quarta. Maius sit quadratum e f quàm
f g quadrato h. Quia autem convergendo est, ut
in 49. ut a b ad c b, ita quadratum e f ad qua-
dratum h. Sed a b ad c b non est ut quadratum
ad quadratum: Ergo nec quadrata e f, & h ha-
bebunt proportionem quadratorum; & eruntq; 16. 19. X.
ut e f & h incommensurabiles. Itaq; cum ma-
ius nomen e f, quod & exposita rationali d com-
mensurabile est, plus possit quàm minus f g qua-
drato h sibi longitudine incommensurabi-
li, erit e g per defn. ex binis nominibus
quarta.

Propos.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: LIII.

Problema 17.

Invenire ex binis nominibus quin-
tam.



Inventis numeris a c,
cb ut in precedenti, & ad-
bibitis reliquis ut in 50.
bujus: Erit c g ex binis

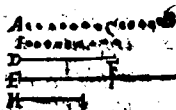
nominibus & quidem Quinta. Sit quadratum
e f majus quàm quadratum f g, quadrato h.
Erit, ut in 49. convertendo, ut a b ad t b, ita
quadratum e f ad quadratum h. Erunt e f & h
incommensurabiles ut in 52. Quia ergò majus
e f nomen quàm minus f g, quod & propositio
rationali commensurabile est, plus potest qua-
drato recte h sibi longitudine incommensurabi-
lis, erit per defin. e g ex binis nominibus
quinta.

PROPOS: LIV.

Problema 18.

Invenire ex binis nominibus se-

xtam.



Inventis a c, ob pla-
non singulis, quorum
neuter sit quadratus, ut
ex ipsis compositus qua-

dratus sit, habeatur ad aliquem eorum qua-

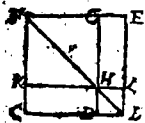
tratorum proportionem; sumatur alio quicunq;
numerus i , qui nec ad ab , nec ad ac quadratu-
rum proportionem habeat, qualis est quivis qua-
dratus; assumptaque rationali d , fiant cetera ut
in 51. huius. Patet ut ibi e & f , fg longitudine esse
incommensurabiles & totam e & g , ex binis no-
minibus. Et quidem est sexta. Quia, si qua-
dratum e f quam quadratum fg , majus sit qua-
drato h , ut in 52. e & h sunt longitudine in-
commensurabiles. Itaq; cum majus nomen e f
plus possit quam fg , quorum neutrum posita
rationali sit commensurabile, quadrato recte h
sibi longitudine incommensurabilis, erit ex bi-
nis nominibus per defn. sexta.

Sapè promissa Binomia quinta & sexta oc-
currunt, si dissimiles plani à se invicem auferan-
tur, reliquum vel quadratus est & oritur bi-
nomium quintum, vel non, & nascitur bino-
mium sextum.

LEMMA.

Si recta linea bc secta sit utcunq; in d ;
erit rectangulum eb sub partibus el , lb
contentum; medium proportionale
inter earum quadrata ld , gk ; item
rectangulum de contentum sub tota
& una parte, medium proportionale
inter quadratum ce , totius lineæ, &
quadratum dl dictæ partis.

De-



Descriptio quadrati
super $b c$, è sectionis partem
erigatur perpendiculari de
ducaturq; diagonum $h f$, &
parallela ipsi $b c$. Erige bas
dium proportionale inter
 $g k$, Id quadrata. α Quia

α 1. VL

α 43. I.

ergo est ut $k h$, ad $h l$; ita tam $g k$ ad ch , quam
 ch ad $d l$, eris, ut $g k$ ad ch , ita ch ad $d l$. Sed
 ch & eh sunt equalia. Est ergò rectangulum
sub partibus medium proportionale inter eorum
dem partium quadrata. Rursus α quia est ut ch
ad $h d$, ita tam ce ad de , quam cl ad $d l$. Sed
 de & cl sunt equalia. Est ergò rectangulum
de sub tota & una parte, Medium proportio
nale inter quadratum totius $c e$ & dicta part
quadratum $d l$.

PROPOSITIO LV.

Theorema 17.

Si spaciū $a c$ contineatur sub
Rationali $a b$, & ex binis nominibus
prima $a d$; Recta linea $o p$ spaciū
potens irrationalis est, quæ ex binis
nominibus appellatur.

Dir

Divisa ad in nomina

a e majus & e minus, se-
cet e d in f bifariam.

Quia ergo a e plus potest
quam e d quadrato recta si-

bi longitudine commensura-
biles. Si ad eam quartapar-

ti quadrati e d i.e. quadrato
et aequale Parallelogrammū

age s applicetur. & dividet
ipsam a e in partes a g. g e

longitudine commensurabiles. Per puncta g e
ducantur ipsi a b parallela g h, e i, f k d fiantq;

h , g i rectangula aequalia quadrata l m, m n
uncta ad angulum m ita. ut o m, m p unam

ficiant rectam & compleatur totum l n qua-
dratum. Quoniam itaque rectangulum a g e

aequale est quadrato e f, & erit ut a g ad e f, ita
 f ad g e; quare ut a h ad e k, ita e k ad g i.

Itaque e k inter a h, g i medium propor-
tionale. Sed ipsis a h, g i sunt aequalia l m,

et quadrata, & inter quae medium proportio-
nale est t m. Itaque t m est aequale ipsi e k.

Itaque t m sit aequale m s & e k ipsi
 c , erit & m s ipsi f c aequale, totumque l n

quadratum toti rectangulo a c aequale. & o
portet l n a c sub Rationali a b &

bini-

a def. bin
primi.

2. Lemma
17. X.
18. X.

14. IL

ex const
17. X.
1. VI.

Lemma
preceden
43. I.
36. I.

bimomiali prima ad contentum. Erit ea irrationalis ex binis nominibus. Quoniam enim g & e ostensasunt longitudine commensurabiles, & erit a & c tota utrique ipsarum longitudine commensurabilis. Sed a & e , cum sit majus nomen binomialis prima ad, rationali a & b longitudine est commensurabilis. Ergo ag , ge eidem a & b longitudine sunt commensurabiles, ipseque a & b erunt Rationales. Sunt itaque rectangula ah , gi sub rationalibus rationalia, ipsisque equalia quadrata lm , mn rationalia, rationalisque recte om , mp . Et quia a & e ipsi e & d est longitudine incommensurabilis; sed eidem a & e longitudine commensurabilis ostensus est ag , & ipsi e & d longitudine commensurabilis est ef , utpote ipsius dimidia. Ergo ag , ef sunt longitudine incommensurabiles. Quare ah , ek , ejusdem rationis cum ag , ef incommensurabilitate, & proinde lm , mt ipsis equalia incommensurabilia, ipseque recte om , mp eandem habentes rationem quam lm , mt , erunt longitudine incommensurabiles. Cum autem eadem sint ostense rationales, Igitur om , mp sunt rationales potentiis solum commensurabiles. Quare op potens spatium a & c est irrationalis quod ex binis nominibus dicitur.

Sed Euclides noluit aliquam binomialium speciem determinare, cum possit & prima & secunda, & tertia, quarta, quinta, sexta, esse.

Sequitur

Sequentibus propositionibus quinq; docentur inventiones omnis generis Irrationalium linearum.

PROPOS. LVI.

Theorema 38.

Si spacium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus secunda, ad , Recta linea op spacium potens, Irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Divisa ad in nomina ae majus, & ed minus adhibeatur etiam reliqua præcedentis propositionis constructio. Erit op ex binis medijs prima. Quoniam enim ae , ed sunt longitudine incommensurabilia, & ed rationali ab longitudine commensurabile, ae erunt ae , ab longitudine incommensurabiles. Et quia ag , ge in præcedenti sunt ostensa commensurabiles longitudine, tota ae utriq; ipsarum erit p commensurabilis. Quare cum ae seu majus nomen binomialis secunda ad sit linea Rationalis, erunt & ag , ge rationales longitudine commensurabiles. Sed ae rationali, ab est longitudine incommensurabilis. Vtraq; ergo ag , ge , eidem ab incommensurabilis γ erit longitudine. Quare tam ab , ab quam ag , ge rationales sunt potentia tantum commensurabiles, & re-

aa Δ angula

¶ 12. X.

¶ 10. X.

¶ VI.

¶ 12. X.

¶ 10. X.

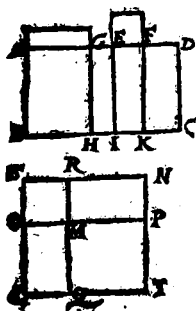
¶ 18. X.

Rectangula ah , gi Media, ipsisq; equalia quatuor
 talia lm , mn Media & om , mp rectæ media.
 Quia autem ag , ge sunt longitudine commen-
 surabiles, erunt ah , gi ejusdem rationis, ipsiq;
 equalia quadrata lm , mn commensurabilia, &
 adeoq; om , mp rectæ potentia tantum commen-
 surabiles. Cumq; ae , ed , sint longitudine in-
 commensurabiles, quibus longitudine sunt
 commensurabiles ostensa ag , et : Ergo ag , et
 sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus
 in eadem ratione ah , ek , etiam sunt in-
 commensurabilia, & ipsis equalia lm , mt in-
 commensurabilia; ipseq; et rectæ ejusdem rationis om
 & mp longitudine sunt incommensurabiles. Sunt
 itaq; om , mp Mediæ & potentia com-
 mensurabiles. Quia autem ed minus nomen,
 binomialis secunda ad , est commensurabile lon-
 gitudine Rationali ab vel ei , etiam ipsius dimi-
 dium ef commensurabile est ipsi ed ; & ei , ef
 & commensurabiles sunt longitudine. Sed ei est
 Rationalis. Ergo & ef & ek rectang. & ratio-
 nale. Sed mt sub om , mp contentum ipsi ek
 est æquale. Ergo & mt est rationale. Quare
 om , mp sunt Mediæ potentia solum commensura-
 biles. Rationalesq; continentes; adeoq; op Irra-
 tionalis, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

PROPOS: LVII.

Theorema 39.

Si spaciū $a c$ contineatur sub Ra-
tionali, $a b$ & ex binis nominibus ter-
tia $a d$; Recta linea $o p$ spaciū po-
tens Irrationalis est, quæ ex binis
Mediis Secunda dicitur.



Divisa $a d$ in nomina $a e$
maius & $e d$ minus, reliqua
siant ut in 55. propos. Ostem-
detur eodem modo, ut ibi, $o p$
posse spaciū $a c$; & ut in 56.
rectas $o m$, $m p$ esse Me-
dias potentia tantum com-
mensurabiles, ed quod $a e$ po-
nitur rationali $a b$ hic ut illi
longitudine incommensura-
bilis. Sed quia $e d$, $e f$ longi-

tudine sunt commensurabiles, estq; $e d$ rationalis
 $a b$ longitudine incommensurabilis, erit etiam $e f$ 14. 2.
eidem $a b$, id est, $e f$ longitudine incommensurabi-
lis. Sunt autem rationalis $e f$ dimidia rationalis
 $e d$ & $e f$ potentia tantum commensurabiles. Qua-
re $e k$ perit Medium, ipsiq; æquale m t medium, 22. 2.
contentum sub Medijs $o m$, $m p$. Quare cum $o m$
 $m p$ sint Media potentia tantum commensurabi-
les, contineantq; spaciū Mediū, erit $o p$ Irrati-
onalis, quæ ex binis Medijs secunda & appel- 19. 1.
latur.

A A A

PRO-

EVCLIDIS ELEM
PROPOS: LIIX.

Theorema 40.

Si spacium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus quarta ad : Recta linea op spacium potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

19. X. Divisa ad in nomina a & majus & minus ed ,
cetera fiant ut in 55 propos. a Erunt ag , g & longi-
tudine incommensurabiles. Ostendeturq; op
posse spacium ac . Quoniam ag , g & sunt longi-
tudine incommensurabiles, & a h , g i rectangula
ejusdem cum illis rationis & ipsis equalia qua-
drata lm , mn incommensurabilia erunt, & re-
cte om , mp potentia incommensurabiles. Sed
quia majus nomen a & Rationali ab est longitudi-
ne commensurabile, erit ipsa ac rationalis & re-
ctangulum ai rationale, & e & c rectangulum
Medium propter ed ipsi ab longitudine incommensurabilem, ipsiq; c & c commensurabile ek Medium & huic equale tm medium. Quare cum
 om , mp sint incommensurabiles potentia, faci-
antq; compositum ex ipsarum quadratis lm , ma
rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, tot
 op rationalis erit, quæ appellatur Major.

LIBER X.
PROPOSITIO LIX.

Theorema 41.

Si spaciū $a c$ contineatur sub Ra-
tionali, $a b$ & ex binis nominib. quin-
ta $a d$; Recta linea $o p$ spaciū po-
tens Irrationalis est, quæ Rationale
& Medium potens appellatur.

Divisa $a d$ in nomina $a e$ majus & ed minus, fi-
ant cetera ut in 55. propos. Erunt $a g$, $g e$ longi-
tudine incommensurabiles; & $o p$ poterit ac ut in
55; quæ & Irrationalis erit, potens rationale &
& Medium. Erunt etiam ut in 58 $o m$, $m p$
potentia incommensurabiles. Ergo $a i$ est Me-
diū, quia nomē majus $a e$ binarii quinti ad est in-
cōmensurable longitudine Rationali $a b$ per defin.
Sed $a i$ quadratū $l m$, $m n$ simul est. æquale; Sunt
ergo Media. Rursus rectangulū $e c$ est Rationale,
quia minus nomen ed longitudine cōmensurable
est Rationali $a b$ ex definitione, ipsiusq; dimidiū
est & Rationale & ipsi æquale $m t$ Rationale, sub
 $o m$, $m p$ contentum. Quare cū $o m$, $p m$ sint po-
tentia incommensurabiles, faciantq; ex ipsarum
quadratū $l m$, $m n$ compositum Medium, & re-
ctangulū sub ipsis contentum $m t$ Rationale;
erit $o p$ irrationalis, quæ Rationale & Me-
dium potens dicitur,

EUCLIDIS ELEMENTA
PROPOSITIO LX.

Theorema 4².

Si spatium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus sexta, ad , recta linea op spatium potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

219. X.

Divisa ad in nomina ae majus & ed minus, cetera fiant ut in 55. Erunt ag , eg longitudine incommensurabiles & op poterit spatium ac . Erunt & om , mp potentia incommensurabiles ut in 58. Compositum ex quadratis lm , mn erit Medium ut in 59: & ut in 58. mt sub om , mp contentum, Medium. Quia verò duarum ac , ef rectarum, illa quidem longitudine est incommensurabilis ipsi ed ; hac verò commensurabilis ae erunt ae , ef longitudine incommensurabiles, Ergo & in eadem cum his ratione ai , ek sunt incommensurabilia. Quare & compositum ex lm , mn quadratis ipsi ai aequale, & mt ipsi ek aequale erunt incommensurabilia. Quamobrem cum om , mp sunt potentia incommensurabiles, faciantq; & ex ipsorum quadratis lm , mn compositum Medium & mt sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; ex ipsorum quadratis compositum.

213. X.

219. X.

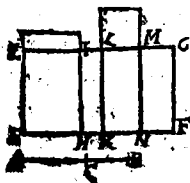
composito, erit tota op^a Irrationalis quæ bina Media potens vocetur. d 42. X.

Porro docetur, quasnam Irrationales Latitudines faciant Irrationalium prima Senario propositarum, ad rationalem lineam applicata quadrata.

PROPOS: LXI.

Theorema 43.

Quadrati ejus ab , quæ ex binis nominibus $a c$, cb ad rationalem de applicatum df , latitudinem dg facit ex binis nominibus dl , lg primam.



Applicato ad de rectangulo dh quadrato $a c$ equali & ad ih alio, ik quadrato cb equali; a erit l rectangulo $a c b$ bis sumto equalis; 4. II.
 Siq, ex puncto m inter lg medio agatur parallela mn

ipsi de , erit tam ln quàm mf equalis $a c b$ rectangulo. 47. X.
 Quoniam itaq, $a c$, cb potentia solum $a c b$ commensurabiles sunt, erunt eorum quadrata rationalia & commensurabilia, quorū utriq, cum ex ijs compositum $a e$, cb compositum $d k$ Rationale, quod ad Rationalem de applicatū, d facit latitudinem $d l$ 16. X.
 rationale, ipsiq, de longitudine commensurabile. 21. X.

AA 4

Quia

- e 22. X. Quia vero $a c, c b$ sunt Rationales, potentia utrum commensurabiles, rectangulum sub ipsis.
- 2 cor. 24. X. Medium, & ejusq. duplum l^t Medium.
- e 23. X. Latitudo $l g$ est Rationalis, ipsi $l k$, id est, & longitudine incommensurabilis. Sed d^t ipsi d est ostensa longitudine commensurabilis. Ergo d^t $l g$ longitudine sunt incommensurabiles, adeoq. rationales potentia solum commensurabiles, & d^t g ex binis nominibus composita. Erit etiam Prima. Quia enim $a c b$ rectangulum inter quadrata $a c, c b$ est medium proportionale, erit & $l n$ inter $d h, i k$ Medium proportionale, & $l m$ inter $d i, i l$. Itaq. rectangulum $d i l$ quadrato $l m$ est equala: Et cum quadrata $a c, c b$ sint commensurabilia, & recta $d i, i l$ eandem cum illis habentes rationem longitudine sunt commensurabiles. Et quia $d k$ quam $l f$ est major quadrataq. $a c, c b$ rectarum, rectangulo $a c b$ his sumto sunt majora, & etiam $d l$ quam $t g$ major. Itaq. cum $d l$ sit major quam $l g$, & $d i l$ rectangulum quadrato $l m$ ostensum equala, & videns recta $d l$ in i in partes longitudine commensurabiles. ut patet & poterit $d l$ major plus quam $l g$ minor quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Quare cum $d g$ sit ostensa ex binis nominibus, & $d l$ majus plus posse, quam $l g$ minus, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, atq. idem $d l$ nomen majus exposita rationali d e longitudine commensurabile est. erit $d g$ per d^t ex binis nominibus Prima.

LIBER X.
PROPOS: LXII.

Theorema 44.

Quadrata ejus, quæ est ex binis
 ac , cb , medijs prima ab , ad de Ra-
tionaleni applicatum df , Latitudi-
nem $d g$ facit ex binis dl , lg nomi-
nibus secundam.

Repetatur eadem constructio, quæ in prece-
denti est adhibita. Quia ergo ac , cb sunt Media
potentia tantum commensurabiles, quæ cõineant
Rationale, erunt earum quadrata Media & com-
mensurabilia, & ipsæ equalia dh , lk , media qua-
re & totum dk illis commensurabile, & Medium
ipsiusq; Latitudo dl rationalis ipsi de Longitudi-
ne incommensurabilis. Et cum $ac b$ rectangu-
lum sit rationale, ejus etiam duplum l fractiona-
le erit. Ergo lg Latitudo est rationalis longitu-
dine commensurabilis ipsi lk , id est, de . Cum
itaque duarum dl , lg , hæc longitudo sit com-
mensurabilis ipsi de , illa verò incommen-
surabilis, & erunt inter se longitudo incommen-
surabiles. Sunt autem & rationales dl , lg ut
patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantum com-
mensurabiles: & tota $d g$ est ex binis nomi-
bus. Erit etiam secunda. Similiter enim, ut
in precedenti, ostenditur dl esse nomen majus &
posse plus quàm minus lg quadrato rectæ sibi longi-

tudine commensurabilis. Sed ostensum est minus lg esse longitudine commensurabilem rationali d e posita. Erit igitur dg ex binis nominibus secunda.

PROPOS: LXIII.

Theorema 45.

Quadrata ejus, quæ ex binis medijs secunda ab , ad Rationalem d applicatum $d f$, Latitudinem $d g$ facit ex binis nominibus $d l$, lg tertiam.

39. X.

Constructis iisdem ut in 61, quia $a c$, $c b$ sunt Media potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis equalia $d h$, $i k$ media, illisq; totum $d k$ & commensurabile, & medium. Ergo $d l$ Latitudo est rationalis, ipsi $d e$ longitudine incommensurabilis. Et cum $a c b$ rectangulum sit Medium, ejus duplum $l f$ erit medium & lg Latitudo longitudine d incommensurabilis ipsi $l k$ vel $d e$. Cum verò $a c$, $c b$ sint longitudines incommensurabiles, sitq; ut $a c$ ad $c b$, ita quadratum $a c$ ad rectangulum $a c b$, & erunt hæc inter se commensurabiles. Sed $a c$ quadrato, compositum ex ipsis, id est $d k$ est commensurabile,

16. X.

7 cor. 24. X.

23. X.

3. Lemma

19. X.

10. X.

16. X.

re patet, & rectangulo $ac b$ commensurabile
 est eius duplum lf : Ergo dk ipsi lf est incommen- 14. X.
 surabile, & ipsa q , dl , lg sunt longitudine incommen-
 surabiles: Cumq; etiam rationales, ut patet.
 Ergo dl , lg sunt rationales potentia tantum com- 37. X.
 mensurabiles, & tota $d g$ ex binis nomini-
 bus. Erit etiam tertia. Similiter enim ut in 61
 ostenditur dl esse nomen majus, posseq; plus
 quam minus lg , quadrato recta sibi longitudine
 commensurabilis. Sed ostensum est neutrum no-
 men dl , lg esse posse rationali de longitudi-
 ne commensurabile. $\wedge$ Erit itaq; $d g$ ex binis, per def. q.
 nominibus tertia.

PROPOS: LXIV.

Theorema 46.

Quadratum Majoris ab ad Ratio-
 nale de applicatum df , latitudi-
 nem $d g$ facit ex binis nominibus dl ,
 lg quartam.

Constitutis $isdem$ ut in 61, quia $a c$, cb po- 40. X.
 tentia sunt incommensurabiles, continentes Medi-
 um, faciuntq; compositum ex quadratis suis
 Rationale, erit dk rationale & lf duplum
 rectanguli abc Medium; adeoque dl ra- 41. X.
 tionalis ipsi de longitudine commensurabilis:

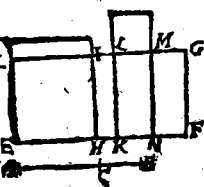
¶ Sed

23. X. Sed l rationalis ipsi k , id est, d e longitudine
 incommensurabilis, ipseque $d l$, $l g$ longitudines
 commensurabiles, d vel Rationales potentiarum
 commensurabiles & $d g$ binomialis. Est
 etiam quarta. Quadratum enim $l m$, ut in 61,
 est æquale rectangulo $d i l$. Et quia quadrata $a c$,
 & b sunt incommensurabilia, etiam $d h$, $i k$ ipsi
 æqualia sunt incommensurabilia, & $d i$, $i l$ lon-
 gitudines incommensurabiles. Ita, ut in 61, osten-
 ditur $d l$ maior quam $l g$; & ad $d l$ applicatus
 rectangulum $d i l$ æquale quadrato $l m$, quod
 dividit ad i in partes longitudine incommensura-
 biles. Itaque, & poterit $d l$ plus quam $l g$, quatuor
 rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed
 majus nomen $d l$ longitudine commensurabilis
 est posita Rationali $d c$. Erit ergo $d g$ ex
 his nominibus quarta.

PROPOS: LXV.

Theorema 47.

Quadratum ejus $a b$, quæ Medium
 & Rationale potest, ad Rationale de
 applicatū $d f$, Latitudinem $d g$, facit
 ex binis nominibus $d l$, $l g$ quintam.
 Peractis ceteris ut in 61, quia $a c$, $c b$ sunt po-
 tentia incommensurabiles, facientes quidem ex
 quadratis Medium, ac sub se contentum rationale.



erit dk aequale cōposito qua-
dratorum Medium, & In
duplum rectanguli acb Ra-
tionale. Ergo Latitudo dl
est Rationalis longitudine
commensurabilis posita de; 23. X.

lg verò Rationalis eidem
longitudine y commensurabilis; & sic dl, lg sunt
longitudine^d incommensurabiles; & quia Ratio-
nales, sunt Rationales potentia tantum commensurabiles, ex quibus composita d g est ex binis
nominibus & quidē quinta. Rursus enim; ut in
61 ostēditur, dl rectangulū aequale esse quadrato
m, & ut in 64, dl nomen majus plus posse quam
g, quadrato recte sibi longitudine incommensura-
bilis. Sed minus nomen lg ostensum est posita
Rationali de longitudine commensurabile. & Erit
itaq; d g ex binis nominibus quinta. 21. X.
13. X.
37. X.

& per desin

PROPOS: LXVI.

Theorema 48.

Quadrata ejus ab, quæ bina Me-
dia potest, ad Rationalem de appli-
catum df, facit Latitudine mdg ex
binis dl, lg nominibus Sextam.

Peractū ceteris ut in 61, quia ac, cb poten-
tia sunt incommensurabiles, & faciunt & ex suis qua-
dratis 42. X.

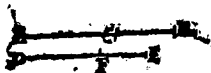
drati compositum medium, & sub se contentum
 Medium, incommensurabileq³, ex quadrati com-
 posito, id est, d k composito quadratorum equali
 & l f rectangulo a c b bis sumto equale; cum
 Media, & latitudines d l, l g rationales ipsi de
 longitudine incommensurabiles. Quoniam verò
 d k, a incommensurabile est rectangulo a c b, et-
 jam ipsius duplum l f, incommensurabile erit, di-
 psetq³ d l, l g, incommensurabiles longitudine, quo
 sunt Rationales potentia solum commensurabiles,
 ac ob id d g ex binis nominibus, & quidem
 Sexta. Nam d l, ut in 65; nomen majus plus po-
 test quam l g quadrato recte sibi longitudine in-
 commensurabilis. Sed neutrum illorum nomen
 d l, l g, est ostensum Rationali posita d e com-
 mensurabile longitudine. Ergo d g est ex binis
 nominibus Sexta.

PROPOS: LXVII.

Theorema 49.

Ei a b, quæ ex binis nominibus a c
 & b Longitudine commensurabilis
 d e, & ipsa ex binis nominibus d f,
 f e est, atque ordine eadem.

Fiat



• Fiat, ut tota $a b$ ad totam $d e$; ita ablata $a c$ 12. V I.
 ad ablatam $d f$. Ergo & reliqua $c b$ ad reliquam 19. V.
 $f e$ erit, ut tota $a b$ ad $d e$ totam. Cumq; $d e$
 ipsi $a b$ sit longitudine commensurabilis; 7 10. X.
 & $d f$ ipsi $a c$; & $f e$ ipsi $c b$. d Sunt vero $a c$, $c b$ 37. X
 nomina binomialia $a b$ rationalia. Ergo & $d f$,
 $f e$ sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut $a c$ ad
 $d f$, ita $c b$ ad $f e$: & permutando, ut $a c$ ad $c b$,
 ita $d f$ ad $f e$. Sed $a c$, $c b$ sunt potentia solum
 commensurabiles. Ergo & $d f$, $f e$. Atq; ita $d f$,
 $f e$ sunt Rationales potentia solum commensurabi-
 les, & $d e$ ex binis nominibus. Erit & ipsi $a b$
 ordine eadem. Aut enim $a c$ plus potest, quam $c b$,
 quadrato recta sibi longitudine commensurabilis; 15. X
 si poterit $a c$ plus quam $c b$ quadrato recta longi-
 tudine commensurabilis, poterit & $d f$ quam $f e$;
 utq; si nome majus $a c$ longitudine commensurabile
 fuerit ipsi Rationali posita; erit & $d f$ & utraq; $a b$
 & $c b$ binomialis prima: Si minus $c b$ etiam $f e$, &
 utraq; $a b$, $d e$ est binomialis secunda; Si neutrum
 $a c$, $c b$ vel $d f$, $f e$ erit ex binis nominibus tertia.
 Sed si $a c$ plus possit quam $c b$ quadrato recta sibi
 longitudine incommensurabilis, etiam $d f$ quam
 $f e$, & ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quin-
 ta vel sexta binomialis erit per definitionem.

Scho-

Scholium.

Si *de* binomiali *ab* tantum potentia fit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiam si potentia sint commensurabiles.

PROPOS: LXIIX.

Theorema 30.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *cb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

a Fiat ut *a* *b* ad *d* *e*, ita ablata *a* *c* ad ablaturum *d* *f*, perit etiam reliqua *c* *b* ad reliquam *f* *e*, ut tota ad totam. Sed deponitur ipsi *a* *b* longitudine commensurabilis; Ergo *d* *f*, *f* *e* ipsi *a* *c*, *c* *b* sunt longitudine commensurabiles. Sunt autem

12. VI.

19. V.

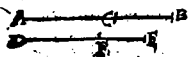
10. X.

tem $a c, c b$ media. δ Ergo $\& d f, f e$. Rursum cum
 fit, ut $a c$ ad $d f$, ita $c b$ ad $f e$, $\&$ permutando, ut
 $a c$ ad $c b$, ita $d f$ ad $f e$; finis , $a c, c b$ potentia, 38. X.
 commensurabiles, γ erunt $\& d f, f e$. Sunt autem
 $d f, f e$ etiam offensa Medie; sunt ergo Media po-
 tentia tantum commensurabiles, $\& d e$ ex binis
 mediis, $\&$ quidem cum $a b$ eodem ordine. Quia e-
 nim est, ut $a c$ ad $c b$ ita $d f$ ad $f e$. Sed ut $a c$ ad
 $c b$, ita quadratum $a c$ ad rectangulum $a c b$, $\&$
 ut $d f$ ad $f e$, ita $d f$ quadratum ad $d f e$ rectangu-
 lum; erit etiam, ut quadratum $a c$ ad rectang.
 $a c b$, ita $d f$ quadratum ad $d f e$ rectang. $\&$
 permutando, ut quadrata $a c, d f$, ita rectangula
 $a c b, d f e$; Sed $a c$ quadratum quadrato $d f$,
 (quia $a c, d f$ sunt longitudine commensurabiles)
 est commensurabile. γ Ergo $\&$ rectangula. Si ergo
 $a c b$ fuerit rationale, erit $\& d f e$ rationale. $\&$
 $d e$ ex binis Mediis prima; Si vero Medium, cor. 24. X
 δ Medium, $\& d e$ ex binis Mediis secunda. 39. X.

PROPOS. LXIX.

Theorema 51.

Majori $a b$ commensurabilis $d e$
 $\&$ ipsa $d e$ Major est.



Fiant, quae in anteceden-
 ti. Quia ergo $a b, d e$ loro
 ynnaline vel potentia tan-
 tum

10. X.

22. VI.

40. X.
9. defin.

tum sunt commensurabiles, & eodem modo ut
 $d f$, quàm $c e$, & c commensurabiles erunt. Rur-
 sum sit, ut $a c$ ad $d f$, ita $c b$ ad $f e$: & per-
 tando, ut $a c$ ad $c b$, ita $d f$ ad $f e$, & erit, ut qua-
 dratum $a c$ ad quadratum $c b$, ita quadratum
 $d f$, ad quadratum $f e$; & componendo: ut com-
 positum ex quadratis $a c$, $c b$, ad quadratum
 $c b$; ita compositum ex quadratis $d f$, $f e$, ad qua-
 dratum $f e$: & convertendo, ut quadratum $c b$,
 ad compositum quadratorum $a c$, $c b$, ita quadra-
 tum $f e$ ad compositum quadratorum $d f$, $f e$. Sed:
 quadratum, quadrato $f e$ est commensurabile,
 quia ipse recta vel longitudine vel potentia sunt
 commensurabiles: & Ergo & compositum qua-
 dratorum $a c$, $c b$, composito quadratorum $d f$,
 $f e$ commensurabile erit. & Sed compositum illud
 est Rationale, quia recta $a c$, $c b$, componunt Ma-
 jorem $a b$. & Igitur & hoc est Rationale. Rur-
 sus quia est, ut $a c$ ad $c b$, ita $d f$ ad $f e$, ut in pre-
 cedenti; rectangulo $a c b$, rectangulum $d f e$ ostenditur
 commensurabile; Illudq; cum sit & Me-
 dium, erit & hoc Medium. Sed cum sit, ut $a c$ ad
 $c b$, ita $d f$ ad $f e$; & Sintq; $a c$, $c b$, potentia
 incommensurabiles, & erunt & $d f$ & $f e$. Namq;
 cum $d f$, $f e$ potentia sunt incommensurabiles, scia-
 ntq; ex earum quadratis compositum Rationa-
 le; quod verò sub ipsis continetur, Medium; & cit
 tota de Major.

PROPOSITIO LXX.

Theorema 52.

Rationale ac Medium potenti $a b$ commensurabilis $a e$; & ipsa de Rationale ac Medium potense est.

Constructio iisdem, ut prius, etiam ut in precedenti compositum ex quadratis $a c$, $c b$ compositum ex quadratis $d f$, $f e$ commensurabile esse ostenditur. Sed illud compositum est Medium: *Er-
go & hoc. Eodemq; modo rectangulo $a c b$ Ratio-
nali commensurabile & Rationale erit Rectangu-
lum $d f e$, & $d f$, $f e$ potenti incommensurabi-
les. Itaq; tota de Rationale ac Medium po-
tens erit, (propter affectiones ipsi competentes.)* a 41. X.
p cor. 24. X.

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti $a b$ commensurabilis, $d e$, & ipsa $d e$ bina Media potens est.

Constructio iisdem, ut prius, etiam ut antea, compositum ex quadratis $a c$, $c b$ compositum ex quadratis $d f$, $f e$ commensurabile & Medium *a 41. X.
esse ostenditur. & rectangulo $a c b$ Medio commensurabile, & Medium rectangulum $d f e$. Sunt ve-
ro $d f$, $f e$ potentia incommensurabiles, ut prius.*

B b a

Denig

42. X.

« Deniq, cum quadratorum $a c$, $c b$ compositum rectangulum $a c b$ sit incommensurabile: sed composito quadratorum $a c$, $c b$, rectanguloq, $a c b$ incommensurabilia sunt compositum quadratorum $d f$, $f e$, & rectangulum $d f e$; & erit etiam compositum quadratorum $d f$, $f e$ incommensurabile rectangulo; « Eritq, $d e$ bina Media potens.

p. 14. X.

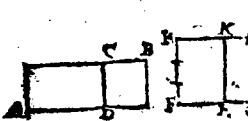
Propositionibus duabus exponit aliam differentiam Senarij primi sex Irrationallium. Vocantur autem hactenus propositi Senaria per compositionem, quod signot componantur nomina: Sed à 74 sequuntur Senaria per detractionem, quia per signum, —, subducentur nomina. De quibus eadem quæ in illis docentur.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 54.

Si Rationale $a c$ & Medium $d b$, componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus; vel quæ ex binis Medijs prima; vel Major, vel Rationale ac Medium potens.

Erit $a c$ quàm $d b$ vel majus vel minus: æquale enim



le esse nequit, quia
db aequalerationali ac.
foret Rationale. Sit ergo
Majus. Applicetur ad ra-
tionalem ef, eh aequale

ipsa c, & k g aequale ipsi db, ut totum fi sit a-
quale toti ab. Erit ek a rationalis ipsi ef longi-
tudine commensurabilis, sed ki rationalis eidem
longitudine incommensurabilis. Rursus quia eh ra-
tionale & hi Medium sunt incommensurabilia, erunt
in eadem ratione e k, ki, longitudine & incommensurabiles. Itaque ex Rationalibus potentia in-
commensurabilibus composita ei d erit binomialis.
Sed cum a c quam db ponatur majus, eh quam
hi, & erit etiam ek major quam ki. Iam majus
nomen ek plus poterit, quam minus ki quadrato
rectae sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Si ek plus potest quam ki quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Sitque
ek nomen majus: rationali ef commensurabile longi-
tudine, ut patet, erit ei per defin. ex binis nomi-
nibus prima. Itaque recta potens spacium eg,
ipsa h aequale, sub rationali ab & binis nomi-
nibus prima ei contentum: erit Irrationalis,
quae ex binis nominibus dicitur.

Severò ek plus potest quam ki, quadrato re-
ctae sibi longitudine incommensurabilis; sitque ek
posita rationali ef longitudine commensurabilis,
erit ei ex binis nominibus quarta per defin. Quare

Bb 3

recta

¶ 58. X.

recta potens eg spacium equale ipsi a b spacium
 centum sub Rationali e f & e i ex binis nominibus
 quarta & Irrationalis est, que vocatur Major.
 Sit iam a c majus Irrationale & Medium; db ve-
 ro minus, Rationale, constructis ijsdem, erit e k lo-
 gitudine ipsi e f incommensurabilis, & k i com-
 mensurabilis, adeoque e k, k i rationales potentia
 tantum commensurabiles, & e i ex d binis nomi-
 nibus. Itaque e k nomen majus plus potest, quam
 minus k i, quadrato recta sibi longitudine vel com-
 mensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis,
 sitque e k rationali e f postea incommensurabilis,
 erit e i ex binis nominibus secunda.
 Quare recta potens spacium e g, sive a b, sub ratio-
 nali e f & e i ex binis nominibus secunda, conten-
 tentum, Irrationalis est quae ex binis Medijs
 prima appellatur.

¶ 56. X.

Si commensurabilis, erit e i ex binis nomi-
 nibus quinta. Quare recta potens spacium e g si-
 ve a b sub rationali e f, & ex binis nominibus
 quinta ei contentum, Irrationalis est, quae Ra-
 tionale ac Medium potens dicitur.

¶ 59. X.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 55.

Si duo Media, a c, d b inter se in-
 commensurabilia componatur, duar
 reli.

¶ *Liquæ Irrationales fiunt, vel ex bi-
is Medijs secunda, vel bina Media
otens.*

*Adhibita præcedentis constructione, erit a c
uam d b vel majus vel minus, & nullo moda
qualis, quia contra hypothesin forent commensu-
abilia. Cum ergo a c, d b ponantur spacia Me-
dia, = erunt ipsis aqualia e h, h i media; quare ^{10. X.}
k, k i se junde rationis rationales & longitudine ^{1. VI.}
incommensurabiles sunt ipsi e f posita, & ex e k ^{23. X.}
i rationalibus potentia tantum commensurabi- ^{37. X.}
bus composita e i est ex d binis nominibus. Cumq;
c quam d b ponatur majus, erit e k nomen ma-
jus, k i minus. Itaq; e k plus poterit quam k i.
quadrato recta sibi longitudine vel commensura-
bilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis,
& utrumq; sit rationali exposita incommensura-
bile, erit e i ex binis nominibus tertia: Quare
recta potens spacium e g quod a b est æquale con-
tentum sub rationali e f & ex binis nominibus ter-
tia, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs se- ^{57. X.}
cunda dicitur. Si incommensurabilis, & u-
trumq; e k, k i incommensurabile ipsi e f posita,
erit e i ex binis nominibus sexta. Quare recta
potens e g spacium sub rationali e f & binomiali
sexta e i contentum, irrationalis est, quæ bina ^{60. X.}
Media potens vocatur.*

B b

Cerolla

Corollarium.

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales, neq; Media neque inter se easdem esse.

- ¶ 23. X. Nam quadratum Media ad Rationalem applicatum, a latitudinem efficit rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. At Quadratum ejus, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, a latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ est ex binis Medijs prima, ad rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum deinde ejus, quæ ex binis medijs secunda ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. At Quadratum Majoris ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum verò ejus, quæ Rationalem & Medium potest, ad rationalem applicatum, facit a latitudinem ex binis nominibus quintam. Postremo quadratum ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Itaq; cum hæc latitudines differant a latitudine Media & inter se; a latitudine quidem Media, quod hæc sit Rationalis; ille verò Irrationales; inter se verò, quod ordine non sint.

ad eam ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaq; de 7. Senarijs est actum. In primo à 37. ad 42. docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secundo à 43. ad 48. docuit earum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54. docuit inventionem Sex binomialium. In quarto à 55. ad 60. ostendit, quomodo primi Senarij sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spaciū contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c: In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium prima Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendit commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa. In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7. alij Senarij, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex aliis Irrationalibus lineis, quæ per detractionem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

B b 3

Siā Rationali $a b$ Rationalis $a c$ auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua $b c$ Irrationalis est. Vocatur autem Apotome.

3. Lemma
29. X.



Quia enim est ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $a b$ ad

10. X.

$b a c$ rectangulum; Suntq; $a b$, $a c$ longitudine incommensurabiles, $a b$ & $b a c$ rectangulum incommensurabilia. Sed quadrato

16. X.

$a b$ compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ est & commensurabile, quia lineae illae sunt potentia

14. X.

commensurabiles; & rectangulo $b a c$ suum duplum est commensurabile. Compositum itaq; ex quadratis $a b$, $a c$, & rectangulum $b a c$ bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ est: aequale rectangulo $b a c$ bis sumto una cum quadrato $b c$. Itaq;

7. II.

Cor. 17. X.

Compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ reliquo quadrato $b c$ est incommensurabile. Cum itaq; ex rectarum $a b$, $a c$ quadratis compositum sit rationale, utpote commensurabile quadrato $a b$ Rationali, erit $b c$ Irrationale & ipsa $b c$ Irrationalis. Vocatur autem Apotome, Resecta vel Residuum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Siā Media $a b$, Media $a c$ auferatur potentia tantum commensurabilis existens.

existens toti, quæ cū tota Rationale
 bac contineat; Reliqua cb Irratio-
 nalis est. Vocetur autem Mediæ A-
 potome prima.

Cum a, b , ac sint potentia commensurabiles, e-
 arum quadrata commensurabilia erunt, & ex
 quadratis compositum quadrato ac commensu- 16. X.
 rabile. Sed quadratum ac Mediæ est Irratio-
 nale & Medium. Ergo & compositum ex quadra- cor. 14. X.
 tis a, b , ac . Et cum bac rectangulum ponatur
 rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Itaq;
 compositum ex quadratis & rectang. bac bis sum-
 tum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex
 quadratis; a, b , ac est ⁴ æquale rectangulo bac 7. II.
 bis sumto cum quadrato b, c . Itaq; rectang. bac
 bis cum quadrato b, c incommensurabile erit re-
 ctangulo bac bis sumto. & rectangulum bac bis
 incommensurabile est quadrato b, c . Sed bac re-
 ctangulum est rationale. Ergo quadratum cb est
 Irrationale & recta cb Irrationalis, quæ vocetur
 Mediæ Apotome prima (quia relinquitur post
 detractationem Minoris nominis linea ex binis
 Medijs prima, à majori nomine.)

● PROPOS: LXXVI.

Theorema. 58.

Si à Mediæ b à Mediæ ac auferatur poten-
 tia tantum commensurabilis existens toti,
 quæ cum tota Mediâ b, ac contineat; Reli-
 qua bc Irrationalis est. Vocetur autem Me-
 diæ Apotome secunda. Quo;



Quoniam quadrata ab²
a c potentia commensurabi-

16. X. bilium sunt commensurabilia; erit & compositum
ex ipsis utriq^{ue} ipsorum a commensurabile. Sed u-
trumq^{ue} super Medij est Medium. Ergo utriq^{ue}
cor. 14. X. commensurabile compositum est & Medium. Quia
verò rectangulum b a c ponitur Medium, ejus et-
iam duplum erit Medium. Sed compositum ex qua-
dratis a b, a c & equale est rectangulo b a b
7. 11. sumpto cum quadrato b c. Compositum ergo ex
quadratis Medium est majus rectangulo b a c b
17. X. sumpto Medio, quadrato b c. Sed Medium non
superat Medium rationale. Itaq^{ue} quadratum b c
non est rationale, ipsaq^{ue} b c linea irrationalis qua
vocetur Mediæ Apotome secunda.

PROPOS. LXXVII.

Theorema 59.

Si à recta a b linea recta a c
auferatur, potentia incommensura-
bilis existens toti, quæ cum tota fa-
ciat compositum quidem ex ipsa
rum Quadratis Rationale; quod au-
tem sub ipsis continetur b a c Medi-
um: Reliqua b c Irrationalis est. Vo-
cetur autem Minor.

Quo-

Quoniam compositum ex quadratis ab , ac est
 Rationale, & rectangulum bac Medium, etiam
 huius rectanguli duplum Medium erit vel Irra- cor. 14. 2
 tionale; Compositum vero ex quadratis ab , ac p. 10. def.
 incommensurabile rectangulo bac his sumto. Sed
 Compositum quadratorum ab , ac , equale est 7. II.
 rectangulo bac his sumto cum quadrato bc . cor. 17. 2
 Erit itaq; compositum quadratorum incommen-
 surabile quadrato bc . Sed compositum qua-
 dratorum est Rationale. Ergo quadratum bc est
 Irrationale, ipsaq; bc Irrationalis, quæ vocetur
 Minor.

PROPOSITIO LXXIIX.

Theorema 60.

Si à recta ab recta ac auferatur po-
 tentia incommensurabilis existens
 toti, quæ cum tota faciat compo-
 situm quidem ex ipsarum ab , ac Qua-
 dratis Medium; quod autem sub ipsis
 continetur Rationale bac : Reliqua
 bc Irrationalis est. Vocetur autem
 eum Rationali medium totum efficiens.

Quoniam compositum ex quadratis rectarum
 ab , ac est medium vel Irrationale, & compre-
 hensum sub ipsis bac rationale, sicut & ipsius du-
 plum;

10 def.

plurimū: & erunt compositum quadratorum & triangulorum bac bis sumtum incommensurabile. Id compositum ex quadratis est rectangulo bac bis sumto, cum quadrato bc , & aequale. Itaq; rectang. bac bis sumtum cum quadrato cb rectangulo bac bis sumto est & incommensurabile: & rectangulum bac bis, quadrato bc incommensurabile. Cum itaq; bac rectangulum sit Rationale, erit quadratum bc irrationale, ipsaq; recta bc irrationalis, quæ vocetur cum Rationali medium totum efficiens.

9 II.

17. X.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 61.

Si à recta ab recta ac auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis ab , ac , Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium bac , incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

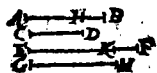
9. II.

Quoniam ex quadratis rectarum ab , ac , compositum & aequale est rectangulo bac bis sumto cum quadrato bc ; superabit compositum ex quadratis Medium, rectangulam bac bis sumtum, & Medi-

um quadrato bc , *sed medium non superat. Medium Rationali. Itaq; b c erit Irrationale, ipsaq; bc Irrationalis, que vocetur cum Medio Medium totum efficiens.* A cor. 24. X
v 27. X.

LEMM A.

Si idem excessus ib sit inter primam ab magnitudinem & secundam cd , qui kf inter tertiam ef magnitudinem & quartam gh ; erit & vicissim idem excessus kf inter primam ab magnitudinem & tertiam ef , qui inter secundam cd magnitudinem & quartam gh .



Quoniam ib est excessus inter ab , cd , erunt ai , cd equales; ut & ek , gh . Erit ergo idem excessus inter ai & ek , qui inter cd & gh , cum magnitudines singula singulis sint equales. Est autem totorum ab , ef excessus idem, qui inter ai , ek ; qui ib & kf ponuntur equales. Idem itaq; erit excessus inter ab , ef , qui inter cd & gh .

Corollarium.

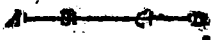
Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmetica analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmetica analogiam habere. Hacc enim in excessu eodem consistit, quem jam ostendimus.

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS. LXXX.

Theorema. 62.

Apotomæ $a b$ una $b c$ tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti $a c$.



Congruat ipsi $a b$, si potest, alia Rationalis $b d$, toti $a d$ potentia solum commensurabilis. Quia $b c$ est rationalis, erit $a c$ illi potentia solum commensurabilis rationalis: Sunt ergo $a c$, $b c$ potentia tantum commensurabiles, ut & $a d$, $b d$. Cum vero idem sit excessus, inter compositum ex quadratis rectarum $a c$, $b c$ & rectangulum $a c b$ sumtum, qui inter compositum ex quadratis rectarum $a d$, $b d$, & rectangulum $a d b$ bis sumtum,

7. II.

quæ utrumq; superat utrumq; quadrato $a b$; &

lem. 79. X. erit permutando etiam idem excessus compositum

ex quadratis $a c$, $b c$, & $a d$, $b d$, qui re-

27. X.

ctangulorum bis sumptorum $a c b$ & $a d b$, & est

autem excessus inter illa composita spatium ratio-

nale, quod utrumq; sit rationale. Igitur & exces-

sus bis sumtorum rectangulorum est spatium ratio-

nale. Sed cum $a c$, $b c$ sint rationales potentia

22. X.

solum commensurabiles, erit rectangulum $a c b$

medium,

Medium, & ejusq; duplum medium. Sic eadem de
 causa a d b rectangulum bis erit medium. Sed
 medium non superat Medium rationali. Ergo ex-
 cessus rectangulorum a c b & a d b, id est, qua-
 dratum ex ab erit, spatium Medium, id est, Irrati-
 onale, quod tamen modo rationale ostendebatur.
 Quod absurdum.

cor. 24. 2.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 13.

Media Apotomæ primæ a b una
 b et tantum congruit recta linea Me-
 dia, potentia solum commensurabi-
 lis existens a c toti, & cum rota Ra-
 tionale a c b continens.

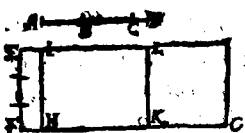
Congruat ipsi ab alia b d. Quia b c est Media
 ipsi a c potentia solum commensurabilis, a erit & a 24. 2.
 ac, media, & ac, cb Media potentia solum comen-
 surabiles. Quoniam vero intercompositum quadra- p 7. 11.
 torum a c, b c, & compositum quadratorum
 a d, b d idem est excessus, nempe quadratum a b,
 qui inter rectangula a c b & a d b quovis bis sum- y Schol.
 to. Sed excessus rectangulorum, est spatium ra- a 7. 2.
 tionale. Ergo & excessus compositorum ex
 quadratis. Sed cum a c, b c sint Media poten-
 tia solum commensurabiles, erunt ipsarum qua-
 drata

216. X. *drat. & commensurabilia & compositū ex ipsis drat.*
 217. X. *ipforum & commensurabile atq; ob id & Medium.*
 217. X. *Net aliter Medium erit compositum quadra-*
rum a d, b d. Sed Medium non superat Medium
rationali. Ergo excessus compositorum ex quadra-
tis erit Medium Irrationale, quod modo osten-
debatur Rationale. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 54.

Medix Apotomæ Secundæ ab ,
 unā $b c$ tantum congruit recta linea
 Media potentia solum commensu-
 rabilis existens toti $a c$, & cum tota
 Medium $a c b$ continens.



Congruat ipsi $a b$, $b c$
 potest, alia $b d$; & ad
 Rationalem $c f$ appli-
 tur rectangulum $c k$ o-
 quale composito quadra-

torum $a c, b c$ & aliud $e h$ equale quadrato $a b$,
 & aliud $e g$ equale composito quadratorum $a d$,
 $b d$. Quoniam itaque compositum ex quadratis
 rectarum $a c, b c$, rectangulo $a c b$ bis sumto cum
 quadrato $a b$ equale est; erit $i k$ equale re-
 ctangulo $a c b$ bis sumto, & $i g$ equale rectan-
 gulo

gulo ad b bis sumto, Cumq; a c, b c sint Media
 potentia cōmensurabiles & erunt earum quadrata 24. VI.
 Media & cōmensurabilia, atq; ex ipsis com- 16. X.
 positum utriq; eorum cōmensurabile & d' Medi d' cor. 24. X
 um. Igitur & e k, compositio illi aequale, erit
 Medium. Quod cum sit applicatum ad Rationā-
 lem c f, erit f k rationale ipsi e f longitudine, 23. X.
 incommensurabilis; neq; aliter h k rationalis est
 ipsi e f longitudine incommensurabilis. Et quia
 a c, b c longitudine sunt incommensurabiles, &
 est, ut a c ad b c, ita quadratum a c ad rectan- 23. Lemma
 gulum a c b, erit quadratum a c rectangulo 19. X.
 a c b incommensurabile. Sed quadrato a c com- 10. X.
 positum ex quadratis a c, b c est cōmensurabile,
 id est, e k rectangulum; & a c b suum duplum,
 id est, i k rectangulum cōmensurabile: Ergo e k,
 i k sunt incommensurabilia; atq; sic f h, h k re- 14. X.
 ctangula incommensurabiles. Quia cum sint ostense
 rationales: erunt f h & h k rationales poten-
 tia solum cōmensurabiles. Cum ergo ex Ra-
 tionali f k auferatur rationalis h k ipsi f k poten- 74. X.
 tia tantum cōmensurabilis, erit f h Apotome
 & illi congruens h k. Similiter ostendetur f h a-
 potome, illiq; congruens h g. Atq; ita apotoma
 f h non una tantum congruet recta potentia so-
 lum cōmensurabilis existens toti. Quod a b- 10. X.
 surdum.

EUCLIDIS REEM: PROPOS: LXXXIII.

Theorema 65.

Minori ab una tantum congrua
recta linea bc potentia incommen-
surabilis existens rori ac , & cum to-
ta faciens compositum quidem ex
ipsarum ac , bc quadratis Rationale;
quod autem sub ipsis continetur,
Medium acb .

 Congruat ipsi ab , si po-
rest, alia bd . Quoniam,

ut in 30. propos. idem est excessus compositorum ex

Schol. 23 quadratis ac , bc & ex quadratis ad , bd qui in-
ter rectangula acb , & adb quilibet bis sumitur. Sed

excessus compositorum ex quadratis est Rationale
quia utrumque ponitur rationale. Ergo & excessus
rectangulorum acb & adb est species Rati-
onale. idem vero etiam est non rationale, quia re-

ctangula ponuntur Media, & quae se non excedunt
rationali. Ne ergo absurdum hoc sequatur, verum
erit propositum.

PROPOS: LXXXIV.

Theorema 66.

Si ab , quaecum Rationali Medi-
um to-

tum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur ac Ratio-
nale.

Præstet hoc, quod bc , alia bd . Quoniam ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex quadratis ac , bc , & ex quadratis ad , bd , qui inter rectangula acb & adb quolibet bis sumto, Sed inter bc rectangula, ut in 81. propos. spatium est rationale. Igitur & compositorum ex quadratis excessus est spatium rationale. Sed idem e iam est non rationale, quia utrumque est medium quæ se non excedunt rationali. Ne ergo absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.

PROPOS: LXXXV.

Theorema 67.

Ei ab , quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens & compositum ex ipsarum

rum Quadratis Medium, & quod fih
 ipsis continetur $a c b$ Medium, in
 comensurabileq; compositum ex
 ipsarum Quadratis.



Præstet hoc, si potest,
 quod $b c$, alia $b d$; eadēq;
 adhibeatur constructio, quæ in 82 Quo-

dratis $a c$, $b c$, est Medium; ipsi æquale, $e k$ erit
 Medium, & recta $f h$ rationalis ipsi $e k$ longitudine
 incommensurabilis. Rursus cum $a c b$ rectangu-
 lum sit Medium, & ipsius duplum, id est, $i k$ Me-
 dium; erit & recta $h k$ Rationalis longitudine
 incommensurabilis ipsi $e k$ rationali. Et quoniam
 $i k$ rectangula $a c b$, tanquam duplum, est com-
 mensurabile, quod rectangulum $a c b$ incommensu-
 rabile ponitur composito ex quadratis, $a c$, $b c$,
 id est, ipsi $f h$, erit $i k$ eidem composito $e h$ in-
 commensurabile, & recta $f h$, $h k$, eandem ha-
 bentes rationem, longitudine γ incommensurabi-
 biles. Quæ cum etiam sint Rationales. Erunt
 ergo rationales potentia solum commensurabiles.
 Quare cum ex $f h$ rationali auferatur rationali-
 tas $h k$, dabitur $e k$ apotome, & ipsi congruens $h k$.
 Nec aliter ostendimus, $e k$ esse apotomen, &
 ipsi

22. X.

14. X.
 10. X.

24. X.

ipſi congruentem h k. Unde ſeriet, ut Apotome u-
na non una tantum congrueret. Quod ab-
ſurdum.

180. X

Definitiones

Tertix.

Expoſita Rationali & Apotoma;
ſi tota plura poſſit quàm congruens, qua-
drato recte linea ſibi longitudine com-
menſurabilis.

1. Si quidem tota expoſitæ Ratio-
nali ſit longitudine commenſurabi-
lis; vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expoſitæ
Rationali ſit longitudine commen-
ſurabilis; vocetur Apotome Se-
cunda.

3. Quod ſi neque tota, neque con-
gruens expoſitæ Rationali ſit lon-
gitudinis commenſurabilis; vocetur
Apotome tertia.

Rursus si tota plura possit, quam congruens, quadrata recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quarta.

5. Si verò congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota, neque congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema 19.

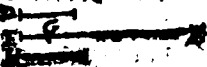
Invenire primam Apotomen.

2. Schol.

29. X.

q. cor. 6. X.

A.....C.....



a Invenit duobus nu-

meris quadratis a b, b c

quorū excessus a c sit non

quadratus, assumatq, Ra-

tionali d, e ipsi longitu-

dine commensurabili e f sit, ut ab sit, ut ab ad ac

q. ita quadratum e f ad quadratum g f non fecit ut

q. 49. X. Erit e g Apotome. Quoniam quadrata e f,

g f sunt

e, f sunt, ut numeri a, b, a, c , & erunt potentia sub-
 tem commensurabiles recte e, f, g, f . Sed e, g est
 rationalis, quia posita est rationalis longitudine est
 commensurabilis. Ergo e, g est rationalis. Cum
 vero a, b & a, c proportio non sit numerorum qua-
 dratorum, & erunt e, f, g, f longitudine incommensura-
 biles. & sic e, f, g, f recta potentia tantum commen-
 surabiles: Reliqua igitur Apotome, & quidem
 prima. Posita enim e, f plus quam g, f quadra-
 ta recta a, h : Quia est, ut numerum a, b ad numerum
 c ita quadratum e, f ad quadratum g, f ; erit &
 multiplicando, ut a, b ad c, b ita quadratum e, f , ad
 quadratum a, h . Sed a, b, c, b habent rationem
 quadratorum. Ergo & quadrata e, f & a, h , & sic
 g, f & a, h sunt longitudine commensurabiles. Quoniam
 igitur tota e, f plus potest, quam congruens
 g, f , quadrato recta a, h sibi commensurabilis longi-
 tudine erit e, g per definit. Apotome prima.

PROPOS: LXXXVIII

Problema 20.

Invenire Secundam Apotomen.

Fieri omnia ut in 50. propos. Erit e, g Apotome
 secunda. Quoniam enim quadrata g, f, e, f pro-
 portionem habentia numerorum a, c, a, b commensurabilia sunt, & erunt recta g, f, e, f commensura-
 biles.

- X. d.** *Nulla saltem potentia. Sed g f est rationalis, quia posita rationali & commensurabili longitudine, erit ergo et etiam Rationalis. Et quia a c, et h sic quadrata g f, p f proportionem non habent quam numeri quadrati: Perunt recte g f, et longitudine incommensurabiles Et sic rationem potentia solidi commensurabiles. Et itaque, e g reliquum est Apotome: et quidem Secunda.*
- p. 9. 7. X. e.** *Posit enim et p h ynam g h quadrato h: erit ut illi antecedenti h ipsi e f longitudine commensurabiles. Quare utrum deinde p h possit, quam congruent g f, quadrato recte h ipsi longitudine commensurabiles, erit e g Apotome Secunda.*
- v. 47. X.**

PROPOSITIO LXXXIX.

Problemata 21.

Invenire Tertiam Apotomen.

- IIIVXXX** *Flant omnia, ut in vi. Erat*
- A.....C.....** *e g Apotoma. Quoniam enim*
- I.....** *quadrato e f, g f proportionem*
- D.....** *habentia numerorum a b, a c,*
- E.....F.....** *commensurabilia sunt, erunt e g,*
- F.....G.....** *g f recte commensurabiles saltem potentia: Et quia*
- G.....H.....** *e f rationalis, erit e g rationalis. Quia vero a b*
- H.....I.....** *a c Et sic quadrata e g, g f proportionem non ha-*
- I.....J.....** *bent, quadratorum numerorum, et erunt e f, g f*
- J.....K.....** *longi-*

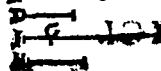
longitudine incommensurabiles & sic rationales
 potantur solent commensurabiles. β . Ideo, $e g$ re-
 liqua Apotome est. & quidem Tertia. Quo-
 niam est, ut i ad ab , ita quadratum d uide f ; & ut β 74. X
 $a b$ ad $a c$ ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$;
 erit ex quo; ut i ad $a c$ ita quadratum d ad qua-
 dratum $g f$. Sed i & $a c$ non habent rationem
 numerorum quadratorum; ergo nec d & $g f$;
 & sic d & $g f$ recte sunt longitudines incommen-
 surabiles. Neutra igitur ipsarum $e f$, $g f$ possit
 rationali d longitudine commensurabilis est. Pos-
 sit eam $e f$ plus quam $g f$ quadrato recta h sibi lon-
 gitudine commensurabilis; erit, ut in 86. h ipso
 $e f$ longitudine incommensurabilis. Quare, cum
 $e f$ plus possit quam $g f$ (neutra earum possit ra-
 tionali existente commensurabili) quadrato recta
 h sibi longitudine commensurabilis; erit $e g$ de
 definitione Apotome tertia.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenire Quantam Apotomen.

A.....F.....B



Fiant omnia, ut in 52. Erat
 ut in 86, $e g$ Apotome; &
 quidē quarta. Posit enim $e f$
 plus quā $g f$ quadrato recta h
 Quia

Quia ergo est, ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$; erit convertendo, ut $a b$ ad $c b$ ita quadratum $e f$ ad quadratum h . Cum itaque $a b, c b$ non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt $e g$ & h recte longitudine incommensurabiles. Quoniam itaque, tota $e f$ posita rationali existens commensurabilis longitudine, plus potest quam $g f$ quadrato recte h sit longitudine commensurabili, erit $e g$ ex definit. Apotome Quarta.

PROPOS: XC.

Problema 21.

Invenire Apotomen Quintam.

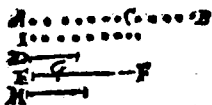
Fiant omnia ut in 33. Erit, ut in 37. $e f$ Apotome; & quidem Quinta. Possit $e f$ plus quam $g f$ quadrato recte h . Et quia similiter ut in 26. ostendimus per conversionem rationis esse, ut $a b$ ad $c b$; ita quadratum $e f$ ad quadratum h ; erunt rursus, ex 39. recta $e f$ & h incommensurabiles longitudine. Restat congruens $g f$ rationali posita ad longitudinem commensurabili. Ergo ex definitur $e g$ Apotome Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 24.

Inve,

Invenire Apotomen Sextam.



Fiant omnia ut in 87.

Erunt, ut in 88. d & e f

longitudine commensura-

biles & e g Apotome. eaq;

Sexta. Nam d & g f sunt

longitudine incommensurabiles, adeoq; neutra

ipsarum e f, f g commensurabilis exposita ratio-

nali d. Possit e f plusquam g f quadrato rectis

h, quæ ut in 89, ipsi e f longitudine incommensu-

rabilis est. Est ergo e f ex definitione Apotome

Sexta.

Scholium.

Theon invenit Apotomas prom-

ptius, subductis binomiorum nomi-

nibus minoribus ex majoribus; atq;

ita apotomarum ordo responderet or-

dini binomiorum.

PROPOS: XCII

Theorema 88.

Si spacium *a c* contineatur sub Ra-

tionali *a b* & Apotoma prima *a d*,

recta linea *a o* spacium potens, Apo-

toma est.

• Ipsi *a d* congruas *d e*, & erunt ex definitione

apoto-

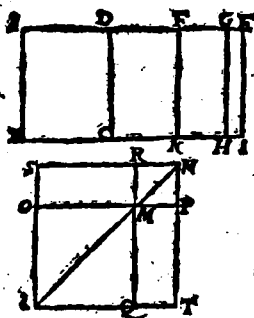
g, e , quadrato e f est aequale; $erunt a g, f, e, g$ 17. I.
 recte proportionales, adeoque, si medium proportio- 1. VI.
 nale inter a, h, g, i , id est, inter st, r p quadrata:
 ed s, p inter eadem quadrata est & Medium pro- lem. 4. X.
 portionale. Sunt itaq, rectangulu s, p & si aequa-
 a: Sed ipsi si aequale est f, e , & ipsi s, p aequale r, t :
 itaq, totum dignomoni o, n, q . cum quadratu r, p
 est aequale. Est a . totu ai = aequale quadratis st, r, p . ex conse.
 itaq, reliquu a, c quadratis o, q aequale est, & o, m
 uest spaciū a, c . Dico esse Apotomen. Quia
 nim a, h, g, i sunt spacia rationalia, ut patet;
 osis equalia quadrata st, r, p rationalia, & re-
 te o, p, m, p , Rationales erunt. Cumq, si sit
 medium, & ei aequale s, p erit Medium; adeoque, 10. X.
 incommensurabilia sunt s, p, r, p ; & eundem cum 74. X.
 osis rationis recte o, p, m, p incommensurabiles;
 & reliqua o, m Apotome.

PROPOS: XCIII.

Theorema 69.

Si spaciū a, c contineatur sub
 rationali a, b & Apotoma secun-
 da a, d ; Recta linea o, m spaciū
 otens, Medix est apotome pri-
 mae.

Ipsa



Ipsi ad con-
de, quibus comi-
unt, qua habet
nitio apotome sca-
da. Secta d e
fariam in f reliqua
omnia construat,
ut in 72. Erunt
fms a g, g c longi-
dine p commensurabi-
tum inter se, tum ip-
si

a c. Sed a c posita rationali a b longitudine est in-

commensurabilis; ergo & a g, g c, quarum

rationali a c commensurabiles sunt; & ipsi a b p-

terentia tantum commensurabiles sunt. Rectangula

itaq, a h, g i sunt media. Rursus cum d e, a b

sint Rationales longitudines commensurabiles p-

ter d f, f c longitudinibus inter se, tum ipsi d e

commensurabiles; utunt f c, si rectangula sub ra-

tionalibus longitudine commensurabilibus consti-

tant rationalia. Item vero, ut in precedentibus, asser-

deretur om posse spatium a c. Erit autem om Ma-

gnit Apotome prima. Quoniam a g, g c commensur-

abiles sunt longitudine, utunt & a h, g i, sicut

st, r p commensurabilia. Ergo & op, m p sunt

commensurabilia potentia tantum: & quidem

Media, quod quadrata st, r p, equalia Medis

a h, g i Media sunt. Cumq, si, & ipsi aequales

in 18. X.
p 16. X.

in 14. X.

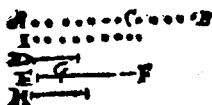
in 6. defn.

in 12. X.

Ex hypot.

in 10. X.

Invenire Apotomen Sextam.



*Fiant omnia ut in §. 4.
Erant, ut in §. 3. d & e f
longitudine commensura-
biles & e g Apotome. eaq;
Sexta. Nam d & g f sunt*

*longitudine incommensurabiles, adeoq; neutra
ipsarum e f, f g commensurabilis exposita ratio-
nali d. Possit e f pluriquam g f quadrato recte
h, quæ ut in §. 9, ipsi e f longitudine incommensa-
rabilis est. Est ergo e f ex definitione Apotome
Sexta.*

Scholium.

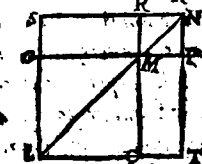
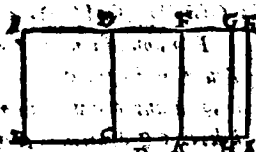
Theon invenit Apotomas prom-
tius, subductis binomiorum nomi-
nibus minoribus ex maioribus; atq;
ita apotomarum ordo responderet or-
dini binomiorum.

PROPOS: XCII

Theorema 68.

Si spacium a c contineatur sub Ra-
tionali a b & Apotoma prima a d,
recta linea a o spacium potens, Apo-
toma est.

*Ipsi a d congruat d e, & erunt ex definitione
apotome*



apotome primæ, de potentia tantum commensurabiles, & æpositæ rationali longitudine commensurabilis. Secta de bisariem in f; quadrata se ad a c, applicetur æquale rectangulum a g c. Et quia æ plus potest, quàm de

21. Lemma
17. X.

18. X.

16. X.

12. X.
6. def.

10. X.

14. X.

22. X.

14. II.

16. VI.

quadrato recte sibi longitudine commensurabilis, perunt a g, g c recte longitudine commensurabiles, & sic utraq, totia c longitudine commensurabilis. Sed a c rationali a b longitudine est commensurabilis. Ergo & utraq, a g, g c, rationalis commensurabilis est longitudine, & rationalis. Quare ductis g b, & ipsa b parallelis, & erunt a h, g i rectangula rationis. Rursus quia utraq, d f, f c longitudine commensurabilis est ipsi d c; d c verò longitudine incommensurabilis rationali a b; erit utraq, ipsarum d f, f c ipsi a b longitudine incommensurabilis. Itaq, rectangulum f c sive f i sub Rationalib, potentia commensurabilibus contentum erit Medium. Iam fiant ipsis a h, g i quadrata s t, r p æqualia ad communem angulum n juncta, & erunt quadrata s t, r p circa eandem diametrum l n. Quoniam itaq, rectangulum

agc , quadrato c f est aequale; $\therefore$ erunt ag, fe, gc 17. IE
 recte proportionales, adeoque, fi medium proportio- 1. VI.
 nale inter ah, gi , id est, inter st, rp quadrata:
 Sed sp inter eadem quadrata est t Medium pro- lem. 4. X.
 portionale. Sunt itaq, rectangulū sp & fi aequa-
 lia: Sed ipsi fi aequale est fc , & ipsi sp aequale rt :
 Itaq, totum $dignomoni$ onq . cum quadratis rp
 est aequale. Est. a. totū ai = aequale quadratis st, rp . ex const.
 Itaq, reliquū ac quadratis oq aequale est, & om
 potest spacium ac . Disce esse Apotomen. Quia
 enim ah, gi sunt spacia rationalia, ut patet;
 ipsis equalia quadrata st, rp rationalia, & re-
 ctē op, mp , Rationales erunt. Cumq, fi sit
 medium, & ei aequale sp erit Medium; adeoque, 10. X.
 incommensurabilia sunt sp, rp ; & eadem cum 74. X.
 ipsis rationali recta op, mp incommensurabiles;
 & reliqua om Apotome.

PROPOS: XCIII

Theorema 69.

Si spacium ac contineatur sub
 Rationali ab & Apotoma secun-
 da ad ; Recta linea om spacium
 potens, Medix est apotome pri-
 ma.

Si spacium $a c$ contineatur sub
 rationali $a b$ & Apotome quinta ad
 hanc linea $o m$ spacium potens est, quod
 cum Rationali Medium totum efficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus conveniant pro
 prietates Apotome quinta. Scilicet $a d$ e bisarium, su
 aut omnia ut in 92.; Eruntque ut in 91. 22. 28.
 longitudine incommensurabiles, & $a i$ in 93.
 Medium; di vero Rationale ipsiusque dimidium li
 rationale. Erunt & $a h$, $g i$ ut in 93. incommen
 surabiles, poteritque $o m$ ut in 92. spacium $a c$, quod
 $o m$ dicitur cum rationali Medium totum efficiat.
 Quoniam enim $a i$ est Medium, erit compositum a
 quadratis $s t$, & p Medium: Cumque, si sit rationale
 etiam $s p$, sub $o p$, in p rationale erit. Sunt au
 tem $o p$, in p potentia incommensurabiles, ut
 94. patet. Itaque cum $o p$, in p sit potentia in
 commensurabiles, & compositum ex ipsarum qua
 dratis Medium, rectangulum vero sub ipsis Ra
 tionale; reliqua $o m$ erit, quae cum rationali Me
 dium totum efficit.

PROPOS. XCVII.

Theorema 73.

Si spacium $a c$ contineatur sub Ra
 tionali

ionali $a b$ & Apotoma sexta $a d$, Re-
ta linea $a m$ spacium potens est, quæ
cum Medio Medium totum efficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus convenient pro-
prietates Apotome sexta. Secta $d e$ bisariam,
sunt reliqua, ut in 92; eruntq; ut in 95, 28, 80
longitudine incommensurabiles, & $a i$, di ut in
94, Media, huiusq; dimidium si Medium. Erunt
etiam $a h$, $g i$, ut in 95, incommensurabilia, po-
teritq; $o m$, ut in 92, spacium $a c$. Quæ omni-
bus cum Medio Medium totum efficiens.
Quoniam enim $a i$ est Medium, erit & compositum
ex quadratis rectarum $o m$, $m p$ Medium. Et
cum si sit Medium, erit & $s p$ sub $o p$, $m p$ con-
tentum Medium. Cumq; si ipsi $a i$ sit incommen-
surabile, etiam $s p$ incommensurabile erit co-
positum ex quadratis $s t$, $r p$. Deniq; $o p$, $m p$
sunt incommensurabiles potentia, ut in 95. Quare
cum $o p$, $m p$ sint potentia incommensurabiles, &
compositum ex ipsarum quadratis Medium, re-
ctangulumq; sub ipsis Medium, & compositum ex
ipsarum quadratis incommensurabile: reliqua
 $o m$ erit ea, quæ cum Medio, Medium totum
efficit.

PROPOS: XCIX.

Theorema 74.

Dd 3

Qua-

¶ *Media* ostenderetur autem, ut in 92, rectam
 posse *spacium* a c; quam dicemus *Media* Apotome
 Secundam. Quoniam enim a h, i g sunt
 Media, quadrata etiam s t, r p ipsis equalia erunt
 Media, & ipsa q, latera o p, m p Media. Sed a g
 g e sunt ostensa commensurabiles: Ergo & a h,
 g i, vel s t, r p commensurabilia sunt, ipsa q, o p,
 m p potentia tantum commensurabiles. Et
 quia ipsi a c ostensa est g e commensurabilis longi-
 tudine & f e ipsi d e, erunt, g e, f e longitudine
 incommensurabiles, & sic ejusdem rationis g h
 f h, id est, r p, o p incommensurabiles, ipsa q, o p,
 m p incommensurabiles longitudine. Cum
 etiam sint Media & commensurabiles, erunt
 o p, m p Mediae potentia tantum commensurabi-
 les, & quia continet s p Medium, erit o m
 Media Apotome Secunda.

PROPOS. XCV.

Theorema 71.

Si *spacium* a c continetur sub Ra-
 tionali a b, & Apotome a d quarta, re-
 cta linea o m *spacium* potens, Minor
 est.

¶ ipsi a d congruat d e, quibus conveniunt pro-
 prietates Apotome quarta. Sed a d e bisariam
 fiant

ant omnia ut in 92; eruntq; ag, ge longitudine
incommensurabiles, cum $a e$ plus possit quam $d e$
quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis.
Et quia $a e$ est rationalis, rationalis $a b$ longitudi-
ne commensurabilis, & erit $a i$ rationale. Re- 20. X.
Et angulum vero $d i p$ medium (quia $d e$ rationalis 22. X.
est) ab longitudine $a b$ incommensurabilis est ipsiusq;
dimidium $f i$ Medium. Incommensurabilia autem
semper erunt $a h, g i$, cum ag, ge ostensa sint in-
incommensurabiles. Iam ostendatur ut in 92.
rectam $o m$ impossibilem $a e$, quam & Minor
rectam dicamus. Quoniam enim $a i$ rectangulum
ob rationale rectam compositum ex quadrato $s t$,
& ipsi y aequaliter rationale. Et quia $f i$ est
Medium, ut patet, erit & $s p$, sub quadrato y ex con-
gruis lateribus $o p, m p$ comprehensum Medium.
Cumq; $a h, g i$ sint incommensurabilia ostensa,
ipsa etiam aequalia quadrato $s t$, & p incommen-
surabiles erunt & recte $a o p, m p$ potentia incommen-
surabiles. Proinde quia $o p, m p$ sunt po-
tentia incommensurabiles, & compositum ex qua-
drato rationale & rectangulumq; sub ipsis Medi- 77. X.
um, & erit reliqua $o m$ Minor.

PROPOS. XCVI.

Theorema 78.

Dd 2

Si spaciū $a c$ contineatur sub Ra-
tionali $a b$ & Apotome quinta $a d$, Re-
cta linea $o m$ spaciū potens est, quā
cum Rationali Medium totum ef-
ficat.

Ipsi $a d$ congruas $d e$, quibus conveniunt pro-
prietates Apotome quinta Secta $d e$ bisariam, su-
ant omnia ut in 92.; Eruntq; ut in 95. $a g$, $g e$
longitudine incommensurabiles. Et ai ut in 93.
Medium; di vero Rationale ipsutq; dimidium li-
gationale. Erunt & $a h$, $g i$ ut in 95. incommen-
surabiles, poteritq; $o m$ ut in 92. spaciū $a c$, quā
 $o m$ dicitur cum rationali Medium totum efficiat.
Quoniam enim $a i$ est Medium, erit compositum ex
quadratis $s t$, $r p$ Medium: Cumq; $f i$ sit rationale,
etiam $s p$, sub $o p$, $m p$ rationale erit. Sunt au-
tem $o p$, $m p$ potentia incommensurabiles, ut in
94. patet. Itaq; cum $o p$, $m p$ sunt potentia in-
commensurabiles, & compositum ex ipsarum qua-
dratis Medium, rectangulum vero sub ipsis Rati-
onale; reliqua $o m$ erit, quā cum rationali Me-
dium totum efficit.

PROPOS. XCVII.

Theorema 73.

Si spaciū $a c$ contineatur sub Ra-
tionali

rationali $a b$ & Apotoma sexta $a d$; Re-
cta linea $a m$ spacium potens est, quæ
cum Medio Medium totum efficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus convenient pro-
prietates Apotoma sexta. Secto $d e$ bisariam,
fiant reliqua, ut in 92; eruntq; ut in 95, $a g$, $g e$
longitudine incommensurabiles, & $a i$, diut in
94, Media, huiusq; dimidium $f i$ Medium. Erunt
etiam $a h$, $g i$, ut in 95, incommensurabilia, po-
teritq; $o m$, ut in 92, spacium $a c$. Quæ $o m$ di-
cetur cum Medio Medium totum efficiens.
Quoniam enim $a i$ est Medium, erit & compositum
ex quadratis rectarum $o m$, $m p$ Medium. Et
cum $f i$ sit Medium, erit & $s p$ sub $o p$, $m p$ con-
tentum Medium. Cumq; $f i$ ipsi $a i$ sit incom-
mensurable, etiam $s p$ incommensurable erit co-
positio ex quadratis $s t$, $r p$. Deniq; $o p$, $m p$
sunt incommensurabiles potentia, ut in 95. Quare
cum $o p$, $m p$ sint potentia incommensurabiles, &
compositum ex ipsarum quadratis Medium, re-
ctangulumq; sub ipsis Medium, & compositio ex
ipsarum quadratis incommensurable: reliqua
 $o m$ erit ea, quæ cum Medio Medium totum
efficit.

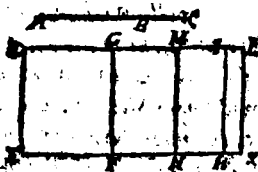
PROPOS. XCIX.

Theorema 74.

Dd 3

Qua-

Quadratum Apotome ab ad rati-
onalem de applicatum df latitudi-
 dg facit Apotomen primam.



Apotome ab con-
grua bc , ut ac , bc
sint rationales poten-
tia solent commensu-
rabiles, & ad rati-
onalem de applicetur
 df equale quadrato

ab , cuius latitudo dg erit Apotome prima. Ap-
plicetur enim ad eandem de rectang. dh equale
quadrato ac & ik adih, equale quadrato
 bc , ut totum dk equale sit quadrato, ac , bc .

¶ 7. II.

Quoniam ergo hoc quadratorum compositum
 a equale est rectangulo ac b his sumito, cum
quadrato ab ; addito hoc quadrato df ; erit il-
liquum gk equale rectangulo ac b his sumis:
ideoq. divisa gl bis axia per m n erit mk rectan-
gulo ac b equale. Cumq. ac , bc sint rationales,
erunt & earum quadrata rationalia, & ex ipso
& compositum, id est, dh rationale, adeoq. & in-
ter se, & huic commensurabilia: d eritq. dl
ipsi de longitudine commensurabilis. Rursus,
quia ac , bc sunt rationales potestis solam
commensurabiles, erunt, & earum rectangulum
 mk & huius duplum gk Medius, & sic latitudo

gl est

g Irrationalis ipsi g t, id est, de longitudine in-
 commensurabilis. Et cum d k sit rationale, g k 23. X.
 Irrationale & Medium, erunt inter se incommensurabilia, & sic d l, g l & incommensurabiles
 vel Rationales potentia tantum commensurabi-
 les, adeoque d g Apotome; & quidem prima.
 Quoniam enim rectangulum a c b, id est, m k 47. X.
 est medium proportionale inter quadrata a c, Lemma
 b c, id est, d h, i k, erunt d h, m k, i k, con- 54. X.
 tinuè proportionalia, & d i, m l, i l recta pro-
 portionales. Itaque d i l rectangulum quadrato
 m l est = equale. Cumq; quadrata a c, b c, id 17. VL
 est, d h, i k sint commensurabilia & erunt d i, i l
 longitudine commensurabiles. Cum ergo d l, g l
 sint inaequales & ad maiorem d l applicatum sit
 d i l rectangulum equale quadrato m l, id est,
 quarta pars g l. Sint verò d i, i l ostensa com-
 mensurabiles & poterit d l plusquam g l quadrato 18. XL
 recta sibi longitudine commensurabilis. Quare
 cum d g sit ostensa apotome, totaq; d l pluspos-
 sit quàm g l congruens quadrato recta sibi lon-
 gitudine commensurabilis, eademq; tota ratio-
 nali d c longitudine commensurabilis sit. Erit ex
 definit. d g Apotome prima.

PROPOS. XCIE.

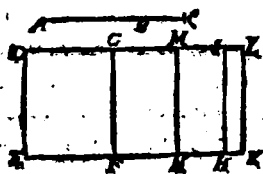
Theor. 75.

Dd

4

Quia

Quadratum Medie Apotomæ primi
 mæ ab ad Rationalem de applicatum
 laritudinem dg facit Apotomen se-
 cundam.



Media Apotome

prime ab congruat
 bc. ut ac, bc sunt
 Media potentia solum
 commensurabiles, con-
 lineariq; Rationale; &

ad de rationalem applicetur de aequale quadrato
 ab; Erit dg apotome. Eadem enim constru-
 ctio, ut in precedenti. Quoniam ac, bc sunt media
 potentia commensurabiles, erunt earum quadra-
 ta, id est, dh, ik Media & commensurabilia,
 utrumq; dk utriq; ipsorum commensurabile &
 medium. Hoc ad de rationale applicatum & facit
 dl rationalem ipsi de longitudine incommensu-
 rabilem. Rursus, quia rectangulum acb. pon-
 tur rationale, erit etiam duplum gk rationale,
 utrumq; latitudo g l rationalis ipsi g f, id est, de lon-
 gitudine de commensurabilis. Sed quia dk est
 Medium, gk verè rationale, dl & gl, sunt in-
 commensurabiles; & quia etiam rationales, sunt
 rationales potentia rationem commensurabiles; ut
 dg & Apotome eaq; Secunda. Ostenditur
 enim, ut in 98, tota dl plus posse quam gl con-
 gruen

e 16. X.

β cor. 34. X.

γ 23. X.

δ 21. X.

ε 19. X.

ζ 74. X.

exuens quadrato recta sibi longitudine commensurabilis; quae gl cum sit longitudine commensurabilis rationali possit de ; ex definitione igitur dg est Apotome Secunda.

PROPOSITIO C.

Theorema 76.

Quadratum Mediae Apotomae secundae, ab ad Rationalem de applicatum df , Latitudinem dg facit Apotomen Tertiam.

Media Apotome secunda ab , congruat bc , ut ac , bc sint Mediae potentia solum commensurabiles, continentes Medium: Et ad de rationalem applicetur df equale quadrato ab : Erit dg apotome. Iisdem enim, quae prius constructis, ut in 99, dk est Medium, & dl rationalis longitudine $a + 23$. X. incommensurabilis ipsi de . Et cum acb rectangulum sit Medium, atque ipsius duplum gk , & latitudo gl longitudine incommensurabilis rationali de . Sed quia ac , cb sunt longitudine incommensurabiles; & est, sicut ac ad bc , ita quadratum ac ad rectangulum acb ; erunt & haec inter se incommensurabilia. Et quia quadrato $ex ac$ compositum ex quadratis ac , bc est d commensurabile, rectangulo vero acb suum duplum; erunt compositum ex quadratis, id est, dk & 14 . X. 33. Lemma
19. X.
10. X.
16. X.

rectangulum bu , id est, gk incommensurabile; recta q , dl , gl longitudines incommensurabiles. Quae cum etiam sint rationales; Erunt rationales potentia tantum commensurabiles & q & gl Apotome, eaq; Terria. Ostenditur enim ut in 98, dl totam plus posse applicatam gl quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Sed cum neutra illarum dl , gl sit longitudine commensurabilis positae rationali de , erit ex definit. Apotome Terria.

§ 74. X.

PROPOSITIO CX.

Theorema 77.

Quadratum Minoris ab ad Rationalem de applicatum df , Latitudinem d g facit Apotomen Quarti

Minori ab congruat bc , ut a c , b c potentia incommensurabiles sint, facientes ex his quadratum compositum rationale; sed rectangulum ac b Medium, & ad de rationalem applicetur df , ut ante, eritq; fg Apotome. Iisdem enim ut prius constructis in 100; Quoniam d h aequale compositum quadratorum ac , b c est rationale; erit d l rationalis rationali de longitudine commensurabilis; ac b autem medium, erit & ejus duplum; id est, gk medium, & gl rationalis. ipsi de longitudine incommensurabiles. Rursus, quia d h rationale, gk medium, erunt incommensurabiles; ipseq; dl , gl longitudine incommensurabiles; atq; ita Ra-

tione

§ 75. X.

§ 76. X.

aduales potentia tantum commensurabiles, & d g
 d Apotome, eaq; Quarta. Quoniam enim a c
 b c potentia sunt incommensurabiles, earum qua-
 dras a d h, & incommensurabilia & d l, il lon-
 gitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq; d l
 rectangulum aequale sit quadrato l, ut ex 98
 patet, poterit d l plus quam g l quadrato recta si-
 bi longitudine incommensurabilis. Itaq; cum tota
 d l posita rationali de longitudine commensurabi-
 lis, plus possit, quam congruat g l quadrato recta
 sibi longitudine incommensurabilis: erit d g ap-
 otome ex definitione, Apotome Quarta.

PROPOS. CII.

THEOREMA 78.

Quadratum cuius a b, quæ cum
 Rationali Medium totum efficiat,
 ad Rationalem ut applicatum d f,
 Latitudinem d g, facit Apotomen
 Quintam.

Recte cum Rationali Medium totum efficiat
 a b congruas b c, ut a c, b c sint potentia incommensurabiles; facientes compositum ex ipsarum
 quadratis Medium, rectangulum vero rationale
 & ad d c rationalem applicetur d f ut antea. Erit
 d g apotome. Quoniam enim ex quadratis re-
 ctarum a c, b c compositum, id est, d k est Medium, a 23. X.
 erit d l rationalis posita longitudine incommensurabilis: Rectangulum autem a c b,

quod

- p 21. X. *ejusq; duplum g k rationale, & erit g l posita longi-
tudine commensurabilis. Cum itaq; d k sit Medi-
um, & g k rationale, incommensurabilia sunt b
 y 10. X. *d l, g l longitudine, incommensurabiles, adeq;
 d 74. X. *Rationales potentia tantum commensurabiles, &
 d g d Apotome eaq; quinta. Ostenditur
nim, ut in 101, d l plus posse quam g l congruus,
qua posita rationali longitudine commensurabilis
est, quadrato recte sibi longitudine incommensura-
bilis. Erit ergo ex definitione d g Apotome
quinta.***

PROPOS. CIII.

Theorema 29.

Quadratum ejus *ab*, quæ cum
 Medio Medium totum efficit, ad
 Rationalem *de* applicatum *df*, La-
 titudinem *dg*, facit Apotomen Se-
 xtam.

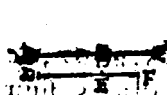
Recta cum Medio medium totum faciente *ab*
 congruat *bc*, ut *ac*, *bc* potentia sunt incommen-
 surabiles, facientes compositum ex suis qua-
 dratis & rectangulum medium, & ad rationalem
d e applicentur ut antea. Erit *dg* apotome. Quon-
 iam enim tam compositum ex quadratis *ac*, *bc*,
 id est *dk*, quam rectangulum *ac b* ipsiusq; du-
 plum *g k* sunt Media; erunt *d l* & *g l* rationa-

et longitudine incommensurabiles posita rationali-
 te. Cumq; acb rectangulum composito qua-
 dratorum sit incommensurabile, erunt gk, dl
 incommensurabilia, & g l, dl longitudine in- p 10. X.
 commensurabiles, adeoq; rationales potentia so-
 lunt commensurabiles, & dg & Apotome eacy 7 74. X.
 Sexta. Ostenditur enim, ut in 101, dl plus posse
 quam congruens gl quadrato recta sibi longitudi-
 ne incommensurabilis: & quia neutra illarum po-
 sita rationali de longitudine commensurabilis esse
 erit ex definitione dg Apotome Sexta.

PROPOS. CIV.

Theorema 30.

Recta linea de Apotomaz ab Lon-
 gitudine commensurabilis, & ipsa
 de Apotome est, atque ordine ea-
 dem.



Apotomaz ab congruens sit
 be, ut a f, h c sunt rationa-
 les potentia incommensurabiles,
 sitq; de commensurabilis p f, a b. Est de apotome
 ordine eadem cum a b. • Fiat, ut a b ad de, sic
 de ad e f. • Ergo etiam est ut a c ad d f, ita b c a. 12. R.
 ad e f. Quoniam igitur a b, d e sunt longitudi- p 12. V.
 ne commensurabiles, & e. ut & b c, e f, & a c, 7 10. X.
 d f lon-

d. f. longitudine commensurabiles. Et cum q. d. b. fuerit rationalis, & etiam d. f. & f. ipsis commensurabilis rationalis erunt. Quorsum, quia est, ut a c. ad b. c. ita b. c. ad c. f. & permutando, ut a. c. ad b. c. d. f. ad c. f. erunt b. c. ut illa potentia tantum commensurabiles. Et quia etiam sunt rationales: Est

74. X. reliqua d. e. Apotome: & quidem ordine eodem cum ab. Si enim posset a. c. plus quam b. c. quadrato recta sibi longitudine commensurabilis: aut d. f. quam e. f. Si aut a. c. tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis, & erit & d. f. & sic Apotome prima; Si vero congruus b. c. a. iam e. f.; & sic Secunda: Si neutra, etiam neutra, & sic Tertia. Sed si a. c. plus posset, quam b. c. quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis: Ergo etiam d. f. quam e. f.; siq. a. c. tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis: erit & d. f. & sic d. e. eodem modo Apotome quarta: Si vero congruus b. c. a. iam d. f. & sic Apotome quinta, sexta & ostenditur prout ab

Scholium.

Endom observationes, ad 67, de potentia commensurabilibus suis addita, possunt huc quoque transferri.

PROPOS: CV.

Theorema 8.

Recta

Rectilinea de Mediarum Apotome
commensurabilis, & ipsa de Me-
Apotome est; atque ordinis ca-
m.


 Mediarum apotome a b con-
 gruat b c, ut a c, b c, sine
 Media potentia tantum com-
 mensurabiles: & ipsi a b sic de commensurabili-
 tudine vel potentia tantum: Facit h-
 que in precedenti, utrum b c, e f: & a c, 75. X.
 eodem modo vel longitudine vel potentia com-
 mensurabiles prout a b, de fuerint. Cumq; a c,
 sine Media, etiam d f, e f ipsi commensurabi-
 les Media erunt. Rursum cum sit, ut a c ad d f,
 b c ad e f: & permutando, ut a c ad b c ita
 d f, erunt h e, ut illa, potentia tantum com-
 mensurabiles: & quia etiam Media, verit d e re- 75 vel
 Media apotome, & quidem ordine eadem 76. X.
 a b. Quoniam est, ut a c ad c b; ita d f ad
 e f: & ut a c ad c b, ita quadratum a c ad re- 73. Lemma,
 g. a c b: ita ergo etiam erit quadratum 19. X.
 ad rectang. d f e; & permutando, ut quadra-
 tum a c ad quadratum d f, ita rectangulum a c b
 est ang. d f e; & hac, ut illa, commensurabi-
 les. Si itaq; rectangulum a c b fuerit rationale,
 & d f e; & d e Mediarum Apotome pri- 75. X.
 : Sed si Medium Medium & d e Mediarum 76. X.
 Apotome secunda.

Theorema 2.

Recta linea de Minori ab commensurabilis, & ipsa de Minor est.

Minori ab congruat bc , ut ac , bc sunt
 recte incommensurabiles facientesque sunt quadra-
 tis compositum rationale, rectangulum vero Mediū;
 sed ipsi a b sit de commensurabilis sive longitudine,
 sive potentia tantum. Factis quidem, quae in priori-
 bus, erant df , et ipsis ac , bc eodem modo ut
 105. commensurabiles. Cumque sit, ut a c ad d f ,
 ita b c ad e f ; & permutando, ut a c ad b c , ita
 ut f ad e f ; Ergo, ut quadratum ac , ad quadratum
 bc , ita quadratum d f ad quadratum e f ;
 & componendo; ut compositum ex quadratis ac ,
 bc , ad quadratum bc , ita compositum quadra-
 torum d f , et f ad quadratum e f ; & permutan-
 do, ut compositum ex quadratis ac , bc , ad com-
 positum ex quadratis d f , et f ; ita quadratum
 bc ad quadratum e f ; Ergo ut hoc sibi, ita illi
 sibi incommensurabilia erant. Sed compositum ex
 quadratis ac , bc est rationale: Ergo & ex d f ,
 et f compositum. Rursus, quia, ut in 105. ac bc
 de sunt commensurabilia, hoc, ut illud, & ut
 Medium. Denique, cum sit, ut a c ad b c , ita df
 ad e f ; sed ac , bc sunt potentie incommensurabi-
 les; erunt & df , et f : Quotum faciat ex his
 quadri-

Quadratum compositum rationale; rectangulum vero sub ipsisdem d f, e f Medium, d erit d e Minor.

PROPOS. CVIL.

Theorema 33.

Recta linea d e communisurabilis est a b, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa d e cum Rationali Medium totum efficiens est.

Recta a b cum rationali Mediu totum efficiens, congruat b c aut a c, b potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quadratorum Mediũ, rectangulum vero rationale; fitq; d e ipsa a b quocumq; modo commensurabilis. Factis ipsisdem, quæ in prioribus ostenditur, ut in 106, compositum ex quadratis a c, b c, composito quadratorum d f, e f communisurabile esse. Cumque illud generat Medium, erit et hoc Medium. Rursus ostenditur etiam rectangulum a c b communisurabile esse rectangulo d d e, & hoc, ut illud rationale, ex 105. Sunt deniq; d f, e f eodem modo, ut in 106, potentia incommensurabiles; quæ cum ex suis quadratis compositum efficiant Medium, rectangulum vero sub ipsis rationale; erit d e quæ cum Medio rationale efficit.

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 34.

Et

Recta

2. 11. 2. Recta linea d e commensurabi-
li e i a b, quæ cum Medio Medium
totum efficit; & ipsa d æcum Medio
Medium totum efficiens est.

Recta a b cum Medio Medium totum efficiens
composita ut b c, ut a c, b c potentia sine commensu-
rabiles, facientes compositum quadratorum Me-
dium & rectangulum Medium incommensurabile
compositum quadratorum. Factis ipsis, ut antea,
aliquibus, ut in 10, compositum ex quadratis
 a c, b c compositum quadratorum d f, & commensu-
rabile esse, quoniam illud, cum sit Medium totum
hoc est Medium. Rursus, ut in 10, rectangulum
 d f, b c rectangulo d f e commensurabile. Et hoc, ut
illud, Medium ostenditur. Summa nam d f, e f, ut
in 10, potentia incommensurabiles. Denique, ut
in 14. X. compositum ex quadratis a c, b c incommensurabile, est rectangulo a c b, ut hypotenuse
compositum ex quadratis d f, e f rectangulo
 d f e. Ergo est d e, quæ cum Medio Medium
totum efficit. 10. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

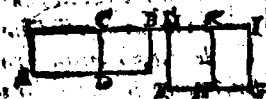
14. X.

79. X.

PROPOSITIO CX.

Theorema 85.

2. 12. 2. Medio a b a Rationali a b de-
cto; Recta linea, quæ reliquum spa-
cium a c potest, una ex duobus Irratio-
nalibus sit, vel Apotome vel Minor



Ad Rationalem e

applicetur rectangula

eh, kg equalia recta-

nulis ac, db ut totum

fi sit aequale toti ra-

tionali a b; a eritq; e rationalis rationalis e f lon-

gitudine commensurabilis; & quia kg Medio db

est aequale; erit ki rationalis longitudine c com-

mensurabilis rationali e f. Itaq; ei, ki sunt

longitudines incommensurabiles; & sic rationales

potentia tantum incommensurabiles; ipsaq; e k a-

potome, & congruens ki. Si jam e i plus potest

quam ki quadrato recte a sibi longitudine commen-

surabilis; erit e k Apotome prima, atq; sic recta po-

tens spatium f k contentum sub rationali e f & a-

potome prima, ill est, a c est, Apotome. Si vero

plus potest quadrato recte incommensurabilis; cum

totae i positae e f longitudine sit commensurabilis;

erit e k Apotome quarta; & recta potens spa-

cium e k sub rationali e f & apotome quarta e k

erit q Minor.

PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

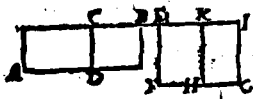
Rationali db a Medio a b detra-

cto; alae duae Irrationales sunt, vel

Mediae Apotome prima, vel cum ra-

tionali Medium totum efficiens.

Ec a Con.



Constructio q̄sta,
ut in precedenti; quia
si in medio ad est aequale
erit ei latitudo

23. X.
41. X.

74. X.

93. X.

96. X.

rationali rationali e f longitudine incommensurabili; k i verò p̄commensurabili, quia h i rationali d b est aequale. Itaq; e i, k i rationales, potestia tantū commensurabiles & reliqua e k, apotome, eiq; congruens k i. Si e i plus possit quā k i quadrato recte sibi longitudine commensurabili; & congruens k i commensurabili longitudine rationali e f, erit e k apotome secunda; quare recta potens spaciū e k contentum sub rationali e f, & apotome secunda; d erit Mediæ Apotome prima. Si verò plus quadrato recte longitudine incommensurabili, erit e k apotome quinta; & recta potens hoc spaciū f k contentum sub rationali & apotome quinta, erit cum rationali Medium totum efficiens.

PROPOSITIO CXI.

Theorema 87.

Medio d b à Medio a b detractō,
quod d b sit cōmensurabile ab totū, b
reliq̄æ duæ Irrationales fiunt, vel
Mediæ Apotome secunda; vel cum
Medio Medium totum efficiens.

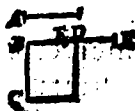
Constru.

Constructio quædam, ut antea; = erunt $e l, k i$ rationales rationali $e f$ longitudine incommensurabiles. Sed cum $f i, h i$ ipsæ $a b, d b$ equalia ponantur incommensurabilia, erunt $e i, k i$ longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantum commensurabiles; & reliquæ $e k$ apotome. Si ergo $e i$, plus possit quam $k i$ quadrato rectæ $f i$ longitudine commensurabilis, & $a i$ $a q, e i, k i$ rationali $e f$ sit incommensurabilis, ut patet, erit $e k$ apotome sortia & recta potens spaciū $f k$ contentum sub rationali $e f$ & apotoma quarta $e k$, & erit Media Apotome Secunda: Si verò plus potest quadrata rectæ longitudine incommensurabilis, erit $e k$ apotome Sexta; & recta potens spaciū $f k$ contentum sub rationali & apotoma Sexta, & erit ea quæ cum Medio Medium totum efficit.

PROPOSITIO CXII.

Theorema 33.

Apotome a non est eadem, quæ ex binis nominibus.



Rationali $b c$ posita applicetur rectangulum $c d$ equalis quadrata a . Quoniam ergo a est apotome, = erit $b d$ apotome prima; cui congruat $d c$. Erunt $B a$ & $b c, d a$

b e, d e ex definitione apotome primæ. rationū
 potentia tantū commensurabilis, quarum pri-
 posita commensurabilis longitudine, plus potest
 quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.
 Rursus, quia & a ponitur esse ex binis nomi-
 bus, eadem latitudo b d perit ex binis nominibus
 prima. Sit autem majus nomen b f. Ergo ex de-
 finitione binomij primæ. b f, f d sunt rationales po-
 tentia solum commensurabiles, quarum pri-
 posita existens longitudine commensurabilis, plus po-
 test quàm f d quadrato rectæ sibi longitudine com-
 mensurabilis. Itaq, tum tam b e, quàm b f lon-
 gitudine sunt commensurabiles eidem b c, et una
 quoq, b e, b f inter se commensurabiles longitudi-
 no: Ergo & eadem b e, relique parti f e longi-
 tudine d commensurabilis est, & f e ut b e rationa-
 lis erit. Sed quia, duarum commensurabili-
 um longitudine b e, f e, una b e ipsi d e est
 incommensurabilis, erit & altera f e eidem d e
 incommensurabilis longitudine; & sic f e, d e sunt
 rationales potentia solum commensurabiles. Itaq,
 f d reliqua est apotome & sic irrationalis, qua
 antea erat rationalis. Non ergo a existens Apa-
 tome, est eadem quæ ex binis nominibus.

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & te-
 teras ipsam consequentes Irrationa-
 les lineas neq, Mediæ neq, inter se es-
 se easdem.

Nam

Nam quadratum Mediae ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, posita longitudine incommensurabilem. Quadratum autem apotomae ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quadratum Mediae apotomae primae, apotomen secundam; Mediae apotomae secundae apotomen tertiam; Minoris, apotomen quartam: Eius, quae cum rationali Medium totum efficit, apotomen quintam. Eius, quae cum Medio Medium totum efficit, apotomen sextam. Cum itaque haec latitudines differant a Mediae latitudine, quia haec rationales, illae irrationales sunt; & inter se, quia ordine non sunt eadem apotomae, patet Apotomen & reliquas illas consequentes, & a Media & inter se differre.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est, Apotome non sit eadem, quae ex binis nominibus: quadrata autem apotomae & reliquarum ipsarum consequentium faciant latitudines: Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam: Sed quadrata Binomialia & reliquarum consequentium faciant latitudines ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam; constat, latitudines Apotomae & aliarum irrationalem, quae post ipsam, easdem non esse, latitudinibus eius, quae ex binis nominibus & reliquarum post ipsam irrationalem; utique, inter se differre. Quare, cum & haec & illae latitudines differant, patet, irrationales posita Medium irrationales esse, lineas inter se differentes, de quibus hactenus.

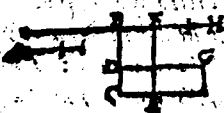
1. est Media. 2. Ex binis nominibus cum speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. d. binis Medijs secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Mediæ apotome prima. 10. Mediæ apotome secunda. 11. Minor. 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. Pergit jam Euclides expositis Irrationalium proprietatibus, inter se conferre Apotomas & binomiales propos. 112. 114. 115.

PROPOSITIO CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis a ad eam b , quæ ex binis nominibus $b d$, $c d$, applicarum $b c$, latitudinem $b f$ facit apotomen, cujus nomina tota $f k$ & congruens $b k$ commensurabilia sunt nominibus $b d$, $d c$, cujus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportionem, & adhuc Apotome $b f$, quæ $f k$, eundem habet ordinem, quem $c a$ $b c$, quæ ex binis nominibus.

ad nomen minus $d c$ resista $b c$, applicata ci-



dem quadrato rationalis
 a , & angulum $c g$ equa-
 le, siq; $b h$ equalis ipsi $d g$.
 Cum ergo $c f$, $e g$ sint a-
 qualla, erit, $a. b c a d d c$, ita $d g$, id est $b h a d$ ^{14. vel}
 $b f$; & dividendo: ut $b d a d d c$, ita $f h a d b f$: ^{16. VL}
 & triq; $f h$ major quam $b f$, sicut $b d$ major est quam
 $d c$. Summa si ipsi $f b$ equali, fiat, ut $h i a d i f$;
 ita $f b a d b k$. & componendo, ut $h f a d f i$, id est, ^{17. VL}
 $h k$; ita $f k a d b k$. Oportet verò esse, esse, ut
 $h f a d b f$, ita $b d a d d f$. Sed haec sunt no-
 mina binomialia, rationales potentia tantum
 incommensurabiles. Ergo & $h f$, $b f$ sunt po- ^{18. X}
 tentia incommensurabiles. Rursus, quia est, ut
 $a f a d b f$; ita $f k a d b k$: & erunt $h f$, $f k$ antece- ^{19. X}
 dentes simul, id est, $h k$ tota; ad consequentes $f b$,
 $b k$ simul, id est, $b k$, ut $h f a d b f$. Quare ut $h k$ ^{20. VL}
 prima ad $b k$ secundam, ita quadratum prima
 ad quadratum secundam. Sed cum $c g$ sit ratio-
 nale, utpote quadrato rationalis a equale, ratio-
 nali $d c$ applicatum & faciens $d g$ rationale ipsi $c d$ ^{21. X}
 longitudine commensurabile; erunt $h b$, id est,
 $h g$ & $d c$ rationales longitudine commensurabi-
 les. Cumq; sit ostensum, esse, ut $b d a d d c$, ita $f k$
 $a d b k$, & ut $f k a d b k$, ita $h k a d f k$. Ergo, ^{22. VL}
 quadratum $b d$ ad quadratum $d c$, ita quadra-
 tum $h k$ ad quadratum $f k$. Et sic commensura-
 bilia sunt haec atq; illa. Sed fuit, ut quadratum

E e i

h k, ad

$h k$, ad quadratum $f k$; ita recta $h k$ ad $b k$:
 ideoque sunt longitudine commensurabiles inter se
 et reliqua $b h$. Sed $b h$ est ostensa rationalis: Er-
 go et $h k$ ipsi commensurabiles erunt rationales,
 quare et $h b$, $f k$ rationales erunt. Cum qua-
 sit $f k$ ipsi $b k$ potentia tantum commensurabilis sit,
 erit et $f k$ rationalis. Quare cum $f k$, $b k$ sint ra-
 tionales potentia tantum commensurabiles, erit
 reliqua $b f$ apotome congruens $b k$. Quod primum.
 Cumque $h b$, $b k$ ostense sunt longitudine inter se
 commensurabiles; ergo et ipsi $h k$: ipsaque $h k$
 sit longitudine commensurabilis $d c$, erit eadem
 $d c$ longitudine commensurabilis $b k$. Rursus,
 quia est, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, et perma-
 nendo, ut $b d$ ad $f k$; ita $d c$ ad $b k$; itaque
 he, ita et illa sunt longitudine commensurabiles:
 eruntque ipsi $b f$ apotome nominis $f k$, $b k$, nomi-
 nis $b d$, $d c$ binomialis longitudine commensura-
 biles. Quod secundum. Rursus, quia est, ut $b d$ ad $d c$
 ita $f k$ ad $b k$; erunt apotome $b f$ nominis $f k$, $b k$ ita
 eadem ratione cum $b d$, $d c$ nominibus ipsius $b c$ binomialis.
 Quod est tertium. Denique, vel $b d$ plus potest
 quam $d c$ quadrato recta sibi longitudine commensurabilis
 vel incommensurabilis. Si commensurabilis
 sit, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, poteris
 eam $f k$ plus quam $b k$ quadrato recta sibi
 longitudine commensurabilis. Si incommensurabilis
 fuerit plus quadrato recta longitudine incommensurabilis.
 Quare, si rationalis posita longitudo

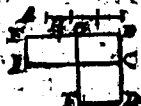
incommensurabilis fuerit bd , erit & fk , quare vel
 ipsa vel quarta apotome erit, cum illa prima vel
 sexta sit: Si dc , etiam bk , quare secunda vel
 quinta: Si neutra bd , dc , etiam neutra fk , bk ,
 tunc tertia vel sexta. Ergo apotome eadem or-
 dine cum Binomiali.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratum Rationalis a ad Apoto-
 men bc applicatum bi , latitudinem be
 atit ca , quare ex binis nominibus bg , ga
 ujus nomina bg , ga commensura-
 bilia sunt nominibus bd , cd , Apotome
 c , & in eadem proportionem ut bd ad
 d , ita bb ad be , & adhuc, quare b ex
 his nominibus fit, eundem habet
 ordinem, quem ipsa Apotome bc .

Applicatur ad bd , b fre-



angulum aequali, ipsi bi faciens
 latitudinem bg . Erit ac ad
 bg , ita bd ad bc ; & conver-
 tendi, ut be ad gc , ita bd ad cd .

Secetur etiam ga ad h juxta proportionem be ad
 c . Quia est, ut be tota ad gc totam, ita e h ex
 ablata, ad hg ex gc ablatam. Erit ergo etiam
 aliqua bh ipsius bs , ad reliquam h ipsius gc , ut
 ita be ad totam gc . Sed ut be ad gc , ita erat
 h ad hg . Ergo ut bh ad h , ita ch ad be , ipsa
 h est media proportionalis inter bh , gh :
 Quare

v cor. 2^a
VI.

210. X.

216. X.

231. X.

Scho. 12. X.

237. X.

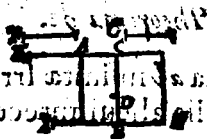
v Quare ut b h prima ad g h tertiam, ita
dracum prima, ad quadratum tertie. Quia
fuit, ut b d ad c d; ita b e ad g e, id est, b h
h e; Sunt autem b d, c d nomina apotoma
rationales potentia solum commensurabiles; et
runt etiam b h, h e & ex his quadrata comensu-
rabilia; adeoque b h, h e propter quadrata comensu-
rabilia longitudine, commensurabiles; & cum b h lon-
gitudine commensurabilis parit g h, etiam ipse b g lon-
gitudine commensurabilis erit. Sed cum quadratum
rationale æquale rationale. b h sit applicatum ad
rationale b d; erit b g latitudo rationalis longi-
tudine ipsi b d commensurabilis: Eadem ergo & b h lon-
gitudine commensurabilis erit & rationalis. Quo-
re cum b h, h e sint ostensa potentia solum com-
mensurabiles, & b h rationalis; erit & h e ratio-
nalis; & sic b h, h e, sunt rationales potentia
solum commensurabiles, & ipsæ b, e ex binis nomi-
nibus. Quod primum est. Quia verè & par-
esse b h ad h e, ut b d ad c d; & permiscendo,
b h ad b d, ut h e ad c d, sumitur b h, b d lon-
gitudine commensurabiles: Ergo & h e, c d. itaq;
nomina h h, h e binomialia b e, nominibus b b, c d
apotoma b c longitudine sine commensurabilia. Quod
secundum. Imò & in eadem ratione, cum sit ut b h ad
h e, ita b d ad c d. Quod est tertium. Demum, b d
plus potest, quam c d quadrato recta sibi longi-
tudine commensurabilis. vel incommensurabilis. &
commensurabilis, etiam b h plus potest quam h e
quadrato

quadrato recta sibi longitudine commensurabilis,
incommensurabilis, incommensurabilis unde
dine sex binomia singula quodam ordinis cum
terminis inveniuntur. Quod est quartum.

PROPOSITIO CXV.

Theorema p.

Si spacium ab contineatur sub A.
toma ac & ca & b quæ ex binis no-
minibus, cujus nomina ca , ab , com-
mensurabilia sunt nominibus ca , ac ,
potome ac , & in eadem propor-
tione, ut ca ad ab , ita ca ad ac , recta
nea spacium ab potens est Ratio-
nalis.



Quadrato rationalis g aequale rectangulum
applicetur ad cb , erit dh apotome, cujus ac & tr .
tunc hi , si sine longitudine commensurabilia
sint cd , db , & in eadem ratione, nempe
ut cd ad db , adeoque ut ce ad ae :

6 19. V.

7 12. X.

8 10. X.

9 1. VI.

Et permulando, at corā h i ad totam cē, ut
lata b i ad ablatā ac. Ergo & reliqua b h ad
liquam a c, ut h i ad cē. Quae dū v. sint commē-
surabiles longitudine, quia utraque ipsi c d lon-
gitudine commensurabilis est, erunt & h b, ac &
h c ipsi a c cum sint in eadem ratione. Sed h c
quale quadrato rationalis g est rationale. Ergo &
a b ipsi commensurabilis est rationale, & ipsam
potens recta f rationale.

Corollarium.

Constat hinc, rationales spacium
includi posse duobus Irrationalibus
ut hoc binomiali & apotome inclu-
sum est rationale.

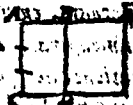
PROPOS: CXVI.

Theorema 92.

A Media & infinita Irrationales
sunt, & nulla aliquam precedentium
est eadem.

38. XI.
Lemma.

11. def.



Sed rationale ac & f
illa, ab comprehensum su-
cum ad a Irrationale f-
fi de Irrationalis quod
a 13 Irrationalis e h d c.

Medus

lectum enim ad rationalem applicatum, faceret la-
 tudine rationalem; reliquarum 12, Irrationalium
 quadrata applicata ad rationalem facerent lati-
 tudines vel binomiales vel apotomas. Sed Quadra-
 tum $b e$ applicatum ad $a c$ facit latitudinem $a b$
 etiam differentem a reliquis omnibus Irrationali-
 bus quadratorum latitudinibus. Ergo $b e$ Irratio-
 nalis differt ab illis 13 Irrationalibus. Si autem
 compleatur rectangulum $d e$, erit illud sub ratio-
 nali. Irrationali comprehensum Irrationale, quod
 non possit esse, perit. Et hec Irrationalis, et differt a
 reliquis omnibus Irrationalibus. Cum enim huius
 quadratum applicatum ad rationalem $b d$, faci-
 at latitudinem $b e$ distinctam a reliquarum Irra-
 tionalium quadratorum applicatorum latitudi-
 nes, ut patet ex precedentibus, ipsam quoque $b e$
 rationalem peccarent a reliquis esse oportet.

y 23. X.

d a 61. ad

66. X. & a

97. ad 7

103. X.

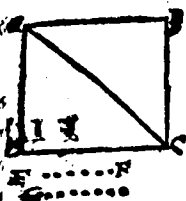
XII. + 1 a

PROPOS. CXVII.

Theorema 91.

Propositum sit no-
 bis ostendere, in qua-
 dratis figuris $d b$ dia-
 metrum $a c$ lateri $a b$
 incommensurabilem
 esse longitudine.

Si non



47. I.

14. IX.

Si non, esto commensurabilis habeant, et
 $a b$ proportionem quam $e f$ & g numeri sui
 minimi & primi: quarum g unitas unitas
 (Cum enim ex $a c$ quadratum sit duplum qua-
 drati $a b$, sitq; ut quadratum $a c$ ad quadratum
 $a b$, ita numerus quadratus ex $e f$, ad quadratum
 numerum ex g , erit etiam ille huius duplus; idcirco
 si g esset unitas, esset ipsius quadratum uni-
 tas, numerusq; quadratus ex $e f$ binarius, quod ab-
 surdum;) Sed numerus. Et quia, ut iam ostensum est,
 ex $e f$ est duplum quadrati ex g ; & metitur quadratum
 ex g quadratum ex $e f$ & latius g metitur le-
 uis $e f$. Cum vero g etiam metiatur seipsum
 tunc $e f$ & g numeri inter se compasiti, habent
 communem mensuram g : qui tamen inter se
 sunt primi. Quod absurdum. Non ergo $a c$ &
 $a b$ inter se commensurabiles sunt.





ELEMENTO- RUM EUCLIDIS.

LIBER XI.

Definitiones.

I.

Solidum est, quod longitudi-
dinem & latitudinem & cras-
situdinem habet.

2. Solidi autem extremum est su-
perficie.

3. Linea recta est ad planum recta,
cum ad rectas omnes lineas a quibus
illa tangitur, quæque in propo-
sitis sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est
cum rectæ lineæ quæ comuni pla-

Ff

notum

notum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc eodem modo non magis inclinabit in unam partem quam in alteram, sed æqualiter illi insistet.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquã angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis cõmunis punctũ ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti intersectionũ anguli inter se fuerint æquales.

8. Paral-

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.
9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.
10. Equales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.
11. Solidus angulus est plurius quædam linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadē sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui plurib. quā duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.
12. Pyramis est figura solida, quæ planis cōtinetur ab uno plano ad unum punctū constituta. Potest autē illud unū planū, à quo omnia tendunt, esse vel triangulum vel quadrangulū, vel pentag. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrāgula solet dici. Reliqua omnia ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani. E f 13. Præ

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia & parallela; alia verò parallelogramma. Est nimirum columna quadam laterata æqualis crassitudinis, cujus bases oppositæ sunt æquales, similes & parallela, sive hæ sint triangula, sive quadrata, sive pentagona. Itaque tot continebit parallelogramma quodlibet Prisma, quot latera sive anguli in uno quoque oppositorum planorum reperiuntur.

14. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus, in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cæperat, circumassumpta figura: vel, Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

15. Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Cen-

16. Centrum Sphæræ est idem quod est semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectangulum manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur. Unde moveri experat circumassumptâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus ad verticem vel rectus fit, vel obtusus, vel acutus.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quâ triangulum vertitur.

20. Basis verò coni, est circulus, qui à circumducta recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectangu-

li parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde caperat moveri, circumassumptâ figurâ.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri, sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes coni & cylindri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrum, est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

27. Octaedrum, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æqui lateris contenta.

28. Dodecaedrum, est figura solida, sub

22. *Sub* 19. pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

25. Icosædium, est figura solida, sub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta. *Hæc 5. cor, ora sola appellant regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt æqualia æquilatera & æquiangula quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut cubus, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides.*

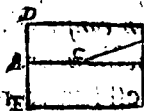
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solida figuræ vicissim circumferibi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel deniq; plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.



14. L.

Sit, si potest, a c pars in plano dig, pars e b extra planum. Si ergo continuetur ac in illo plano d g usque in f, erunt eidem a c lineæ duæ reversæ e b, c f ad eandem partem adjectæ, quod absurdum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duæ rectæ lineæ a b, c d, se mutuo secant in e uno sunt plano. Atque triangulum quicunque e f g in uno est plano.



15. X1.

In lineis a b, c d connectantur puncta f, g, ut fiat triangulum e f g, cuius si pars quædam, ut h i f, dicatur esse extra illud planum, erunt linearum e f, f g partes supra partes in plano, quod absurdum. Quod si jam totum triangulum e f g, est in eodem plano, oportet

inter se ipsas terminantur, lineas ef , eg , & adeoque
earum sunt partes, & hinc totas in eodem pla-
no esse.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana ab , cd , se mutuo se-
cutur; communis eorum sectio est
linea recta.



Siquis ef lineam neget in vi-
tro, & plano existere, et in
nullo, & ultra terminari
& si ducta in alterutro plano
rum recta, eg , f : includent

I. 2. a

I. 1. e

a 14. ax. I.

rectae ef & egf figuram, quod est absurdum; vel
in alterutro, intraque eisdem terminos ducta, in
altero recta egf , idem sequetur absurdum.

PROPOSITIO IIII.

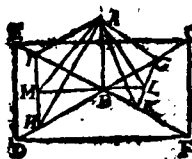
Theorema 4.

Si recta linea ab , rectis duabus cd ,
& lineis se mutuo secantibus; in cō-
muni sectione b ad angulos rectos
insistat : illa ab ducta etiam per ipsas
plano cd , & ad angulos rectos erit.

Es s

Quis

• 1. XI.



Quia enim se manifeste
ed. c. f. lineae, et erunt
dem plano. Sumptis
b h, itemq, b i & b k
libm, ductisq, g k, i h
qua in punctis l & m

• 1. I.

• 1. I.

• ex const.

• 16. I.

• 1. I.

• 10. def.

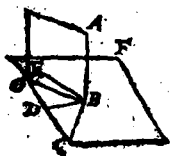
duas g k, i h fecer; demittantur ex a puncto
lini a g, a l, a k, a h, a m, a i. Cum ergo latera
b g, b k, trianguli b g k equalia sint lateribus
b h, b i, trianguli b h i, cum angulo compre-
hensō ad b equali. Erunt & g k, & i h
& aequales. Anguliq, b k g, & b h i aequales. Rursus
cum in triangulis b k l, & b i m, equalium an-
gulorum ad a b, & l k b ipsi b i m, latera inte-
jacentia b k, b i, sint & equalia; erunt & re-
qua latera k l, l b, reliquis i m, m b equalia. U-
demq, modo in triangulis & rectangulis a b g, a b l,
equalium laterum b g & b h, & a b commune;
etiam a g, a h bases sunt & aequales. Sicut & a i
& a k. Amplius in triangulis a k g & a i h aequa-
lium laterum g k & i h, a k & a i, & basium a g
& a h; & erunt anguli comprehensi a i h, a k g aequi-
les. Itaq, cum in triangulis a k l, & a i m, aequales
angulos i & k comprehendunt latera sint aequa-
lia; & erunt & bases a l, a m aequales. Deniq, cum
in triangulis a b l & a b m, equalia sint latera
b l & b m; & a b commune; & bases a l, a m
erunt; & anguli ad b aequales; & quia deinceps
etiam recti. Erit ergo recta a b perpendicularis

Si in; ad tot; omnibus ipsam tangentibus in pla-
no $ce, d f$, ipsæ etiam plano $ce d f$ perpendicularis.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab , rectis tribus lineis
 bc, bd, be , se mutuo ragentibus in cō-
iunctione ad rectos angulos in-
stat; illæ tres rectæ in uno sūt plano.



Cum quolibet duarū illarū
per sectionē mutuam, sint in
eodē plano, ut bc, bd , in pla-
no ut bc, bd in plano fc ; po-
natur, si potest, tertia be ex-
tra planum illud in sublimi.

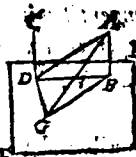
Quoniam $a b, b e$ sunt in eodē plano, sint in pla-
no ac . Quoniam ergo plana fc, ac , sibi mutuo occurr-
ūt in b necessario productæ se mutuo secabunt, & in
quidam sectione cōmuni bg . Sed quia $a b$ ponitur
ad angulos rectos ipsis bc, bd ; verit etiam plano
 fc , per ipsas ducto, ad angulos rectos; & Et sic er-
it recta bg , quæ ipsam in b tangit. Itaq, duo
recti anguli abg, abc in eodē plano ag consisten-
ti, pars & totum erunt equalia.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ rectæ lineæ ab, cd , eidem pla-
no ef ad rectos sint angulos, paralle-
læ erunt rectæ illæ lineæ.

Ducta



Ducta ab & d in planum: et
anguli d & b recti in eodem
plano e f . Ductatur dg perpe-
dicularis ad bd , equalis ipse
 ab : connectanturque recte abg ,
 ag , da . Iam in triangulis abd ,

3. def. XI

ex const.

74. I.

28. I.

5. XI.

2. XI.

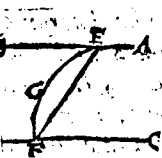
28. I.

bdg equalium laterum ab & dg ; & b & d
communis cum angulo comprehenso recto; erunt
etiam bases bd , ag , equales. Rursus in trian-
gulis abg , ag equalium laterum ag & bg ,
& basis communis ag ; erunt anguli abg & gd
& equales. Sed illi recti. Ergo & hic. Sed e
eadem definitione etiam angulus gd est rectus.
Erit ergo gd tribus rectis db , da , & ca angula
rectos. Quare recte db , da , dc in una sunt pla-
no. Est & autem ab in eodem plano, in quo, db ,
 da . Itaque recta cd in eodem est plano cum ab .
Sed cum interni anguli b & d sint recti; erunt
 ab , cd parallela. Quod erat propositum.

PROPOS. VII.

Theorema 7.

Si duæ sint parallele recte lineæ
 ah , cd , in quarum utraque sint que-
libet puncta e , f ; illa linea ef quæ ad
hæc puncta adiungitur, in eodem est
cum parallelis plano.



Sin minus, recta ef , est in eodem plano, sed extra, ut quidem aliud secet planum, cuius cum plano harum parallelarum communis sectio sit egf recta. Itaq, duae rectae ef & egf intra eos terminos e & f includunt superficiem. Quod absurdum. Vera etiam est propositio de non parallelis in eodem plano.

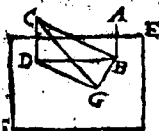
3. XI.

4. XI. I.

PROPOS: VIII.

Theorema 8.

Si duae sint parallelae rectae lineae b, cd , quarum altera cd ad rectos quidam plano ef sit angulos, & reliqua ab eidem plano ef ad rectos angulos erit.



Ducta bd , angulus $cd b$ fit a ; def. XI. a rectus. Sed $cd b$, & $a b d$ sunt β duobus rectis aequales.

29. I.

Ergo & $a b d$ est rectus. Ducatur in plano ef perpendicularis bg ad bd , aequalis ipsi cd ; junganturq, d, gc, bc . Iam in triangulis $cd b$, $g b d$, & angulis, aequalium laterum gb, cd , & communis bd , Erant & bases gd, bc aequales. Sic 24. I.

38. I.

4. XI.

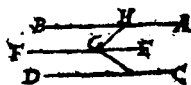
26. XI.

in triangulo cdg & cbg equalium laterum
 bg & bc , gd & bases communes gc .
 d & c gd & cd d , sunt equales. Cumq; b
 us . Ergo & ille. Quare recta gb , duab
 b d , bc se mutuo secantibus in b , ad angu
 $ctos$ insistit, & sic plano per bd , bc ducto, est
 $angulos$ rectos. In quo plano cum sit & ah , p
 b d , bc , in eodem sunt plano, in quo patet ab
 c d . Itaq; & gb recta ba ad angulos ba in
 $sistit$. Quare cum ab sit recta ad rectas bg , bd
 $erit$ recta ad planum per bg , bd , id est, ad
 num cf .

PROPOS. IX.

Theorema 9.

Quæ eidem est rectæ lineæ ab , cd sit
 $parallelæ$, sed non in eodem cum
 la plano hæ ab , cd quoque inter
 $sunt$ $parallelæ$.



A quolibet puncto g , ab
 cf , ducantur dua perpe
 $culares$ gh , quod in plan

4. XI.

38. XI.

$parallelarum$ ab , cf ; ac gi in plano $parallelarum$
 ef , cd . Quoniam ergo eg est recta ad gh & gi
 $tangentes$ se in puncto g : erit etiam illa
 $plano$ per illas gh . gi ducto: cumq; fe m
 $parallelarum$ sit illi plano per gh , gi , perpendicular
 $erit$ & altera ab ; & per eandem causam etiam
 cd , quia eidem ef est $parallelæ$. Cum itaq; ab
 cd

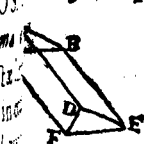
ent plano sine ad angulos rectos, et erunt et-
rallata. Debit autem propositio hac sume-
s parallelas extra planum, quia alias cum
incidisset quæ de parallelis in eodem plano
ur.

y 6. XL.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

duæ rectæ lineæ ab, ac se mutud
entes in a , ad duas rectas de, df se
iò tangentes in d , sint parallelæ;
in eodem plano; illæ angulos
 e, f , æquales comprehendunt.



Ponantur ab, de ; & ac, df
æquales: Ducanturq; bc, ef ,
 be, ad, cf . Erunt ergo be, ad
æquales parallelas ba, ed
connectentes æquales, ut &

ef : adeoq; & bc, cf , quia eidem ad
lta. At a deniq; bc, ef . Atq; ita in Tri-
lis bac, edf , æqualium laterum, ab, de
, df ; æqualiumq; basium bc, ef ; anguli
& edf sunt æquales.

y 3. I.

y 9. XL.

y 1. I.

PROPOSITIO XI.

Problema 11.

dato puncto a in sublimi; ad sub-
um planum b , perpendicularem
tam ducere.

10



in plano. b. c. ducatur nūc
utcumq; duc, ad quam
a demittatur perpendicularis

12. I.

1. I.

31. I.

ex const.

4. XI.

8. XI.

2. XI.

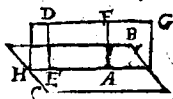
3. de i. XI.

ad d e ducatur perpendicularis g h, ad quam tra
a demittatur perpendicularis a i, quae ad planum
subjectum perpendicularis est. Quæ enim in
plano b c, per i, ipsa d e parallela k l; cum d f sit
ad angulos rectos duabus f a, f h: & sic ad pla
num per i l a s f a, f h: & erit etiam k i ad idem pla
num recta. Sed quia a i cum f a, f h, in eodem
est plano, tangit, rectam k i in a: erit angulus
k i a rectus; adeoque a i ad angulos rectos ipsis k i
i f. igitur & ad planum b c erit recta.

PROPOS. XII.

Problema 21.

Dato plano b c à puncto a, quod
in illo datum est, ad rectos angulos
rectam lineam excitare.



Ex quovis puncto sul limid
demittatur a ad planum b c
perpendicularis d e, quæ
cecidit in a factum est quod

queritur: sed si ceciderit in punctum aliud e, ca
sensa recta per e & a, ducatur per a ipsi d e sp

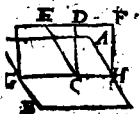
ratio

recta af , in plano gh per d , ce a, ducto erit: af
 et a ad planum datum erecta. Cum enim de , a f
 et parallela, & de ad planum bc , erecta; de ex const.
 etiam af erecta ad idem planum bc . § 8. XI.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Dato plano ab à puncto c , quod
 illo datum est, duæ rectæ lineæ ad
 ctos angulos non excitabantur ad
 sdem partes.



Ducantur, si potest fieri, cd
 et ce ad planum ab perpendi-
 culares. Erunt ergo ambæ 6. XI.
 parallele, quæ tamen in pun-
 cto c concurrunt, quod absur-

um. Eodem modo ex uno puncto sublimi impossi-
 bile est, ad idem planum, duas perpendiculares
 mittere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Ad quæ plana cd , ef eadem ab re-
 ctæ lineæ, erectæ est; illa sunt parel-
 la.

• 3. XI.



Si non sunt, concurrantur
dem producta illa plana ad
partes c, c. = faciantq; scin-
nem g h lineam rectā, in q̃
sumus puncto ut cūq; i, dū-
tur i a, i b, in planis g c d
& g e f. Itaq; cum a b, po-
natur recta, ad utrunq; planum erunt trianguli

• 17. I.

a i b, anguli i a b, & i b a recti, qui tamen
sunt duobus rectis & minores.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ a b, a c se mutuò
tangentes in a, ad duas rectas d e, d f
se mutuò tangentes in d, sint paralle-
læ; non in eodem consistentes plano:
parallelæ sunt, quæ per illa ducuntur
plana b c, e f.

• 11. XI.

• 31. I.



• Ducatur ex a in planum e f
perpendicularis a g, & per pun-
ctum g s ducantur g h, g i
parallelae ipsis d e, d f. Cum
itaq; g h, a b, sint parallelae i-

• 9. XI.

• 29. I.

• 3. def. XI

• 4. XI.

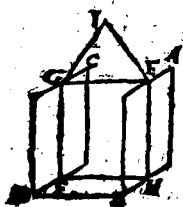
psi d c; & etiam inter se sunt parallelae, anguliq;
b a g, a g h, duobus rectis & æquales: ac propter
hunc, rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo c a g
angulus est rectus. Itaq; cum g a ad a b, & a c s
recta

recta a, recta etiam erit g a, ad planum b c, per il-
las ductum. Eadem autem g a, etiam, est recta ad
planum e f. Itaq, b c & e f sunt plana pa-
rallela.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Siduo plana parallela ab , cd , plano quopiam ef secantur: communes illorum sectiones eb , ef , sunt parallelae.



Si non sunt parallela, con-
venient tandem producta, ut
in puncto I. Quoniam linea
h c i tota est in plano uno a b;
linea vero f g i tota in plano = 1. Xl
c d producto: Producta itaq;
illa plana concurrent qua ta-
men ponuntur parallela.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duæ rectæ lineæ ab, cd parallelis
planis ef, gh, ik , secantur; in eadem
rationes secabuntur, videlicet, ut
segmenta inter plana dicta sint pro-
portionalia, ut lm , ad mn , ita op , ad pq .

Google

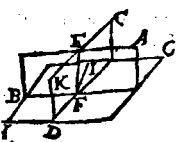
DUNCAN-

in sectionem fg γ perpendicularis: eodemq; modo
 recta omnes in plano g ipsi a b parallele erunt
 communem sectionem fg γ perpendiculares,
 cumq; planum gf ad planum cd δ rectum. Nec γ 3. defi. XI.
 iter habet cum omnibus alijs planis per ab g du- δ 4. defi. XI
 is; scilicet & illa omnia ad planum cd recta sunt.

PROPOS: IX.

Theorema 17.

Si duo plana ab , cd se mutuo se-
 cantia, plano cuidam gh ad rectos
 angulos; communis etiam illo-
 rum sectionis ef ad rectos eidem plano an-
 gulos erit.



Aut enim ef ad b f , d f ,
 communes sectiones plano-
 rum ab , cd cum plano gh
 est recta, aut non. Si est
 ad illas recta, = etiam ad pla-
 num gh , per ipsas ductum: si ad alteram tantum
 f , recta dicatur ef ; quoniam ef in plano ab , δ 4. XI.
 et planum gh recto perpendicularis est communi
 sectioni b f ; & erit & ad ipsum planum gh
 recta: Et ita, si ad alteram d f tantum poneretur
 recta, idem inferretur. Si autem ef ad neu- δ 3. defi. XI.
 am b f , d f credatur esse recta, γ ducatur
 ef in plano ab , ad b f sectionem communem
 in plano gh perpendicularis fi : & in plano cd γ 11. I.
 perpendicularis fk . Quoniam ergo planum ab
 γ gg 3 est

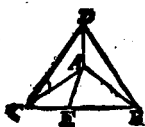
13. XI.

est rectum ad planum gh ; erit $\angle i f$ ad b planum communem perpendicularis, ut $\angle k f$, ad planum gh : adeoque ex puncto f ad planum due erectae sunt perpendiculares, & Quod absque

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus a tribus angulis planis $b a c, c a d, d a b$, contineatur: ex his duo quilibet, ut ut assumi, tertio sunt majores.



Si enim omnes tres sunt inaequales inter se, patet duos esse tertio majores. Si autem duae tantum aequales $\angle$ tertio minor, ut idem duo quilibet tertio sunt majores.

13. XI.

Si unus, ut $b a c$, sit maximus; reliqui autem seu aequales sive inaequales, quilibet horum cum illo nullo est major. Quo maximo $b a c$, majores erunt sunt duo reliqui $b a d$ & $d a c$. In plano enim per $a b, a c$, ducto, fiat angulus $b a c$, equalis angulo $b a d$, & recta $a d$ equalis $a c$, & per a extendatur recta $b c$ secans ipsas $a b, a c$, in b & c & connectantur rectae $b d, c d$. Quoniam in triangulis $b a d$, & $b a c$, latera $a d$ & $a c$ sunt aequalia & $a b$ commune, illiusque comprehensum anguli aequales. Ergo & bases $b c, b d$ erunt aequales sed quia latera $d b, d c$ sunt majora latere $b c$ & ceteris aequalibus $b d, b c$ erit $d c$, major quibus

14. I.

13. I.

aq, cum in triangulo dac & eac, latera da, ea
 nt equalia & ac commune; basis autem dc ma-
 ior basi ec; d erit & angulus dac major quam
 ac, & equalibus additis, erunt duo bad &
 ac simul maiora angulis bac, eac simul; id est,
 ngulo, bac maximo.

PROPOSITIO XXI

Theorema 19.

Omnis solidus angulus a sub mi-
 noribus quam quatuor rectis angulis
 planis continetur.



Ductis rectis bc, cd, db, e-
 runt tres anguli b, c, d solidi, quo-
 rum quilibet sub tribus angulis pla-
 nis continetur, ut b sub cba, abd
 & dbc; c, sub bca, acd, dcb;
 d sub cda, adb, bdc. Quoniam duo an-
 guli cba, abd, majores sunt angulo dbc; si-
 militerq, duo adb, adc majores angulo bdc;
 & duo acd, acb majores angulo dcb. Sed tres,
 hic bd, bdc, & dcb, sunt duobus rectis equa-
 les; & erunt illi sex duobus rectis majores. Sed cum
 idem sex una cum tribus ad a angulis sint sex re-
 ctis & aequales; ablatis illis sex, qui majores sunt du-
 obus rectis: erunt tres reliqui ad a, constituentes
 angulum solidum, minores quatuor rectis. Nec di-
 versa est demonstratio si angulus solidus constet ex
 pluribus, quam tribus planis angulis.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres anguli plani a, b, c quorum duo, ut libet, assumpti reliquos sint maiores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ, ad, ac, bf, bg, ca, ci , fieri potest, ut ex lineis de, fg, hi , æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.



Si tres anguli dati, a, b, c , sunt æquales erunt quoque bases de, fg, hi , æquales;

Et illarum qualibet duæ tertiâ majores si verò duo anguli sint æquales Et tertius minor erunt etiam duæ bases æquales. Et basis tertij utraq; æ minor;

Es sic rursus qualibet duæ tertiâ sunt majores. Si autem unus a sit maximus; reliquis b, c vel æqualibus vel inæqualibus; erit & d e basis omnium maxima, & sic de, fg , majores tertiâ hi , de item & hi majores quàm fg . Erunt etiam fg, hi majores quàm de . Fia enim d a k angulus æqualis angulo b & $a k$ sit æqualis ipsi $a d$, quia ex a per puncta $d k$ e transit peripheria circuli ob trium illarum rectarum $ad, a k, ac$ æqualitatem, connectanturq; $d k, k c$. Quoniam ergo duo anguli b, c ponuntur majores angulo $d a c$ & b æqualis est

u. 4. I.

p. 24. I.

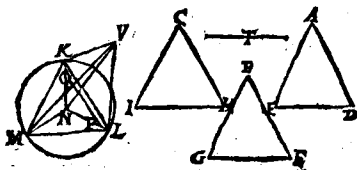
y. 23. I.

est angulo dak ; erit angulus c major reliquo
 kac , basisq; dk equalis basi fg ; basis vero ke
 minor quam hi . Cum ergo dk , ke sint d mayo- 20. I.
 res quam de , eadem d maiores etiam erunt fg ,
 & hi . tribus ergo hisce ita comparatis, ut dua
 quaelibet tertia sint majores, facile erit inde tri- 22. I.
 angulum efformare.

PROPOS: XXIII.

Problema, 3.

Ex tribus angulis planis abc , quo-
 rum duo quomodocunq; assumpti,
 reliquo sunt majores, solidum angu-
 lum constituere.



Tres illos angulos abc comprehendentes linea
 omnes ponantur aequales; & subtendantur bases
 de, fg, hi , ex quibus potest triangulum $con.$ 22. XI.
 stirui. quod sit klm , ut latus kl , basi de , lm
 basi fg , & km , basi hi sit aequale; ac circuil-
 lud

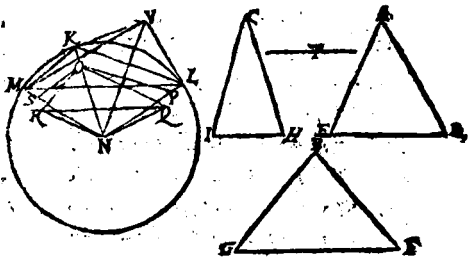
- § 5. IV. *latus describatur circulus, ex cuius centro n, ducatur nk, nc, nm, quibus maiores sunt quatuor rectarum, ut ad, ae, angulos planos includentium. Primo y cadat centrum n intra illud m*
 2 cor. 5, IV. *angulum klm, quia Oxigonium. Si ergo ad, ae, non sunt maiores, quam nk, nl: sint vel aequales: d eruntq, propter bases etiam aequales. dc & lk anguli knl & a; ut & lnm & b; & mnk & c aequales. Cumq, tres illi circa centrum n*
 § 2. E.
 1 corol. 15, I *sint quatuor rectis & aequales: erunt & abc quatuor rectis aequales, contra hypothesein: vel minores ad & ae, quam nk & nl, & cum no, np, equalibus abscissis; ducta op parallela erit ipsi kl, propter & proportionalem sectionem trianguli lnk & triangula lnk, pno, equiangula. Cumq, sit, ut nk, ad kl: ita no ad op: & erit lk; id est, de major quam op: sicut nk, quam no. Cum ergo in laterum equalium triangulis, dac & onp, basis dc sit major basi op; & erit & angulus a major, angulo onp; & sit angulus b major angulo lnm, angulusq, c major angulo mnk. Erunt proinde abc anguli quatuor rectis, quibus illi tres circa n sunt aequales, maiores, contra hypothesein: Itaq, ad, ae nec aequales, nec minores, sunt ipsis nl, nk.*
 § 3. VI.
 § 14. V.
 § 4. VI.
 § 25. L

Deinde cadat centrum n in latus lm, quod fit si angulus k sit rectus, sintq, ad, ae, id est, bf, bz vel aequales ipsis nl, nk, id est, linea lm, quae
 qual

§ 4. I.

§ 24. I.

Sunt autem in triangulis onq & dac equalia laterum, & anguli aequales a & onq etiā b & d & oq & $equales$, id est, oq & lk , & sic or & km . Connexa jam recta qr , quoniam in triangulis qor & lkm , equalia sunt latera kl , km ; ipsis oq , or & angulus qor minor quā lkm : Erit basis lm , id est, fg , major basi qr . Sed quia bf , bg , sunt equalia ipsis nq , nr ; basis autem fg , major basi qr : Erit angulus b major angulo qnr . Rursus, quia anguli onq & a ; item onr & c facti sunt equalia: erit totus qnr equalis duobus, a & c . Sed a & c ponuntur majores angulo b : Igitur & qnr eodem b , major est, qui tamen modo ipso qnr major est demonstratus. Itaque majores esse oportet ad , ac ipsis nk , nl .



Iam cum recta ad , ac majores sint rectis nk & nl ubicunq; centrum trianguli existat, possit recta ad plus quam recta nk , quadrato linea c per lemma

Lemma propositionis 15. X. ita ut quadratum re-
 ctæ a d æquale sit quadratis rectarum n k. Et ex
 centro n excutetur nu, ad planum circuli kl
 æqualis ipfi t, connectanturq; u k, ul, um. Quo-
 niã ergo nu est recta ad planum klm, recta etiam
 erit ad rectas n k, nl, nm; ac proinde quadra-
 tum rectæ u k, æquale quadratis rectarum kn,
 un. Cumq; quadratum a d æquale sit, ex con-
 strictione, iisdem quadratis kn, nu, erunt ergo
 u k & a d quadrata æqualia, ipsaq; rectæ u k,
 a d æquales. Rursus, quia latera un, n k, tri-
 anguli un k æqualia sunt lateribus un, ln,
 trianguli unl, & anguli ipsius contenti
 n k, unl recti: Erunt bases u k, ul æ-
 quales ut & um. Sunt ergo tres, u k, ul, um
 æquales a d; ipsis etiam a e, b f, b g, c h, c i, æ-
 quales: adeoq; in triangulis u k l, lu m, ku m,
 æqualium laterum & basium, cum triangulis dae,
 f b g, h c i: erunt & angulis, a, b, c anguli ad u d
 æquales; ipseq; angulus solidus u, tribus illis angu-
 lis continetur, quod erat propositum.

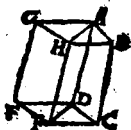
PROPOS: XXIV.

Theorema 21.

Si solidum ab, ef, parallelis planis ac,
 ef, fh, ha, af, be contineatur; adver-
 sa illius plana parallelogramma,
 sunt

sunt similia & equalia.

616. XI.



Cum enim parallela plana af, be secantur planis ac : erunt communes sectiones $a b c d$ parallelæ similiter cum planis af, be secantur planis ac communes ipsorum sectiones ad, bc parallelæ: & figura quadrilatera $a b c d$ est parallelogramma, adeoque & reliquæ omnes. Sed & opposita parallelogramma sunt similia & equalia.

617. XI.

Cum enim recta ab, bh , parallela sint rectis dc, ce in opposito plano; erunt $ab h, b c e$ anguli æquales, & sic etiam reliqui anguli parallelogrammi bg reliqui parallelogrammi cf . Cumque ipsi dc in parallelogrammo ac : & $b h$ ipsi ce in parallelogrammo bc equalis & sit: erit, ut ab ad $b h$; ita dc ad ce : ac propterea, ut $b h$ ad bc ita ce ad ef . Ob eandem causam erunt latera parallelogrammorum bg, cf circa æquales angulos proportionalia & parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diagonibus ah, de ; erunt triangulis $ab h$, & $d c e$ equalia sunt latera ab ad $b h$ lateribus dc, ce , & angulus $ab h$ angulus $d c e$: erunt tota triangula d equalia, ipsorumque dupla parallelogramma bg, cf equalia.

734. I.

84. I.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 8

¶ 36. I.

Sed cum parallelogramma ag, ku, lx super
qualibus basibus ae, ak, kl sint α equalia simi-
laq; propter angulos γ aequales, & latera
cum illos equalia & proportionalia erunt. Si

¶ 29. I.

equalia & similia sunt parallelogramma ay, kl, la . Itaq; cum & equalia & similia sint paral-
lelogramma ad, kp, lq ; erunt tria plana ag, ay, ad solidi ae, fd , equalia & similia tribus
planis ku, kz, kp , solidi ak, pd : hisce vel tri-
bus in unoquoque solido planis opposita sunt equa-
lia & similia, nempe ag ipsi zf ; ay , ipsi uf ; & ad

¶ 10. defin.
IX.

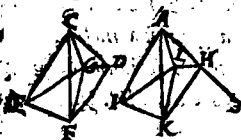
ipsi ef . Itaq; α equalia sunt solida ae, fd, ak, pd, kl, qp . Eademq; ratione & $eb, cf, bm, rc, mn, sr, no, ts$. Quare quam multiplex est basis lg , ba-
sis ag , tam multiplex erit solidum le, fq , solidi
 ae, fd , & quam multiplex basis og , basis bg ,
tam multiplex solidum oe, ft solidi be, fc . Quo-
niam vero si basis lg , equalis est basi og ; equalis
etiam est solidum le, fq solido oe, fd ; quia bas-
ibus lg, og existentibus equalibus, equalia quicq;
sunt & similia sex parallelogramma solidi oe, ft .
Si autem basis est major base, solidum quoq; solido
majus est, & si minor, minus; in quacunq; hoc fiat
multiplicatione. Erit ergo, ut basis ag prima ma-
gnitudo, ad basin bg , secundam magnitudinem;
Ita solidum a, o, fd , tertia magnitudo; ad soli-
dum b, e, fe , quartam. Eadem ratione demonst-
ratur esse solidum ad solidum, ut basis dy ab basi
 cy ; &

ut basis ay, ad basin by; & ut basis bg ad
basin c g.

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam ab, ejusq; pun-
tum a, angulum solidum constitue-
re, angulo solido dato c æqualem.



Ex f ad planū per c d
c e ductū, perpendicu-
laris = f g erigatur, a ii. XI.
connectanturq; df, dg,
ef, eg, cg; & ab scif.

a h, equali c d, & fiat angulus hai. angulo
c e, equalis, & recta ai, recta c e equalis. Itē
umq; in plano per a h, ai ductum, constituatur
angulus hai, equalis angulo d c g & a l ipsi c g:
sed ex l ad planū, in quo sunt a h, a l, ai; & a-
igatur perpendicularis l k, quæ ipsi f g ponatur æ-
qualis; & conjungatur recta ka. Erit angulus solidus
contentus tribus planis hak, hai, & ka i æqua-
lis solido dato c. Connexis enim rectis hk, hl, ik, il,
um latera a h, a l, trianguli a h l, equalia sint
ateribus c d, c g trianguli c d g; anguliq; hai
& c d g æquales ex constructione; & erunt bases
hl, dg æquales. Rursus ablati æqualibus angulis
hai & d c g, ex æqualibus hai, d c e; relictis
H b aqua-

2. 4. L.
1. 4. L.

2. 2. L.

equalibus $la i$, & $g c e$ qui comprehenduntur
qualibus lateribus ab, ai ipsis $c g, c e$: Erunt
li & $g e$ & ae *equales*. Et sic in triangulis rectangulis
 $h i k, d g f$, & *equales bases*, $h k$, & $d f$; ut
rūq; in triangulis rectangulis $ah k$, & $c d f$ & *equa-*
les bases $a k, c f$ Erunt ergo & $h a k$ & $d c f$ an-
guli *equales*. Deniq; etiam in rectangulis $k l i$ &
 $f g e$ *bases* $k i$ & $f e$ & *equales*. Iterumq; in trian-
gulis $k a i$, & $f c e$, *equalium laterum & basium*,
i. *equales erunt anguli*, $k a i$, & $f c e$. Sunt ergo
tres anguli plani solidum angulum a includentes,
equales tribus planis angulum solidum c inclu-
dentibus: Et solidus a solido c *aqualis*. Quod erat
faciendum.

1. 1. L.

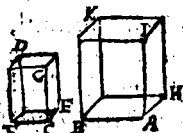
PROPOSITIO XXVII

Problema 5.

1. 1. L.

A data recta linea ab , dato solido
 $c d$ parallelepipedo, simile & simili-
terpositum solidum parallelepipe-
dum describere.

2. 6. XL



1. 12. VI.

Ad recta ab punctum
 a , fiat α *angulus solidus a-*
qualis angulo solido c , ut tres
anguli plani $h a i, i a b, b a h$
equales sint tribus angulis-
planis $c e g, g c f, f c e$. Deinde fiat p ut $c f$ ad
 $c g$, sic ab ad ai ; & ut $c g$ ad $c e$, ita ai ad ab .

erit

erit ex æquo, ut cf ad ce , ita ab ad ah : Po-
 nea parallelogrammis completis absolvatur paral-
 lelepipedū ak , quod parallelepipedo cd simile simi-
 literq; positum erit. Cum enim æquales sint anguli γ 24. XI.
 ab ah , & f ce , lateraq; b a , a h , proportionalia δ 9. def. XI
 lateribus fc , cf erūt parallelogrāma hb , ef simi-
 lia similiterq; posita: itemq; hi , eg ; & ib , gf :
 quibus tribus similibus similiterq; positis inter se,
 erunt & opposita eorum plana similia similiterq;
 posita: & si solidū ak , cd , similia similiterq;
 posita.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum ab pla-
 no cf secetur per diagonos cg , df , ad-
 versorum planorum ab , cd : bita-
 lia secabitur solidum ab ab ipso pla-
 no ab .



Quoniam utraq; cd , gf γ 34. t.
 parallela & æqualis est
 ipsi ac ; erunt etiam in-
 ter se parallela & æqua-
 les, & ipsaq; connectentes γ 33. XI.

df , parallela, per quas ducit un planum cf ,
 variam secas ipsum parallelepipedum ab .

Hb 2

Cmp

24. XI.

Cum enim plana ah , eb sint parallelogramma aequalia & similia: erunt & eorum dimidia seu triangula agc , gch ; efd , fdb , aequalia, & propter latera circum aequales angulos proportionalia etiam, similia. Cum item & parallelogrammum af , & aequale sit, & simile parallelogrammo cb : & ad ipsi gb , & cf commune; erunt duo triangula agc , efd ; & parallelogramma af , ad , cf , prismatis $acg fed$, aequalia & similia duobus triangulis, hcg , bdf , & parallelogrammis cb ; bg , cf prismatis $hgdc b f$:

6. VI.

10. def. XI.

Ipsa, prismata inter se & aequalia. Quia cum component parallelepipedum ab ; Erit ipsum bisari sectum plano cf .

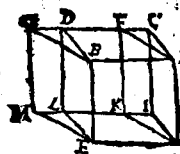
PROPOSITIO XXIX.

Theorema. 24.

Solida parallelepipeda $acde$, $afge$ super eandem basin ab constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes ai , ak , el , em , & hc , hf , bd , bg , lineæ in iisdem collocantur rectis lineis im & cg ; sunt inter se æqualia.

35. L

Quia enim æqualia sunt parallelogramma al , am , erunt communi trapezio $akle$ ablato, æqualia triangula aik , & elm . Quia item æqualia sunt



¶ sunt omnia latera triangu-
lorum aik & hcf; item
elm & bdg erunt æqui-
angula, & propter latera cir-
cum æquales angulos d pro-
portionalia, inter se similia.

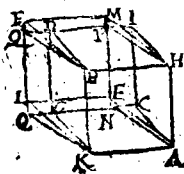
34. I.
8. I.
4. VI.
4. XI.
36. I.
10. def. XI

¶ Rursus & parallelogramma aced inter se sunt
æqualia & similia, & sicut & if, & lg propter
æquales bases ik, lm; adeoque omnia plana Pris-
matis aik, fch, æqualia sunt omnibus planis
Prismatis elm, gdb; ipsaq; prismata æqualia.
Quibus si addatur commune solidum ahfk, ldb c;
parallelepipeda super eadem basi in eadem altitu-
dine sunt æqualia.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda aidk, amfk
super eandem basin ab constituta &
in eadem altitudine, quorum insi-
stentes ac, ae, kg, kl: bi, bm, bd, bf,
lineæ non in iisdem collocantur re-
ctis lineis cg, id: inter se sunt æqualia.



Quia enim plana cd, ef,
opposita basi ab, sunt in eo-
dem plana ob eandem pa-
rallelepipedorum altitudi-
nem: pertractis in eodem

Hb 3 plana

34. I.

33. I.

32. XI.

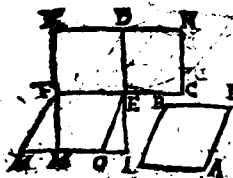
plano rectis cg, id ; illam quidem em & lineam
 tracta secant in n & o : hanc vero id in punctis
 p, q : junganturque rectae an, ko, hp, bq . Quia
 igitur pq, mf rectae sunt aequales & parallelae
 sicut & mf, hb : erunt & pq, hb aequales: &
 parallelae & $hpqb$ est parallelogrammum. Si-
 cut eadem de causa & $hpna, anok, kogb$.
 Est autem & $noqp$ parallelogrammum. Igitur
 $apqk$ est parallelepipedum. Cui aequale est pa-
 rallelepipedum $aidek$, propter eandem basin ab &
 lineas insistentes in iisdem rectis co, iq . Sed &
 eidem $apqk$ propter eandem basin ab , & lineas
 insistentes in iisdem rectis $nmof$, aequale est pa-
 rallelepipedum $amfk$. Igitur $aidek$ & $amfk$
 etiam inter se sunt aequalia.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida parallelepipeda super æ-
 quales bases ab, cd , constituta, & in
 eadem altitudine; æqualia inter se
 sunt.

Protractis duobus lateribus de, ce ad partes
 e fiat angulus feg æqualis angulo l : rectae ef ,
 rectae lb ; & rectae eg rectae la : Erit pa-
 rallelogrammum eh æquale & simile parallelo-
 grammo ab . Convenias autem producta hg
 cum



cum de in i, & complea-
tur parallelogrammum
ik. Iam conspiciantur
L Super bases eh, if, ek
aque alt a parallelepipe-
da ipsis super ab, cd con-
structis parallelepipedis
no omnium insistentes.

Linea ad bases sint perpendiculares. Erunt super
ab & eh propter equalia & similia plana inter
se a equalia; itemq, super eh & if β equalia. β 29 XI.,
Cumq, parallelograma eh, cd & fi sint aequalia, γ 35. I.
eidemq, eh aequale cd; erunt & if aequalia. δ 7. V.
igitur, ut if ad e k ita cd ad e k. Sed, ut if ad
ek, ita est solidum super if, ad solidum super e k: quia
planum super ei secans totum solidum super i k, est
parallelum planis adversis super dk, i m, erectis.
Eademq, ratione ut e d ad e k, ita solidum super
cd ad solidum super e k. Itaq, erit, ut solidum super
ab, ad solidum super e k, ad solidum super cd, ϵ 9. VI.
ad solidum super e k: Eruntq, solida super if &
cd ζ equalia. Sed parallelepipedum super if est
aequale parallelepipedo super ab. Aequalia igitur
erunt & parallelepipeda super ab, cd.

PROPOS. XXXII.

Theorema 27.

Solida parallele pipeda a b c d, e f g h,
sub eadem altitudine, inter se sunt,
ut bases, a b, e f.

Hb

Super

perficiatur parallelepipedum cxii . Erunt pa-
 rallelogramma propter angulos & latera equalia
 & gf , ln & rs , & t & g e similia & equalia,
 & ib . ut sua opposita in illis parallelepipedis efgh ,
 cxii sint & similia & equalia; erunt & ipsa illa a 24. XI .
 rallelepipeda inter se equalia & similia. Rursus pio. def. XI
 mpletis parallelogrammis mb , bl , lm , perfici-
 atur parallelepipedum mp , bl . Item com-
 pletis parallelogrammis ix , dl , iq perficiatur
 rallelepipedum iyqz . Quoniam ergo ex simili-
 tudine parallelepipedorum abcd , efgh , est; ut ai y i. VI
 de k , id est, il ; ita di adh k vel im ; & bi ad
 k vel in . Sed ut ai ad il , ita est paralle-
 grammum ad ad dl ; & ut di ad im , ita pa-
 rallelogrammum dl ad lm ; & ut bi ad in , ita
 rallelogrammum bl ad ln . Exit ergo ut a d ad
 ll , ita dl ad lm , & bl ad ln . Sed ut basis ad ad
 asin dl , ita est parallelepipedum ad cb , ad pa-
 rallelepipedum dlyq . Atque ut basis dl ,
 ex basin lm , ita parallelepipedum d lyq
 ad parallelepipedum lmbp ; & ut bases bl , ln ;
 ita parallelepipeda lmbp & nltx . Quare erit,
 ut parallelepipedum ad cb ad parallelepipedum
 d lyq ; ita parallelepipedum d lyq ad blbp ,
 & hoc ad nltx . Quare quatuor sunt continue
 proportionales quantitates ad cb , d lyq ,
 lmbp , nltx ; & proportio prima ad cb ad quartam
 nltx , i.e. ad efgh , est triplicata, proportionis
 primae ad cb , ad secundam d lyq . Ut autem ad cb
 H b s ad

ad d l y q, ita est basis ad ad basin d l; & quia
ad d l; ita est a i ad i l, id est e k. Est ergo pro-
portio parallelepipedorum a d c b & e f g h, m-
ultiplica a proportionis homologorū laterum a i & e k.

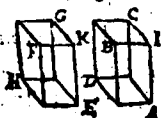
Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè pro-
portionalibus, ut est prima ad quartam;
ita sunt parallelepipeda primæ ad quartæ
similia similiterq; descripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Equalium solidorū ad c b, e h g f, paral-
lelepipedorū bases a b, e h, & altitudi-
nes reciprocantur, & quorū solidorū
parallelepipedorū bases & altitudi-
nes reciprocantur, illā sunt æqualia.



Ad bases a b, e h, sint insistentes
a i, e k perpendiculares, quæ sunt
parallelepipedorum datorū a b
titutines: quæ si fuerint æqua-
les, erunt & propter ipsa paral-

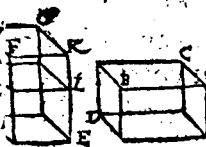
a per 4.
defin. V I.

lelepipeda æqualia ipse bases a b, e h æquales. A-
deoq; ut basis a d ad basin e h; ita e k ad a i, id
est, bases & altitudines sunt reciproca.

631, XL
27, V.

Si autem altitudines sint inæquales ex e k ma-
jore abscindatur ipsi a i æqualis e l, & per l i p
base e h ducatur planum parallelum l m. Quoni-
am ergo æqualia sunt solida a c d b & e h g f,
& erit ut a c d b, ad e h l m; ita e h g f ad f h l m. & A

autem



autem solidum $adcb$ ad
solidum $ehlm$; ita c basis
ad b basin eh , propter
altitudines ai, el aequales,
Atq. ut $ehgf$ ad $ghlm$,
ita basis kn ad basin ln .

32. XL

itur, ut basis ad ad b basin eh ; ita est kn ad lm .
sic ek ad el , id est, ad ai ipsi aequalem. Quare est,
basis ad , ad basin eh , ita altitudo ek , ad alti-
tudinem ei , id est, reciproca sunt bases altitudinib.
ne jam bases & altitudines reciproca. erunt etiā
parallelepipedā equalia. Si enim altitudines ek ,
& ai sint aequales, cum sit, ut altitudo ad altitu-
dine, ita basis ad basin: erunt etiam bases ad, eh ,
quales & sic parallelepipedā ipsa aequē alta aqua-
a. Quod si inaequales sint altitudines, abscindatur,
antea, aequalis. Quoniā ergo est ex hypothēsi, ut
basis ad ad basin eh ; sic altitudo ek ad altitudi-
nem ai , id est, el , ut autē est, basis ad ad basin eh ,
ita est solidum $adcb$, ad solidum $ehlm$, propter al-
titudines el, ai aequales: Et ut ek ad el , ita kn ,
ad ln . ut autē kn ad ln , ita est solidum $ehgf$, ad
solidū $ehln$. Ideoq. erit, ut solidū $adcb$, ad solidū
 $ehlm$; ita $ehgf$, ad $ghlm$. Et sic $adcb$ & $ehgf$
sunt equalia. Poterat idē ostendi si insisteret, vel al-
titudines parallelepipedorū nō sint perpendiculares,
si deinde demittatur perpendiculares. Eadem hac et-
iā de Prismatib. usq. de servatis principijs, vera sunt.

PROPOSITIO XXXV

Theorema 30.

Si

Si fuerint duo plani anguli æquales bac, def , quorum verticibus a, d sublimes rectæ lineæ ag, dh insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales bag & cdh utrumq; utriq; In sublimibus autem lineis ad, gh quælibet sumata fuerint puncta g, b , & ab his ad plana, in quibus cōsistunt anguli bac, def primum positi, ductæ fuerint perpendiculares gi, hk ; à punctis verò i, k quæ in planis à perpendicularibus gi, hk fiunt ad angulos bac, def primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ ia, kd hæc ik, kd cum sublimibus ag, dh æquales angulos comprehendent.



Si enim ag, dh sunt inæquales, auferatur ex a ipsi dh æquis al , & ex l ad planum bac demittatur perpendiculari lm . Quoniam igitur

gi, lm , sunt ad idem planum perpendiculares, erunt & parallelæ, & in eodem plano trianguli gal cadetq; lm in rectam ai . Iam ducantur ex punctis m, k ad rectas ab, ac, dc, df perpendicu-

lata

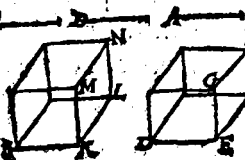
res mb, mc, ke, kf & connectantur rectæ $bc,$
 $ol, lc, ef, eh, hf.$ Et quia lm est recta ad
 planum anguli b a c ipsa rectum angulum efficiet
 cum recta $a m$ in eodem plano ducta. Quare 83. def. XI.
 quadratum al erit & aequale quadratis $am, lm.$ 74. l.
 Sed quadratum am est & aequale quadratis, $ac,$ 47. l.
 $cm.$ Igitur quadratum al aequale est quadratis 48. l.
 $ac, cm, ml.$ At quadratis cm, ml aequale
 est quadratum $cl.$ Quia, cm l angulus est β rectus.
 Igitur quadratum al aequale est quadratis $ac, cl.$
 Ideoq, acl angulus erit δ rectus. Rursus, quia qua-
 dratum ac aequale est quadratis $am, ml:$ sed
 am & aequale est quadratis $ab, bm.$ Igitur qua-
 dratum rectæ al , aequale est quadratis rectarum
 $ab, bm, ml:$ at quadratis bm, ml aequale est
 quadratum $bl.$ Ergo quadratum al aequale est
 quadratis ab, bl angulusq, abl erit δ rectus. Nec
 aliter anguli $d fh,$ & $d eh,$ ostendentur recti. Quo-
 niam itaq, abl & lab anguli trianguli abl sunt
 aequales angulis $d eh, h de,$ trianguli $d eh;$
 Suncq, latera ac, dh equalia; erunt & reliqua
 latera $ab, bl,$ reliquis lateribus $d e, he$ equalia.
 Eodemq, modo aequales erunt rectæ $ac, cl,$
 rectis $df, fh.$ Quare in triangulis abc, def
 equalium laterum $ab, ac,$ ipsis $d e, df,$ & an-
 gulorum b a c ipsi $odf;$ Erunt & bases bc, ef in-
 ter se, & anguli $abc, acb,$ angulis $def, dfe,$
 aequales. Sunt autem & toti anguli $abm,$
 acm

acm equales totis dek, dfk, cum sint recti. Itaq;
 & reliqui mbc & mcb, reliquis kcf, kfc, omnes
 equales; proptereaq; cum & latera bc, cf sint
 stensa equalia. Erunt latera bm, cm laterib; dk,
 fk equalia. Quia ergo latera ac, cm equalia sunt
 lateribus df, fk anguliq; acm, dlk recti, erunt
 & bases am, dk equales. Cum autem equales sint
 obensa recte bl, eh; erunt & earum quadrata e-
 qualia. Sed quia quadratū bl, equale est quadra-
 tis bm, ml; & quadratum eh, quadratis ek,
 kh. Erunt & quadrata bm, ml equalia qua-
 dratis ek, kh. Abiatis ergo quadratis bm, ek
 equalibus, reliqua quadrata ml, hk erunt equa-
 lia, recte q; lm, hk equales. Quamobrem
 cum latera al, am equalia sint lateribus
 dh, dk; & basis lm, basi hk: erunt & an-
 guli lam, hdk equales. Quod erat propositum.

PROPOS: XXXVI:

Theorema. 13.

Si tres rectę lineę a, b, c propor-
 tionales fuerint, quod ex tribus his
 fit solidum e b parallelepipedum,
 æquale est descripto à media linea
 l solido parallelepipedo, im, quod
 a quilaterum quidem fit, æquiangu-
 lum vero predicto.



Cum enim sit, ut d o
ad i k, ita k m ad e g
(quia d e ipsa, &
 i k, k m, ipsi b ; & e g
ipsi c sumta sunt a-
quales) & anguli deg
 ikm aequales. Erunt α 14. VI.

parallelogramma d g, i m, equalia quia latera
habent circumaequales angulos reciproca. Quoniam
verò anguli plani d e g, i k m sunt aequales, quo-
rum verticibus insistant sublimet lineae aequales e f,
 k l, quae aequales angulos comprehendunt cum li-
neis primò positis, utrumq; utriq; ex constructio-
ne: erunt perpendiculares ex f , l , ad plana basium
 d g, i m, demissa, nimirum altitudines parallele-
pipedorum d h, i n, si bases sint d g, i m inter se α 35. XI.
equales. Quare parallelepipeda d h, i n, propter ba-
ses d g, i m aequales, & aequales altitudines, inter γ 31. XL
se sunt γ equalia. Quod erat propositum.

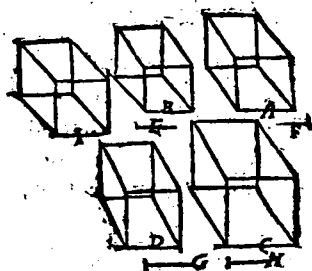
PROPOS: XXXVII.

Theorema 32.

Si quatuor rectae lineae a , b , c , d pro-
portionales fuerint ut a ad b , ita b ad
 c & solida parallelepipeda a b c d , quae
ab ipsis & similia & similiter des-
cribuntur, proportionalia erunt.

Et

& si solida parallelepipeda, quæ similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ neæ proportionales erunt.



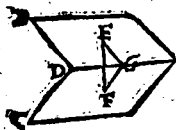
Cum eadem sit proportio a ad b , quæ c ad d , eadem quoq; erunt solidorum a ad b , & c ad d , quia sunt proportionēs triplicatæ ejusdem proportionis. Contra cum a ad b , & b ad c Solida habeant eandem proportionem triplicatam proportionis lineæ a ad b , & c ad d . Erunt etiam linearū sunt a ad b & c ad d eadem proportionis.

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum ab , ad planum ac , rectum fuerit, & ab aliquo puncto e eorum, quæ in uno sunt planorum ab
ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem ad cadet planorum ducta perpendicularis.



Si ex puncto e dato in plano demissa perpendicularis ad planum ac non cadit in communem sectionem ad , sed in punctum f extra illam, ducatur ex e ad rectam ad perpendicularis eg , que & ad planum ac recta erit. Quare ex puncto e extra planum ac ductæ sunt ad ipsam ^{4. def. XI.} planum ac due perpendiculares ef, fg . Quod ^{p. 13. XI.} absurdum.

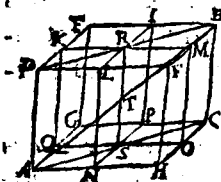
PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedia ab eorum, quæ ex adverso planorum ac, bd latera bifariam secta sint in i, k, l, m, n, o, p ; per sectiones autem plana in, ko , sint extensa: communis sectio rs planorum, & solidi parallelepipedia diameter ab bifariam se mutuo secabunt.

¶

Conti.



Connexis enim rectis, $rd; sa; sc$, in triangulo $aq s$, cos , propter æqualia latera aq, qs ipsæ ca, os , & angulum aqs æquale alterno angulo cos .

Erant & bases as, cs æ-

quales, anguliq; asr & cso æquales. Sed asq

& aso sunt duobus rectis & æquales: Igitur & cso

& aos . Ac propterea as, cs unam rectam lineam

constituent. Eodẽq; modo æquales ostendemur $br,$

dr ; & unam constituere rectam bd . Rursum, quia

utraq; ad, bc parallela est & æqualis rectæ fh ,

ob parallelogrammæ af, fc ; ipsæ quoq; parallela &

æquales erunt. Quare & rectæ ac, bd , earũ ex-

tremitatũ iungentes, parallela sunt & æquales, ipsa-

rumq; dimidiæ as, br æquales. Quia verò ac, bd

sunt parallele: & erunt rectæ ab, rs in eodem cum

ipsis plano. Ideoq; se mutuò secabunt in puncto

e . Cum autem duo anguli ast, ats , æquales

sint duobus angulis brt & etr , & latus as late-

ri br ; & erant & reliqua latera a, ts reliqui

a, b, tr æqualia: ac propterea ab, rs , se mutuò

bisariam secant in t . Quod erat propositum. Hinc

efficitur in omni parallelepipedo: Diametros o-

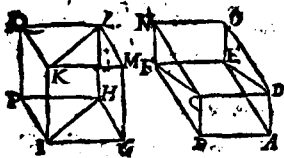
mnnes se mutuò bisariam secare in uno pu-

cto, in quo bisariam dividuntur.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

SI fuerint duo prismata $abcdef$,
 $ghiklm$, æqualis altitudinis; quorū
 hoc quidem habeat basim parallelo-
 grammum $abcd$, illud verò trian-
 gulum ghi duplum autem fuerit pa-
 rallelogrammū $abcd$ trianguli ghi ;
 æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiatur enim pa-
 rallelepipedum an, gq ,
 extensis triangulorū
 planis, & perfectis
 parallelogramis bn ,
 ao ; gp, mq ; ac du-

ctis om, pq quæ æque alta sunt parallelepipedis
 cum ipsis prismatis. Quoniam igitur parallelogra-
 mmum gp , æ duplum est trianguli ghi , sed & ac
 parallelogrammum ejusdem trianguli ghi est du-
 plum. Erunt ita inter se æqualia: ipsaq; parallele-
 pippeda æque alta super æqualibus basib. β æqualia.
 & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismati, æ-
 qualia. Quia parallelepipedum am, gk , per diame-
 tros cf, de, hi, lk planorum adversorum secan-
 tur bisariam in binas videlicet prismata. Quod erat
 propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositio-
 nem tantummodo loqui de illis prismatis, quæ duo
 trianguli habent opposita, quia jubet parallelepi-
 pedita compleri, quod non fieret, nisi utrumq; prisma
 opposita haberet triangula, quia jam antea esset
 completum, parallelepipedum



EUCLIDIS

ELEMENTO-

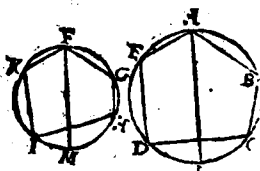
RUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

QUæ in circulis polygona similia
 $abcde, fghik$, inter se sunt, ut à
 diametris al, fm quadrata.



Anguli equi-
 bini abc, fgh ,
 subtendantur recte
 ac, fh ; & con-
 stantur recte $bl,$
 gm . Quoniam
 similitudinem poly-

gonorum est, ut ab ad bc ; sic fg ad gh : ita
 triangula abc, fgh , equi angula. Est aut
 angulus acb , & equalis angulo alb ; & $fhg,$
 ipsi fm g. Erunt igitur & alb & fm g. equi-
 anguli, sed cum & anguli abl, fm g, sint re-
 ctus

6. VI.

22. III.

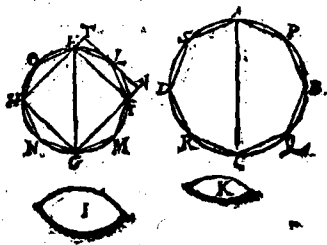
31. XI.

inquam in semicirculo recti: δ erunt & reliqui
 $a l, g f m$ aequales. Erit ergo, ut $a l$ ad $a b$,
 $a f m$ ad $f g$. Et permutando, ut $a l$ ad $f m$,
 $a a b$, ad $f g$. δ Igitur est, ut quadratum ex $a l$, δ 12. I.
ad quadratum ex $f m$: Ita polygonum $a b c d e$, δ 4. VI.
 δ 12. VI.
super $a b$, ad polygonum $f g h i k$ super $f g$; cum tam
adrata quam polygona sint figurae similes.

PROPOS: II.

Theorema. 2.

Circuli $a b c d, e f g h$ inter se sunt, quē-
modū à diametris $a c, e h$ quadrata.



Sin minus, esto, ut quadratum diametri $a c$,
ad quadratum diametri $o g$; ita circulus $a b c d$,
ad aliam magnitudinem, que vel major vel mi-
nor erit circulo $e f g h$. Si enim esset equalis, $a b$ δ 7. V.
habere circuli $a b c d$, & $e f g h$ eam rationem,
quam diametri $a c, e g$; quod tamen non concedi-

tur. Sit ergo i minor circulo e f g h, magnitudi-
ut quidem i & k simul sint circulo e f g h aequa-
les. Circulo ergo e f g h inscribatur quadratum
e l g h, quod quia quadrati, circulo eidem cir-

69. IV. scripti, dimidium est, majus erit semicirculo. tan-
bisectetur peripheria e f g h, h e, in punctis l,
m, n, o; adjungaturq; recte l e, l f, m f, m g, n g,
n h, h o, o e: Ducaturq; per l Tangens t u, qua-
v 27. III. ipsi e f erit parallela, occurrens rectis h e, g t Pro-
tractis in t & p. Quoniam itaq; triangulum e l f,
d 41. I. dimidium est parallelogrammi t e f u, majus erit
dimidio segmenti e l f: & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia
simul majora dimidio omnium segmentorum simul.
Eodemq; modo bisectis hisce peripherijs e l, l f, ite-
rum adjuncte lineae efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si a circulo
e f g h, auferatur plus dimidio, nempe quadratum
e f g h, & a reliquis segmentis rursum plus dimi-
dio, nempe triangula e l f, f m g: & in hunc mo-
dum semper fiat detractio, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circu-
lum e f g h, & magnitudinem i. Sine itaq; se-
gumenta circuli relictæ e l, l f, f m, simul sumpta
minora magnitudine k: Cum ergo circulus e f g h,
ponatur aequalis ipsis i & k: simul segmenta illa
minora magnitudine k, subtrahita ex circulo, re-
linquunt polygonum e l f m g n h o, majus ma-
gnitudine reliqua i. Huius polygoni simile inscri-

tur circulo $abcd$. Quoniam hæc polygonæ inter
 unt ut ex eorundem circulorum diametru qua- 21. XII.
 ata, id est, a : ut circulus $abcd$ ad i sed polygo- ex hypot.
 m $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$ 14. V.
 tur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 nam i : quod tamen modo demonstratum est ma-
 s. Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponat-
 r major circulo $efgh$. Cum itaq, ponatur $abcd$
 rculus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg
 rit & convertendo i ad circulum $abcd$, ut ex
 g & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 rculus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 ulum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam o erit circulus $abcd$ ma- 14. V.
 nitudine k . Itaq, erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum,
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 rculum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circulorum eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore maiorem. Idem
 enim sequetur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se jam constat. Cum ergo magnitudine i , neq, maior
 neq, minor esse possit circulus $efgh$, patet, eandem esse

circulorum, rationem, quæ & ex ipsarum, diam
quadratarum. Hinc etiam patet.

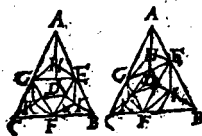
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut po
lygona similia ipsis inscripta, quia
ipsa quoq; sunt ut ex diametris qua
drata.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis $abcd$, triangu
larem habens basin abc dividitur in
duas pyramides agb, bkd æquales
& similes inter se, triangulares ha
bentes bases ag, bk , & similes to
ti, & in duo prismata $efgb, cfgk$
æqualia; quæ duo prismata majora
sunt dimidiò totius pyramidis..



Omnia latera pyramidis
secantur bisariam in e, f ,
 h, i, k , connectanturq; e
 fg, ge, hi, ik, kh, he ,
 ei, if : erunt duæ pyra
mides agb, bkd , & æquales & similes inter

Toti: Sicut & duo prismata $c b f g h i$, $c f g h$
 & inter se aqualia, & maiora dimidio totius pyra-
 midis. Quia enim $a d$, $b d$, latera secta sunt bise-
 ctam, & sunt proportionaliter, & erunt $h i$, $a b$, pa-
 rallela. Eademque ratione parallela $i k$, $b c$; $h k$,
 $a c$; $e g$, $b c$; $e f$, $a c$; $f g$, $a b$; $e h$, $b d$; $e i$, $a d$;
 $i f$, $d c$; $h g$, $d c$: Sunt autem & $f g$, $h i$, inter se
 parallela, quia eidem $a b$, parallela sunt. Sicut
 & $g h$, $f i$, quia eidem $d c$. Sunt ergo parallelo-
 grammata $a e i h$, $h e b i$, $i d h e$, $e b f g$, $g h k c$,
 $c k i f$, $f g h i$. Quia verò $h e$, $h g$ rectis $d b$, $b c$
 sunt parallela: & erunt anguli $e h g$, $b d c$ aequales: &
 sicut & $h e g$, $d b c$ & $h g e$, $d c b$. Sunt ergo
 triangulorum $h e g$, $d b c$ latera circum aequales;
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula $h a e$, $h a g$, $a e g$; triangulis $d a b$,
 $d a c$, $a b c$ sunt similia: Sunt ergo pyramides
 $a e g h$, $a b c d$ similes. Rursus, quia rectae $h i$, $h k$,
 rectis $a b$, $a c$, sunt parallela; erunt anguli $i h k$,
 $b a c$ aequales: & Itemque $h i k$, $a b c$; $h k i$, $a c b$.
 Quare triangula $h i k$, $a b c$ habent circum a-
 quales angulos, latera proportionalia, & sunt si-
 milia. Sunt autem & triangula $d h i$, $d i k$,
 $d k h$, triangulis $d a b$, $d b c$, $d c a$ similia: Itaque
 pyramides $h i k d$, $a b c d$ sunt similes. Quo-
 niam autem triangula $a h e$, $h d i$, & sunt similia
 triangulo $a d b$; ipsa etiam inter se & erunt simi-
 lia. Et quia super aequales rectas $a h$, $h d$, sunt
 constituta: & erunt etiam aqualia. Itaque etiam
 $a h g$,

2. VI.

9. XI.

10. XI.

4. VI.

9. def. XI.

21. VI.

Lemma

22. VI.

li 5

ahg, hdk triangula similia, super aequalibus,
 $ses. ah, hd$ constituta sunt etiam aequalia; ad
 $aeg \& hik$, super $ae \& hi$ aequales. Et denique
 ehg, idk , super he, di aequales, aequalia sunt.
 Itaque Pyramides similes $aegh$, & $hikd$, et
 iam sunt aequales. Rursus quia eh, hg, ge , sunt
 aequales & parallelae rectis bi, if, fb : $\therefore$ erunt
 triangula ehg, bif , aquiangula inter se & a-
 equalia & similia. Sunt etiam parallelae, quia $eh,$
 hg , per quas planum ehg est ductum, parallelae
 sunt rectis bi, if , per quas planum bif est ductum.
 Igitur solidum bif, ghe , sub duobus his triangu-
 lis ex adverso aequalibus parallelis & similibus, &
 tribus parallelogrammis $egfb, behi, ifgh$,
 contentum est prisma. Eodemque modo propter tri-
 angula cfg, hik , ex adverso aequalia parallela
 & similia, & propter parallelogramma $cfik,$
 $khgc, ifgh$, quibus continetur; solidum cfg
 hik , est prisma. Quod cum cum priore $bifghe$
 sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana paral-
 lae bce, hik & parallelogrammum $ebfg$ est
 duplum trianguli cfg , & erunt haec inter se a-
 equalia. Denique, quia prisma $ebfghi$ majus
 est pyramide $ebfi$; totum parte, quae aequalis &
 similis est pyramidibus $aegh$, & $hikd$. Ex
 aequalitate & similitudine triangulorum erunt illa
 duo prismata pyramidibus $aegh$, & $hikd$
 majora

o 14. P.

210. def. XI.

A 8. I.

o 15. XI.

o 41. I.

o 40. XI.

iora: adeoque excedent quidem dimidium, pyramidis a b c d. hac vero dimidio ejus d. fuerit. Totum enim in partes inaequales divisum, dimidium quidem superat pars major: sed à dimidio defuit minor.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duae pyramides a b c d. e f g h ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases a b c, e f g; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides a i l m, m n o d, & e p r s, s t u h, aequales inter se & similes toti & in duo prismata aequalia i b k l m n, c k l m n o, & p f q r s t, g q r s t u, ac eodem modo divisa sit utraq; pyramidum a i l m, m n o d & e p r s, s t u h, quae ex superiore divisione natae sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis a b c d basis a b c, ad alterius pyramidis e f g h basin e f g; ita & omnia, quae in una pyramide prismata ad omnia, quae in altera pyramide prismata multitudine aequalia.

Con-



Constructio compa-
dente coincidit. Cumq;
sit, ut $b c a d c k$ ita $f g d$
 $g r$. Quia utraq; $b c f$

a 4. VL.

$f g$ linea est bisariam secta: a. Sint autem $a b c$,
 $l k c$: itemq; $f g$ & $r q g$ similia, similiterq; po-
sita; perit, ut $a b c$, ad $l k c$, ita $e f g$ ad $r q g$.

a 22. VL.

75. VL.

Et permuando, ut $a b c$ ad $e f g$, ita $l k c$ ad $r q g$.
Sed ut $l k c$ ad $r q g$, ita est prisma $c k l m n o$,
ad prisma $g q r s t u$, ita etiam prisma $i b k l m n$,
ad prisma $p f q r s t$, tanquam illis equalia. Et ut
unum prisma $i b k l m n$, ad unum prisma $p f q$
 $r s t$: ita sunt duo prismata $i b k l m n$, $c k l$
 $m n o$, ad duo prismata $p f q r s t$, $g k r t s u$. Er-
runt igitur duo prismata in pyramide $a b c d$, ad
duo prismata in pyramide $e f g h$, ut basis $a b c d$,
ad basin $e f g h$. Eodem modo demonstratur, ita
esse duo prismata in pyramide $a i l m$, $m n o d$,
factis in pyramide $a b c d$, ad bina prismata in
pyramidibus $e p r s$, $s t u h$ factis in pyramide
 $e f g h$, ut sunt pyramidum illarum bases $a i l$, &
 $m n o$, ad bases harum $e p r$ & $s t u$. Et sic
porro eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illa
bases, ad has: ita est $l k c$, basis, illis equalis, &
similis, ad basin $r q g$, his similem & equalem, hoc
est, ita est $a b c$ ad $e f g$. Itaq; erunt quoq; pris-
mata cuiuslibet pyramidis facta, in pyramide $a b$
 $c d$, ad prismata cuiuslibet pyramidis facta in py-
ramide $e f g h$, ut basis $a b c$, ad basin $e f g$:

propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis
 $abcd$ ad prismata pyramidis $efgh$; ita prismata
 tam pyramidis $ailm$, ad prismata pyramidis
 $p r s$, quàm prismata pyramidis $m n o d$, ad
 prismata pyramidis $s t u h$: & sic deinceps. Qua-
 rum cum sint, ut duo prismata pyramidis $abcd$,
 ad duo prismata pyramidis $efgh$: ita omnia
 prismata in pyramidibus $abcd$, $ailm$, $m n o d$
 simul, ad omnia prismata in pyramidibus $efgh$,
 $p r s$, $s t u h$ simul: si hac illis multitudine sint e-
 qualia. Erunt etiam, ut bases abc , ad bases efg ;
 ita omnia prismata in pyramide $abcd$, ad om-
 nia prismata in pyramide $efgh$. Quod erat
 opositum.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Sub eadem altitudine existentes
 pyramides $abcd$, $efgh$, & triangula-
 res habentes bases abc , efg , inter se
 sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut base
 abc ad basin efg ; ita
 pyramis $abcd$, ad soli-
 dum x , quod majus vel mi-
 nus est pyramide $efgh$.
 Sic primo minus magnitu-
 dine y .

3. XII. *dine y. Dividatur ergo pyramis e f g h in duas pyramides aequales, & duo prismata equalia. Rursusq; hæc factæ pyramides in alias duas pyramides & prismata equalia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide e f g h, auferatur plus quam dimidium, duo nempe prismata, p q r s t, g q r s c n, & majora dimidio pyramidis e f g h: Itemq; è reliquis pyramidibus e p r s, s t u h, plus dimidio, utpote i l l a r u m prismata; Et sic deinceps;*
1. X. *& reliquitur tandem minor magnitudo, magnitudine y, seu excessu, quo pyramis e f g h, superat solidum x. Relicta ergo magnitudo jam sit minor. Cum vero pyramis e f g h, ponatur æqualis solidis x & y: Erunt reliqua prismata in pyramide e f g h, majora solido x. Dividatur pyramis a b c d in duas pyramides aequales & duo prismata equalia. Itemq; factæ pyramides a i l m, m n o d, utrinque pyramides aequales, & bina prismata equalia. Quoties fiat, quoties in pyramide e f g h est factum. Quoniam ergo omnia prismata in pyramide a b c d, ad omnia prismata numero equalia, in pyramide e f g h sunt, ut basis a b c, ad basin e f g, id est, ut pyramis a b c d, ad solidum x; omniaq; prismata in pyramide a b c d minora quam pyramis tota a b c d: & erunt etiam omnia prismata in pyramide e f g h, minor solidum x; quæ tamen modo ostensa sunt majora. Minus ergo nequit esse solidum x pyramide e f g h.*

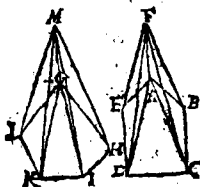
Deinde sit eadem majus. Quoniam ergo ponitur pyramis $abcd$, ad solidum x , ut basis abc , ad basin efg . Erit convertendo solidum x , ad $abcd$, ut efg , ad abc . Ponatur autem solidum x , ad pyramidem $abcd$, ut $efgh$ pyramis, ad solidum y . Quoniam ergo solidum x , majus ponitur pyramide $efgh$: derit & pyramidis $abcd$ major solido y . Quare erit, ut basis efg ad basin abc ; ita pyramis $efgh$, ad solidum y , quod minus est pyramide $abcd$. Quod absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Cum ergo pyramis $efgh$ nec minor nec major sit solido x , erit ipsi equalis. Erit ergo, 7.V.
 basis abc , ad basin efg , ita pyramis $abcd$, ad pyramidem $efgh$, id est ad x . Manifesta etiam hinc est conversa, quod si pyramides triangulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitudine. Et quod si pyramides super eadem five equalibus basibus, ejusdemq; sint altitudinis, etiam sint equales.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes
pyramides $abcdef, ghiklm$ & poly-
gonas habentes bases $abcde, ghikl$;
inter se sunt ut bases.



Resolutis basibus in trian-
gula numero equalia: erit
qualibet pyramis divisa in
totidem pyramides trian-
gulares. Quia vero est, ut
basis abc , ad basin acd ;
ita pyramis abc , ad py-

ramidem acd . Rursusq; ut bases acd , ad
basin ade ; ita pyramides acd , ad
pyramidem ade . Igitur ex aequo, ut
basis abc , ad basin ade ; ita pyramides abc , ad
pyramidem ade . componendo, ut bases $abcde$, ad
basin ade ; sic pyramides $abcde$, ad
pyramidem ade . Similiter erit, ut ba-
ses $ghikl$, ad basin gkl ; ita pyramides $ghikl$, ad
pyramidem gkl . Et convertendo, ut bases gkl , ad
basin $ghikl$; ita pyramides gkl , ad
pyramidem $ghikl$. Rursus quoniam est, ut ba-
ses ade , ad basin gkl ; ita pyramides ade , ad
pyramidem gkl . erunt quatuor bases, $abcde, ade, gkl, ghikl$, cum
quatuor pyramidibus $abcde, ade, gkl, ghikl$, in eadem ratione. Er-
go ex aequo, ut bases $abcde$, ad basin $ghikl$; ita py-
ramides $abcde$, ad pyramidem $ghikl$. Quod erat
propositum.

PRO

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma $abcdef$, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ æquales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagoni ac , cf , fd , æ dividentes eam in trian- 34. L
gula inter se equalia. Est er-

gò, ut bases abc , adc æquales; ita pyramides $abcf$, $adcf$ ejusdem altitudinis, quæ est perpendicularis ex f demissa in planum $abcd$ æ- 35. X
quales. Ita etiã æquales sunt pyramides $adcf$, $efdc$, super æquales bases adf , def constitutæ, sub eadẽ altitudine, cœu perpendiculari à vertice c ad planũ adf demissa. Sed pyramis $adcf$, est eadẽ pyramidi. $adfc$, quippe iisdem contenta planis. Igitur tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ vel $cdef$, æquales inter se sunt; & sic prisma $abcdef$ in tres æquales pyramides est divisum. Unde patet: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

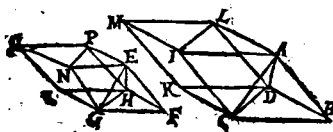
PROPOS: VIII.

Theorema 8.

K k

Similes

Similes pyramides $abcd, efgh$, quæ triangulares habent bases abc, efg ; in triplicata sunt homologorum laterum bc, fg , ratione.



Extendantur plana triangulorum abc, efg ; in triplicata sunt homologorum laterum bc, fg , ratione.

parallelogramma bi, bk, bl : & ducantur rectæ ipsis ai, al æquales & parallele lm, im : connectaturq; km , ut parallelepipedum completum sit $b m$ ejusdem altitudinis cum pyramide, ut parallela plana a ostendunt. Eodemq; modo perficiatur parallelepipedum $f q$. Quoniam igitur propter similitudinem pyramidarum & anguli abc, efg sunt æquales; estq; ut $ab ad bc$, ita $ef ad fg$; erunt parallelogramma bi, fn similia: Ita, cum anguli abd, efh sint æquales; & sit, ut $ab ad bd$, ita $ef ad hf$: ite anguli dbc, hfg æquales, & sit $db ad bc$, ita $hf ad fg$; erunt & parallelogramma bl, bk parallelogrammum fp, fo similia. Sed tam tria bi, bk, bl , parallelepipedi $b m$, reliquis tribus oppositis dm, am, cm ; quàm tria fn, fo, ep , parallelepipedi $f q$, reliquis oppositis tribus hq, fq, gq , sunt æqualia & similia; adeoq; sex plana parallelepipedorum $b m$, & $f q$

15. XI.

14. XI.

sum

Sunt inter se similia ipsaq³ parallelepipeda simili-
 lia γ . Quoniam verò ductis rectis li, pn , Prisma γ 9. def. XI.
 $rad b cila, hfgn pc$ habent δ eandem pro- δ 15. V.
 portionem, quam ipsorum dupla bm & fq . Et
 pyramides $abcd, efgh$, eandem quam prismata
 dicta earum tripla: habebunt quoq³ pyrami-
 des eandem proportionem, quam parallelepipeda. δ 11. V.
 Sed cum proportio parallelepipedorū bm, fq sit δ 33. XI.
 triplicata rationis homologorum laterum bc, fg :
 erit etiam proportio pyramidum triplicata eorum-
 dem laterum bc, fg . Quod ipsum quoq³, locum
 habet in pyramidibus similibus plurium laterum,
 sicut & in prismatibus similibus.

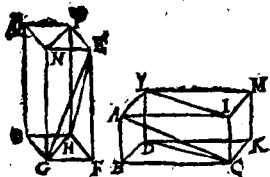
PROPOS: IX.

Theorema 9.

Equalium pyramidum $abcd, efgh$, & triangulares bases abc, efg
 habentium, reciprocantur bases &
 altitudines; & quarum pyramidum
 triangulares bases habentium reci-
 procantur bases & altitudines, illæ
 sunt æquales.

Kk 3

Persici.



Perficiantur, et
precedenti, paralle-
pipeda $b m, f q$, et
eundem altitudinem
cum pyramidibus;
connectanturq; recta
li, $p n$; erunt pri-

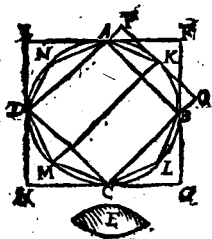
matas $d b c i l a, h f g n p e$, tanquam tripla
pyramidum equalium, inter se equalia ipsaq; pa-
rallelepipedas $b m, f q$ prismaticum dupla equalia:
Eorum itaq; bases reciprocantur altitudinibus,
id est, erit, ut basis $b i$, ad basin $f n$: ita altitudo
solidi $f q$, ad altitudinem solidi $b m$. Sed ut sunt
bases $b i$ & $f n$, ita sunt triangula $a b c, e f g$.
Itaq; ut sunt bases $a b c, e f g$; ita sunt altitudi-
nes pyramidum $e f g h$ & $a b c d$. Quippe eadem
cum parallelepipedorum altitudinibus; & sic recte
procuratur bases altitudinibus. Iam sint bases & alti-
tudines reciproca. Erunt etiam pyramides equal-
es. Constructa figura ut prius, cum sit, ut $a b c$
ad $e f g$; ita parallelogrammum $b i$, ad $f n$. Sintq; e-
adem altitudines parallelepipedorum & pyrami-
dum; erunt etiam bases & altitudines parallelepi-
pedorum reciproca; Et sic = equalia $b m, f q$.
Quare & ipsorum dimidia prismata, & horum par-
tes tertiae pyramides, sunt equalis. Quod ipsum
de reliquis non triangularibus pyramidibus & pri-
matis quibuscunq; potest ostendi.

PRO

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin $abcd$, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus conici triplus, erit vel major vel minor triplo conici. Sit ergo major magnitudine c , & sic equalis triplo conici & magnitudini c simul. Circulo seu basi utriusque inscribatur quadratum

$abcd$, & circa eundem quadratum $efgh$, super qua quadrata intelligantur sub altitudine conici & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum $abcd$, & dimidium est quadrati $efgh$, ut basis ad basin: ita parallelepipedum, ad parallelepipedum ejusdem altitudinis. Erit etiam unum alterius duplum. Et minus super basi $abcd$, majus dimidio cylindri. Iam secentur peripheria ab , bc , cd , da , bisariam in punctis k , l , m , n : junganturque rectæ ka , kb , lb , lc , mc , md , nd , na , & per k agatur tangens op , & parallela ipsi ab , occurrens rectis da , cb productis in punctis o , p : & super akb , $abop$, intelligantur pris-

Kk 3

mata

4. I. *Sumata aequè alta cono vel cylindro. Quoniam op*
a k b est dimidium a b op, erit & illius pi-
 7. XII. *suma hujus dimidium: Eritq; prisma bps*
a k b majus, quàm dimidium segmenti cylindri
cujus basis continetur linea a b, & arcu a k b.
Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum est.
Erunq; omnia prismata quatuor triangulorum si-
mul majora dimidio, omnium segmentorum cylin-
dri simul. Idemq; sequeretur, si peripheria hœ-
returum bisariam secarentur, & fierent alia trian-
gula &c. Si ergo à cylindro, cujus basis est circulus
a b c d, auferatur plus, quàm dimidium, ut paral-
lelepipedum basis a b c d, & à reliquis segmentis
plus, quàm dimidium, nimirum prismata basium
a k b, b l c. Et sic fiat ulterius detractio: & relin-
 per I. X. *quitur tandem minor magnitudo, quàm e, exces-*
sus cylindri supra triplū coni. Sint jã segmenta cy-
lindri relictæ basium a k, k b, b l simul, sumpta
minora, quàm e. Cùm ergo cylindrus ponatur a-
qualis triplo coni & magnitudini e simul, ablatæ
segmentis illis ex cylindro & ex triplo coni unacum
magnitudine e, ipsa e, quæ major est. dictis segmen-
tis erit reliquum prisma basis multangula a k b l
c m d n, ejusdem altitudinis cum cono & cylindro,
majus quàm reliquum triplū coni. Erit itaq; conus
minor tertia parte Prismatis seu Pyramide, cujus
eadem ipse cū est basis & altitudo, totum parte mi-
nus, quod absurdum. Non ergo major est cylindrus
triplo coni.

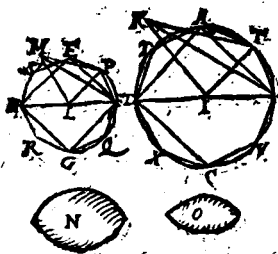
Sit jam minor, & sic conus major tertiâ parte cylind.
 dri magnitudinis e, ut conus sit equalis tertiæ parti
 cylindri, & magnitudini e simul. Constructis iisdem
 Pyramis super a dimidia basi a b c d descripta erit
 dimidia pyramidis super f g h i. Majorque
 pyramis super a b c d, coni super a b c d 6. XII
 circulo descripti dimidio. Rursus jam, ut antea,
 divisis peripheriâ, & completis triangulis, pyra-
 mis super a k b major est dimidio segmenti coni æ-
 quæ altæ, super basi lineæ a b & peripheria a k b
 contenta. Quod ipsum de reliquorum triangularum
 pyramidibus, & segmentorum coni dimidijs verum
 est. Quæ omnes pyramides simul majores sunt quam
 dimidia omnium segmentorum coni simul. Idem
 sequeretur, si peripheria hæc rursus secaretur bisec-
 triam. Si jam ex cono super circulo a b c d factio
 auferatur pyramis dimidio major, cujus basis a b c d
 æquæ altæ: relinquitur minus dimidio, & à reliquis
 segmentis iterum plus dimidio, ut pyramides super
 a k b, b l c, c m d &c. Et sic ulterius fiat detra-
 ctio, & relinquitur tandem minor magnitudo quam
 e, excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint
 jam segmenta coni relictæ a k, k b, b l simul
 sumpta minora quam e. Cum igitur Conus po-
 natur equalis cylindri parti tertiæ, & magnitu-
 dini e simul; Si ex cono detrahatur segmenta præ-
 dicta, & ex tertiâ parte una cum magnitudi-
 ne e, quam major est præfatis coni segmentis
 K k 4 erit.

aris reliqua pyramis, cujus basis polygonum abc m d n, ejusdem altitudinis cum cono & cylindro major tertia parte cylindri reliqua. Et sic tripla pyramidis majus cylindro. Proinde cum prima ejusdem basis cum pyramide, & altitudinis cum cono & cylindro, triplum sit pyramidis: erit prima majus cylindro, pars tota. Non ergo quod est minor triplo coni. Sed neq. major, ut auferet. Ergo equalis. Et sic conus quilibet cujuslibet cylindri aequi alti, & ejusdem basis, est pars tota. Quod erat propositum.

PROPOSITIO. XL

Theorema. 11.

Sub eadem ik, lm , altitudine existentes coni & cylindri inter se sunt ut bases $abcd, efgh$.



Sin. min. q. d. a. basis $abcd$, alia $efgh$, sit conus super $abcd$, aliam magnitudinem n , qua vel minor vel major est uno $efghm$. sit ergo minor

minor magnitudine O , ut conus sit equalis ipsis n
 & O simul. Inscripto quæ ratio $e f g h$ in circulum,
 centur quadrantes bisariam in p, q, r, s , quæ pun-
 ta connectantur cum e, f, g, h . Quoniam ergo, si
 ex cono $e f g h m$ detrahatur pyramis, super basim
 $e f g h$ ejusdem altitudinis, & à reliquis segmen-
 tis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basi-
 um $e p f, f q g$: eodemq; modo semper fiat, detra-
 ctio, semperq; plus dimidio subtrahatur, ut in
 præcedenti propositione; & relinquitur tandem mi-
 nor magnitudo quàm O , excessus coni $e f g h m$
 super n . Sint ergo relictæ segmenta basium coni $e p,$
 $p f, f q$ simul sumpta minora quàm O . Cum igitur
 Conus $e f g h m$ ponatur equalis ipsis n & O
 simul; si ex cono detrahantur dicta ipsius segmen-
 ta, sed ex n & O simul ipsa O major dictis segmentis
 simul, erit reliqua pyramis cujus basis est polygonum
 $e p f q g h s$ ejusdem altitudinis cum Cono, major
 quàm n . Huic ergo polygono simile inscribatur et-
 iam circulo, $a b c d$, ut in secunda propositione est
 factum, & ducantur diametri $b d f h$, & Quoniam
 ergo est, ut circulus $a b c d$, ad circulum $e f g h$; ita
 polygonum $a t b u c x d y$, ad polygonum $e p f q$
 $g r h s$. Sed ut est circulus, ad circulum; ita poni-
 tur conus $a b c d k$, ad magnitudinem n ; & ut
 polygonum ad polygonum: ita est pyramis ad py-
 ramidem ejusdem altitudinis cū Conis. Erit etiam
 pyramis ad pyramidem, ut conus $a b c d k$ ad
 K k s n. Cūq;

n. Cumq; Conus $abcdk$ sit maior pyramidi
 $t b u c x d y k$; δ erit ϵ n maior pyramide $e f$
 $f q g r h s m$: qua tamen modo ostensa est min.
 Quod absurdum. Non ergo minor est n, quam co
 nus $e f g h m$. Hinc ponatur maior magnitudo n co
 no $e f g h m$. Cum sit, ut circuli, $a b c d$, ad $e f$
 $g h$; ita conus $abcdk$ ad n: etiam convertendo
 erit, ut circuli $e f g h$, ad $a b c d$; ita n ad conum
 $abcdk$; Iam ponatur: ut n ad Conum $abcd$
 dk ; ita conus $e f g h m$ ad o: Et quia n
 maior ponitur cono $e f g h m$; δ erit conus $abcd$
 k maior, quam o, Quare erit, ut circuli; $e f g h$,
 ad $a b c d$: ita conus $e f g h m$, ad magnitudinem
 o, que minor cono $abcdk$ est. Quod absurdum,
 quia ostensum modo est, non posse esse conum ad
 magnitudinem minorem alio cono, ut basis est ba
 jus cono, ad basin illius cono. Itaq; non est ma
 jor $e f g h m$: ac proinde aequalis. Quare cum sit,
 ut circuli $a b c d$, ad $e f g h$: ita conus $abcdk$
 ad n, id est: ad conum $e f g h m$: erit, ut basis ad
 basin, ita conus ad conum, si sint aequè alti. Cumq;
 super iisdē basibus aequè alti cylindri cum conis sine
 reorum tripli. η Erit etiam, ut basis ad basin,
 ita cylindrus ad cylindrum, si sint aequè alti.

17. V.

§ 10. XII.

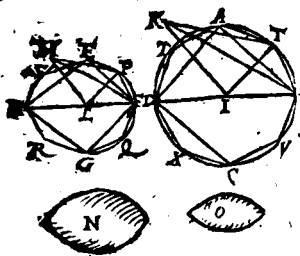
¶ 15. V.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in tripli-
cata ratione sunt diametrorum bd ,
 fh , quæ in basibus $abcd$, $efgh$.



Sin minus, habe-
at conus $abcdk$,
ad aliquam mag-
nitudinem n , tripli-
catam rationem di-
ametrorum, bd ,
 fh ; erit ergo n vel
minor vel major
cono $efghm$. Pri-

imum sit n minor, cono $efghm$, magnitudine o ;
adhibitaq; præcedentis constructione, erit rursus
pyramis $epfqgrhsm$, major quam n . Iam du-
cantur kb , kt , mf , mp , ut fiant triangu-
la bkt , fmp ; connectanturq; ti , pl . Quoniam
igitur Coni $abcdk$, $efghm$ ponuntur similes;
erit, ut diameter bd , ad diametrum fh : β vel, 24. defn. XI.
ut semidiameter bi ad semidiametrum fl , ita $a-$
xis ik , ad axem ml . Cumq; anguli bik , flm § 15. V. 3. def. XI
sint γ recti, quod & coniponantur recti; & ipsorum
axes ad bases recti: δ erunt triangu-
la bik , flm . § 6. V. 4. VI.
aquiangula: adeoq; ut kb ad bi , ita mf ad fl . § 4. I.
Sed ut bi ad bt , ita fl ad fb , ob similitudinem δ 7. V.
triangulorum bit , flp . (quia anguli bit , flp .
similibus arcibus insistentes sunt æquales, cir-
cumq; ipsos latera proportionalia.)

Itaq;

Itaq, ex equo, ut kb ad pt , ita mf ad fp . Et
 sit, quia latera ki , ib , trianguli kib , equalia
 sunt lateribus ki , it , trianguli kit , & anguli
 ipsi, comprehensi recti γ . Erant bases kb , kt , e-
 quales. Et eodemq, modo, equalis erunt recta mf ,
 mp , atq, sic recta kb , kt , rectis mf , mp pro-
 portionales: Quia verò, ut kb , ad bt ; ita kt , ad
 eandem bt : item, ut mf ad fp , ita mp , ad ean-
 dem fp . Erat autem ut kb ad bt ; ita mf ad ft ;
 eritq, ut kt , ad bt , ita mp ad fb : & un-
 vertendo, ut bt ad $t k$, ita fp ad pm . Quare cum
 sit ut $t k$ ad kb , ita pm ad fm ; Et ut kb ad bt ;
 ita mf ad fp . Et, ut bt ad $t k$, ita fp ad pm ;
 habebunt triangula bkt , fmp , latera propor-
 tionalia: Eruntq, & equiangula & similia. Neq,
 aliter reliqua triangula pyramides $atbucxdyk$,
 & $epfqgrhsm$, ambientia inter se similia ostē-
 dentur. Cumq, multitudine sint equalia, erunt
 dicta pyramides & similes & in triplicata propor-
 tione homologorum laterum. Vt autem bt ad fp ,
 ita est bi ad fl , ob similitudinem triangularū bkt ,
 flp : Et ut bi ad fl , ita bd ad fh . Igitur py-
 ramis ad pyramidem habebit quoq, proportionem
 triplicatam diametrorum bd , fh . Sed earundem
 diametrorum proportionem triplicatā habebat Co-
 nus $abcdkadn$: Erit igitur, ut pyramis $atbu$
 $cxdyk$ ad pyramidem $epfqgrhsm$; ita
 conus $abcdkadn$. Cum igitur pyramis prior sit

9. def. XI.

8. XII.

mingt

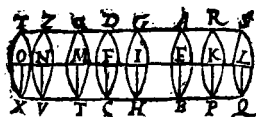
Minor Cono $abcdk$, pars toto: erit etiam po-
 sterior minor magnitudine n , qua tamen modo o-
 stensa est major. Quod absurdum. Non ergo minor
 est magnitudo n , Cono $efgh m$. Iam sit n major
 cono $efgh m$. Cum ergo Conus $abcdk$ habeat
 proportionem triplicatam diametri bd ad dia-
 metrum fh ; Sicut & pyramis $atbucxd yk$ ad
 pyramidem $epf qgrhs m$: erit, ut conus abc
 $d k$ ad n , ita pyramis ad pyramidem: & conver-
 tendo, ut n ad conum $abcdk$, ita pyramis epf
 $qgrhs m$ ad pyramidem $atbucxd yk$. Quare
 cum pyramides illae habeant rationem triplicatam
 homologorum laterum pf ad $t b$, id est, diametri
 fh , ad $d b$, habebit etiam n ad conum $abcdk$
 rationem triplicatam diametri fh ad $b d$. Ponat-
 ur ergo ut n ad conum $abcdk$: ita conus efg
 $h m$, ad o . Erit etiam inter haec ratio triplica-
 ta diametrorum fh ad $b d$. Cum autem n ponat-
 ur major cono $efgh m$: λ erit & conus $abcd$
 k major quam o . Itaq; conus $efgh m$ ad o mi-
 norem cono $abcdk$, proportionem habet tri-
 plicatam diametrorum fh ad $b d$. Quod absur-
 dum: quia ostensum est modo non posse Conum ad
 magnitudinem alio cono minorem; proportionem
 habere triplicatam diametrorum baseos. Itaq; nec
 major est n , quam conus $efgh m$ sed sunt aequales.
 Ideoq; conus $abcdk$, ad n & μ conum $efgh m$, μ 7. V.
 habet rationem triplicatam diametrorum fh ad
 $b d$. Et

b d. Et quia eorundem conorum cylindri sum-
pli, & habebunt ipsi quoque eandem rationem &
plicatam diametrorum basium f h ad b d.

PROPOSITIO XIII

Theorema 13.

Si Cylindrus $abcd$, planogh, se-
cetur, adversis planis ab, cd , paralle-
lo: Erit ut cylindrus, $abhg$, ad cy-
lindrū, $ghcd$; ita axis, ci , ad axem if .



Intelligatur enim
Cylindrus $abcd$,
truncatus, a-
na cum axe & in
angulo eg , ex al-

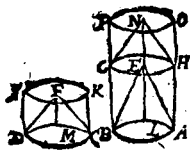
jus revolutione est genitus. Sumanturque in axe pro-
ducto recte ek, kl , aequales ipsi ic : & alie fm ,
 mn, no , aequales ipsi if , & per puncta a, i, k, l, m ,
 n, o , ducantur recte ih, kp, lq, mr, nu , or
aequales & parallelae ipsis eb, fc ; quae ad revolu-
tionem rectanguli describunt circulos gh, pr ,
 qs, ta, uz, xy , parallelos & aequales circulis
 ab, cd : erunt ergo sp, pa, ah, hd, dr, rz ,
 zx . cylindri, ex definitione, componentis cylindrum
totum $squy$. Quoniam vero tam cylindri sp ,
 pa, ah , super aequales bases qs, pr, ba , & in
equalibus

qualibus altitudinibus, kl, ek, ic , sunt æquales;
 uam cylindri xz, zt, td, dh , sub æquales bases
 y, uz, ta, cd , & sub altitudinibus æqualibus 11. XII.
 o, mn, fm, if . Erit tam multiplex cylin- p 7. def. V.
 rus xg cylindri cg , quàm multiplex est æ-
 uis io , ipsius if : Et tam multiplex cylin-
 rus sh cylindri ah , quàm multiplex axis il ipse
 ie . Si ergo axes il & io sunt æquales: æ-
 uales etiam sunt cylindri sh & xg ; si uero axis
 ie est maior, etiam cylindrus cylindro maior est;
 & si minor, minor, in quacumq; multiplicatione. E-
 rit igitur axis ie , ad axem if , ut cylindrus ah , ad
 cylindrum gh .

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super æqualibus basibus ab, cd , ex-
 istentes, conus abc, cdf , & cylindri
 bgh, cdi , inter se sunt ut altitudi-
 nes le, mf .



Extenso cylindro $abgh$,
 ad partes gh , unà cum
 axe le , & rectangulo
 ag ; abscindatur axi mf ,
 æqualis en , ut n sit
 centrum circuli, æqua-
 lis & paralleli ipsi gh &

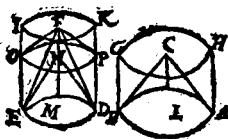
11. XII. *Et fiat cylindrus g h o p ejusdem altitudinis*
 C 7. V. *cylindro c d i k, qui & inter se sunt aequales.*
 13. XII. *quos cylindrus a g s habet eandem rationem.*
 10. XII. *et autem cylindrus a g ad cylindrum a p, ut ad*
 15. V. *vel altitudinem l e, ad axem vel altitudinem e n, d*
est, ad m f huius aequalem. Igitur & cylindri a g
ei sunt ut altitudines l e, m f. Cumq; conus a b c
c d f sint partes d tertiae cylindrorum, erunt et-
iam conus hi, ut altitudines l e ad m f.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Aequalium conorum a b c, d e f, &
cylindrorum a b g h, d e i k, recipro-
cantur bases a b, d e, & altitudines l e,
m f: & quorum conorum & cylin-
drorum reciprocantur bases & alti-
tudines illi sunt aequales.

11. XII.



In cylindris enim si al-
titudines l e, m f sunt
aequales, erunt &
bases aequales: Eritq;
ut bases a b ad d e, i-
ta altitudines aequales m f ad l e, id est, bases o-
rant altitudinibus reciprocae. Si vero altitudines

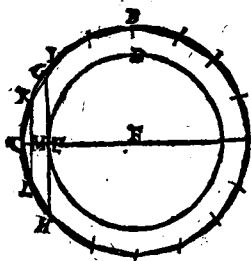
$C, m f$, sint inaequales; abscindatur ex $m f, m n$ equalis ipsi $l c$, & cent' o n describatur planum ipsi basi $d e$ aequale & parallelum, ut fiant duo cylindri $d o, o k$. Quoniam ergo aequales ponuntur cylindri $a g, d i$, & habebunt ad eundem cylindrum $d o$, eandem rationem. Sunt autem cylindri $a g, d o$, ut bases $a b, d e$, propter aequales altitudines; & cylindri $d i, d o$, ut altitudines $m f$ & $m n$ propter identitatem & basis & cylindri. Erunt ergo ut bases $a b$ ad $d e$; ita altitudines $m f$ ad $m n$, vel hinc aequalem $l c$ id est, bases & altitudines sunt reciproca. In conis, si ponantur aequales, $a b c, d e f$; erunt & eorum cylindri $a h, d i$, quorum sunt partes & tertiae, aequales. Et quia horum bases & altitudines reciprocantur. Ergo & conorum. Si verè ponantur bases & altitudines reciprocae, etiam coni & cylindri erunt aequales. In cylindris ergo $a g, d i$, si altitudines $l c, m f$ sint aequales, cum bases $a b, d e$ sint, ut altitudines: erunt & ipsae & toti cylindri aequales: si verò altitudines sint inaequales, cum ponantur altitudines $m f$ ad $l c$, id est, $m n$ ut bases $a d$ ad $d e$: = Siniq; bases $a b$ ad $d c$ ut cylindri $a g$ ad $d o$, propter altitudines aequales; & ut altitudines $m f$, ad $m n$, ita cylindri $d i$ ad $d o$ propter identitatem basis $d e$. Erunt cylindri $a g, d i$ in eadem ratione, ad cylindrum $d o$, & sic aequales. In conis verò reciproca positis basibus, & altitudinibus; ipsorum quoq; tri-

pli cylindri reciprocantur propter easdem bases & altitudines reciprocas, ex quibus cum cylindri includantur aequales, aequales etiam erunt ipsarum partes tertiae vel conici.

PROPOS: XVI.

Problema 1.

Duobus circulis abc , de , circa idem centrum f existentibus, in maiori circulo abc , polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum de .



Extendatur per centrum diameter ac , qui secet circulum de in e , per quod A punctum ducatur perpendicularis ipsi ac , quæ tangens erit circuli de . Quoniam arcus agc maior est

arcu gc subtracto dimidio ab & ex residuo bc , dimidio bi , & ex residuo ic dimidio ik , & relinquitur ck minor quam gc : erit q_3 ck subtensa ipsi ck arcui latus polygoni inscribendi. Si enim arcus bi in partes numero & magnitudine aequales ipsius ci dividatur, & quadrans ab in aequales partem

13. III.

1. X.

tribus $b c$ quadrantis, & $a h c$ semicirculus in aqua-
 les semicirculi $a b c$ partibus, quibus arcubus sub-
 tensa linea omnes erunt & aequales recta $c k$: & sic
 polygonum equilaterum erit perfectum, quod mi-
 norem circulum $d e$ non tangit. Demissa per-
 pendiculari $k l$ per k in $a c$, quam secat in m . Quo-
 tiam anguli $g e m$, $k m e$ sunt recti: d erant $g h$,
 $k l$, parallelae. Quare cum $g h$ tangat circulum
 $g e$ in e erit $k l$ tota extra illum circulum, cumq;
 nunquam attinget, quia nunquam cum recta $g h$
 convenire potest. Ideoq; multo minus k longius ab
 eodem circulo remota tanget illum circulum. Pro-
 inde nec reliquorum polygoni laterum ullum huic
 $c k$ aequalium, aequaliter quippe à centro f distan-
 tium, circulum $d e$ continget.

y. 29. III.

d. 28. I.

i. 14. III.

PROPOS. XVII.

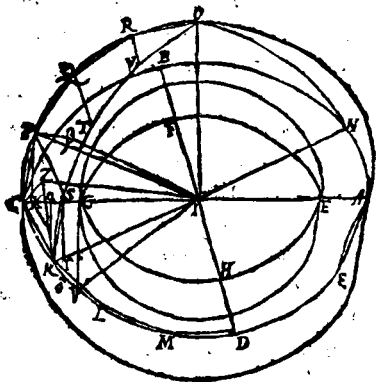
Problema 2.

Duabus sphaeris $a b c d$, $e f g h$, circa
 idem centrum i existentibus, in ma-
 jori sphaera $a b c d$ solidum polyedrum
 inscribere, quod non tangat mino-
 res $e f g h$, sphaerae superficiem.

Ambae sphaerae secantur plano aliquo per centrum,
 sintq; communes sectiones factae in sphaera plana $a b$
 $c d$, $e f g h$, quae circuli sunt ex definitione sphaerae,
 idem habentes centrum i cum ipsis sphaeris.
 In his circulis ducantur diametri $a c$, & $b d$
 in centro i ad angulos rectos se secantes;

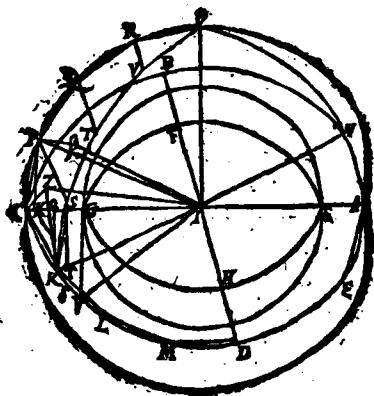
h. l. d.

m.



- ut sint quadrantes ab, bc, cd, da . Postea in
 a 16. XII. majori circulo a inscribatur polygonum non tangens
 p cor. 16. minorem, quod pro demonstrationis facilitate ita
 III. fiat. Ex g ad c g ducatur perpendicularis $g\gamma$ usque
 y 1. IV. ad circumferentiam circuli $abcd$ qua circumferentia $efgh$
 d 19. I. tangit in g ; cui $g\gamma$ aequalis applicetur ac in circulo
 $abcd$, quia verò si arcus $c\gamma$ intelligatur sub-
 tendendi recta, ut fiat triangulum $gc\gamma$, est $c\gamma$ la-
 tus majore seu recto angulo oppositum majus latere
 $g\gamma$, erit $c\gamma$ ipso ac . Abscindatur ergò cd arcus a-
 qualis ipsi ac , si jam ex quadrante cd auferatur
 dimidium dl & ex reliquo cl dimidium lk , & sic
 deinceps, relinquetur tandem arcus minor arcu
 cd , seu arcu ac . Sit ergò arcus ck minor arcu
 cd , seu arcu ac . Sit ergò arcus ck minor arcu cd .

erit etiam ck subtensa minor recta ac , id est. zy .
 & ck erit inscribendi polygoni latius. Nam cum
 recta cd arcum subtendens minorem arcu $c\gamma$, non
 tangat circulum $efgh$; multo minus ck arcum
 cd minorem subtendens eundem circulum tanget.
 Rursus ducta diametro kn , erigatur ex centro i
 perpendicularis io , ad plana circulorum $abcd$,
 $efgh$, occurrens superfici ei sphaerae maioris in o , &
 per rectas oi , ac , & oi , kn ducantur plana, quae
 ad circulum $abcd$ erunt recta, efficiuntq; com-
 munes sectiones circulos, quorum semicirculi sunt aoc , nok . Quia vero anguli oic , oik sunt
 recti; & erunt oc , ok quadrantes, & quidem
 quia aoc , nok , circuli aequales sunt ipsi $abcd$
 propter aequales diametros: erunt ipsi cd , oc , ok ,
 aequales quadrantes. Si ergo d arcus dividatur
 in tot partes, in quos divisus est cl ; & quadran-
 tes oc , ok in partes numero & magnitudine a-
 quales arcibus quadratis cd : erunt illis omnibus
 subtensa recta ck , kl , lm , md ; cp , pq , qr ,
 ro , rs , st , tu , uo aequales. Conjunctis autem rectis ps
 qt , ru , demittantur ex p & s ad planum circuli
 $abcd$ perpendiculares px , sy , quae in communes
 sectiones ac , nk , cadent, eruntq; inter se pa-
 rallelae. Quoniam ergo triangulorum pcx , sky
 anguli x & y sunt γ recti; anguliq; pcx , sky ,
 aequales, quod peripheria aop , nos ; quibus in-
 sistunt, aequales sint. Erunt ergo propter illos an-



33. I.

2. VI.

9. XI.

7. XI.

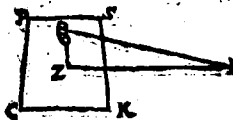
gulos equales & latera $p.c$, $s.k$ equalia. etiam reliqua latera reliquis equalia. Cum itaq, equalia sint $p.x$, $s.y$ & parallela erunt & ipsas connectentes $p.s$, $x.y$, equalia & parallela. Sed quia etiam $c.k$, $x.y$, sunt parallela, propter latera $a.i$, $c.k$; proportionaliter secta erunt & $p.s$, $c.k$ parallela, & has connectentes $c.p$, $k.s$ in eodem cum ipsis plano erunt & totum quadrilaterum $c.k.s.p$ in uno plano erit. Si ex q & t demittantur perpendiculares in planum $a.b.c.d$, connectanturq, recte $q.c$, $t.k$, quas similiter parallelas, ipsaq, $p.s$, $q.t$, tanquam eidem $c.k$ parallelas, inter se parallelas, totumq, quadrilaterum $p.s.t.q$ in uno plano esse ostenderemus; sicut & quadrilaterum

$q.t.u.r$

q. tur & triangulum $\downarrow$ r u o. Quae ipsa constru-
 tio si & super reliqua latera k l, l m, m d, dictis. $\downarrow$ 2. XI.
 videlicet quadrantibus, o l, o m, o d exhibeatur.
 nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo he-
 misphaerio, ut tota sphaera major quadrilateris &
 triangulis repleatur similibus & equalibus modo
 praedictis super latum c k inter quadrantes o c, o k
 constructis, inscriptum erit in majori sphaera solidum
 polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atq;
 triangulis. Dico hoc sphaeram minorem ef gh non tan-
 gere, ducatur i r. Quoniam igitur ex constructione
 c k o est minor recta c r: est enim c k major, quam α 19. I.
 cz quod angulus cz k est obtusus, multo major erit α per schol.
 quam cz & quadratum rectae g r majus quadrato z c. sequens.
 Quoniam vero quadratum i r β aequale est quadratis
 rectarum i g, g r, & quadratum ic, quadratis i z
 z c: sunt autem aequalia quadrata i r, i c, aequalia β 47. I.
 ergo sunt etiam i g, r g, ipsi i z, z c: demptoq;
 illic quadrato g r, & hinc quadrato z c, relinque-
 tur quadratum i g minus quadrato i z; rectaq;
 i g minor recta i z. Quocirca cum i g sit sphaera
 minoris ef gh semidiameter, existet punctum z,
 extra eandem sphaeram, ipsumq; planum c k s p,
 sphaeram ef gh minime tanget quod & reliqua o-
 minia ipsius puncti a longius absint a sphaera illa quam
 z. Ducatur rursus ex i ad planum p s t q, perpen-
 dicularis i p; erit p centrum circuli circa p s t q,
 descripti, connexusq; s p, i p, cum angulus i p p, sit
 r rectus. Erit quadratum i p aequale quadratis i c, s p.

Quia verò & quadratum ic aequale quadrato
 aequale est quadrato iz , zc : Est autem quadra-
 tum zg majus quadrato sp , quod & linea zc ma-
 jor sit, quam linea sp . Reliquum ergo quadratum
 recta is majus est quam iz : adeoque, multo magis
 punctum s extra sphaeram $efgh$, existet, quam
 z : multoque, minus planum $pstq$ quam $cksp$,
 tanget sphaeram $efgh$. Eodemque, modo demon-
 stratur, nullum reliquorum planorum attingere
 posse sphaeram $efgh$. Quod erat faciendum.

Scholium.



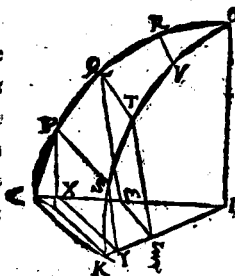
In quadrilatero ck
 sp ponebatur angulus
 czk obtusus, quod
 probatur: Circumscripti
 circulo circa illud, qua-
 drilaterum, cum sit, ut
 ik ad kc , ita iy ad yx
 yk autem sp major sit quam
 iy ; major etiam erit k
 c , quam yx , id est, quam

sp . Quare cum aequalibus arcibus subtensa ck ,
 p et ipsi kc sint aequales, y erunt arcus illi singuli
 majores quadrante, ipseque, angulus czk obtusus.
 Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta
 quadrilateri $cksp$ longius abesse, quam z , quod
 patet. Punctum enim quodcumque, connectatur cum i ,
 quo-

q. 4. VI.
 p. 14. V.
 y. 28. III.
 d. 13. III.

1. *am i z* est: rectus. & Erit ipsi oppositum latius
 2. *z* *am i z* latere: & sic *am i z*.

13. def. XL
§ 19. L.



Deniq, probabitur, quomodo recta z c major sit recta a p; si tamen prius fueris ostensum, p s esse majorem recta q c. Opus autem est nobis hinc figura superioris parte intrase-midiametros i c, i o contenta, & quadrantibus o c, o k; demissioneq, per-

38. XI.

p erpendicularium e μ , τ ξ quae ad communes circulo- 16. .XI.
 rum sectiones i c , i k cadunt, ac parallelae sunt,
 quas aequales & parallelae q t & μ ξ connectunt. 2. V L
 Quae μ ξ cum x sit parallela ipsi c k , quia i c & i k 30. I.
 latera similiter per μ ξ sunt secta, etiam parallela μ cor. 4.
 x erit x y . μ Erit itaq; ut t y ad y x , ita i ξ , ad ξ μ V L
 & sit y x vel s p . major quam ξ μ vel q t .

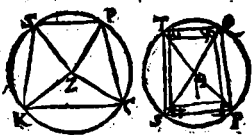
#6.XI.

2. VL

λ 30. I.

REF. 4.

VL



Hoc ostenso ex centro
z, p, circa quadrilate-
ra cksp. pstq, de-
scribantur circuli cum
semidiametris. Si z c

non credatur major quàm βp , erit vel equalis, vel minor. Si equalis, cum lateribus $c k$, & c ponantur equalia latera βs , βp , & basis $k c$ major quàm βp ; erit angulus $k z c$ major angulo $\beta \beta p$. Eo-

125.1.

Li S

demg

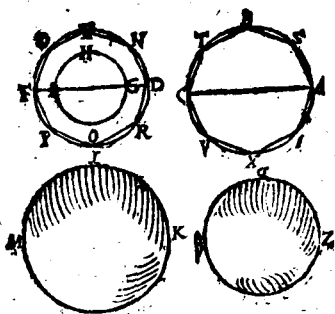
§ 22. I. demq, modo $s z p$. major est angulo βq . Sed p
 pter bases $s k$, $p c$, $t s$, $q p$ aequales, & aequales (d.
 cor. 15. I. anguli $k z s$, $c z p$, $s p t$, $p \beta q$. Igitur quatuor an-
 guli ad z , qui quatuor rectis sunt, aequales, ma-
 jores sunt angulis quatuor ad β , qui & ipsi quatuor
 rectis. aequales sunt. Quod absurdum. Si igitur mi-
 nor sit $z c$ quam βp , abscindantur $\beta \pi$, $\beta \epsilon$, $\beta \mu$
 $\beta \phi$ aequales ipsis $z c$, $z k$, $z s$, $z p$, connectanturq, pun-
 cta π , ϵ , μ & lineis quadrilateri $s p q t$ lateribus
 parallelis. Erunt itaq, ut βs ad $s p$, ita $\beta \epsilon$, ad ϵp ,
 $\epsilon \mu$ nimirum μ minor quam $\beta \epsilon$, sicut & $\epsilon \mu$, $\mu \phi$
 ϕt minores sunt quam $s t$, $t q$, $q p$. At cum $s p$
 sit minor, quam $c k$; & $s t$, $p q$, aequales rectis $k s$,
 ϵp ; $t q$ & minor, quam $p s$: erunt rectae $\epsilon \pi$, $\pi \mu$,
 $\mu \phi$, & ϕt minores rectis $c k$, $k s$, $s p$, $p c$; sed propter
 $\beta \pi$, $\beta \mu$, $\beta \epsilon$, $\beta \phi$ aequales positae ipsis $z c$, $z k$, $z s$, $z p$
 anguli ad z majores angulis ad β , quibus tamē a-
 quales sunt. Itaq, nec βp ipsa $z c$ minor erit; &
 quia nec aequales sunt. Proinde $z c$ major erit quam
 βp . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema. 16.

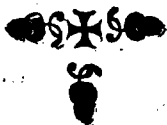
Sphaerae sunt $a b c$, $d e f$ in tripli-
 cata ratione suarum diametrorum,
 $a c$, $d f$.

Si minus, erit sphaera $a b c$ ratio eadē, ad aliam vel
 majorem



majore vel minorem spheram. Primum ergo habeat
 rationem triplicatam ac ad d f. sphaera abc , ad spha-
 ram ghi minorem sphaeram def . Inscriptur autem ^{17. XII.}
 in majori sphaera dcf polyedrum dne of pqr ,
 non tangens minorem ghi , atq; huic simile abc ,
 sphaera asb $tcuxy$; quae cum sint in triplicata ra- ^{Coroll.}
 tione ac ad d f; sicut sphaera abc , ghi : erit. ^{17. XII.}
 ut abc , ad ghi , ita polyedrum ad polyedrum. Itaq;
 cum sphaera abc sit major polyedro sibi inscripto,
 et erit & ghi sphaera major altero polyedro, dne
 of pqr , pars toto. Quod absurdum, non ergo major. ^{et 14. V.}
 sphaera abc , ad minorem ghi , ipsa def ha-
 bet rationem triplicatam diametrorum ac ad d
 f. Habeat porro rationem hanc ad quandam major-
 iorem klm , ipsa def . Rursus est, ut polyedrum,
 asb $tcuxy$ ad polyedrum dne of pqr , si d-
 est, ut ac ad d f, ita sphaera abc ad sphaeram klm :

Et convertendo, ut klm ad abc , ita polyedra
 posterius ad prius, id est, $\beta d f$ ad αc . Ponatur
 autem, ut klm ad abc , sic $d e f$ ad $z = \beta$. Quia
 ergo sphaera klm maior ponitur ipsa $d e f$. Erit
 et abc maior ipsa $z = \alpha$. Itaque, sphaera $d e f$ ad
 sphaeram $z = \beta$, ipsa abc minorem, habet ratio-
 nem triplicatam diametrorum $d f$ ad αc . Quod
 absurdum, quia ostensum est, non posse sphae-
 ram ad sphaeram aliam sphaeram minorem, pro-
 portionem habere triplicatam diametrorum. Cum
 ergo sphaera abc , neque ad minorem neque ad ma-
 iorem sphaeram, ipsa $d e f$, habeat rationem tri-
 plicatam diametrorum αc ad $d f$: habet itaque ad
 ipsam $d e f$. Et sic sphaera quavis ad quamvis tri-
 plicatam diametrorum rationem habet. Hinc
 fit: sphaeras esse inter se, ut in ipsis similia
 polyedra descripta propter proportionem
 eandem triplicatam diame-
 trorum.





ELEMENTO- RUM EUCLIDIS,

LIBER XIII.

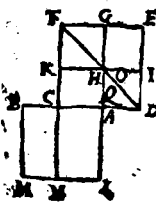
PROPOSITIO I.

Theorema 1.



Si linea recta ab secundum
extremam & mediam ra-
tionē a secetur in c : ma-
jus segmentum assumens
dimidiam totius, quintuplum potest
esse, quod à dimidia totius descri-
bitur quadrati.

10. II. vel
30. VI.



Super cd fiat quadratum ce ,
in quo ducta diametro df , du-
catur ag ipsi de parallela, se-
cans diametrum in h puncto per
quod ducatur ik parallela ipsi cd .
Deinde super ab perficiatur qua-
dratum.



Quoniam a c est bisecta in d,
addita c b; erit a rectangulum

6. IE.

a b, b c, una cum quadrato recte c d, aequale
quadrato recte b d. Sed rectangulum sub a b, b c
est quadruplum quadrati c d, quia intermedium
quadratum a c, huic aequale, est quadruplum qua-
drati ejusdem c d. Idem ergo rectangulum sub a
b: b c una cum quadrato c d, est quintuplum
quadrati c d. Ideoque quadratum recte b d,
segmenti minoris cum dimidio majoris quintuplum
est ejusdem c d quadrati.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si recta linea a b, secundum me-
diam & extreman rationem sece-
tur in c: quod a tota a b, quodq; a mi-
nore segmento c b simul, utraq; qua-
drata a b, c b tripla sunt ejus quod a
majore segmento a c describitur qua-
drati.



17. VL

7. LI.

Quia enim rectangulum sub
a b, b c aequale est quadrato
a c; & illud rectangulum
bis, cum quadrato a c, tripla
est quadrati a c: erunt & bis aequalia quadrata
a b, b c tripla ejusdem quadrati a c.

PRO.

LIBER XIII.
PROPOS: V.

355

Theorema 5.

Si recta linea ab , secundum mediā
& extremam rationem secetur in c ;
apponaturq; ei da æqualis majori $a c$
segmento: tota recta linea bd secun-
dum mediā & extremam rationē
secatur, & majus segmentum est, quā
principio recta linea $a b$.



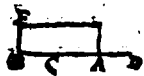
Quia enim est, ut ab
ad ac , vel $a d$, ita $a c$ ad $c b$:
etiam convertendo est, ut da
ad $a b$, ita $b c$ ad $c a$: &

componendo, ut $d b$, ad $a b$, ita $a b$, ad $c a$, vel ad
 $d a$. Secta itaq; est $b d$ in a , extrema & media
ratione.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab Rationalis extre-
mā ac media rationē secetur in c , ut-
rumq; segmentorū $a c$, $c b$ irrationalis
linea est, quæ vocatur Apotome.



Addatur majori segmento
 $a c$, recta $a d$, æqualis dimidia
totius ab . Quoniam ergo quadra-
tum rectæ $c d$, est æquiduplum a 1. XIII.

quadrati rectæ $a d$; habebunt quadrata $a c$ ad ad ,

$M m$

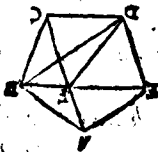
ratio-

6. X. Rationem, quam numerus ad numerum: & erunt inter se commensurabiles: ipseque recta c d ad commensurabiles saltem potentia. Sed ad idem a Rationalis a b, est Rationalis. Ergo & c d.
24. VIII. Qui vero quadrat a c d, ad non habent rationem, quam numerus quadratus, ad quadratum, cum sit quinarum ad unitatem: & erunt c d, a d recta longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales potentia solum commensurabiles. Quare,
74. X. si ex Rationali c d detrahatur a d rationalis potentia solum commensurabilis: erit reliqua a c Irrationalis, quae vocatur Apotome. Rursum, applicato ad a b rectangula a c, contento sub a b, c b: cum sit, ut a b ad a c; Sic a c ad c b: erit hoc rectangulum a c aequale quadrato rectae a c. Quare quadratum Apotomae a c, i. e. rectang. a c applicatum ad a b Rationale facit alterum latius b c, vel huius aequale segmentum minus c b. Apotomen primam
98. X.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si pentagoni a b c d e æquilateri, tres anguli a b c sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonum.



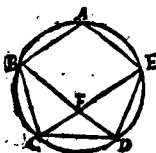
Primò sint tres anguli a, b, c deinceps. Angulis ceteris equalibus subtrahatur recta b e, a c, b d; atque ex intersectione illarum

Min. PRO.

EVGLIDIS ELEM.
PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si pentagoni $abcde$ æquilateri & æquianguli duos c, d angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ db, ce ; hæc mediæ & extrema ratione se mutuò secant, & maiora ipsarum segmenta fb, fe , æqualia sunt pentagoni lateri.



Descripto = circulo circa pentagonum. Erunt quoque arcus $ab, bc, cd, de, e a$ æquales. In triangulis autem cdb , & dce propter æqualia latera bc, cd, de ; & æquales contentos angulos c, d , æquales fiant bases bc, de , & anguli edb, ecd : quibus cum sit externus bfc , æqualis γ : Erit etiam anguli dce duplus: Sicut & bce , propter duplum arcum bac , ejusdem dce duplus est. Ideoque, bfc , & bce ferunt æquales rectæque, bf, be , æquales, id est, lateri pentagoni bc æquale est segmento majori bf , subtensa bd . Sunt autem & anguli $c b d$, anguli $c d b$, æqualibus peripheriis bc, cd insistentes & æquales. Præinde triângula bcd, cfd , propter angulos cdb, cbd æquales, ipsis $fc d$, & fdc , erunt γ æqualia. Eritque, ut bd ad dc , id est, bf : ita dc ,

m 14. IV.
p 28. III.

γ 32. I.

d 33. VI.
e 6. I.

z 27. III.

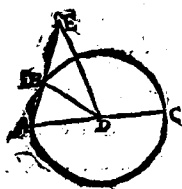
e 40. VI.

$\angle c$, id est, $b f$, ad $f d$. Ideoque $b d$ in f secta est extrema & media ratione. Eodem modo & $e c$ in f eadem ratione secta esse ostenderetur.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si hexagoni latus $b c$, & decagoni $a b$, in eodem circulo $a b c$ descriptorum, componantur: tota recta linea $a c$ extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus $b c$.



Ex a per centrum d ducatur diameter $a c$, & conjungantur recta $d b$, $d e$. Quoniam igitur $a b$ arcus est decima pars circuli: Semicirculus $a c$ continebit enim quinquies, eritq; $b c$ quadruplus ipsius $a b$: & angulus $b d c$

quadruplus anguli $b d a$. Rursus in triangulo $d b c$ 33. VI. equalium laterum $d b$, $b c$; β erunt $b d e$, & $c a$ 35. I. quales, quibus equalis γ externus $d b a$, duplus erit ipsius e : Sicut & $d b a$ equalis β $d a d$. Et sic ambo γ 32. I. simul quadrupli anguli e : adeoque $b i s$ γ equalis externus $b d c$ ejusdem e quadruplus. Qui cum & 42. I. anguli $a d b$ fuerit quadruplus: erunt e & $a d b$ aequales. Et sic propter angulos e & a aequales ipsis $b d a$, & a , triangu^{la} $a c d$, & $a d b$, equiangu^{la}.

M m 2

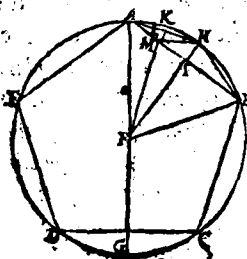
Erit

Erit igitur, ut $a e$ ad $a d$, id est, $e b$; ita $a e$ ad $e b$, ad $a b$. Secta nimirum est $a e$ secans extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latus hexagoni. Hinc patet, cum quintam hujus detractum minus segmentum majore, relinquat majus segmentum, divisandum extremam & mediam rationem, quod subtracto latere decagoni ex hexagoni latere sit decagoni latus segmentum majus lateri hexagoni media & extrema ratione secti,

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo $a b c d e$, pentagonum equilaterum describatur; Pentagoni latus $a b$, potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo describitorum.



Ducatur diameter, & semidiameter AG , & bisecto arcum AB in K ; erit $a h$ latus decagoni, & $b f$ hexagoni. Rursus bisecto arcum $a h$, in k : Ducatur $f k$ secans $a h$

$\triangle ahl$; & ba , in m jungatur hm . Propter
 rectus ergo ah , bh , & am aequales erant anguli infi-
 entes afh , hfb . Et sic in triangulo bfi , afh ,
 propter equalia latera af , fb ; & f commune a-
 quales sunt bases bi , ba ; & anguli bif , aif .
 Et est, & fi , sicut & la , lh sunt aequales, anguliq;
 laa , & flh , & recti. Si jam ex semicirculo $abcg$, &
 $aedg$ auferantur aequales arcus ab , cd ,
 relinquantur cg , gd aequales inter se: Et sic
 aequales ipsis bh , ah . Quorum bh , cum sit duplus
 arcus hk ; ejusdem duplus erit cg . Eodemq; modo
 ut ab , ita & bc duplus est arcus bh . Quare ar-
 cus cg , bc , sunt aequi multipliciter arcuum hk , bh ,
 dupli: & adeoq; totus bg duplus totius bk : angu-
 lusq; bfg duplus anguli bfk . Cumq;
 idem bfg ad centrum du-
 peripheriam: erunt ergo bfm , fah aequales; Et
 trianguli baf , bfm , propter aequales angulos
 baf , bfm , & abf communem, & equiangula.
 Quocirca ut ab ad bf ita bf ad bm . Ideoq;
 rectangulum sub ab , bm , aequale erit quadrato
 recte bf . Rursus in triangulis rectangulis alm ,
 & hlm , propter latera equalia al , lh , & lm
 commune, & aequales sunt bases ma , mh , &
 anguli lam , lhm : sed lam est ipsis bha , &
 qualis. Igitur & lhm , & ideoque triangula
 ahb , & amh sunt equiangula.

Hm

Qum

q. 4. VI.

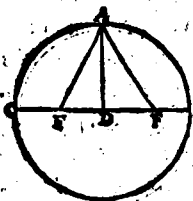
q. 7. VI.

q. 5. I.

q. 2. II.

Quamobrem, ut $a b$ ad $a h$, ita $a h$ ad $h m$ sic sub $a b$, $a m$, contentum rectangulum est quadrato $a h$. Sed sub $a b$, $b m$ est ostensum quale quadrato $b f$. Itaq, rectangula sub $a b$, $b m$ & $a b$, $a m$ equalia sunt quadrato $b f$, $a h$ mul. Sed illa duo rectangula sub $a b$, $b m$ & $a b$, $a m$ sunt & equalia quadrato $a b$. Aequale ergo est quadratum $a b$, quadrato $b f$, $a h$, latum trapezoni & decagoni. Hinc patet primo, quod linea ex centro bisecans arcum, ejus quoq, subtensam bisecet. Secundo quod diameter circuli ex uno angulorum pentagoni latus ipsi oppositum bisariam secet.

Scholium.



Ex Ptolemaeo usitata est praxis, qua una eademq, opera in dato circulo & pentagonum & decagonum describantur. Ejus demonstratio hac est. In circulo $a b c$, super diametro $b c$ rigatur perpendicularis ex centro, $d a$, & $d c$ bisariam secata in e ducatur $e a$: ipsiq, equalis abscidatur $e f$; & ducatur $f a$. = Erit $f a$ latus pentagoni & $f d$ decagoni. Quia enim $d c$ bisecat $d e$ in e , ipsiq, adjecta $d f$, = erit rectangulum sub $c d$, $d f$, una, cum quadrato $d e$, = quadrato rectae $c f$.

q. 4. I.

1. 2. 3. Quod equale est quadrato rectarū cd , da-
 empto itaq; quadrato cōmuni dc : relinquitur
 et angulū sub c f , d f , equale quadrato recta ad ,
 1. 2. 3. est, quadrato c d . 7. Erigitur, ut c f ad c d ; itaq;
 d ad d f . Et sic c f divisa est secundum extremam
 7. mediam rationem in d . Cum igitur illius segmē-
 um majus c d sit latus d hexagoni: erit d latus d 15. IV.
 hexagoni ejusdem circuli. Rursus quoniam qua- 9. III.
 dratum fa equale est quadrato laterum hexagoni
 d , et pentagoni d f , erit fa latus pentagoni. 10. XIII.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si in circulo $abcde$ Rationalem
 habente diametrum ag , pentago-
 num $abcde$, æquilaterum describa-
 tur: Pentagoni latus ab latus Irrati-
 onalis est linea, quæ vocatur Minor.



Per centrum f ducantur diame-
 tri ag , bh : quorum ag secet
 cd latus in i : connectanturq;
 ac , ah : Quarū ab secet dia-
 metrum bh in k . Abscindatur
 quoq; ex semidiametro fh quar-
 ta ipsius pars fl ; itemq; ex re-

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

o. 15. X.
p. cor. 10.

XIII.

o. 32. II.

o. 4. VI.

o. 15. V.

o. 22. VI.

o. 8. XIII.

o. 11. XIII.

o. 6. X.

o. 20. VI.

metur b h Rationalis est; erunt & ipsius ad
partes b f, f l rationales. Totaq; b l utriq; com-
mensurabilis, & Rationalis. Rursus, quia f b ex cen-
trat arcum a c bisectum in b; ergo a, & ipsius
sensum ac in k, & ad angulos rectos. Sicut & i;
ipsam o d in i. Atq; ita triangula a c i, a f k, n
triangula, propter communem angulum a sunt
quiangula: & eritq; ut e i ad c a; ita f k ad l i:
& permutando, ut c i ad f k; ita c a ad l a. n
autem c a ad f a, ita est c u, quare a p ipso
ca ad f l, quartam partem ipsius f a. Erit ergo
c i ad f k, ita c m ad f l: & permutando ut i
ad c m, id est, harum duplex d a d c k, ita f k
ad f l: & componendo, ut c d e k simul, ad c k; ita f k
f l simul, id est, k l ad f l. Ideoq; erit, ut quadra-
tum rectarum c d, c k simul, ad quadratum c k;
ita quadratum k l ad quadratum f l. Quia vero, f a c
secetur media & extrema ratione, ducta videlicet
recta b d, majus ipsum segmentum a quale est la-
teri pentagoni, ut c d: & erit quadratum compo-
situm ex c d segmento majore & c k, dimidia totum,
quintuplum quadrati rectae c k seu dimidia totum.
Quare & quadratum k l quintuplum est quadrati
f l. Ideoq; quadrata k l, f l commensurabi-
lia sunt, & rectae k l, f l potentis saltem com-
mensurabiles. Sed f l erat Rationalis. Ergo & k l.
Deinde, quia b l continet quatuor partes ipsi f l

equa

quales sit bl talium quinque; a habebitque bl qua-
 ratum talium 25, qualium fl , unam propter ra-
 tionem duplicatam quadratorum ad latera, & kl
 quinque. Cum igitur quadrata bl , kl , non ha-
 beant rationem numerorum quadratorum: Sunt
 enim ut 25, ad quinque, vel quinque ad unum: „ 9. X.
 erunt recta bl , kl longitudine incommensura- „ 47. X.
 biles. Ideoque cum & Rationales, erunt Rati-
 onales potentia solum commensurabiles. Si itaque
 ex rationali bl , dematur Rationalis kl , poten-
 tia tantum commensurabilis; Erit reliqua b Irra-
 tionalis & Apysome, cuius congruens est kl . Iam
 recta bl possit plus, quam kl , quadrato recta n ,
 Quoniam quadratum bl , aequale est quadrato kl
 & n , sed qualium bl fuit 5, talium kl est una:
 Erit n reliqua talium 4; habebunt igitur quadra-
 ta bl & n proportionem numeri ad numerum.
 Ideoque erunt commensurabilia, ipseque bl & n
 recta commensurabiles saltem potentia: Sed bl est
 ostensa Rationalis. Erat igitur & n rationalis.
 Quoniam illa bl ad n ratio, non est numerorum
 quadratorum. Est enim quatuor ad quinque.
 „ Erunt bl & n longitudine incommensurabiles.
 „ Et proinde rationales potentia solum commensura-
 biles. Quare cum tota bl rationalis longitudi-
 ne, sit commensurabilis rationali b h: (Qualium
 enim b h est octo, talium bl est quinque)

postquam

¶ cor. 8. VI
 31. IV.
 27. VI.
 95. X.

possetq; plus quam congruens k l quadrato recta
 sibi longitudine incommensurabilis, erit b k Ap-
 pte quarta ex definitione. Deniq; quia ab est ter-
 tia proportionalis inter b h, b k; Quia b a h d
 rectangulum. propter angulum rectum a, ex q
 demissa perpendiculari a k, erit a b, quadratum
 aequale rectangulo sub b h, b k. Cum igitur super-
 ficiem sub Rationali b h, & Apotoma quarta b k,
 possit recta a b e erit a b Minor.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo a b c, triangulum æ-
 quilaterum a b c describatur; triangu-
 li latus a b potentia triplum est ejus
 lineæ d b, quæ ex centro circuli d du-
 citur.

¶ coroll.
 10. XIII.



Ducta diametro a c; selectur
 & arcus b c in c, & subtensa
 b c in f bisariā, & ad angulos
 rectos: erit b e, dimidia pars
 tertia b c, pars sexta circuli, i-
 phusq; subtensa b e latus hexa-

¶ cor. 15. IV. goni, æquale d semidiametro circuli. Quoniam er-
 y 47. I. go quadratum æ c y æquale est quadratis a b, b c,
 & 21. III. quod angulus a b c in semicirculo sit rectus d. Est
 autem

Item recta ac quadruplum recte be dimidia.
 Alium itaq; partium quadrata ab , b e sunt
 quatuor, talium b est una, & ab tres: adeoq;
 quadratum ab triplum quadrati be , vel semidia-
 metri db . Hinc patet 1. Diametrum circuli
 potentia esse sesquiterciam ad latus trigoni
 equilateri, quia ipsius partes sunt quatuor, qua-
 rum huius sunt tres. 2. Semidiametrum d e
 bisariam secari in f , à latere trianguli be .
 Cum enim quadratum ab , sit triplum ipsius be ,
 si ab ponatur partium 12, erit b e talium 4. Est
 autem quadratum be equale quadratis fb , fe ,
 & talium partium tres habet bf , quin quarta
 pars quadrati ab ; Una igitur illarum est fe ; ipsi-
 usq; quadruplum be , id est, de , ac proinde fe di-
 midia est ipsius de .

Schol.

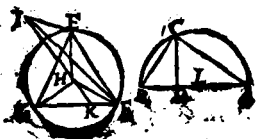
4. I b.

PROPOS: XIII.

Problema 1.

Pyramidem constituere & datâ
 sphaera complecti, & demonstrare,
 quod sphaerae diameter potentia sit
 sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

In diametro sphaerae,
 ad sit dupla ipsius db :
 ducaturq; perpendi-
 cularis cd , & linea



(ca)

ca, cb. Itaque intervallo he, id est, dc
 circulus efg, in quo inscribatur triangulum
 equilaterum efg. Iunganturq; hf, hg equalia
 ipsi dc, super h erigatur perpendicularis hi,
 qualis recte ad: & ex i demittantur ie, ih,
 ig. Erit quatuor hisce triangulis comprehensum
 solidum pyramis sive Tetrædron. Quoniam enim
 quadratum ad est duplum quadrati cd; & qua-
 dratum ca triplum ejusdem cd: ideo etiam
 ipsarum ie, ih, ig equalium & ipsi ca quadrata
 erunt triplicata quadratorum he, hf, hg, semidiame-
 trorum. Erunt triangula quatuor efg, efi, fgi, ghi,
 equilatera & equiangularia, ex quibus constituta
 pyramis, data sphaera, cujus diameter ab est, in-
 scripseris. Extensa enim ih, quae equalis ipsi ad in
 k, dum ik fiat equalis ipsi ab. Quia inter ih
 h k mediae proportionales sunt he, hf, hg. (Sunt
 enim aequales ipsi ad, db, de.) ejusdem sphaera
 sub ik, id est, ab diametro semicirculi transibunt
 puncta i, k, e, f, g; eritq; sphaera datae diametri ab,
 inscripta pyramis efgi, ad cujus latius quodvis i-
 psius sphaerae diameter est sesquialtera. Cum enim
 & proportionales sint ab, ac, ad; & erit, ut ab
 ad ad; ita quadratum ab ad quadratum ac
 Sed ab est sesquialtera ipsius ac. Igitur & ab, id
 est, ipsius ik diametri sphaerae quadratum erit ses-
 quilaterum quadrati ac, id est, cujusq; lateris
 pyramidis. Quod erat sciendum.

Corollarium

1. Erit

Erit etiam diameter sphaerae potentia quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti.

Quia enim ab est ostensa sesquialtera sphaerae ac , idest ef : Erit quadratum ef ad quadratum ab ut 6 ad 9 , quod est ut 2 ad 3 . Talium autem h e tantum est 2 , quia quadratum e f ipsius h e est 3 triplum. Quadratum igitur ab 9 est quadratum ef 6 , quadruplum sesquialterum.

Perpendicularis ex centro lphaerae ad planum basis fg pyramidis efg demissa sexta pars erit diametri ab sphaerae & tertia semidiametri a d .

Quia enim ad 4 , est dupla ipsius bd 2 : erit igitur ipsius ab , 6 , d , 1 . pars sexta; & ipsius a d pars tertia. Cumq; altitudo hi sit ipsa ad , continebit haec duas tertias diametri; & proinde quadratum diametri 9 , ad altitudinem 4 , exhibet ipsorum proportionem duplicatam ad 3 , ad 2 . Si ex materia fiant 4 , triangula aequilatera quae hunc in modum disponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.

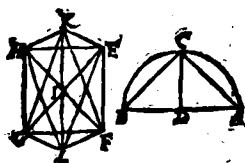


PRO.

EUCLIDIS ELEME. PROPOSITIO XIV.

Problema. 2.

Octaedrum constituere, & sphaera complecti; qua & pyramidem, & demonstrare quod sphaerae diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.



Circa diametrum ab , data sphaera, describo semicirculo, erigatur ex centro perpendicularis dc , & continuantur ca , cb .

4. l.

quales. Super ef equali ipsi ac fiat quadratum $efgh$, diametri eg , fh , secantibus se in i aequidistant.

Iam ad planum hoc quadratum utringue erigantur perpendiculares ik , il aequales ipsi ic . Iunganturque puncta k & l cum $efgh$ punctis:

8. & 4. l.

erit ex octo triangulis aequalibus & aequilateris ket , kfg , kgh , kch , lfe , leh , lhg , lfg , factum solidum octaedrum, quod data, diametri ab sphaerae inscriptum est. Quia super kl , id est, ab , diametro mobilis semicirculus omnia etiam e , f , g , h , itaque aequaliter a centro i distantia puncta transiit, estque sphaerae diameter ab dupla, ipsius ac , id est, cf vel cuiusque lateris octaedri.

7. 47. l.

Corol.

Corollaria.

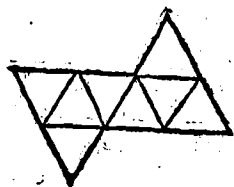
1. In octaedro tres diametri $k l, e f, f h$ se mutuò ad angulos rectos secant in i centro sphaeræ. *Quia omnes ad i anguli sunt ostensi recti.*

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis est quadratum $e f g h$ Et vertices $k l$, altitudinesq; $i k, i l$, semidiametri. *Habent enim plana similia & aequalia.*

3. Si Tetraedrum & Octaedrum eidem sphaeræ inscribantur Tetraedri latus potentia sesquitercium est lateris octaedri. *Quia enim potentia diametri $a b$ est sesquialtera 2 lateris Tetraedri 4, & dupla, Octaedri 3. Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est, sesquitercia.*

4. Bases octaedri oppositæ sunt parallele.

§ 16. XL



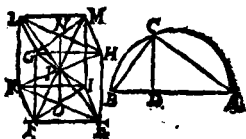
Scholium.
Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complacentur octo triangula.

N. PRO

EVCLIDIS ELEM.
PROPOS: XV.

Problema. 3.

Cubum constituere, & sphaeram
complecti, qua & priores figuras, &
demonstrare, quod sphaerae diameter
potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



Circa diametrum data sphaera ab descripto
semicirculo auferatur ex ab pars tertia db, &
ex d erigatur perpendicularis dc, junctis ca
cb. Iam super ce equali ipsi bc, fiat quadratum
efgh, ad cujus angulos e erigantur 4 perpen-
diculares rectae ei, fk, gl, hm, aequales ipsi ef,
& extrema connectantur lineis ik, kl, lm, mi,
quae & inter se sunt aequales & parallelae, quia e-
quales & parallelae connectunt: & sic quadra-
tum efik. eodemq; modo & fklg, glmh,
hmie: & proinde y iklm opposito efgh si-
mile & aequale erit quadratum. Itaq; cum el pro-
pter latera opposita d parallela sit parallelepipedum,
erit etiam cubus, & quidem comprehensus sphaera.

Opposi-

Oppositorum enim planorum $efki$, $ghlm$ diametri sint ek , fi , gm , hl , per quae ducantur planae ek , lh , fi , mg ; quorum utrumque cum fecerit XI.
 Cubum, transibit & utrumque per centrum p , in quo schol. 39.
 etiam omnes cubi diametri se bisariam secant, & XI.
 per idem punctum p communis planorum sectio non incedet. Quia vero plana ek , lh , fi , mg sunt
 rectangula, quod & he aequale ad ek , quam ef ,
 ad e perpendicularis est; & aequalia propter latera
 aequalia. Adeoque diametri sibi el , fm , hk , 4. XI.
 gi aequales; ut & semidiametri pe , pl , ph , pk , 34. E
 pf , pm , pg , pi . Quare ex centro p descriptus
 semicirculus, circa el circumductus, describet sphaeram
 omnes Cubi angulos attingentem. Haec ergo
 el est ipsi ab aequalis. Quia enim quadratum
 ek aequale est quadrato ef , fk , id est, duplum
 quadrati ef , vel kl : Erunt quadrata ek , kl 47. E
 tripla quadrati kl & sic quadrato ek , kl , aequale
 quadratum el etiam est triplum quadrati
 kl , vel bc , cujus quadrati bc etiam triplum
 est quadratum ab . Cum enim ab , bc , bd ,
 sint proportionales; erit, ut ab prima ad bd ter-
 tiam: ita quadratum ab , ad quadratum secun-
 de bc , id est, ab est triplum ipsius bc ; sicut &
 el . Erunt ergo ab , el aequalia. Cumque qua-
 dratum el fuerit triplum quadrati kl , patet di-
 ametrum sphaerae potest triplum esse lateris Cubi.

Nn 2

Corolla:

Corollaria.

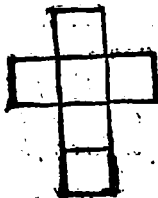
1. Omnes diametri cubi inter sunt æquales seq; mutuo bifariam lecant in centro sphæræ; eodemq; modo lineæ centra oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentia diametri sphæra seu cubi, æqualis est potentijs laterum Tetraedri & cubi simul sumptis.

13. XIII. *Quotum enim partium quadratum diametri est 9, talium sex est quadratum lateris Tetraedri & taliumq; 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

Ex materia aliqua in 6 quadrata & qualia in hunc modum divisa optinentur et cubus seu figura 8 angulorum tessellat similis.

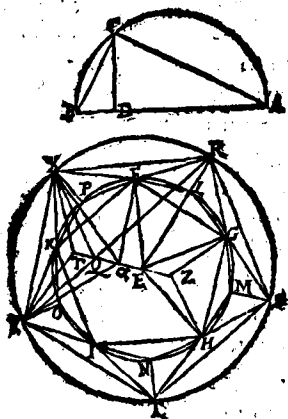


PRO

PROPOSITIO XVI.

Problema 4.

Icosaedrum constituere, & sphaera
complecti, quâ & ante dictas figuras;
& demonstrare quod Icosaedri latus
Irrationalis est linea, quæ vocatur
Minor.



Circa diametrum data sphaera ab descripto se-
micirculo auferatur ex a b pars quinta a b , ut ab
ipsius bd sit quintupla: Ipsius a d verò sesquiquar-
ta; & a d ipsius db quadrupla. Ex d erecta per-
pendiculari dc connectantur ca , bc . Intervallo
scilicet bc describatur circulus cui a inscribatur. ^{2. 11. 1 V.}

Nn. 3.

penta.

pentagonum equilaterum $fghik$, divisiſq; arcibus fg, gh, hi, ik, kf , biſariam in punctis, l, m, n, o, p connectantur fl, lg, gm, mh , ceu latera decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum circuli $fghik$ erigantur perpendiculares $eq, lr, ms, nr, ou; px$, aequales ſemidiametro. ef vel bc ; & ſic β parallela ipſi eq , quam cum ſingulis oppoſita bina aequales & parallela γ connectunt ſemidiametro aequales; ut ſic δ plana duo oppoſita parallela $fghik$, & $rstux$ contineant quaque ſemidiametros aequatium parallelorum circulorum. Connectantur jam puncta $rstux$, per lineas rs, st, tu, ux, xr , quae β parallela ſunt lineis oppoſitis ut rx ipſi lp , & γ aequales; aequalesq; in circulis aequalibus ſubtendunt arcus: eſtq; rx pars quinta circuli $rstux$ ſicut lp pars quinta eſt circuli $fghik$. Eodemq; modo reliqua omnes etiam quintas partes eorum circulorum auferunt & ſic pentagono $fghik$ equilaterum aequale eſt $rstux$. Ductis $rf, rg, sg, sh, th, ti, ui, uk, xk, xf$; quae omnes poſſunt & ſemidiametros ſeu perpendiculares lr, ms ; & latera decagoni ut fl, lg . Ideoq; ſunt aequales lateri pentagoni ejusdem circuli, id eſt, ipſi $fgrx$; & ſic decem triangula $rfx, rfg, rgs, sgh, shi, thi, tiu, uik, ukx, xkf$ equilatera & aequalia ſunt. Jam eq perpendicularis utriusq; extendatur ut qy & ez , ſint aequales lateri decagoni quae puncta zy connectantur.

¶ 6. XI.
v 33 l.

¶ 6. XI.

¶ 18. III.

¶ 47. I.

¶ 10. XIII.

per cum singulis angulorum pentagoni f, g, h, i, k .
 & r, s, t, u, x ; quæ rursus omnes & possunt semi-
 diametros & latera decagoni illorum circulo-
 rum. Ideoq; & æquales sunt lateri pentagoni, ut sic fiat
 sexring; 5 triangula æquilatere & æqualia priorib.
 10. Hæc ergo 20 triangula, si suis lateribus connecta-
 tur, efficiunt icosædron. Dico hoc ipsum compa-
 rendi sphaera diametri $a b$. Divisa enim $c q$ in
 ducantur $= f, = x, = u$. Quoniam latera $= q, q u$,
 trianguli $= q u$, æqualia sunt lateribus $= q, q x$,
 trianguli $= q x$, cum $q u, u x$ sint semidiametri
 circuli $r s t u x$, & anguli $= q u, = q x$ recti. & E-
 runt & bases $= u, = x$ æquales. Ita si ducantur
 $= r, = s, = t$, æquales ostenderentur, ipsis $= u, = x$.
 Rursus, quia trianguli $= q x$ latera $= q, q x$ æqua-
 lia sunt lateribus $= e, e f$, trianguli $= e f$, quia $e f$
 & $q x$ æqualium circulo-
 rum sunt semidiametri &
 anguli $= q x$, & $= e f$ recti: Erunt bases $a x, a f$,
 æquales. Quibus eodem modo æquales ostende-
 rentur $= h, = g, = i, = k$. Sunt ergo omnes decem
 lineæ, ex $=$ ad decem angulos $f, g, h, i, k; r, s, t, u, x$
 ductæ æquales. Quia verd. $q c$ est semidiameter
 seu latus hexagoni & $c z$ decagoni: & erit $q z$ divi-
 sa in e , secundum extremam & mediam ratio-
 nem, & minus segmentum $c z$, assumens $e =$ di-
 midium majoris, id est, $= z$, quintuplum & potest
 quadrati $e =$.

Potest autem $\&$ a f quintuplum ejusdem quadrati e , quia e f dupla ipsius c quadruplum, est quadratum ipsius a , $\&$ utriusq, simul quintuplum ejusdem c . Erunt ergo quadrata a f, a z equalia; ipsaq, recte aequales: $\&$ cum z y secta sit bisariam in a , erunt omnes recte ex a , ad omnes Icosaedri angulos ducte aequales, $\&$ sphaera illius diameter erit equalis diametro sphaera a b. Cum n. sit, ut a z ad c , ita y z dupla ipsius a z ad qe dupla ipsius c , ejusdem rationis erunt, earum quadrata, cumq, quadratum recte sit quintuplum ipsius c , erit etiam quadratum y z quintuplum quadrati recte qe, id est, b c, cui posita est equalis. Sed $\&$ ejusdem quadrati b c quintuplum est quadratum a b, cum sit, ut a b ad b c, ita b c ad b d: erit etiam, ut a b, ad b d; ita quadratum a b ad quadratum b c; adeoq, quadratum a b, quadrati b c quintuplum est, sicut a b ipsius b d est quintupla. Ideoq, quadratis rectarum y z, a b, equalibus erunt ipse quoque aequales; $\&$ sphaera circa ipsas aequales. Quia deniq, diameter sphaera a b ponitur Rationalis, $\&$ potest quintuplum quadrati b c vel e f: erit: $\&$ e f semidiameter circuli f g h i k Rationalis; cum sint a , ut numerus ad numerum 5 ad 1 $\&$ sic commensurabiles saltem potentia: Et tota diameter ejusdem circuli Rationalis erit proptereaq, latus pentagoni, id est, Icosaedri Irrationalis: erit linea vocata Minor.

Corol.

Corollaria.

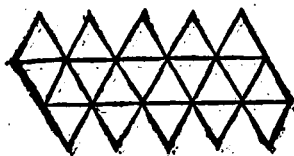
Diameter sphære est potētia quin-
upla semidiametri circuli quinque
atera Icosaedri ambientis. *Quadra-*
um enim ab quintuplum est ostensum
quadrati bc, id est, semidiametri ef.

Diameter yz sphære componi-
tur ex latere eq hexagoni & duobus
lateribus qj , ez decagoni ejusdem
circulis $fgbik$.

Latera Icosaedri opposita kx , hi ,
sunt parallela. *Quia eidem l sunt pa-*
rallala.

Scholium.

Si triangula 20 disponantur hoc modo
componetur Icosaedrum secundum
etam soliditatem.



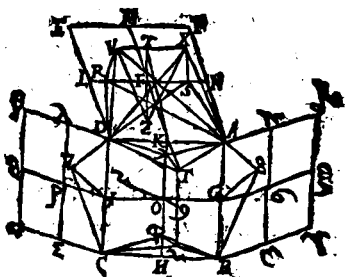
PROPOS: XVII.

Problema 5.

Nn 5

Dode.

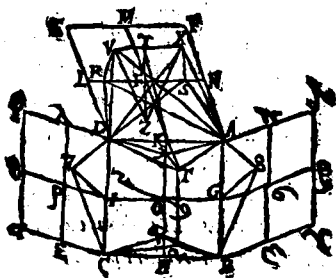
Dodecaedrum constituere :
 sphaera complecti, qua & praedictae
 figuras : & demonstrare, quod dode-
 caedri latus est Irrationalis linea,
 quae vocatur Apotome.



Sit una basis cubi, data sphaera comprehens.
 quadratum a b c d cui aliud aequale ad angulos re-
 ctos insistat a d e f quorum communis sectio sit a d.
 Divisis cunctis lateribus bisariam in g, h, i, k, l, m,
 n, punctis, ijsq; connexis a secantibus se rectis in
 punctis o p, secantur o k, p l, p r, extrema & me-
 dia ratione in punctis q r s ex quibus ad plana qua-
 dratorum educantur extra cubum perpendiculares
 q t, r u, s x, aequales segmentis majoribus o q, p r,
 p s, & conjungantur rectis a t, a x, d t, d u, u x.
 Erit a t d u x, unū ex duodecim pentagonis equila-
 teris & equiangulis dodecaedri constituendi. Esse
 hoc in uno plano constet. Quia cum x u s x, ad qua-
 dratum

atum a d e f, sint recta & p parallela & aequales
 inquam equalium segmenta eadem: y Erunt et
 m r s u x illis connectentes aequales & parallela,
 quia a d, r s, etiam aequales rectas parallelas
 n, d l connectentes, sunt parallela; & erunt &
 d, u x parallela, & has connectentes a x, d u, in
 eodem cum ipsis plano. Et sic Trapezium a d u x
 uno est plano. Sed quia & triangulum a t d in
 eo est planum; erit etiam in eodem cum trapezio.
 uct a enim p y, perpendiculari parallela ipsi r u;
 connectantur k t, k y. Quoniam est, ut o k ad o q,
 a o q a t q k: & k p aequalis est ipsi o k. Quia
 utrum cubi sunt dimidia, & p y ipso q, id est
 u: erit etiam ut k p ad p y, ita o q, id est, q t,
 d q k. Quare cum triangula p k y, q t k duo latera
 uobis, circum angulis conjunctis, proportionalia
 habeant; latera q, p k, q k, homologa p parallela,
 uia utrumq, est rectum ad quadratum a b c d: &
 y, q k parallela, quia utrumq, est rectum ad
 quadratum a d e f: & erunt reliqua latera k y, k t,
 eandem rectam collocata, Et recta t y, in uno
 erit plano, & sic plana a d e, & a d u x, unum
 sunt planum per rectas a d, t y ductum. Est ergo
 pentagonum a t d u x in eodem plano. Sed & a-
 quilaterum esse ita patet. Triangula enim re-
 ctangula a n s, a k q, duorum equalium la-
 terum a n, n s ipsis a k, k q; etiam bases a s, a q
 habent aequales.

Rursus



- Rursum triangula rectangula asx , aqc , dunt
 equalium laterum as , sx , ipsis aq , qc , (quia sx , qc
 equalium eadem sunt segmenta.) etiam bases ax ,
 ac aequales habent. Idemq; in triangulis dqr ,
 dxu , ostenderetur de lateribus rd , du , quae-
 qualia sint ipsi a , c . Erunt ergo 4. pentag-
 nilatera equalia, quibus aequale etiam ostendem
 ux . & quadrata rectarum pn , ns , simul sunt tri-
 pla quadrati ps vel sx . Sed quadrato rectae pn
 quale est quadratum rectae an . Igitur & quadr-
 ta an , ns simul sunt tripla quadrati sx ; & ibi
 aequale quadratum as ejusdem quadrati sx tri-
 plum: & quadrata as , sx simul quadrupla qua-
 drati sx : & sic eisdem, aequale & quadratum ax
 quadruplum quadrati sx , id est, quadrati ps , vel
 sy . Sed quia duple ipsius x y , id est xu ; Quadru-
 tum etiam est & quadruplum. Erunt quadrata ax ,
 xu equalia, ipseq; rectae aequales; cui ax cum &

aliqua tria a t, t d du sint equalia; Erit pentagonū
 t d u x equilaterum. Est verò & equiangulum.
 ductis enim a t, a u, cum p n sit in s secta media & , per scho-
 lem a ratione, eiq, addit a p equalis majori se- 4. I I.
 nēto p s; ē erit quoq, n r secta in p extrema & me- 3 s. X III.
 lia ratione, majusq, segmentum n p. Erunt igitur
 quadrata rectorum n r, r p. simul tripla qua-
 drati n p, id est, a n. Est autem quadratum r u e-
 quale quadrato r p. Ideoq, n r, r u etiam simul sunt
 tripla quadrati a n; & proinde quadrata n r, r u,
 a n, quadrupla sunt ejusdem quadrati a n. Sunt au-
 tem quadrata n r, a n equalia quadrato a t. Igi-
 tur & a t; r u quadrupla sunt quadrati a n, & il-
 lis a equale quadratum a u, quadruplum recte a n.
 Cumq, ejusde a n dupla ad quadratū sit etiā qua-
 druplū quadrati a n. Igitur quadrata a d, a u sunt
 equalia ipseq, recte equales. Eodemq, modo d x,
 ad sunt equales; & sic tres a d, a u, d x, sunt equa-
 les. Iam in triangulis t a d, & d u x, equalium
 laterum ejusdem pentagoni, & basium a d, d x;
 erunt & anguli a t d, d u x equales. Eidemq, 3. I.
 d u x equalis a x u. Proinde, cum tres pentagoni
 equilateri anguli sint equales, erunt omnes in- 7. XII.
 ter se equales. Et sic pentagonum equilaterum
 & equiangulum. Quod si sumantur alia duo cubi
 quadrata c a p d, b y d a, recta ad quadratum a
 b c d, quarum singula latera secantur bisariam
 lineis, a, i p, t q punctis, que jungantur rectis
 secantibus

secantibus se mutuo in centrīs quadratorum
 Secentur jam oh, ok, ei, eg , extrema &
 dia ratione in punctis $\phi, q, z, 4$, ex quibus pla
 quadratorum ad partes cubi exteriores perpen
 culares $\phi 2, qt, 37, 48$ aequales segmentis m
 joribus $\phi o, q o, 3 e, 4 e$, jungantur
 $tz, 2c, c7, 7d, dt, ta, a8, 8b, b2$:
 demq; modo ostendentur pentagona $t c 7 d 8$
 $t 2 b 8 a$, esse aequilatera & equiangula & a
 qualia priori ob latera communia td, ta .
 sic habent tria pentagona tangencia cubi tria la
 tera ad, dc, ab , sibiq; mutuo coherencia la
 ribus communibus td, ta .

Qua methodo alia novem sunt fabricandi
 pentagona similia tangencia reliqua novem
 bilatera, & habebitur sphaera comprehensa
 Dodecaedrum.

Iam intelligantur plana cubi opposita
 variis planis $a d e f$, & $a b c d$, per rectas
 norum latera bisariam secantes km & ln ,
 & hk ductis.

Hae plana secantia cum sint recta ad
 na cubi, utpote parallela basibus cubi, recta
 plana $a d e f$, $a b c d$; e. erunt & solum
 eorum communes ad cubi plana recta

Ideoq; cum yp sit recta ad planum $adef$,
 & versus z producta erit communis sectio plano-
 rum per rectas km, ln ductorum.

Ita, si ex o ad planum $abcd$ erigatur per-
 pendicularis goz : Erit ipsa communis sectio
 planorum per rectas gi, hk , ductorum. Sed
 istae duae omnes sectiones & diametri cubi se
 in z bisariam secant: Secent se in z ; &
 bisariam sese diametri cubi secant in centro
 cubi complectentis.

39. XL.
 cor. 1. 15
 XIII.

Erit igitur z centrum sphaerae circa cubum de-
 scriptae. & omnes lineae z , ad omnes angulos cu-
 erunt aequales.

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z du-
 ctae rectae erunt ipsidem omnes aequales.

Ducta enim zx : quoniam parallelae sunt k
 o, z , cum utraque sit recta ad planum
 bcd :

Itemq; & ok, zp tanquam rectae ad pla-
 num $adef$: erit $pkoz$ (quia duo z conjuncta
 bent intelligi) parallelogrammum, & pz ae-
 qualis ko , vel np , dimidio lateri cubi.

Est autem py , ipsi pr : aequalis, tota ergo zy ,
 in r aequalis erit.

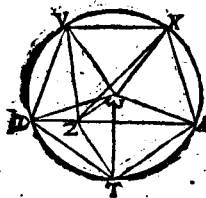
Quare

o 15. V.

o 22. VI.

Quare cum quadrata nr, pr, simul sint
 quadrati in p, quod nr in p media & extre-
 mione est secta; erunt etiam quad-
 rati p y; id est, z y, x y. simul tripla
 drati p s, quia x y, equalis est ipsi p s vel p y.
 quadratis z y, x y, & equale est quadratum
 Erit igitur & hoc triplum quadrati z p, id est, p
 drati dimidij lateris cubi; cuius etiam quadratum
 quadratum semidiametri sphaerae comprehendit
 hendentis (ut enim diameter ad latus cubi
 semidiameter ad dimidium cubi. Ideoq, & qua-
 dratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ut
 quadratum semidiametri ad quadratum dimidij
 lateris. Cum ergo quadratum diametri sit triplum
 quadrati lateris; erit & semidiametri quadratum
 triplum quadrati dimidij lateris.) Erit itaq, qua-
 dratum z x, quadrato semidiametri sphaerae
 cubi equale: Ipsaq, z x, equalis semidiametro
 idem semidiametro & z u, quia z u & z x in
 gulum equilaterorum z y x, & z y u basi
 est & equalis: cumq, & z a, z d, ad angulos
 semidiametro sphaerae sint aequales, ut antea
 erunt jam ex centro z, ad 4. angulos pentagoni
 d, u, x, aequales semidiametro sphaerae. Semidiametro
 idem semidiametro equalis etiam sit z t, & angulum
 t, quintum, ita patet; si circa pentagonum
 equilaterum illud describatur circulus scilicet d u x,
 in cuius planum ex z centro sphaerae ducatur per-
 pendiculum

Perpendicularis $z u$, & u connectatur cum a, t, d, u, x punctis. Quoniam quadratum $z a$ aequale est quadratis $z u, u a$; & quadratum $z x$, aequale quadratis $z u, u x$; erunt, subtracto communi quadrato $z u$, ex quadratis equalium rectarum $z a, z x$,



equalia quadrata $u a, u x$; ipsaq; rectae $u a, u x$ aequales. Nec aliter rectae $u u, u d$, & inter se & ipsis $u a, u x$ aequales sunt, quia $z u, z d$ sunt ostensa aequales. Cum ergo ex u plures duabus aequales cadant in periphe-

riam; x erit u centrum circuli. Ideoq; $u t$, reliquis $x p$. III. Ex cent' u equalis erit, & quadrata $z u, u t$, equalia quadratis $z u, u a$, efficiens aequales $z t, z a$. Ex z igitur centro sphaera descripta complectens cubu, comprehendit etiam pentagonum $a t d u x$. Eodemq; modo & omnia dodecaedri latera, adeoq; & sphaera eadem comprehenduntur cubi & dodecaedrum. Deniq; cum sit, ut $n p$ ad $p s$; ita $p s$ ad $s n$. Erit quoq; ut $n l$ dupla ipsius $n p$, ad $r s$ duplam ipsius $p s$; ita $r s$ ad compositum ex $b n, r l$, seu duplam ipsius $s n$. Si igitur latus cubi $n l$ secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit $r s$; sed $n l$ tota ita secta, est Rationalis, cum ipsius quadratum quadrato diametri sphaera Rationalis sit commensurabile, tanquam hujus pars tertia. Majus igitur segmentum $s r$, id est, latus dodecaedri $x n$, illi



aequale,

equale, Irrationalis est linea, que vocatur perome.

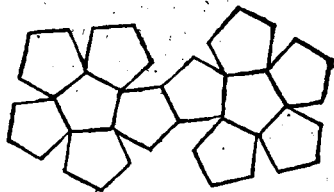
Corollarium.

Si latus cubi secetur extrema & media ratione, majus segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

Recta enim l n, equalis lateri cubi, secta extrema & media ratione, majus segmentum habet s latus dodecaedri.

Scholium.

Si duodecim Pentagona hoc modo disponantur equiangulara & equilatera; componetur ex illis dodecaedrum secundum totam soliditatem.

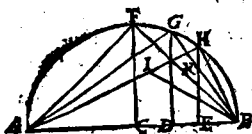


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

Diam.



Diameter ab secetur
bisariam in c , & ab-
seindantur bd , pars
tertia, & be pars
quinta diametri; su-
perq; ab describatur

femicirculus, & erigantur perpendiculares $cf, dg,$
 eh ; connectanturq; fgh , cum a & b . Hinc ex
 ah absindatur equalis lateri decagoni, cujus se-
midiameter seu latus hexagoni est bh ; & conne-
ctantur bi . Deniq; bg secetur media & extrema
ratione in k , ut bk sit segmentum majus: eris ag
latus pyramidis, vel Tetraedri: a latus Octaedri;
 bg latus cubi; bi latus Icosaedri, bk latus Dode-
caedri. Quia enim ag est media proportionalis
inter ba, ad ; & erit, ut ba ad ad ita quadra-
tum ab ad quadratum ag . Est autem ab ad ad
sesquialtera: igitur & quadratum ab , quadrati
 ag sesquialterum erit. Et sic ag est latus Tetra-
edri, cujus lateris est sesquialtera potentia diame-
ter. Rursus quoniam af est media proportionalis
inter ba, ac ; eris rursus, ut ba ad ac , ita
quadratum ba ad quadratum af . Est autem
 ba dupla ipsius ac : Igitur & quadratum ab ,
quadrati af . Et sic af est latus octaedri, quippe
diameter est potentia dupla lateris octaedri. Dein
cum bg sit media proportionalis inter $ab,$
 bd ; eris, ut ab ad bd , ita quadratum ab ad
quadratum bg . Est autem ab tripla ipsius bd :

cor. 8. VI

cor. 20 VI

13. XIII.

14. XIII.

13. XIII. Ergo & quadratum $a b$ quadrati $b g$: & sic
 latus cubi ; quia diameter sphaera potentia est in
 pla lateris cubi, Postea proportionales = etiam sunt
 $a b, b h, b e$; & est g , ut $a b$ ad $b e$, ita quadratum
 $a b$ ad quadratum $b h$, Est autem a, b quintupli
 ipsius $b e$: Ergo & quadratum $a b$ quadrati $b e$.
 Cum igitur diameter sphaera potentia sit quintupli
 semidiametri circuli quinq, latera Icosaedri con-
 bicientis, erit $b h$ dicti circuli semidiameter, vel la-
 tus hexagoni. Est autem $h i$ latus decagoni ejusdem
 circuli, Ideoq, $b i$ potens, & latus hexagoni $b h$ &
 decagoni $h i$, erit & latus pentagoni ejusdem circuli.
 Et sic $b i$ latus Icosaedri. Deniq, cum $b g$ latus cu-
 bi sit extrema & media ratione sectum in k , & erit
 $b k$ segmentum majus latus dodecaedri. Quinq,
 ergo figurarum regularium latera sunt exposta.
 Comparatio eorundem sic habet : | Quoniam dia-
 meter sphaera est potentia sesquialtera lateris py-
 ramidis : & potentia dupla lateris octaedri ; &
 potentia tripla lateris cubi ; erunt partium talium
 quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium,
 Cubi duarum, qualium diameter est sex. Proin-
 deq, latus Tetraedri ad latus Octaedri potentia
 sesquitercium est : Et ad latus Cubi potentia du-
 plum. Latus autem Octaedri ad latus Cubi poten-
 tia sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum
 quadrata & diametri sphaera sunt inter se ut nu-
 merus ad numerum. Ideoq, sunt lineae inter se
 commens-

Eor. 16.

XIII.

47. I.

18. XII.

16. XIII.

A cor. 17.

XVI.

commensurabiles. Et propter diametrum Ra-
 tionale, relique etiam rationales sunt, Cumq;
 sint ut numerus quadratus ad quadratum, corol. 25.
 nec erunt longitudine commensurabiles. Et sic VI II.
 rationales potentia solum commensurabiles, Ap
 2. X.
 ad latera Icosaedri & Dodecaedri, quoniam sunt
 Irrationales, illud Minor, hoc Apotome, nec
 longitudine nec potentia producta sunt commen-
 surabiles. Si enim essent lateribus tribus prioribus
 commensurabiles, que diametro Rationali sunt
 incommensurabilia, essent ipse quoq; Rationales.
 Quod absurdum, quia sunt Irrationales. Sed nec
 inter se sunt commensurabilia latera Icosaedri &
 Dodecaedri. Si enim longitudine inter se essent
 commensurabilia, • Essent utraq; ejusdem speciei,
 vel Minores vel Apotome. Si autem solum potentia, • 104. X.
 eodem modo latus dodecaedri, erit Minor; quia
 Icosaedri latus est Minor. Quod • absurdum, • 106. X.
 quia nullae Irrationales specie differentes, eadem, • 10. XIII.
 sunt. Quanquam itaq; trium priorum quidem • 102. X.
 figurarum latera tum inter se, tum ipsi diametro
 sphaerae sunt commensurabilia & Rationalia: duo
 vero posteriora usdem & diametro & inter se in-
 commensurabilia & Irrationalia: Inter eas ta-
 men figuras occurrit hic ordo, ut eodem ordine se
 excedant earum latera, quo ipsas construximus.
 Quanquam cum ordinem in definitionibus, non ob-
 servavit Euclides. Majus enim est latus Tetrae-
 dri a g, latere Octaedri a f: quia majorem sub-

28. III.

420. V.

15. XIII.

210. V.

corol. 2.
16. XIII.

tendit arcum: Et hoc majus latere cubi $b g$ bi autem latus majus esse latere Icosaedri ita patet. Quoniam $a b$ ponitur tripla ipsius $b d$, & erit propter duplicatam quadratorum rationem quadratum $a b$, nuncuplum quadrati $b d$; quia nuncup est duplicata tripla. Propterea, qualium partium quadratum est novem, talium unum habet b . Earundem autem est quadratum $b g$ trium, quod illud hujus sit & triplum. Erunt igitur quadrata $g d$ & $d b$, etiam talium trium: sublato quadrato $b d$, unius; erit $d g$ talium duarum. Sed quia quadratum $a b$ est quintuplum quadrati $b h$, & erit hoc minus quam talium z ; quia 9 de minore quintupla habent proportionem. Idem quadratum $g d$ majus est quadrato $b h$, & $g b$ major quam $b h$. Rursus quia diameter sphae & componitur ex $b h$ semi diametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & duplo decagoni $h i$. Erit latus decagoni $h i$ minus tertia parte $b d$ diametri $a b$. Si enim credatur equalis ipsi $b d$, tunc duplum decagoni esset equale ipsi $a d$, & $h b$ ipsi $d b$. Ideoque quadratum $a b$ nuncuplum quadrati $b d$, erit etiam nuncuplum quadrati $b h$, cuius modo erat quintuplum. Non ergo est $h i$ tertia pars ipsius $a b$. Sed neque major. Sin. ducatur major tertia parte $b d$ erit etiam ipsius dupla major dupla partis tertiae $a d$. Et sic $b h$ erit minor parte tertia $a d$. Adeoque quadratum $a b$, majus quam nuncuplum quadrati $b d$; quod magis est absurdum. Cuius

ergo $h i$ nec equalis sit nec major tertia parte, erit
 necessario minor. Itaque cum $g d$, $d b$ sint majores
 rectis $b h$, $h i$, ut ostensum est: erunt etiam ipsa-
 rum quadrata majora, harum quadratis, sed qua-
 dratum recte $b g$ est $\frac{1}{2}$ aequale quadratis $g d$, $d b$; &
 quadratum $b i$ aequale quadratis $b h$, $h i$: Ergo qua-
 dratum $b g$ majus erit quadrato $b i$; latus cubi latere
 Icosaedri. Denique Icosaedri latus $b i$ majus est latere
 Dodecaedri $b k$, quod est segmentum majus linea $b g$
 extrema & media ratione secta. Est enim rectan-
 gulum sub $b g$, $b k$ majus rectangulo sub $b g$, $g k$ a-
 udeoque rectangula sub $b g$, $b k$ & sub $b g$, $g k$ si-
 mul, id est, $\frac{1}{2}$ quadratum $b g$, majora sunt duplo
 rectanguli sub $b g$, $g k$, id est, $\frac{1}{2}$ quadrato $b k$ bis.
 (quia $b g$, $b k$, $g k$ sunt proportionales, & quadra-
 tum $b k$, aequale est rectangulo sub $b g$, $g k$.) Idcirco
 majora erunt tria quadrata recte $b g$, sex quadra-
 tis recte $b k$; sed tribus quadratis $b g$ aequalia sunt
 5. Quadrata $b h$. (quia quadratum $a b$ tam est
 triplum quadrati $g h$, quam quintuplum quadrati
 $b h$) unumque quadratum $b g$ majus erit uno qua-
 drato $b h$. (si enim esset aequale quadratum $b h$,
 quadrato $b k$, vel minus; 5 quadrata $b h$ essent
 minora sex quadratis $b k$, quibus tamen majora
 sunt ostensa.) Et recta $b h$ major, quam recta $b k$
 cumque $b i$ major sit quam $b h$; erit etiam major
 quam $b k$, latus Icosaedri latere Dodecaedri. Ex-
 positae itaque sunt latera quinque figurarum & inter
 se comparata. Quod erat faciendum.

F I N I S.

2. I.

A 17. VL

Corrēctiōes Erratorum &c. tantiorum.

| Pag. | Lin. | Errata | Corrēctiōes |
|------|----------------|----------------|------------------------------------|
| 4 | 5 | nea | linea |
| 16 | 23 | ada | adē |
| 23 | 12 | ex | & |
| | 12 | abc | totus abc |
| 27 | 12 | p f | d f |
| 40 | 12 | idemq; e c b | deniq; e b |
| 42 | 15 | punt | fiunt |
| | 18 | fila a c | pla a e |
| 45 | 8 | ad b g | a vel b g |
| 59 | in marg. | g. 47. l. | y l. 2x. |
| 59 | penult. | in marg. omif. | n. 12. lll. |
| 113 | 17 | & g | h g |
| 137 | 19 | prout | praxis |
| 164 | 7 | ante o q omif. | am, quod defici
parallelogramma |
| 265 | 9 | Inversa | inventa |
| 218 | penult. | denominatas | denominantur |
| 227 | 15 | Ergo f non ex | deleantur |
| 277 | 14 | per | qui |
| 333 | 9 | numero | modo |
| 338 | in marg. | 33 X l. | 33. lll. |
| 362 | 25 | quartus | in 49 |
| 364 | ult. | habeatur | habeve |
| 415 | 11 | e f | ex |
| 428 | 19 | faciunt | facienti |
| 443 | penult. | a h ad h e | ad h g |
| 469 | 6 | a e | b c |
| 470 | 9 | b d, a g | b g, ad |
| 497 | 13 | erunt & i f | & c d & i f |
| 506 | in marg. omif. | | n 33. X l. |