

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EVCLIDIS
ELEMENTO-
RUM

LIBRI XIII.

Succinctis & perspicuis demon-
strationibus compre-
hensi

à

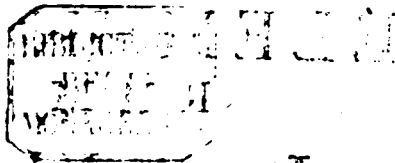
M. AMBROSIO RHODIO
*Kembergense, Mathematicum Pro-
fessore extraordinario in
Academia Leucorea.*

Typis Gormanianis,
Impensis Pauli Helvvigij.

M. DC. IX.

p.

E



I



A D

Serenissimum ac Potentissimum

Principem ac Dominum

D N. CHRISTIA-

**NUM II. DUCEM SAXONIAE,
SACRI ROM. IMP. ARCHIMAR-
schallum & Electorem , Landgravium
Thuringiae, Marchionem Misniae, Burg-
gravium Magdeburgensem; Dominum
suum Clementissimum.**

**M. AMBROSII RHODII Kembergensis
*epistola dedicatoria.***



UM IAM à MULTIS AN-
nis, Princeps Serenissime,
Domine Clementissime, non
in schola modò, quæ ad Mol-
dam est, Illustris, sed & Acadèmia, quæ ul-
tra seculum floret ad Albim, cum multis
alijs Munificentiam Illustrissimæ Celsitu-
dinis vestræ quasi ordinariam expertus

(.) a

sim;

finis; ejus imprimis memoriam nulla mihi unquam ex animo eripiet ætas, quam pro diligentiore opera studiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hisce proximis supra Academiæ seculum primum excurrentibus, paulò expertus sum largiorem. Hujus enim adminiculi ope, non modò academicam hanc vitam, quæ vel unica studiis urgendis optatissima videtur, continuare; verùm etiam de quamplurimis Academiæ civibus, quod citra jactantiam dictum velim, varias subinde Mathematicarum partes docendo, benè mereri mihi licuit. Cùm autem animo jam certò constituissèm, etiam ad penitiora harum disciplinarum, præcipuè verò Astronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ sacra plures deducere; mearum quòd partium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè illi principiis tum Geometriæ, tum Arithmeticæ prius informarentur, per quæ veluti scalas duas, summa ima quævis in Mathematicarum amplissimo theatro attingere copia sit. Quodcùm unus optimè præstet ipsa antiquitate, per tot jam iteratas imperiorum mutationes, singulari

Dei

DE providentia, clarus Euclides, in suis
Elementis, quæ hæcenus ab alijs doctissi-
mis Viris sine imperfectione; imò cum a-
bundante perfectione edita sunt: à quo-
rum tamen lectione vel cognitione cari-
tas partim exemplarium, partim prolixi-
tas, quæ ingeniosis radium, tardioribus e-
xiguum præstat commodum, multos de-
terrent; id inii consilium, ut, quantum
possem, Elementorum tamen probè con-
siderata natura & ingenio, ne vel neces-
saria deficerent, vel minus necessaria ab-
undaret, Euclideæ Elementa cum suis de-
monstrationibus integra, sed forma qua-
dam contracta, precioq; exiguo redimen-
da ederem. Ita enim effecturum me spe-
ro, ut calamitadio, & totæ literarum in de-
monstrationibus iterandum descriptione,
devitato, intra paucas septimanas, solis o-
cularibus demonstrationibus crebrius re-
petitis, multa de Elementis hîsco univer-
so studiorum ordini summo pære necessa-
rijs, cognoscantur, quæ aliàs totidem mē-
sibus, & quod excurrit, vix perciperen-
tur. Huic verò operæ meæ, ut Illustrissima
vestra Celsitudo imprimis & maximè, se-
cundum

eundem Deum, favere, eamq; in tutelam
suam clementer suscipere velit, unice mi-
hi exoranda videtur: Quod quidem
non impetraturum me modò spero; sed
planè jam impetratum, futurumque esse
confido, ut Clementiam illam pristinam
erga me majora atque majora subinde in-
crementa sumsisse reipsa experiar; & hoc
quasi stimulo incitatus, majori, si potero,
industria, hoc disciplinarum Mathematicarum
studium decurrere & cōficere por-
rò etiam enitar. Hoc quidem certè ha-
beo polliceri, si quid benedictione divina
carius; valetudine optima acceptius; i-
psoq; divino favore gratius; id omne, ut
pro Illustrissima Cels. vestra, & inclita
Domo Saxonica precibus à Deo æterno
pijs impetretur, me vota cum alijs innu-
meris perpetuò conjuncturum. VVi-

tebergæ X. Calend. August.

ANNO M. D. C. IX.

A D

M. AMBROSIIUM

RHODIUM, Nepotem ex
sorore cariss.

CVM sic ingenium noctesq, diesq, fatiget,
Es sit magnarum nuda MATHESIS opum;
Esse aliquem res mira, sui qui prodigum, avum
In sterili, ut vulgus iudicat, arte terat.
Verùm animam cen nemo suam videt: Haud secus, alter
Gaudia quæ capiat pectore, nemo videt.
Hic tabula intentus quæris, num pranderis! urbem
Non sensit, formæque pulvere signa, capi.
Alter, jò reperi! geminat, nudusq, per urbem
Evolat inventi cæcus amore novi.
Nobile qui tandem effinxit d'agramma, Cameræ
Offere, mactato pinguis sacra bove.
Ras modò sit Phœbi speciem sibi cernere, flamma
Haud neget hic uri cum Phœtonte par.
Hoc igitur scitici inaspectabile mensis
Delicium RHODI præmia summa putas:
Dum vigil EUCLIDIS tractas ELEMENTA, leas
Ingenijq, penu divite præmiis opes.
Præmia jam studij capis haud spernenda: sed olim
Majora à gratia posteritate ferat.

Johannes VVanc'elius,
Hist. P. P.



IN
AMBROSII RHODII

Mathematicæ

Elementa Euclidæ.

Hoc erat insignem Rhodijs spirare colossu,
Hoc dignum ambrosio nomine pignus.
EUCLIDI lucere facem, lucere juventæ (erat,
Recta Euclideas vadere scire vias.
En Rhodus, en saltus hoc auspicio Harpocrateu
Posse timere senem Leucoris alma nequis.

Adamas Theod.

Adami F. Siberus.



A D

M. AMBROSII RHODII

Saxonem,

EUCLIDIS GEOMETRIAM

illustrantem.

DOCI pulveri Hercules, an Hermes?
EUCLIDES, per & has Scholas & istas

Illegible

Rhod' teritur manus, idem
 Et huc sacra Marbesei ad equum
 Omnes scire putant. Scimusne, RHODI?
 In sic, optime mystagoga, tu sis.
 Qui lentis moderamen arripendi,
 Non statim bonum agrimenfor idem est.
 Plus est esse Geometren: & hoc plus
 EUCLIDEM simile. Nunc ut annuam
 Euclidis Genium adsequantur omnes,
 DEMONSTRATIO LINEALIS exstat.
 Auctor RHODIUS est. Catum hoc alumni
 Alamen tibi gratulare, Saxo.
 EUCLIDES tenebris opertus, et quid
 Euclides tibi sit? profecto non est.
 Quem nunc RHODIA lucubravit ætas
 EUCLIDES tibi LUCULENTUS est.

Frid. Taubmanus.



DE ELEMEN- TIS EUCLIDIS

PRÆFATIO.



QUOD in plerisq; rebus usum venire solet, ut nullum finitum opus & inceptum & perfectum sit, siue quod dies diem docet; siue quod oculi plus vident quam oculus; siue quod Dens ipse Sapientia sua semina in homines ita dispergit; ut accrementa in aliis magis iuvet & promoveat; idem cum in universa Philosophia, tum vel maxime in Mathematicis observare licet. Sicut enim in illa primitus tantum non infinita, eaq; absurdissima à varijs Sophistis disseminata erant opiniones, quas tandem Plato & Aristoteles melle felicitate omnes collegerunt, resectisq; & rejectis, ingenij pariter & iudicij acie miram, tum absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & perfectum quoddam Philosophia corpus relinquere posteritati voluerunt: Ita etiam olim, cum maximo essent in pretio studia mathematica; varia à varijs erant inventa theoremata & problemata, quae tandem nacta sunt Geometra acutissimum Euclidem, paulo post obitum quod vero simile videtur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis principijs collegit, elegantissimoq; disposuit ordine, & eruditione tanta contextuit, ut Aristarcho nullo indignisset, nisi communi quodam praestantissimorum virorum fato & ipso ille carere nequisset. Nam quod Euclides edificium Sphaericum,

vicam, proportionē elegantissimā mirabili corporum quā-
que Regularium inscriptione exornat, & multorum
jam seculorum etatem tulerat; id anatomia synta-
xiq; nova, in Hortum quendam, unumquodq; suo con-
venienti loco reponens, ut velle videtur, permittavit, ex-
clusis multis ignorantie mirum in modum medentibus,
herbis. Quā Horti illius amenitatem labilem praterimus,
& cum magnis illis Geometris, Archimede, Apollonio, Pap-
po, Sereno, Hypsicle, Ptolemaeo, Copernico alijsq; innume-
ris, aedificij huius Euclidei commoditatibus fruimur, quod
nos contra omnis generis tempestates tueri potest, quovis
& anni & etatis tempore. Ceterum ELEMENTO-
RUM hoc nomen jure sibi vindicat hic tractatus, quod
consideratio omnium, ad aliorum, per universam Ma-
thefin, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum, quae
in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio sine quibus quāvis
impudenter aliquis adibit scientias mathematicas, tam
infelicitur eadem tractabit. Neq; ulla deest ipsi conditio-
num, quae in Elementis reperiri solet. Supervacuum enim
omne, tanquam impedimentum est sublatum; eliguntur
cuncta, quae propositum continent & concludunt: diluci-
datiō ac brevitati cura habetur maxima, ne contraria
perturbent cogitationem: Deniq; etiam universalis
theorematum in terminis comprehensio suum hic lo-
cum invenit; nam quavis cognitio incomprehensibilis effi-
citur ijs, quae doctrinam in particularia frustra dissecant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides.
Cum Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in fi-
gurarum contemplatione, quae vel plana vel solida sunt
linearum enim, tanquam terminorum, non requirebatur

peculiaris consideratio: de planis quidem Libris sex pri-
oribus; de Solidis in tribus ultimis agere voluit. Ceterum,
ne imperfecta esset illa Stereometria, quam plurimum ju-
vat notitia linearum Commensurabilium & incommen-
surabilium, tribus illis pramissit decimum, in quo copiose
de illis differit. Tandem neq, hac quidem tractatio in
se perfecta esse poterat absq, numerarum notitia; ideoq,
ipsorum quoq, affectiones tribus decimuma precedentibus
libris demonstrare abunde voluit. Sunt itaq, veluti qua-
dam principalia Elementorum Euclideorum membra,
quorum primum est Geometricam quatuor quidem pri-
oribus libris absolutam figurarum contemplationem ab-
solvens; quinto proportionum magnitudinum in genere per-
sequens; sexto proportionum figurarum planarum inter se
exponens. Secundum Arithmeticum, tribus libris, nu-
merarum, quibus cum magnitudinibus, tanquam binis
omnium quantitatum radicibus, magna intercedit com-
munio & societas, demonstrans affectiones proposito suf-
ficientes. Tertium quasi mixtum de linearum commensu-
rabilibus & incommensurabilibus agit, quarum natura
maxime in numeris evidens est, usq, maximus & neces-
sarius ad recte percipiendas proportionum laterum in quin-
que corporibus regularibus, plerq, incommensurabilium.
Quartum Stereometricum scientiam tradit Solidorum, quae
praecipue corporum affectiones demonstrantur, in primis
autem quinque corporum regularium Sphaera inscribendo-
rum constructio, & multa proportio: unde tandem e-
logantissimum illud Mathematicum aedificium constat,
quod propositione ultima libri decimi tertii absolvitur. Pos-
sunt quidem de Corporibus plura, eaq, iucundissima demon-
strari, ut ex libris illis tribus decimum tertium sequenti-
bus.

his, qui Euclidis vulgò solent addi, perspicuum est, quibus
 Doctissimus Clavius magnam operam, magnumq; laborem
 impendit: Ceterum Euclidis tredecim nobis pro nostro in-
 stituto sufficiant, quibus cognitio, qui sese totos huic studio
 sunt tradituri, non Campanum modò & Clavius; sed
 quosvis alios nobiliores Geometras magno cum fructu le-
 gent, intelligent. Ut autem quatuor operis Euclidis no-
 stri posuimus membra; ita, singuli illi sua propria præ-
 mittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium
 mathematicarum longè accuratissimarum, certissima-
 rumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; principia
 tria genera: primum Definitiones seu Hypotheses, qui-
 bus explicantur vocabula artis, ne qua nominum ambi-
 guitate vel obscuritate circumveniri, paralogismos incur-
 ramus; & hæc unum quodq; illorum membrorum habet
 peculiare. Deinde sunt ~~axioma~~ seu postulate, quæ
 adeo sunt clara & perspicua in subjecta scientia, ut nulla in-
 digeant confirmatione, sed nudum auditoris assensum re-
 quirunt, ne in demonstrando ulla vel hæsitatio vel difficul-
 tas oborlatur. Deniq; sunt Communes notiones, seu A-
 xiomata & dignitates, quæ non in hac tantum, sed in o-
 mnibus aliis Scientiis ita sunt manifesta, ut nemo non ul-
 trò assensum addat, qui tantum vocabula intelligit. Ex
 hisce principiis constituuntur & demonstrantur duplices
 propositiones; Problemata, in quibus ponitur aliquid, quod
~~constituendum~~ est, constituendum. & Theoremata, in quibus a-
 liquid vel inesse vel non inesse constituta quantitati de-
 monstratur. Differuntq; 1. fine; illorum enim est con-
 structio, horum cognitio, quod etiam clausula distincta in-
 dicare solemus; Quod erat faciendum, in illis; Quod e-

Est ostendendum, in his. 2. Vsu: illa enim Mathematicis, hac demonstrationibus inserviunt. 3. Accidentibus, quae in illis non sunt perpetua, nec perpetuo comitantur sua subiecta, quia viciosa potest esse constructio; in his vero semper sunt eadem. Ipsae Demonstrationes sex absolvuntur partibus. Prima *πρώτη* est generalis propositio demonstrationis, quae monet, quibus positum & concessum, quae quaesita sint demonstranda. Hac si theorema sit, habet duas partes, *πρότασις* & *ἐκκίνησης*: Sin problema, *διδόται*, quod constituit subiectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur; vel quomocumque queritur; & *ζητούμενον*, quod ostendit, quid in subiecto sit demonstrandum. Secunda est *ἐκτίσις* expositio seu declaratio dati vel antecedentis, quae datum seorsum repetit & explicat: Sicut tertia *διόρισις* quaesitum; quam utramque partem commodissime exhibent libera contextui propositionum inserta, sed forma distincte, citra ullam cursus propositionum confusionem. Quarta constructio *κατασκευὴ* seu delineatio, quae preparat & accommodat ea, quae ad demonstrationem accidentium dari requiruntur & necessaria sunt. Quinta, eaque precipua *ἀποδείξις* demonstratio, quae per prima, nota & concessa, vel etiam antea demonstrata demonstrat id, quod de dato ostendendum est. Et hac progressum observat duplicem. Velenim à principijs natura notis, ut sunt definitiones, postulata & axiomata, vel etiam antea demonstratis, quae & ipsa ad principia possunt reduci, procedimus, quae Methodus *ἀναγωγικὴ* dicitur; vel procedimus à quaesito & posteriore ad prius & principia, quae vel est *διεργαστικὴ ἀπόδειξις* & *ἀπὸ τοῦ ἀποδείκναι* dicitur; vel *ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἀποδείκναι* & *ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἀποδείκναι* dicitur. Sexta *συμπέρασμα*, quae demon-

demonstrata ad propositionem refert, eamq, rectè demonstratam esse affirmat. Propositionibus cognatum est *λῆμμα*, quæ in Geometricis est propositio indigens probatione, acciditq, tum constructioni, tum demonstrationi, hoc differens à principijs, quod hæc nulla indigent demonstratione; illud autem demonstrari cum posset, absq, demonstratione sumitur, ad aliorum faciendam fidem. Corollarium etiam theorema est, quod per se ex demonstrationibus propositionum sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione. Hæc tanquam necessaria ad plenioram cognitionem auctoris præmittenda mihi videbantur. Frugalissimæ itaq, hæc discipulæ, Geometriam & Arithmeticam in hisce Elementis Euclidis exornatas, (quamquam parum *μὲν τὰ ἁπλῶτα* facere censentur; ut & difficiles; sed illis, qui vel antè pronunciant, quàm inspiciant: vel prius abijciunt studium, quàm periculum fecerint:) si quis impensius coluerit, ipso experietur opere, plus habuisse in recessu, quàm magnificaminis fronte promiserunt: in primis autem, si non Magnitudinum & Numerorum hæc Philosophia, veritatis quendam amorem ingeneratum; ac saltem divinitus innatum sibi confirmari & cōservari percipiet; sentietq, quàm notabili fruge vegetior sibi reddatur, luxurietvè toris animosi pectoris ardor. Opere verò etiam experietur ipso, si quarūvis rerum fuerint expedienda dimensiones, veluti longitudinum, latitudinum, planicierum, agrorum, insularum; altitudines turrium, montium; cœlestia *φαινόμενα* per instrumenta accuratè observanda & examinanda; horologia *σφωτῆρῶν* delineanda; machine variæ construenda, *ἡ δὲ*

*usurpanda; ponderum rationes exponenda; phaenomena
 ex illuminatione diversa specularum, picturarum aquae &
 aeris excusanda; Deniq, siue speculationibus indulgere ve-
 lit celestibus, siue elementaribus quae arithmetice non so-
 runt, quanto & incitante & adjuvento, adde-
 bant complemento hac elementa sine
 futura.*



EUCLID



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

I.



Punctum est, cujus pars nulla est, id est, punctum est quiddam indivisibile, quod mente tantum concipitur. *Non enim punctum est quantitas, sed omnium quantitarum continuarum principium, quae potentia in infinitum sunt divisibiles. Illud autem quod creta pingitur punctum, Physicum, non mathematicum est, quippe non omni carens latitudine, quo interim facilioris doctrinae gratia utimur.*

A

2. Linea

2. Linea est longitudo latitudinis
expers, seu, ut Gellius loquitur, Lon-
 gitudo illatabilis. *Hac prima species*
est quantitatum continuarum duntaxat
longa.

3. Termini linearum sunt puncta :
 actu quidem in linea recta termina-
 ta ; in peripheria circuli potentia.

triplex omnis linea.
quid mathematicus
recta, curva (circularem)
et mixta



Recta linea est, quæ ex æquo
 sua interjacet puncta, id est, in qua
 nihil flexuosum reperitur. *Archime-*
des brevissimam esse dicit earum, quæ
eosdem habent terminos: vel est brevissi-
ma à puncto ad punctum extensio.

exemplum superficies
præbent un-
um corpus.

5. Superficies est, quæ longitudi-
 nem latitudinemque tantum habet.
Hac secunda magnitudinum species est,
quæ præter dimensionem, quam secun-
dum longum communem habet cum li-
nea, etiam secundum latitudinem men-
surabilis est; omni tamen mensura in
profundum destituta.

6. Super.



6. Superficiei extrema sunt lineæ. *quæ terminantur*

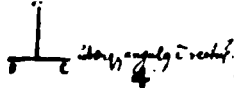
Sic trilatera figura tribus, quadrilatera quatuor, multilatera multis terminantur lineis: Circulus una.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas. *unde definit, q. quæ nulla de partibus sua elevatione sursum, nec nulla depressione subter, sine ulla intermissione, potest prolongari.* *Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima & brevissima.*

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. *duarum* *uno & eodemq. ex gr. Δ ang. plan. c. lineæ in directum se jacent* *Jacentes enim, in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protrahæ & sic angulos non efficiunt.*

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. *Ang.* Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-



EVCLIDIS ELEMENT



inceps, angulos aec , ce
 b æquales inter se fece-
 rit; rectus est uterq; an-
 gulorum: & quæ insistit,

recta linea ce , perpendicularis vocatur e-
 jus, cui insistit.

11. Angulus obtusus est aed , qui
 recto major est;

12. Angulus autem acutus bed ,
 qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus
 extremum est. Sic puncta linearum, li-
 nea superficierum; superficies corporum
 ac basi linearum sunt termini. Corpora verò, quia ab alia
 quantitate nulla dimensione superantur,
 nullius etiam termini esse possunt.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel
 aliquibus terminis comprehenditur.
 Ita videlicet, ut circumquaque illis ter-
 minis claudatur.

15. Circulus est figura plana, sub
 una linea comprehensa, quæ peri-
 pheria appellatur, ad quam ab uno
 puncto, centrum, quæ intra figuram
 sunt posita, cadentes omnes rectæ
 lineæ inter se sunt æquales.

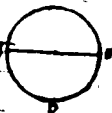
16. Hoc



Ex. gr. si superficies per punctum
 centrum sit una linea $A-B-C$.
 habens. tam conditionem
 ut ad punctum
 sit linea
 $A-B-C$ sit

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in peripheriam terminata, quæ circuli bifariam secat, & totum planum contentum peripheria, & ipsam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.



18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro & sub arcu, quæ de circuli peripheria auferitur, id est, semiperipheria.

19. Figure rectilineæ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. Ideo, curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtu lineis continentur.

20. Trilateræ, quæ sub tribus lineis continentur.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria



lateralia habet æqualia. *Duplicem habet divisionem triangulorum; alteram ex lateribus, alteram ex angulis.*



24. *Isoſceles* est, quod duo tantum æqualia habet latera; *tertio vel maiore vel minore.*



25. Scalenum est, quod tria inæqualia habet latera.



26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum, quidem est triangulum quod rectum habet angulum: *sive illud sit Isoſceles sive scalenum.*



27. Amblygonium, quod obtusum habet angulum; *itidem vel isoſceles vel scalenum.*

28. Oxygonium, quod tres habet acutos angulos. *Estq; vel aquilaterum, vel Isoſceles, vel scalenum.*



29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod & æquilaterum est, & rectangulum.



30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. Habet enim tantum duo
 opposita latera æqualia. Alij oblongum:
 alij rectangulum vertunt.

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed
 rectangula non est. Sant enim bini
 tantum oppositi anguli æquales.



32. ^{interius} Rhomboides, quæ ^{opposita} aduersa &
 latera & angulos habens inter se æ-
 quales, neque æquilatera est, neque
 rectangula. Opposita est quadrato o-
 mni ex parte.



33. Præter has autem reliquæ qua-
 drilateræ figuræ Trapezia appellantur.
 Vocantur irregulares, quoniam in-
 finitis possunt variari modis. Estque
 Trapezium aliud isosceles, quod duo la-
 tera opposita parallela, duo verò æqua-
 lia: aliud scalenum, quod duo tantum
 opposita parallela habet. Trapezoiles,
 quod neque parallela, neque æqualia
 habet latera.



34. Parallela rectæ lineæ sint, quæ
 cum in eodem sint plano, & ex u-

traque parte in infinitum producuntur, in neutra sibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia. *Vi sunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*



36. Cum verò in parallelogrammo diameter, ducta fuerit, duarumque linearum lateribus parallelarum, secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non transit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur. *Vide proposition. 43.*



PETITIONES, SIVE
postulata.

1. Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere. *si ut in eadem*
3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES
*sive Axiomata, quæ & Pronunciata
 dici solent & dignitates.*

1. Quæ eidem æqualia, & inter se, sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.
2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si æqualibus inæqualia sint adjecta, majori
 A 5 majus,

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

respice axioma primū. 6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. Idem intelligendum est de tripto & quadruplo, & ceteris.

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia vel quarta, &c. inter se sunt æquales.

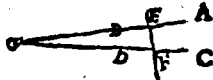
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem speciei.
ut duo quadrata sunt ejusdem speciei: ceteris
 $\square \square$. *in uno triangulo* $\triangle \triangle$. *in lineis* duabus

ciei, quantum una superposita alteri, neutra alteram excedit. Sic linea linea congruens, eidem aequalis est, non autem applicari dicitur linea superficiei. Neque tamen confundenda est φ aqua- sic hac mathematica, cum applicatione Mechanica vel Physica.

9. Totum sua parte majus est. Ali-
às ablata parte tolleretur totum.

~~10.~~ Omnes anguli recti sunt inter se æquales. Quia latera sine inclina-
tione ulla sibi perpendiculariter insi-
stunt. scilicet his rectis non habent longitudinem, latitudinem, sed sunt inclina-
tione nullam, unde aliq. Def. 8.

11. Si in duas rectas ab, cd , altera
recta linea ef incidens, internos, ad
easdem partes, angu-
los bef, dfe , duobus
rectis minores faci-
at; duæ illæ rectæ li-



neæ in infinitum productæ, sibi mu-
tuò incident inq. ad eas partes, ubi
sunt anguli, duobus rectis mino-
res. prop. 28. lib. 1.

12. Duæ

15. Si una aqua

libris inaequalia

adjuvantur, erit totum

excessus, no puncto ad efficiendum angulum, ex

adjuvantur excessus

sui equalis.

16. Si inaequalia

equalia adiunguntur lineae tres rectae ad simplicissimam

erit totorum figura rectilineam constituendam.

17. Si excessus eorum,

qua a principio erant,

equalis.

18. Si ab equalibus inaequalia demantur,

erit residuum excessus, excessus

relictum equalis.

19. Si ab inaequalibus equalia demantur,

erit residuum excessus.

20. Si totum totum est, totum

est totum.

21. Si totum totum est, totum

est totum.

22. Si totum totum est, totum

est totum.

23. Si totum totum est, totum

est totum.

24. Si totum totum est, totum

est totum.

25. Si totum totum est, totum

est totum.

26. Si totum totum est, totum

est totum.

27. Si totum totum est, totum

est totum.

28. Si totum totum est, totum

est totum.

29. Si totum totum est, totum

est totum.

Dux rectae lineae spacium non comprehendunt. Si enim coeant in a-
torum excessus, no puncto ad efficiendum angulum, ex
altera parte necessario magis ac magis
disjungentur. Ad minimum ergo requi-
runtur lineae tres rectae ad simplicissimam
figuram rectilineam constituendam.

PROPOSITIO I.

Problema 1.

Super data recta ab terminata,

Triangulum æquilaterum abc con-

struere.

Intervallum ad ex a & b describantur duo cir-

culi, quorum intersectio c a con-

nectatur cum a & b . Quoniam

igitur eidem ab p æquales sunt

bc & ac , erunt etiam inter

se γ æquales, & triangulum abc æquilaterum.

Quod erat sciendum.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

Ad datum punctum b , datae re-

ctae lineae a , æqualem rectam bd po-

nerere.

Inter-

}

LIBER I.

Intervallo a linea a describa-
tur centro b circulus c d. Cum ergo
ipsi b c sint aequales β b d & γ a.
Proinde ad punctū b posita β b d, e-
rit etiam ipsi a d aequalis. Quod erat
faciendum.

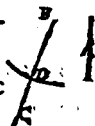


a Postul.
 β 15. def. 1.
 γ ex hyp:
 δ 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæquali-
bus; de maiore c b, minori
a æqualem rectam d b, ab-
scindere.



Centro b intervallo a a secetur c
b in d, & erit d b aequalis ipsi a.

a 1. I.
 β 15. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

Si duo Triangula b c d, d e f, duo
latera b c, e d, duobus lateribus b d,
e f æqualia habeant, utrumq; utriq;
habeant verò & angulum c b d, an-
gulo, d e f æqualem, sub æqualibus
rectis lineis contentum; & basin e d
bati d f, æqualem habebunt; eritque
Trian-

Triangulum $c b d$ Triangulo $d e f$ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

3. l.

Si basis $c d$ est major, quàm basis $d f$, aufferatur ex $c d$, $c g$ equalis ipsi $d f$, & ducatur $b g$. Si jam $b c$, $b g$ sunt æquales ipsis $c d$, $c f$,

9. axio.



& basis $c g$, basi $d f$; non erit tamen angulus $c b g$ angulo $c d e$ æqualis, defectu anguli $g b d$. Quod est contra hypothesein. Ideoq; si

tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquos etiam congruere; & totum toti æquale esse necessum est. Quod erat ostendendum.

8. axio.

PROPOSITIO V.

Theorema 2.

Isoſcelium Triangulorum $a b c$, qui ad basin sunt anguli $a b c$ & $a c b$, inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis $a b$, $a c$ lineis, qui sub basi sunt anguli $d b c$ & $e c b$, inter se sunt æquales.

Lateribus

Lateribus ab, ac aequalibus, equaliter extensis in d & e , ducantur cd, be . Quoniam ergo in Triangulis dac & eab dantur duo latera, ad, ac aequalia duobus lateribus ae & ab , & angulus a utriq; communis; erit etiam basis bc basis cd equalis, & angulus d , angulo e , & angulus abe angulo acd .



Rursus in Triangulis bdc & ceb aequalium laterum ce & bd , be & cd , & angulorum d ipsi e : erunt etiam anguli ecb, dbc sub basi^a aequales, sunt & ^{a 4. h} ebc & $dc b$ aequales, quibus ablati ab aequalibus abe & acd , relinquentur acb & abc anguli ad basin^a aequales. Idem quoque de Triangulis^{a 3. az} equilateris verum est. Unde sequitur Triangula equilatera etiam esse equiangula.

PROPOSITIO VI.

Theorema 3.

Si Trianguli abc duo anguli b, c , aequales inter se fuerint, etiam sub aequalibus angulis subtensa latera ab & ac aequalia inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, anguli b, c aequalibus equalibus^{a ex hyp.} opponi latera $a b, ac$; dicat ab esse longius ac , cui aequale sit db ex $a b$ abscissum. Ducta linea^{a 3. l.} dc ;

7 ex dato.



24. l.

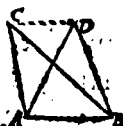
9. ax.

dc: in Triangulis acb & dbc propter latera aequalia, ac ipsi dlb & b c commune; angulumq; b angulo c æqualem: necessariò etiam bases dc, ab erunt & æquales, & totum Triangulum acb, toti dc b, pars toti, quod est impossibile.

PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta ab duabus eisdem rectis ac, bc aliarum duarum rectarum ad, bd æquales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, supra vel infra, eodemq; terminos a & b, cum duabus ac, bc initio ductis habentes.



ex hyp.

5. l.

Constituantur, si potest, ad aliud punctum d alia due rectæ prioribus æquales ad ipsi ac & bd ipsi bc, & connectantur puncta dc.

Erunt Triangulorum a Isoscelium

acd & bdc & æquales anguli ad basin acd ipsi, ada, & bdc ipsi bcd. Vnde sit, ut, quia acd æqualis est partiali adc, quo major totalis bdc æqualis est partiali bcd, totus acd fiat partialis bcd minor. Quod 7 absurdum.

9. ax.

PRO.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 5.

Si duo Triangula abc, def , duo latera ab, ac , duobus lateribus de, df , utrumque utrique æqualia; habuerint verò & basin bc basi ef æqualem; angulum quoque a sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo d æqualem habebunt.

Convertit primam partem propositionis 4.

Quando latera singula singulis, basiq; basis applicata conveniunt, convenire etiam totum



a 8. axiom.

Triangulum toti oportet & angulum a , angulo d . Nisi enim a cadat in d , sed in g , super eadem linea $e f$, duabus eisdem rectis de, df , alie due recte æquales eg, gf utraq; utriq; ad eandem partem, eosdemq; terminos constituentur. Quod est impossibile.

a 7. l.

PROPOSITIO IX.

Problema 4.

Datum angulum bac rectilineum b fariam secare.

Ex $a b$ abscindatur ad , pro libitu assumpta ac æqualis; atq; ad ductam lineam dc ponatur

a 3. l.

a 1. l.

B

tur

γ ex constr.

δ 3. l.



tur Triangulum equilaterum, vel etiam Iſoſceles dfe , & connectantur af . Erunt in Triangulis daf & eaf γ equalium laterum ad ipsi ac , & af communi, & basiū df , ef ; anguli daf & eaf δ equales, ſectūq; angulus a in duos equales angulos. Sed in praxi fuſſit in utraque parte punctum ſupremum f per occultam interſectionem arcuum notariſſe.

PROPOSITIO X.

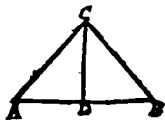
Problema 5.

Datam rectam finitam ab , bifariam ſecare.

α 1. l.

β 9. l.

γ ex constr.



δ 4. l.

Super data recta ab α conſtituti trianguli abc angulum c β biſecans linea cd , biſecat & ab lineam datam in d . Quia enim in triangulis acd & bcd , γ equalia ſunt latera ac & bc , cd verò commune, & anguli comprehenſi c β equales; erunt & baſes ad & db δ equales; & recta ab in d biſariam ſecta.

PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Data

Datæ rectæ ab , à puncto c in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c impositus circinus utring, trāsferat æquales partes cd, ce , ac super tota de constituatur Triangulum vel

equilaterum vel isosceles $d e f$, ducaturq; fc .

Iterū propter latera cd, ce æqualia & cf com-

mune; & bases df, ef æquales, & æquales sunt anguli ad c contigui, id est, recti, & fc perpendicularis ex puncto c erecta.



a 1. l.

per constr.

γ 8. l.

δ 10. def. l.

PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam ab , à dato puncto c , quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c arcus circuli interfecet ab in $d e$ & de dividatur bisariam in f , erit fc perpendicularis: uterque enim ad f contiguus est, & æqualis seu rectus: propter latera fd, fe æqualia & fc commune, propterq; bases dc, ce æquales.



a 10. l.

β 10. def. l.

γ 1. l.

δ 15. def. l.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XIII.

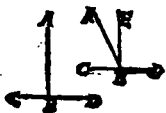
Theorema 6.

Utut recta $a b$ super rectam $c d$ consistens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

10. def. 1.

11. 1.

7 8. ax.



In perpendiculariter insistentibus, $c b$ nimirum ipsi $c d$ res est α manifesta. Sed si $a b$ non sit perpendicularis, ex puncto b erecta perpendiculari $b e$, videmus angulos $a b c$ & $a b d$ simul summas tantundem occupare spacij, quantum duo recti $e b c$ & $e b d$ atq; mutuo γ congruere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam $a b$ atque ad punctum c in ea, duæ rectæ $c d$ & $c e$ non ad easdem partes ductæ d vel e , eos qui sunt deinceps angulos $a c d$, $a c e$, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ $c d$, $c e$, seu recta una.

13. 1.



Si $d c e$ non est recta una, esto $d c f$. In hanc ergo rectam incidens recta $a c$, faciet duos angulos duobus rectis α æquales $a c d$

γ

& a c f. Erant autem & a c d & a c e β ex hypot.
duobus rectis. Ablato itaq; communi a c d, & a c e
les relinquentur a c f, a c e minor majori, vel pars
toti. Quod absurdum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Sidux rectæ a b & c d se invicem
fecuerint, angulos ad verticem: in-
ter se æquales efficient.

Sunt enim a e c & a e d
duobus rectis = æquales. Sunt i-
tem a e d & d e b duobus rectis
æquales. Ablato ergo communi
a e d, β relinquentur a e c & d e b
æquales, anguli ad verticem.



a 13. l.

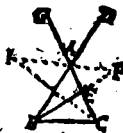
 β 3. axiom.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli a b c uno latere
b a producto externus angulus d a c
utroq; interno, tam a c b, quàm a b c,
& opposito major est.

Dividatur a c bisariam in e,
& ducta rectæ, b e β continetur æ-
qualis utq; in e; conjungaturq; a f.
Iam in Triangulis c e b & a e f la-
tera a e & e c, e b & e f sunt æ-
qualia; & anguliq; a e f & b e c.



a 10. l.

 β 3. l. γ ex const. δ 15. l.

e 4. l.

B 3

Ergo

4. l. Ergo & totum triangulum toti eris: aequale, & angulus $e c h$ ipse $e a f$, quo tanquam parte externus totus $c a d$ est major.

Ita pro angulo $a b c$ dividatur latus $a b$ bisariam, & recta $e h$ in continuum abscindatur β equalis $h i$, connectaturq; $i a$. Rursum in Triangulis $c h b$ & $a h i$ γ equalia sunt latera $a h$ & $h b$, $h c$ & $h i$, & angulique $c h b$ & $a h i$. Totum ergo triangulum toti est: aequale, & angulus $i a h$ ipse $h b c$, cui equalium duorum ad verticem alter $d a f$ tanquam pars minor est toto externo $c a d$.

PROPOSITIO XVII.

Theorema IO.

Omnis Trianguli $a b c$ duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.

16. l.

4. axio.

13. l.



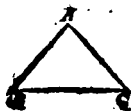
Pro ducto latere $c b$, angulus externus $a b d$ = major est interno opposito $a c b$. Si utrique jungatur angulus communis $a b c$, β majores erunt $a b c$, $a b d$ ceu duobus rectis γ aequales, quam interni duo $a b c$ & $a c b$. Itaq; minores sunt duobus rectis.

PRO.

EVCLIDIS ELEMENTI PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omniſ trianguli abc duo latera ab, ac , reliquo bc ſunt majora, quomodocunque ſumta.



Eſt enim bc inter b & c omnium a brevifſima.

α 4. def. 1.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si ſuper trianguli abc uno latere bc , ab extremitatibus, duæ rectæ bd, cd , interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus ba, ca minores quidem erunt, majorem verò angulum d continebunt.



Producto latere bd in e , in triangulo bae , latera ba, ae ſimul a majora ſunt tertio be , additoq; ec communi, ba, ac β majora erunt be, ec ſimul ſumtis: a ita &

ce, ed quàm dc , ſic bd, dc ſimul β minores iſſis be, ec : Ideoq; β minores ſunt majoribus ba, ac . Sic tanquam externus d angulus γ major eſt angulo e interno oppoſito; & hic itidem tanquam externus interno a : itaq; β d major eſt ipſo a .

PRO.

α 10. 1.

β 4. axiom.

γ 16. 1.

PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis fg , fk , kg , quæ sunt datis tribus, abc , æquales, triangulum $fk g$ constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnisariam summas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera quomodocumque sumpta reliquo sunt majora.

Data æquali fg utrinque, apponantur in directum fd & gh æquales ipsis b & c , & illarum intervallo descriptorum circulorum intersectio k cum g & f connexa,

exhibet triangulum $fk g$, cujus latera datis tribus rectis sunt æqualia. In



praxi sufficit tantum ad tertiam lineæ extremitates &c. 15. def. 1. intervallo reliquarum duarum intersectionem notare, eamque cum illis extremitatibus copulasse per rectas.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , datumque in ea punctum c , dato angulo recti-

B 5 linco

linco $d e f$; æqualem angulum i et re-
ctilineum constituere.

In lineis $e d$, $e f$ angulum datum e includen-
sibus sumta duo puncta pro libitu g & h conne-
ctantur, ipsiq; $e g$ equalis in $a b$ fi-
at $c i$, cui a accommodentur $d a e$ re-
liquæ $g h$ seu $i k$, & ch seu $k c$.
Erit $i c k$ suis lateribus & basi β æ-
quale triangulo $g h$, & $a d$ pun-
ctum c factus angulus γ æqualis an-
gulo e .

α 23. l.

β ex constr.

γ 3. l.



PROPOS. XXIV.

Theorema 15.

Si duo triangula $a b c$, $d e f$ duo
latera $a b$, $a c$ duobus lateribus $d e$, $d f$
habuerint æqualia, utrumq; utriq;
angulum a verò angulo d majorem,
sub æqualibus rectis lineis conten-
tum: & basin $b c$, basi $e f$ majorem
habebunt.

α 23. l.

β ex constr.

γ 4. l.

α Fiat ad punctum d angulo a æqualis, ut
latus $d g$ sit β æquale lateri $d f$, cadetq; $e g$ vel in
 $e f$ vel supra, vel infra eam. Si supra ipsam, in
Triangulis $b a c$ & $e d g$ propter æqualia latera
 $b a$, $e d$ & $a c$, $d g$, & angulos a & d ; erunt &
bases $b c$, $e g$ & æquales. Et in triangulo Isosceli
 $e g f$,

$\angle e g f$, anguli ad basin $d g f$ &

$d f g$ erunt $\angle$ equales: Quo

angulo $d g f$ cum minor sit,

$\angle e g f$, angulo autem $d f g$ ma-

jor $\angle e f g$, utique minori $\angle e g f$

minus latus $e f$; & majori $\angle e f$

g majus latus $e g$ subtende-

tur, id est, huic equalis $b c$

basin major erit basi $e f$. Sic

in ipsam, necessario $e g$ & a-

qualis ipsi $b c$, & major est basi $e f$. Denique si in-

fra; productis $p f$ in h , & $d g$ in i , ductisq; $e g$: & s. axio.

erit rursus $e g$ basis, & equalis basi $b c$; angulus i-

tem $h f g$ & equalis angulo $f g i$, quo sane & minor

est $\angle e g f$, adeoque, & angulo $e f g$. Ideoque, angulo

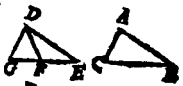
$e f g$ adhuc majori majus latus $e b$ subtendetur

quod equalis est ipsi $b c$, quam angulo $e g f$, quod

est $\angle e f$. Sic patet propositum.



$\angle 5.1.$



$\angle 19.1.$



PROPOS: XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula abc , def , duo latera ab , ac , duobus lateribus de , df æqualia habuerint, utrumq; utri- que: basin vero $b c$ basi $e f$ majorem, & angulum a sub æqualibus rectis contentum, angulo d majorem habebant.

Sic



*Sin minus, erit vel æ-
quais, atque sic contra hypo-
thesin etiam bases bc , ef
erunt æquales: vel major*

*æ 4. l.
ß 14. l.*

*d ipso a, atque sic basis ef basi bc contra hypothe-
sin ß major, Erü itaq; a major quam d.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triangula abc , def , duos
angulos b , e , duobus angulis c , d æ-
quales habuerint, utrumq; utriq;
unumq; latus unilateri æquale, sive
quod æqualibus adjacet angulis bc ,
 ef seu quod uni æqualium angulo-
rum subtenditur: ac & df & reliqua
latera reliquis æqualia, utrumque
utrique, & reliquum angulum a , re-
liquo d æqualem habebunt.



*Nisi ergo ab & de sint
æqualia, fiat ge æquale ipsi
 ab , ducaturq; gf . Iam cum
 ab , bc æquantur ipsis ge ,*

*æ ex hypot.
ß 4. l.
γ 1. axiom.
δ 9. axiom.*

*ef , anguliq; b & c sint æquales, ß erunt & an-
guli æqualibus lateribus oppositi æquales. c & c efg .
Cui c quoniam etiam æqualis est dfe , verunt
 dfe totus & gfe partialis æquales, quod ð ab-
surdum.*

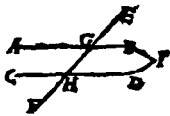
PRO.

PROPOSITIO XXVII

Theorema 18.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, alternatim agh & ghd , angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.

Si non sunt, & concurrerent productæ in i : eritque gih triangulum, cuius latere gi productio in a , angulus externus agh , & maior sit interno opposito ghi ; cui tamen ex hypothesis æqualis erat. Sunt ergo parallelæ.



æ 34. def. 1.
ß 16. l.

PROPOSITIO XXIIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, externum age angulum, interno & opposito, cbg , & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos agh & ghc & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.

Eodem enim age æquales sunt hgb & bch ; hi ergo tanquam alterni inter se æquales, & parallelas arguunt ab & cd . Deinde



æ 15. l.
ß ex hypot.
γ 1. axiom.
δ 27. l.

cum

13. l.
3. axio.

cum $\angle agh$, & $\angle chg$: itemq; $\angle agh$ & $\angle hgb$ duobus rectis sint æquales; erunt, ablato communi $\angle gh$, anguli reliqui $\angle hgb$ & $\angle chg$ alterni & æquales: ideoq; rectæ parallelæ.

L E M M A.

Si in duas rectas ab & cd , recta ef incidens, internos & ad easdem partes angulos bef & dfe duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere in h , ubi non sunt duobus rectis minores sed majores, fierent in triangulo ehf duo illi anguli duobus rectis majores. Quod = absurdum.



17. l.

PROPOS: XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas ab , cd , recta ef incidens, & alternatim angulos æquales efficit agh , ghd ; & externum bge interno & opposito dhg , & ad easdem partes æqualem; & internos bgh , ghd ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

Si quis alternos negaverit aequales, alter a g h
 esto major altero g h d. His inaequalibus addimus
 communis b g h, cum contiguo quidem h g a duo-
 bus rectis = quantur; sed
 cum g h d duobus rectis e-
 runt & minores, id est duo
 interni, & ita a b, c d non
 erunt parallela contra
 hypothesin. Quoniam igitur alternorum equali-
 tas uni a g h d equalis e g b, erit etiam hic exter-
 nus interno ad easdem partes opposito equalis. De-
 niq; cum interni b g h cum externo e g b duobus
 rectis sint = aequales, cum eodem b g h alter inter-
 nus g h d duobus rectis = aequales erunt. Patet ergo
 propositum.



= 13. I.

p 4. axiom.

7. 11. ax.

PROPOS: XXX.

Problema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ e f sunt
 parallelæ a b, c d, & inter se sunt pa-
 rallelæ.

Recta g h secet illas parallelas in i k l. Iam
 in a b, e f parallelas incidens g h, facit alternos
 a i h & i l f = aequales. = 1.
 semque externam i k d in-
 terno opposito k l f, vel i l f; &
 Erunt ergo & a i k & i k d
 alterni aequales, rectæq; a b
 & c d & parallela.



= 19. I.

p 1. ax.

7. 27. I.

PRO.

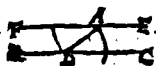
EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXI.

Problema 10.

Per datum punctum a , datæ rectæ bc , parallelam rectam ef ducere.

α 29. l.
 β 27. l.

Ducta $a d$, fiat angulo $a d c$ equalis $d a f$ alternus, continueturq; $f a$ in c . β Erunt illæ propter alternos æquales parallelæ.



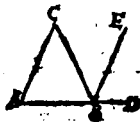
PROPOS: XXXII

Theorema 22.

Omnis trianguli acb , uno latere ab producto in d ; externus angulus cbd duobus internis oppositis a & c est æqualis: & trianguli tres anguli, duobus rectis sunt æquales.

α 31. l.
 β 29. l.

Lateri ac agatur per punctum b parallelæ bc . In duas ergo has parallelas ac & bc incidens cb , efficit alternos $c b e$ & $c b a$ æquales; $a d$ verò lineæ externum cbd interno opposito a . Sic totus externus internis duobus oppositis æqualis est. Quibus si ad-



datur tertius internus $cb a$ communis, erunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales.

PRO-

PROPOS: XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ $a c, d b$, quæ æquales
 $a b, c d$ ad parres easdem conjungunt,
 & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Ducta ad efficit alternos $b a d, a d c$ æqua- 29. l.
 les, comprehensos duorum triangulorū & æqualibus & ex hypoten
 lateribus $a b$ ipsi $c d$ & $a d$
 communi. Bases itaque $a c$
 & $b d$ seu rectæ æquales pa-
 rallelas connectentes sunt & æquales : & anguli
 $c a d, a d b$ æquales : qui alterni etiam paralle- 27. l.
 las easdem $a c$ & $b d$ ostendunt.

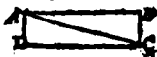


PROPOS: XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spacio-
 rum $a b c d$; æqualia sunt inter se, quæ
 ex aduerso & latera & anguli; atque
 illa bifariam secatur diameter $a c$.

Ducta diameter $a c$ facit alternos $a c d$ & $c a$
 b ; $c a d$ & $a c b$ æquales, quos angulos æquales 29. l.
 cōmunis interjacens basis $a c$ Triangulorū $a b c$ &
 $a d c$, reliqua latera reliquis
 seu opposita efficit & æqualia, 25. l.
 & reliquos angulos b, d op-
 positos, sicut & ex æqualibus compositi 2. axiom.
 & c, a quales



24. 1.

quales sunt; & tota triangula abc & qdc sunt
 & equalia, secundum nimirum est bisariam paralle-
 logrammum per diametrum.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma $cdea$, $cdbf$,
 super eadem basi cd , & in eisdem pa-
 rallelis ab , cd constituta, inter se
 sunt equalia.

24. 1.
 1. ax.
 2. ax.
 ex hyp.
 19. 1.
 4. 1.
 3. axio.

Eidem cd = *equales* ac & fb inter se sunt
 & *equales*, quibus eadem cf , addita & *equales* fa-
 cit af & eb . Iam triangula fac & bed & *equa-*

qualium laterum af & eb , ac &
 cd , & = *angulorum* ipsis compre-
 henforum caf , $deberant$ & *equa-*

lia, à quibus ablatum commune triangulum cgf ,
 relinquit trapezia $aegc$, $bfgd$ = *equalia*, qui-
 bus commune additum triangulum cgd , *paralle-*
logramma $cdea$ & $cdbf$ super eadem basi in
 iisdem parallelis ostendit & *equalia*.

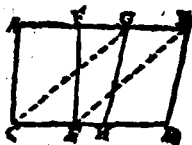
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 26.

Parallelogramma $acsf$, $ghdb$,
 super æqualibus basibus ce , hd , & in
 eisdem

eisdem parallelis ab, cd constituta,
inter se sunt æqualia.

Coniunctis gc, be fi-
ant parallelogramma data
eidem ceb, g , ideoque &
inter se æqualia.



æ 35. l.
p 1. axio.

PROPOS: XXXVII.

Theorema 27.

Triangula abc, dbc super eadem
basi bc , & in eisdem parallelis bc, ad ,
inter se sunt æqualia.

Per puncta b & c a ducantur parallele be ,
 c fipfis ca, bd , quæ concurrant cum a d utrinq;
producta. Sunt ergo super
eadem basi bc in iisdem
parallelis constituta pa-
rallelogramma $bcae$, b
 cd æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia trian-
gula data æqualia.



æ 31. l.

æ 35. l.
p 34. l.

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 28.

Triangula bac, edf , super æqua-
libus basibus bc, ef constituta, & in
eisdem parallelis, inter se sunt æqua-
lia.

a 31. l.

Iterum per puncta b, f ductis parallelis $bg,$
 fh ipsi ca, cd ; & utring, continuata $a d$ sunt



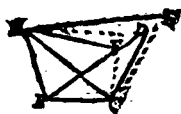
parallelogrammum cg &
 ch super equalibus basibus
 β equalia, & proinde i-
 pforum γ dimidia seu data
 duo triacula d equalia.

 β 36. l. γ 34. l. d 6. axiom.

PROPOS: XXXIX.

Theorema 29.

Triangula abc, dbc æqualia su-
 per eadem basi bc , & ad easdem par-
 tes constituta, in eisdem quoq; sunt
 parallelis bc, ad .



Sim minus, a fiat a f
 parallela ipsi bc & ducatur
 fc . Erunt Triangulo
 eidem bac equalia Tri-

a 31. l.

 β 37. l. γ ex hypot. d 9. axiom.

angula β bfc parziale & γ bdc totale. Quod
 d absurdum.

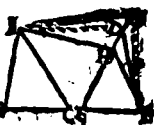
PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Triangula abc, def æqualia su-
 per æqualibus basibus bc, ef , & ad
 easdem partes constituta, in eisdem
 quoque sunt parallelis ad, bf .

Sim

Si minus, a fiat $a h$
 parallela ipsi $b f$ & ducatur $h f$. Iterum eidem triangulo $b a c$ equalia erunt triangula $\beta c h f$ parziale & $\gamma c d f$ totale. Quod δ absurdum.



a 31. l.
 β 38. l.
 γ ex hyp.
 δ 9. axiom.

PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum $a c d e$ eum triangulo $b c d$ eandem basin $c d$ habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis $a b, c d$; duplum erit parallelogrammum trianguli.

Ducatur diagonus $a d$.
 Erit Trianguli $a c d = e$.
 qualis Triangulo $c b d \beta$.
 duplū parallelogrammum
 $a c d e$. Ideoq; & ipsius $c b d \gamma$ duplum erit.

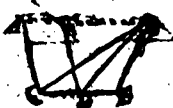


a 37. l.
 β 34. l.
 γ 6. axiom.

Corollarium.

Si Triangulum $b c f$ duplam habuerit basin $c f$, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo $a c d e$, erit triangulum parallelogrammo æquale.

Ducta enim $b d$, ejusdem trianguli $b c d$ dupla



C 3

sunt,

α 28. l.
 β 41. l.
 γ 6. ax.

sunt. $\triangle$ triangulum ebf & $\square$ parallelogrammum
 $acdc$. Ideo, sunt γ equalia.

PROPOSITIO XLII.

Problema 11.

Dato Triangulo abc γ quale pa-
 rallelogrammum, $cefg$ constituere
 in dato angulo rectilineo d .

α 10. l.
 β 23. l.
 γ 31. l.

α Diviso latere bc bisariam in e , β fiat &
 punctum c angulus angulo dato rectilineo d equa-



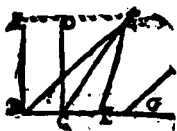
δ 38. l.
 ε 41. l.
 ζ 6. axio.

lii, γ aganturque parallela
 ag ipsi bc per a , & cg
 ipsi ef per c ; & connectan-
 tur demum puncta a, c .
 Quoniam ergo ejusdem tri-
 anguli eac dupla sunt, δ
 triangulum bac & parallelogrammum $cefg$,
 erunt ζ equalia.

Conversa.

Dato parallelogrammo $abcd$,
 γ quale Triangulum bef constituere
 in dato angulo rectilineo g .

α 23. l.



α Fiat angulus cbe e-
 qualis angulo g , secetq; be
 productam ad in c ; & in
 continuum addatur ipsi bc
 equalis cf , junganturq; fe
 & ducatur ce . Quia rursus ejusdem trianguli
 bce

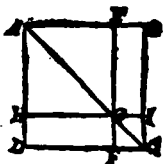
Et c duplex sunt β triangulum bef & parallelogrammum $abcd$, etiam inter se sunt δ equalia. β 38. l. γ 41. l. δ 6. axiom.

PROPOS: XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo $abcd$, Complementa $dfgb$, $begi$, eorum quæ circa diametrum ac sunt, parallelogrammorum $aeib$, $cfgi$, sunt inter se equalia.

Ab a equalibus triangulis adc , abc , ablatis triangulis a equalibus ahg , aei , relinquuntur Trapezia $hgcd$, $egcb$ β equalia; à quibus iterum sublati a equalibus triangulis gfc , gic , relinquuntur complementa duo gb & gd β equalia.



a 34. h

PROPOS: XLIV.

Problema 12.

Ad datam rectam ab , dato triangulo c , æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo d .

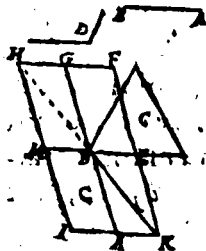
C 4

Fiat

a 42. 1.

a. Fiat triangulo c aequale parallelogrammum e b f g. habens angulum e b g aequalem angulo dato d; producaturq; g b in a, ut a b sit data a b aequalis; ac per punctum a ipsi e b p agatur parallela, quocum linea f e pro-

p 31. 1.



ducta concurrat in puncto k. Per hoc & punctum b ducitur diagonis concurrens in puncto h cum g f producta: per quod ipsi a g p ducitur parallela h l, ac idemq; e b continuatur in m. Quia .n. eidem parallelogrammo g e b f aequalia

y 43. 1.

d 42. 1.

e 1. axiom.

sunt, & triangulum c & d parallelogrammum a b m l, erit parallelogrammum a b m l ad datam lineam a b in angulo rectilineo d triangulo dato: aequale constitutum.

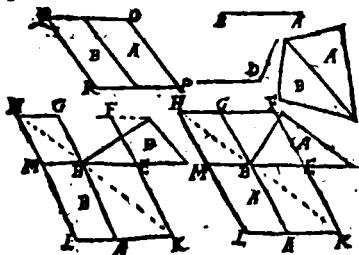
PROPOSITIO XLV.

Problema 13.

Ad datam rectam lineam a b, dato rectilineo b a, aequale parallelogrammum o p q r constituere, in dato angulo rectilineo d.

a 44. 1.

Resoluto rectilineo dato in sua triangula, a, b = construantur triangula singulis aequalia parallelogramma a & b, quae deinde in linea p r iuxta aequales



*aequales suas altitudines conjungantur. & Eris p 9. axiom.
totum hoc parallelogrammum toti rectilineo data
aequale, cum singula partes respondeant singulis.*

PROPOS: XLVL

Problema 14.

*A data recta linea ab , quadra-
rum $abcd$ describere.*

*Ex alterutro termino a linea data a eriga- a 11. l.
tur perpendicularis d aequalis linee datae & per d
p agatur linea ab parallela & aequalis dc , jun- p 31. l.
ganturq; c & b . & Aequales & parallelas, $a b$, & ex constr.
 dc , connectentes da & cb erunt
d aequales, & parallelogrammum
factum equilaterum; & propter
angulos c, b , oppositos rectis $a d$ &
rectis, rectangulum: ideoq; qua-
dratum.*



PROPOS: XLVII.

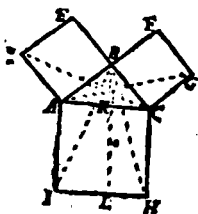
Theorema 33.

In rectangulis triangulis $a b c$, quadratum, quod à latere a erectum angulum $a b c$ subtendente describitur; æquale est quadratis $a b e d$, $b c g f$, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

4. 6. l.
14. l.
3. l.

Descriptis tribus quadratis $a h$, $a e$, $c f$, in directum a jacent linea $a b$, $b f$ & $c b$, $b e$; & ducta g , $b l$ parallela ipsi $a i$, ducantur etiam $b h$, $b i$, $a g$, $c d$.

2. ex.
4. l.
4. l.
6. ax.



Addito communi angulo $b a c$ ad rectos $d a b$ & $i a c$ punct d æquales anguli $i a b$, $d a c$, & ipsæque triangula $d a c$, $i a b$, eorumque ζ ducta parallelogramma $a c$ & $a l$ æqualia; eodemque modo $c f$ & $c l$ demonstrantur æqualia: Erunt ergo quadrata $a e$, $c f$, quadrato $a h$, quod ex parallelogrammis $a l$ & $c l$ componitur æqualia.

PROPOS: XLIIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno latere a et trianguli $a b c$ describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis $a b, b c$ trianguli lateribus describuntur quadratis: angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus rectus est.

Erigatur ex b linea $a b$ perpendicularis $b d$ equalis ipsi $b c$ & connectantur $a d$. Quoniam Quadrata $a a d$ & $a a c$ equalia quadratis $a b, b d$ itemq; $a b, b c$ erunt etiam inter se, equalia: & sic in triangulis equalium laterum $a b c$ & $a b d$ etiam anguli $a b c$ & $a b d$ æquales erunt: quorum uno $a b d$ existente recto, etiam alter $a b c$ rectus erit.



a 47. l.
 ex hyp.
 7. 1. ax.
 8. 1.

EUCLE.



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R I I.

Definitiones.

I.



Quoniam parallelogram-
mum rectangulum $abcd$
contineri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, ab , ad ,
quæ rectum comprehen-
dunt angulum bad .

2. In omni parallelo-
grammo spacio $abcd$ u-
nūquodlibet ag vel gc eo-
rum, quæ circa diametru
sunt, parallelogrammorū,
cum duobus complementis bg & gd
Gnomon vocetur.



PRO.

PROPOSITIO I.

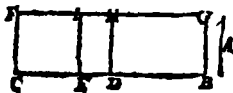
Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & $b c$,
 fecerurq; ipsarum altera $b c$ in quot-
 cunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectan-
 gulum $b f$ comprehensum sub illis
 duabus rectis lineis a & $b c$ æquale est
 eis, quæ sub insecta $a d b g$, & quolibet
 segmentorum $b d, d e, e c$ com-
 prehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$
 ipsi a æqualis, compleaturque rectangulum $b f$
 comprehensum sub $b c$ & $b g$. Rursus etiam ex
 punctis sectionum d & e

erigantur perpen-
 diculares $d h$ & $e i$ æ
 quales & parallele

lineæ $g h$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, qua
 tanquam partes finitæ sunt æqualia sunt toti $b f$
 sub datæ lineæ comprehenso. Quod erat ostenden-
 dum.



a 11. l.

β 31. & 34. l.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea $a b$ secta sit utcun-
 que in c : rectangula $a f$ & $c d$, quæ sub
 tota, & quolibet segmentorum $a c$ &
 $c b$



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R I I.

Definitions.

I.



Quoniam parallelogram-
mum rectangulum $abcd$
contineri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, ab, ad ,
quæ rectum comprehen-
dunt angulum bad .

2. In omni parallelo-
grammo spacio $abcd$ u-
nūquodlibet ag vel gc eo-
rum, quæ circa diametru
sunt, parallelogrammorū,
cum duobus complementis bg & gd
Gnomon vocetur.



PRO.

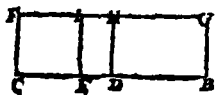
PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & $b c$, fecerurq; ipsarum altera $b c$ in quotcunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectangulum $b f$ comprehensum sub illis duabus rectis lineis a & $b c$ æquale est eis, quæ sub insecta $a d b g$, & quolibet segmentorum $b d, d e, e c$ comprehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$ ipsi a equalis, compleaturque rectangulum $b f$ comprehensum sub $b c$ & $b g$. Rursus etiam ex punctis sectionum d & e

a erigantur perpendiculares $d h$ & $e i$ æquales & parallele



a 11. L.
 β 31. & 34. L.

lineæ $g h$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, quæ tanquam partes simul sumptæ aequalia sunt toti $b f$ sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea $a b$ secta sit utcunque in c : rectangula $a f$ & $c d$, quæ sub tota, & quolibet segmentorum $a c$ & $c b$



EUCCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER II.

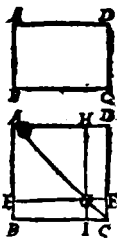
Definitiones.

I.



Mne parallelogram-
mum rectangulum $abcd$
containeri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, ab, ad ,
quæ rectum comprehen-
dunt angulum bad .

2. In omni parallelo-
grammo spacio $abcd$ u-
nūquodlibet ag vel gc eo-
rum, quæ circa diametrū
sunt, parallelogrammorū,
cum duobus complementis bg & gd
Gnomon vocetur.



PRO.

PROPOSITIO I.

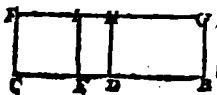
Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & $b c$,
fecerurq; ipsarum altera $b c$ in quot-
cunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectā-
gulum $b f$ comprehensum sub illis
duabus rectis lineis a & $b c$ æquale est
eis, quæ sub insecta $a d b g$, & quoli-
bet segmentorum $b d, d e, e c$ com-
prehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$
ipsi a æqualis, compleaturque rectangulum $b f$
comprehensum sub $b c$ & $b g$. Rursus etiam ex
punctis sectionum d &
 e erigantur perpen-

diculares $d h$ & $e i$ &
æquales & parallela

lineæ $g h$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, quæ
tanquam partes simul sumptæ æqualia sunt toti $b f$
sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostenden-
dum.



a 11. l.
 β 31. & 34. l.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea $a b$ secta sit, ut cun-
que in c : rectangula $a f$ & $c d$, quæ sub
tota, & quolibet segmentorum $a c$ &
 $c b$



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R I I.

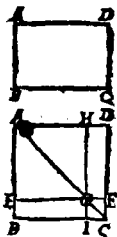
Definitiones.

I.



Mne parallelogram-
mum rectangulum $abcd$
contineri dicitur sub re-
ctis duabus lineis, ab , ad ,
quæ rectum comprehen-
dunt angulum bad .

2. In omni parallelo-
grammo spacio $abcd$ u-
nūquodlibet ag vel gc eo-
rum, quæ circa diametru
sunt, parallelogrammorū,
cum duobus complementis bg & gd
Gnomon vocetur.



PRO.

LIBER II
PROPOSITIO I.

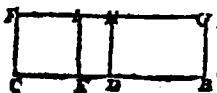
45

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & b ,
fecerurq; ipsarum altera b in quot-
cunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectan-
gulum $b f$ comprehensum sub illis
duabus rectis lineis a & b æquale est
eis, quæ sub insecta $a d b g$, & quoli-
bet segmentorum $b d, d e, e c$ com-
prehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$
ipsi a equalis, compleaturque rectangulum $b f$
comprehensum sub $b c$ & $b g$. Rursus etiam ex
punctis sectionum d &

e erigantur perpen-
diculares $d h$ & $e i$ æ
quales & parallele



α 11. l.
 β 31. & 34. l.

lineæ $g h$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, qua
tanquam partes simul sumta equalia sunt toti $b f$
sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostenden-
dum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Sic recta linea $a b$ secta sit utcun-
que in c : rectangula $a f$ & $c d$, quæ sub
tota, & quolibet segmentorum $a c$ &

$c b$

cb comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, Quadrato ad .

46. I.
34. I.

Super recta ab describatur quadratum ad , & producat per ipsos a & b parallela & equalis cf . Fiunt ergo af & cd parallelogramma, tanquam partes simul sumta equalia toti ad quadrato.



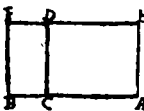
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si recta linea ab secta sit utcunque: rectangulum af sub tota ab & uno segmentorum ac comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis ac , cb comprehenditur, rectangulo cf & illi, quod à prædicto segmento ac describitur, Quadrato ad .

46. I.

Ex utrovis segmento, ut ac fiat quadratum $acde$, & producta recta cd in f fiat equalis ipsi ab , & connectantur fb . Erit cf rectangulum ex segmentis; & totum rectangulum af æquale quadrato segmenti ad una



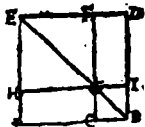
una cum illo segmentorum rectangulo, tanquam totum suis partibus simul sumtis.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea ab secta sit utcunque in c ; Quadratum ad , quod à tota ab describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis ac , cb describuntur, quadratis hf , ci , & ei , quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo ga , gd .

In Quadrato ad , ex ab a descripto, ducatur diagonis be , & ex puncto sectionis c agatur ipsi ac parallela cf secans diametrum in g puncto, per quod parallela β fiat hi ipsi ab . 46. l.
 Ve 31. l.
 ergò in triāgulis isoscelibus rectangulis cab & ed 75. l.
 b anguli ad basin γ æquales sunt δ
 semirecti; ita in triāgulis efg
 & ehg rectangulis, ad basin eg
 angulis existentibus δ equalibus,
 etiam latera ipsis opposita equalia
 sunt, quibus similiter sua opposita sunt, equalia, 34. l.
 adeoque hf est ζ quadratum, ut & ci , utrumq; 43. l.
 videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam
 segmentis, complementa ga & gd ζ equalia, com-
 prebensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis
 quadrato totum sunt equalia.



Corol.

In quadratis quæ circa diametrum sunt parallelogramma, quadrata sunt.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab secetur in æqualia ac, cb & non æqualia ad, db : rectangulum ab sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, unà cum quadrato $k g$, quod ab intermedia sectionum ca æquale est ei, quod à dimidia cb describitur, quadrato $c f$.

$a 46. l.$

$\beta 11. l.$

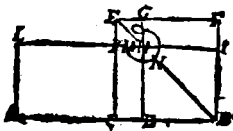
$\gamma 31. l.$

$\delta 36. l.$

$\epsilon 43. l.$

$\zeta cor. 4. l.$

Ex cb dimidia describatur quadratum $c f$, & ducatur diagonus, quam ex d per recta perpendicularè secet in pū-



cto h , per quod equalis & parallela li γ agatur ipsi ab , & l cum a conjungatur. Iam si rectangulorum d equalium uni $a k$ adjiciatur, complementorum equalium unum ch ; alteri verò ci alterum hf , & utriq; commune ζ quadratum intersegmenti kg ; erit ah rectangulum inæqualium segmentorum unà cum illo intersegmenti quadra-

to, kg equale gnomoni mno cum eodem quadrato, seu quadrato cf dimidia cd .

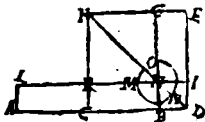
PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab secetur in c , & illi recta quædam linea d in rectum adjiciatur: rectangulum ai comprehensum sub tota cum adjuncta ad & adjuncta bd , unà cum quadrato kg à dimidia cb æquale est quadrato ce à linea, quæ cum ex dimidia cb tum ex adjuncta bd componitur, tanquam ab una descripto.

• Describatur ex cd quadratum ce cum diametro df , quæ ex ba recta perpendicularis intersectet in i puncto, per

quod ipsi ad ducatur parallela & equalis il . Rectangulo eidem ch & equalibus ak & he , addito communi ci , equalia sunt rectangulum ai & gnomon mno ; adeoque & aucta communi quadrato kg .



a 46.l.
 b 12.l.
 c 36.l.
 d 36.& 43.l.
 e 12.l.

EVCLIDIS ELEMENTA

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si recta linea $a b$ secetur utcumq;
in c , quod à tota $a d$, quodque ab uno
segmentorum $b f$, utraq; simul qua-
drata, æqualia sunt & illi, quod bis
sub tota, & dicto segmento compre-
henditur, rectangulo $a f, b d$, & illi
quod à reliquo segmento fit, qua-
drato $g b$.

α 46. l.

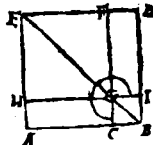
β 11. l.

γ 31. l.

δ 4. ll.

ϵ 8. ax.

Iterum super $a b$ describatur quadratum
& ducta diagonio ex c perigatur perpendicularis $c f$
& per g data $a b$ parallela γ fiat $h i$. Cum ergo
gnomoni $i e c m$, unà cum qua-
drato $g b d$ æquale sit quadra-
tum $a d$; addito communi $h f$,
erunt quadrata $a d$ ex tota, &
 $h f$ ex segmento æqualia rectan-
gulis $a f$ & $h d$, sub tota & se-
gmento comprehensis, unà cum reliqui segmenti
quadrato $g b$.



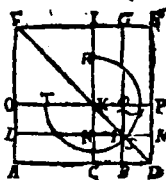
PROPOS: IIX

Theorema 8.

Si recta linea $a b$ secetur utcum-
que

que in e : rectangulum ab quater cō-
prehensum sub tota ab & uno se-
gmentorum cb , cum eo, quod à reli-
quo segmento fit quadrato oi aequa-
le est ei, quod à tota & dicto segmen-
to, tanquam ab una ad linea descri-
bitur, quadrato ae .

Vicūq, in c secta ab ad-
ponatur bd equalis ipsi cb ,
& a describatur quadratum
 ae super tota ad : ex punctis
autem c & b erigantur
perpendiculares & parallela
 ci & bg , quae diagonium



$a 46. l.$

$b 11. l.$

fd secant in k & h punctis, per quae ipsi ad paral-
lela & aequales $ragantur$. Aequalibus igitur pa-
rallelo grammis singulis an, lk, kg, qe , ex se-
gmentis data linea factis, addantur singula
quadrata aequalia ex altero segmento facta; e-
runt quatuor haec rectangula ex tota & segmento
& inter se 3 equalia, & simul sumta gnomoni rsc :
quibus si addatur quadratum oi ex priore segmen-
to ac , equalia erunt quadrato ae facto ex tota
 ab cum segmento bd tanquam ab una partes si-
mul sumta toti.

PROPOS: IX.

Problema 9.

D 2

Si

Si recta linea ab secetur in æqualia ac, cb , & non æqualia ad, db : Quadrata ad, db , quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia, sunt & ejus, quod à dimidia ac , & ejus, quod ab intermedia sectionum cd fit, quadrati.

Dimidia ac equalis a erigatur perpendicularis ce , & cum a & b connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula ace & bce , quorum anguli ad bases b erunt æquales & semire-

cti, & totus acb ex duobus semirectis rectus. Rursus erigatur ex d perpendicularis df , & per f ipsi



cd fiat parallela & equalis. b Erunt ergo in duobus rectangulis triangulis bdf & ecf semirecti ad bases, & hi

subtensa latera d equalia. Denique ducatur af . In triangulo ace quadratum hypotenuse ae , æquale est quadratis ex ac & ce , vel duplum quadrati dimidia ac , itemque quadratum ef duplum erit quadrati gf vel cd intermedia: ac proinde quadrata ac & ef simul sumpta erunt dupla quadratorum ac dimidia & cd intermedia. Cumque quadratum af æquale sit, & quadratis ac & ef simul sumtis; & quadratis ad & df vel db inæqualium segmentorum; erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum dupla quadratorum ac dimidia & intermedia. Quod erat propositum.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si recta linea ab secetur bifariam in c ; adjiciatur autem ce in rectū quæpiam recta linea bd ; quod à tota cum adjuncta & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata ad & bd , duplicia sunt & ejus, quod à composita ex dimidiâ & adjuncta, tanquam ab una cd , descriptum sit, quadrati,

Iterum ex ca erecta perpendiculari ce equali ipsi ac , fiunt duo triangula isoscelia ace & bce , in quibus anguli ad bases a & b equales & γ semirecti.

Deinde compleatur β . 5. 1. rectangulum cf , productæq; fd & eb concurrant γ 3 2. 1. in g , & g connectatur cum a . Erunt triangula rectangula cfg & bdg etiam isoscelia, & anguli ad bases semirecti. Est ergo quadratum ac δ 47. 1. duplum quadrati ac , & quadratum eg quadrati ef vel cd , quadratum ag quadrati ac & cg est δ equalis; idemq; quadratum ag etiam δ equalis est quadrato ad totius cum adjuncta & d g adjuncta: ideoq; etiam hæc duo quadrata ro-

zini cum adjecta & adjecta erunt dupla quadratorum dimidia & dimidia cum adjecta.

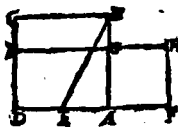
PROPOS: XI.

Problema I.

Datam rectam lineam ab secare, ut comprehensum sub tota ab vel bc , & altero segmentorum gb rectangulum gc , æquale sit ei, quod a reliquo segmento ag fit, quadrato ah .

¶ 46.1.

¶ 10.1.



Super ab data = describatur quadratum ac ; & latus ad bisecetur bisariam ine, ductaq; eb fiat equalis ef ; & super af fiat quadratum, continuata hg in i . Cum ergo rectangulum dh super tota cum adjecta & adjecta, una cum quadrato dimidia y equalis sit quadrato ex dimidia & adjecta ef vel eb , quod d equalis est quadratis ea dimidia & ab totius; ablato communi quadrato ea , erunt quadratum db ex tota ab , & rectangulum dh ex tota cum adjecta & adjecta = equalia: rursusq; ablato rectangulo communi ai ex tota & adjecta, relinquatur quadratum ah adjecta, vel alterum segmen-

¶ 6.11.

¶ 47.1.

¶ 3.22.

segmenti $a g$: aequale rectangulo $g c$ comprehenso sub data recta $a b$ & altero segmento $g b$.

PROPOSITIO XII.

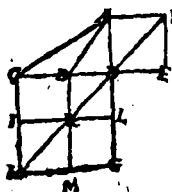
Theorema 12.

In amblygonijs triangulis $a b c$, quadratum quod fit à latere $a c$ angulum obtusum $a b c$ subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus $a b, b c$, obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo $c k$ bis comprehenso & ab uno laterum $c b$, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod cum protractum fuerit, cadit perpendicularis $a d$, & ab assumpta $b d$ exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a demittatur perpendicularis $a d$ in latus $c b$ protractum. Quadratum ex $c d$ 12.10
 æquale est quadratis segmentorum $c b$ & $b d$, unà cum rectangulo bis sub segmentis 14.11

D sumto:

B. 47. L.



D 47. L.

sumto: quibus si addatur commune quadratum perpendicularis ad , & erunt tria quadrata ex segmentis & perpendiculari, unà cum rectangulo bis sub segmentis aequalia duobus quadratis ex cd & ad , quibus d aequale est quadratum $a c$. Cumq; quadratum ab tantum sit d aequale quadratis ad & bd , erit quadratum ca majus quadratis laterum obtusum angulum includentium rectangulo bis sub uno laterum cb & assumta bd comprehenso.

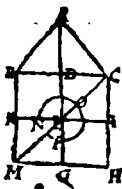
PROPOS: XIII.

Theorema 12.

In oxygonijs triangulis abc quadratum à latere ab angulum acutum acb subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus ac , bc acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bi & dh , bis comprehenso & ab uno laterum bc , quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis ad cadit, & ab assumta inferius linea df sub perpendiculari prope acutum angulum.

Demis-

Demittatur perpendicularis a d in latus b c angulo dato c adjacens. Est quadratum recta a b β aequale quadratis a d & b d: quadrato autem b d maius est quadratum recta b c, gnomone n o p: quadratum vero a c β aequale est quadratis a d & d c, majus nimirum quadrato a d per quadratum d c. Sic ergo quadratum recta a b minus est quadratis rectarum b c & c a, rectangulo bis sumto sub tota b c, & segmento d c, id est, rectangulis b i & d h.



a 12. l.

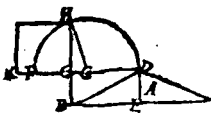
p 47. l.

PROPOS: XIV.

Problema 2.

Dato rectilineo a, aequale quadratum ei constitucere.

Fiat rectilineo a, aequale rectangulum b c d e; extendaturq; latus d c in f, intervallo c b, ipsaq; d f β secetur bisariam in g, & ex g intervallo g d vel g f describatur semicirculus d h f, producta b c in h. Cum ergo recta d f secta sit aequaliter in g & inaequaliter in c, erit rectangulum c c sub d c & c f, una cum quadrato g c



a 45. l.

p 10. l.

D s

v. aequale

25. II.

47. I.

1. AX.

et aequale quadrato recte gf & gh . Quadrato
autem gh & equalia sunt quadrata gc & ch .
Ergo & rectangulum ec una cum quadrato gc ,
equale est quadratis rectarum gc & ch . Ablato
communi quadrato gc ; remanebunt equalia rect-
angulum ec vel a , & quadratum recte ch . Quod
erat faciendum.



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

Definitiones.

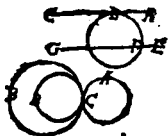
I.



ÆQUALES circuli
sunt afb , bgc ,
quorum diametri ab ,
& bc sunt æquales; & quorum quæ ex
cen-

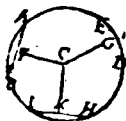
centris rectæ $d f$, $e g$ sunt æquales.

2. Recta $a b c$ circum l in $b f d$ tangere dicitur; quæ cum circum lūm tangit in b , si producat, circum nō secat.



3. Circuli sese mutuò tangere in e dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

4. In circulo $a b d$ rectæ $a b$, $b i$ æqualiter à centro c distare dicuntur; cum perpendiculares $c k$, $c f$, quæ à centro c in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius abesse illa dicitur $d e$, inquam major $c g$ perpendicularis cadit.



5. Segmentū e circuli est figura, quæ sub recta linea, $b d$ & circuli peripheria $b a d$ comprehenditur.





6. Segmenti angulus bac est, qui sub recta linea ac & circuli peripheria comprehenditur.



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum b , & ab illo inter terminos rectæ a, c , qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus abc , ab adjunctis illis comprehensus.



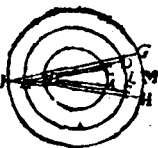
8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ da, ba aliquam assumunt peripheriam; ille angulus bad peripheriæ db insistere dicitur.



9. Sector Circuli est, cum ad ipsius circuli centrum e constitutus fuerit angulus aec : estque figura comprehensa à rectis ae, ec angulum continentibus, & à peripheria adc ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

quæ angulos capiunt æ-
quales : aut in quibus
anguli b, e, i , inter se
sunt æquales. Ita arcus
vel circumferentiæ akc ,
 $d l f, m b i$ similes dicuntur, quibus æ-
quales anguli insunt.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati circuli $a b c$ centrum f in-
venire.

Ad ductam in circulo rectam ac , a bisari- a 10. l.
amq, sectam in e , e erigatur perpendicularis, quæ β 1. l.
utring, in peripheriam terminata,
etiam a secetur bisariam in t , centro
circuli. Sin minus, cum in illa re-
cta aliud esse non possit, extra ipsam
ponatur g ; ducanturq, $g f a, g c, g e$. Quia ergo
equalia sunt in triangulis $a g e$. & $e g c$, omnia, 15. de f. l.
latera $a g, g c; d a e, e c$; & $g e$ commune; $a d$ ex const.
quales etiam erunt anguli $a e g, c e g$ & recti; to- 1. l.
tus $a e g$ parti $f e a$, equalis. & Quod ab- 9. ax.
surdum.



Corollarium.

Si recta rectam ad angulos re-
ctos

Etos in circulo æquibisecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Si in circuli peripheria duo quolibet, puncta accepta fuerint, recta linea ab quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

16.1.



15.1.

19.1.

In recta ab assumatur quocunque, punctum d & ducantur ex centro ca, cb, cd . Cum ergo angulus $cd a$ major sit angulo $cd b$ seu angulo cad ; erit etiam ca semidiametri & major linea cd . Ideoque, & punctum d , & quavis alia intermedia puncta linea ab cadunt intra circulum.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si in circulo bcd recta quædam linea ce per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bd bifariam secet in f , eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos rectos

Etos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulo afb , af & fd laterum a equalium etiam lateribus equalibus oppositi anguli sunt β , γ equaliter, erunt afb , afd recti



ex constri
& 15. def. 1.
 β 8. l.
 γ 10. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab , cd sese mutuò secant in e , non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f ducta recta fec utramque secaret ad angulos rectos β γ equaliter in 1. partemque toti equaliter efficeret. Quod est, absurdum.



= 3. III.

β 10. def. 1.
 γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli abd , bed sese mutuò secant in b & d ; non erit illorum idem centrum c .

Si centrum commune esset c , ductis lineis, cb & ca erunt cb , ce & ca equaliter, pars toti. Quod β absurdum.



= 15. def. 1.
 β 9. ax.

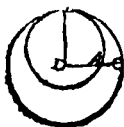
PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli $a b$, $c b$ sese mutuo
interius tangant in b ; eorum non erit
idem centrum d .

in 15. def. l.
p 9 az.



*Si centrum commune esset d ,
ductis lineis $d b$ & $d a c$, erunt $d b$,
 $d a$, & $d c$ æquales, pars toti. Quod
est absurdum.*

PROPOSITIO VII.

Theorema 6.

Si in diametro circuli $a b$ quod-
piam sumatur punctum g , quod cir-
culi centrum non sit, ab eoque pun-
cto g in circulum quædam rectæ li-
neæ $g c$, $g d$, $g e$ cadant: maxima qui-
dem erit ea $g a$ in qua centrum; mi-
nima verò reliqua $g b$; aliarum verò
propinquier illi, quæ per centrum f
ducitur, remotiore semper maior $g a$
ipsa $g c$, & hac ipsa $g d$: dux autem so-
lùm rectæ æquales $g h$, $g e$ ab eo pun-
cto

Et o^{mn}es in circulum cadunt ad utraq^{ue} partes minimæ $g b$ vel maximæ $g a$.

Ex centro f ducantur semidia-
metri $f c, f d, f e, f h$, & ponaturq^{ue}
angulo $e f b$ equalis $b f h$, & ducatur recta $g h$. Quia enim $f c$ & $f g$.



$a = 23, l.$

β hoc est, $g a$, & majores sunt latere

$g c$; & hoc latere $g d$, quia in triangulis aequalium

$\beta 15. de f. l.$

lateralum majori angulo subtensum; & hoc rursus la-

$\gamma 20. l.$

tere $g e$: Quia etiam $e f$, hoc est, $f b$ minor est $f g$:

$\delta 44. l.$

$\epsilon 20. l.$

& $g e$ sunt summi, ablato communi $f g$, etiam $g e$

major erit $g b$: adeoq^{ue}, maxima est $g a$ minima

$g b$; reliqua quo viciniore minima, eo sunt mino-

res. Quia deniq^{ue}, in triangulis $e f g$ & $g f h$ a-

qualium lateralum aequales angulos comprehend-

rium, bases $g e$ & $g h$ sunt aequales; ex utraq^{ue}

parte minima $g b$ aequaliter distantes sunt aequa-

les: Reliquæ omnes sunt vel minores versus b , vel

majores versus a . Quod erat propositum.

PROPOS: IIX.

Theorema 7.

Si extra circulum sumatur pun-
ctum quodpiam a , adeoq^{ue} ad circu-
lum ducantur quædam rectæ $a b, a c,$
 $a d, a e$, quarum una quidem $a b$ per

E

cen.

centrum k protendatur; reliquæ verò utcunque: in concavam peripheriam cadentium rectarum af, ag, ai, ai , maxima quidem est ea ai quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ab illi ai , quæ centrum transit remotior ag semper major est; in convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem est illa ab quæ inter punctum a & diametrum bi interponitur; aliarum autem ea, ac , quæ propinquior est minimæ, remotiore ad semper minor est. Dux autem tantum rectæ lineæ ac, al æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ ab vel maximæ ai .

a 23. l.



p 10. l.

y 24. l.

Ex centro k ducantur semidiametri ad singula sectionis puncta, fiatque angulus akc angulo akl aequalis.

Quia enim rectæ ak, kh vel ai p major est rectæ ah ; atque ita ah major quàm ag , & hæc quàm af , maxima itaque est ai , & reliquæ quò remotiores ab ea, hæc y minores. Contra cum ak p , minor sit

fit quàm $a c$ & $c k$, ablatis equalibus $k b$ & $k c$; 21. L
 relinquetur $a b$ minor quàm $a c$. Ita, cum d minores
 sint $a c$ & $c k$; quàm $a d$, $d k$ & $h a$ d minores
 quàm $a e$, $e k$, $h e$ quàm $a m$, $m k$, demtis
 equalibus semidiametris, relinquentur $a d$ minor
 quàm $a e$, & $h e$ quàm $a m$, atq; ita illorum mi-
 nima est $a b$. Deniq; quia in triangulis $a k c$ &
 $a k l$ sub equalibus lateribus comprehenduntur,
 anguli ad k aequales, illis equalia opponantur la-
 tera $a l$ & $a c$, quibus nulla alia equalis ex eodem
 puncto ad circumferentiam illam duci potest. Quod
 erat demonstrandum. 4. L

PROPOS: IX.

Theorema 8.

Si in circulo acceptum fuerit pñ-
 ctum aliquod a , & ab eo puncto ad
 circulum cadant plures, quàm duæ,
 rectæ lineæ æquales; acceptum pun-
 ctum centrum est ipsius circuli.

Si minus a fuerit centrum,
 esto e , & per e a ducatur diameter
 $f g$, Ex puncto ergò a duæ ad sum-
 mum rectæ ad circumferentiam
 æquales cadere poterunt; tertiâq;
 vel maior vel minor erit. Quod est contra hypo-
 thesin præter a ergò aliud centrum non erit.



7. III.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus $abcdef$ circum agb
 dhe in pluribus quàm duobus pun-
ctis non secat.

Socent se, si possibile
est in tribus punctis a, b, d

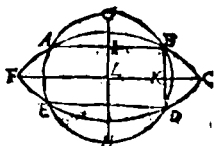
a 10. L.

C 11. I.

γ 1. III.

d 5. III.

duo circuli, qui rectis ab ,
 bd connectantur, per qua-
rum puncta media i & k p
erigantur perpendiculares il & kl . γ Erit com-
munis illarum intersectio l centrum utriusq; circu-
li. Quod est d absurdum.



PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli c, d sese intus con-
tingant in e , atque accepta fuerint
eorum centra a, b , ad eorum centra
adjuncta recta linea ab & producta
in contactum e circulorum cadet.

Si in recta ae centrum b non fuerit. pona-
tur in f , & ducatur linea $afgh$. Erunt fec & fg ,
 ae &

ae & ah α *equales*. Cumq; fe & fa β *equales* ipsis af , fg , & *maiores* sint quam ae seu ah ; erit pars ab *major* tota ah . Quod δ *absurdum*.



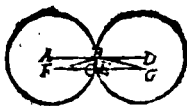
α 15. def. 1.
 β 2. ax.
 γ 10. l.
 δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese exterius contingant in b , linea recta ad quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum b transibit.

Sin minus recta connectens centra per contactum b transis, esto fg , & connectantur bf , bg . α Erunt hæc due vel ge , fc *maiores* quam fg , pars toto. Quod β *absurdum*.



α 10. l.
 β 9. ax.

PROPOS: XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno α sive intus sive extra tangat.

Recta per centra e & f α cadit in contactum a ; si præter a ponatur aliud contactus punctum b .

E 3

quod

prol.
v s. ax.



quod connectatur cum utroq. centro
f & e. Cum ergo b f, f e sint pma-
jores quam e b, id est e a, ablata
communi e f, & major erit f b quam
f a & punctum b cadet extra circ-
lum interiorem, ubi nullus sit con-
tactus. Sic tangens se duo circuli

exterius itidem in a; recta connectens centra ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,
sum b g & b e fierent & aequales linea e a g. Quod
p absurdum.

d 15. def. 1.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo aequales rectae ab, d c a-
qualiter distant à centro e, & quae a-
qualiter distant à centro, aequales
sunt inter se.



In rectis ab, d c aequales ex centro
e ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta p media, item e a,
& e d & aequales. Quia ergo quadra-
ta ex e a, e d aequalia, quadratis a f,

a 12. l.
p 3. lll.
v 15. def. 1.

d 47. l.
o 3. ax.

e f & d g eg sunt & aequalia; ablati aequalib. qua-
dratis laterum p aequalium a f, d g; residua qua-
drata aequalia, erunt aequalium laterum e f,
e g qua-

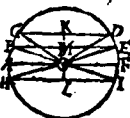
eg quadrata, id est, inscripta aequales equaliter a centro distant.

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter af ; aliarum autem propinquior bi centro g remotiore cd semper major est.

In lineas hi , cd ex centro g adducantur perpendiculares gl , gk ; ipsique gl aequalis gm abscindatur de gk , & per m erigatur perpendicularis ipsi hi & aequalis; ducanturque semidiametri in puncta b , c , d , e . Cum ergo gb , ge , id est, af maiores sint, quam be , & angulus bge major angulo cgd ; erit af major quam be , & bce seu bi est major quam cd . Quod erat ostendendum.



PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quae se ab extremitates cujusque dia-

E 4 me-

prol.
75. ax.



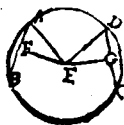
quod connectatur cum utroque centro
f & e. Cum ergo b f, f e sint pma-
jores quàm e b, id est e a, ablata
communi e f, & major erit f b quàm
f a & punctum b cadet extra circu-
lum interiorem, ubi nullus fit con-
tactus. Sic tangens se duo circuli
exterius itidem in a; recta connectens centra a ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,
sum b g & b e fierent & aequales linea e a g. Quid
p absurdum.

d 15. def. 1.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ ab, d c æ-
qualiter distant à centro e, & quæ æ-
qualiter distant à centro, æquales
sunt inter se.



a 12. l.
p 3. III.
7 15. def. 1.

d 47. l.
o 3. ax.

In rectas ab, d c æquales ex centro
e a ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta p media, item e a,
& e d & æquales. Quia ergo quadra-
ta ex e a, e d æqualia, quadratis a f,
e f & d g e g sunt & æqualia; ablati æqualib. qua-
dratis laterum p æqualium a f, d g; residua qua-
drata æqualia, erunt æqualium laterum e f,
e g qua-

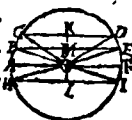
et quadrata, id est, inscripta aequalis aequaliter a
centro distans.

PROPOS: XV.

Theorem 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter af ; aliarum autem propinquior b i centro g remotiore c d semper major est.

In lineas hi , cd ex centro g aducantur perpendiculares gl , gk ; ipsiq; gle qualis gm abscindatur de gk , & per m in β erigatur perpendicularis ipsi hi & equalis; ducanturq; semidiametri in puncta a , b , c , d , e . Cum ergo gb , gc , id est, af & md majores sint, quam be , & angulus bge major angulo cgd ; erit af & md major quam be , & $\angle be$ seu hi est major quam cd . Quod erat ostendendum.



PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quæ ſe ab extremitate cujuſq; dia-

E 4 me-

nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto a rectam ac ducere, quæ datum circulum tangat in c .

Dati circuli centrum d connectatur cum a & ex intersectionis puncto b erigatur perpendicularis infinita, & ex centro d intervallo d a descriptus circulus secet infinitam illam in e , quod cum centro d connectum, secat circulum datum in c puncto, ad quod ex a ducta recta ac tangit circulum.



11. l.

Sunt enim in triangulis acd & dbe æqualium laterum cum angulo comprehenso communi γ 4. l. d , etiam reliqui anguli reliqui γ æquales, d rectus d 12. def. l. b , rectus c : $\therefore$ Ideoq; ac Tangens. Quod erat γ 16. III. faciendum.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Sicirculum tangat recta quæpiam

E s linea

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam linea ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

lib. 19. l.
9. ax.



Si angulus ecb non est rectus, esto ec rectus. Hujus ergo oppositum lateris ec vel ed erit majus quàm ef pars toto. Quod est absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

lib. 11. l.
1. ex constr.
& hypot.
29. ax.



Si centrum non est in ce , esto extra illam f , quod cum ca perpendiculari linea connectetur. fe erunt ergo ecb rectus & fc b pars recti æqua. Quod absurdum.

PRO.

PROPOS: XX

Theorema 18.

In circulo $a b c$ angulus ad centrum $b d c$ duplex est anguli a, e, f ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria $b c$ basis angulorum.

Primo si latus $b a$ sit commune cum $b d$; a erit externus $b d c$ interiorum β equalium alterius $b a c$, anguli ad peripheriam duplus.



α 32. l.
 β 5. l.

Deinde includantur $b a, a c$ duas $b d, d c$, γ 31. & 5. l. & ducatur diameter $e g$; γ Erunt rursus $b d g$, $g d c$ dupli duorum $b e g, g e c$; totiusq; $b d c$, totius $b e c$.

Tertio $f c$ secet latus $b a$, & ducatur diameter $f h$. γ Erit similiter angulus externus totius $h d b$ duplus interioris totius $h f b$; sic etiam externus $h d c$ auferendus ex toto $h d b$ duplus est anguli $c f h$, etiam à suo toto $h f b$ auferendi. Reliquus ergo ad centrum $c d b$ est reliqui ad peripheriam $c f b$ duplus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam linea ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

§ 19. l.
a 9. ax.



Si angulus ecb non est rectus, esto ecf rectus. Hujus ergo oppositum latus ec vel ed erit majus quàm ef pars toto. Quod β absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum d tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

§ 18. III.
 β ex constr.
& hypot.
99. ax.



Si centrum non est in c , esto extra illam f , quod cum ca perpendiculari linea connectetur. β Erant ergo ecb rectus & fc b pars recti æqua. Quod absurdum.

PRO.

LIBER III.
PROPOS. XX

Theorema 18.

In circulo $a b c$ angulus ad centrum $b d c$ duplex est anguli a, e, f ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria $b c$ basis angulorum.

Primo si latus $b a$ sit commune cum $b d$; erit externus $b d c$ internorum β aequalium alterius $b a c$, anguli ad peripheriam duplus.



$\alpha 32. L$
 $\beta 5. L$

Deinde includantur $b a, a c$ duae $b d, d c$, & ducatur diameter $e g$; Erunt rursus $b d g$, $g d c$ dupli duorum $b e g, g e c$; totiusq; $b d c$, totius $b e c$.

Tertio $f c$ secet latus $b a$, & ducatur diameter $f h$. Erit similiter angulus externus totius $h d b$ duplus interius totius $h f b$; sic etiam externus $h d c$ auferendus ex toto $h d b$ duplus est anguli $c f h$, etiam à suo toto $h f b$ auferendi. Reliquus ergo ad centrum $c d b$ est reliqui ad peripheriam $c f b$ duplus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento abc sunt, anguli a, b , sunt inter se æquales.

¶ 20. III.
¶ 7. AX.



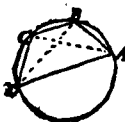
Ductis semidiametris $cd, e c$:
Quia angulus e utrimq; a & b dup-
lus est, erunt β æquales.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum $abcd$ in circu-
lis descriptoꝝ $b a d, b c d$ anguli, qui ex
adverso a, c duob; rectis sunt æquales.

¶ 2. I.
¶ 21. I.



Ducantur diagoni $ac, b d$.
Cum ergo trianguli $b c d$ tres an-
guli duobus rectis sint æquales, par-
tesq; anguli a sint duobus ad basin
 β æquales, $c a d$ & $c b d$; $c a b$ &
 $b d c$; erunt etiam oppositi a & c duobus rectis
æquales.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea ab , duo
segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdē partes.

Ductis $a c d, c b, d b$: Erant in similibus segmentis anguli c & d æquales. Quod γ absurdum.



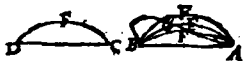
α ex hypot.
 β 10. def. III.
 γ 16.1.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis $a b, c d$, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases enim $a b, c d$ æquales congruentes, con-



α 8. ax.

gruere sibi debent ipsa segmenta $a e b, c f d$. Sin minus, erunt vel inæqualia, sed non β similia contra hypothesein: vel circulus circulum in pluribus, β 23. III.
 γ 10. III.
 α, β quàm duobus punctis secabit. Quod γ absurdum.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento $a b c$ dato, describere circulū, cujus est segmentū,

α See-

10.1

§ cor. t. 111.

21.1.

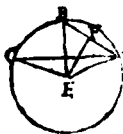
4.1.

... and

a *Secetur hasis a b segmenti bifariam per line-*


 que continetur circuli & continebitur: & secetur itē alia
 inscripta a b bisariam per aliam li-
 neam, que priorem secabit in e cen-
 tro. Vel ad a ipsi a b e angulo r fiat
 equalis b a c. ductis a c & e c; e-
 runt tres lineæ a c, e c, e b æquales

♂ c. centrum circuli.



PROPOSITIO XXVI.

Theorema. 23.

In circulis æqualibus, æquales anguli æqualibus peripherijs *df*, & *e* insistant; sive ad centra *g*, *b*, sive ad peripherias *b*, *e* constituti insistant.

4.1.

§ 10. III.

γ 7.2X.

10.dcf.111

24.11L

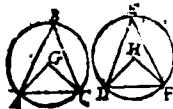
23.25.

Ducantur recte a c, d f

a *a*equales. *β* Erunt ergò *a*equales *g* & *h* ad centra *r* aequaliū *b*, *c* ad peripheriam *d*upli & segmenta *a* *b* *c*, *d* *e* *f* *δ* similia,

Et super equalibus basibus a c. d f. equalia.

Aequalibus ergò peripherijs abc , def ablatiis ex totis circulis aequalibus, relinquentur periphèria ac , df æquales. Quod erat propositum.



PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs *ac, df* insistant, sunt inter se æquales, sive ad centra *agc, dhf*, sive ad peripherias *b, e* constituti insistant.

Sin minus, esto angulus g angulo h major, cui æqualis fiat a gi. Erunt ergo etiam bases a i pars & d f vel a c totum æqualia. Quod, absurdum.



a 23. l.
p 16. III.
79. an.

PROPOS: XXIIX.

Theorema 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *ac, df* æquales peripherias auferunt, maiorem quidem *ab* & maiorem *def*, minorem autem *aic* minori *dhf*.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, Erunt ergo anguli g, h æquales, qui etiam æqualibus

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus $abcdef$ circulum agb
 dhe in pluribus quàm duobus pun-
ctis non secat.

Socent se, si possibile
est in tribus punctis a, b, d

a 10. l.

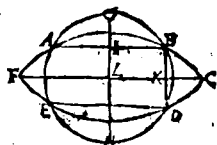
c 11. l.

γ 1. III.

d 5. III.

duo circuli, qui rectis ab ,
 bd connectantur. per qua-
rum puncta media i & k p

erigantur perpendiculares il & kl . γ Erit com-
munis illarum intersectio l centrum utriusq; circu-
li. Quod est δ absurdum.



PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli c, d sese intus con-
tingant in e , atque accepta fuerint
eorum centra a, b , ad eorum centra
adjuncta recta linea ab & producta
in contactum e circulorum cadet.

Si in recta a e centrum b non fuerit. pona-
f, & ducatur linea $a f g h$, Erunt $f e$ & $f g$,
 $a c$ &

ae & ah α *equales*. Cumq; fe &
 f α *equales* ipsis af , fg , & *maiores*
sint quam ae seu ah ; *erit pars* ab
major tota ah . Quod δ *absurdum*.



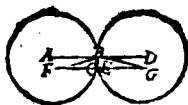
α 15. def. 1.
 β 2. ax.
 γ 10. l.
 δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Siduo circuli sese exterius con-
 tingant in b , linea recta ad quæ ad
 centra eorum adiungitur, per con-
 tactum b transibit.

Sin minus recta conne-
 ctens centra per contactum b
 transis, esto fg , & connectan-
 tur bf , bg . α *Erunt hæc due*
vel ge , fc *maiores quam* fg , *pars toto*. Quod β *ab-*
surdum.



α 10. l.
 β 9. ax.

PROPOS: XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit
 in pluribus punctis, quam uno α *sive*
intus sive extra tangat.

Recta per centra e & f α *cadit in contactum* a ;
 β *prater a ponatur aliud contactus punctum* b .

12.1.
7.5. ax.



quod connectatur cum utroq. centro
f & e. Cum ergo b f, f e sint p ma-
jores quàm e b, id est e a, ablata
communi e f, & major erit f b quàm
f a & punctum b cadet extra circu-
lum interiorem, ubi nullus sit con-
tactus. Sic tangente se duo circuli

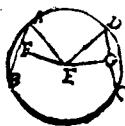
exterius iidem in a; recta connectens centra a ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,
sum b g & b e fierent & aequales linea e a g. Quod
p absurdum.

15. def. 1.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ ab, d c æ-
qualiter distant à centro e, & quæ æ-
qualiter distant à centro, æquales
sunt inter se.



In rectis ab, d c æquales ex centro
e a ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta p media, item e a,
& e d & æquales. Quia ergo quadra-
ta ex e a, e d æqualia, quadratis a f,

12.1.
3.111.
15. def. 1.

47.1.
3. ax.

e f & d g e g sunt & æqualia; ablati æqualib. qua-
dratis laterum p æqualium a f, d g; residua qua-
drata æqualia, erunt æqualium laterum e f,
e g qua-

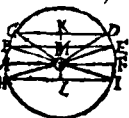
ex quadrata, id est, inscripta aequales aequaliter à centro distans.

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter af ; aliarum autem propinquior bi centro g remotiore cd semper major est.

In lineas hi , cd ex centro g adducantur perpendiculares gl , gk ; ipsiq; gl aequalis gm abscindatur de gk , & per m erigatur perpendicularis ipsi hi & aequalis; ducanturq; semidiametri in puncta b , c , d , e . Cum ergo gb , gc , id est, af majores sint, quam be , & angulus bge major angulo cgd ; erit af major quam be , & bce seu bi est major quam cd . Quod erat ostendendum.



a 12. l.

A 11. l.

γ 14. l.

δ 20. l.

ε 9. ax.

ζ 24. l.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quae se ab extremitates cujusq; dia-

E 4 me-

pro. 1.
y 5. ax.



quod connectatur cum utroque centro
f & e. Cum ergo b f, f e sint pma-
jores quàm e b, id est e a, ablata
communi e f, major erit f b quàm
f a & punctum b cadet extra circulo
interiorem, ubi nullus fit con-
tactus. Sic tangens se duo circuli

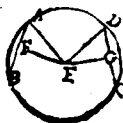
exterius itidem in a; recta connectens contra a ca-
dit in contactum a: Sin etiam in b fieret contactus,

sum b g & b e fierent & aequales lineæ e a g. Quod
p absurdum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ ab, d c æ-
qualiter distant à centro e, & quæ æ-
qualiter distant à centro, æquales
sunt inter se.



a 12. l.
p 3. III.
y 15. def. 1.

d 47. l.
e 3. ax.

In rectis ab, d c æquales ex centro
e a ducantur perpendiculares in f &
g illorum puncta p media, item e a,
& e d y æquales. Quia ergo quadra-
ta ex e a, e d æqualia, quadratis a f,
e f & d g eg sunt & æqualia; ablati æqualib. qua-
dratis laterum p æqualium a f, d g; residua qua-
drata æqualia, erunt æqualium laterum e f,
e g qua-

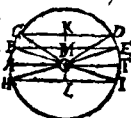
c g quadrata, id est, inscripta aequales equaliter à centro distant.

PROPOS: XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter *a f*; aliarum autem propinquior *b i* centro *g* remotiore *c d* semper major est.

In lineas *h i*, *c d* ex centro *g* aducantur perpendiculares *g l g k*; ipsarum *g l a* qualis *g m* abscondatur de *g k*, & per *m* erigatur perpendicularis ipsi *h i* & aequalis; ducanturq; semidiametri in puncta *b, c, d, e*. Cum ergo *g b, g c*, id est, *a f* maiores sint, & *a f* major quam *b e*, & angulus *b g e* major angulo *c g d*; erit *a f* major quam *b e*, & *b e* seu *h i* est major quam *c d*. Quod erat ostendendum.



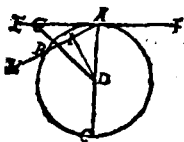
PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quae se ab extremitate a cuiusq; dia-

E 4 me-

metri *ca* circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam *ae* & peripheriam comprehensum, altera linea non cadet: & semicirculi quidem angulus *dab* quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem *bac* (contractus) minor.



a ex hypot.
 β 17. l.
 γ 17. l.
 δ 12. l.

Sumatur in linea *ae* punctum *g* & connectatur cum centro *d*. Erit angulus rectus *a* oppositi latus *d g*, quam *d a*, oppositum β acuto *g* & majus *g*, punctumq; *g* cum ceteris omnibus illius linea extra circulum. Deinde ducta alia *ah* infra ipsam *ae*, & demittatur in ipsam perpendicularis *di*. Angulo itaq; γ recto opponetur δ majus latus *da*, β acuto *dab* minus *di*. Ideoq; γ punctum intra circulum cadit, & linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangentem & circulum alia duci potest. Proinde neque minor erit angulus, angulo contractus *eab*; nec major angulo semicirculi seu corniculari *dab* inter quosvis rectilineos.

Corollarium.

Recta tangens circulum, in unico

nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto a rectam ac ducere, quæ datum circulum tangat in c .

Dati circuli centrum d connectatur cum a & ex intersectionis puncto b erigatur perpendicularis infinita, & ex centro d intervallo d a descriptus circulus secet infinitam illam in e , quod cum centro d connexum, secat circulum datum in c puncto, ad quod ex a ducta recta ac tangit circulum.



Sunt enim in triangulis acd & dbc β æqualia β 15. def. 1. lorum laterum cum angulo comprehenso communi γ 4. 1. d , etiam reliqui anguli reliqui γ æquales, δ recto δ 12. def. 1. b , rectus c : ideoque ac Tangens. Quod erat δ 16. III. faciendum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Sicirculum tangat recta quæpiam
E s linea

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam linea ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

lib. 19. l.
a 9. ax.



Si angulus ecb non est rectus, esto ec rectus. Hujus ergo oppositum latus ec vel ed erit majus quàm ef pars toto. Quod β absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum d tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

lib. 11.
 β ex constr.
& hypot.
99. ax.



Si centrum non est in c , esto extra illam f , quod cum ca perpendiculari linea connectatur. β Erunt ergo ecb rectus & fc b pars recti e qua. Quod absurdum.

PRO.

PROPOS: XX

Theorema 18.

In circulo $a b c$ angulus ad centrum $b d c$ duplex est anguli a, e, f ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria $b c$ basis angulorum.

Primo si latus $b a$ sit commune cum $b d$; a erit externus $b d c$ internorum β aequalium alterius $b a c$, anguli ad peripheriam duplex.



α 32. l.
 β 5. l.

Deinde includantur $b a, a c$ duas $b d, d c$, γ 31. & 5. l. & ducatur diameter $e g$; γ Erunt rursus $b d g$, $g d c$ dupli duorum $b e g, g e c$; totiusq; $b d c$, totius $b e c$.

Tertio $f c$ secet latus $b a$, & ducatur diameter $f h$. γ Erit similiter angulus externus totius $h d b$ duplus interius totius $h f b$; sic etiam externus $h d c$ auferendus ex toto $h d b$ duplus est anguli $c f h$, etiam à suo toto $h f b$ auferendi. Reliquus ergo ad centrum $c d b$ est reliqui ad peripheriam $c f b$ duplus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento abc sunt, anguli a, b , sunt inter se æquales.

¶ 10. III.
¶ 7. AX.



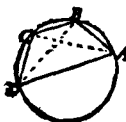
Ductis semidiametris ed, ec :
Quia angulus e utrimq; a & b duplus est, erunt β æquales.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum $abcd$ in circulis descriptoꝝ $b a d, b c d$ anguli, qui ex adverso a, c duobus rectis sunt æquales.

¶ 2. I.
¶ 21. I.



Ducantur diagoni ac, bd .
Cum ergo trianguli bcd tres anguli duobus rectis sint æquales, partesq; anguli a sint duobus ad basin β æquales, cad & cbd ; cab & bdc ; erunt etiam oppositi a & c duobus rectis æquales.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea ab , duo segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdem partes.

Ductis $a c, d, c b, d b$: Erunt in similibus segmentis anguli c & d æquales. Quod γ absurdum.



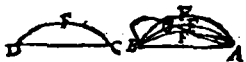
α ex hypot.
 β 10. def. III.
 γ 16.1.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis $a b, c d$, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases e-
rim $a b, c d$ æqua-
les congruentes, con-
gruere sibi debent ipsa segmenta $a c b, c f d$. Sin
minus, erunt vel inæqualia, sed non β similia con-
tra hypothesin: vel circulus circulum in pluribus, β 23. III.
 a, g, b quàm duobus punctis secabit. γ 10. III.
Quod γ ab-
surdum.



α 8. ax.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento $a b c$ dato, de-
scribere circulū, cujus est segmentū.

α Scit.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema. 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs *ac, df* insistant, sunt inter se æquales, sive ad centra *agc, d hf*, sive ad peripherias *b, e* constituti insistant.

Sin minus, esto angulus g angulo h major, cui æqualis fiat a gi. Erunt ergo etiam bases a i pars & d f vel a c totum p æqualia. Quod, absurdum.



a 23. l.
p 16. III.
γ 9. ar.

PROPOS: XXIIIX.

Theorema. 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *ac, df* æquales peripherias auferunt, maiorem quidem *ab e* majori *def*, minorem autem *a ic* minori *dkf*.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, Erunt ergo anguli g, h æquales, qui etiam æqualibus

p 26. III.

p 3. ax.



libus β insistant peripherijs α ic,
d k f. Quibus ablatis ab æqua-
libus circulis, reliquæ periphæria
sunt γ æquales α b c, d e f.

PROPOS: XXIX.

Theorema 26.

In æqualibus circulis, æquales
peripherias α b c, d e f æquales rectæ
linæ α c, d f subtendunt.

p 27. III.

p 4. l.



Ductis semidiamentris a g,
g c, d h, h f. Erunt α æqualibus
angulis g & h oppositæ bases
ac, d f inter se β æquales. Quod

erat propositum.

PROPOS: XXX.

Problema 4.

Datam peripheriam α b c bifari-
am secare.



p 11. l.

p 4. l.

p 28. III.

Ex puncto medio d subtenso
 α c α erigatur perpendicularis b d
& ducantur b c, b a, quæ inter se β
æquales etiam γ æquales peripherias
 α b & b c subtendunt. Secta ergo
est periphæria bifariam in b.

PRO-

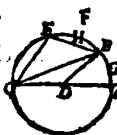
PROPOS: XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus abc qui in semicirculo ac rectus est: qui autem in maiore segmento bac , minor recto: qui verò bec in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus gbc maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris autem segmenti angulus hbc minor est recto.

Quoniam a aequales sunt anguli dab, abd & dbc, bcd ; erunt bini conjuncti, binis β aequales, abc & bac cum ac b, quibus duobus, aequalis est externus cbf ; ac proinde

abc est δ rectus. Angulus autem a in maiori segmento recto: minor. Sed angulus c in segmento minori recto ζ maior. Cum denique angulus abc rectus sit tantum pars anguli segmenti maioris gbc ; & angulus segmenti minoris hbc tantum pars recti cbf ; erit ille maior, hic minor recto.



$\alpha 5. l.$

$\beta 4. ax.$

$\gamma 23. l.$

$\delta 13. l.$

$\epsilon 17. l.$

$\zeta 22. III.$

$\eta 9. ax.$

PROPOS: XXXII.

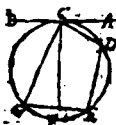
Theorema 28.

F

Si

Sicirculum tetigerit aliqua re-
cta linea ab , à contactu c autem
producatur quædam recta linea
percirculum secans: angeli ace , ecb
quos ad contingentem facit, æqua-
les sunt ijs, qui in alternis circuli se-
gmentis consistunt, angulis d & g .

31. III. &
18. III.
32. I.
21. III.
3. ax.



Ducantur cf diameter & fe .
Cum recti sint anguli cef , fca , &
 efc , ecf recto β æquales; ablato
communi ecf , anguli efc , & id est
 egc in majori segmento, & ace e-
runt æquales. Horum æqualium d æqualia erunt
complementa ad duos rectos, anguli ecb & d in
segmento minore æquales.

PROPOS: XXXIII.

Problemata s.

Super data recta linea ab descri-
bere segmentum circuli, quod capi-
at angulum æqualem dato angulo
rectilineo c .

23. I.
11. I.

Super recta ab fiat ad a angulo c dato æ-
qualis dab , β erigaturq; perpendicularis ac ex a
ipfi ad & rursus angulo c a b æqualis fiat abf ;

trum $a f, b f$, æquales. Ex f ergo intervallo $f a$ y 6.1.
descriptum segmentum $a c b$ super $a b$, angulo $d a b$
alternum capiet angulo dato c æqualem. Comple-
to enim circulo: Quia $a d$ est d Tan-
gens, ad ipsam factus angulus $d a b$
dato c æquali, æqualis est angulo
 $a g b$ in alterna sequente: Quod erat
faciendum.



2 Cor. 16. 111.
2. 32. 111.

Si angulus datus c sit rectus,
super a b dat.: tanquam diametro
describitur semicirculus, qui angulum c rectam
capit.

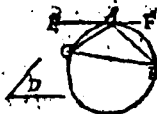
Σ3. Η

PROPOS: XXXIV.

Problema 6:

A dato circulo segmentum ab-
scindere, capiens angulum aequalem
dato angulo rectilineti.

Restat e a f tangat circulum in a, & ada = fiat angulus dato d aequalis e a c. β Erit ergo in alterno segmento angulus b angulo e a c, id est, aequalis.



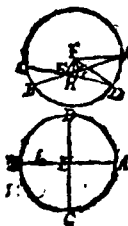
23.1
32.111

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab ,
 cd sese mutuo secuerint, rectangu-
 lum comprehensum sub segmentis
 ae, eb unius, æquale est ei, quod sub
 segmentis alterius de, ec comprehē-
 ditur, rectangulo.

12. l.
 3. III.
 5. III.



Ex centro f admittantur, per-
 pendiculares fg, fh , quas illas lineas
 æqualiter secent in g & h , ducta-
 turq, fc . Vrit ergo rectangulum ex
 ae, eb , unà cum quadratis eg &
 gf vel cf , æquale quadratis ag &
 gf seu quadrato semidiametri af .

47. l.

Sic etiam rectangulum ex ce, fd ,
 unà cum quadratis ch & hf seu cf , æquale
 quadratis ch & hf seu quadrato semidiametri
 fd . Ablato ergo utrinq, ex rectangulis quadrato
 fc communi, residua rectangula ex inequalibus
 segmentis sunt æqualia.

3. ax.

Si in centro secent se duo diametri, platum
 est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiametris
 fiant æqualia quadrata.

PRO-

PROPOS: XXXVI.

Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod d , ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera $d a$ quidem circulum secet; altera $d b$ verò tangat: Quod sub tota secante $d a$ & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta $d c$ comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente $d b$ describitur, quadrato.

Transcat primò secans $a d$ per centrum e , ducaturq; a perpendicularis Tangenti $e b$. ρ Erit rectangulum sub tota $a d$ cum adjecta & adjecta $c d$, unà cum quadrato dimidia $e c$ æquale quadrato $e d$ ex dimidia



a 18. III.
 ρ 6. II.

& adjecta, id est, quadrato $d b$, $b e$. Sublati quadratis æqualibus semidiametrorum $b e$ & $e c$, γ erit rectangulum ex $a d$ & $c d$ æquale quadrato Tangenti $d b$.

γ 3. XX.

Deinde non transeat secans $d a$ per centrum, & d cantur $e b$, $e d$, $e c$ & $e f$ perpendiculares. ρ Erit rursus rectangulum ex $a d$ & $c d$, unà cum



quadrato $f c$ aequale quadrato ex $f d$,
additoq, quadrato communi $e f$, a-
quale erit rectangulum ex $a d$ & $c d$,
una cum quadratis $f c$ & $f e$, id est,
quadrato $e c$, quadrato $d e$, seu qua-
dratis $d h$, $b c$. Ablati aequalibus
quadratis $b e$ & $c e$, relinquentur 7 equalia recti-
angula ex $a d$, $d c$ & quadratum Tangentis $d h$.

PROPOS. XXXVII.

Theorema 37.

Si extra circulum sumatur pun-
ctum aliquod d , ab eoque puncto in-
circulum cadant duae rectae lineae,
quarum altera $d a$ circulum secet, al-
tera $d b$ in eum incidat; sit autem quod
sub tota secante $d a$ & externis inter
punctum & convexam peripheriam
assumpta $d c$, comprehenditur rectan-
gulum, aequale ei, quod ab incidente
 $d b$ describitur, quadrato; incidens
ipsa $d b$ circulum tanget.

36. III.

Ducta Tangente $d f$, & semidiametris $e f$,
 $e b$, $e d$. Erit quadratum Tangentis $d f$ aequa-
le rectan-

in rectangulo ex ad & dc , id est
quadrato db incidenti; & d ipsi
est equalis. Cumq; angulus b sit an-
gulus recto d equalis; erit db Tan-
gens.



sex hypot.
71. ax.
28. l.
18. III.



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R I V.

Definitiones.

I.

Figura rectilinea *scilicet* in figura re-
ctilinea abc describi dicitur, cum
singuli figuræ descriptæ anguli,

F 4 singu-



singula latera ejus, in qua describitur, tangunt.

2. Figura $g h i$ circa figuram $k l m$ describi dicitur, cum singula descriptæ latera, singulos angulos ejus, circum quam describitur, tangunt.

3. Figura rectilinea $a b c$ in circulo describi dicitur, cū singuli figuræ descriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.



4. Figura rectilinea $a b c$ circa circumulum describi dicitur, cum singula descriptæ latera circuli peripheriam tangunt.

5. Circulus in figura rectilinea describi dicitur, cum circuli peripheria singula latera ejus, in qua describitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi, aut figura rectilinea circulo circumscribi dicitur, cum circu-

circuli peripheria singulos angulos
ejus, circa quam describitur, tangit.

7. Recta ab in circulo a-
ptari dicitur, cum ejus ex-
trema in circuli periphe-
ria fuerint.

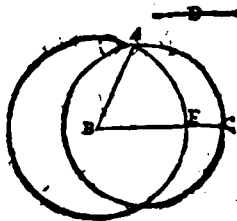


PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam
accommodare, aequalem datæ rectæ
lineæ d , quæ circuli diametro non sit
major.

Cum enim dia-
meter inscriptarum
in circulo sit maxi-
ma, major ipsa inscri-
bi non potest: sin ipsi
sit æqualis, quævis di-
ameter ducta erit a-
ptata: Sin minor,
intervallo lineæ datæ



æ 15. 114.

d , describatur circulus super $b c$ diametro circuli
dati, & connectatur b cum a . β Erit hæc lineæ β 15. def. 1.
circulo aptata æqualis datæ. & 1. ax.

F 3

PRO.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

In dato circulo triangulum describere; dato triangulo $d e f$ æqui-
angulum.



Ad ductæ Tangenti

gh punctum a fiant an-
guli g a b ipsi f, & h a c
ipsi e æqualis; connectan-
turq; b c. p. Est ergo an-
gulus c æquus angulo

g a b, id est angulo f, & angulus b angulo e; &
& angulus bac angulo d, triangulum inscriptum
a b c, triangulo d e f æquiangulum.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Circa datum circulum a b c tri-
angulum describere, dato triangulo
d e f æquiangulum.

Productæ utrinq; trianguli basi in g & h, an-
gulis externis a fiant æquales ad centrum i; a i b
ipsi d e g; & b i c ipsi d f h: ad extremitates
verò semidiametrorum a, b, c ducantur perpendi-
culares

culares vel β tangen-
tes, quæ concurrent in
k, l, m. Ergo in qua-
drilateris quatuor an-
guloꝝ rectis quatu-
or equalium (propter

resolutionem in duo triangula) cum duo oppositi
sint γ recti; reliqui etiam duo duobus rectis aqua-
les erunt. Cumq; a ibi pside g, & b ic ipsi
d f h aequetur, d aquabitur ipsi d e f & m ipsi d f c
& k ipsi d. Circumscriptum ergo est Triangu-
lum dato æquiangulum.

816. III.

γ ex const.
d1, l & 3. ax.
32. l. 1. 1. 1.

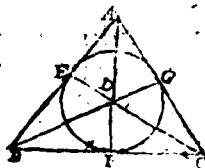
PROPOS: IV.

Problema 4.

In dato triangulo $\alpha b c$ circulum
inscribere.

α Secentur duo anguli bisariam per lineas α . 9. l.
duas, ex quarum intersectionis puncto d β demis-

tantur perpendicu-
lores ad latera singula, α a-
rumq; intervallo describa-
tur circulus. Erunt ergo in
triangulo edb, bdf latera
de, df, æqualia, & in tri-



anguli; f d c, & c d g latera f d, g d. Tres ni-
mirum æquales ex puncto d: quod α erit centrum α 9. III.
circuli singula latera trianguli β tangentis vel in-
scripti, β cor. 16. III.

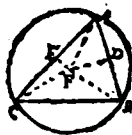
PRO-

PROPOSITIO V.

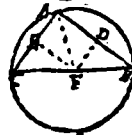
Problemata 5.

Circa datum triangulum *abc* circulum describere.

10. I.



4. I.
29. III.



Duo quævis latera α dividantur bisariam per lineas perpendiculares concurrentes in F , ex quo ad angulos singulos ducantur lineae, illarumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergo fa, fb, fc α -quales, & ex F centro descriptum circulus circa triangulum datum.

Corollarium. 1.

31. III.

Si centrum f cadat in latus, α erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majori segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium. 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem. Connexis enim punctis tribus habeo triangulum.

Scholion.

Cuius figura regulari quæ & æquilatera & æquiangularis est, circulus tum a inscribitur inter-^{a 4. IV.} vallo perpendicularium concurrentium; tum p cir-^{p 6. I.} cum scribitur, intervallo angulos duos quosq; bisariam secantium.

PROPOS: VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum describere.

Ducantur duo diametri ad angulos rectos se a intersecantes, eorumq; extremitates jungantur rectis a b, b c, c d, d a: Quatuor angulis ad centrum p rectis, & æquales sunt quatuor arcus quibus insistant, & his sub-^{p ex const.} tensa quatuor latera æqualia. Anguli etiam, ^{γ 26. III.} omnes sunt in semicirculo recti. Ergo & quadratum a b c d inscriptum. ^{δ 29. III.} ^{ζ 29. def. 1.}



a 11. I.

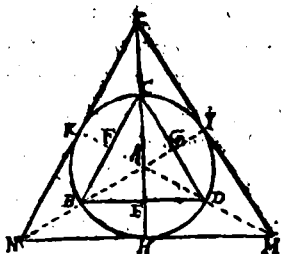
LEMMA.

Figura regularis circa circulum descri-

describitur à perpendicularibus lm ,
 ln , nm ab extremitate semidiame-
 tronum b , r , k latera figuræ prius in-
 scriptæ bc , bd , cd bifariam dividenti-
 um in e , f , g excitatis.

aper aliquā
 prop. V.

infribatur in
 circulo figura equi-
 latera & equian-
 gula, qualis requi-
 ritur, & per ipsius
 angulos ex centro
 utrinq; continuen-
 tur lineæ ad peri-
 pheriam in h , i , k



8.1.

& ultra peripheriam in l , m , n , & secantes angulos
 & latera datae figurae bifariam, & tres ad centrum
 efficientes aequales bad , dac , bac . Deniq; ad ex-
 tremitates h , i , k , excitentur perpendiculares lm ,
 ln , nm .

11.1.

19.1.

Cum itaq; d aequales sint anguli a b c
 a h ; & ade , amh , id est, & toti n & b , m & d ;

1.12.

1.12.

6.1.

l & c ; erit figura l circumscripta equiangular.
 Beinde in triangulis anm , aml , anl equalium
 angulorum, & aequalia etiam erunt inter se latera
 am , al , an ; quæ comprehendenti & angulos æqua-
 les, etiam bases inter se & æquales efficiunt nm ,
 ml , ln , figuram quæsitam constituentia.

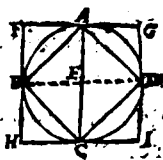
4.1.

PROPOS. VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

a Inscripto prius quadrato, aliud etiam β circumscribetur.



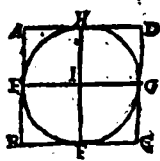
a 6. IV.
\beta per Lemma ejusdē.

PROPOS. IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex 4. IV.



PROPOSITIO IX.

Probl. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.

Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.



Scholium.

Estq, quadratum circumscriptum inscripti, a 47. 1.
a duplum, quia illud ex diagonio inscripti vel diametro fit, tanquam ex hypotenusa.

PRO-

EVCLIDIS ELEM: PROPOSITIO X.

Problema 10.

Isoceles triangulum constitue-
re; quod habeat utrumque eorum,
qui ad basin sunt, angulorum, duplū
reliqui.

11. II.

1. IV.

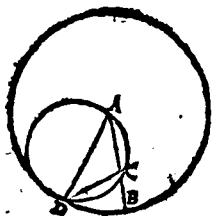
5. IV.

2 ex hypot.

37. III.

32. III.

6. I.



Data quævis linea
a b secetur ita, ut recti-
angulum sub a b & c b sit
equale quadrato a c, &
intervallo ab facto circulo
accommodetur b d equa-
lis ac, ducanturq; c d &
a d & triangulo a c d

circumscribatur circulus.

Quia ergo quadratum b d & equale est re-
ctangulo ex secante b a & externo segmento c b,
erit Tangens & angulus a angulo c d b & equa-
lis, additoq; communi adc, erit a d b equalis an-
gulis a & c d a, id est angulo b c d vel b. Ideoq;
lateralia b d & c d & c a erunt æqualia, & angu-
lus a angulo adc; adeoq; anguli a $\frac{1}{2}$ duplus bcd,
vel duo ad basin h & d. $\frac{2}{3}$ in triangulo Isoceles
bad constituto.

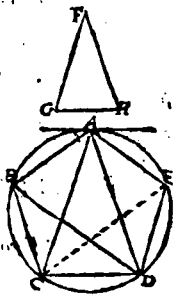
PRO.

LIBER IV.
PROPOSITIO XI.
Problema II.

97

In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructo triangulo Isosceli $f g h$, cuius anguli ad basin g & h sunt dupli tertij f : & inscribitur circulo dato æquiangulum $a c d$, & anguli ad v 9. l. basin v secantur bisariam per lineas $d b, c e$ & ducantur rectæ $a b, b c, c d, d e, e a$. Insistent ergo quinque anguli d æquales $a c e, e c d, a d b, b d c, c a d$: æqualibus peripherijs quinque totum circulum comprehendentibus quibus æqualia subtensa quinque latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod & æquiangulum est, quod omnes ipsius anguli æqualibus peripherijs circuli insistent.



ex const.

26. III.

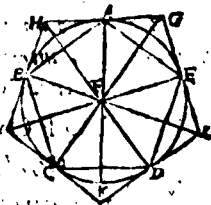
29. III.

27. III.

PROPOS: XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum; pentagonum



G

æqui-

æquilaterum & æquiangulum describere.

u. IV.

Inscripta prius pentagono, circumscribitur aliud per lemma sextæ huius.

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

a. 9. l.

p. scho. 5. IV

Duo quique anguli proximi a secentur bisarim per lineas fi , fk , quarum concursus f intervallo perpendicularis fc circulus perit inscriptus.

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.

a. 19. l.

p. scho. 5. IV

Iterum duo anguli a secentur bisarim per lineas, quarum intervallo ex illarum concursu perit circumscribitur circulus.

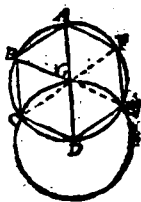
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum & æqui-

æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ducto diametro circuli a d, ex d describatur alius priori æqualis circulus secans priorem in c & e punctis, per quæ ducantur diametri e b, c f, itemq; a b, b c, c d, d e, e f, &c. Erant triangu-
la c g d & d g e æquilatera & æquiangu-
la, & anguli ad centrum omnes &



a 15. def. 1.

p 5. l.
7 32. & 15. h

æquales, vel $\frac{2}{3}$ duorum rectorum. Ideoq; omnes
d æqualibus insistent peripherijs, quibus æquales li-
neæ, id est, latera hexagoni sex æqualia subten-
duntur, quæ etiam æquales includunt angulos sex,
æqualibus peripherijs insistentes. Hexagonum
ergo & æquilaterum & æquiangulum est inscri-
ptum.

d 16. III.

19. III.

27. III.

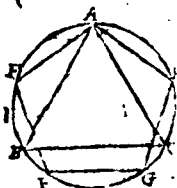
Corollarium.

Latus Hexagoni æquale est se-
midiametro ejusdem circuli. Circu-
lo autem dato circumscribetur he-
xagonum per Lemma 6. IV. Circu-
lus ipse inscribetur & circumscribe-
tur per scholion 5. IV.

PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

In dato circulo quindecagenum
& æquilaterum & æquiangulum de-
scribere.



Inscribatur in circulo da-
to æquilaterum æquiangulum
& pentagonum. Cum ergo la-
teris ab $\frac{1}{3}$ vel $\frac{5}{3}$; latus autem
pentagoni a c $\frac{2}{3}$ quatuor re-
storum: illorum duarum pe-
ripheriarum differentia e b

habet $\frac{2}{3}$; Ipsi ergo dimidium erit $\frac{1}{3}$, cui suo
tensum latus e i est quindecagoni æquilateri & æ-
quianguli latus. Eiusdem circumscriptio fiet per

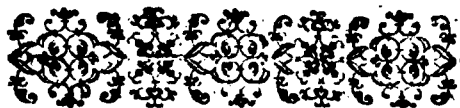
Lemma 6. 1 V. Ipsi autem & inscribetur &
circumscribetur circulus per

Schol. 5. 1 V.

a2. IV.
p 11. IV.

γ 29. III.
= 27. III.





EUCCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER V.

Definitiones.

I.

Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur maiorem.

2. Multiplex autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Intelligitur hic pars aliquata, quae aliquoties prae se continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoque & aequemultiples sunt magnitudines, quae multitudine aequales partes habent.

3. Ratio, λόγος, est duarum magni-

G 3

tudi-

itudinum, ejusdem generis, *numeri cum numero, linea cum linea*, mutua quædam secundum quantitatem habitudine *quatenus una est major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, est rationum similitudo. *Ut enim magnitudines, ita earum rationes inter se comparantur.*

5. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare.

6. In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unâ deficiunt, vel unâ æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *Multiplex prima cum multiplice secunda; & tertia cum quarta multiplice. Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, si media bis sumatur.*

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cum verò æque multiplicum multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam maiorem habere rationem dicetur, quam tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberi possint duo Antecedentes & duo consequentes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem, *multiplicata in sese vel quadratè ratione prima ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam triplicatam, *cubicè in se multiplicata ratione prima ad secundam*, rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

diu proportio extiterit. *Loquitur definitio tantum de cōtinua proportiona-
litate.*

11. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Ante proportionem dixerat rationum similitudines: nunc ejus terminos etiam dicit similes. Sequuntur jam sex argumentandi modi Geometris usitati.*

12. Alterna ratio est sumtio Antecedentis ad Antecedentē, & consequētis ad consequentem. *Opōrtes hęc omnes terminos esse ejusdē generis. Nonn. si sit ut numerus ad numerum, sic linea ad lineam, recte collegeris alternē, ut numerus ad lineam; sic numerus ad lineam.*

13. Inversa ratio est sumtio consequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam consequentem.

14. Compositio rationis est sumtio Antecedentis cum consequente ceu

unius

unius, ad ipsam consequentem vel compositio rationis est sumtio terminorum simul ad alterutrum eorundem. Et contra, est sumtio alterutrius termini ad compositum ex utrisque. *Hic in compositione rationum tantum intelliguntur termini: ipsae rationes in 5. def. VI.*

15. Divisio rationis est sumtio excessus, quo consequentem superat Antecedens, ad ipsam consequentem. Vel est sumtio excessus termini majoris supra minorem, ad ipsam minorem: Et contra minoris ad excessum majoris.

16. Reversio rationis est sumtio Antecedentis ad excessum, quo Antecedens superat consequentem. Vel est sumtio termini majoris ad excessum supra minorem. Et contra, excessus terminorum ad ipsum majorem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliarum multitudine pares quæ binæ su-

G 5 man-

mantur, & in eadem ratione; cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum per subductionem mediorum. *Hii modi argumentandi demonstrantur in aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

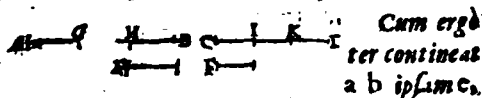
19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinib. & alijs, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitudinibus

gnitudinibus aliud quidpiam ad Antecedens.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Sifint quotcunque magnitudines a, b, c, d , quotcunque magnitudinum, e, f , æqualium numero, singulas singularam æque multiplices a b ipsas e, c d ipsas f ; quam multiplex est unus e una a, b magnitudo; tam multiplices erunt & omnes a, b, c, d , omnium e, f .



& c, d ipsam f ; singulis ternis unius partibus, a, g, g, h, h, b , addantur singule alterius c, i, i, k, k, d : Erant ipsæ e & f junctæ ter binæ ter æquales: ^{a 2. ax.} ^{β 2. def. V.} ac proinde æquemultiplex totum ex a, b, c, d , totius ex e, f . Si itaq, partes sint æquemultiplices partium, totum etiam totius est æquemultiplex. Undeq, idem est multiplicare per partes ac per totum.

PRO-

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

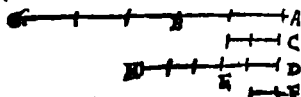
Si prima ab secundæ c fuerit æquemultiplex, atque tertia de quartæ f ; fuerit autem & quinta bg secundæ c æque multiplex, atque sexta eh quartæ f ; erit & composita prima cum quinta ag secundæ c æque multiplex, atque tertia cum sexta dh æque multiplex quartæ f .

a ex hypot.

β 2. ax.

γ 2. def. v.

Si enim a qualibus multitudinibus a b & d c æquales multitudines bg & eh addantur; perant etiam compositæ ag & dh æquales, & suarum partium γ æque multiplices.



PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima a secundæ b æque multiplex, atque tertia c quartæ d ; sumantur autem æquemultiplices e i , f m pri-

primæ a & tertiæ c : Erit & ex æquo sumtarum ei ad b & f ad utraque utriusque æque multiplex; altera e i quidem secundæ b , altera f autem quartæ d .

Quia enim prima a , illiq. e æquales eg, gh, hi sunt æque multiplices secundæ b , atq. tertiæ c , illiq. æquales fk, kl, lm , quartæ d ; perunt etiam compositæ ei & f eundem, secundæ b & quartæ d æque multiplices. id est, & extreme vel ex æquali sumtæ.



ex hypot.

 $a, c, v.$ $e, f, \text{def. } v.$

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima a ad secundam b eandem habuerit rationem, & tertia c ad quartam d : etiam æque multiplices primæ e & tertiæ f , ad æque multiplices secundæ g & quartæ h , juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumtæ fuerint.

Acque

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si prima ab secundæ c fuerit æquemultiplex, atque tertia d quartæ f ; fuerit autem & quinta bg secundæ c æquemultiplex, atque sexta eh quartæ f ; erit & composita prima cum quinta ag secundæ c æquemultiplex, atque tertia cum sexta dh æquemultiplex quartæ f .

a ex hypot.

β 2. ax.

γ 2. def. v.

Si enim æqualibus multitudinibus a b & d æquales multitudines bg & eh addantur; perant etiam compositæ ag & dh æquales, & suarum partium γ æquemultiplices.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima a secundæ b æquemultiplex, atque tertia c quartæ d ; sumantur autem æquemultiplices e i , f m pri-

primæ a & tertiæ c : Erit & ex æquo
sumtarum ei ad b & f ad d utraque
utriusque æque multiplex; altera e i
quidem secundæ b , altera f autem
quartæ d .

Quia enim prima a , illiq;
æquales e g , g h , h i sunt æque
multiplices secundæ b , atq; ter-
tia c , illiq; æquales f k , k l , l m ,
quarta d ; perunt etiam cons-
piciæ ei & f m earundem, se-
cundæ b & quarta d æque mul-
tiplices. id est, & extreme vel ex-
aquali sumta.



ex hypot.

p. v.

yl 7. def. v.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima a ad secundam b can-
dem habuerit rationem, & tertia c
ad quartam d : etiam æque multipli-
ces primæ e & tertiæ f , ad æque mul-
tiplices secundæ g & quartæ h , juxta
quamvis multiplicationem, eandem
habebunt rationem, si prout inter se
respondent, ita sumta fuerint.

Æque

a. V.



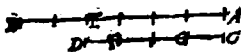
Aequemultiplicium e & f
sumantur alia aequemultiplices i
& k ; itemq, aequemultiplicium
 g & h alia l & m ; erunt ex a-
quali i & k aequemultiplices. pri-
ma a & tertia c : itemq, l & m ,
aequemultiplices secunda b &
quarta d . Cumq, sit, ut prima
ad secundam; sic tertia ad quar-
tam, quarum aequemultiplices sunt
demonstrate i k & l m directe

β 6. def. V. sumta, β fiet, si i superat l , etiam k superabit m , ut
hoc loco: Cumq, eadem etiam sint aequemultipli-
cium e f & g h aequemultiplices constructae; β Er-
gont e ad g , ita f ad h .

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo ab magnitudinis
 cd aequae fuerit multiplex, atque abla-
ta a & ablata c f : etiam reliqua e b re-
liquae f d ita multiplex erit, ut tota ab
totius cd .



Ponatur quedam
 gc , cuius aequemulti-
plex sit e b , atq, est ali-
lata

lata a c, ablata c f, vel tota a b tactus c d: a erit
 quoq, tota a b, totius g f aequae multiplex, atq, ab-
 lata a c, ablata c f. a eritq, g f aequalis ipsi c d, & 16. ax.
 ablata communi c f, erunt g c & f d aequales. Cum
 itaq, c b reliqua sit tam multiplex ipsius g c, quam
 multiplex est a b ipsius c d; tam multiplex eriam
 erit c b reliqua reliqua f d. Quod erat propositum.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a b, c d dua-
 rum magnitudinum e & f sint æque
 multiples; & detrahitur quædam a g,
 c h sint earundem e & f æque multi-
 plices: & reliquæ g b & h d, eisdem e
 & f aut æquales sunt, aut æque ipsa-
 rum multiples.

A multitudinibus

a equalibus a b, c d, a ex hypot.
 ablati equalibus mul-
 titudinibus a g, c h; re-
 sidue quoq, multitu-
 dines erunt æquales; & 3 ax.

sive ex constructione æquales sint ipsæ e & f, ut in
 priori figuratone; sive earundem æque multipli-
 ces, ut in posteriore.

PRO.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

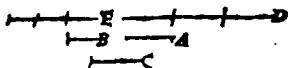
Aequales a, b ad eandem c , eandem habent rationem; & eadem c ad aequales a, b .

Sint aequalium

a & b aequè multiples d & c a

a 6. ax.

aequales, & ipsius c multiplex ut-



a 6. def. v.

cung. Quia ergò multiplex d est minor multipli-
ce f , eadem minor quoq; est multiplex c . Ideoq; s
erit, ut a ad c , sic b ad c : & convertendo β ut c ad
 a , sic idem c ad b .

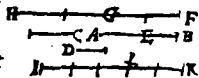
PROPOS. IIX

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum maior a b ad eandem d , maiorem rationem habet, quàm minor c : & eadem d ad minorem c maiorem rationem habet, quàm ad maiorem a b .

Sit maior a b prima, c tertia, d secunda &
quarta

quarta; ipsiq; c ex a b au-
feratur equalis ac, & ipsa-
rum a c vel c & e b fiant
aequemultiples h g, g f,



a 1. V.

quarum utraq; major sit quàm d, & sic h f tota
etiam totius a b majoris aequemultiplex erit, atq;
h g ipsius ac vel c. Fiat item secunda & quarta
d aequemultiplex i k, proximè major multiplice h
g, sed minor multiplice h f, & de i k abscin-
datur ipsi d equalis l k. Non erit ergò i l ma-
jor quàm h g, sed vel equalis vel minor (alias non
esset i k multiplex ipsius d, proximè major quam
h g) Et cum g f major sit quàm d vel l k; ideoq;
etiam tota h f major erit quàm i k. Et proinde,
cum f h, h g sint aequemultiples primæ a b &
tertiæ c, atq; i k multiplex d secundæ & quarta:
sicq; f h major quam i k; & g verò minor quàm
i k; major erit proportio a b primæ ad d secun-
dam, quàm c tertiæ ad d quartam. Et conver-
tendo, cum tertiæ d multiplex i k sit major mul-
tiplice primæ h g; & ejusdem d tertiæ multiplex ea-
dem i k minor h f multiplice quartæ: ideoq; d ma-
jorem habet rationem ad c, quàm ad a b. Quod
eras propositum.

p 3. def. V.

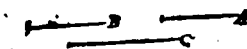
PROPOSITIO IX.

Problema 9.

Quæ a & b ad eandem c, eandem
H ha-

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas a & b eadem c eandē habet rationem, & quoque sunt inter se æquales.

a1.V.



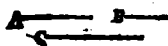
Si a major esset quàm b , a esset major majoris a proportio ad

c , quàm b minoris ad eandem, contra hypotesin. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si c habeat eandem rationem ad utramq; a & b , etiam æquales sunt. Sin minus, esto a major, tum c ad b minorem, majorem haberet rationem, quàm ad a , quod est contra hypotesin.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem c rationem habentium, quæ a majorem rationem habet, illa major est: ad quam b autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.



a7.V.

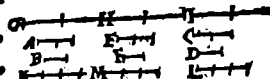
Nisi enim a majorem habens rationem ad c , quàm b ad c , esset major b , foret vel æqualis, & sic contra hypotesin a haberet eandem
rati-

rationem ad c, vel minor, & sic b ad c maiorem
 ꝑ haberet rationem, quàm a contra hypothesin. ^{ꝑ 8.V.}
 Vice versa, si c habeat rationem maiorem ad b,
 quàm ad a, rursus erit major a, quàm b: sin minus,
 erit ipsi vel equalis & contra hypothesin = erit ꝑ si
 c ad utramq, eadem ratio; vel minor, & sic major
 erit ratio c ad a, quàm ad b, contra hypo-
 thesin.

PROPOSITIO XI.

Theorema ii.

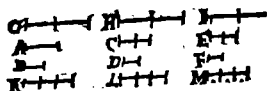
Quæ eidem sunt eadem ratio-
 nes, inter se sunt eadem.

Sumantur & An-
 tecedentium a, e, c, & 
 æquè multiples g, h,
 i; & consequentium
 b, f, d, æquè multiples k, m, l. Quia ergo est, ut
 a ad b, sic e ad d, = fiet; si g superat i, etiam k
 superet m, & si equalis, equalis; & si minor, mi-
 nor fit. Quia etiam est, ut e ad f, sic c ad d; fiet
 etiam, si h superat i, etiam m superet l & si aqua-
 lis, equalis; & si minor, minor. Cum ergo æque
 multiples directè sumitæ, habeant hanc triplicem
 conditionem, excessus, equalitatis & defectus, = erit,
 ut a ad b, sic e ad f.

PROPOS: XII.

Theorema 12.

Si sint magnitudines quoruncq;
 proportionales a, b, c, d, e, f ; quemad-
 modum se habuerit una a Antece-
 dentium, ad unam b consequentium;
 ita se habebunt omnes anteceden-
 tes a, c, e , ad omnes consequen-
 tes b, d, f .



Sumantur aequae
 multiplices tum An-
 te:edentium a, c, e ,
 quae sint g, h, i ; tum

¶ 1. V.

consequentium b, d, f , quae sint k, l, m : ¶ Erit com-
 posita g, h, i , composita k, l, m aequè multiplex, ac a
 ipsius b . Cumq; sit, ut a ad b , sic c ad d & e ad f ,
 & fiet; si g superat k , etiam h superet l & i superet
 m ; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor: Atq;
 ita g, h, i simul ad k, l, m simul triplicem illam
 conditionem & recipiant. Ideoq; ut a ad b ; sic
 omnes antecessores a, c, e ad omnes consequen-
 tes g, d, f .

¶ 6. def. V.

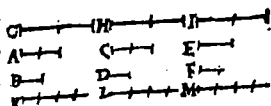
PROPOS: XII.

Theorema 13.

Si prima a , ad secundam b , ean-
 dem habuerit rationem, quam ter-
 tia

tia c ad quartam d ; tertia verò ad quartam majorem rationem habuerit, quàm quinta e ad sextam f : prima quoque ad secundam, majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquè multiples tum Antecedentiũ a, cd , quæ sint g, h , tum consequentiũ b, d, f , quæ sint k, l, m , ut in precedente propositione.



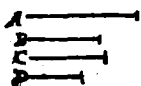
Quia ergò eadem est ratio a ad b , quæ c ad d : sed a 6. def. V. c ad d major est ratio, quàm c ad f : fiet, si g superet k , etiam h superet l , sed i quandoq; deficiat ab m . Atq; ita, cum g superet k , l non superet m , β habebit a ad b majorem rationem, quàm c ad f .

PROPOS: XIV.

Theorema 14.

Si prima a , ad secundam b , eandem habuerit rationem, quam tertia c ad quartam d ; prima verò quàm tertia major fuerit, erit & secunda major quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

cunda æqualis quartæ: si verò minor,
& minor erit.



Sit a major quàm c: Ergò
a habet maiorem rationem a ad b
quàm c ad b: & cum sit, ut a ad
b, ita c ad d; ß erit etiam c ad d

a 8. V.

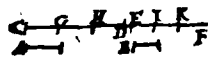
ß 10. V.

major ratio, quàm c ad b & d erit minor quàm
b. Ob easdem etiam rationes quarta est major se-
cunda, si tertia major sit prima; æqualis etiam,
si æqualis.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes a, b, cum pariter multi-
plicibus cd, ef, in eadem sunt ratione,
si, prout sibi mutuò respondent, ita
sumantur ut a ad b, sic c d ad ef.



Cum ergò partes aque
multiplicium numero sint
æquales, cg, gh, hd ipsius a;

ei, ik, kf ipsius b; quæ erit ratio unius Antecedentium
cg, ad unam consequentium ei; eadem æ erit
omnium cd, ad omnes ef.

a 12. V.

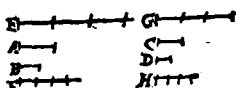
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint ut a ad b , sic c ad d ; & vicissim proportionales erunt ut a ad c , si b ad d .

Sumantur aque
multiplices prima c ,
& secunda f ; item ter-
tia g & quarta h .



Erit ut a ad b ; Sic e ad f ; & ut c ad d ; sic g ad h :
 β Idcirco etiam, ut c ad f : ita g ad h . Si itaq; c
uerit maior quam g , etiam f erit maior quam
 h ; & si equalis, equalis, & si minor, minor. atque
sic, ut a ad c , ita b ad d .

α 15. V.

β 11. V.

γ 14. V.

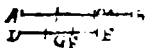
PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint ut a b , ad c b , sic d e , ad f e ; hæ quoque divisæ proportionales erunt, ut a c ad c b ; ita d f ad f e .

H 4

Sic.



Si enim magnitudo de
non est in fecta, ut a b in
c, esto fecta in g. Erunt

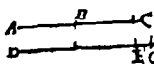
16. V.

ergo duæ Antecedentes conjunctæ, hoc est a b, ad
duas consequentes, hoc est, d e, ut b c ad e g. Sed
tota a b ad ed ponebatur, ut tota d e ad e f. Itaq;
erit, ut a b ad d e; ita b c ad e f. Quare e f a qua-
lis erit ipse e g, pars totæ. Quod absurdum.

PROPOS: XIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint pro-
portionales ut a b ad b c; ita d e ad e f;
etiam compositæ proportionales e-
runt, ut a c ad b c; ita d f ad e f.



Sin minus, b a

17. V.

14. V.

ac ad a b, Erit ergo dividendo, ut a b ad b c
ita d g ad g f: Sed ut a b ad b c, ita erat d e ad
e f: Ideoq; erit etiam, ut d e ad e f; ita d b ad
g f. Cumq; prima d e sit minor tertia d g; et-
iam secunda e f erit minor quarta g f, pars totum
parti. Quod absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum ab ad totum cd ; ita ablatum ae se habuerit ad ablatum ef : & reliquum eb ad reliquum fd , ut totum ad totum se habebit.

Cum igitur sint, ut ab ad cd ; ita ae ad ef ; & erit eb ad fd , ut ab ad cd ; ut a ad e , ut b ad f ; ita c ad d ad e f . & β dividendo, ut eb ad ae ; ita fd , ad ef . & γ componendo, ut ab tota ad e b reliquam; ita c d tota, ad f d reliquam: & α permutando, ut β 17. V. γ 18. V.

PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si sint tres magnitudines a, b, c , & aliae ipsis numero æquales d, e, f , quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, ut a ad b , ita d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f : ex æquo autem prima a quàm tertia c major fuerit & quarta H 3 d quàm

d quàm sexta *f* major. Quod si prima
a tertiæ *c* fuerit æqualis; erit & quar-
 ta *d* æqualis sextæ *f*: sin illa minor,
 hæc quoque minor erit.

8. V.

13. V.

10. V.

7. V.



Sit enim prima *a* major quàm
 tertia *c*; tum *a* ad *b* habet ma-
 iorem rationem, quàm *c* ad *b*; & quia
d ad *e* eandem habet rationem,
 quàm *a* ad *b*; *a* erit etiam major
d ad *e*, quàm *c* ad *b*, hoc est, quàm
f ad *e*: ideoq; major erit *d* quarta, quàm sexta.
 Sic, si *a* est æqualis *c*, etiam *d* est æqualis *f*; & si
 minor, minor.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si sint tres magnitudines *a, b, c* &
 aliæ ipsis æquales numero *d, e, f*, quæ
 binæ, & in eadem ratione sumantur
 ut *a, ad b*, sic *e ad f*; & ut *b ad c*, sic *d ad e*;
 fueritque perturbata earum propor-
 tio; ex æquo autem prima, quàm
 tertia major fuerit: erit & quarta
 quàm sexta major. Quod si prima

ter-

tertiæ fuerit æqualis ; erit & quarta æqualis sextæ ; Sin illa minor , hæc quoque minor erit.

Sit enim a major quàm c , & sic a ad b maiorem habes rationem, quàm c ad b ; adeoque, c ad f β maiorem, quàm c ad b . hoc est, quàm c ad d : eritq; d major quàm f ; Sic, si a est æqualis c , etiam d æqualis est f ; & si minor, minor.



α 8 V.
 β 13 V.
 γ 10 V.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, a, b, c , & aliz ipsi æquales numero d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f ; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c ; ita d ad f .

Prioribus tribus adiungatur g , & posterioribus h . Sitq; ut a ad b , ita c ad g ; & cum a æq; ergo ut a ad c , ita b ad g : Sic item ut d ad e , ita f ad h ;

erit h f e g c b a



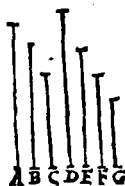
α 16 V.

α erit iterum ut d ad f , ita e ad h . Cum ergo con-
 β ex hypot. sequentes β sint in eodem ordine cum antecedenti-
 bus; Idcirco, est, ut a ad c , sic d ad f .

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines a, b, c ,
 aliarque ipsis numero æquales d, e, f ,
 quæ binæ in eadem ratione suman-
 tur, ut a ad b , sic e ad f , & ut b ad c ; sic d
 ad e ; fuerit autem perturbata earum
 proportio: etiam ex qualitate in ea-
 dem ratione erunt, ut a ad c , sic
 d ad f .



α 61. V.
 β 11. V.

Sin minus, fiat ut b ad c ,
 ita f ad g assumtam: eritq; d ad e
 ut f ad g , quatuor nimirum pro-
 portionales; ac proinde α ut d ad
 f , ita e ad g . Sed e ad g est f ut a ad
 c , β itaq; & d ad f est, ut a ad c .

PROPOS: XXIV.

Theorema 24.

Si prima a ad secundam c ean-
 dem

dem habuerit rationem, quam ter-
tia de ad quartam f ; habuerit autem
& quinta bg ad secundam c eandem
rationem, quam sexta eb ad quartam
 f : etiam composita ag prima cum
quinta, ad secundam c eandem habe-
bit rationem, quam tertia cum sexta
 dh ad quartam f .

Quia enim

est, ut bg ad c ita e h ad f

f ; erit convertendo, ut c ad bg ; ita f ad eh . Cum-
que sit ut a b ad c , ita d e ad f ; & ut c ad bg , ita a ^{12. V.}
 f ad eh , = erit ex equali, ut a b, ad bg ; ita d e ad h ^{18. V.}
 eh . Ergo cum & componendo, ut ab ad bg ,
ita dh ad eh : & ut bg ad c , ita e h ad f ; = erit
ex equali ag ad c , ut dh ad f .

PROPOS: XXV.

Theorem 1. 25.

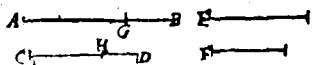
Si quatuor magnitudines pro-
portionales fuerint, ut a b ad c d; sic e
ad f : maxima a b & minima f reli-
quis duabus c d & e majores erunt.

Ex a b equalis e auferatur ag , & ex c d
ipsi f , ch . Fit, ut ab ad cd ; sic ag ad ch ; Et ut
 ab ad

a 19. V.

p ex hypot.

7 14. V.



ab ad cd; a f

reliqua g b ad h

d. Cumq;

major sit ab quàm cd, & major erit & g b quàm h d ex similitudine rationum. Additis ergò equalibus f & c h ad equales ag & e, equales sunt ag & f simul, ipsis e & c h simul; quibus si rursus addantur inaequales g b major & h d minor, erunt ab maxima & f minima, simul majores medijs cd & e simul.

Sequentes propositiones idèò hic inter Euclideas tolerantur, quia scriptores gravissimi, Archimedes, Apollonius & Pappus ijs utuntur.

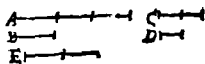
PROPOS: XXVI.

Theorema 26.

Si prima a ad secundam b habuerit majorem proportionem, quàm tertia cad quartam d: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

a 10. V.

p 8. V.



Habeat quaedam e eandem rationem ad b, quam habet c ad d. Quia ergò a ad b, majorem habet rationem, quàm c ad d, id est, quàm e ad b; erit etiam a = m e

a α major quàm *c* ; & *b* ad *a* minorem β habebit rationem, quam ad *c* minorem, id est, quàm *d* ad *c*.

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima *a* ad secundam *b*, habuerit maiorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d*: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

Intelligatur e esse ad b, ut c ad d. Quia ergo a ad b maiorem habet rationem a quàm e ; a erit a major e : β maiorq; erit proportio a ad c, quàm e ad c. Cumq; permutando sit, ut e ad c, ita b ad d. maiorq; sit ratio a quàm e ad c; etiam a ad c quàm b ad d maiorem rationem habebit. 10. V.
8. V.

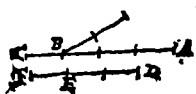
PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si prima *a* ad secundam *b* maiorem habuerit proportionem, quàm

quàm tertia de ad quartam ef , habebit quoque composita prima cum secunda ac , ad secundam bc maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta df ad quartam ef .

G



Habeat gb rationem ad bc , quàm de ad ef , erit g , a b ad b c maior proportio, quàm g b ad

a 10.V.

β 8.V.

γ 18.V.

bc , & ab = major quàm gb . Additæ ergò communi bc , fiet abc major, quàm gbc , & maior g , b erit proportio abc quàm gbc ad bc . Sed & componendo; ut est gbc ad bc ita df ad ef . Major itaq; est proportio ac ad bc , quàm df ad ef .

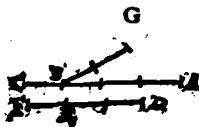
PROPOS: XXIX.

Theorema 29.

Si composita ac prima cum secunda ad secundam bc maiorem habuerit proportionem, quàm composita df tertia cum quarta ad quartam ef : habebit quoque dividendo prima ab ad secundam bc maiorem proportionem, quàm tertia de ad quartam

ram, ef.

Habeat gbc ad bc
rationem, quam d f ad
ef, eritq, major ac, quam
gbc ratio ad bc, a ma-



a 10. V.

β 8. V.

γ 17. V.

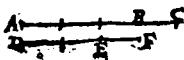
jorq, ac quam g b c. Hinc ablata communi b c, & ex hypo.
major erit ab quam g b; adeoq, & major propor-
tio a b quam g b ad bc. Sed r dividendo, ut g b ad
bc ita de ad ef. Ergo major est proportio a b ad
bc, quam de ad ef.

PROPOS: XXX.

Theorema 50.

Si composita a c prima cum se-
cunda, ad secundam bc majorem ha-
buerit proportionem, quam compo-
sita d f tertia cum quarta, ad quartam
ef: habebit per conversionem ratio-
nis, a c prima cum secunda, ad pri-
mam a b, minorem proportionem,
quam d f tertia cum quarta, ad ter-
tiam de.

Quia enim a c ad bc
major est proportio, quam d f
ad ef; etiam a dividendo ma-



a 29. V.

l

jor

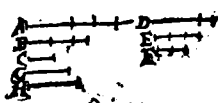
- α 16. V. *por est proportio ab ad bc, quàm de ad ef. Idemq;*
 β convertendo, minor proportio bc ad ab, quàm ci
 γ 28. V. *ad de; eaq; propter γ componendo minor propor-*
tio totius ac ad ab, quàm totius df ad de.

PROPOS: XXXI.

Theorema 31.

Si sint tres magnitudines a, b, c
 & alia ipsiſ æquales numero d, e, f ,
 ſitque major proportio primæ a pri-
 orum, ad ſecundam b , quàm primæ
 poſteriorum d ad ſecundam e ; item
 ſecundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quàm ſecundæ poſteriorum ad
 tertiam f : erit quoque ex æqualitate
 major proportio primæ a priorum ad
 tertiam c ; quàm primæ d poſteriorum
 ad tertiam f .

α 13. V.
 β 10. V.
 γ 8. V.



Iſto enim g ad c , ut
 e ad f , & a erit major
 ratio b quàm g ad c , ſcilia-
 jorq; b quàm g . Ideoq;
 major erit ratio a ad g minorem, quàm a ad b
 majorem. Cum autem major ponatur ratio
 a ad b , quàm d ad e ; multò erit major a ad g ,
 quàm

quàm d ad e . Rursus esto h ad g , ut d ad e , & erit
 a ad g major quàm h ad g , & majorq; a quàm h .
 Ideoq; $ad.c$ major a majorem habet rationem,
 quàm h . Sed ut h ad c , ita d ad f , ex aquali 22. V.
 (quia ut d ad e , ita h ad g , & ut e ad f , ita g ad c)
 Ergò etiam major est ratio a ad c , quàm d
 ad f .

PROPOS: XXXII.

Theorema 32.

Si sint tres magnitudines a, b, c
 & alie ipsiſ æquales numero d, e, f , sit-
 que major proportio primæ a prio-
 rum ad secundam b , quàm secundæ e
 posteriorum ad tertiam f ; item se-
 cundæ b priorum ad tertiam c ma-
 jor, quàm primæ d posteriorum ad se-
 cundam e : erit quoque ex æqualita-
 te major proportio primæ a priorum
 ad tertiam c , quàm primæ d postero-
 rum ad tertiam f .

Esto g ad c , ut d ad e , eritq; b major ratio,
 quàm g ad c , & b a ma- 10. V.
 jor quàm g . & Major er- 8. V.
 gò est ratio a ad g minorem quàm $ad b$.
Cumq;

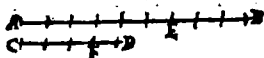
α 10. V. β 1. V. γ ex hypot.

Cumq; a ad b sit major quàm c ad f, multò major est a ad g quàm c ad f. Rursus esto h ad g ut c ad f, eritq; a ad g major ratio, quàm h ad g, & a major quàm h. Ideoq; & a major quàm h ad g habet maiorem rationem. γ Sed ut h ad c, ita ex æquali d ad f. Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f.

PROPOS: XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius ab ad totum m cd, quàm ablati ae ad ablatum cf: erit & reliquæ b ad reliquum fd. major proportio, quàm totius ab ad totum cd.



Quia enim
major est ratio a
b ad cd, quàm

 α 13. V. β 30. V.

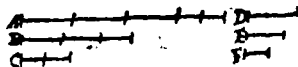
ae ad cf; α erit etiam permutando major ratio ab ad ac, quàm cd ad cf: & per β conversionem rationis minor erit ratio ab ad eb, quàm cd ad fd. Itaq; a permutando, minor erit ratio ab ad cd, quàm eb reliquæ ad fd reliquam.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quocunque magnitudi-
nes a, b, c , & aliæ ipsis æquales nume-
ro d, e, f ; sitque major proportio pri-
mæ a priorum ad primam d posteri-
orum, quàm secundæ b ad secundam
 e ; & hæc major quàm tertiæ c ad ter-
tiam f , & sic deinceps: Habebunt o-
mnes priores simul, ad omnes poste-
riores simul majorem proportio-
nem, quàm omnes priores b, c relictæ
prima a ad omnes posteriores e, f , re-
lictæ quoque prima d ; minorẽ autem,
quam prima priorum a , ad primam
posteriorum d : majorem denique,
etiam, quàm ultima c priorum ad
ultimam f posteriorum.

Quia enim major
est ratio a ad d ,  $a : d :: 27 : V.$
quàm b ad e ; etiã $b : e :: 28 : V.$

permutantis major est a ad b , quàm d ad e & a
componendo major a, b simul ad b , quàm d, e si-
mul ad e : rursum, permutando major a, b simul
ad d, e simul, quàm b ad e . Itaque, cum ab tota ad
de totam habeat majorem rationem, quam abla- $\gamma 33. V.$
ta b ad ablatam e , & etiã reliqua a ad reli-
quam d majorem rationem habebit, quàm ab to-
ta ad de totam. Pari modo major erit ratio b
ad e , quàm bc ad ef ; ac proinde multo major a ad
I 3 d , quàm

α 10. V.

β 3. V.

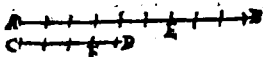
γ ex hypot.

Cumq; a ad b sit major quàm c ad f , multò major est a ad g quàm c ad f . Rursus esto h ad g ut c ad f , eritq; a ad g major ratio, quàm h ad g , & a major quàm h . Ideoq; a major quàm h ad g habet maiorem rationem. γ Sed ut h ad c , ita ex æquali d ad f . Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f .

PROPOS: XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius ab ad totum cd , quàm $ablari$ ae ad ablatum cf : erit & reliquæ eb ad reliquum fd major proportio, quàm totius ab ad totum cd .



Quia enim
major est ratio a
 b ad cd , quàm

α 13. V.

β 30. V.

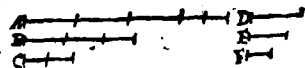
ae ad cf ; α erit etiam permutando major ratio ab ad ac , quàm cd ad cf : & per β conversionem rationis minor erit ratio ab ad eb , quàm cd ad fd . Itaq; a permutando, minor erit ratio ab ad cd , quàm eb reliquæ ad fd reliquam.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quotcunque magnitudi-
nes a, b, c , & aliæ ipsis æquales nume-
ro d, e, f ; sitque major proportio pri-
mæ a priorum ad primam d posteri-
orum, quàm secundæ b ad secundam
 e ; & hæc major quàm tertiæ c ad ter-
tiam f , & sic deinceps: Habebunt o-
mnes priores simul, ad omnes poste-
riores simul majorem proportio-
nem, quàm omnes priores b, c relicta
prima a ad omnes posteriores e, f , re-
licta quoq; prima d ; minorem autem,
quam prima priorum a , ad primam
posteriorum d : majorem denique,
etiam, quàm ultima c priorum ad
ultimam f posteriorum.

Quia enim major
est ratio a ad d ,  $a : d :: 27 : V.$
quàm b ad e ; etiã $b : e :: 28 : V.$

permutando major est a ad b , quàm d ad e & b
componendo major a, b simul ad b , quàm d, e si-
mul ad e : rursumq; permutando major a, b simul
ad d, e simul, quàm b ad e . Itaq; cum ab tota ad
de totam habeat majorem rationem, quam abla-
ta b ad ablatam e , & etiã reliqua a ad reli-
quam d majorem rationem habebit, quàm ab to-
ta ad de totam. Pari modo major erit ratio b
ad e , quàm bc ad ef ; ac proinde multo major a ad
 d , quàm

d, quàm bc ad ef ; & α permutando major ratio
 a ad bc , quàm d ad ef ; & β componendo major
 abc ad bc , quàm def ad ef ; & rursus permutando,
 major omnium simul abc ad omnes simul def ,
 quàm bc ad ef . Quod est primum. Cum igitur
 totius abc ad totum def sit major ratio, quàm
 ablati bc ad ablatum ef ; erit etiam reliqui a ad
 reliquum d major, quàm totius abc ad totum def .
 Quod est secundum. Quia etiam major est ratio
 b ad c , quàm e ad f ; erit α permutando major quo-
 que b ad c , quàm e ad f ; & β componendo major
 totius bc ad c , quàm totius ef ad f . Cum autem
 major sit ratio abc ad def , quàm bc ad ef ex
 demonstratis: multò ergò major erit ratio omnium
 abc ad omnes def , quàm a ad d . Quod est tertium.

PROPOSITIO XXXV.

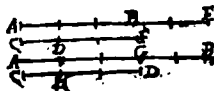
Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus a b ,
 cd majoris inæqualitatis aliæ æqua-
 les be , df addantur; component ra-
 tionem minorem ae ad cf : Sin æqua-
 les demantur bg & dh , relinquent ra-
 tionem majorem ag ad ch .

• 14. V.

Penatur, ut ab ad cd , ita be addi: = Erit
 b c h

be, hoc est gb major quàm
di: & ideoq; cd ad di mi-
norem habebit rationem
majorem, quàm ad df ma-



68.VI.

jorem. & Quare etiam ab ad be majorem ratio-
nem habebit, quàm cd ad df: & d componendo γ 13.V.
ae ad be majorem rationem habebit, quàm cf δ 28.V.
ad df: Sed revertendo a e ad ab minorem ratio- 30.V.
nem habebit, quàm cf ad cd. Quare ζ permutan- 37.V.
do ae ad cf minorem rationem habebit, quàm ab
ad cd. Quod erat propositum. Eodemq; modo
altera propositionis pars demonstratur.

Hinc patet: Data rationi aliam paulò mi-
norem majoremve dari, equalis quantitatis addi-
tione vel subtractione.





EUCLIDIS

ELEMENTO- RUM

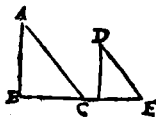
LIBER VI.

Definitiones.

I.



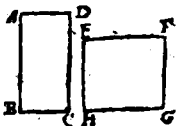
Similes figuræ rectilinez sunt abc, dec , quæ & angulos singulos singulis æquales habent $a, d; b, c; c, f$; atq; etiã latera quæ circum æquales angulos, proportionalia, ut



ab ad bc ; ita dc ad ce . Utraq; enim hæc in figurarum similitudine, & æqualitatem angulorum, & proportionalitate

litatem laterum oportet cōcurrere. Ideoq̃
etiam tantum habet locum in ejusdem
speciei figuris, circulis & circulis, quadra-
tis & quadratis, &c.

2. Reciproca figuræ sunt $abcd$ & $efgh$ cum in utraque
figura antecedentes
 ad, hz & consequentes
 eh, bc rationum termi-
ni fuerint. Hic nulla
sequitur figurarum similitudo.

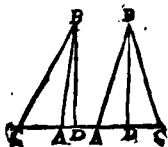


3. Secundum extremam & medi-
am rationem recta linea secta esse
dicitur, cum ut tota ad majus se-
gmentum; ita majus ad minus se-
habuerit.

Extrema & media ratione est in ex-
tremum & medium terminum dividi.
Quæ prout in 30 propos. docebitur & a-
lijs verbis in 11. 11. est tradita. Ex usu au-
tem maximo in stereometria potissimum,
quod libro 13. constabit, dicta est divina
hæc proportio.

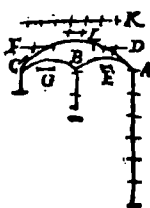
4. Altitudo bd cujusque figuræ
 abc est linea perpendicularis à verti-

ce *b* ad basin *a c* deducta. Hinc *a* que alta dicuntur figure quarū perpen-



diculares sunt *a*quales. ita enim etiam, consister possunt intra duas parallelas sua basi & vertice.

5. Ratio *a* ad *c* ex rationibus *a* ad *b*, & *b* ad *c* componi dicitur, cum rationum *a* ad *b* & *b* ad *c* quantitates denominatores *d* ad *e* & *f* ad *g*, inter se multiplicatæ *d* in *f* & *e* in *g*, aliquam effecerint rationem *a* ad *c*.



Quantitas rationis est denominator proportioni dictus, quod indicet quanta sit magnitudo antecedens respectu consequentis. Ex duabus ergo

vel pluribus rationibus

componi dicitur ratio, quando ipsarum denominatores inter se multiplicati eam efficiunt. Ut duodecupla componatur ex dupla & sextupla, quia denominator duodecuple proportionis producit ex

mul-

multiplicatione denominatorū duplā 2. & sextuplā 6. Ideoq; quocunq; magnitudinibus ordine positus, ratio extremorum componitur ex rationibus intermediarum.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Triangula abc , item def parallelogramma $ahdk$, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases abc ad def , & ah ad dk , ut ac ad df .

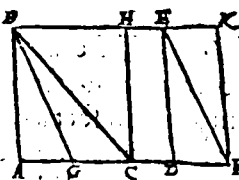
Est basis ac dupla ad basin df , & secetur bisariam in g , connectaturq; g ad b .

Erunt Triangula abg gbc & def æqualia

& Triangulum abc duplum Trianguli def , videlicet ut basis ac ad basin df , ita Triangulum abc ad Triangulum def . Quod primum est.

Ita etiam cum parallelogramma ah & dk sint 2 dupla Triangulorum abc & def ; erit ut abc ad def ita ah ad dk parall. Quare etiam ut basis ac ad basin df , ita ah ad dk parall.

Quod est secundum.



10. L.

31. I.

41. L.

15. V.

11. V.

Hinc

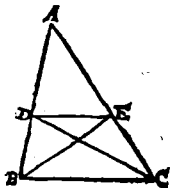
Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelogrāma quæ æquales habēt bases, sunt ut altitudines. Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima huius patet propositum.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli abc latus bc parallela ducta fuerit recta quædam linea de , hæc proportionalitate ut ad ad db , ita ae ad ec secabit ipsius Trianguli latera. Et si Trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, de , erit ad reliquum ipsius Trianguli latus bc parallela.

a 37. l.
p 7. V.



c 1. VI.
d 11. V.

Ducantur rectæ be , cd .
Est enim ut a equalia Triangula dbe & dce ad Triangulum dae ; & ita bases bd ad da , & ce ad ea . Quod est primum. Et rursum: ut basis bd ad basin da ; & ita bed ad eda d: Qua-

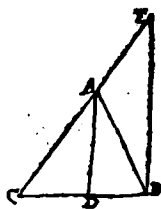
d: Quare Triangula bcd & ced erunt equalia, 9. V.
 Seriusq; de ipsi bc parallela: Quod est secundum. 39. L.

PROPOS: III.

Theorema 2.

Si Trianguli bac angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea ad secuerit & basin: basis segmenta bd , ad dc eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera ba ad ac . Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat Trianguli ipsius angulum.

Per punctum b agatur ipsi ad parallela be , concurrens cum ca producta in e . Quia ergo sunt equaliter anguli dab & abe ; dac & c ; erunt quoq; bis opposita latera ea & ab equalia, Quare aut ea , hoc est ba ad ac , ita bd



ex hypot.
 & 29.
 C. 2. VI.

ad dc . Quod primum, Rursus etiam est, ut bd ad dc ita

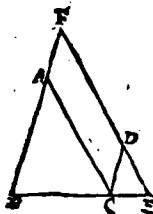
d s. L.

de ita bavelea ad ac; erunt recte ba & ea,
 aequales anguli eba & bad, e & dac erunt de
 quales. Angulus nimirum a bifariam est sectus per
 da. Quod erat propositum.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Acquiangulorum abc, def Tri-
 angulorum proportionalia sunt la-
 tera, ut ab ad bc; ita cd ad de, ut bc ad
 ca; ita ce ad ed, ut ba ad ac; ita cd ad de;
 quæ circum æquales angulos, b & de
 e, bca & e, a & d, & homologa sunt la-
 tera, ab ad dc, bc ad ce, ac ad de, quæ æ-
 qualibus angulis bca & ea & cd, b & de,
 subtenduntur.



Sint bases bc & ce Tri-
 angulorum & secundum an-
 gulorum æqualitatem simili-
 ter positorum, in directum, &
 concurrant ba & ed productæ
 in f. Quia ergo anguli dce &
 b, item acb & e sunt æqals,
 erunt parallele bf & cd;

item ac & ef, & acdf parallelogrammum.
 Erit ergo ut ba ad af, hoc est, cd, ita bc ad ce;
 & permutando ut ab ad bc, ita dc ad ce. Rursus
 erit

æ 28. f.
 p 34. l.
 γ 2. VI.
 δ 7. V.
 u 16. V.

verit etiam, ut bc ad ce , ita fd ad bo est, a c ad de , & permutando ut bc ad ca , ita ce ad ed .
Erit ergo etiam ex æquali, ut ab ad ac , ita cd ad de . § 11. V.
Corollarium.

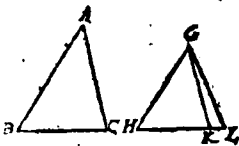
Hinc patet: Recta ac uni laterum fc Trianguli bfc parallela, aufert Triangulum bac , § 19. I.
Simile toti bfc & æquales enim sint anguli f & a , § 4. VI.
& c & c & b communis. Quare latera b proportiona- § 1. def. VI.
lia & ipsa Triangula, similia.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si duo abc , $h g k$ Triangula latera proportionalia habeant, ut ab ad bc , ita $g h$ ad $h k$, ut bc ad ca , ita $h k$ ad $k g$, ut $b a$ ad ac , ita $h g$ ad $g k$, æquiangula erunt Triangula, a & g , b & h , c & k , & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera bc ad $h k$, ac ad $g k$, ab ad $g h$ subtenduntur.

Conversa præceden-
sio. Si Triangulo abc
non Triangulum $h g k$,
sed $h g l$ esset æquiangu-
lum: æssent ergo gh



ad $h l$, & sicut & gh & $h k$, ut ab ad bc ; & $h l$, & ex hypo- § 4. VI.
æquale ipsi $h k$; totum p. 171. Quod absurdum. § 9. V

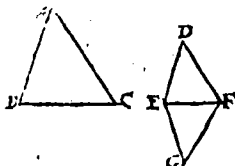
PRO-

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si duo abc, def Triangula unum b
angulum uni e angulo æqualem, &
circum æquales angulos latera pro-
portionalia, ut $a b$ ad bc , ita $d e$ ad $e f$,
habuerint: æquiangula erunt Trian-
gula, æqualesque habebunt a & d , c &
 f angulos, sub quibus homologa bc ad
 $e f$, ab ad de , latera subtenduntur.

α 23. l.
 β 32. l.
 γ 4. Vl.
 δ ex hypot.
 ϵ 9. V.
 ζ 4. l.



Ad e, rectæ p
ctæ e & f siant anguli
æquales angulis b & c
 β Erit etiam g æqualis
a; & Triangula a b c
& e f g æquiangula: γ

Ideoq, ut ab ad bc , ita ge vel de ad ef ; eruntq,
 ge & de æquales; & reliqui anguli reliquis an-
gulis, & Triangula abc, def æquiangula.

PROPOSITIO VII.

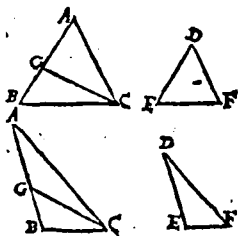
Theorema 7.

Si duo abc, def Triangula unum

α an-

angulum uni d æqualem, circum autem alios angulos e & f latera proportionalia habeant; ut $a c$ ad $c b$, ita $d f$ ad $f e$: reliquorum verò simul utrumque b & c aut minorem, aut non minorem recto: Acquiangula erunt Triangula, & æquales habebunt eos angulos, e & f , circum quos proportionalia sunt latera.

Esto primum uterq; tertius angulus b & c acutus. Si abc & def non sunt equiangula = fiat angulus agc equalis angulo e ; β erit ergo $b g c$ obtusus, & ut $d f$ ad $f e$, ita $a c$ ad $v e g$ & $c b$ & sic $g c$ & $c b$, anguliq; ad basin $b g$ sunt, æquales; obtusus acuto Quod absurdum. Idem absurdum sequitur, si b & c anguli sint obtusi.



α 23 l.
 β 13. l.
 γ 4. VI.
 δ ex hypot.
 ϵ 5. l.

PROPOSITIO IIX.

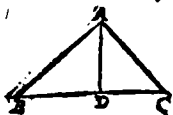
Theorema 8.

Si in Triangulo abc rectangulo, ab angulo a recto in basin bc perpendicu-

K

dicu-

dicularis ad ducta sit: quæ ad perpen-
dicularem Triangula bda & adc tum
toti bac Triangulo, tum ipsa inter se
similia sunt, bda & adc .



Quia enim bac & bda
rectangula præter angulum
rectum & communem habent
 b , etiam tertius, tertio est

a 32. I.

a 4. VI.

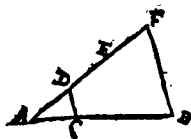
71. def. VI.

equalis, & Triangula, illa sex equiangula late-
rag, phabent circa æquales angulos proportionalia,
laterum homologia observata, videlicet, ut cb ad
 ba , ita ab ad bd ; & ut ba ad ac , ita bd ad
 da . Itaq, sunt & similia Triangula. Eadem etiam
Triangula cæst demonstratio.

PROPOSITIO IX.

Problema 1.

A data recta ab linea imperatam
partem auferre ag .



Auferenda sit pars tertia;
Ex a ergo ducatur sub quovis
angulo recta infinita ac , ex
qua auferantur tres æquales
partes ad , de , ef , & f conne-

a 31. I.

72. VI.

718. V.

ctatur cum b , cui per d agatur a parallela dg . Erit
 ag pars tertia desiderata. Quia enim est; put
ad ad df , in ag ad gb ; erit, componendo; Vt tota
af ad

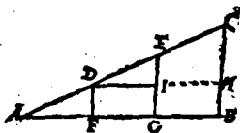
et ad partem ad; ita data ab ad partem desideratam ag. Quod erat faciendum,

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam ab rectam lineam insecam similiter secare, ut data altera ac recta secta fuerit in d & e.

Efficiant duæ rectæ ab & ac angulum quemcumq; a, & ducantur cb, cui per d & e agantur parallele ep



& df: item per d ipsi ab parallela dh. Est ergo $\epsilon \beta 2$ VI. ut ad ad de, sic af ad fg: item ut de ad ec; ita di $\gamma 34$. L. ad ih, id est, fg ad gb: arg, ita ab ipsi ac similiter secta. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XI.

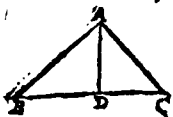
Problema 3.

Duabus datis rectis lineis ab, bc, tertiam proportionalem adinvenire.

Datae duæ rectæ a b, bc ponantur in directum, & quovis angulo c a c ducatur recta

K a inf-

dicularis adducta sit: quæ ad perpen-
dicularem Triangula bda & adc tum
toti bac Triangulo, tum ipsa inter se
similia sunt, bda & adc .



Quia enim bac & bda
rectangula præter angulum
rectum & communem habent
 b , etiam tertius, tertio est

a 32. I.

a 4. VI.

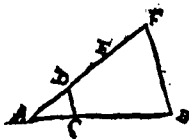
71. def. VI.

equalis, & Triangula, illa sex equiangula late-
rag, phabent circa aequales angulos proportionalia,
lateralium homologia observata, videlicet, ut cb ad
 ba , ita ab ad ad ; b d ; & ut ba ad ac , ita bd ad
 da . Itaq, sunt & similia Triangula. Eadem etiam
Triangula ca est demonstratio.

PROPOSITIO IX.

Problema 1.

A data recta ab linea imperatam
partem auferre ag .



Auferenda sit pars tertia;
Ex a ergo ducatur sub quovis
angulo recta infinita ac , ex
qua auferantur tres aequales
partes ad , de , ef , & f conne-

a 31. I.

72. VI.

718. V.

ctatur cum b , cui per d agatur parallela dg . Erit
 ag pars tertia desiderata. Quia enim est; pa ut
 ad ad df , in ag ad gb ; erit, componendo; Ut tota
 af ad

af ad partem ad; ita data ab ad partem desideratam ag. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam ab rectam lineam insecare similiter secare, ut data altera ac recta secta fuerit in d & c.

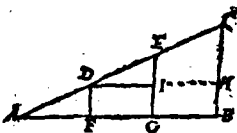
Efficiant duæ rectæ ab & ac angulum quemcumq; a, & ducatur cb, cui per d & c

a agantur parallelæ eg

& df: item per d ipsi ab parallelæ dh. Est ergo $\angle \beta \gamma \delta$ VI.

ut ad ad de, sic af ad fg: item ut de ad ec; ita di γ 34. l.

ad ih, id est, fg ad gb: atq; ita ab ipsi ac similiter secta. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO XI.

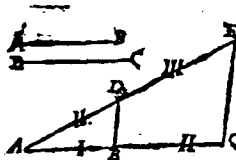
Problema 3.

Duabus datis rectis lineis ab, bc, tertiam proportionalem adinvenire.

Data duæ rectæ a b, bc ponantur in directum, & quovis angulo c a e ducatur recta

K a inf-

31. I.
2. VI.



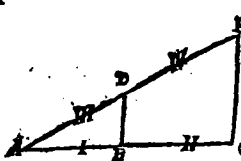
infinita ac, à qua ab-
scindatur a d equalis
ipfi bc ductaq; db a-
gatur ce = parallela per
c. β Erit ergo, ut ab pri-
ma ad bc secundam; ita

buic equalis ad, ad de tertiam quæsitam.

PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam pro-
portionalem invenire.



Data duæ a b pri-
ma, & bc secunda po-
nantur in directum, &
quovis angulo cae du-
catur recta infinita, in
qua sumatur tertia a d

ductaq; db parallela ce per c = agatur. β Erit ut
ab prima, ad bc secundam; ita ad tertia, ad d e
quartam quæsitam.

31. I.
2. VI.

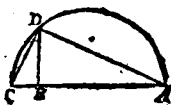
PROPOSITIO XIII.

Problema 5.

Duabus a b, b c, datis rectis, me-
diam

diam proportionalem adinvenire.

Datæ duæ rectæ ab , bc ponantur in directum, & super tota ac describatur semicirculus adc , & erigaturq; ex b



perpendicularis bd , & ducantur ad , cd . Erit ergo adc in semicirculo rectus; & db perpendicularis efficit duo Triangula abd & cbd & æquiangula. Ideoq; d proportionalia, Vt ab ad bd , ita bd ad bc . Est ergo bd media proportionalis.

α 11. I.
 β 31. III.
 γ 8. VI.
 δ 4. VI.

PROPOSITIO XIV.

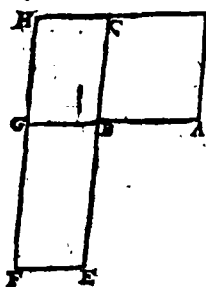
Theorema 9.

Æqualium, & unum abc uni ebg æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, bd , bf , reciproca sunt latera, ut ab ad bg ; ita eb ad bc quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum bd bf unū abc angulum uni ebg angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia bd , bf .

Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verti-

§ 14. I.

§ 7. V.
 § 1. VI.
 § 2. def. VI.



cales ad b, & ita a in dire-
 ctum erunt ab, bg, item
 bc, & be: compleaturq;
 gnomon ahe. Habebunt
 equalia parallelog. bd &
 bf eandem rationem ad
 bh, quam bases ab ad
 bg, & be, ad bc i. e. sunt
 reciproca. Contra sint latera
 circum aequales angulos

ad b reciproce proportionalia, ut ab ad bg, ita bc
 ad be, erunt parall. bd & bf equalia. Habent e-
 nim bd & bf ad bh eandem rationem. Ideoq;
 sunt & equalia,

§ 1. VI.
 § 9. V.

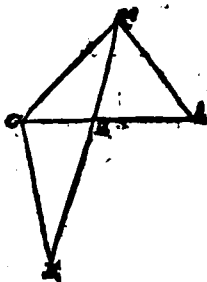
PROPOSITIO XV.

Theorema 10.

Aequalium, abc , ebg , & unum abc
 uni ebg æqualem habentium angu-
 lum, Triangulorum, reciproca sunt
 latera, ut ab ad bg, ita eb ad bc, quæ
 circum æquales angulos. Et quo-
 rum Triangulorum abc , ebg , unum
 angulum abc uni ebg æqualem habē-
 tium reciproca sunt latera, ut ab ad
 bg, ita eb ad bc, quæ circum æquales
 angulos; illa sunt æqualia.

Deo

Demonstratio cum
 priore coincidit, quod Pa-
 rallelogrāma sint Triā. u-
 lorum dupla. Rursum er-
 go anguli aequales fiant
 verticales, ut ab, bg &
 cb, be sint α in directum,
 & ducatur cg . Erit
 ut aequalia Triangula abc
 & ebg ad Triangulum
 cbg , & ita bases erunt ad bases, d. ut ab ad bg , ita
 eb ad bc , id est, reciprocē. Et contra: Lateri-
 bus datis reciprocis vel sabibus, Erit ut aequales
 rationes data basium ab ad bg , vel eb ad bc , ita
 triangulum acb , vel bgc ad triangulum bcg ;
 Ideoq, triangula acb & beg , erunt aequalia.
 Quod erat ostendendum.


 α 4. I.

 β 7. V.

 γ 1. VI.
 δ 11. V.

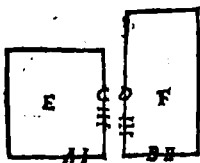
 ϵ 1. VI.

 ζ 9. V.

PROPOS. XVI.

Theorema 11.

Si quatuor rectæ lineæ a, b, d, c pro-
 portionales fuerint: ut a ad b ; ita d ad c
 quod sub extremis a & c comprehenditur
 rectangulū e , æquale est ei, quod
 sub medijs b & d comprehenditur,
 rectangulo f . Et si sub extremis a & c cō-
 prehensum rectangulū e æquale fue-
 rit ei f , quod sub medijs b & d conti-
 netur, rectangulo: illæ 4. lineæ rectæ
 a, b, d, c proport. erūt ut a ad b , ita d ad c .



$\alpha 2$. def. VI.
 $\beta 14$. VI.

Quia enim, α , da-
 ta rectæ proportionales, ut
 a ad b , ita d ad c ; ponū-
 tur in duobus rectangulis
 e & f , circa aequales re-
 ctos α reciproci; erunt
 rectangula e & f æqua-

lia. Et contra rectangula e & f æqualia habebunt
 circa æquales angulos latera reciproci propor-
 tionalia, ut a ad b , ita d ad c ; & ut a ad d , ita b ad c .
 Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac
 & sequenti proportionem.

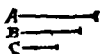
PROPOS: XVII.

Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportio-
 nales: ut a ad b ; ita b ad c ; quod sub
 extremis a & c comprehenditur re-
 ctangulum e , æquale est ei, quod à
 media b describitur, quadrato f ; Et
 si sub extremis a & c comprehensum
 rectangulum e æquale sit ei, quod à
 media b describitur quadrato e : illæ
 tres rectæ lineæ a , b , c , proportio-
 nales erunt ut a ad b ; ita b ad c .

Quia

Quia enim media proportionalis b bis est ponenda, erunt ut in precedente propositione 4. rectæ circum angulos æquales



rectos & reciprocè proportionales. Ideoq; rectangula $\&$ β æqualia. Et contra, æqualia rectangula circa angulos rectos habent latera reciprocè proportionalia, videlicet, ut a ad b , ita eadem b ad d . Quod erat ostendendum.

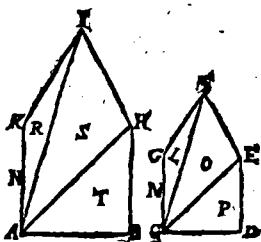
$\alpha 2. \text{ def. VI.}$
 $\beta 4. \text{ VI.}$

PROPOSITIO XIIX.

Problema 6.

A data recta ab linea dato rectilineo $cdefgm$ simile similiterque positum rectilineum ab $bikn$ describere

Rectilineum datum in resolvatur in Triangula per lineas occultas ce, cf , ex eodem angulo c . Fiant æquales angulis dce quidem hab , & d ipse b ; erunt Triangula abh & cde



$\alpha 13. I.$

K s

β æqui-

231.
74. V.

2. 22.

4. VI.
2. 12. V.

1. def. VI.

aequiangula & latera γ proportionalia, ut $\text{oc ad cd, ita ha ad ab, atq; ita Triangula similia similiterq; posita}$ (secundum eundem situm quo ad latera & angulos) ita Triangulo $\text{ccf super ah, fiat simile similiterq; positum Triangulum ahi}$ & erit quadrangulum $\text{abhi, quadrangulo cdef equi- angulum. Ideoq; cum ex similitudine Triangulorum, ex quib. sunt facta, sit ut cd ad ce, & ce ad cf, ita ab ad ah & ah ad ai, erit ex equali, ut cd ad cf, ita ab ad ai, latera nimirum circa aequales angulos sunt proportionalia; & ita etiam quadrangulum a b h i simile est. similiterq; positum quadrangulo cdef. Deniq; super a i simile similiterq; positum fiat Triangulo c f g Triangulum aik, quod additum quadrangulo efficit pentagonum pentagono m c equiangulum & simile similiterq; positum. Quia enim rursus ut $\text{cd ad cf & cf ad cg, ita ab ad ai, & ai ad ak; ergo ex equali ut cd ad cg, ita ab ad ak: atq; ita circa reliquos angulos reliqua latera sunt proportionalia; & ipsi m simile similiterq; positum Pentagonum. Quod erat sciendum.}$$

PROPOS: XIX.

Theorema 13.

Similia $\text{abc, def Triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorū. bc & ef}$ (hoc est quadrata, quā refertur bc ad tertiā proport. bg.

Late-

Lateribus duobus
homologis bc & ef
queratur tertia

Proportionalis bg ,
ducaturq; ag . Quia

ergo est ut ab ad bc , ita de ad ef ; ergo per

mutando, ut ab ad de , ita bc ad ef ; & ita ef ad

bg videlicet recipiendo circa aequales angulos b

& e . Itaq; equalia erunt Triangula bag & def ,

ad quae utraq; eandem habet rationem abc ;

eam videlicet quae est basis bc ad basin bg , id est,

prima bc ad tertiam bg , duplicatam rationem

homologorum laterum bc ad ef . Itaq; etiam tri-

angula bac & def habebunt rationem duplicatam

homologorum laterum.

Hinc patet. Si tres bc, ef, bg , recte sine

proportionales, ut de ad e , ad bg , ut est pri-

ma, bc ad tertiam, ef , ita est Triangulum ab

super primam bc , descriptum ad Triangulum

def super secundam ef , simile similiterq; descriptum:

Ita etiam Triangulum super secundam ef ad Tri-

angulum super tertiam bg .

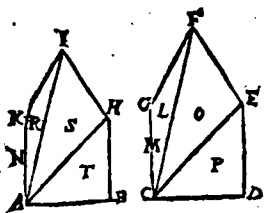
PROPOSITIO XX.

Theorema 14.

Similia polygona m & n in similia
triangula dividuntur, l & r , o & s , p & t &
numero aequalia: & homologa totis:

m & n &

& polygona duplicatam *quadratam* habent eam rationem inter se, quam latus homologum *c d* ad homologum latus *a b*.



Ab angulis equalibus *c* & *a* ad angulos oppositos *f* & *e*, *h* & *i*, ducantur lineae dividentes polygona *m* & *n* in tria aequalia Triangula *lop* & *rst*. Quae

6. VI.

1. def. VI.

22. V.

Triangula bina inter se ut *p* & *r*, quia circum aequales angulos *b* & *d* sunt latera proportionalia, sunt aequiangula & similia: Ita cum sit, ex similitudine figurarum, *ecadde* & *de ad ef*; ita *haad* *hb* & *hb ad hi*; etiam ex equali sit, ut *ce ad ef*, ita *ah, ad hi*, latera circa residuos aequales angulos ex toto *h* ipsi *e* equali; & *erunt o* & *s* Triangula aequiangula aequè similia *acp* & *t*. Ita denique, & *erunt l* & *r*, ut *p* & *t*. Cum ergo sint in ratione duplicata *p* & *t*, & *o* & *s* & communium laterum homologorum *ce ad ah*, Item ut *o* & *s*, sunt etiam *l* & *r* in ratione duplicata communium homologorum laterum *cf* & *a* *i*; erunt etiam, ut *p ad t*, ita *l ad r*, & *o ad s*. Ideoque etiam ita ut *m ad n*, ut *p ad t*, id est, Triangula similia sunt etiam homologa ipsis polygonis; Proindeq,

indeq; ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, cd ad ab . Quod erat propositum.

Hinc sequitur.

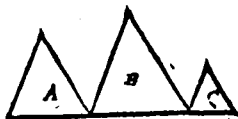
Si tres rectæ sint proportionales ut est prima ad tertiam, ita est figura super primâ descripta, ad figuram, super secundam similem similiterq; descriptam: Et ita figura super secundam descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 15.

Quæ eidem a & b rectilineo c sunt similia, & inter se a ipsi b sunt similia.

Quia enim utrumq; a & b est simile tertio c , eidem erit æquiangulum,



& ita a & b inter se

erunt æquiangula, & habebuntq; circa æquales angulos latera proportionalia. & inter se erant & similia. Quod erat propositum.

a 1. def. VI.

b 1. ax.

γ 4. VI.

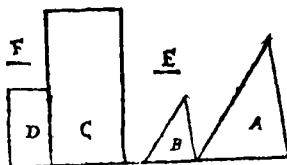
δ 1. def. VI.

PRO-

PROPOS: XXII.

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, & ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt, ut a ad b, ita c ad d. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta proportionalia fuerint rectilinea, ut a ad b, ita c ad d: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt, prima ad secundam, ut tertia ad quartam.



Queratur prima & secunda, tertia proportionalis e, item tertia & quarta, tertia proport.

¶ 10. def. V. f. Aequalium ergò rationum prime ad secundam, & tertia ad quartam, etiam duplicata rationes a prime a ad e, & tertia ad f: β a ad b & c ad d, & 6. ax. æquales erunt.

Deinde, sint figure similes ut a ad b, ita c ad d β duplicata ratione homologorum laterum eadem, ut prima ad e, ita tertia ad f; erunt etiam di-midiatae rationes eadem, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam. Quod erat propositum.

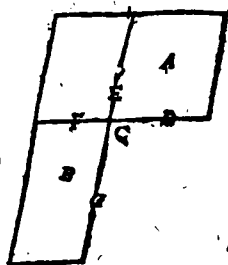
P R O Q

LIBER VI.
PROPOSITIO XXIII.

Theorema 17.

Aequiangula, ad verticem c , parallelogramma a & b inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus componitur.

Compleatur parallelogrammum h . Quia extremorum parallelogrammorum a ad b ratio æt componitur ex intermedijs, a ad h , & h ad b , quibus β eadem sunt rationes laterum d ad f & e ad g : Itaque ex his γ rationibus laterum composita erit ratio a ad b . Qued erat propositum.



æ s. def. VI.
¶ 1. VI.

¶ 11. V.

PROPOSITIO XXIV.

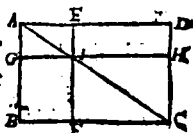
Theorema 18.

In omni parallelogrammo, bd , quæ circa diametrum a & c sunt parallelogramma, ge , & fh & toti bd & inter se sunt similia.

(Diagonale est, quod & angulos & diagonium habet communem cum toto)

æ Aequales n. sunt anguli aig

& cai , cih & icf ; Item anguli gai , aie , fic & ich



æ 29. L

¶ 28.

p 34. I.

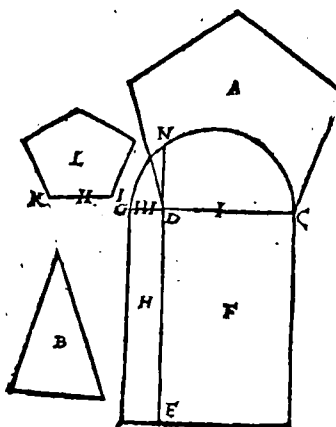
anguli item, e, g, h, f ; ideoq; 4. illa Triangula sunt
equiangula, & latera habent circum æquales an-
gulos & proportionalia ut ac ad ei , ita ih ad hc ,
& ut ag ad gi ; ita if ad fc . Sunt ergo Diago-
nalia & inter se & toti similia.

v 4. VI.

PROPOS: XXV.

Problema 7.

Dato rectilineo simile, similiter-
que positum & alteri dato æquale
constituere.



Dato rectili-
neo a cui con-
struendum est
simile ad latus
 cd sub an-
gulo quovis c
de a applice-
tur parallelo-
grammum f
æquale; rur-
susq; ad huius
latus de sub
angulo conti-
guo edg appli-
cetur parall.
 h, a .

a 44 v. 45. I.

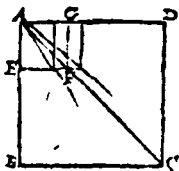
h aequale rectilineo b, cui aequale est construendum.
 Inter c d & p d g s queratur media proportionalis θ 13. V.
 d n vel i k, super qua rectilineo a simile rectilineu l γ 18. VI.
 & construatur, quod erit aequale ipsi b. Quia e- θ 1. VI.
 nim est, ut prima c d ad tertiam d g, & ita f a d h, & 7. V.
 id est, a ad b, & a ad l; etiam ex n aequali est l γ 11. V.
 aequale ipsi b, quod etiam est constructum simile ipsi θ 22. V.
 a. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

Si a parallelogrammo b d paral-
 lelogrammum ablatum sit e g, & si-
 mile toti & similiter positum, com-
 muncem cum eo habens angulum;
 hoc circum eandem cum toto dia-
 metrum a c consistit.

Si quis ei dicat dia-
 gonale, a erit illud simile
 toti b d. Itaque, ut b a
 ad a d; ita e a ad a g, &
 a i equalia partem & to-
 tum. Quod absurdum. I-
 gitur non ei, sed e g est
 diagonale. Quod erat demonstrandum.



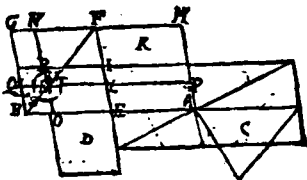
θ 24 VI.
 θ 1. def. VI.
 γ 9 V.

L

PRO.

Problema 8.

Super dimidia
eb. fiat paralle-
logr amum eg
simile d. comple-
atur a g & du-
catur fg. si e
equale facit



18. VK

parallelogrammo a f vel e g, factum est, quod
jabet propositio. Sin minus θ a i sit minus
a f, tum excessui k p construaturs aequale

A25. VL

L 2

paral-

726. VI.

parallelogrammum ipsi cg vel d simile similiterque posuerimus
erit q_2 in ex cg secundum communem angulum ab-
latum diagonale ipsius cg , Completa tota figura
ponq: Dico a m ipsi c æquale esse.

dix constr.

3. 27.

24. 3. & 36. I.

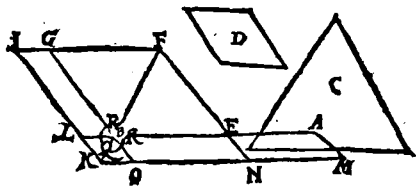
24. VI.

Ablatis enim ab d æqualibus a & c & g &
æqualibus k & l n, relinquitur ai vel rectilineum
 c æquale gnomoni rsc ; vel huic æquale parallelo-
grammo oq simili similiterque posito ipsi cg vel da-
to d . Quod erat faciendum.

PROPOS. XXIX.

Problema 9.

Ad datam rectam ab , dato recti-
lineo c , æquale parallelogrammum
applicare, excedens parallelogram-
mo ol , quod simile similiterque situm
sit alteri dato d .



18. VI.

25. VI.

Ad data ab & mediam eb applicetur a parall.
 cg , simile similiterque situm dato d . Deinde b fiat,
paral-

parallelogrammum ni aequale duobus rectilineis
 c. & eg, simile vero eidem eg; erit eg dia- 26. VI.
 gonale, ipsius ni; inversa nimirum recta si ponatur
 homologa lateri fg & compleatur figura ak
 ge. Dico ml aequale esse ipsi c.

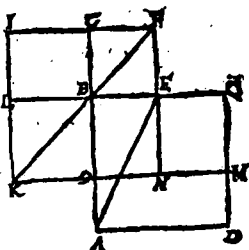
Aequalia enim erunt rectilineo c gnomon d
 p gr & parallelog. ml, quod excedit datā ab 26. & 43. l.
 p. parallelogrammo ol, simili similiterq; sito, ipsi eg,
 five dato d. Quod erat faciendum.

PROPOS: XXX.

Theorema 10.

Propositam rectam ab lineam
 terminatam extrema, ac media ra-
 tione secare.

A data ab a de-
 scribatur quadrangulum bd, cui ad re-
 ctam cb applicetur
 aequale parallelogr.
 ml excedens ipsam
 c b similiter qua-
 drato ol (super di-
 midia nimirū, beco-



26. I.
 29. VI.

struatur quadratum eg, & ducatur ea, quae erit
 latus quadrati fk, quod quadratis duobus bd &

L 3 eg est

747.1.

eg est γ aequale. Id. oq, ipsi ea sit similis si homologa lateri fg, & compleatur Figura, fm l) Dico ab sectam esse proportionaliter.

d 3.21.

Si enim ab aequalibus bd & lm auferatur commune mb, & relinquetur rectangulum do sub tota ad sive ab & segmento a o comprehensum aequale quadrato o l facto a segmento ob. Ideoq, tres recta a b, bo & oa sunt proportionales, adeoq,

17. VI. ab in o secta secundum mediam & extre-
 3. def. VI. mam rationem. Quod erat faciendum.



In praxi commodissime adhibetur II. II. ut ad datam ab ad punctum b erigatur perpendicularis aequalis bc, qua secetur aequaliter in c, inter valloq, ea ponatur aequalis cl, & ipsi bl aequalis bo, erit o sectio ipsius ab.

PROPOS: XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis abc triangulis, figura d quævis, à latere bc rectum angulum bac subtendente descripta, æqualis est figuris e & f, quæ priori illi similes, & similiter positæ, à lateribus

bus ab & ac rectum angulum continentibus describuntur.

Quia enim tria terna sunt

a proportionales bc, ba, bg ;

& bc, ca, cg erit, ut bc ad

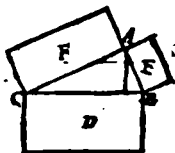
bg ita da ad e , item ut bc ad

cg , ita d ad f . Est autem re-

cta bc equalis ipsis bg & gc

simul sumtis: Ideoque, & figura d equalis erit figuris

e & f simul sumtis. Quod erat ostendendum.



al. VI.

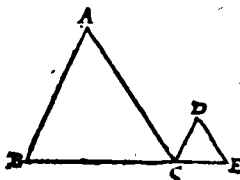
scor. 20. VI

PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Si duo triangula, abc , dec quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ut ba ad bc , ita cd ad de secundum unum angulum acd composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela ba & cd , ac & de : tum reliqua illorum triangulorum latera bc & cd in rectam lineam collocata reperiuntur.

α 29. I.
 β 6. VI.



γ 2. ax.
 δ 32. I.
 ϵ 14. I.

Quia enim *equales* sunt anguli α *alterni* $acd, d \& a$; β erunt *Triangula equiangula* $\& dce \& b$ *equales*; quibus adduntur *equales alterni* $acd \& 2$, erit totus ace duobus $b \& a$ *equalis*; rursusq; addito communi acb , γ erunt duo $acb \& ace$ tribus *trianguli abc* *angulis*, hoc est, duobus *rectis* *equales*. Ideoq; *bases* bc, ce erunt in *directum* seu *linea una* be . Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIII.

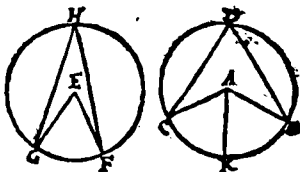
Theorema 23.

In *æqualibus* *circulis*, anguli *e-*
andem *habent* *rationem* *cum* *peri-*
pherijs $bc \& fg$, quibus *insistunt*, sive
ad centra bac, feg , sive *ad peripheri-*
as bdc, fhg *constituti* *insistant*: Insu-
per *verò* $\&$ *sectores* $bca \& fge$, quippe
qui *ad centra* *consistunt*.

α 30. III.
 β 27. III.
 γ 41. V

S. & enim *duplus* *arcus* bc *ipsius* $fg \& bc$ *se-*
cetur *bisariam* *in f* *per rectam* ak : Erunt *anguli*
 bak, kac, feg *equales*; ideoq; totus bac *duplus*
anguli feg , γ hoc est, ut *arcus* bc *ad arcum* fg ;
 ita

ita angulus ad
centrum bac
ad alterum fec
g. Quia vero
his ad centrum
est duplis et pro-
portionales sunt



anguli ad peripherias d & h, rursus erit: ut ar-
cus bc ad arcum fg, ita angulus d ad angulum h.
Denique sectores bka, kca, fge sibi mutuo congru-
entes erunt et aequales, ideoque sector bca duplus
erit sectoris fge, id est, sector ad sectorem est, ut 2 ad 1.
arcus bc ad arcum fg.

Corollarium. 1.

Vt angulus ad angulum, sic sector ad sectorem.

Corollarium. 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos;
ita arcus eidem angulo subtensus ad totam peripheriam scilicet 4. rectos
subtendentem.



EUCLIDIS

ELEMENTO- RUM

LIBER VII.

Definitiones.

I.



Nitas est, secundum
quam unumquodque
eorum, quæ sunt, unū
dicitur. Ita secundū u-
nitatem, unam dicimus
ulnam, unū corpus, &c.

*Hæc indivisibilis esse concipitur, ut &
punctum.*

2. Numerus autem ex unitatibus
composita multitudo. Ita 7 ex septem

• unita-

unitatibus seu partibus constat. Quae earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur maiorem. Ita 5 est numeri 20 pars, quia tamen denominationem habet ab eo, per quem metitur numerum, cuius est pars, ut 5 est pars quarta 20, quia metitur illi per 4.

4. Partes autem, cum non metitur. Si nimirum minor maiorem non metiatur, ut 5 numerum 18, tum ipse non pars sed partes dicitur, quia continet quinq; unitates, quae singulae sunt decimae octavae partes numeri 18. Nomen partium est ex illis numeris, per quas communis mensura utrumq; metitur, ut cum 3 metiatur & 6 partes & 9, cuius non est partes, per 2 & 3, senarius dicitur duae tertie partes novenarii Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non qualibet magnitudo alteri aequalis vel pars

pars vel partes est, quia sapè sunt incommensurabiles.

5. Multiplex verò major minoris, cum maiorem metitur minor. *Talis est omnis qui partes habet aliquotas, Ut 9. multiplex est 3.*

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur. *Ut 24.*

7. Impar verò qui bifariam non dividitur; vel qui unitate differt à pari: *Ut 3. 5. 7. Vnde indivisibilem, hic intelligi debere unitatem constat, alias quilibet numerus esset par. Ut 3. haberet dimidium $1\frac{1}{2}$ unitatem cum semisse.*

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem; *Ut 24. est pariter par, quia 4. eum metitur per 6. parem.*

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per imparem: *Ut 24, etiam est pariter impar quia 8. metitur, illum per 3. imparem. Ideoq; multi sunt numeri, qui & pariter pares & pariter imparse sunt.*

10. Impariter verò impar, numerus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem. *Vt 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2. 3. 7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiā intelliguntur numeri, qui per se primi non sunt, modo ut inter se prater unitatem nullam habeant communem mensuram, ut 7. 10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illū 5. & 3. metiuntur. Omnes primi prater binarium sunt impares & omnes pares prater binarium compositi.*

14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis communis mensura, metitur. *Etiā de ijs accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7. 14. 21 quia 7. eos metitur.*

15. Nu-

14. Numerus numerum multiplicatus redicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Ut 4 dicatur multiplicare 5, si quinarium fuerit quater compositus, quot in 4 sunt unitates, &c.* Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. *Ut ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4 ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuò sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuò sese multiplicarint, latera illius dicentur. Possunt enim ita procreati numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cujus latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliquas penè infinita planorum numerorum genera hic in Euclide nullius usus praterimus.

17. Cum

17. Cum verò tres numeri mutuo se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se multiplicarint, latera illius dicentur.

Ut 1, 2, 4 efficiunt 8 numerum solidum, cujus basis bt, latitudo est, longitudo bc 4, cui alia basis similis & æqualis superposita facit, ut totus numerus habeat 8 & altitudo ab duas unitates. Unitas improprie & plerumque & solidus numerus appellari solet, eò quod & ex duobus unitatibus & tribus inter se multiplicatis producatur.



18. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. Ut 16. est numerus quadratus, cujus dispositio refert accuratum quadratum cui gradus est quaternarius.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. Sic & est cubus, cujus dispositio refert

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera sint equalia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: vel certè cū primus secundum, & tertius quartum æquatiter continet, eandemque insuper illius partem vel easdem partes. Ut $\frac{6}{3} \frac{3}{6} \frac{8}{4} \frac{4}{8}$ numeri sunt proportionales, quia primus secundi æquè duplus est, ac tertius quarti, & rursus primus secundi æquè dimidium est ac tertius quarti. Ita 5, 4. 10. 8. sunt proportionales quia primus æquè secundum continet semel cum $\frac{1}{2}$ ac tertius quartum.

21. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera. Cum unus planus numerus possit varijs modis disponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, sed sufficit ut uno queat modo.

Ita

Ita similes sunt planè 6. & 24. quia laterum 2. ad 3. & 4. ad 6. eadem est proportio, etiamsi 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 9. & 24. sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem, quam 4. 3. 2.

22. *Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. Loquitur de parte aliquota, de qua & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti futuri secundum quartam definitionem partium. Ut 6. est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1, 2, 3. simul sumptæ illum restitunt, ita 28 & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt majores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclidæ definitiones addit Clavius ex Campano sequentes.*

23. *Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum producit. Sic 2 metitur 14 per 7 quia 2 multiplicatus per 7 producit 14.*

M

24. Pro.

24. Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet semel aut aliquoties & aliquam insuper illius partem vel partes. *Sic si numerus 24 comparatur cum 6 ea ratione quæ ipsius multiplex est, nimirum quadruplus, dicetur illa habitudo proportio.*

25. Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem nequeunt summi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint; primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundum: & semper deinceps uno amplius, quam diu proportio extiterit. *In 10. def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot-

27. Quotlibet numeris ordine positus, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI, fuerunt declarata. Ex V. verò etiam libro possunt peti argumentorum forma, quæ etiam hoc VI in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi æquales vel multiplices.

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt, æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem eadem pars, vel eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars vel eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur. *Quia unitas toties sumpta, quot in ipso sunt unitates, ipsum numerum constituit.*

Omnis

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem. *Semel enim sumptus numerus quilibet, sibi ipse est aqualis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

IX.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem. *Ut quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. *Ut 3 metiens 12*

M 3 per

per 4, multiplicatus per 4 producat 12 quem metitur.

X.

Numerus quocunque numeros metens, compositum quoque ex ipsis metitur. *Ut quia 3 metitur 6 & 9: Ideoq; 3 metitur 15 ex 6 & 9 compositum.*

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur. *Ut quia 3 metitur 6 qui metitur 5: Ideoq; etiam 3 metitur 12.*

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. *Ut quia 3 metitur 6 15 totum & 9 ablatum, ergo etiam metitur reliquum 6.*

PRO.

PROPOS: I.^{ma}*Theorema 1.*

Si duobus numeris ab, cd inæqualibus propositis, detrahatur semper minor cd de maiore ab alterna quadam detractioe cd ex ab , eb ex cd ; fd ex eb , neque reliquus eb unquam metiatur præcedentem cd , quoad assumpta sit unitas gb ; qui principio propositi sunt numeri, ab & cd primi inter se erunt.

A E . . G . B

C . . . F . . D

H - - -

Si minus, metietur eos numerus, cum communis mensura ut h . Cum itaq; h = metiatur ab & cd ; cd verò metiatur ae , etiam h & β . 11. ax. β ae & eb & reliquum metietur. Cumque eb & γ 12. ax. γ metiatur cf , etiam b & metitur c f & ipsius & reliquum fd . Cum denique fd = metiatur & etiam h metietur β c g & ipsius reliquum & g b unitatem numerus cum totum suam partem.

M. 4

Quod

Quod absurdum. Sunt ergo inter se primi, Quod
erat propositum.

PROPOS: II.

Problema I.

Duobus numeris ab, cd datis non
primis inter se, maximam eorum
communem mensuram f & inve-
nire.

$A \dots\dots\dots E \dots\dots B$

$C \dots\dots E \dots D$

$G \dots\dots$

α ex hypot.
 β 11. ax.
 γ 10. ax.

Detrahatur minor cd ex maiore ab & re-
siduum eb ex minore cd & ita alternatim pro-
cedendo propof. dum perveniatur ad numerum fd ,
qui precedentem eb metiatur. Erit fd commu-
nis mensura maxima. Cum enim $fd =$ metiatur
 eb , & eb ipsum cf etiā fd metietur β cf ; Cumq;
& seipsum, etiam totum cd γ metitur. Meri-
tur autem cd ipsum ac , ergo & fd eundem ac , &
cum etiam eb metiatur, totum quoq; ab , & ita
utrumq; ab, cd metietur.

Quod si quis etiam maximam hanc commu-
nem mensuram esse neget, esto g maior quā
 fd . Cum ergo g metiatur & ab & cd ; cd verō
ipsum

ipsum ae ; itaq; $\&$ eb residuum: $\&$ cum eb metiatur cf , etiam g metietur cf $\&$ residuum fd , major minorem, quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Quod numerus metiens duos numeros etiam communem eorum maximam mensuram metiatur. Si enim totum $\&$ ablatum metiatur, metitur etiam reliquum, quod communis est mensura maxima.

PROPOS: III.

Problema 2.

Tribus numeris abc , datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram d e reperire.

A.....

B.....D....

C.....E..F....

Si d inventa communis mensura a $\&$ b etiam metiatur c erit maxima communis mensura inventa. Si enim major quaedam sit quam d , eadem cum metiatur a , b , c etiam communem mensuram d metietur, major minorem Quod absurdum. Quod si d non metiatur c erunt in a 2. VII. et se compositi. Proinde cum eadem mensura

communis quæ a, b, c metitur, etiam β metiatur d
 p or. 2. VII maximam mensuram a & b , = erit. e mensura
 q. VII. communis ipsius d & c , etiam communis maxima
 mensura numerorum a, b, c . Quia enim e metitur
 c & d , d vero a & b , = metietur etiam e ipsas a
 & b . Ceterum quod maxima communis mensu-
 ra sit e patet, si aliam f esse velimus: Tum enim
 f metiens a & b , A metiretur etiam d eorum com-
 munem mensuram: & cum metiatur d & c , etiam
 horum communem mensuram e metiretur. Non
 igitur esset hac major. Atq; ita e est communis
 mensura maxima trium numerorum a, b, c . Quod
 erat faciendum.

Vnde nascitur Corollarium, quod numerum
 metiens tres numeros, communem etiam illorum
 mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema. 2.

Omnis numerus omnis numeri
 minor a , majoris b , aut pars est, aut
 partes.

A.....

B.....

A.....

B.....

A.....

B.....

C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes majoris b . Si sint compositi, & a metiatur b , a erit ipsius pars. Si a non metiatur b , sed c , a sit communis eorum mensura, quoties a 3. def. VII numerum c continet b , tot partes continere dicetur b numeri a . Sic patet propositum.

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Si numerus a numeri bc pars fuerit, & alter d alterius ef eadem pars: & simul uterque a & d , utriusque bc & ef simul eadem pars erit, quæ unus a unius bc .

A.....

D.....

B..... G..... C E..... H..... F

Quia enim eadem pars est a ipsius bc , quæ d ipsius ef , continebit bc tot a , i.e. bg & gc , quot d i.e. eh , hf continet ef . Itaq; quot numeri a sunt in bc totidem numeri d & a simul sunt in bc , & ef simul.

PROPOS: VI.

Theorema 4.

Si numerus a b numeri c partes fuerit,

rit, & alter *de* alterius *f* eadem partes: & simul uterque utriusque *a b* & *de, c* & *f* simul eadem partes erit, quæ unus unius *ab* ipsius *c*.

A...G...B | D... H.... E
C..... | F.....

• 5. VI.

Cum *equales numero partes habeant ab* & *de*, quæ pars est *a g* ipsius *c* & *gh* ipsius *f*, eadem erunt *a g* & *d h* ipsorum *c* & *f*. Similiter prioribus *equales g b* & *h e*. Itaque, uterque, *ab* & *de* ipsorum *c f* eadem partes erit, quæ unus *a b* unius *c*. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si numerus *ab* numeri *cd* pars fuerit, qualis ablatus *a e* ablati *c f*: etiam reliquus *e b* reliqui *f d* eadem pars erit, qualis totus *ab* totius *cd*.

A...E...B
G...C.....F...D

Si ponatur *eb* numeri *gc* eadem pars, quæ
est *ae*

est ae ipsius cf vel ab ipsius cd erit uterq, ae , eb simul eadem pars utriusq, gc & cf id est, quæ totius ab totius cd . Cum ergo ab sit eadem pars utriusq, gf & cd , erunt numeri æquales, à quibus ablato communi cf , relinquuntur gc & fd æquales. Itaq, eadem pars est eb ipsius fd , quæ ab ipsius cd . Quod erat propositum.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus ab numeri c d partes fuerit, quales ablati ae ablati cf : & reliquus eb reliqui fd eadem partes erit, quales totus ab totius cd .

A E B

C F D

Assumpto gc , cuius eadem partes sit eb , ac a e ipsius cf , erit uterq, ae , eb simul utriusq, cf & gc eadem partes, quæ a e ipsius cf vel ab ipsius cd , ideoq, & ab utriusq, cd & gf eadem partes erit, & fg , cd erunt æquales; communiq, adempto cf , gc & fd æquales erunt. Quapropter eb etiam ipsius fd erit eadem partes quæ totus ab totius cd . Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *bc* pars fuerit, & alter *d* alterius *ef*, eadem pars: & vicissim, quæ pars est, aut partes primus *a* tertij *d*, eadem pars erit, vel eadem partes & secundus *bc* quarti *ef*.

A....

B....G....C

D.....

E.....H.....F

Divisis *bc* & *ef* in partes *bg*, *gc*, & *eh*, *hf* æquales ipsis *a* & *d*, erit multitudo partium numerorum *bc* & *ef* æqualis. Cumq; æquales inter se *bg*, *gc*, sint minores ipsis *eh*, *hf* inter se æqualibus, quia totus *bc* ponitur minor toto *ef*: erit *bg* ipsius *eh* eadem pars aut partes, quæ *gc* ipsius *hf*. Itaq; uterq; *bg*, *gc* simul, id est, *bc* secundus *a* 5. 6. VII utriusq; *eh*, *hf* simul, id est, *ef* quarti eadem pars vel partes erit, quæ *bg* ipsius *eh*, id est, quæ a primi ipsius *d* tertij. Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit, & alter *d e* alterius *f* eadem partes: & vicissim, quæ partes est primus *ab*, tertij *e*, aut pars; eadem partes erit & secundus *c*, quartus *f*; aut pars.

A...G...B

C.....

D.....H.....E

F.....

Divisis *ab* & *d e* in partes *ag*, *gb* & *dh*, *he* numerorum *c* & *f* erit multitudo partium *ab* & *d e* equalis & tam *ag* quam *gb* eadem pars numeri, *c*, quæ tam *dh* quam *he* numeri *f*. Itaq; a vicissim eadem pars vel partes, erit *ag* ipsius *dh* & *gb* ipsius *he*, quæ *c* ipsius *f* est: ac propterea eadem ^{9.VII.} pars vel partes erit *ag* ipsius *dh*, quæ *gb* ipsius *he*, ^{5.v.6.VII} & adeoq; uterq; *ag*, *gb* simul, utriusq; *dh*, *he* simul eadem pars vel partes erit, quæ *ag* ipsius *dh*, id est, quæ *c* ipsius *f*. Quod erat demonstrandum.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus *a b* ad totum *c d*
ita

ita ablatum a e ad ablatum c f: Et reli-
quus eb ad reliquum fd erit, ut totus
 a b ad totum c d.

A.....E.....B

C.....F...D

Quia enim proportionales sunt ab ad cd ut
 20. def. VII. ac ad cf , a erit primus a b secunde cd , ut tertius
 ac quartus cf , vel aequè multiplex vel eadem pars,
 aut partes, vel continet equaliter cū aliqua par-
 te vel partibus. Cum ergo cf eadem pars sit ac ,
 7. v. 8. VII. quæ cd ipsius ab , igitur & reliquus fd reliqui eb
 eadem pars erit, quæ totus cd totius ab . Eritq;
 ut totus ab , ad totum cd ; ita reliquus eb ad reli-
 quum fd .

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Sifint quotcunque numeri pro-
 portionales ut a ad b , ita c ad d & e ad
 f , erit quemadmodum unus a an-
 tecedentium, ad unum consequen-
 tium b ; ita omnes antecedentes a c e
 ad omnes consequentes b d f.

Quia

A....C...E...

B.....D....F.....

Quia enim a vel multiplex est vel eadem pars vel partes a ipsius b quæ c ipsius d & e ipsius f ; b erit & ac simul utrinque, bd simul æquè multiplex, eadem pars vel partes, quæ a ipsius b vel c , & ipsius f , Sic & ac tanquam unus & e simul, amborum bd tanquam unus & f simul æquè multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ a ipsius b . Itaque & omnium a & c simul eadem est proportio ad omnes c, d, f simul, quæ a ad b . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si quatuor numeri proportionales sint: ut a ad b , ita c ad d , & vicissim proportionales erunt, ut a ad b , ita b ad d .

A....C.....

B....D.....

Propter eandem proportionem a ipsius b & c simul d eadem pars aut partes vel æquemultiplex est. β Itaque vicissim a ipsius c & b ipsius d vel

20. def. VI
9. v. 10
VII.

d vel eadem pars aut partes vel æque multiplex erit, = atq; idcō in a ad c & b ad d. . . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri *abc*, & alij *def* illis æquales multitudine, qui binis sumantur & in eadem ratione ut *a ad b*, ita *d ad e* & ut *b ad c*, ita *c ad f*: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt ut *a ad c* ita *d ad f*.

A	D
B	E
C	F

Quia enim est, ut *a ad b*, ita *d ad e*; etiam a 13. VII. vicissim erit ut *a ad d*; ita *b ad e*, & ob p ratio-
 p ex hypot. nem eandem *b ad e*, ut *c ad f*. Itaq; ut *a ad d*, ita
c ad f, & vicissim ut *a ad c*, ita *d ad f*. Quod
 erat propositum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si unicam a numerum b & c quem-
piam metiatur, æquè autem alter d
numeris alterum e & f quendam nu-
merum metiatur: & vicissim æquè
unitas a , tertium numerum d metie-
tur, & secundus b & quartum e & f .

A. D.
B. G. H. C. E. I. K. F.

Diviso bc in unitates bg, gh, hc , & e & f in
partes ei, ik, hf , ipsi d æquales; æqualis sit multi-
tudo unitatum numeri bc , multitudini partium
numeri ef , & a unitas æquè metitur numerum d , 5. VII.
ac bg ipsum ei ; gh , ipsum ik ; & hc ipsum hf .
Ideoq; unitas a erit eadem pars numeri d ,
quæ totus bc , totius ef ; ac proinde a numerum d
& bc numerum e & f æquè metitur. Quod erat
ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo numeri a , & b sese mu-
tuo multiplicantes fecerint d & c sala-
quos; geniti d & c ex ipsis æquales in-
ter fecerunt.

N. 2 Summa

E.

A

B

C D

Sumta unitate e, cum a multiplicans b faciat c, erit c ex b toties compositus, quot in a sunt unitates, & unitas e numerum a, & b numerum c
 15. def. VII. aequè metitur; Ergo & vicissim unitas e numerum b, & a numerum c aequè metitur. Rursus quia b multiplicans a facit d, erit d ex a toties compositus, quot in b sunt unitates, & c aequè metietur b ac a ipsum d. Ideoq; & vicissim c numerum a, & b numerum d aequè metitur. a igitur metitur aequè & d & c, qui proinde sunt inter se æquales. Quod erat propositum.

PROPOS: XVII.

Theorema 15.

Si numerus a duos numeros b & c multiplicans fecerit aliquos d & e; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut b ad c, ita d ad e quam multiplicati.

Assu.

F.

A....

B...C....

D.....E.....

Assumpta unitate f, erit d ex b compositus toties, quoties unitas f est in a: similiterq, toties e compositus ex c, quoties unitas eadem est in eadem a. Itaq, b ipsum d & c ipsum e aequè metitur. Quare b ipsum d & c ipsum e eadem pars est, & a a 20. def. fit, ut b ad d, ita c ad e, & a permusando, ut b ad c, ita d ad e. Quod erat ostendendum.

VII.
p. 13. VII.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si duo numeri a & b quempiam numerum e multiplicantes, fecerint aliquis d & e: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut a ad b, ita d ad e, quam multiplicantes.

A.....B.....

C....

D.....E.....

Cum enim ex a in c fiat d, idem a fiat ex e 16. VII.

N 3

c in

a 17. VII. c in a . Eodem modo cum ex b in c fiat e , idem a fiat
ex c in b . Quoniam igitur idem c multiplicans
propter a & b facit d & e , erit ut a ad b ita d ad e .

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Si quatuor a, b, c, d numeri proportionales fuerint, ut a ad b , ita c ad d , qui ex primo a & quarto d fit numerus e , æqualis erit ei, qui ex secundo b & tertio c fit numero f . Et si qui ex primo a & quarto fit, numerus e æqualis fuerit ei, qui ex secundo b & tertio c fit numero f ; ipsi 4 numeri proportionales erunt ut a ad b , ita c ad d .

A...

B..

C.....

D....

E.....

F.....

G.....

a 17. VII. Fiat g ex a in c . Quia idem a multiplicans
 d & c facit e & g , erit c ad d , ut g ad e . Erat au-

sem a ad b , ut c ad d : Est igitur $\& a$ ad b ut g ad e . Rursus, quia a & b multiplicantes idem c faciunt f & g , erit ut a ad b , ita g ad f . Erat etiam g ad e , ut a ad b . Ergo e & f sunt γ aequales.

Sint jam aequales e & f , Erunt & illi numeri proportionales. Quia enim a multiplicans c & d facit g & e erit, ut c ad d , ita g ad e vel f ipsi aequalem.. Rursus cum a & b multiplicantes c faciant g & f , erit a ad b , ut g ad f . Quare ad eandem proportionem g & f eadem a & b ; c & d erunt eadem. Quod erat ostendendum.

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si tres numeri a, b, c , proportionales fuerint, ut a ad b , ita b ad c , qui sub extremis a & c continetur; aequalis est ei, qui à medio b efficitur: Et si qui sub extremis a & c continetur aequalis fuerit ei, qui à medio b describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt a ut a ad b , ita b ad c .

A.....

B.....D.....

C....

Sumto d aequali b, erit ut b ad c, hoc est, ut a ad b; ita d ad c, eritq, numerus ex a in c æqualis numero ex b in d, hoc est ex b in seipsum.

19. VII. qualis numero ex b in d, hoc est ex b in seipsum.

Sic jam etiam productus ex b in seipsum æqualis producto ex a in c, erunt tres numeri proportionales. Rursum enim assumpto d aequali ipsi b erit ut b ad c ita d ad c. Quia ergo numerus factus ex a primo in c quartum æqualis est facto ex b secundo in d tertium, erunt 4 numeri a b d c proportionales. Sed b est idem cum d. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Minimi numeri ab, cd omnium e & f eandem cum eis rationem habentium, ut a b ad cd, ita c ad f, metiuntur æquè numeros, eandem cum eis rationem habentes, major ab, quidem majorem e, minor verò cd minorem f.

Cum

A...G...B

C...H...D

E.....

F.....

Cum enim sit $a b$ ad $c d$, ut e ad f , etiam a vicissim est $a b$ ad e , ut $c d$ ad f ; & cum $a b$, $c d$ sint minores ipsis e & f , & erit $a b$ ipsius e , & $c d$ ipsius f eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim $a b$ & $c d$, si fieri potest in partes ag , gb & ch , hd quae multitudine erunt aequales, atque ideo ag ipsius e , & ch ipsius f eadem pars. β Erut ergo, ut ag ad e ; ita ch ad f , & vicissim ut ag ad ch , ita e ad f , vel $a b$ ad $c d$: ac proinde numeri ag , ch , minores quam ab , cd eandem quam ab , cd minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, a , b , c & alij ipsis multitudine æquales, d e f , qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; ut a ad b , ita e ad f , & ut b

N ade

ad c, ita d ad e; Eriam ex æqualitate in eadem ratione erunt ut a ad c, ita d ad f.

A.....

D.....

B....

E.....

C.....

F.....

IV
q. 12. VII.

Cum enim sit, ut a ad b ita c ad f, erit minus ex a in f genitus equalis numero ex b in e. Ita ex b in e factus equalis erit ex c in d productus, cum sit, ut b ad c, ita d ad e; adeoque, numerus ex a primo in f quartum productus numero ex c secundo in d tertium genito equalis erit. Quia ut a ad c ita d ad f. Quod ostendendum erat.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Primi inter se numeri a & b minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A..... B....

C----- D----

E---

Sin minus, sint c, d in eadem proportionem

ipf

ipsis a, b minores minimi. Metietur ergo c i. 21. VII.
 ipsum a, & d ipsum b æque; c videlicet ipsum a per
 tot unitates per quot d metitur ipsum b. Quæ uni-
 tates sint in e. Cum ergo c & d metiantur a & 15. VII.
 b per e unitates, & metietur e ipsos a & b per uni-
 tates ipsorum c & d. Idem enim e per c, quod c
 per e efficit. Itaq; a & b contra hypothesein non
 erunt primi, sed compositi.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minima quæ numeri omnium e,
 eandem cum eis rationem habentiū,
 primi inter se sunt.

A B

C

D E

Sin minima, esto communis ipsorum mensura
 c. Itaq; quoties e est in a & b tot erunt unitates
 in d & e, & c multiplicans d & e producit a & 9. 21.
 b. Proinde est a ad b ut d ad e. Adcoq; cum d & 12. VII.
 e partes ipsorum a & b minores sint; a & b non
 sunt minimi in eadem ratione. Quod est contra
 hypothesein.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri a b primi inter se fuerint; quoniam unum a eorum metitur numerus c , ad reliquum b primus erit.

A..... B.....

C.... D----

Sic minus, esto communis eorum mensura d
Quia ergo d metitur c, & ipsum a, etiam d a me-
ritur a. Cumq; idem d metiatur etiam b. Non igitur
a & b erant inter se primi contra hyp-
thesin.

a 11.22.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri a b ad quempiam c primi fuerint; etiam ex illis genitus d ad eundem c primus erit.

A.....B....

C.....

D.....

E----F----

Sic minus esto communis ipsorum mensura c,
qua

a & d metiatur toties, quot in f sunt unitates.
 Itaq; e multiplicans f = producit d . Sic d est fa-
 ctus ex a in b . Ergo cum ex e primo in f quar-
 tus fiat idem numerus d , qui ex a secundo in b p. 19. VII.
 tertius, perit ut e ad a , ita b ad f . Cumq; a & e
 sint primi, & e ponatur metiri ipsum c , erit e ad c p. 25. VII.
 & primus; adeoq; e & a tanquam primi in sua pro-
 portione & erunt minimi. Proinde æque metien-
 tur b & f eandem proportionem habentes, e ipsum
 & a ipsum f ; Et e metiens b & c faciet illos cõ-
 tra hypothesein compositos.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Etiam ex uno a eorum ge-
 nitus c ad reliquum b primus erit.

A B

C

D

Summo d ipsi a equali, erit d ad b primus.
 Quia ergo a & d ad b sunt primi, = erit c geni-
 tus ex a in d , id est, ex a in seipsum ad eundem b
 primus. Similiter ex b in se genitus ostenditur
 primus ad a .

PRO-

PROPOS: XXX.

Theorema. 28.

Si duo numeri ab, bc primi inter se fuerint: Etiam uterque simul ac ad quemlibet illorum ab vel bc primuserit: & si uterque simul ac ad unum aliquem illorum ab primus fuerit; etiam qui in principio, ab & bc , numeri primi inter se erunt.

A B C

D

¶ 13. ax.

Si ac ad bc non est primus, metiatur eorum communis mensura d . Quia ergo d metitur ac totum & ab ablatum, etiam a metitur reliquum bc . Ideoque ab, bc contra hypothesein non sunt primi. Similiter si ac sit primus ad ab , dico etiam ab, bc esse primos inter se. Sin minus mensor communis d metiens ab & bc , etiam ac ex ipsis compositum B metietur. Ideoque contra hypothesein ac ad ab primi non erunt.

¶ 10. ax.

Hinc patet Corollarium: Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositum.

*Pr quia d metitur ab & b c etiam metitur ex il-
lis compositum ac.*

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad o-
mnem numerum *b*, quem non meti-
tur, primus est.

A.....B.....

C---

*Si minus, esto communis mensur C. c er-
go metiens a & b non potest esse idem cum a, qui
non metitur b. Proinde cum alius numerus c me-
tiatur ipsum a, non potest esse primus contra hy-
pothesin,*

PROPOS. XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuò
multiplicantes fecerint aliquem *c*:
genitum *c* autem ex ipsis metiatur a-
liquis primus numerus *d*; is etiam
unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio
metitur.

o

sid

A... B.....

C.....

D... E.....

Si d non metiatur a, erunt d & a primi. Sint autem in c tot unitates, quoties d continetur in c. Itaq; d multiplicans c producit c ut & a multiplicans b, & est ut d ad a, ita b ad e. Cumq;
 a 19. VII. d ad a sit primus, ut supra patet, & erunt d & a in
 b 23. VII. sua proportione minimi, & eque y metientur
 y 11. VII. ipsos b & e. Proinde si d non metitur ipsum a, me-
 titur ipsum b. Idem inferretur de a si d non me-
 titur b.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum nume-
 rum a aliquis numerus metitur.

D.....

B..... C...

Si b metiens a esset primus, pateret pro-
 positum. Sed cum sit compositus, metitur ipsum c,
 qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse
 metiens d a metitur etiam a. Sin compositus, a-
 lius ipsum metiens esset primus. Quia oportet
 tan

a 11. ax.

*Eandem venire ad numerum primum nisi infinite
diminui numeros posse statuerimus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

*Omnis a numerus aut primus est,
aut cum aliquis primus metitur.*

A

*Cum enim omnis numerus sit vel primus ;
vel compositus : compositum autem omnem metitur
aut primus. Igitur omnis numerus primus est,
aut cum primus metitur.* 33. VII.

PROPOS: XXXV.

Problema 3.

*Numeris datis quocunque
a, b, c, reperire minimos omnium, e-
andem rationem habentium cum
ipsis sive sit a ad b, ut b ad c, sive non.*

A..... B..... C.....

D..

E... F.. G....

H-... I-... K-...

L-....

O 2

Sf 2,

a 21. VIII.

B 3. VII.

γ 1.5 VII.

Si a, b, c essent primi, α pateret propositum.

Si non primi, β inveniatur mensur commun maximu

d , qui ipsos a, b, c , metiatur per e, f, g , quas in eadem ratione minimos dico. Cum enim c, f, g

multiplicantes eundem d producant a, b, c , eos in eadem ratione esse oportet. Si autem c, f, g ne-

gentur minimi, ipsis minores in eadem ratione fut h, i, k , qui ipsos a, b, c α equè metientur per l , &

vicissim ipsos a, b, c per h, i, k . Ideoq, l multi-

plicans h, i, k producit abc & l metitur abc per hik . Cum ergò eundem a producant c primus

multiplicans d , quartum & h secundus multi-

plicans l tertium, d erit ut c primus, ad h secundum; ita l tertius, ad d quartum. Sed c maior est quàm b , igitur & l maior est quàm d : adeoq,

l metiente ipsos a, b, c , non erit d communis maxima mensura contra hypothesein.

Hinc patet maximam mensuram quolibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem proportionem minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris a & b datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum c .

A....B.....

C.....

D.....

E-----F-----

Si a & b dati sunt primi, ex ipsorum inter se
multiplicatione factus c est minimus omnium,
quæ a & b metiuntur. Cum enim c factus sit
ex a in b, patet, quod a ipsum c per b, & b ipsum
c per a metiantur. Si quæ autem c neget etiam
minimum, metiantur a & b alium d minorem
ipso c, per e & f. Cum ergo idem d fiat ex a pri- 7. 22.
mo in e quartum, & ex b secundo in f tertium, b e 19. VII.
rit ut a ad b, ita f ad e; adeoque, a & b tanquam 23. VII.
primi k in sua proportionem minimi eque d metien- 21. VII.
tur ipsos f & e. Quoniam vero & multiplicans 17. VII.
b & e facit c & d, erit c addit b ad e: ac pro-
pterea cum b metiatur ipsum e, metietur & c
ipsum d, major minorem. Quod absurdum.

A....B.....

C..D...

E.....

F-----

G----H----

Deinde dati numeri a & b non sint primi: 23. VII.
& c intendantur c, d in eadem proportionem mini-

mi, & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a & quarto d & sit idem e qui ex b secundo in c tertium; eritq, factus e minimus quem a & b metiuntur. Cum enim e ex a in d , & ex b in c sit factus, utrumq, a & b ipsum e metiri constet. Si quis minimum eum esse negaverit, estot minor ipso e , quem metiantur a & b per g & h . Cum ergo idem f fiat ex a primo in g quartum, & b secundo in h tertium, a erit ut a ad b ita h ad g , adeoque c & d minimi in proportionem a ad b , vel h ad g , metientur ipsos h & g aequè. Quoniam vero a multiplicans d & g facit e & f , erit e ad f , ut d ad g ; ac propterea cum d ipsum g metiatur, metietur & e ipsum f , major minorem. Quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri a & b multiplicent minimos c & d eandem rationem habentes, major b minorem c , & minor a maiorem d producitur minimus e , quem illi metiuntur.

PROPOS: XXXVII.

Theorem 33. . . .

Si duo numeri a & b numerum quempiam cd metiantur. Et iam mini-

minus e quem illi metiuntur a, b, c .
undem $c d$ metietur.

A . . . B . . .

C F D

E

*Sin minus, auferatur e ex cd quoties potest,
& relinquatur fd minor ipso e. Cum itaq, tam
a quàm b metiatur ipsum e, & ipsum c f, = me-
tietur etiam tum a tum b ipsum cf: adeoq, a & b
metientes & cd totum & cf ablatum, etiam pme.
sientur reliquum fd. Sed fd est minor, quàm
e. Non igitur e est minimus quem a & b metiun-
tur, contra hypothesin.*

PROPOSITIO XXXIIX.

Problema s.

Tribus numeris abc datis, reperi-
re, quem illi minimum metiantur,
numcrum d .

A . . . B . . . C

D

E

*Invento d minimd, quem a & b metian-
tur, eundem etiam vel metietur c vel non. Si me-
tietur factum est quod jubebatur. Siq, & non sit
minimus, minor ipso fiat e, quem abc metiantur.*

O 4

Quo.

§ 37. VII.

Quoniam igitur a & b metiuntur c , & d est minimus, quem a & b metiuntur, β metiatur quoque ipsum c major minorem. Quod est absurdum,

A... B... C....

D.....

E.....

F.....

§ 11. VII.

Deinde, si C non metiatur ipsum d , a invento e minimo, quem c & d metiantur, erit e numerus minimus, quem a , b , c metiuntur. Cum enim a & b metiantur ipsum d , & d ipsum e , etiam a & b ipsum e metiuntur, metitur autem & c eundem e . Ergo omnes a , b , c ipsum e metiuntur.

Si c non esset minimus, minor ipso sit f quem a , b , c metiantur. Quia igitur a & b ipsum f metiuntur, β metietur etiam eundem f numerus d , adeoque cum c & d metiantur ipsum f minorem, quam e , non erit e minimus, quem c & d metiuntur. Quod est contra hypothesin.

Hinc nascitur Corollarium: Si tres a , b , c , numeri numerum quempiam f metiantur, etiam minimum e , quod illi metiuntur, eundem f metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c ponebantur metiri ipsum f ; etiam c minimum, quem a, b, c metiuntur, eandem f metiri.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum a numerus b quispiam metiatur; ille a , quem metitur, partem habebit à dimetiente b denominatam.

A.....

B....C...

Quoties b metitur a , tot sint in c unitates. $a, 15. VI.$
 Quia ergo b ipsum a metitur per unitates ipsius c , $a, 13. def. VII.$
 idem c metietur a per unitates b . Itaq, unitas toties metitur b , quoties c ipsum a . Sed unitas a metitur b per partem à b denominatam; Ergo & c metitur a per partem à metiente b denominatam. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si numerus a partem b habuerit
 O s quam-

quamlibet; metietur illum a numero c à parte b denominatus.

A

B...C....

15. VII. Cum enim pars b denominetur à c; sit a tem & unitas pars ipsius c, ab eodem c denominata; metietur unitas ipsum c & b ipsam a equi. Vicissim ergo & unitas ipsum b, & c ipsum a metietur.

PROPOSITIO XLII.

Problema 9.

Numerum g reperire, qui minimus cum sit, habeat partes datas ab.

D... A secunda

E... B tertia.

F... C quarta

G

H

38. VII. Numeri à partibus a, b, c denominati sunt d, e, f, qui minimum suum g amectantur. Erat hic minimum partes datas continens. Partes quidem habet: Cum enim d, e, f ipsum g metiantur, a habebit g partes à d, e, f denominatas, hoc est, a, b, c, quæ à d, e, f denominatas. Si autem minimum non sit, est h minor habens easdem partes a, b, c. Ha

ergo cum habeat, & metientur ipsum d, e, f numeri, à partibus illis denominati: adeoque cum h sit minor, non erit g minimus quoniam d, e, f metientur. contra hypothefin.



E U C L I D I S

E L E M E N T O -

R U M

LIBER IIX,

PROPOS: I.

Theorema 1.

SI fuerint quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales, extremi vero a & d ipsorum primi inter se fuerint, ipsi minimi sunt omnium, eandem cum eis rationem habentium.

A.....	C....
B.....	F---
C.....	G----
D.....	H----

*Sin minus, sint in eadem ratione minores
efgh. Quod ergo ipsis a, b, c, d bini & in eadem
ratione sumti sunt alij e, f, g, h multitudine e-
a 14. VII. quales, ex equali = erit, ut a ad d, ita e ad h. Sed
p 23. VII. a & d sunt in sua ratione p minimi quia primi.
v 11. VII. Ergo tam a ipsum e, quam d ipsum h & equè me-
tietur, major minorem. Quod absurdum.*

PROPOS: II.

Problema: I.

Numeros *c* & *d* reperire deinceps
proportionales minimos, quotcun-
que iusserit quispiam in data ratio-
ne *a* ad *b*.

A, 2.	C, 4.	F, 8.	K, 16.
B, 3.	D, 6.	G, 12.	L, 24.
	E, 9.	H, 18.	M, 36.
		I, 27.	N, 54.
			O, 81.

Tres ita inveniuntur. a multiplicans se-
sum & b; productis c & d; b in se tertium f. Quia
ergo ex a in a & b facti sunt c & d: = ergo est, ut
ad b, ita c ad d. Itaque cum d & e sint ex b in a
& b, erit, ut a ad b, ita d ad e. Sunt itaque con-
tinuè proportionales in ratione a ad b. Sed mini-
mi etiam sunt in ratione eadem. Quia enim ex-
remi c & e facti sunt ex e primis a & b in se ipsos
etiam c, e erunt inter se primi & in eadem ratio-
nem minimi. Iam ex a in inventos c, d, e fiant f,
g, h & ex b in ultimum e fiat i. Erunt quatuor
f, g, h, i in ratione data minimi. Quia enim f, g, h,
ex a in c, d, e sunt facti, retinent eandem ratio-
nem; & quia a & b multiplicantes e fecerunt h
& i, erunt etiam h i in ratione a ad b. Sunt ve-
ro etiam minimi ex modo data ratione. Non aliter ex
a in f, g, h, i sunt k, l, m, n; & ex b in ultimum o,
ut sint quinque continuè proportionales in ratione
a, b proposita. Et consequenter quocumque sex, 7,
8 vel 9. &c. continuè proportionales in ratione
proposita possunt inveniri. Hinc sequuntur Corol-
laria.

Corollarium, 1.

Si tres minimi numeri sint con-
tinuè proportionales, extremi erunt
quadrati: Si autem quatuor fuerint,
cubi. Quia extremi illi trium sunt

ex ductu a & b in se: Extremi vero ipsorum quatuor sunt ex ductu radicū a & b in quadratos e & f . Quare f & i necessum est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quotcunque proportionalium, ex huius proportionis sensu inventorum in data ratione minorum, inter se sunt primi. Hoc patet ex multiplicatione, qua numeri proportionales produciuntur ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minorum in eadem ratione. Produciuntur enim ex illorum multiplicatione in alios numeros.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales a, b, c, d , minimi omnium eandem cum eis rationem

nabentium; illorum extremis, d sunt inter se primi.

A, 8.

K, 8.

B, 12.

E, 2.

G, 4.

L, 12.

C, 18.

F, 3.

H, 6.

M, 18.

D, 27.

I, 9.

N, 27.

Inventis duobus in data ratione a ad b vel b ad c , vel c ad d , minimis e, f , & in eadem ratione e ad f tribus minimis g, h, i , & quatuor ejusdem rationis k, l, m, n , & ita si opus foret, etiam quinque vel sex, donec respondeant multitudine initio propositis numeris a, b, c, d . Quoniam ergo & a, b, c, d , & k, l, m, n sunt minimi in data ratione, oportet ut singuli singulis sunt aequales, a ipsi k & d ipsi n . Cumq; k & n sint inter se primi, etiam a ad d inter se primi erunt. 2. IIX.
2. cor. 2.
IIX.

PROPOS: IV.

Problema 2.

Rationibus datis quocunque a ad b, c ad d in minimis numeris, reperire numeros f, e, g deinceps minimos in datis rationibus.

Pro

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.

G, 4. F, 24. E, 20. G, 15.

I ---- K ---- L ----.

- Pro tribus a inveniatur minimus, quem
 236. VII. b secundus & c tertius metiantur: & quoties d
 metitur c , toties a ipsum f , & quoties c eundem c ,
 toties d metiatur g . Erunt f, c, g continue pro-
 portionales in rationibus datis. Quia enim a & b
 ipsos f & c æque metiuntur, per eundem h , etiam
 a & b multiplicantes h producunt f & c ; & h
 238. VII. est, ut a ad b , ita f ad c . Ita cum c & d æque me-
 tiantur ipsos c & g , & erit etiā, ut c ad d , ita c ad
 g ; adeoque f, c, g in rationibus a ad b & c ad d sunt
 continue proportionales.

- Quod si ijdem negentur esse minimi, mini-
 231. VII. res sint i, k, l . Quia ergo a & b sunt minimi,
 in sua ratione, & æque metientur ipsos i & k , in ea-
 dem ratione constitutos consequens b ipsum k ,
 consequentē: Sic etiam c & d ipsos k & l , ante-
 cedens c antecedentem k . Itaque cum b & c me-
 tiantur ipsum k , minimus e quem b & c metiun-
 237. VII. tur, eundem k , major minorem d metietur. Quod
 absurdum.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Deinde

Deinde trium rationum datarum a ad b, c ad d, e ad f quatuor minimi, deinceps proportionales inveniantur. Primo quidem g a minimus, quem b & c metiuntur, & simul h & k ut prius. Quod si c metitur ipsum i, toties etiam f metiatur k, eruntq; h, g, i, k minimi in rationibus datis, eadem fundamentis ut prius.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si c non metiatur i, a invento minimo k, quem c & i metiantur, quoties i ipsum k, g ipsum l & h ipsum m; & quoties e ipsum k, toties f ipsum n metiatur. Erunt m, l, k, n minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.

Deniq; 4 rationum datarum in numeris minimis inveniuntur quinq; directe proportionales, expeditis primum, juxta precedentem modum, quatuor erant facienda; & deniq; cum ratione quarta s ad t fiat, ut antea cum tertia. Ut in exemplis patet, in quorum priore s metitur n; in posteriore non.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 4. S, 3. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

P

PRO

PROPOSITIO V.

Theorema. 3.

Planinumeri a & b rationem inter se habent ex lateribus compositam c ad e , & d ad f ; vel ex c ad f , & d ad e .

A, 24. B, 48.

G, 18.

C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

A, 24. B, 48.

G, 96.

C, 4. D, 6. F, 16. F, 3.

Ex multiplicatione d in e fiat g. Cum ergo d multiplicans c & e producat a, & g, erit a ad g, ut c ad e; & g ad b, ut d ad f, quia c in d & fillos producit. Sunt ergo deinceps proportionales a, g, b in laterum c ad e, & d ad f proportionibus. Sed ratio a ad b componitur ex rationibus a ad g, & g ad b, Ergo & ex rationibus laterum c ad e, & d ad f. Eodem modo ostenditur a ad b ratio composita ex rationibus c ad f, & d ad e.

a. 17. VII.

p. 27. def. VII.

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e , deinceps proportionales, primus, a autem secundum b non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

F, 4. G, 6. H, 9.

Quia enim eadem duorum proximorum sunt rationes, patet, si primus secundum non metiatur, quod nec secundus tertium & hic quartum, & hic quintum possit metiri. Quod verò nec quisquam a 2. IIX; quemquam reliquorum metiatur, ita patet. Sumtis n. f, g, h minimis in a , a d b ratione erit ex aequo, ut a ad c , ita f ad h . Cumq; sit etiam ut a ad b , ita f ad g , Ergo f non ex c & a non metiatur b ; Ergo nec f metiatur g , & proinde non est unitas. Quare cum β 1. IIX. f & h β sint primi, f non metitur h , adeoq; nec a ipsum c . Quod ipsum de reliquis etiam demonstratur.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e

P 2 de.

deinceps proportionales, primus autem a extremum e metiatur; is a etiam metietur secundum b .

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

6.IIX.

Si enim a non metiretur b , neq^{ue} metiretur aliorum quenquam, atq^{ue} ita nec a ipsum e , contra hypothefin.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros a, b , medij c, d continua proportionē ceciderint; quot inter eos medij continua proportionē cadunt numeri: tot & inter alios e, f eandem cum illis habentes rationem medij l, m , continua proportionē cadent.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.

G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.

E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.

G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.

E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.

G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.

E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

Sumtis enim totidem g, h, i, k in ratione ^{a 2. VII.}

a ad c minimis, ex aequo est, ut a ad b, & c ad f, ^{β 23. VII.}

ita g ad k. Cumq; g & k inter se sint primi tan- ^{γ 21. VII.}
quam extremi minimorum & in sua ratione β mi-
nimi, & aequè metietur, g ipsum c, & k ipsum f.

Quoties autē g & k, metiuntur e & f, toties me-
tiantur h & i alios l & m. Itaq; cum g, h, i, k,
per eundem numerum metiantur e, l, m, f, erunt
bi producti ab illo numero d in g, h, i, k, in eadem
cum ipsis ratione. Sunt autem g, h, i, k continuē
proportionales. Ergo & e, l, m, f. Et cum mul- ^{δ 18. VII.}
titudine sint pares numeris a, c, d, b, cadent tot
medij inter cf, quot inter ab.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si duo numeri a, b sint inter se
primi, & inter eos medij c, d, conti-

P 3 nua

nua proportioneecciderint numeri
quot inter eos medij continua pro-
portione cadunt numeri, totidem &
inter utrumque eorum a & b , ac uni-
tatem g , medij e , g , & f continua
proportione cadent,

O, 1.	E, 2.	G, 4.	K, 8.	A, 8.
		H, 6.	L, 12.	C, 12.
	F, 3.	I, 9.	M, 18.	D, 18.
			N, 27.	B, 27.

2.11X.

1.11X.

7.1X.

5.2X.

20.def.

VII.

Invenitur e, f in ratione a ad c minimis, & se-
mantur in eadem ratione tres g, h, i & quatuor
 k, l, m, n vel plures, dum multitudine equales fi-
ant initio positus a, c, d, b . Itaque cum ab sint pri-
mi, & erunt a, c, d, b minimi in ratione e ad f ; sint
verò & k, l, m, n in eadem ratione minimi; erunt
ipsis a, c, d, b equales, singuli singulis. Ceterum
quia e multiplicans seipsum producit g ; multipli-
cans verò ipsum g facit k ; & metietur e ipsum g per
 e , & g ipsum k per eundem e . Metitur verò & o
ipsum e per e . Aequè igitur metitur o ipsum e , &
 e ipsum g , & g ipsum k : Ideoque eadem pars erit o
ipsius e , & e ipsius g , & g ipsius k ; adeoque propor-
tionales deinceps o, e, g, k ; Perinde ut & o, f, i, n .
Cumque & o, e, g, k , & o, f, i, n sint multitudine &
qua-

quales ipsis k, l, m, n vel a, b, c, d cadent tot medij
continue proportionales inter o, k vel o, a , ac inter
 o, n vel b, o , quot inter a, b .

PROPOSITIO X.

Theorema. 8.

Si inter duos numeros a, b & unitatem p continue proportionales ceciderint numerice d, e ; quot inter utrumque ipsorum a vel b , & unitatem p deinceps medij continua proportionione cadunt numeri, totidem & inter ipsos a & b medij, m, n, o continua proportionione cadent,

P	1	C	3	D	9	E	27	A	81.
								M	162
								N	324
								O	648
								B	1296
		F	6	I	18	K	54		
				G	36	L	108		
						H	216		

• Completis spatijs intermedijs i, k & h, m ,
 n & o , ut i fiat ex c in f ; k lex c in i ; g ; m, n, o
ex c in k, l, h . Cum ergo sit ut p ad c , ita c ad d .
& d ad e , & e ad a , & a ad b æque p metietur ipsum • 2.IIX.

P 4

c &

79. ax.

18. VII.

c. & c ipsam d, & sic deinceps. Sed p metitur c per c: Ergo & c ipsum d, & d ipsum e & e ipsum a per c metietur. & Quare c multiplicans seipsum fecit d, multiplicans d fecit e, & multiplicans e fecit a. Idemq₃ de f, g, h, b est statuendum. Proinde, cum c multiplicans c & f, faciat d & i, dero ut c ad f, ita d ad i; itemq₃, ut c ad f, ita i ad g. Sunt ergo dig continuè proportionales in ratione, c ad f. Rursus & e, k, l, h sunt continuè proportionales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l, ejusdem erunt e k l rationis cujus dig, id est, c ad f; itemq₃ & e & f in g fecerint l & h; erit, ut c ad f, ita l ad h. Eodemq₃ modo continuè proportionales ostenduntur a, m, n, o, b in ratione c ad f, quia ex c & e, k, l, h fiunt a, m, n, o, & ex c & f in h, fiunt o & b. Tot itaq₃ medij proportionales inter a & b erunt, quot inter a vel b & unitatem c, quia multitudine conveniunt.

PROPOS: XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum numerorum a & b, unus e medius proportionalis est numerus; & Quadratus a ad Quadratum b duplicatam. habet lateris c ad latus d rationem

Sic

A, 9. E, 21. B, 49.

C, 3. D, 7.

Ex c in d fiat e: & a erit, ut c ad d, ita a ad e & e ad b, adeoq; tres continuè proportionales in ratione c ad d; ceditq; inter a & b medius proportionalis e. Cum verò a ad b habeat rationem, α ^{17. VII} β ^{16. det.} duplicatam ejus, quam a ad e, habet quoq; duplicatam a quadratus ad b quadratum ejus, quam c latus, ad d latus, quod eadem hic sit ratio, quæ ibi.

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum a & b , duo medij proportionales sunt numeri, b, i . & cubus a ad cubum b triplicatam lateris c ad latus d habet rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.

E, 9. G, 12. F, 16.

C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, & h, i, ut in 10. hujus fiebat. Et a erunt e, g, f tres continuè proportionales in ratione c ad d, ut & a, h, i, b, α ^{17. VII}
 ρ ς qua-

16. def.
VII.

quatuor; cadentq; inter cubos a, b duo medij; Cum
verò primus a ad quartum b habeat rationem tri-
plicatam ejus quam primus a ad h secundum; b
bebit etiam a cubus, ad b cubum rationem triplicatam,
laterum c ad d , cum a ad b sit, ut c ad d .

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Si sint quolibet numeri a, b, c deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, faciat aliquos d, e, f ; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri a, b, c , primùm positi multiplicantes jam factos d, e, f , fecerint aliquos g, h, i ; ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

A, 2. B, 4. C, 8.					
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.					
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. K, 128. S, 256 I, 512.					
X, 16 T, 32 V, 64 L, 128 U, 256 T, 512 Z, 1024 22048 m, 4096					

Ex a in b fiat n, & o ex b in c: Fiant item
 p, q ex a in n, e; & r, s, ex b in o, f: Item t, u, x,
 ex a in p, q, h; & y, z, a ex b in r, s, i. Cum ergo
 multiplicans seipsum & b fecerit a & n; = Erit,
 ut a ad b, ita d ad n: It a, cum n & e sint ex b in
 e & a; Erit etiam, ut a ad b, ita n ad e; & ita d,
 n, e continuè proportionales sunt in ratione a ad
 o. Proportionales etiam sunt continuè e, o, f, quia
 ex b in se & in c fieret e & o; ex c in se & in b
 sunt o & f, = ejusdem rationis cum b, c, id est, cum
 a, b. Quoniam ergo d, n, e & e, o, f sunt in eadem
 ratione continuè proportionales, ex aequo erit, ut d
 ad e; ita e ad f; & ita d, e, f continuè propor-
 tionales erunt. Deinde in eadem ratione conti-
 nuè proportionales sunt g, p, q, h, cum g, p, q fiant
 ex a in d, n, e, & ex a, b in e fiant q & h: Simili-
 ter & h, r, s, i, cum h, r, s fiant ex b in e, o, f, & s,
 ex b, c in f. Est ergo ex aequo ut g ad h, ita
 n ad i.

Eodemq; modo k, l, m continuè demonstran-
 tur proportionales.

PROPOS: XIV.

Theorema 12.

Si Quadratus numerus a Qua-
 dra-

dratum numerum b metiatur: & latus unius a metietur latus d , alterius b . Et, si unius Quadrati a latus c metiatur latus d alterius b ; & Quadratus a Quadratum b metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.

C, 2. D, 6.

¶ 11. IIX.
¶ 7. IIX.

Fiat e ex e in d . a Erunt a , e , b continuæ proportionales in ratione c ad d . Cumq; a primo b tertium metiatur, β metietur etiam c median. Ideoq; cum fit ut a ad e , ita c ad d , β metietur etiam latus c latus d . Rursus, si latus c metiatur latus d , metietur etiam quadratus a quadrato b , cum in eadem ratione continuæ a proportionales existentibus a , e , b ; a ipsum e aequè β metiatur, atq; c ipsum d , & ita etiam a quadratus b quadratum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus a , eubum numerum b metiatur; & latus c unius metietur latus d alterius b . Et si latus c unius a cubi latus d alterius b meti-

metiatur; & cubus a cubum b metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.

E, 4. G, 12. F, 36.

C, 2. D, 6.

Completis iterum spatijs $e, g, f,$ & h, i ut in α 12. IIX.
 o , huius factum est. α Erunt & e, g, f & a, h, i , β 7. IIX.
 & continuè proportionales. Cumq; a primus me-
 tiatur extremum b , β metietur etiam secundum
 h & propter eandem rationem latus c quoq; d la-
 tus metietur. Rursus si c latus metiatur latus d ,
 metietur etiam cubus a cubum b . Continuè enim
 existentibus proportionalibus a, h, i, b in ratione
 c ad d , aequè metietur c ipsum d , & a ipsum h , &
 sic etiam extremum b , cubus cubum.

PROPOS: XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus a Quadra-
 rum numerum b non metiatur; ne-
 que latus c unius a metietur alteri-
 us b latus d . Et si latus βc unius a
 quadrati non metiatur latus d alte-
 rius

us b : neque quadratus a quadratum b metietur.

A, 16. B, 81.

C, 4. D, 9.

¶ 14. IIX.

Si latus metiretur latus d , etiam a quadratus c , a metiretur quadratum b contra hypotesin. Et contra, si quadratus a , quadratum b metiretur, etiam latus d sitidem contra hypotesin.

PROPOS: XVII.

Si cubus numerus a cubum numerum b non metiatur: neq; latus c unius a latus d alterius b metietur. Et si latus c cubi unius a latus d alterius b non metiatur: neq; cubus a cubum b metietur.

A, 8. B, 27.

C, 2. D, 3.

¶ 15. IIX.

Si enim latus c , metiretur latus d , etiam a cubus c cubum b contra hypotesin. Et contra, si cubus a cubum b metiretur; etiam latus c latus d metiretur, sitidem contra hypotesin.

PROPOS: XIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorū numerorum a & b unusquodque proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris ho-

mo-

alogic vel d ad latus homologum e
et fractionem.

A, 12. G, 18. B, 27.

C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

Fiat g ex d in e . Cum sit ut c ad d , ita e ad f ;
ut permutando c ad e , ut d ad f . Cum ergo d mul-
tiplicans c & e producat a & g , erit a ad g , ut c
ad e . Sic etiam erit g ad b , ut d ad f , quia e multi-
plicans d & f producit g , & b . Itaque, a , g , b sunt
proportionales in rationibus c ad e & d ad f , adeoque,
inter a & b cadit g medius proportionalis. Et quia
proportionales sunt a , g , b , habebit a ad b rationem
multiplicatam eius, quam a ad g , i. e. c ad e vel d ad
Itaque, planus a ad planum b duplicatam habet
tionem laterum homologorum.

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Duorum similium solidorum nume-
rorum a , b duo m , n medij proportionales
sunt numeri: Et solidus a ad solidum b tri-
plicatam habet rationem lateris homologi
vel d vel e ad latus homologum f vel g , vel h .

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.

I, 6. L, 12. K, 24.

C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Fiat i ex c in d , & k ex f in g , & l ex d in f . &
 n ex e , h in l . Cum ipsis f , g , h proportiona-
les sint c , d , e , etiam permutando proportionales
sunt, ut c ad f , ita d ad g & e ad h . Et quia
multiplicans c & f producit i & l , erit, ut c
ad f

p. 18. VII.

y 26. def.
VII.

ad f, ita i ad l: & ut d ad g, ita l ad k; quia l & k sunt ex f in d, g; adeoq; i, l, k sunt continuè proportionales in ratione c ad f, vel d ad g. Quia verò a solidus factus est ex c, d, e lateribus, & i ex c in d, sit, ut e multiplicans i, faciat a. It a cum b solidus sit factus ex f, g, h lateribus, k verò ex f in g, sit ut b solidum faciat, h multiplicans k. Quare cum e multiplicans i, l fecerit a, m; erit a ad m ut i ad l, id est, ut c ad f, vel d ad g, vel e ad h; Sit etiam n ad b, ut l ad k, id est, ut c ad f; cum b multiplicans l, k, fecerit n, b. Est autem & m ad n, ut e ad h, quod e, h multiplicantes l fecerint m, n. Sunt ergò a, m, n, b continuè proportionales in ratione c ad f; adeoq; inter a b similis solidos cadunt medij proportionales m, n. Et quia a, m, n, b sunt 4. continuè proportionales, & habebit solidus a ad solidum b similem rationem ejus, quam a ad m, id est, c ad f, d ad g, & e ad h, id est, triplicatam ex ratione c ad f laterum homologorum.

PROPOSITIO XX.

2
Theorema 18.

Si inter duos a, b numeros unus medius proportionalis cadat numerus c; similes plani erunt illi numeri a & b.

A, 18. C, 24. B, 32.

D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

Summi minimi d, e in ratione a, c metiuntur ^{21. VII.} a que ipsos a, c per f , & ipsos c, b per g . Itaq; f multiplicans d, e producit a, c , & g eosdem d, e ^{9. IX.} multiplicans producit c, b . Itaq; cum e multiplicans f, g faciat c, b , & erit, ut c ad b , id est, ut d ad e , ita f ad g ; & permutando, ut d ad f , ita e ad g . Cum vero a fiat ex d in f , erit planus, cuius latera d & f , sunt proportionalia lateribus c & g , ex quibus fit b planus. Erunt itaq; a, b plani similes.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros a, b duo medij proportionales cadant numeri c, d ; similes solidi sunt illi numeri a, b .

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.

E, 1. F, 3. G, 9.

H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

Cum a sunt in tribus minimis e, f, g in ratione a, c, d, b , inter e & g cadat medius proportio-

10. IIX.

alio f , a erunt e & g plani similes, quarum latera sint h, i, k, l . Et quia e, f, g sunt in ratione datissimi, aequè metiuntur ipsos a, c, d rationis eodem per m ; & eodem modo e, f, g minimi ipsos d, b , ejusdem rationis metiuntur per n ; ita ut m & n multiplicantes e, f, g producant a, c, d & d, b . Facti autem sunt e & f ex suorum laterum h, i , & k, l , multiplicatione mutua. Ergo a, b producuntur ex multiplicatione mutua h, i , & k, l, n , & sunt solidi. Quia verò ex m, n fiunt c, d , ut supra patet, erit c ad d , ut m ad n . Sed c ad d defl, ut e ad f , (quia n multiplicans efficit c ad d) id est, ut h ad k , vel i ad l . Inter planos enim similes e, g , est medius proportionalis f ratione laterum homologorum h, k vel i, l : igitur h ad k & i ad l erunt, ut m ad n ; & permutati h ad i , ut k ad l ; & i ad m , ut l , ad n . Sunt ergo latera h, i, k proportionalia lateribus k, l, n ; & propterea similes a, b solidi.

18. VII.

17. VII.

19. IIX.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri a, b, c deinceps sunt proportionales, primus a , autem fit quadratus; & tertius c quadratus erit

- A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
F, 1.

San

Sumto d latere quadrati a, cum d in se fiat a, erunt d & a ab unitate continuè proportionales, & convertendo a ad d, ut d ad f. Cum ergo inter a & c cadant 10: medij, quot inter eundem a & f cadent etiam inter c & f tot; videlicet e. Cum itaq; f, e, c continuè proportionales sint, producet c ex c in se, eritq; quadratus.

a 9. IIX.
p 10. IIX.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri a, b, c, d sint deinceps proportionales, primus a autem sit cubus; Et quartus d cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.

F, 16. H, 100.

E, 4. H, 10.

I, 1.

Sumto e latere cubi a, ex e in se fiat f; & ex in e, cubus a. Quia ergo in se facit f, & in f facit a, a erunt e f a ab unitate continuè proportionales; & convertendo a, f, e, i continuè proportionales. Cum ergo inter eundem a & d, cadant 10: medij continuè proportionales, quot inter a & f cadent inter d & i totidem. Quare cum i, c, d sint continuè proportionales, fiet h ex g in se, & d ex g in h, eritq; d cubus.

a 9. IIX.

p 10. IIX.

PROPOS: XXIV:

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habebant inter se, ut a ad b , quam Quadratus numerus ad Quadratum numeri ita c ad d , primus a autem Quadratus, & secundus b Quadratus erit.

A, 36. F, 48. B, 64.

C, 9 E, 12. D, 16.

a 71. IIX.

b 8. IIX.

c 22. IIX.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d , inter q et d cadat medius proportionalis, etiam inter a et b cadet medius f . Cum ergo a , f , b sint continuæ proportionales, & a primus Quadratus, etiam tertius Quadratus c erit.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant a ad b , quam cubus numerus ad cubum numerum c ad d , primus autem sit cubus, & secundus b cubus erit.

A, 8

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d ; inter g, c & a 12. IIX.
cadant duo medij proportionales, c & f , & a 8. IIX.
ne etiam g, h inter a & b . Cum ergo a, g, h , g^2, h^2 IIX.
sint continue proportionales, & a primus cubus
erit & b quartus cubus.

Corollarium 1.

Proportio cuiusvis numeri Quadra-
ad quemlibet non quadratum, non
otest reperiri in duobus numeris
quadratis. Quia ex 24. huius, ipsi
uoq. Quadrati essent.

Corollarium 2.

Nec inter cubum & non cubum
adit ratio cuborum; ob eandem cau-
sam ex 25.

PROPOSITIO XXVI

Theorema 24.

Similes plani numeri inter se ra-
tionem habent a ad b , quam quadra-
us numerus ad quadratum numeru
ad a ad f .

Q 3.

A, 20

A, 20. C, 30. B, 45.

D, 4. E, 6. F, 9.

Cum a & b sint plani similes, = cadit inter
 eos unus medius proportionalis c . Sunt ita ergo
 a 18. IIX. tribus minimis in a, c, b ratione continua a, c erunt
 p 1. cor. 2. extremi d, f quadrati. Quare cum sit ex equo
 IIX. a ad b , ut d ad f , patet a ad b esse ut d quadratum
 ad f quadratum.

PROPOS: XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri a ad b rationem habent inter se, quam cubus
 numerus ad cubum numerum e ad b .

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.

E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

Cum a & b sint solidi similes, = cadunt inter
 eos duo medij proportionales c, d . Sunt ita ergo quatuor
 a 19. IIX. minimis e, f, g, h in ratione continua $a, c, d,$
 p 1. cor. 2. b , β erunt extremi e, h cubi. Quare cum sit ex equo
 IIX. a ad b , ut e ad h patet, h ad b esse, ut e cubus
 ad h cubum Quod erat propositum.

EUCLIDIS

ELEMENTO- RUM

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

SI duo similes plani numeri a, b multiplicantes se mutuo faciant quēdam c ; productus c erit Quadratus.

A, 6. E, 54.

D, 36. E, 108. C, 324.

Amultiplicans seipsum faciat d quadratum. a 17. VII.
Cumq, itaq, ex a in a & b fiant d & ca. erit,
ut a ad b. ita d ad c. Sed inter a & b

Q. 1. 64

13. IIX. *cei planos similes unus β cadit medius proportiona-*
 2. 8. IIX. *lis. Ergo $\&$ inter d $\&$ c unus γ cadit, nempe E .*
 7. 22. IIX. *Itaq, cū tres d, e, c sint continuē proportionales, $\&$*
primus sit quadratus, d erit etiam c tertius. qua-
dratus.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duo numeri a, b se mutuò multiplicantes, faciant Quadratum $\&$ similes plani erunt a, b .

A, 6.

B, 54.

D, 36.

C, 324.

17. VII.

11. IIX.

8. IIX.

20. IIX.

A multiplicans seipsum faciat d quadratum.
Erit, ut a ad b , ita d ad c , quia a multiplicans a $\&$
 b , produxit d $\&$ c . Sed inter d, c quadratos ca-
dit unus medius proportionalis: Ergo $\&$ inter a, b
 γ cadit unus, ac propterea a, b d erunt plani simi-
les.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si cubus numerus a seipsum multiplicans, procreet aliquem b ; productus b cubus erit.

A, 8.

A, 8.

E, 16.

D, 4.

F, 32.

C, 2.

B, 64.

I, 1.

Sit Clatus cubi a, ex quo in se fiat d, & ex
 c in d ipse cubus a. Itaq, ^a metietur c ipsum d per
 c. Sed & unitas i eundem c ^a metietur per c. Ergo
 unitas ipsius c est eadem pars, quæ c ipsius d. ^a 7. ax.
 re ut unitas ad c, ita c ad d. Rursus etiam d ^a 5. ax.
 metietur a per c, quod c multiplicans d fecit a. Sed ^a 20. def.
 quia etiam c metiebatur d per c; Ergo d ipsius a
 erit eadem pars, quæ c ipsius d. ^a 7. ax.
 & Ergo est ut c
 ad d, ita d ad a. Sed ut est c ad d, ita erat u-
 nitas ad c. Ideoq, ut unitas ad c ita c ad d & d
 ad a: adeoq, inter unitatem & a cadunt duo me-
 dy proportionales.

Ceterum quia a metitur b per a; quod a in
 se producebat b, & unitas eundem a per a metitur,
 erit unitas eadem pars ipsius a, quæ a ipsius b; &
 sic, ut i ad a, ita a ad b. Sed cum inter i & a
 cadant duo medij proportionales, ergo totidem in-
 ter a & b, cadent f & c. Cum itaq, inter qua-
 tuor a, c, f, b continuè proportionales primus sit cu-
 bus, erit etiam quartus b cubus. ^a 8. IIX.
^a 23. IIX.

PROPOS: IV.

Theorema.

Q s

Si-

EUCLIDIS ELEM: PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si cubus numerus a cubum numerum b multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

*A in se perducatur d. Quia ergo ex a in a & b
fiunt d & c, erit ut a ad b, ita d ad c. Sed inter
a & b cubos & cadunt duo medij proportionales :
Ergo & inter d & c. Quare cum d primus & se
cubus, & c quartus cubus erit.*

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si cubus numerus a numerum quendam b multiplicans faciat cubum c ; & multiplicatus b cubus erit.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

*A in se producat d, = cubum. Cum ergo ex a
in a*

a & b fiant d & c , & erit, ut a ad b , ita d ad c . β . 17. VII.
 sed inter d, c , cubos cadunt duo medij proportiona- γ 12. IIX.
 es. δ Ergo & totidem inter a & b ; adeoque a exi- δ 8. IIX.
 tente cubo etiam b cubus erit. δ 23. IIX.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si numerus a seipsum multipli-
 cans, faciat cubum b ; Et ipse a cubus
 erit.

A, 8. B, 64. C, 512.

Ex a in b fiat c , qui ex definitione est cubus. α 5. IIX.

Quoniam ergo b cubus multiplicans a , faciat c , a e-
 rit & a cubus.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus a aliquē
 b multiplicans, quempiam c faciat:
 factus c solidus erit.

A, 6. B, 7. C, 42.

D, 2. E, 3.

Quia enim a est solidus, a metitur ipsum a .
 lūm præter unitatem, usque per e ; Ergo & d in e β pro- α 13. def.
 ducit a . Cum ergo b in a faciat c , erit c ex trium γ VII.
 d, e, b , seu laterum multiplicatione mutua ortus, β 9. ax.
 adeoque, ex definitione solidi.

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quocunque numeri
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$, deinceps pro-
portionales fuerint: Tertius b qui-
dem ab unitate Quadratus est, & unū
intermittentes d, f, h, k, m , omnes:
Quartus c autem est cubus, & duos
intermittentes f, i, m , omnes: Septi-
mus f verò cubus simul & Quadra-
tus, & quinque intermittentes m o-
mnes.

Vn. I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.
G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049.
L, 177147. M, 531441.

Cum enim unitas a metiatur a per a , metie-
tur quilibet sequentem per ipsum a , quia continuè
proportionales sunt: β Ideoq; a multiplicans seipsum
producit b quadratum. Cumq; b, c, d sint conti-
nuè proportionales, & b Quadratus, etiam d erit
Quadratus: ita & trium sequentium proportiona-
lium tertius erit Quadratus, & iterum h, k, m
& c . Rursus cum a in se faciat b , & idē a in b faciat
 c , erit

α 5. ax.

β 9. ax.

γ 22. IIX.

c, erit ex definitione c cubus. Ergo cum a. proportionalium c, d, e, f primus c sit cubus d erit & quartus f cubus. Denique cum septimus ab unitate f & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissus quinq; g, h, i, k, l; m erit & Quadratus & cubus. d 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d, e, f, deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatē a sit Quadratus; & reliqui omnes b, c, d, e, f, Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem a sit cubus, & reliqui omnes b, c, d, e, f, cubi erunt.

A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024.
1. Unitas. F, 4096.

A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768.
F, 262144.

Quia enim b tertius ab unitate a est Quadratus, & unum intermittentes, omnes d, f, suntq; a 8 IX.
a, b, c continue proportionales, & a primus quadratus, a 22. IIX.
dratus, b erit & c Quadratus. Eodem modo in-

ter c, d, e proportionales c existente quadrato, etiam c quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si a primus ab unitate sit cubus: Quia c ab unitate quartus a est cubus & duo intermittentes omnes, etiam f erit cubus. Cumq; unitas metiatur a per a , & a cubus metiatur b per seipsum, γ erit & b cubus. Cum itē a, b, c, d sit
 3. IX.
 23. II. X. 4. continue proportionales, & a primus sit cubus, d erit & d quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continuis proportionalibus, ut b, c, d, e . Quia enim b est cubus. Ergo & c & e .

PROPOS: X.

Theorema 10.

Si ab unitate quocunque numeri ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$) deinceps proportionales fuerint, qui a verò post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium b ab unitate & unum intermittentes omnes d, f, h, k, m . At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartum c ab unitate, & duos intermittentes omnes f, i, m .

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

a. *Unitas.*

G, 128. H, 256.

I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus, esto c. Quoniam est, ut a ad h, ita b ad c; conver- tendo c ad b erit, ut b ad a. Sed c est quadratus ex hypothesis. Ergo & a. Quod absurdum. Quia ponitur a 12. 11X. non quadratus. Idē etiā de ceteris concludendū. Ita, 123. 11X. si quis aliū, ut d præter c ponat cubum, quia a, b, c, d sunt continuē proportionales, conversim proportionales erunt. Itaq, cum d primus sit cubus, etiam a quartus cubus β erit. Quod est contr. hypothesis

PROPOSITIO XI.

Theorema. 11.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d, e, f, deinceps proportionales fuerint, minor b majorem f, metitur per aliquem d eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

1. *Vn.* A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 242.

F, 729.

Cū ex equo sit ut b ad f, ita unitas ad d, quod 1. a, b, c, d, e, f, cū 5. numeris & unitate abcd eandē

rati-

a 20. def. VII. rationem habeant, a aequè etiam Unitas metietur
 numerum d , atq; b ipsum f . Sed a unitas metitur
 b 5. ax. per b , ergò & b ipsum f per d metitur. Eodem
 modo d metitur ipsum e pro a , quod fit, ut d a
 e , ita unitas ad a . Sic & a ipsum f per e metietur,
 cuius fit ut a ad f , ita unitas ad e . Et ita de cæteri.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum d metiuntur, iidem & cum a , qui unitati proximus est, metientur.

1. Vn. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

Sin minus. Si primus numerus e metiens quidem d , nō a metitur erūt a & e primi; & cum a
 a 31. VII. multiplicans seipsum producat b , β erunt & e
 β 27. VII. b inter se primi; γ itemq; γ & c , cum c ex a in
 γ 26. VII. b primis ad numerum e fiat. γ adeoq; γ & d
 inter se erunt primi, cum d ex a in c fiat. Quod est
 contra hypothesin, quæ e ipsum d metiri ponebat.

PRO.

PROPOSITIO XIII.

Theorema. 13.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint, qui verò, post unitatem, primus sit; Maximum d nullus alius metietur, præter eos a, b, c qui sunt in quæris proportionalibus.

1. Vn. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.

H-----G-----F-----E----

Metiatur ipsum d , diversus ab a, b, c , qui sit e ; erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum d , a metietur etiam a 12. IX. primum. Quod absurdum. Cum ergo e non sit β 33. VII. primus, esto compositus, β metiens ipsum primus a 71. IX. alius præter a nullus erit. Nam cum e metiatur extremum d , quilibet primus metiens e , γ metietur e & d , metiens verò d maximam, a metitur & a unitati proximum; proinde duo primi se mutuo metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum e primus, erit ipse a .

Porro metiatur a ipsum e per f . Itaq; a 17. VII. multiplicans f & c binos, faciet binos e & d ; d'eritq; e ad d , ut f ad c . Quare si e metitur d , etiam f

R

meti-

metitur, & adeoq; f eodem modo, ut e , compos-
tus erit, quem solus a metitur. Metiatur ergo
ipsum f per g . Ideoq; a binos g & b multiplicans
producet f & c . Deniq; f ad c , ut g ad b : Sed f me-
tetur ipsum c , ergo & g metitur b . Si jam g &
set primus metiens b , metiretur etiam a . Quod ab-
surdum. Nullus ergo alius metitur g præter
Deniq; metiatur a ipsum g per h . Binus ergo
& h multiplicans a producet d & g , d eritq; g ad
 b , ut h ad a . Sed g metitur ipsum b . Ergo & h
ipsum a primum. Itaq; h æqualis est ipsi a . Cum
autem ex h & g producaturs idem b , qui ex a &
seipsum, erit a medius proportionalis inter h & g :
cumq; a metiatur g , etiam h metietur a , primum
primum. Quod absurdum. Itaq; præter propor-
tionales a, b, c , nullus alius extremum d metitur.

20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum a , primi
numeri b, c, d metiantur: nullus al-
lius primus numerus illum metie-
tur, præter eos b, c, d qui à principio
metiebantur.

A.....

B...C...D.....

E---F----

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f .
 dem ergo e multiplicans f a facit a . Ideoq, singuli a 9. 22. 2.
 a, c, d alterum illorum e vel f metiuntur. Non 6 31. VII.
 ipsum e primum; ergo ipsum f minorem ipso a .
 Quod contra hypothesein.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Sitres numeri a, b, c deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, duo quilibet a, b simul, bc, a, c numeri ad reliquum c, a, b primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e in eadem cum illis proportionibus minimis, patet d in seipsum & e pro- a 2. IIX.
 ducere a & b , & e in se facere c . Cum itaq, d & e in sua proportionibus minimi, etiam b sint primi
 erit & uterque d, e simul ad quemlibet illo- 24. VII.
 rum primus. Itaque cum tam compositus, ex d, e 30. VII.
 R a quam

- quā ipse d ad e primus sit, d erit quoq, ex d , e tam-
 216. VII. quam uno factus numerus in d ad eundem: e pri-
 mus. Qui autem sit ex d e tanquam uno in d e -
 3. II. qualis est & numero a facto ex d in se & numero b
 217. VII. facto ex d in e . Igitur a b compositi primi sunt
 ad e , & ita ad e , qui sit ex e in se ipsum.

B, 12. C, 16.

A, 9.

D, 3. E, 4.

Deinde quia uterq, d e simul, γ est primus
 ad quemlibet ipsorum d , e ; sit, ut numerus ex d e
 tanquam uno, factus in e , d primus sit ad d (con-
 tam ex d e compositus, quā ipse e primus sit ad d)
 Sed qui sit ex d e , tanquam uno in e equalis est &
 numero c facto ex e in se; & b facto ex d in e . Ergi
 & b c simul compositi ad d primi sunt, & adeoq, ad
 ipsum a , qui ex d in se est factus; primi sunt b & c
 simul compositi.

A, 9. C, 16.

B, 12.

D, 3. E, 4.

Deniq, quia, ut antea uterq, d & e simul ad
 quemlibet ipsorum γ primus est; & è contrario qui-
 libet ipsorum d , e primus est ad compositum ex d , e ;
 d erit

¶ erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e
 Primus, & sic ex d in e factus ad eum, qui ex d e
 tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d
 e tanquam uno in se equalis est eis, qui fiunt ex d ^{4. 11.}
 & e in seipso, una cum eo qui ex d in e bñ. Quoni-
 am itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex
 ijs, qui fiunt ex d & e in seipso; & ex eo, qui fit
 ex d in e , atq; is qui fit d in e primi sunt ad ali-
 quam ipsorum, eum videlicet, qui fit ex d in e , ut
 ostensum est. A erunt etiam duo illi, compositus ex ijs ^{3. 7. VII.}
 qui fiunt ex d & e in seipso & ex eo, qui fit ex d
 in e , atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rur-
 sus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs,
 qui fit ex d & e in seipso, atq; is, qui fit ex d in e
 ad aliquem ipsorum, eum nimirum, qui fit ex d in
 e , primi sunt ostensi; & erunt etiam duo illi, compo-
 situs ex ijs, qui fiunt ex d & e in seipso, atq; is, qui
 fit ex d in e , inter se primi. Itaq; cum ex d & e in
 seipso fiunt a & c, item ex d in e fiat b; erunt a &
 c simul compositi primi ad b.

PROPOS.: XVI

Theorema 16.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Non erit, ut primus ad
 secundum b, ita secundus b ad alium
 quendam c.

R 3

Eslo.

A.....

B.....

C.....

*Est, si potest tertius proportionalis c. Cum
 23. VII. ergo a & b sint primi, & in sua ratione minimi;
 11. VII. ipsi & aequè metientur b & c numeros in eadem ra-
 tione; a ipsum b, & b ipsum c. Cumq; a etiam me-
 tiatur seipsum. Duos ergo a & b inter se primos
 metietur numerus a. Quod absurdum.*

PROPOS: XVII.

Theorema 17.

*Si fuerint quotcunque numeri
 a, b, c, d, deinceps proportionales, ex-
 tremi autem ipsorum a, d primi in-
 ter se sint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b, ita ultimus d, ad alium
 quempiam e.*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E - - -

*Est, si potest, ut a ad b, ita d ad e. Erit er-
 23. VII. go permutando, ut a ad d, ita b ad e: sunt au-
 11. VII. tem a, d primi sua rationis minimi: igitur & a-
 11. 27. què metientur, ipsos b e. Est verò, ut a ad b, ita b
 ad c. Si ergo a metitur b, etiam b & metitur c.
 Quia item est, ut b ad c, ita c ad d; cum b me-
 tiatur*

fiatur c etiam c metietur d: Quare a metiens c
metietur etiam d. Metietur vero & a seipsum. Er-
gò metitur a, d inter se primos. Quod absurdum.

PROPOSITIO XIIX.

Problema I.

Duobus numeris a, b datis, con-
siderare, an ipsis possit tertius pro-
portionalis inveniri.

A, 4.

B, 7.

Si a & b dati sint primi, non potest reperi-
ri tertius proportionalis. Si non primi, tum b mul-
tiplicans seipsum faciet c, Aut ergò a metitur c,
per d, & d est ipse tertius proportionalis: Cum e-
nim a metitur c per d, & fiet c ex a in d. Fit autem
idem c ex b in b: Ergò qui sub extremis a, d con-
tinetur c factò ex b in seipsum medio equalis est.
Quare erit ut a ad b, ita b ad d.

A, 4. B, 6. C, 36.

Aut a non metitur c, & tum nequit reperiri
tertius proportionalis. Si verò ponatur d tertius.
Quia est, ut a ad b, ita b ad d, ideo numerus sub ex-
tremis a, d contentus, equalis est ei, qui sit a medio
b, id est, c. Cum itaq; c ex a in d fiat, metietur a
seipsum c per d, quod absurdum. Quia ponebatur
non metiri.

A, 6. B, 4. D ---- C, 16.

R 4

PRO-

a 20. def. *rationem habeant, a quæ etiam Unitas metietur*
 VII. *numerus d, atq; b ipsum f. Sed a unitas metitur d*
 p 5. ax. *per b, ergo & b ipsum f per d metitur. Eodem*
modo d metitur ipsum e pro a, quod fit, ut d ad
e, ita unitas ad a. Sic & a ipsum f per e metietur,
cum sit ut a ad f, ita unitas ad e. Et ita de cæteris.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri *a, b, c, d*, deinceps proportionales fuerint; quicumque primorum numerorum ultimum *d* metiuntur, iidem & cum *a*, qui unitati proximus est, metientur.

1. Vn. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

Sin minus. Si primus numerus *e* metiens quidem *d*, nō *a* metitur erūt *a* & *e* primi; & cum *a* multiplicans seipsum producat *b*, β erunt & *e* & *b* inter se primi; & itemq; & *e* & *c*, cum *c* ex *a* in *b* primis ad numerum *e* fiat. & adeoq; & *e* & *d* inter se erunt primi, cum *d* ex *a* in *c* fiat. Quod est contra hypothesin, quæ e ipsum *d* metiri ponebat.

a 31. VII.
 β 27. VII.
 γ 26. VII.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema. 13.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint, qui verò, post unitatem, primus sit; Maximum d nullus alius metietur, præter eos a, b, c qui sunt in numeris proportionalibus.

1. Vn. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.

H-----G-----F-----E----

Metiatur ipsum d , diversus ab a, b, c , qui sit e ; erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum d , a metietur etiam a 12. IX. primum. Quod absurdum. Cum ergo e non sit β 33. VII. primus, esto compositus, β metiens ipsum primus a 71. IX. lius præter a nullus erit. Nam cum e metiatur extremum d , quilibet primus metiens e , γ metietur e & d , metiens verò d maximam, a metitur e & a unitati proximum; proinde duo primi se mutuo metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum e primus, erit ipse a .

Porro metiatur a ipsum e per f . Itaq, a 17. VII. multiplicans f & c binos, faciet binos e & d ; deritq, e ad d , ut f ad c . Quare si e metitur d , etiam f

R

meti-

metitur c : adeoque e & f eodem modo, ut e , compositus erit, quem solus a metitur. Metiatur ergo a ipsum f per g . Ideoque a binos g & b multiplicans producet f & c , deritque f ad c , ut g ad b : Sed f metitur ipsum c , ergo & g metitur b . Si jam g esset primus metiens b , metiretur etiam a . Quod absurdum. Nullus ergo alius metitur g præter a . Denique metiatur a ipsum g per h . Binos ergo a & h multiplicans a producet b & g , deritque g ad b , ut h ad a . Sed g metitur ipsum b . Ergo & h ipsum a primum. Itaque h equalis est ipsi a . Cum autem ex h & g producat idem b , qui ex a in seipsum, erit a medius proportionalis inter h & g ; cumque a metiatur g , etiam h metietur a , primum primum. Quod absurdum. Itaque præter proportionales a, b, c , nullus alius extremum d metitur.

20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum a , primi numeri b, c, d metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, præter eos b, c, d qui à principio metiebantur.

A.....

B...C...D....

E---F----

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f .
 Idem ergo e multiplicans f a facit a . Ideoque singuli a 9. 12. 16.
 b, c, d alterum illorum e vel f metiuntur. Non c 3. 4. 6. 8. 12. 16. VII.
 ipsum e primum; ergo ipsum f minorem ipso a .
 Quod contra hypothesis.

PROPOS: XV.

Theorema 15.

Si tres numeri a, b, c deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, duo quilibet a, b simul, b, c , a, c numeri ad reliquum c, a, b primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e in eadem cum illis proportionem minimis, a patet d in seipsum & e producere a & b , & e in se facere c . Cum itaque d & e in sua proportionem minimi, etiam b sint primi & erit & uterque d, e simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus, ex d, e

R a

quam

- quã ipse d ad e primus sit, d erit quoq; ex d , e tan-
 ¶ 16. VII. quam uno factus numerus in d ad eundem: e pri-
 mus. Qui autem sit ex d e tanquam uno in d e-
 ¶ 3. II. qualis est & numero a factus ex d in se & numero b
 ¶ 17. VII. factus ex d in e . Igitur a b compositi primi sunt
 ad e , & ita ad e , qui sit ex e in seipsum.

B, 12. C, 16.

A, 9.

D, 3. E, 4.

Deinde quis uterq; d e simul γ est primus
 ad quemlibet ipsorum d , e ; sit, ut numerus ex d e
 tanquam uno, factus in e , d primus sit ad d (cum
 tam ex d e compositus, quã ipse e primus sit ad d)
 Sed qui sit ex d , e , tanquam uno in e equalis est &
 numero c factus ex e in se; & b factus ex d in e . Ergo
 & b c simul compositi ad d primi sunt, & adeoq; ad
 ipsum a , qui ex d in se est factus; primi sunt b & c
 simul compositi.

A, 9. C, 16.

B, 12.

D, 3. E, 4.

Deniq; quia, ut antea uterq; d & e simul ad
 quemlibet ipsorum γ primus est; & è contrario qui-
 libet ipsorum d , e primus est ad compositum ex d , e ;
 ¶ d erit

d erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e
 Primus, & sic ex d in e factus ad eum, qui ex d e
 tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d
 e tanquam uno in se aequalis est eis, qui fiunt ex d ^{4.11.}
 & e in seipso, una cum eo qui ex d in e bis. Quoni-
 am itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex
 ijs, qui fiunt ex d & e in seipso; & ex eo, qui fit
 ex d in e, atq; is qui fit d in e primi sunt ad ali-
 quam ipsorum, cum videlicet, qui fit ex d in e, ut
 ostensum est, & erunt etiam duo illi, compositus ex ijs ^{137.VII.}
 qui fiunt ex d & e in seipso & ex eo, qui fit ex d
 in e, atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rur-
 sus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs,
 qui fit ex d & e in seipso, atq; is, qui fit ex d in e
 ad aliquam ipsorum, cum nimirum, qui fit ex d in
 e, primi sunt ostensi; & erunt etiam duo illi, compo-
 situs ex ijs, qui fiunt ex d & e in seipso, atq; is, qui
 fit ex d in e, inter se primi. Itaq; cum ex d & e in
 seipso fiunt a & c, item ex d in e fiat b; erunt a &
 c simul compositi primi ad b.

PROPOS.: XVI

Theorema 16.

Si duo numeri a & b primi inter
 se fuerint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b, ita secundus b ad alium
 quendam c.

A

B

C

Esse, si potest tertius proportionalis c. Cum
 23. VII. ergo a & b sint primi, & in sua ratione minimi;
 21. VII. ipsi aequè metientur b & c numeros in eadem ra-
 tione; a ipsum b, & b ipsum c. Cumq; a etiam me-
 tiatur seipsum. Duos ergo a & b inter se primos
 metietur numerus a. Quod absurdum.

PROPOS: XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri
 a, b, c, d, deinceps proportionales, ex-
 tremi autem ipsorum a, d primi in-
 ter se sint: Non erit, ut primus a ad
 secundum b, ita ultimus d, ad alium
 quempiam e.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E

23. VII. Esse, si potest, ut a ad b, ita d ad e. Erit er-
 21. VII. go permutando, ut a ad d, ita b ad e: sunt au-
 11. AX. tem a, d primi sua rationis minimi: igitur a
 equè metientur, ipsos b & e. Est verò, ut a ad b, ita b
 ad c. Si ergo a metitur b, etiam b & metitur c.
 Quia item est, ut b ad c, ita c ad d: cum b me-
 tiatur

siatur c etiam c metietur d: Quare a metiens c
metietur etiam d. Metitur vero & a seipsum. Er-
gò metitur a, d inter se primos. Quod absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Problema 1.

Duobus numeris a, b datis, con-
siderare, an ipsis possit tertius pro-
portionalis inveniri.

A, 4.

B, 7.

Si a & b dati sint primi, non potest reperi- 16. IX

ri tertius proportionalis. Si non primi, cum b mul-
tiplicans seipsum faciet c, Aut ergò a metitur c,
per d, & d est ipse tertius proportionalis: Cum e- 9. 22.
nimis a metitur c per d, & fiet c ex a in d: Fit autem 17. VII.
idem c ex b in b: Ergò qui sub extremis a, d con-
tinetur c factò ex b in seipsum medio equalis est.
Quare erit ut a ad b, ita b ad d.

A, 4. B, 6. C, 36.

Aus a non metitur c, & tum nequit reperiri
tertius proportionalis. Si verò ponatur d tertius.
Quia est, ut a ad b, ita b ad d, ideo numerus sub ex-
tremis a, d contentus, equalis est ei, qui sit a medio
b, id est, c. Cum itaq; c ex a in d fiat, metietur a
ipsum c per d, quod absurdum. Quia ponebatur
non metiri.

A, 6. B, 4. D - - - C, 16.

R 4

PRO-

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS. XIX.

Problema 2.

Tribus numeris a, b, c , datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri. (*Sive deinceps proportionales sint sive non*)

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

B multiplicans c faciat d. Aut a metitur d
per e quantum proportionalem. • Fit enim d ex a
29. ax. per cōstr. in c, & ex bin c. Ideoq, cum sub extremis a,
719. VII. c comprehensus, equalis sit ei, qui sub intermedijs,
erit, ut a ad b, ita c ad e.

A, 4. B, 6. C, 9. E - - - D, 54.

A, 3. B, 4. C, 10. E - - - D, 40.

Aut a non metiatur d, & tum nequit inveniri quartus proportionalis. Si tamen potest, sit c. Cum 4. a, b, c, e sint proportionales, extremis a, e contentus, equalis β erit contento intermedijs b, c, hoc est, d. Cum itaq, d ex a in e fiat, metietur a ipsum d per e, quod est absurdum. Quia ponebatur non metiri.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni
proposita multitudine primorum
numeratorum a, b, c .

A 2. B 3. C 5.

D, ...

a Sumto minima d, quem a, b, c metiantur, a. 38. VII.
apponatur ipsi unitas e. Si totus d e est pri-
mus, factum est, quod vult propositio, quia cum plu-
res sunt primi a, b, c, d, e.

A 3. B 5. C 7.

D, 105. E,

G 53.

Si totus d e sit non primus, A metietur ipsum
g, qui nulli propositorum a, b, c, idem esse potest. Si C. 33. VII.
tamen sit, metietur etiam g ipsum d, sicut cum me-
tiuntur a, b, c. Ideoque g metiens totum d e, & de-
tractum d, m etietur etiam reliquum e unitatem
quod absurdum. Ergo g primus, idem non est, v 11. ax.
R 3 qui

qui unus ipsorum a, b, c . Sunt ergo a, b, c, g primi plures, quam a, b, c . Adeoque & in infinitum plures primi inveniri possunt.

PROPOS. XXI.

Theorema 19.

Si pares numeri quotcunque ab, bc, cd componantur; totus par erit ad ,

A.....B.....C.....D

Cum enim quilibet par habeat partes duas aequales; si equalibus addantur aequales, omnes dimidia dimidijs sunt aequales. Quare totus $a d$ erit par, dimidiarum compositorum duplex ex definitione.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si impares numeri quotcunque ab, bc, cd, de componantur; multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit ae .

A...B.....C.....D.....E

Cum propositi numeri sint impares, quilibet differt unitate à pari, ex definitione. Singulis unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par.
 Quare & à reliquis compositus a par erit. Sed uni-
 tatem detractarum multitudo est par. Ergo & to-
 tus a c par erit. 21. IX.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quotcunque
 a, b, c, d, e , componantur, multitudo
 autem ipsorum sit impar; & totus a c
 impar erit.

$A \dots B \dots C \dots D \dots E$

Ablata unitate d ex ce , erit $c d$ par. Sed
 a c ex imparibus multitudine paribus est compo-
 situs. Ergo & par a erit, huic si addatur $c d$ totus
 ad par β erit. Sed addita unitate d ex numero $a d$,
 totus a c impar erit, quia par à pari differt per uni-
 tatem. 22. IX.
21. IX.

PROPOS: XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero $a b$ detrahatur
 par $c b$: & reliquus a c par erit.

$A \dots D \dots C \dots B$

Si non detracta $a d$ unitate erit d c par.

Ideoq; & compositus $d b$ a erit par: ac proinde cō-
 posito $d b$ addita unitate $a d$, totus $a b$ impar fiet.
 Quod est absurdum; quia ponitur par. 21. IX.

PRO.

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si à pari numero a b impar c b ,
detrahatur; & reliquus a c impar
erit.

A C . D B

Ex impari c b ablata unitate c d , reliquus
 d b par erit. Quia ergo totus a b ponitur par
ablato pari db , reliquus a b par erit, ablatoque
unitate cd reliquus a c impar erit.

24. IX.

PROPOS: XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero a b impar
 cb detrahatur; reliquus a c par erit.

A C D . B.

Ex imparibus ab , cb unitate db detracta,
reliqui ad , cd pares erunt. Ex pari ad ablato
pari cd , reliquus a c par erit.

24. IX.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si ab impari numero a b par c b detrahatur; reliquus a c impar erit.

A . D C B

Ab impari a b unitate a d sublata, erit reliquus db par; cui d b rursus auferatur c b par, reliquus dc par quoque, a erit: ac proinde unitate a d addita, fiet a c impar.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si impar a numerus parem b , multiplicans, fecerit aliquem c , factus par erit.

A B

C

Cum c fiat ex a in b ; componetur c ex tot numeris ipsi b equalibus, quot fuerint unitates in a . Est autem b par. Ergo & c ex tot b paribus a a . IX. compositus, quot in a sunt unitates, par quoque a erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus a imparem b
mul-

multiplicans fecerit aliquem e ; factus impar erit. .

A B

C

Cum c ex a in b fiat , componetur c ex tot numeris ipsi b equalibus, quot in a fuerint, unitates. Est autem b impar. Ergo & c ex tot imparibus compositus, quot in a sunt unitates, impar quoque erit. Hinc nascuntur duo Corollaria.

23. IX.

Corollarium, 1.

Par numerus in se multiplicatus, producit parem.

Corollarium, 2.

Impar numerus in se multiplicatus producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema, 28.

Si impar numerus a parem b metiatur, & illius b dimidium d metietur.

A C E . .

B

D

Metiatur a ipsum b per c . Erit utiq; c par
 Si enim esset impar, sequeretur a imparem in c
 imparem efficiere imparem. Quod absurdum,
 quia b ponitur par: Ergo & c erit par. Itaq; a 29. IX.
 cum a per omnes c unitates efficiat totum b : Idem
 a per dimidium unitatum c ipsum d efficiet, ipsius
 b dimidium. Metietur ergo a ipsum d per dimi-
 idium unitatum c , id est, c .

PROPOS: XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus a ad aliquem
 numerum b , primus sit: & ad illius
 duplum c primus erit.

A.....B.....

C.....

D---

Si a non sit primus ad c , metiatur eos d , qui
 omnino erit impar. Si enim esset d par, cum me- a 28. IX.
 tiatur imparem, a erit a , factus ex d pari, in eum β 30. IX.
 numerum, per quem metitur, par; Quod absur-
 dum, quia ponebatur a impar. d ergo impar
 metiens c parem, β metietur quoq; dimidium nu-
 meri c . Idem autem d metitur & a . Ergo & a , b
 inter se primos metietur d . Quod absurdum. a ergo
 ad c est primus.

Hinc

Hinc patet Corollarium: Numerum imparem, qui ad numerum aliquem est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum ejus (c. 31. IX.) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplicam in infinitum excurrendo. *Quia semper sequentes precedentium sunt dupli.*

PROPOS: XXXII.

Theorema 50.

Numerorum a, c, d à binario a duplorum, unusquisque est pariter par tantum.

1. Un. $A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.$

II. IX.

Exposita enim unitate fiunt numeri ab unitate a deinceps proportionales: Quare a quemlibet b, c, d . & minor majorem per aliquem ipsorum a, b, c, d metietur; Qui cum omnes sint pares, & binarij nimirum dupli ipsorum quemlibet a metietur numerus par per parem. Erit ergo quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantum ita ostenditur. Cum enim ab unitate sint continuè proportionales, & unitati proximus
primus

fit primus, utpote binarius, nullus præter ipsos a, b, c, d quemlibet ipsorum æmetietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem æmetietur.

¶ 3. IX.
¶ 15. IX.

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticoꝝ inveniendi omnes numeros pariter pares. Nulli enim præter duplos à binario a, b, c, d, e, f, &c. tales esse possunt. Si enim esset quispiam g. ejus h. dimidium par esset; quia si impar esset, g esse f & pariter impar contra hypothefin; ipsius h, dimidium sit i, qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium i sit unitas, h, g erunt dupli ab unitate atq; ita in ordine priorum, contra hypothefin.

¶ 32. IX.

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.

I. --- H. --- G. ---

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus a dimidium b habeat imparem: pariter impar est tantū.

A

B C . .

D E . . .

Cum a habeat dimidium b imparem, metietur binarius c per numerum ipsum a per b. a itaq;

s

ex de

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen esse talis negetur, erit quoque pariter par. Ideoque ipsum aliquis par per d parem e metitur, & ex d secundo in tertium e fiet a qui ex c primo in b quartum a eritque, ut c ad d , ita e ad b . Metitur autem c parem d . Ergo & c par metitur ipsum b imparem. Quod absurdum.

Scholium.

Imparium omnium dupli omnes sunt, pariter impares, tantum.

PROPOS: XXXIV.

Theorema 32.

Si par a numerus neque à binario duplus sit, neque dimidiū habeat imparē; pariter par est, & pariter impar.

A

Cum enim dimidium habeat parem per eum metitur ipsum binarius par, & sic pariter par est. Sed & pariter impar. Diviso enim a bisariam, ejusque dimidio rursus bisariam & sic deinceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si enim ultimum occurreret binarius, esset a duplus à binario, quod contra hypothesein. Cum ergo occurrat impar, ille metietur a per parē, non per imparem, & quia impar multiplicans imparem, produceret imparem; Contra hypotbesin. Est itaque & pariter impar.

Scholium.

Omnes, relictis duplis à binario, & qui dimidios habent impares, pa-

res; reliqui & pariter pares & pariter
impares sunt.

PROPOS: XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunque numeri $a, b, c,$
 $d, e, f,$ deinceps proportionales, de-
trahantur autem à secundo $b, c,$ & ul-
timo $e, f, g, c, b, f,$ æquales ipsi primo a :
Erit ut secundi excessus $b, g,$ ad primū
 $a,$ ira ultimi excessus e, h ad omnes, $a,$
 $b, c, d,$ ipsum antecedentes.

A

B G C

D

E K I H F

Ab, c, d detrahantur fi. & f, k ipsi b, c & d, e
quales. Quoniam f, i est equalis b, c & ablatu f, h
ablato $g, c,$ etiam reliquu $f, i,$ reliquo g, b equa-
lis erit. Sed quia est, ut a ad $b, c,$ ita b, c ad $d,$ &
 d ad $e, f;$ convertendoq, ut e, f ad $d,$ ita d ad $b, c,$
& b, c ad a : estq, k, f ipsi d & i, f ipsi $b, c,$ & h, f
ipsi a equalis; erit etiam ut e, f ad $k, f,$ ita k, f ad
 i, f & i, f ad $h, f.$ Igitur dividendo ut e, k ad $k, f,$ ita
 k, i ad $i, f,$ & i, h ad $h, f,$ ac proinde ita etiam a erunt $a, 12. VII.$
omnes e, k, k, i, i, h ad omnes $k, f, i, f, h, f,$ id est, to-
tus e, h ad $d, b, c,$ a simul (quibus $k, f, i, f, h, f,$ sumti
sunt æquales) ut i, h ad $h, f,$ hoc est, ut b, g ad $a,$ qui
illis sunt æquales. S a Scholium.

Per hoc theorema ſummam continuè proportionalium ex primo, ſecundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOS: XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque a, b, c, d numeri deinceps exponantur in dupla proportionē, quoad totus compositus fiat primus e ; & totus e hic in ultimum d multiplicatus faciat aliquem f , Factus erit perfectus.

1. $Vn.$ A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 32. G --- 62. H, 124. I, 248. F --- 496.

K, 32. M, 31. L, 31. N, 465.

O --- P ---

Sumantur ab e tot dupli; quot ſunt a, b, c, d videlicet e, g, h, i : erit ex aqno ut a ad d , ita e ad i , factusq; ex a , in i e equalis eſt facto ex d in e . Sed f eſt factus ex d in e . Idem ergo f ex a in i fit. Itaq; i meretur f per a binarium, & ita ſiſſim

14. VII.
19. VII.

est duplus. Quare c, g, h, i, f , deinceps sunt dupli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur aequales ipsi e , qui sunt k, l , relictis m, n excessibus; & erit ut m ad e ; ita n ad omnes antecedentes c, g, h, i simul. Sed m est equalis ipsi e , dimidius videlicet dupli g . Ergo & n equalis ipsis c, g, h, i & $35. IX.$ simul. At unitas & a, b, c, d aequales sunt l, l ipsi e & k equalis. Itaque totum l, m , id est, f equaliter unitati & numeris a, b, c, d, e, g, h, i simul. Quare cum unitas & a, b, c, d, e, g, h, i metiantur ipsum f (Quia enim f ex e in d est factus, & metietur d ipsum f eundemq; f unitas & a, b, c, d , qui ipsum d metiuntur. Rursum ergo i metiatur ipsum f , eundem f metientur e, g, h , per ipsum l & $11. IX.$ metiantur: ob proportionem duplam) nec alius ullus metiatur ipsum f . Erunt ergo unitas & numeri a, b, c, d, e, g, h, i omnes partes quas f habere potest; quibus simul sumtis equalis cum sit f , erit f perfectus ex definitione. Si alius quidem numerus potest metiri ipsum f , esto o per p , ex quibus fiat idem f , qui ex e in d . Cum ergo ex e primo in d quartum fiat idem numerus, qui ex p secundo in o tertium. Ergo ut e ad p , ita o ad d . Cum autem a, b, c, d sint proportionales ab unitate, & a primus, nullus præter illos o metietur, præter o alius ab ipsis a, b, c positus; & cum sit e ad p , ut o ad d , neq; ipsum p metietur, qui cum e sit primus, inter se sunt primi, & $31. VII.$

Et in sua ratione $\wedge$ minimi, & o ipsum e² aequale
 A 23 VII. p² ipsum d² metiantur. Ergo cum d nullus prater
 p 21. VII. a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sic idem
 qui b, & quot b, c, d, totidem e, g, h, sumantur,
 a eritq, ut b add ita e ad h, & idem numerus fi-
 et ex b in h, qui ex d in e, idest, qui ex o in p.
 Itaq, ut p ad b ita h ad o. Sed p est idem qui b.
 Ergo & o idem qui h. Quod absurdum.
 Ponebatur enim alius.





EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

LIBER X.

Definitiones.

I.



Ommensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadē mensura metitur. Ita etiam 21 & 13 palmorū linea sunt commens. quia & unus palmus & dimidius & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, quae corpus idem metitur, intelligitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullā communem mensuram

contingit reperiri. Tales sunt latus & Diagonius quadrati, ut in propositione ultima demonstratur, & multa alia lineae de quibus in propositionibus. Itemque & superficies & corpora.

3. Rectae lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur. Antea lineae commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicata: hic vero longitudine aliàs incommensurabiles insuper intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communem commensurabilia. Quae quadrata in 47. l. appellatur potentia laterum vel linearum. Tales lineae etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nullum spacium, quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. Intelligit eas, quae neque mensuram communem, quoad longitudinem, neque quoad quadrata habent.

5. His positis, ostenditur, cuicumque

que rectæ propositæ rectas lineas
multitudine infinitas & commensu-
rabiles esse, & incommensurabiles,
alias quidem longitudine & poten-
tia; alias verò potentia solum. Voce-
tur autem proposita recta linea, Ra-
tionalis. *Dicit ad datam rectam alias
infinitas & commensurabiles tum longi-
tudine, tum potentia, & incommensura-
biles posse inveniri, eamq. cuius respectu
reliqui tales sunt dici prout, Rationalem,
quod semper ponatur certa & nota, reli-
qua us plurimum ignorata.*

6. Et huic commensurabiles sive
longitudine & potentia, sive potētia
tantum Rationales. Omnes linea quæ
data quomodocumq. sunt commensurabi-
les dicuntur Rationales, non quidem posi-
tione, ut illa, sed quia in illa comparatione
cum data commensurabiles inveni-
untur. Ideoq. & lineas quarum quadrata
20 & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16
vel 100. commensurabiles, rectæ etiam ra-
tionales appellamus.

7. Huic verò incommensurabiles,
S s Irratio-

Irrationales vocentur. *Itidem hæc ex adverso omnibus modis incommensurabiles ostendit, quas nec in longitudine neq. in potestate exactum aliquis numerus exprimit.*

8. Et Quadratum, quod à proposita dicta recta fit, dicatur Rationale. *Non secus enim; ac linea illa certa & nota dicebatur rationalis, etiam quadratum ex ea factum Rationale est dicendum.*

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia. *Ita & omnes superficies plana, Quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales sunt dicenda non positione sed collatione.*

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur. *Etiam superficies quæcunque irrationales dicuntur, quarum lineæ sunt incommensurabiles rationali lineæ.*

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irrationales. *Si nimirum sunt quadrata ipsa, intelliguntur biclatera per lineas; si verò sint alia quæpiam recti lineæ, re-*
Et

esse, describentes equalia quadrata spacijs incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Quælibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

1. Magnitudo quocunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

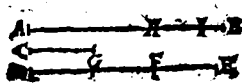
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus *ab*, *c*, inæqualib. propositis, si à maiore *ab* auferatur majus *a* *b* quàm dimidiū; & ab eo, quod

quod reliquū hb est, rursus detrahatur majus hi , quā dimidium, & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, ib , quæ minor erit proposita minore magnitudine. c .



Sumatur ipſius c multiplex d e proximè major quā $a b$, in partes

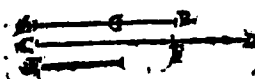
ipſi c æquales diviſa; quibus partibus multitudinē æquales ſine partes $a b$, hi , ib , in linea $a b$. Cum ergo d ſit major quā $a b$, & ex d minus dimidio $d g$ (vel etiam dimidium, ſi d eſſet dupla ipſius) ex $a b$ verò plus dimidio $a b$ ſit ablatum, erit reliquum g e reliqua $h b$ majus. Rurſus, cum $h b$, quā $g c$ ſit minor, & ex g e ablatum ſit dimidium fg (vel minus dimidio) ex $h b$ verò majus dimidio hi erit reliquum ſc id eſt c reliquo ib majus. Quod erat propoſitum.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus $a b$, $c d$ inæqualibus propositis, detrahatur ſemper minor $a b$ de majore $c d$, alterna quadam detractiōe, & reliqua

reliqua fd minimè præcedentem ab metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines ab, cd .

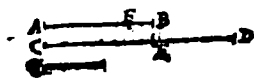
 Sin minus, esto cōmunis
mensor e , qui vel æqualis est, ipsi ab vel minor.

Facta ergò detractiōne ab ex cd quoties potest, a 1. X.
relinquat fd se minorem, & detracta fd ex ab
relinquat se minorem gb &c. adeoq; relinque-
tur tandem vel ex cd vel ab quedam ut gb mi-
nor ipsæ c : Quoniam itaq; e metitur ipsam ab , &
 a b ipsam cf , etiam e β metietur, ipsam cf , cumq; b 2. X.
 e metietur etiam cd , γ metietur tota etiam re-
liquam fd . Sed fd metitur ipsam ag β ergò γ 3. X.
 e metitur ipsam ag , cumq; γ metiatur ab , γ me-
tietur etiam reliquam gb , major minorem.
Quod absurdum.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus ab, cd magnitudinibus
commensurabilibus datis; maxi-
mam earum communem mensu-
ram fb invenire.

 Facta detractiōne alter-
na, metietur tandem
 fb ipsam cd , nisi datas
duas

2. X. *duae a b, c d = voluerimus esse incommensurabiles,*
eritq; f b maxima communis mensura. Cum enim
 2. ax. *f b metiatur c d, c d verò ipsam a f, etiam f b*
metietur f a, & quia metitur seipsam, & etiam
 7. 1. ax. *totam a b; & ita etiam ipsam c e quam meti-*
tur a b; adeoq; cum & c e & c d metiatur f b, &
metiatur totum c d, eritq; utriusq; a b & c d
mensura communis. Si quò verò etiam neget eam
esse maximam, maior sit g, quæ & a b & c d me-
tietur, & ß ipsam c e, quam metitur, a b; Camq;
metietur & c d & c e, etiam ð metietur c d reli-
quam; quæ cum metiatur a f, eandem a f ß me-
 2. ax. *tietur etiam g: sed cum & a b & a f metiatur*
ð metietur etiam f b reliquam, maior minorem.
Quod absurdum.

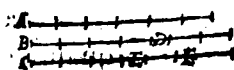
Hinc patet Corollarium m.

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROPOSITIO IV.

Problema 2.

Tribus magnitudinibus *a, b, c*, commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.



Esto d communis metr. a. 3. X.

sura a & b; qua si & metietur c, a habetur p cor. 3. X.

propositum. Si enim major quaedam quam d etiam communis mensura, β metietur & d communem mensuram a & b major minorem. Si autem d non metiatur c, erunt saltem commensurabiles: Cum enim a, b, & sint commensurabiles, qualibet earum communis mensura, maximam mensuram d ipsarum a & b β metietur. a Sit itaq; communis c inter c & d quae erit maxima trium a, b, c communis mensura. Sin minus, major quam c sit t. Quia ergo t metitur a & b, metietur etiam d. Cumq; metiatur etiam c & d, β metietur communem earum mensuram, c, major minorem. Quod absurdum.

Hinc manifesta sunt Corollaria.

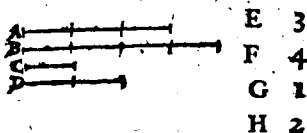
1. Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoq; maximam earum communem mensuram.
2. Pluribus quam tribus magnitudinibus datis, illarum communis maxima mensura inveniri potest. Si enim sunt 4, invenitur prima trium.

LEMMA.

Si sint quorūq; magnitudines, a, b, c, d, & totidē etiā numeri, e, f, g, h, qui bini

in

in eadem ratione sumantur, in qua
binæ magnitudines; & ex æqualitate
in eadem ratione erunt, *A ad D* ma-
gnitudines & numeri *e ad h*.

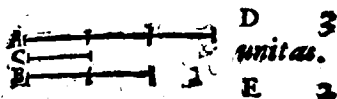


Demonstratio est ex V. & VII. manifesta.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Commensurabiles *a b* magnitu-
dines inter se rationem habent,
quam numerus ad numerum.



§ 1. X.

^a Sic *c* earum mensura communis maxima, quæ
quoties metitur *a* & *b*, toties unitas metiatur
d & *e* numeros. Cum igitur magnitudo *c* metia-
tur magnitudinem *a* quoties unitas numerum *d*,
erit ut *c* ad *a* ita unitas ad *d*: sed ut est *c*

§ Lema. X. ^a *ad b* ita est unitas ad *e*, ^b Ergo ex æquo ut magni-
tudo *a* ad magnitudinem *b* ita numerus *d* ad
numerus *e*.

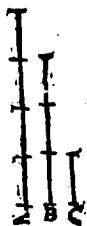
PRO.

PROPOSITIO VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines a, b , proportionem habeant, quam numerus d ad numerum e ; commensurabiles erunt a, b , magnitudines.

D 4 E 3 unitas.



Quot unitates sunt in d , in tot partes æquales ipsi c sit divisa a magnitudo. Cum ergo sit ut c ad a ita unitas ad d , quia æquè metiuntur c ipsam a & unitas ipsum d ; cumq; ponatur ut a ad b , ita d ad e , erit ex æquo ut c ad b ita unitas ad e . Sed unitas metitur numerum e . Igitur & c metitur

Lemma
4. X.

magnitudinem b . Sed & c metitur ipsum a . Ergo a & b eandem communem mensuram c habent, & β 1. def. X. β sunt commensurabiles.

Corollarium.

Si fuerint duo numeri & recta, data potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data, recta eccetur in tot partes æquales, quot unita-

unitates, continet alteruter numerum; assumaturq; earundem partium alia, quot unitates continet alter numerus, habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis c & e , & linea recta $h b$, oportet efficere ut numerus c ad numerum e , sic quadratum lineæ $h b$ datæ ad quadratum alterius $b d$.

13. VL



20. VI.

Reperiatur $b g$, quæ sit ad $h b$ ut c ad e : a sitq; inter $h b$ & $b g$ media proportionalis $b d$. Cum ergo sit ut c ad e , ita $h b$ ad $b g$; sit ut $h b$ ad $b g$, & ita quadratum ex $h b$ ad quadratum ex $b d$. Itaq; ut c ad e , ita quadratum ex $h b$ ad quadratum ex $b d$.

PROPOS: VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudines a, b inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

6. X.

Si haberent a essent commensurabiles. Quod est contra hypotesin.

PRO

PROPOS: IIX.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a, b proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*) a, b . X.

Si enim commensurabiles acciperentur, esset earum proportio, quæ numeri ad numerum, contra hypothesis.

LEMMA.

Si sint tres quantitates a, b, c , continuè proportionales, & aliæ tres d, e, f continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum a , ad tertiam c , ita prima d harum ad tertiam f ; erit & ut prima a illarum ad secundam b ; ita prima harum ad d secundam e .

D 29 E 42 F 36

Cum enim rationes a ad c & d ad f duplicata sint eadem, etiam dimidia a ad b , & d ad e eadem erunt.

PROPOS: IX.

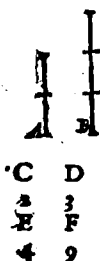
Theorema 7.

T 2

Quæ

Quæ à rectis lineis a, b , longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent, quam quadratus numerus e ad quadratum f numerum: Et quadrata ex a & b inter se proportionem habent ia , quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; & latera a, b habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis a, b longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f : & quadrata ex a & b inter se proportionem non habent ia , quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; neque latera a & b habebunt longitudine commensurabilia.

23. X.



Cum rectæ a, b sint commensurabiles longit. a erunt ut numeri ad numerum. Sit autem a ad b ut c numerus ad numerum d , quatuor quadrati sunt e & f . Quoniam ergo a ad b est ut c ad d ; quadratum autem ex a ad quadratum

dratum ex b β habet duplicatam rationē laterum
 γ sicut & numerus quadratus e ad numerum qua-
 dratum f laterum c & d , erit eadem proportio
 quadratorum ex a & b , quæ est numerorum qua-
 dratorum c & f .

Deinde sit quadratum ex a ad quadra-
 tum ex b ut numerus quadratus e ad nu-
 merum quadratum f , erant rectæ a &
 b longitudine commensurabiles. Cum
 enim rationes eadem quadratorum ex re-
 ctis a & b , & numerorum quadratorum e & f β & γ
 sint duplicata suorum laterum a & b & c , d , erit
 ut numerus a ad numerum d , ita recta a ad re-
 ctam b , & erunt q , a , b , commensurabiles.

p. 12. IIX.

p. 6. K.

Tertio sint a & b incommensurabiles, etiam qua-
 drata ex ipsis non erunt ut numerus quadratus ad
 numerum quadratum; quia ita forent a , b , com-
 mensurabiles contra hypothesein. Denique quadra-
 tum ex a non habeat rationem ad quadratum ex
 b , quam numerus quadratus ad quadratum, e-
 runt etiam longitudine incommensurabiles a & b ;
 si enim essent commensurabiles, etiam quadrata
 ex ipsis essent ut numerus quadratus, ad quadra-
 tum, contra hypothesein.

PROPOS: X.

Theorema. 8.

Si quattuor a b c d magnitudines
 T 3 propor-

proportionales fuerint, prima a vero secunda b fuerit commensurabilis; & tertia c quartæ d commensurabilis erit. Et si prima a secundæ b fuerit incommensurabilis, & tertia c , quartæ d incommensurabilis erit.

5. X.



6. X.

7. X.

EF

32

Cum enim a & b sint commensurabiles, a habebunt rationem numerorum, e ad f : Est vero etiam c ad d ut a ad b , ergo etiam c ad d est ut e ad f . Sunt ergo inter se commensurabiles.

Contra si a & b sint incommensurabiles, etiam c non sunt ut numerus ad numerum. Ideoque, nec c ad d , quæ ponuntur ut a ad b , erunt ut numerus ad numerum, adeoque etiam c & d incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quâ Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

26. IIX.

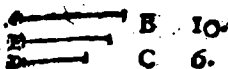
Inventi plani non similes, omnes non habent rationem quam quadratus ad quadratum. Suntque tales

sales numeri primi omnes, & quorum unusqua-
dratum, alter non. &c.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ invenire
duas rectas lineas de incommensu-
rabiles, alteram quidem longitudi-
ne tantum, alteram e. verò etiam
potentia.



Assumptis numeris b, c, a investigetur re-
cta d, ad cuius quadratum sit quadratum: ze.
et a, ut b ad c, erit d ipsi a longitudine tantum
incommensurabilis. Quia enim quadratum ex a ad
quadratum ex d est, ut numerus b, ad numerum
c, sed b & c non sunt quadrati: Ergo quadra-
tum ex a ad quadratum ex d non erit ut nume-
rus quadratus ad numerum quadratum: ideoq;
a & d sunt rectæ longitudine incommensurabiles;
& longitudine quidem tantum. Cum n. quadrata
earum habeant proportionem numerorum b ad c,
erunt commensurabilia. Deinde inter rectas
a & d longitudine tantum incommensurabiles.

a per lem-
ma 10. X.

a per lem-
ma 6. X.

7 9. X.

2. 6. X.

T 4

inte-

13. VI.

inveniat *ur* media proportionalis *e*, qua & longitudine & potentia incommensurabilis erit ipsa *a*. Quia enim quadratum ex *a*, ad quadratum ex *c* est, ut *a* ad *d*: sed *a* ipsi *d* est longitudine incommensurabilis; & erit ergo quadratum ex *a* quadratum ex *c* incommensurabile, & ita recta *a* & *c* etiam potentia incommensurabiles.

10. X.

PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ *a*, *b*, eidem *c* magnitudini sunt commensurabiles, & inter se *a* & *b* sunt commensurabiles.

5. X.

4. IX.

Cum enim *a*, *c* sint commensurabiles, *a* habent rationum numerorum *d*, *e*, sicut & *c*, *b* numerorum *f*, *g*. *β* Assumantur *h*, *i*, *k*, tribus numeris minimis in rationibus datis *d* ad *e*, & *f* ad *g*; erit *h* ad *i*, ut *d* ad *e*, id est, *a* ad *c*; & *i* ad *k*, ut *f* ad *g*, id est *c* ad *b*. Itaque ex æquo erit *a* ad *b*, ut *h* ad *k* id est, ut numerus ad numerum, & ita *γ* commensurabiles.

DIO

E 8

F 2

G 3

H 5

I 4

K 6

6. X.

PROPOS: XIII.

Theorema 10.

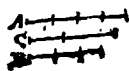
Si sint duæ magnitudines a b , & altera a quidem eidem c sit commensurabilis, altera b verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines a b .

Sin minus, & eidem a sit commensurabilis b , a. 12. X. a erunt etiam b & c commensurabiles, contra hypothesin.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 1.^o

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera a autem ipsatum magnitudini cuiuspiam c incommensurabilis fuerit: & reliqua b eidem c incommensurabilis erit.



Sin minus, cum a ipsi b sit commensurabilis, a. 12. X. a erunt etiam a & c commensurabiles, contra hypothesin.

Scholium.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus
 $h g$ & c ; invenire id, quo major $h g$
 plus potest quàm minor. c .

Ge. IV.



31. III.

47. I.

Descripto semicirculo super $h g$
 aptetur $h d$ equalis ipsi c , jun-
 ctis $d g$; plus poterit recta $h g$
 quàm $h d$ vel c quadrato rectæ $d g$.
 Cum enim $h d g$ angulus β sit re-
 ctus erit quadratum ex $h g$ æquale, quadratis ex
 $d h$. & $d g$. Atq; sit $h g$ recta plus potest quàm
 c quadrato $d g$.

PROPOSITIO XV.

Theorema 12.

Siquatuor a, b, d, e , rectæ lineæ
 proportionales fuerint, prima a ve-
 rò tantò plus possit, quàm secunda b ,
 quantum est Quadratum rectæ lineæ
 c , sibi commensurabilis longitudine:
 Ex tertia d tantò plus poterit, quàm
 quarta e , quantum est quadratum
 rectæ f , lineæ sibi cōmensurabilis lō-
 gitudine: Quod si prima a tantò plus
 pos-

possit quàm secunda b , quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia d tantò plus poterit, quàm quarta e , quantum est quadratum rectæ lineæ f sibi longitudine incommensurabilis.

Cum sit ut a ad b , ita d ad e ,
 et erunt etiam ex illis rectis defri-
 ta quadrata ut rectæ; sed quadra-
 tum ex a est β aequale quadrato
 ex b c . & quadratum ex β ex hypo-
 d quadrato ex e , f . Ergo erit thesi.
 ut quadrata ex b, c ad quadratum
 ex b ; ita quadrata ex e, f , ad qua-

22. VI.

dratum ex e : Et dividendo, ut quadratum ex
 c ad quadratum ex b ; ita quadratum ex f ad
 quadratum ex e . Ergo ut recta c ad rectam b ;
 ita recta f ad rectam e . Et convertendo ut b ad
 c , ita e ad f . Cum autem sit ut a ad b , ita d
 ad e , & ut b ad c , ita c ad f , erit etiam ex æ-
 quo, ut a ad c , ita d ad f . Quare a si fuerit
 longitudine commensurabilis ipsi c , etiam d ipsi
 f commensurabilis longitudine erit, & si incommensurabilis, incommensurabilis.

10. X.

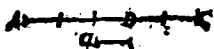
PRO.

EVCLIDIS ELEM
PROPOS: XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines $a b$, $b c$ com-
mensurabiles componantur; & tota
magnitudo $a c$ utriq; ipsarum com-
mensurabilis erit. Quod si tota ma-
gnitudo $a c$, uni $a b$ ipsarū com-
mensurabilis fuerit; & quæ à principio
magnitudines $a b$ & $b c$ commensu-
rabiles erunt.

63. X.



13. 12.

• Sit communis mensu-
ra d . Cum ergò d me-
sura $a b$, $b c$, etiam

$a c$ tota d metietur, eruntq; $a c$ & $a b$ commensu-
rabiles propter communem mensuram d ; sicut &
 $a c$ & $b c$; eaq; propter utriq; $a b$ & $b c$ commen-
surabilis est $a c$. Deinde sit tota $a c$ alteri; ex
quibus cõposita est ut $a b$ commensurabilis, erunt
 $a b$ & $b c$ commensurabiles. Assumta enim com-
muni mensura d , erit eadem d reliquæ $b c$ men-
sura. Ideoq; commensurabiles sunt $a b$, $b c$ propter
communem mensuram d .

Corollarium

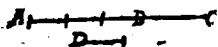
Sit tota magnitudo $a c$ ex duabus
 $a b$, $b c$, composita, commensurabilis
fuerit

fuerit alteri $a b$ ipsarum, eadem $a c$ & reliquæ $b c$ commensurabilis erit.

PROPOS: XVII.

Theorema 14.

Si duæ magnitudines $a b$, $b c$ incommensurabiles componantur, & tota magnitudo $a c$ utriq; $a b$, & $b c$ ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo $a c$ uni ipsarum $a b$ incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudinem $a b$, & $b c$ incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantum alteri, ut $a b$, sic commensurabilis, habens mensuram communem. Itaq; d metiens totam $a c$, & ablatam $a b$, etiam a metietur reliquam a 3. 22. $b c$, & commensurabiles erunt $a b$, $b c$, contra hypothesin. Deinde tota $a c$ uni ipsarum $a b$ incommensurabilis existens, etiam alteri $b c$ incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypothesin ipsi $a b$ commensurabilis pforet.

p. 16. X.

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus compo-

**composita, incommensurabilis sit
alteri illarum, eadem & reliquæ in-
commensurabilis est.**

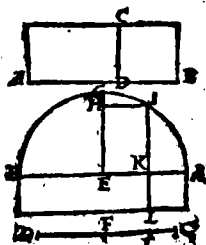
LEMMA 1.

Si ad aliquam rectam ab applicetur parallelogrammum ac , deficiens quadrata figura bc ; parallelogrammum ac applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis ad , ab , vel dc , rectæ ab , ex applicatione factis continetur.

Quod patet ex 28. VI.

LEMMA 2.

Duabus datis rectis ab, cd , in-
qualibus, quartam partem quadrati
ex minore cd descripti ad majorem
 ab applicare, ita ut deficiat figura
quadrata la .



Super ab describatur quadratum, sitq; eg radius ad b perpendicularis. Secta cd bisariam in f , sumatur eh equalis cf recta; & h puncto agatur hi parallela ipsi ac , & i puncto ikl parallela ipsi ge , sumtaque kl equali ipsi ak , perficiatur bb rectangulum, & la quadratum. Dico lb rectangulum quarta parti quadrati ex cd esse equale, applicatum ad rectam ab , deficiens figura quadrata la . Quoniam ki media proportionalis est inter ak , kb erit rectangulum akb quadrato ki equale, id est, $13. VI$ quadrato ex eh vel cf , & quod quarta pars $7. 4. VI$ est quadrati ex cd .

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ ab , cd , inæquales, & ad maiorem ab applicetur quarta pars lb Quadrati, ex minore cd descripti, deficiens figura quadrata la , non erunt segmenta ak , kb , quæ ex applicatione sunt æqualia.

Si æqualia sunt segmenta ak , kb a siqui- per Lem.
 dem parallelogrammum applicatū ad ab defici- ma 17. X.
 ens figura quadrata ex ak descripta, æquale est
 rectangulo akb : Est verò sub æqualibus
 ak , kb quadratum: erit parallelogrammum
 dictum

dictum quadratum ex $b k$, dimidio ipsius $a b$ descriptum, & quadratum ex $a b$ quadruplum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypotthesi quadratum ex $c d$ ejusdem parallelogrammi applicati sit quadruplum, nempe quartæ partis quadrati ex $c d$. Igitur quadrata rectarum $a b$ & $c d$ sunt æqualia, ipseque rectæ contra hypotthesin æquales.

PROPOSITIO XIIX.

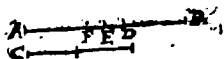
Theorema 15.

Si fuerint duæ rectæ lineæ $a b$ & c inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori c æquale parallelogrammum ad majorem $a b$ applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes $a b$, $d b$ longitudine commensurabiles ipsam dividat; major $a b$ tantò plus poterit, quàm minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major $a b$ tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

2. Lem.

17. X.

frati, quod fit à minore, æquale pa-
 allelogrammum ad maiorem - ap-
 plicetur, deficiens figura quadrata;
 in partes ad , db longitudine con-
 mensurabiles ipsam dividet.



Quoniam enim ad major est quàm db , secetur a b bisariam in e , ipsiusq; e d sumatur equalis
 ef . Cũ autẽ tota a e & eb , ablataq; ed & ef sint
 equales, erunt & reliquæ af , db æquales. Cumq;
 recta a b in equalia in e , itemq; in equalia in d ,
 sit secta, erit rectangulum super ad b unũ cum
 quadrato e d æquale quadrato ex e b : & quadru-
 plum rectanguli a d b & quadrati ex e d æquale
 erit quadruplo quadrati ex eb . Sed quadruplo re-
 ctanguli a d b æquale est quadratum ex c : & qua-
 druplo quadrati ex e d æquale est quadratum ex
 fd (cum quarta pars quadrati ex tota aliqua re-
 cta descripti æqualis sit quadrato ex totius recte di-
 midio descripto) & quadruplo quadrati ex e b æ-
 quale est quadratum ex ab . Quadrata igitur ex
 c & d simul æqualia sunt quadrato ex ab ; rectaq;
 ad plus potest recta c quadrato rectæ fd . Hæc dico
 commensurabilem toti ab . Cum enim ad , db sint
 commensurabiles, erit tota ab parti db comensu-
 rabili longitudine: cum item ipsi d b compositi ex
 y db &

112 X.

2 cor. 16. X.

$d b$ & $a f$ sit longitudine commensurabili (quod
 pla est ipsius $d b$) Ergo cum utraq, $a b$ & compo-
 sita ex $d b$, $a f$ longitudine sit commensurabili
 ipsi $d b$, erunt etiam $a b$ & composita ex $d b$, $a f$
 longitudine inter se commensurabiles: adeoq, cum
 $a b$ composita ex $a f$, $d b$ tanquam una recta &
 $f d$ commensurabilis sit longitudine composita ex
 $a f$, $d b$, eadem $a b$ reliqua $f d$ longitudine com-
 mensurabilis erit. Ergo $a b$ plus potest quam
 quadrato recte $f d$ longitudine sibi commensura-
 bilis.

Contra si $a b$ plus potest quam c quadrato
 recte sibi longitudine commensurabilis & c , erunt
 segmenta $a b$, $d b$ commensurabilia. Eodem mi-
 rum modo ostenditur $a b$ plus posse quam c qua-
 drato recte $f d$, longitudine sibi commensurabili.
 Cum autem $a b$ tota composita ex $f d$, $a f$ & $d b$ ut-
 quam una sit longitudine commensurabilis ipsi $f d$,
 eadem commensurabilis erit reliqua ex $a f$, $d b$ com-
 posita. Est vero & $a f$, $d b$, composita seu duplici
 mensurabilis ipsi $d b$. Itaq, cum utraq, $a d$ & $d b$
 composita ex $a f$, $d b$ longitudine sit commensurabilis,
 erunt etiam $a b$, $d b$ longitudine commensurabi-
 les: adeoq, cum tota $a b$ ex $a d$, $d b$ composita
 ipsi $d b$ sit commensurabilis longitudine, ipse $a d$,
 $d b$ etiam inter se commensurabiles & erunt longi-
 tudine.

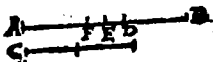
©

PROPOSITIO XIX.

Theorema 18.

S

Si fuerint duæ rectæ lineæ ab , & c inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major ab tantò plus poterit quam minore, quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major ab tantò plus possit, quam minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autē parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammū ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata; in partes ad , db longitudine incommensurabiles ipsam dividet.



Omnia constituentur ut in præcedenti propositione, nisi ut ad , db fiant incommensurabiles longitudine. Quodcum ita sit, erit etiam tota ab æquali db longitudine incommensurabilis. Sed db est commensurabilis sua dupla ex db , ac cōposita.

V 2

Igitur

§ 14. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, $d b$ & composita ex $d b, a f$, una $d b$ incommensurabilis sit ipsi $a b$, etiam reliqua ex $d b, a f$ composita eadem $a b$ incommensurabilis β erit: adeoque cum $a b$ ex $a f, f d$ & $d b$ composita sit incommensurabilis longitudine composita ex $a f, d b$; erit eadem $a b$ etiam reliqua $f d$ incommensurabilis, atque sic $a b$ plus potest quam c , quadrato rectae $f d$, longitudine sibi incommensurabilis.

Contra in partes $a d, d b$ incommensurabiles divisa ostenditur linea $a b$. Iisdem enim, ut prius recentis, erit $a b$ ipsi $f d$ incommensurabilis. Itaque cum tota, $a b$, ex $f d, a f, d b$ composita, ipsi $f d$ longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam $a b$ reliqua ex $a f$ & $d b$ composita incommensurabilis erit. Sed una recta ex $a f$ & $d b$ ipsi $d b$ longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaque commensurabilium, composita ex $a f, d b$ & $d b$; ipsa composita ex $a f, d b$ incommensurabili ipsi $a b$, β erit etiam reliqua $d b$ eadem $a b$ incommensurabilis. Cum itaque tota $a b$, composita ex $a d, d b$ longitudine incommensurabilis sit ipsi $d b$, erunt & ipsa $a d, d b$ inter se incommensurabiles.

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transendum est ad Rationales & Medias.

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, li
nea

neas longitudine commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles non omninò & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam vocari Rationalem, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omninò & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic, Rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; cōmensurabiles, inquam, inter se, vel longitudine & potentia vel potentiâ solum: Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales lōgitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiā potentia commensurabiles esse; si verò potentia inter se solum sunt cōmensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales; potentia solum inter se commensurabiles.

LEMMA 3.

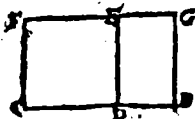
Si sint duæ rectæ lineæ, cd , bd , erit, ut prima cd ad secundam bd : ita quadratum df , quod fit à prima cd , ad re-

angu

Et angulum $d g$, quod sub duabus illis
rectis lineis continetur: & ut secunda
 $d b$ ad primam $b c$; ita rectangulum
 $d g$ sub ipsis, ad quadratum $c e$ ex prima.

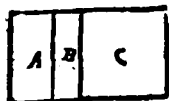
Cum enim rectangula $c e$, VI.

$c g$ sint equalia, sunt ut la-
titudines.



LEMMA 4.

Spacium a Ratio-
nali spacio b commē-
surabile & a ipsum
Rationale est.



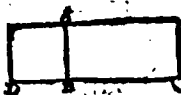
Sit enim c quadratum rationale: Cum ergo b
sit rationale, erit Rationali c commensurabile: 9 def. X.
Cumq; a ipsi b sit commensurabile, etiam a &
 c tanquam commensurabilia ipsi b , inter se
 a commensurabilia erunt, & sic etiam Rationali c 12. X.
commensurabile a , ipsum quoq; rationale erit.

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitu-
dine commensurabilibus, rectis lī-
neis $a b$, $b c$, secundum aliquem præ-
dictorum modorum, (in lemmate
secundo propositorum, ut longit.)
continetur Rectangulum, rationale est.

49. def.
 1. VI.
 2. 10. X.



Super alterutra illarum, ac
 $a b$ fiat quadratum $a d$ ra-
 tionale. Quia autem $a b$, id
 est, $b d$, & $b c$ rationales
 commensurabiles sunt longitudine, & β est, ut $d b$
 ad $b c$, ita $a d$ ad $a c$, erunt etiam $a d$ & $a c$ com-
 mensurabilia, atq; $a d$ rationali, commensura-
 bile $a c$ etiam γ rationale.

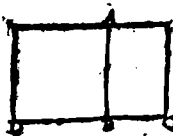
PROPOS: XXI.

Theorema 18.

Si Rationale $a c$ ad Rationalem $a b$
 applicetur, latitudinē $b c$ efficit Rati-
 onalem, & $c i a b$, ad quam applica-
 tum est, longitudine commensura-
 bilem.

1. X.

1. VI.



Ex $a b$ fiat quadratum,
 quod est rationale, erunt $a d$,
 ac rationalia; adeoq; $a c$ com-
 mensurabilia. Sed β ut $a d$
 ad $a c$, ita est $d b$, id est, $a b$
 6 def. X. Rationalis ad $b c$ γ rationalem.

LEMMA I.

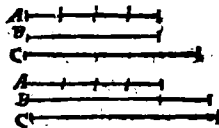
Recta linea potens spacium irra-
 tionale, irrationalis est.

Si enim

Si enim linea illius quadratum equale sit spatio
 irrationali, ipsum irrationale esse oportet, aut
 quadratum illud foret contra hypotesin rationale
 a propter ipsam lineam rationalem.

LEMM A 2.

Duas rectas bc Rationales potentia
 solum commensurabiles invenire.



He, ut & rationa-
 les longitudine commēsu-
 rabiles, duplices tantum
 sunt; Aut enim illarum
 una, ut b , longitudine est
 commensurabilis data a ,
 & tū ipsi a equali assum-
 ta b rationali invenia-

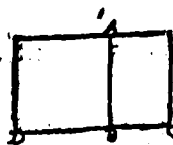
tur potentia tantum commensurabilis, vel longitudi-
 ne tantum incommensurabilis, quæ & ipsa β ratio-
 nalis est: Aut neutra illarum longitudine ipsi a
 est commensurabilis, & tū illi primum b , & hu-
 ius c inveniaturs potentia commensurabilis. Eruna
 ergo rationali a potentia commensurabiles a b &
 a c , ipsæ quoq, β rationales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod sub Rationalibus a b , b c po-
 tentia tantum commensurabilibus
 V s rectis

rectis lineis cōtinetur rectangulum
 ac ; Irrationale est: & recta linea i-
 psum potens, rationalis est. Vocetur
 autem Media.



Ex altera, ut $a b$, descri-
 ptum sit quadratum ad , quod
 rationale est. Quoniam verò
 a est ut $b d$, id est, $a b$ ad $b c$;
 ita $a d$ ad $a c$; & $a b$, $b c$

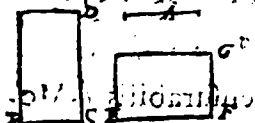
sunt longitudine incommensurabiles; & erunt &
 $a d$, $a c$ incommensurabilia; cumq; quadratum
 $a d$ sit rationale, irrationale erit $a c$ rectangulum,
 & ipsi aequale quadratum describens linea & irra-
 tionalis. Hac autem linea cum inter $a b$ & $b c$ sit
 media proportionalis, vocatur Media, & rectan-
 gulum dicitur medium, quod vel sub duabus poten-
 tia tantum incommensurabilibus concipitur, ut $a c$;
 vel quod alteri cupiam, sub talibus lineis compre-
 henso, aequale est, quia aequale est quadrata su-
 per media proportionali descripto.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 20.

Quod à Media & fit, ad Rationa-
 lem $b c$ applicatum, latitudinem ef-
 ficat Rationalem cd , & ei bc , ad quam
 applicatum est, longitudine in-
 commensurabilem.

Quoniam



Quoniam a est Me-
dia, potest rectang. e g
duobus rationalibus e f,
f g potentia tantum
commensurabilibus con-
tentum, & rectangu-

leb d, e g sunt aequalia, p 14. VI.

Laterum a reciprocè proportionalium, ut b c ad
e f; ita a f g ad c d. v. Et ut quadratum ex b c, ad
quadratum ex e f, quæ super rationalibus lineis
sunt commensurabilia; ita quadratum ex f g, ad
quadratum ex c d inter se commensurabilia, ipse q;
recta f g & c d ÷ commensurabiles; & cum f g
sit rationalis, utraq; etiam Rationalis erit. Sed
c & ipsi b c est incommensurabilis. Cum enim e f,
f g sint rationales potentia tantum commensura-
biles; itaq; ut e f ad f g, ita quadratum ex e f,
ad rectang. e g, d. ut quadratum ex c f rectan-
gulo e g incommensurabile, & sic rectangulo b d.
At quadratum ex e f commensurabile est quadrato
ex c d (quia lineæ illæ sunt rationales & potentia
tantum commensurabiles.) itaq; cum eidem qua-
drato ex c f rectangulum b d sit incommensurabi-
le, etiam b d rectang. & est incommensurabile;
quadrato c d. Cū verò c d & b c sint ut quadra-
tum c d & rectang. b d incommensurabilia: ÷
erunt ipsæ quoq; longitudine incommensurabiles.
Est ergo rationalis c d, & rationali b c poten-
tia tantum commensurabilis seu longitudine in-
commensurabilis.

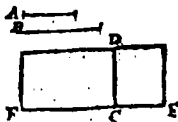
PRO-

EUCLIDIS ELEMENTA:
PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Mediarum a commensurabilis, b , Media est.

45. I.
23. X.



Sit d rationalis, ad quam applicetur rectang. $d e$ a. quale quadrato ex a , & erit c rationalis ipsi $c d$ longitudine incommensurabilis. Eidem

$c d$ applicetur rectangulum $d f$ equale quadrato ex b . Cum ergo a, b sint commensurabiles; ipsarum quadrata, id est, rectangula $d e, d f$ etiam commensurabilia erunt. Est autem, ut $d e$ ad $d f$ ita recta $c c$ ad rectam $c f$, & $c c$, & $c f$ longitudine sunt commensurabiles. Sed $c c$ est rationalis, ipsi $c d$ potentia tantum commensurabilis: itaque & $c f$ eidem $c d$ longitudine incommensurabilis erit. Et quia rationalis est $c f$, cum rationali $c d$ commensurabilis sit potentia, potentia etiam commensurabiles erunt $c d, c f$. Ac proinde breviora potens rectangulum $d f$ sub rectis $c d, c f$ potentia tantum commensurabilibus, media est.

1. VI.
10. X.

14. X.

22. X.

Corollarium.

Spacium $d f$ Medio spacio $d e$ commensurabile, medium est.

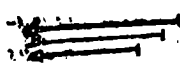
Patebat, quod utraq; continerantur rectis po-
tentia tantum commensurabilibus.

LEMMA 1.

Congruit hoc omniquaq; cum lem-
mate 1, 19 propos. nisi quod loco Ra-
tionalis semper legendum est Me-
dium.

LEMMA 2.

Duas rectas Medias ab longitu-
dine commensurabiles; item duas
 ac potentia tantum commensura-
biles invenire.

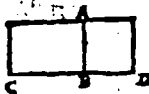
 Si bipſa Media longitudine;
c vero eidem potentia tantum
commensurabilis invenitur,
atq; etiam a erit Media, a b quidem longitudi- 24. X.
ne, ac vero potentia tantum commensurabiles me-
dia.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sub Mediis Longitudine
commensurabilibus rectis lineis ab ,
 bc continetur rectangulum ac , Me-
dium est.

VI.



Ex a b media fiat, quod
dratū ad, quod est, medium
cum a sit, ut d b ad b c, ita
a d ad a c: sunt autem d b

id est ab & bc longitudine commensurabiles.
Itaq; ad , ac & erunt commensurabiles. & Quare
spatium ac medio ad commensurabile Medium
est.

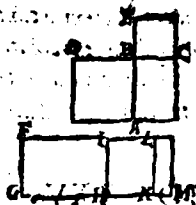
No. X.
 y Cor.
 24. X.

PROPOS: XXVI.

Theorem 23.

Quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis a, b continetur rectangulum, a, c , vel Rationale est, vel Medium.

22. X.
p 45. I.



Descriptio quatuor
triangulorum h & b & c a modis
ad Rationalem f & g & ap-
plicentur rectangula f & h
 h & f , f & h in equalitate
triangulorum a & c , c & e , ut
fiat rectangulum apertum.
Cum itaque a & b & c

23. X.
24. I.

sint media, etiam fh , interunt media, & eorumq;
 latitudines gh, km rationales, propter fg, kl
 aequales rationales, quibus sunt applicata. & po-
 tentia commensurabiles erunt. Cumq; a, b, bc sit
 potentia commensurabiles, etiam $b, arum$ qua-
 drata $a d, c c$, & his equalia rectangula $fd, l m$

CONF-

commensurabiles erunt. Sed ut fh ad lm ita $11. VI.$
 $rect\ g h$ ad $k m$. Sunt igitur $g h, k m$ longi- $10. X.$
 tudine inter se commensurabiles. Et quia $ra-$ $10. X.$
 tionalis fg potentia sunt commensurabiles; etiam
 rectangulum sub $g h, k m$ comprehensum $\propto$ ratio-
 nale erit. Quia verò est, ut $d b$ ad $b c$; ita $a d$
 ad $a c$: & ut $a b$ ad $b e$, ita $a c$ ad $c e$; erit ut
 $a d$ ad $a c$, ita $a c$ ad $c e$; sum sit $b d$ ad $b c$, ut
 $a b$ ad $b e$, quia utriq; utraq; equalis. Proinde
 & ipsi equalia rectangula fh, hl, lm erunt
 proportionalia, ut & ipsorum Bases $g h, h k,$
 $k m$: adeoq; rectangulum sub $g h, k m$ ratio- $17. VI.$
 nale quadrato ex $h k$ erit equalis, quod & ipsum
 & ipsius datum $h k$ rationale est; & ob id fg ra-
 tionali exposita longitudine vel potentia, com- $6. def.$
 mensurabilis est $h k$. Et si $h k$ ipsi hi id est fg
 longitudine commensurabilis fuerit, $\propto$ erit re-
 ctangulum hl rationale: Sed si tantum poten-
 tia $\propto$ erit Medium. Est ergo rectangulum sub
 Medij potentia tantum commensurabilis vel
 Rationale vel Medium

Scholium.

Facilius quàm per 45. I. potest da-
 to $a c$ rectangulo $\propto$ equalis fieri ad hl ra-
 tionale m datam, si tribus his a applice- $12. VI.$
 tur quarta proportionalis $h k$. Rectan-
 gulum enim sub extremis $b i, h k$ $\beta x.$ $16. V.$
 quale est rectangulo $a c$ ex intermediis.

Siqui-

Siquidem verò rectangulum sub duabus medijs, potentia tantum commensurabilibus vel rationale vel medium est, docetur propos. 28. quomodo interveni-
endo sint illa media, qua comprehendunt ratio-
nale; & 29; qua Medium. Atq; sic ex hactenus
demonstratis colligitur, & Rectangulum sub dua-
bus Rationalibus longitudine commensurabilibus,
Rationale esse, potentia verò Medium. Rursus
rectangulum sub medijs longitudine commensura-
bilibus esse Medium: Sub Medijs verò potentia tan-
tum commensurabilibus vel Rationale vel Medium
esse. (Sub Medijs verò nec potentia nec longitudi-
ne commensurabilibus, est Medio Medium, equi-
le rectangulo sub Rationali & Irrationali Media;
quam speciem Euclides non habet.)

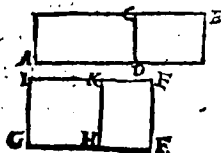
¶ 10. X.

¶ 12. X.

PROPOS: XXVII.

Theorema 24.

Medium ab non superat Medium
 ac Rationali. db



Sic enim db est Ratio-
nale, posita ec linea ra-
tionali = applicetur eq
medio ab equale, &
medio ac rectangulum
 ch equale, critq; db
rationa-

¶ 45. L.

rationali equale $k g$. Cum ergo Media $e g$, $e h$ ad
 rationalem $e f$ sint applicata a , erunt $f g$, $f h$ Ra- p. 13. X.
 tionales incommensurabiles longitudinis ipsi $e f$ ra-
 tionali. Cum item rationale $h i$ ad rationalem
 $h k$, id est, $e f$ sit applicatum, erit $h g$ rationa- p. 11. X.
 lis longitudine ipsi $e f$ commensurabilis. Sed $e f$ ipsi
 $f h$ longitudine est incommensurabilis. Ergo $h g$
 eidem $f h$ longitudine incommensurabilis d'erit. Ve- p. 14. X.
 ram ut $f h$ ad $h g$, ita quadratum ex $f h$, ad re- p. 13. Lemma
 ctangulum $f h g$. Itaq, quadratum ex $f h$ incommen- p. 19. X.
 surabile d'erit rectangulum $f h g$. Sed quadrato p. 10. X.
 ex $f h$ commensurabile est quadratum ex $h g$
 (quia utraq, ex rationalibus lineis sunt descripta)
 adeoq, duo quadrata ex $f h$, $h g$ simul commensu- p. 16. X.
 rabilia sunt quadrato ex $f h$; & rectangulum $f h g$
 commensurabile est bis sub $f h$, $h g$ sumto rectan-
 gulo (quia duplum) Itaq, quadrata $f h$, $h g$ simul
 incommensurabilia d'erunt rectangulo bis sumto sub
 $f h$, $h g$. Quare & compositum ex quadratis p. 17. X.
 rectarum $f h$, $h g$ & ex bis sumto rectangulo
 $f h g$ incommensurabile est composito ex quadratis
 rectarum $f h$, $h g$. Sed quadratis $f h$, $h g$, una
 cum rectangulo $f h g$ bis sumto, aequale est qua- p. 4. II.
 dratum $f g$. Ergo quadratum ex $f g$, com-
 posito ex quadratis rectarum $f h$, $h g$ incommen-
 surabile erit. Quod compos. cum sit & ratio- p. 4. Lemma
 nale: etiam ipsi incommensurabile quadratum ex p. 19. X.
 g erit irrationale, & sic etiam recta $f g$ irratio-
 nalis,

nalk, contra hypotbesin, quæ illam longitudinem incommensurabilem ipsi e f ponebat.

Scholium.

Rationale e g superat Rationale e b, h g Rationali.

n. 9. def. X.

9. 12. X.

7 cor, 16. X

4 Lemma

19. X.

Quia enim e g, e h sunt rationalia, æ erunt eadem commensurabilia quadrato rationalis exp-
fite; & quare & inter se commensurabilia. Itaq;
cum totum e g ex e h, k g compositum, ipsi e h, sit com-
mensurabile; erit quoq; idem e g reliquo k g com-
mensurabile. Sed e g est rationale. Ergo & k g
Rationale erit.

PROPOSITIO XIIX.

Problema 4.

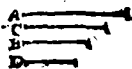
Medias c d invenire, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

Lemma 22.

11. X.

13. VI.

12. VI.



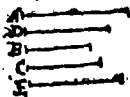
Inter æ assumptas a, b rationales, potentia tantum commensurabiles, & cadat media c, & fiat, ut a æ b, ita c æ d. Erunt c d media potentia tantum commensurabiles; quæ comprehendunt Rationale. Rectangulum sub a b rationale

libus potentia tantum commensurabilibus & Medi-
um est, & illud potens, Media. Sed ut a ad b ,
ita est c ad d : a & b sunt potentia tantum com-
mensurabiles. Ergo & c, d : & propter c Mediam
etiam d Media. Sunt itaq; inventa c, d me-
dia potentia tantum commensurabiles; Quae et-
iam Rationale continebunt. Cum enim sit ut a ad
 b , ita c ad d ; etiam permutando est, ut a ad
 c , ita b ad d . Sed ut a ad c , ita c ad b . Ergo
ut c ad b , ita b ad d : ideoq; b media propor-
tionalis inter c & d , poteris rectangulum sub c, d
comprehensum. Sed quadratum ex rationali,
est rationale. Ergo & rectangulum sub c, d , ratio-
nale est.

PROPOS. XXIX.

Problema. 5.

Medias d, e invenire, potentia tan-
tum commensurabiles, quæ Medi-
um contineant.



Sanctis tribus potentia tantum commensura-
bilibus, interq; a, b Media d fiat, ut b ad
X 2 c , ita
Lemmas.
21. X.
13. VI.
12. VI.

- c , ita d ad e . Erunt d , e mediae potentiae tantum commensurabiles continentes Medium. Cum a , b rationales potentiae tantum commensurabiles sint ex illis rectangulum d erit medium, & illud potentia d media. Sed, quia, ut b ad c potentiae tantum commensurabiles sunt d & e , & Mediae d commensurabilis e media. Sic itaque d , e mediae potentiae tantum commensurabiles, sunt inventae; quae etiam continebunt Medium. Quia enim est, ut b ad c , ita d ad e ; & permutando, ut b ad d , ita c ad e erit. Ut autem b ad d , ita a ad a ; erit ergo d ad a ut c ad e . Itaque rectangulum sub d , e , & aequale est ei, quod sub a , c . Hoc autem sub rationalibus potentibus solum commensurabilibus & Irrationale est & Medium. Ergo & rectangulum sub d , e .
322. X.
317. VI.
310. X.
324. X.
316. VI.

Scholium 1.

Duos numeros planos similes invenire.

A, 6. C, 12.

B, 4. D, 8.

E, 24. F, 96.

Assumptis quatuor quibusvis numeris proportionalibus, ut a ad c , ita b ad d , ex a in b , ut & ex c in d facti numeri e & f sunt similes plani, quia constant lateribus proportionalibus, ut patet ex constructione.

LEM

LIBER X.
 LEMMA I.

878

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A E D B

C

Inveniantur per Scholion precedens duo plani similes ab & c , ambo pares vel impares. Cumq; 14. &
16. IX. sublato pari à pari vel impari ab impare semper remaneat par, ex a b sublato d b ipsi c equali reliquus a d par erit. Quo diviso bisariam in c , dico factum ex a b in b d , (qui quidem β quadratus est) 1. IX. cum quadrato ex e d compositum, facere quadratum. Quia enim numerus a d bisariam sectus est in c , ipsiq; additus d b , γ erit qui sit ex a b in b d quadratus, una cum quadrato d e , 6. II. equalis numero quadrato ex c b .

Corollarium.

Quando a b & c sunt plani similes, quadrati ex e b & e d se excedunt quadrato ex a b in b d . Cum autem a b & c non sunt similes, sed tamen vel pares simul, quadrati e b & e d non excedunt se quadrato: Si enim excessus hic ex a b , β factus esset quadratus, X 3

2. IX. tus, essent ab & c = plani similes, contra hypoth.

Scholium, 2.

Huic facile inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alij duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A . . H . . I . E . F . G . . D B

C

Sint plani similes ab & c , eademq; adhibita constructione ut in lemmate præcedere, auferatur ex d e unitas ef . Erit quadratus ex df minor quadrato ex de propter inaequalitatem laterum. Dico quadratos ex ab in d b, & ex df in se compositos non efficere quadratum. Si enim quadratus esset, esset quadrato bf vel major vel æqualis vel minor.

Primo

Primo: Si esset major, latus ipsius esset majus latere $b f$, essetq; ipsi $b e$ vel aequale vel majus, (quia minus esse nequit, cum inter $b f$ & $b e$ unitate tantum differentes non cadat medius) Si aequale, itaq; ut quadrato ex $b e$ equalis sit quadratus, compositus ex quadrato factus ex $a b$ in $b d$ & ex quadrato $d f$. Cū eidem quadrato ex $b e$ ex precedente lemmate equalis sit numerus factus ex $a b$ in $h d$ & ex $d e$ in se, erunt, factus ex $a b$ in $b d$ cū quadrato ex $d f$, & ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$ aequales. Ablatoq; communi, qui ex $a b$ in $b d$ fit, erunt quadrati ex $d e$, & $d f$ aequales. ipsaq; latera $d e$, totum & $d f$ pars equalia. Latus itaq; quadrato ex quadrato compositi, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $f e$ in se fit, nequis esse aequale numero $b e$. Neq; eodem est majus. Si tamen esset, ut aequale $b i$. Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex $b e$ minore latere, etiam compositum ex quadrato, quorū alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $d f$ in se fit, major quadrato ex $b e$; cui per lemma precedens equalis est numerus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$. Itaq; ablato communi ex $a b$ in $b d$, erit reliquus quadratus ex $d f$ equalis reliquo quadrato ex $d e$ major. latusq; $d f$ latere $d e$ majus, pars toto compositi ergo ex quadrato $a b$ in $b d$ & ex $d f$ in se quadrati latus majus esse nequit latere $b e$; adeoq; ut ostensū, nec aequale, nec minus. Ideoq; quadratus ille compositus nō est major quadrato ex $b e$.

X.

Deinde

Deinde ponatur quadratum ex $a b$ in $b d$ & $d f$ in se, equalis quadrato ex $b f$, & $a h$ sit duplex unitatis $e f$. Quoniam totus $a d$ totius $e d$ est duplus (quia $a d$ in e est bisariam sectus) & ablatum $a h$ ablata unitatis $e f$; erit & reliquus $h d$, reliqui $f d$ duplus & $h d$ in f bisariam sectus. Factus itaq; ex $h b$ in $b d$, una cum quadrato ex $d f$, equalis erit quadrato ex $b f$. Sed eidem equalis ponitur factus ex $a b$ in $b d$ & quadrato ex $d f$. Itaq; ablato communi quadrato ex $d f$ reliquantur ex $a b$, in $b d$ & ex $h b$ in $b d$ aequales. Atq; sic $a b$ & $h b$ eundem $b d$ multiplicantes, producentes numeros aequales, & erunt ipsi quoq; aequales, pars toti. Non ergo factus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$ quadrato ex $b f$ equalis est.

Deniq; ponatur quadratum ex $a b$ in $b d$ cum quadrato $d f$ minor quadrato $b f$; unde & latius ejus latere $b f$ minus erit, ut $h g$; sumaturq; ipsius $e g$ duplus $a i$. Quoniam ergo totus $a d$ totius $e d$ duplus est, & ablatum $a i$ ablati $e g$; erit & reliquus $i d$ reliqui $g d$ duplus; & $i d$ in g divisus bisariam. Numerus ergo ex $i b$ in $b d$ cum quadrato ex $d g$ equalis quadrato ex $b g$. Sed eodem quadrato ex $b g$ equalis ponitur ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$. Ablati igitur quadrati $d g$, $d f$ quorum $d g$ minor est; remanebit ex $i b$ in $b d$ major eaque ex $a b$ in $b d$ pars toto. Non est ergo ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$ minor quadrato ex $b f$. Sicut neq; major, neq; equalis
 ostendit

assensu est. Non itaq³ est quadratum ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$. Quod erat propositum.

Schollum. 3.

Hinc inventu faciles sunt duo numeri, ut compositus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim est compositus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam sunt minimi non quadrati, in quas quadratus aliquis dividitur.

PROPOS: XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales $a b$, $a f$ potentia tantum commensurabiles, ita, ut major $a b$, quam minor $a f$, plus possit quadrato rectæ lineæ $b f$ longitudine sibi commensurabilis.



Assumta recta Rationali $a b$, &

a duob. numeris $c d$, $c e$ quorū

excessus $d e$ non sit quadratum, & si

atq³ $c d$ ad $d e$, ita quadratum

rectæ $a b$ ad quadratum $a f$ quæ se-

X 5

nunculo

a 2. Scholl.

propos.

preced.

& per lem.

ma 6. X₂

micirculo super $a b$ apsetur & $f b$ connectatur.

731. III. Cum ergo f in semicirculo & sit rectum, equale est quadratum $a b$ quadrato $a f$, $f b$ & $a b$ quam $a f$ plus potest. quadrato $f b$. Cumq; quadratum ex $a b$ sit ad quadratum $a f$, ut $c d$ ad $d e$,

86. def. & erunt illa quadrata inter se commensurabiles, adeoq; erit aequale quadratum $a f$ Rationale, & ipsa $a f$ Rationalizataq; quadratum $a b$ super Rationali $a b$ descriptum Rationale est. Rationales ergo sunt $a b$, $a f$ & potentia tantum commensurabiles. Longitudine enim commensurabiles esse

9. X. nequeunt erunt, & cum non habeant rationem

24. IIX. quam numerus quadratus ad numerum quadratum quia $d e$ non est quadratum.

Iam vero quoniam est ut $c d$ ad $d e$, ita quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $a f$, erit convertendo, ut numerus quadratus $c d$ ad numerum quadratum $d e$, sic quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $a f$. Sunt ergo $f b$, $a b$ longitudine commensurabiles.

PROPOS: XXXI.

Problema 7.

Invenire duas $a b$, $a f$ Rationales potentia tantum commensurabiles, ita, ut major $a b$ quam minor $a f$ plus possit Quadrato rectæ lineæ $f b$ sibi Longitudine incommensurabilis.

assum.



CI44. E 16. D C. 166. D.

C. v. . . . E . . . D.

Assumpta Rationali ab , a inventiantur duo a per Lem-
 quadrati numeri ce , ed , quarum summa cd α ma 2. 19. X.
 non sit numerus quadratus: vel quadratus cd in
 duos ce , ed non quadratos dividatur; β habe- 24. IIX.
 bit cd ad neutrum ce , vel ed proportionē nu-
 merorum quadratorum, fiatq; , ut cd ad de β Lemma
 ta quadratum ab ad aliud, ut af ; & applica- 6. X.
 ta a f ad semicirculum super ab descriptum, con-
 rectatur fb iam poterit ab plus quam a f qua-
 drato recta fb , d eruntq; ab , af Rationales d 30. X.
 potentia tantum commensurabiles. Sed cum
 convertendo sit, ut prius, quadratum ab ad qua-
 dratum fb , ut cd ad ce : cd autem ad ce non
 ut quadratum ad quadratum. Non itaq; ab
 ad af habet rationem numeri quadrati ad nu-
 merum quadratum, & sunt Longitudine in- 9. X.
 commensurabiles. Inventa ergo sunt dua recta
 b , af potentia solum commensurabiles, ut a b
 major plus possit quam minor af quadrato recta
 b sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæqua-
 s, erit ut major ad minorem,
 ita

ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.

Demonstratio eadem est cum Lemmatis 3. in propos. 19. demonstratione.

PROPOS: XXXII.

Problemæ 8.

Invenire duas Medias c , d potentia tantum commensurabiles, quæ rationale contineant; ita, ut major c , plus possit quàm minor d , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

æo. X.



Inveniantur duæ Rationales a , b potentia tantum commensurabiles, ut a major plus possit quàm minor b , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, inter quas sit media proportionalis c ; hæcque, ut a ad b , ita c ad d . Quoniam ergò ad Rationales potentia tantum sunt commensurabiles, erit sub ipsis rectangulum irrationalis, & c recta illud potens Media. Et quia est c ad d , ut a ad b , quæ potentia tantum sunt commensurabiles, etiam c & d potentia tantum commensurabiles, erunt; & Media c commensurabilis d à Media

æ 12. X.

æ 10. X.

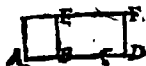
æ 24. X.

Com.

Comprehendunt haec duae Mediae c, d potentia tantum commensurabiles Rationales quod ex 22. huius patet. Quia enim est ut a ad b , ita c ad d : Sed a quam b , plus potest, quadrato rectae longitudine, ex constructa sibi commensurabilis; & poterit & c plus quam d & 15. X. quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Patet ergo propositum. Si autem a, b , rationales se excederent quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, eodem numero ostenderetur c, d medias potentia tantum commensurabiles continere Rationale, ut major c plus possit quam d , quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint tres lineae rectae $a b, b' c, c d$, erit ut prima $a b$ ad tertiam $c d$ ita rectangulum $a e$ sub prima $a b$ & secunda $b c$ contentum ad id $c f$, quod sub secunda $b c$ & tertia $c d$ continetur.



Describaturs ex $b c$, quadratum $c e$ compleaturque, rectangulum $a f$. Erit $a e$, ad id ut $a b$ ad $c d$. 1. X.

PROPOSITIO XXXIII.

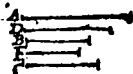
Problema 9.

Invenire duas Medias de potentia solum

solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major d plus possit quam minor, e , quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.

30. X.

per Lem-
ma. 2, 21. X.



Inventis duabus a, c , sumatur b utriusque longitudinis incommensurabilis ut habeatur

tres Rationales a, b, c potentia tantum commensurabiles; ita ut a plus possit quam c quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sumaturque d media proportionalis inter a & b ;

13. VI.

12. VI.

per Lem-
ma 32. X.

17. VI.

16. VI.

et sic d ad b , ut c ad e . Quia ergo est, ut a ad c , ita rectangulum sub a, b , ad rectangulum sub b, c . Sed rectangulum sub a, b , æquale est quadratum ex d , & rectangulum sub b, c , rectangulum sub d, e . Ergo ut a ad c , ita quadratum d , ad rectangulum sub d, e ; Sed ut quadratum d , ad rectangulum sub d, e , ita recta d ad rectam

3. Lem.

19. X.

10. X.

12. X.

24. X.

e . Est ergo d ad e , ut a ad c : quæ cum potentia tantum sint commensurabiles; Ergo & d, e . Et quia d potens spatium, sub Rationalibus a, b potens solum commensurabilibus, irrationalis est & Media erit etiam ipsi commensurabilis E Media

Sunt ergo d, e duæ Medie potentia solum commensurabiles, Cum vero ostenderit rectangulum sub b, c Medio æquale esse rectangulum sub d, e ,

d, e , erit hoc quoque medium. Denique cum ostensum sit esse d ad e , ut a ad c ; Sed a plus posse quam c , quadrato recte sibi longitudine commensurabilis; similiter pl^{us} etiam poterit d quam e . Quod erat faciendum. 15. X.

Quod si Rationalium a, b, c assumptarum potentia commensurabilium a plus posset quam c , quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur, d, e , duas medias inventas potentia solum commensurabiles, continere medium, ut major d plus possit quam minor e , quadrato recte linea sibi longitudinis incommensurabilis.

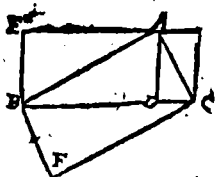
LEMMA. 1.

Sit unum rectangulum abc , angulum habens b ac rectum, à quo perpendicularis ad esto demissa. Dico, rectangulum sub cb, bd æquale esse quadrato ab ; & contentum sub bc, cd æquale quadrato ac , & contentum sub bd, dc , æquale quadrato ad : contentum denique sub bc, cd æquale contento sub ab, ac .

Quia

EVCLIDIS ELEM:

8. VI.
17. VI.
16. VI.
4r. L.



Quia enim ab est inter bc & bd , a media proportionalis; rectangulum ex bc & bd a equale est quadrato ab . Et deq, modo rectangula ex

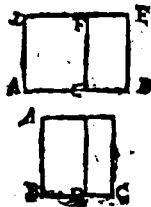
b c , cd , & ex bd , d c equalia sunt quadratis ca & da . Deniq, quia triangula abc , abd sunt similia, erit, ut bc ad a c ; ita a b ad a d , quare rectangulum ex bc , ad equale est rectangulo sub a b , a c ; ve ejusdem trianguli a b c dupla, rectangula cc , c b sunt equalia.

LEMMA 2.

Si recta linea ab secetur in duas partes inaequales ac , cb ; erit, ut major pars ac ad minorem cb , ita rectangulum af , sub tota ab & maiore parte, ad rectangulum cd sub tota ab & minore parte cd contentum.

1. VI.

Super ab describatur quadratū, & ex c erigatur perpendicularis. Quoniam a est, ut a c ad cb , ita a f ad cd , patet propositum.



LEMMA 3.

Si sint duae rectae lineae inaequales ab , bc minor autem bc secetur

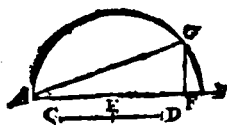
etur in d bifariam; erit rectangulū
 ac sub ipsis contentum duplū rectan-
 guli ad , quod sub maiori linea ab &
 dimidia parte bd , minoris bc con-
 tinetur.

Completo ac rectangulo, & ducta parallela a 1. VI.
 per d ipsi ab , a patet propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 10.

Invenire duas rectas lineas ab ,
 gb , potentia incommensurabiles,
 quæ faciant compositum quidem ex
 ipsarum quadratis, Rationale; Re-
 ctangulum verò sub ipsis conten-
 tum, Medium.



a Inveniantur due Ra- α 31. X.
 tionales lineæ ab , cd , β Lemma 2
 minorq; cd secetur bifa- 17. X.
 riâ in e , β fiatq; rectan-
 gulum sub af , fb æquale

quadrato ce . Describatur etiam semicirculus agb
 & ipsi ab perpendicularis fg agatur, cōnectanturq;
 g . gb . Quia ergo ab plus potest quàm cd qua-
 drato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, ap-
 plicatumq; est ad ab rectangulum afb , æquale
 quarta

19. X. quarta parti quadrati cd , deficiens figura quadrati
 Lemma 2. af erit a ipsi fb longitudine incommensurabilis.
 33. X. Sed ut a af ad fb , ita rectangulum baf ad abf sit
 Lemma 1. tang. Quae duo rectangula aequalia sunt quadrato
 33. X. ag, gb , quia g in semicirculo est rectus. Erit igitur,
 31. XI. ut a af ad fb , ita quadratum ag , ad quadratum gb . Sed a af, fb sunt longitudine incommensurabiles. Ergo & quadrata ag, gb , ipsaeque
 10. X. rectae ag, gb potentia incommensurabiles. Et
 4. def. quia quadratum ex ab Rationali Rationale & aequale est quadrato ag, gb , etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia a fb rectangulum, aequale quadrato cc & aequale est quadrato
 17. VI. ipso fg , erunt quadrata afg, cc , aequalia, & ipse
 Lemma 3. rectae afg, cc aequales; eritque cd dupla ipsius cc ,
 33. X. etiam dupla ipsius fg . Quare rectangulum sub ab, cd , duplum erit rectanguli sub ab, fg .
 12. X. Sed sub ab, cd Rationalibus contentum est Medium: Ergo & sub ab, fg ipsi commensurabile, utpote duplum, est & Medium. Sed sub ab
 Coroll. fg rectangulo aequale est rectangulum sub ag, gb : Ergo sub ag, gb est medium. Sed ex eorum quadratis compositum erat Rationale. Ergo invente sunt duae ag, gb potentia incommensurabiles, quae faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXV.

Problema 11.

Invenire duas rectas lineas ag , gb , potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum Quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.



Inveniantur dua Media ab, cd ad mentem partem posterioris prop. 32. fiantq; reliqua, ut in precedenti; erunt ag, gb potentia incommensurabiles. Quia enim Media ab quadratum æquale ære. 47. ¶ Et ærum ag, gb quadratis est Medium, etiam compositum ex ag, gb quadratis est Medium. Rursusq; ut in antecedenti propositione ostenditur rectangulum sub $a b, c d$, duplum esse rectanguli sub $a b, f g$; Eo verò existente Rationali, erit & hoc ipsi commensurabile; & huic æquale ex ag , & Lemma 1. ¶ gb Rationale. Cum ergò sub ag, gb etiam sit 33. X. Sed idem ipse et propositum.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas,
ag, gb potentia incommensurabiles,
quæ faciant & compositum ex ipsa-
rum Quadratis Medium, & Rectan-
gulum sub ipsis contentum Medium,
incommensurabileq; composito ex
ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. paræ
propof. 33. duæ Mediæ a b, c d, & reliquæ fiant,
ut in 34. hujus. Ostenditur similiter a g, g b
rectas incommensurabiles esse potentia; composi-
tumq; ex ipsarum quadratis esse Medium, ipsumq;
rectangulum sub a g, g b esse Medium. Sed quia
ab ipsi c d est = incommensurabilis longitudine, c e
verò ipsi c d, ut dupla commensurabilis longitu-
dine, etiam a b ipsi c e longitudine incommensura-
bilis perit. Sed ut a b ad c e; ita quadratum a
a b, ad rectangulum sub a b, c e, id est, ad a b
f g, vel a g, g b. Ergo quadratum a b est, incommensurabile rectangulo a g, g b. Quæ sunt duæ r
Et inveniendæ.

a ex hypo.

§ 13. X.

73. Lemma

29. X.

§ 1. Lemma

33. X.

§ 10. X.

Princi

*Principium Senariorum per
Compositionem.*

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Si duæ Rationales a, b, b, c poten-
tia tantum commensurabiles com-
ponantur; tota a, c Irrationalis erit.
Vocetur autem ex Binis nominibus,



a Inventæ duæ a, b, b, c componantur. Fiet tota
 a, c Irrationalis. Quia enim a, b ipsi b, c est longi-
tudo incommensurabilis, estq; ut a, b ad b, c , ita
 a, b, c rectangulum ad b, c quadratum, y erit re-
ctang. a, b, c quadrato b, c incommensurabile: Sed
rectangulo a, b, c ipsius duplum est commensurabi-
le; & quadrato b, c quadratum a, b est commen-
surabile (quia sunt Rationalia) adeoque ex quadra-
tis a, b, b, c compositum eidem b, c quadrato com-
mensurabile est. Itaq; quod bis sub a, b, b, c con-
ponitur, compositum ex quadratis rectarum a, b, b, c
incommensurabile erit. Quare & compositum
ex eo, quod bis sub a, b, b, c & ex composito qua-
dratorum a, b, b, c , scilicet, ex tota a, c quadra-
to, compositum ex quadratis rectarum a, b, b, c
incommensurabile erit. Sed quod ex quadratis re-
ctarum

a, b, c rectang.
21. X.
lem. 31. X.
10. X.

16. X.
14. X.

4. II.
17. I.

Etiam $a b, b c$, est Rationale; quia commensurabile est quadrato rationalis $b c$. Igitur ex $a c$ quadratum, Rationali ex $b c$ quadrato incommensurabile est, irrationale, est ipsa $a c$ recta. *Prop. 10. def. X.* tionalis. Vocetur autem ex binis nominibus vel Binomium, quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus componitur.

Scholium.

Ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas est Irrationalis, et itemque ex ipsis composita seu Binomium. *Prop. 11. X. 37. X.*

PROPOS: XXXIIX.

Theorema 26.

Si duæ Mediæ $a b, b c$ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota $a c$ Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. *Prop. 1. X.*

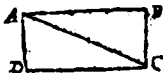


Quia enim $a b$ et $b c$ est, ut $a b c$ rectangulum

ad quadratum bc : Sed ab, bc sunt longitudine
incommensurabiles. β Sunt ergo abc rectangu- $\beta 10. X.$
lum & quadratum bc incommensurabilia. Est au-
tem rectangulo abc bis sub ab, bc commensu-
rabile; & quadrato bc compositum ex quadratis $\gamma 16. X.$
 ab, bc . Igitur rectangulum sub ab, bc bis,
& compositum ex quadratis rectarum ab, bc ,
sunt δ incommensurabilia inter se. Ergo compo- $\delta 14. X.$
situm ex quadratis ab, bc una cum rectangulo
 abc bis, id est, quadratum ac ζ incommensura- $\zeta 4. II.$
bile est rectangulo abc bis sumto. Sed eidem $\eta 17. X.$
 abc rectangulo bis, est commensurabile ipsum
semel. Igitur quadratum ex ac est incommensu- $\eta 13. X.$
rabile rectangulo abc . Sed abc rectangulum $\theta 10. def. X.$
ponitur Rationale. Ergo quadratum ac est θ Ir-
rationale, ipsa q, ac irrationalis. Vocetur autem $\theta 11. def.$
ex Binis Mediis prima vel Bimediale prius.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali ab &
Irrationali bc continetur rectangu-
lum, Irrationale est.



Sin minus, ipsum Rationale ad Rationalem ab ,
applicatum, faciet latitudinem bc Rationalem $\alpha 11. X.$
contra hypothesis.

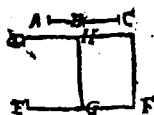
PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ $a b$, $b c$ potentia tantum commensurabiles & componantur, quæ Medium contineant; tota $a c$ Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

29. X.

45. I.



4. II.
ex hypo-
thesi.

cor. 24. X

16. X.

23. X.

3. Lem.

19. X.

10. X.

β Expositæ Rationali $d e$, applicetur rectangulum $d f$ equale quadrato, $a c$; & compositum ex quadratis $a b$, $b c$ equale sit $d g$. & Erit itaq, $h f$ equale bis summo rectangulo $a b c$. Quodcum sit δ Medium; α erit & $h f$ ipsius duplum medium. Et quia quadrata mediarum $a b$, $b c$ commensurabilia sunt potentia, etiam ex ipsis compositum rectangulum $d g$ utriusque ipsorum ζ commensurabile erit. Sed utrumque quadratum ex Medijs est Medium. Ergo & $d g$ erit Medium: Quoniam ergo $d g$, $h f$ Media ad $d e$ Rationalem applicatur, α erunt latitudines eorum $e g$, $g f$ Rationales ipsi $d e$ longitudine incommensurabiles. Rursus quia longitudine incommensurabilia sunt $a b$, $b c$, & α est, ut $a b$ ad $b c$, ita quadratum $a b$ ad rectangulum, $a b c$; α erunt, quadratum $a b$ & rectang. $a b c$ longitudine incommensurabilia.

Sed

Sed quadrato ab compositum ex ab , bc quadratis, & rectangulo abc solum duplū ostensum est commensurabile. λ Ergo compositum ex quadratis ab , bc id est $d g$ incommensurabile est λ 14. X.
 bis sumto rectangulo abc id est hf , μ Est verò μ 1. VI.
 ut $d g$ ad hf , ita $e g$ ad $g f$. κ Sunt itaq; $e g$, $g f$ longitudine incommensurabiles. Quæ cum sint ostensa Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, & composita $e f$, irrationaliū. ξ Est itaq; rectangulum $d f$ sub Rationali $d e$ & $e f$ irrationali, irrationale & ξ Lemma
 ipsi æquale quadratum $a c$ irrationale, ipsaq; ξ 37. X.
 $a c$ irrationalis. Hac vocetur ex Binis mediis, ξ 38. X.
 vel Bimediale posterius.

LEMMA.

Si Recta linea $a d$ non secetur bifariam in b , erit compositum ex quadratis partium $a b$, $b d$ majus, quàm Rectangulum sub partibus $a b$, $b d$ bis comprehensum, quadrato ejus lineæ $a c$ qua major pars $a b$ minorem $b d$ superat.

 Quoniam quadrata ab , bc æqualia α 7. 12.
 sunt rectangulo abc bis sumto, cum quadrato β $a c$; estq; bc ipsi bd æqualis, erunt quoque
 quadrata ab , bd æqualia rectangulo abd bis
 sumto

sumto una cum quadrato $a c$: Quare ex $a b$, $b d$ quadrata maiora sunt rectangulo $a b c$ bis sumto quadrato $a c$. Quod erat propositum.

Corollarium.

Quadrata partium inæqualium simul maiora sunt rectangulo bis sub partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

346 X.

Si duæ rectæ $a b$, $b c$ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; tota $a c$ recta linea irrationalis erit. Vocetur autem Major.



Quia $a b c$ rectangulum ponitur Mediū.

Cor.
24. X.

ejus etiam duplum a erit Medium & Irrationale. Sed compositum ex quadratis $a b$, $b c$ ponitur Rationale: Bis ergo sumtum $a b c$ rectangulum

illi

est est, incommensurable. Quare & rectan-
 gulum $a b c$ bis cum quadratis $a b, b c$, id est
 & quadratum $a c$ incommensurable est compo-
 situm ex quadratis $a b, b c$. Cum autem compo-
 situm ex quadratis, ponatur rationale erit $a c$
 quadratum irrationale & ipsa $a c$ recta irratio-
 nalis, quæ vocetur Major: Quia cum possit duo
 quadrata ex $a b, b c$ & rectangulum $a b c$ bis,
 compositum ex quadratis $a b, b c$ & majus est re-
 ctangulo $a b c$ bis. Quare cum compositum ex
 quadratis sit Rationale, & $a b c$ rectangulum
 Medium, rectè dicitur $a c$ Major, siquidem à Ra-
 tionali, quæ majus est, convenit imponere
 nomen.

PROPOS: XLI.

Theorema 29.

Si a duæ rectæ lineæ $a b, b c$ po-
 tentia incommensurabiles compo-
 nantur, quæ faciant compositum
 quidè ex ipsarum quadratis Medium;
 quod autem sub ipsis continetur, Ra-
 tionale: tota recta linea $a c$ irratio-
 nalis erit. Vocetur autem Rationa-
 le ac Medium potens.

Quo-



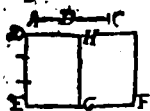
Quoniam compo-
situm ex quadratis $a b$,

$b c$ est Medium, rectangulum verò $a b c$ bis sum-
tum Rationale, & erit compositum ex quadratis
incommensurabile rectangulo bis sumto. Igitur
& compositum ex quadratis cum bis sumto re-
ctanguli γ id est, quadratum $a c d$ erit duplo re-
ctangulo $a b c$ incommensurabile. Cum autem
duplum rectanguli $a b c$ sit Rationale, & erit $a c$
quadratum irrationalis, ipsaq; $a c$ irrationalis.
Quae vocetur, Rationale ac Medium potens,
quia potest Medium ex quadratis $a b$, $b c$ com-
positum, & Rationale fieri bis sumtum rectan-
gulum $a b c$. Verum Rationale anteponitur ir-
rationali quod natura sit prius, ut ut ordine bis
sit posterius.

PROPOSITIO XLII.

Theorema, 30.

Si a duæ lineæ rectæ $a b$, $b c$ po-
tentia incommensurabiles compo-
nantur, quæ faciant & compositum ex
ipsarum quadratis Medium, & quod
sub ipsis continetur, Medium, incom-
mensurabileq; composito ex quadra-
tis ipsarum: tota recta linea $a c$ irratio-
nalis erit: Vocetur autem bina Media
potens.



Iterum exponatur Ra-
tionalis dc , ad quam p appli-
catum sit rectangulum df &
quale quadrato ac ; & dg a-

quale composito ex quadratis ab , bc , & eritq; ac . II.
In a quale bis sumto rectangulo abc . Quoniam
igitur tam compositum ex quadratis ab , bc id
est dg , quam rectangulum abc bis sumtum
id est hf sunt Media, & facient dg , hf applica-
re ad rationalem de latitudines eg , gf Ratio-
nales longitudine incommensurabiles. Et quia
compositum ex quadratis ab , bc id est dg in-
commensurabile ponitur rectangulo abc , cujus
duplum est hf , & erunt dg , hf incommensura-
bilia. Sed ut dg ad hf , ita eg ad gf , & erunt
itq; eg , gf rationales longitudine incommen-
surabiles vel potentia commensurabiles, adeoq;
totae ef , & irrationalis. Est ergo df subratio
rationali de & irrationali ef contentum irrationalis
le, & quadratum ex ac illi aequale irrationale,
ipsaq; ac irrationalis, quae vocetur Bina Media
potens, quia & compositum ex quadratis ab , bc
& rectangulum abc erant Media.

LEMMA I.

Si recta linea ab in partes in-
quales in c & d secetur, & persus in a-
lias partes iniquales; erunt quadrata
par-

partium ac , cb magis inæqualiū simul
 maiora quadratis partium ad , db mi-
 nus inæqualium simul.

 Bisecta ab in e , cadit d
 punctum vel inter e c , vel in-
 ter e a . Primò cadat inter e c .

8. II.

Quoniam ac b
 rectangulum cum quadrato ec æquale est qua-
 drato eb , ut & ad b rectangulum cum ed qua-
 drato eidem eb quadrato æquale, erunt, rectan-
 gulum ac b cum quadrato ec , & rectangulum
 ad b cum quadrato ed equalia. Ablatis autem
 inæqualium rectarum ec , ed quadratis, cum
 quadratū ec sit maius quadrato ed , reliquum
 rectangulum ac b minus erit reliquo ad b , &
 propterea bi sumtum ac b rectangulum, bi
 sumto ad b erit minus. Sed quadratum ab tam
 rectangulo ac b bi cum quadratis ac , cb , quàm
 rectangulo ad b bi cum quadratis ad , db est
 æquale: Sunt ergò equalia rectangulum ac b
 cum quadratis ac , cb & rectangulum ad b
 cum quadratis ad , db : & cum ac b sit minus
 quàm ad b , erunt residua quadrata ac , cb , ma-
 iora quadratis ad , db Quod erat propositum.
 Deinde cadat d intra ae . Quoniam ac , cb par-
 tes magis sunt inæquales quàm ad , db , erit ad
 major quàm cb , ac proinde cum ae , eb sint æ-
 quales, erit ec reliqua major reliqua ed . Itaq;
 quia rectangulum ac b cum quadrato ec qua-
 drato

4. II.

drato ex $c b$ æquale est, itemq; $a d b$ rectangulum cum quadrato $c d$, æquale eidem quadrato $c b$ erit $a c b$ rectangulum cum quadrato ex $c c$ æquale rectangulo $a d b$ cum quadrato $c d$. Ergo ut prius $a c$, $c b$ quadrata, majora sunt quadratis $a d$, $d b$.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 31.

Quæ $a b$ ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum c dividitur in nomina $a c$, $c b$.



Si potest in duas alias Rationales potentia tantum commensurabiles juxta 37 X dividi, fiat illa divisio in d . Neq; c neq; d dividit lineam $a b$ æqualiter, quia ita æquales etiam commensurabiles essent longitudine $a d$, $d b$ contra hypotbesin, sed partes inæquales $a c$, $c b$ vel magis vel minus inæquales sunt partibus $a d$, $d b$ atq; ita quadrata $a c$, $c b$ sunt vel minora vel majora quadratis $a d$, $d b$. Quia verò si ab equalibus demantur inæqualia, residuorum excessus est ablatorum excessui æqualis. β Sunt autem ex $a c$, $c b$ quadrata cum β 4. II. rectangulo $a c b$ bis sumto; æqualia quadratis $a d$, $d b$, cum $a d b$ rectangulo bis sumto, sic ut præ fuerit excessus compositorum ex quadratis, idem

28. 9. Def.
234. X.

27. X.
Schol.

22. X.

27. X.

idem fit bñ sumtorum rectangulorum: Sed excessus compositorum ex quadratis est spatium Rationale (v. Rationalem enim $a.c$, $c.b$ quadrata & ex ipsis d compositum sunt Rationalia; item q , & ex $a.d$, $d.b$ quadrata una cum suo composito sunt rationalia. Cum ergo Rationale superet Rationale rationale, manifestum est rationalem esse excessum compositorum ex quadratis) Igitur & excessus rectanguli $a.c.b$ & $a.d.b$ quolibet bñ sumto, est spatium Rationale. Sed $a.c.b$ rectangulum est 2 Medium. Ergo & duplum, scilicet & $a.d.b$ rectangulum. Cum verò Medium non superet medium Rationale; non potest excessus rectangulorum esse Rationale, quod tamen in precedentibus concludebatur. In alio itaq; pacto quàm c secari $a.b$ in sua nomina impossibile est.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima $a.b$, ad unum duntaxat punctum d dividitur in nomina $a.d$, $d.b$.

Dividatur, si potest, in a — d — b lia ad c nomina vel duas Medias potentia commensurabiles, quæ comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Pari hinc ratione, ut in precedenti propositione eris idem excessus.

excessus rectangulorum a b c & a d b his, qui com-
 positorum ex quadratis a c, c b & a d d b. Sed Ratio-
 nalius rectangulorum his excessus a est Ratio-
 nale spacium. Ergo & excessus compositorum ex qua-
 dratis & spacium Rationale. Cum vero a d, d b
 sint Media, & potentia commensurabiles, erunt
 & eorum quadrata Media & commensurabilia,
 atq; ita ex ipsis compositum utrumq; erit & com-
 mensurabile & y Medium. Cum verò medium
 non superet Medium rationale. Itaq; excessus com-
 positorum ex quadratis non erit Rationale spacium,
 quod tamen modo concludebatur. In alia itaq;
 puncto quam e secari a b in sua nomina est im-
 possibile.

2. Scholl.

27. X.

416. X.

yz. X.

27. X.

PROPOS: XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secunda *ab*,
 id unum duntaxat punctum *c* divi-
 litur in nomina *ac, bc*.




 Dividatur, si potest in alia ad
 d, ut respondeant sensui 99. bu-
 jus. Ubicumq; ergo sit d, ut in
 43. ostenditur, quadrata ex a c,
 cb vel majora vel minora sunt
 quadratis a d, d b. Exponatur autem Ra-
 tionalis ef, ad quam, applicetur eg rectang.
 Z
 equale

44.1.

p 4. II.

Lemma

39. X.

p 1. VI.

p 16. X.

p cor. 2. X.

p 23. X.

p 3. Lem.

19. X.

p 10. X.

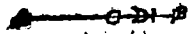
aequale quadrato $a b$, & $e h$ aequale quadrato
 $c b$, & $e k$ quadrato ex $a d$, $d b$. p Erit
 $i g$ aequale duplo rectanguli $a c b$ & $l g$ aequale
 plo rectanguli $a c b$ & $l g$ aequale duplo rectanguli
 $a d b$. Et quia quadrata ex $a c$, $c b$ quadra-
 tis $a d$, $d b$, sunt inequalia, etiam rectanguli
 $e h$, $e k$ erunt inequalia: & quare & recte $f h$,
 sunt inequales. Rursus, quia quadrata ex
 $c b$ sunt maiora rectang. $a c b$ bis, erit $e h$ ma-
 ior ipso $i g$, atq; ita $f h$ maior dimidio ipsius
 quod de $f k$ ostendetur. Quare $b g$, $f h$, $h g$ sunt pa-
 riter $f k$, $k g$ inequales singulis singula. Quia
 $a c$, $c b$ sunt Medie potentia commensurabiles
 erunt etiam ipsarum quadrata media & commensu-
 rabilia, adeoq; compositum ex ipsis utriusq;
 rum commensurabile; idcoq; & $e h$, & $e k$ me-
 dia. Cumq; ita $e f$ sit Rationalis, erunt
 $f k$ Rationales longitudine ipsi incommensura-
 biles. Sic etiam rectanguli $a c b$ Medij duplum
 erit medium & $h g$ Rationalis longitudine in-
 mensurabilis; perinde ut & $l g$ Medij, $k g$ Ra-
 tionalis longitudine incommensurabilis ipsi $e f$ osten-
 detur. Rursus quia $a c$, $c b$ longitudine sunt in-
 mensurabiles, & est, ut $a c$ ad $c b$, sic quadra-
 tum $a c$ ad rectangulum $a c b$, erunt haec quoque
 incommensurabilia. Sed quadrato $a c$ compositum
 ex quadratis $a c$, $c b$ est commensurabile, ut ante
 constat; & rectangulo $a c b$ suum duplum est co-

inmensurabile. Itaq, compositum ex quadratis $a c$,
 $c b$, id est, $c h$ est incommensurabile duplo re-
 ctanguli $a c b$, id est, $i g$. Sed ut $c h$ ad $i g$, ita
 $f h$ ad $h g$. Sunt ergo $f h$, $h g$ longitudine in-^{14. X.}
 commensurabiles. Cum vero etiam sint Rationales,^{37. X.}
 erunt Rationales potentia solum commensurabiles.^{43. X.}
 Tota ergo $f g$ est Irrationalis, quae ex binis nomi-
 nibus appellatur, divisq, in nomina ad punctum;
 nec potest $f g$ in alio puncto ut k dividi in alia no-
 mina. Itaq, nec $a b$ bimediale posterius in alio
 puncto quam c dividi potest in nomina.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

Major $a b$ ad unum duntaxat pun-
 ctum c dividitur in nomina $a c$, $c b$.

 Si potest, dividatur in d in
 nomina, qualia 40. propo. re-
 quirat. Erit excessus quadratorum $a c$, $c b$ & a
 d , $d b$ idem cum excessu rectangulorum $a c b$ du-
 pli & $a d b$ dupli. Sed excessus duorum compo-^{43. X.}
 sitorum ex quadratis binis est spaciū Ratio-
 nale. Igitur & excessus rectangulorum binorum.
 Sed rectangulum $a c b$ ponitur Medium; a deoq,
 duplum ipsius etiam est Medium; eodemq, modo & ^{cor. 14. X.}
 $a d b$ Medium erit. Sed Medium non superat Medi-
 um Rationale. Itaq, excessus binorum rectangulo-
 rum non erit spaciū Rationale, quod tamen an-
 te sequebatur. Non ergo in alio quam c puncto
 et abitur Major.

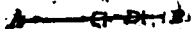
Z 2

P R O-

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: XLVII

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens
ad unum duntaxat e punctum divi-
ditur in nomina, $a c, c b$.



a 43. 2.

p 27. X.

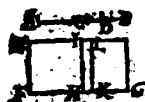
Si potest, dividatur in nomina, qualia *et* pro-
pos. requirit. Er it excessus quadratorum $a c$
 $c b$ & $a d, d b$ idem cum excessu rectangulorum
 $a c b$, & $a d b$ duplorum. Qui excessus in rectan-
gulis est spaciū Rationale. Ergo & in compo-
sitis quadratorum. Quia composita ex quadrati-
 $a c, c b$, & $a d, d b$ cum ponantur Media. *et* ita
excessus non potest esse spaciū Rationale, ut jam
sequebatur. Non ergo in alio quam *e* puncto scin-
ditur Rationale & Medium potens.

PROPOS: XLIIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens *et* b , ad unum
duntaxat punctum *e* dividitur in Me-
dia nomina. $a c, c b$.

Si potest, dividatur in *d* in nomina, qualia re-
quirit 42. hujus. Constructione addita videtur.



in 45. patet. partibus $f h$, $h g$,
partes $f k$, $k g$ singulis singulas
esse inaequales. Cum ergo com-
positum ex quadratis $a c$, $c b$ ponatur

Medium, erit $e f$ et h Medium, cumq; rectan-
guli $a c b$ duplum sit Medium, erit $e f$ et g Medium:

Eruntq; $f h$, $h g$ Rationales longitudine incommensurabiles ipsi $e f$ ut $e f k$ et $k g$. Cum verò

compositum ex quadratis $a c$, $c b$ id est, $e h$ sit incommensurabile rectanguli $a c b$ duplo, id est,

g , sitq; ut $e h$ ad g ita $f h$ ad $h g$, erunt $e h$ et $h g$ longitudine incommensurabiles. Cumq; sint

potentia Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, totaq; $f g$ irrationalis est

ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina.

Id eodem modo dividi $e a$ non patitur in puncto.

Igitur nec $a b$ in alio puncto quam c dividitur in nomina. Quod erat propositum.

Definitiones secundæ.

Iam investigat autor omnia binomia, quorum sex habet ideo. Quia enim Nomina Binomia sunt dua Rationales, quæ sequuntur amba esse exposita Rationali incommensurabiles, nisi ipsa quoq; velint esse longitudine inter se commensurabiles.

les, vel una tantum sive Major sive Minor, vel neutra tria sunt genera binomio-
rum. Quoniam etiam Nomina sunt in-
aqualia, poterit majus minore plus qua-
drato vel longitudine commensurabilis,
vel incommensurabilis. Unde si plus pos-
sit quadrato longitudine commensurabi-
lis una cum dictis tribus generibus tres
diversae lineae binomiales; Sed si plus
quadrato longitudine incommensura-
bilis, cum ijs tribus, iidem tres oriuntur.

Exposita ergo Rationali, & quae
ex binis nominibus divisa in nomi-
na, cujus majus nomen plus possit
quàm minus quadrato rectae sibi lon-
gitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositae Ratio-
nali cōmensurabile sit longitudine,
vocetur ex binis nominibus prima.
2. Si minus nomen expositae Ratio-
nali commensurabile sit lōgitudine,
vocetur ex binis nominibus secūda.
3. Si neutrum ipsorum nominum
sit longitudine commensurabile ex-
positae Rationali, vocetur ex binis
nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si majus nomen plus possit quam minus quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

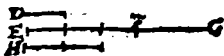
Quod si neutrum ipsorum nomen: vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.

A C B



Invenire duobus nominibus a b, c b, quorum a 1. Scholia. excessus a c non sit quadratus, ita ut a b, c b proportionem habeant

umeri quadrati ad quadratum a b, a c non. Exponatur autem Rationalis β quapiam d, cui, et sumatur longitudine commensurabilis, quæ e f ob id quoque Rationalis erit: Fiat deinde ut a b ad a c ita quadratum e f ad quadratum f g. Erunt e g ex binis nominibus.

Z

Quoni-

7 6. X.

8 9. X.

13 7 X.

Lemma
14. X.

Quoniam quadrata ef & fg sunt & communisurabilia, erunt ipsa recta etiam communisurabiles solum potentia. Sed ef est Rationalis. Ergo & fg . Quia vero ab ad ac non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam quadrata ef , fg non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. δ Sicut ergo ef , fg longitudine incommensurabiles; atque ita Rationales potentia solum communisurabiles; ipsaeque irrationalis, quae ex binis nominibus constituitur. Erit etiam prima. Cum sit ut numerus ab ad a ita quadratum ef ad quadratum fg , sit etiam ab maior quam a , etiam quadratum ef erit majus quadrato fg . δ Quidem quadrato b . Quia ergo est, ut ab ad a ita quadratum ef ad quadratum fg ; etiam convertendo erit, ut ab ad eb , nempe ad excessum, quo antecedens ab superat consequentem a , ita quadratum ef ad quadratum h . Habet autem ab ad eb rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata ef & h ; eruntque communisurabiles longitudine ef , & h . Quoniam majus nomen ef exposita Rationali d est longitudine communisurabile, ut patet; & potest plus quam minus fg quadrato recta h sibi longitudine communisurabile; erit ef per desin. ex binis nominibus prima.

PROPOS: I.

Problema 14.

Ioven.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Repertis duobus

a, b, c b quadratis,

sumtaq; d Rationali.

cui longitudine com-

mensurabilis sit f, g , que ideo est Rationalis.

Fiat ut a c numerus ad a b, ita quadratum g t

ad quadratum f e: Erit eodem modo ut in pre-

cedenti e g binomialis. Quae & erit secun-

da. Cum enim finant a c, a b. Quadrata recta-

rum g f, f e, etiam sunt convertenda ut a b ad

a c ita quadratum e f ad f g. Sed ab quam a c est

major, erit ergo quadratum e f majus quadrato

f g, & quidem sit quadrato recta h. Iterum

hic ut in precedenti ostendatur h ipse e f longitu-

dine communisurabilis esse. Quoniam ergo majus

nomen e f plus potest quam minus f g exposita Ra-

tionali d longitudine communisurabile, ut patet

ex prioribus, quadrato recta h sibi longitudine

communisurabilis: Erit e g ex binis nominibus

per defn. secundam.

PROPOSITIO LI.

Problema 15.

Invenire ex bi-

nis nominibus ter-

tiam.

Z

Z

A.....C....B

I.....

D———

E———F———G

H———

Repertis duobus
quadratis a b, c b
ut antea. sumatur
alium i qui ad nen-
trum habeat pro-
portionem quatuor

quadratum ad quadratum. assumpta id ratio-

Cor. 6. X. nalis fiat, ut i ad a b, ita quadratum rectae d
ad quadratum e f, quae quadrata perunt com-

7. X.

mensurabilia, cum habeant proportionem numeri-
rum: Sed cum non quadratorum x erant d & e f
longitudine incommensurabiles. Eiat rursum
a b ad a c, ita quadratum e f ad quadratum f g,
quae etiam perunt commensurabilia; sed latera
ipsa x incommensurabilia. Sunt ergo e f, f g

8. 37. X.

Rationales: potentia tantum commensurabiles,
& tota e g irrationalis ex binis nominibus.
Quaeritur tertia, Quia enim d, ut i ad a b, ita
quadratum d ad quadratum e f. Sed i ad a b
non est ut numerus quadratus ad quadratum.
Ergo nec d ad e f, & sunt longitudine x in-
commensurabiles. Quia etiam est ut a b ad a c, ita
quadratum e f, ad quadratum f g; Sed a b ma-
ior est quam a c, etiam e f erit majus f g. Sic
autem majus quadrato rectae h. Erit ut qua-
tur. h ipsi e f longitudine incommensurabili.
Quoniam majus nomen e f pl9 potest quidem min9
f g quadrato rectae h sibi longitudine commensu-
rabilis, & nuncium e f, g f expofitae Rationali
del

Lemma.
14. X.

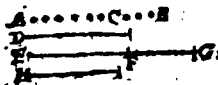
est longitudine commensurabile. Erit ergo e g
per def. ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur fa-
cilium si similes plani numeri a se mutuo auferan-
tur; reliquum enim vel est quadratum, & erit ut bi-
nominum secundum, vel non quadratum, & erit ut
binominum tertium.

PROPOS. LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



Inventum duobus nume-
ris ac, c b ex quibz com-
positum a b ad neutrum i-
psorum habeat proportio-

q 35. schol
29. X.

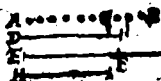
nem, quam quadratum ad quadratum, & assam-
a rationali d, cui longitudine commensurabilis
sit e f persistanturq; caetera ut in 49. hujus-
modi ut ibi e g ex binis nominibus: & qui-
dem Quarta. Majus sit quadratum e f quam
g quadratum h. Quia autem convertendo est, ut
in 49. ut a b ad c b, ita quadratum e f ad qua-
dratum h. sed a b ad c b non est ut quadratum
ad quadratum: Ergo nec quadrata e f, & h ha-
bent proportionem quadratorum; A cruntq; re-
p 9. X.
Te e f & h incommensurabiles. Itaq; cum ma-
ius nomen e f, quod & exposita rationali d com-
mensurabile est, plus possit quam minus f g qua-
drato respectu h sibi longitudine incommensurabi-
lis, erit e g per def. ex binis nominibus
quarta.

Propos

EVLIDIS ELEM:
PROPOS: LIV.

Problema 17.

Invenire ex binis nominibus quin-
tam.



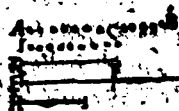
Invenit numerus a c,
cb a Inprocedenti, & ad-
hibitis reliquis ut in 50.
hujus. Erit c g ex binis

nominibus & quidem Quinta. Sit quadratum
e f majus quam quadratum f g, quadrato h.
Erit, ut in 49, convertendo, ut ab ad cb, ita
quadratum e f ad quadratum h. Erant e f & h
incommensurabiles ut in 52. Quia ergo majus
e f nomen quam minus f g, quod & proposita
rationali commensurabile est, plus potest qua-
drato recta h sibi longitudo incommensurabi-
li, erit per defin. c g ex binis nominibus
quinta.

PROPOS: LIV.

Problema 18.

Invenire ex binis nominibus se-
xtam.



Invenit a c, e b p
ut non sunt quibus, quatenus
neuter sit quadratus, ne
ex ipsis compositus qua-
dratus sit, habeatur ad aliquam eorum qua-
dra-

dratum proportionem; sumatur alig quicunq;
 numerus i , qui nec ad $a b$, nec ad $a c$ quadrato-
 rum proportionem habeat, qualis est quipm qua-
 dratus; assumptaque rationali d , fiant cetera ut
 in 51. hujus. Patet ut ibi e h , $f g$ longitudina esse
 incommensurabiles & totam $e g$, ex binis no-
 minibus. Et quidem est sexta. Quia, si qua-
 dratum $e f$ quam quadratum $f g$ majus sit qua-
 drato h , ut in 52. $e f$ & h sunt longitudine in-
 commensurabiles. Itaq; cum majus nomen $e f$
 plus possit quam $f g$, quorum neutrum possit
 rationali sit commensurabile, quadrato recte h
 sibi longitudine incommensurabilis, erit ex bi-
 nis nominibus per defin. sexta.

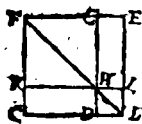
Sapè promissum Binomia quinta & sexta oc-
 curunt, si dissimiles plani à se invicem auferan-
 tur, reliquum vel quadratum est & oritur bi-
 nomium quintum, vel non, & nascitur bino-
 mium sextum.

LEMMA:

Si recta linea $b c$ secta sit utcunq; in d ;
 erit rectangulum $e b$ sub partibus $e l$, $l h$
 contentum, medium proportionale
 inter eorum quadrata d , $g k$; item
 rectangulum $d e$ contentum sub tota
 & una parte, medium proportionale
 inter quadratum $e e$, totius lineæ, &
 quadratum $d l$ dictæ partis.

De-

Descriptio quadrato c



super b c, è sectionu puncto
erigatur perpendicularis d
ducaturq; diagonis h f, & l
parallela ipsi b c. Erit e b me
dium proportionale inter
g k, l d quadrata. = Quia

¶ 1. VL

¶ 43. I.

ergo est ut k h, ad h l; ita t. m g k ad e h, quā
ch ad d l, erit, ut g k ad e h, ita c h ad d l. Sed
c h & e h sunt aequalia. Est ergo rectangulum
sub partibus medium proportionale inter earū
dem partium quadrata. Rursus = quia est ut c b
ad h d, ita t. m c e ad d e, quā c l ad d l. Sed
d e & c l sunt aequalia. Est ergo rectangulum
de sub tota & una parte, Medium proportion
le inter quadratum totius c e & diſſe parti
quadratum d l.

PROPOSITIO LV.

Theorema 17.

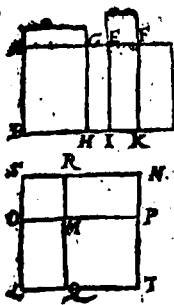
Si spaciū a c contineatur sub
Rationali a b, & ex binis nominib;
prima a d; Recta linea o p. spaciū
potens irrationalis est, quæ ex binis
nominibus appellatur.

Dini.

Divisa ad duo nomina

a e majus & e minus, se-
cetur e d in f bifariam.Quia ergo a e plus potest
quam e d quadrato recte fi-bi longitudine commensura-
bile: Si ad eam quartapar-ti quadrati e d i.e. quadrato
et aequale Parallelogrammūa g e p applicetur, & dividet
ipsam a e in partes a g, g elongitudine commensurabiles. Per puncta g e f
ducantur ipsi a b parallelae h, e i, f k d fiantq;a h, g i rectangulis equalia quadrata l m, m n
juncta ad angulum m ita, ut o m, m p unamefficiant rectam & compleatur totum l n qua-
dratum. Quoniam itaque rectangulum a g eaequale est quadrato e f, erit ut a g ad e f, ita
e f ad g e; quare ut a h ad e k, ita e k ad g i.Est itaque e k inter a h, g i medium propor-
tionale. Sed ipsis a h, g i sunt equalia l m,m n quadrata, o inter qua medium proportio-
nale est t m. Itaque t m est aequale ipsi e k.Cum itaque t m sit aequale m s & e k ipsi
f c, erit & m s ipsi f c aequale, totumque l nquadratum toti rectangulo a c aequale. & o
p potest spectum a c sub Rationali a b &

bino

a dcf. bin-
primi.p 2. Lem.
17. X.
y 18. X.ex const.
17. X.
1. VI.o Lemma
precedens
43. I.
36. I.

binomiali prima ad contentum. Erit ea irratio-
 nah ex binis nominibus. Quoniam enim a g
 g e ostense sunt longitudine commensurabiles,
 116. X. erit a e tota utrique ipsarum longitudine com-
 mensurabilis. Sed a e, cum sit majus nomen bi-
 nomialis prima ad, rationali a b longitudine
 est commensurabilis. Ergo a g, g e eidem a b
 120. X. longitudine sunt commensurabiles, ipsaeq, ut a b
 erunt rationales. Sunt itaque rectangula
 a h, g i ab rationalibus rationalia, ipsisq, equa-
 lia quadrata l m, m n rationalia, rationalisq,
 recta o m, m p. Et quia a e ipsi e d est longi-
 tudine incommensurabilis; sed eidem a e longi-
 tudine commensurabilis ostensa est a g, & ipse d
 longitudine commensurabilis est e f, utpote t-
 114. X. ptius dimidia. Ergo a g, e f sunt longitudine
 11. VI. incommensurabiles. Quare a h, e k, ejusdem
 112. X. rationis cum a g, e f & incommensurabilia e-
 runt, & proinde l m, m t ipsis aequalia incommensurabilia, ipsaeq, recta o m, m p eandem
 habentes rationem quam l m, m t, erant longi-
 tudine incommensurabiles. Cum autem eadem
 sint ostense rationales. Igitur o m, m p sunt ra-
 tionales potentia solum commensurabiles. Qua-
 re o p potens spacium a c est irrationalis quae
 ex binis nominibus dicitur.

Sed Euclides noluit aliquam binomiali-
 um speciem determinare, cum posset & prima &
 secunda, & tertia, quarta, quinta, sexta, esse.

Sequitur

Sequentibus propositionibus quinque, doce-
centur inventiones omnis generis Irrati-
onalium linearum.

PROPOS: LVI.

Theorema 38.

Si spaciū ac contineatur sub Ra-
tionali ab , & ex binis nominibus se-
cunda, ad , Recta linea op spaci-
um potens, Irrationalis est, quæ ex
binis medijs prima appellatur.

Divisa ad in nomina ae majus, & ed minus ad-
hibeatur etiam reliqua precedentis propositionis
constructio. Erit op ex binis medijs prima. Quo-
niam enim ae , ed sunt longitudine incommensu-
rabiles, & ed rationali ab longitudine commen-
surabile, & erunt ae , ab longitudine incommen-
surabiles. Et quia ag , ge in precedenti sunt osten-
sa commensurabiles longitudine, tota ae utriusque
ipsarum erit β commensurabilis. Quare cum ae
seu majus nomen binomialis secunda ad sit linea
Rationalis, erunt & ag , ge rationales longitu-
dine commensurabiles. Sed ae rationali, ab
est longitudine incommensurabilis. Præterea, ergo ag ,
 ge , eidem ab incommensurabilis & eris longitudi-
ne. Quare tam ab , ab quam ag , ge rationales
sunt potentia tantum commensurabiles, & re-
ctangula

p 12. X.

p 10. X.

p 1. VI.

p 12. X.

p 10. X.

p 11. X.

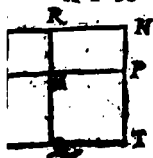
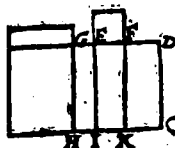
Rectangula ah, gi Media, ipsisq, equalia quadrat $al m, mn$ Media & om, mp recta media.

Quia autem ag, gc sunt longitudine commensurabiles, erunt ah, gi ejusdem rationis, ipsiq, equalia quadrat $al m, mn$ commensurabilia, adeoq, om, mp recta potentia tantum commensurabiles. Cumq, ac, cd , sint longitudine incommensurabiles, quibus longitudine sunt commensurabiles ostensa ag, cf : Ergo ag, cf sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus in eadem ratione ah, ck , etiam sunt incommensurabilia, & ipsis equalia $al m, mn$ incommensurabilia; ipseq, $recta$ ejusdem rationis om, mp longitudine sunt incommensurabiles. Sit itaq, om, mp Mediae & potentia commensurabiles. Quia autem cd minus nomen binomialis secunda ad , est commensurabile longitudine Rationali ab vel ei , etiam ipsis dimidium cf commensurabile est ipsi cd ; & ei, c commensurabiles sunt longitudine. Sed ei est Rationalis. Ergo & cf & ck rectang. & rationale. Sed mt sub om, mp contentum ipsi cf est aequale. Ergo & mt est rationale. Quia om, mp sunt Mediae potentia solum commensurabiles, Rationalesq, continentes; adeoq, op Irrationalis, quae ex binis Mediis prima appellatur.

LIBER X PROPOS: LVII.

Theorema 39.

Si spacium $a c$ contineatur sub Rationali, $a b$ & ex binis nominibus tercia $a d$; Recta linea $o p$ spacium ponens Irrationalis est, quæ ex binis mediis Secunda dicitur.



Divisa $a d$ in nomina $a b$ majus & $c d$ minus, reliqua fiant ut in 55. propos. Ostendetur eodem modo, ut ibi, $o p$ posse spacium $a c$; & ut in 56. rectas $o m$, $m p$ esse Medias potentia tantum commensurabiles, eo quod $a c$ ponitur rationali $a b$ hic ut illi longitudine incommensurabilis. Sed quia $c d$, $c f$ longitudine sunt commensurabiles, est q; $c d$ rationalis longitudine incommensurabilis, & erit etiam $c f$ 24. X.
 em $a b$, id est, $c i$ longitudine incommensurabilis.
 Sunt autem rationalis $c f$ dimidia rationalis & $c i$ potentia tantum commensurabiles. Quia $k \beta$ erit Medium, ipsiq; æquale $m t$ medium, & 22. X.
 centum sub Medijs $o m$, $m p$. Quare cum $o m$ & $m p$ sint Medie potentia tantum commensurabiles contineantq; spacium Mediū, erit $o p$ Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda & appellatur 19. B.
 PRO-

EVCLIDIS ELEME:
PROPOS: LIIX

Theorema 40.

Si spacium $a c$ contineatur sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus quarta $a d$: Recta linea $o p$ spacium potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Divisa $a d$ in nomina $a c$ major & minor $e d$,
 a 19. X. cetera sicut in 55. propos. a Erunt $a g$, $g c$ longitudo incommensurabiles. Oportet ut $o p$ possit spacium $a c$. Quoniam $a g$, $g c$ sunt longitudine incommensurabiles, p & $a h$, $g i$ rectangula ejusdem cum illis rationis & ipsis æqualia quadrata $l m$, $m n$ incommensurabiles erunt, & n $e a o m$, $m p$ potentia incommensurabiles. Si qui: majus nomen $a c$ Rationali $a b$ est longitudine incommensurabile, erit ipsa $a c$ rationalis & n $e t$ angulum $a i$ rationale, & $e c$ rectangulo Medium propter $e d$ ipsi $a b$ longitudine incommensurabilem, ipsiq; $e c$ commensurabile $e k$ Medium & huic æquale $t m$ Medium. Quare $o d m$, $m p$ sunt incommensurabiles potentia, scilicet, compositum ex ipsarum quadratis $l m$, $m n$ rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, $t o p$ rationalis erit, quæ appellatur Major.

LIBER X.
PROPOSITIO LIX.

175.

Theorema 41.

Si spacium $a c$ contineatur sub Ra-
tionali, $a b$ & ex binis nominib. quin-
ta $a d$; Recta linea $o p$ spacium po-
tens Irrationalis est, quæ Rationale
& Medium potens appellatur.

Divisa $a d$ in nomina $a e$ majus & $e d$ minus, fi-
ent cetera ut in 55. propof. « Erunt $a g$, $g e$ longi-
tudine incommensurabiles; & $o p$ poteris ac ut in
55; quæ & Irrationalis erit, potens rationale &
& Medium. Erunt etiam ut in 58 $o m$, $m p$
potentia incommensurabiles. Ergo $a i$ est Me-
diū, quia nomē majus ac binomij quinti ad est in-
commensurable longitudine Rationali $a b$ per defn.
Sed $a i$ quadratus $l m$, $m n$ simul est æquale; Sunt
ergo Media. Rursus rectangulū $e c$ est Rationale,
quia minus nomen $e d$ longitudine cōmensurable
est Rationali $a b$ ex definitione, ipsiusq; dimidiū
est $f r$ Rationale & ipsi æquale $m t$ Rationale, sub
 $o m$, $m p$ contentum. Quare cū $o m$, $p m$ sint po-
tentia incommensurabiles, faciantq; ex ipsarum
quadratis $l m$, $m n$ compositum Medium, & re-
tangulum sub ipsis contentum $m t$ Rationale;
erit $o p$ irrationalis, quæ Rationale & Me-
dium potens dicitur.

A a 3

PRO-

EUCLEIDIS ELEMENTA PROPOSITIO LX.

Theorema 42.

Si spaciū ac contineatur sub Ra-
tionali ab , & ex binis nominibus se-
xta, ad , recta linea op spaciū
potens, Irrationalis est, quæ bina
Media potens appellatur.

419. X.

Divisa ad in nomina ae majus & e d minus,
cetera fiant ut in 55. Erunt ag , eg longi-
tudo incommensurabiles & op poterit spaciū
 ac . Erunt & om , mp potentia incommensura-
biles ut in 58. Compositum ex quadratis lm , mn
erit Medium ut in 59: & ut in 58, mt sub om
 mp contentum, Medium.

413. X.

410. X.

Quia verò duarum
 ae , ef rectarum, illa quidem longitudine est in-
commensurabilis ipsi ed ; hac vero commensura-
bilis; $erunt$ ae , ef longitudine incommensura-
biles, Ergo & in eadem cum his ratione ai , ek ,
sunt incommensurabilia. Quare & compositum ex
 lm , mn quadratis ipsi ai equale, & mt ip-
 ek equale erunt incommensurabilia. Quamobrem
cum om , mp sint potentia incommensurabiles
faciantq; & ex ipsorum quadratis lm , mn com-
positum Medium & mt sub ipsis contentum Me-
dium, incommensurabileq; ex ipsorum quadrati-

comp

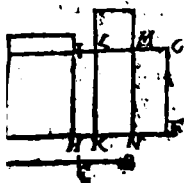
composito, erit tota op^d Irrationalis quæ bina
Media potens vocetur. 42. X.

Porro doceatur, quanam Irrationales. Erit
lines faciunt Irrationalium primo Senario propo-
itarum, ad rationalem lineam applicata qua-
zata.

PROPOS.: LXL

Theorema 43.

Quadratū ejus ab , quæ ex binis non
minibus ac , cb ad rationalem de ap-
licatum df , latitudinem dg facit ex
minis nominibus dl , lg primam.



Applicato ad de rectan-
gulo dh quadrato ac equali
& ad ih alio, ik quadrato
 cb equali; erit l rectan-
gula ac b bis sumto equalis;
Sig, ex puncto m inter lg
medio agatur parallela mn

de , erit tam ln quàm mf equalis ac b re-
ngulo. & Quoniam itaq, ac , cb potens in solum
incommensurabiles sunt, erant eorum quadrata ratio-
ia & commensurabilia, quorū utriq, cum ex his
compositum y sit commensurabile, erit & quadra-
tū ac , cb compositum dk Rationale, quod ad
rationalem de applicatū, d facit latitudinem dl ,
anglē, ipsiq, de longitudine commensurabiē.

Quia

Quia

22. X. Quia recta a, c, b sunt Rationales potentia tantum commensurabiles, rectangulum sub ipsis erit
 24. X. Medium, & eundem duplum lⁱ Medium. Itaq;
 23. X. Latitudo $l g$ est Rationalis, ipsa $l k$, id est, $d e$ longitudine incommensurabilis. Sed & l ipsi $d e$ est
 13. X. ostensa longitudine commensurabilis. Ergo $d l$,
 17. X. $l g$ longitudine sunt incommensurabiles, adeoque rationales potentia solum commensurabiles, & $d g$ ex binis nominibus composita. Erat Prima. Quia enim $a c b$ rectangulum inter quadrata $a c, c b$ est medium proportionale, erit & $l n$ inter $d h, i k$ Medium proportionale, & $l m$ inter $d i, i l$. Itaq; rectangulum $d i l$ quadrato $l m$ est aequale: Et cum quadrata $a c, c b$ sint commensurabiles, & recta $d i, i l$ eandem illis habentes rationem longitudine sunt commensurabiles. Et quia $d k$ quam l est major quadrato $a c, c b$ rectarum, rectangulo $a c b$ his summo sunt majora, & etiam $d l$ quam $l g$ est major. Itaq; cum $d l$ sit major quam $l g$, & $d i$ rectangulum quadrato $l m$ ostensum aequale, & videns recta $d l$ in i in partes longitudine commensurabiles, ut patet & poterit $d l$ major plus quam $l g$ minor quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Quare cum $d g$ sit ostensa ex binis nominibus, & $d l$ major plus posse, quam $l g$ minor, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, atq; idem $d l$ nomen maius exposita rationali $d e$ longitudine commensurabile est. erit $d g$ per desumptum ex binis nominibus Prima.

● PROPOS: LXII.

Theorema 44.

Quadrata ejus, quæ est ex binis
 ac , cb , medijs prima ab , ad d e Ra-
 tionalem applicatum df , Latitudi-
 nem d g facit ex binis d l , lg nomi-
 nibus secundam.

Repetatur eadem constructio, quæ in præce-
 denti est adhibita. Quia ergo ac , cb sunt Media
 potentia tantum commensurabiles, quæ cōcineant a 38. X.
 Rationale, erunt earum quadrata Media & com-
 mensurabilia, & ipsæ equalia d h , lk , media qua-
 re & totum dk illis p commensurabile, & Medium
 ipsiusq; Latitudo d l & rationalis ipsi d e Longitudi-
 ne incommensurabilis. Et cum ac b rectanguli p 16. X.
 bini = sit rationale, ejus etiam duplum l frationa-
 le erit. ycor. 24. X.
 Ergo lg Latitudo est rationalis longitu-
 dine commensurabilis ipsi lk , id est, d e. d 23. X.
 itaque duarum d l , lg , hæc longitudine sit com-
 mensurabilis ipsi d e, illa vero incommen-
 surabilis. Verunt inter se longitudine incommen-
 surabiles. 21. X.
 Sunt autem & rationales d l , lg ut
 patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantum com-
 mensurabiles: & tota d g est ex binis nomi-
 bus. Erit etiam secunda. Similiter enim, ut
 in præcedenti, ostenditur d l esse nomen majus &
 posse plus quam minus lg quadrato recta sibi longi-
 tudine

tudine commensurabilis. Sed ostensum est nomen minus lg esse longitudine commensurabile rationali d eposita. Erit igitur d g ex binis nominibus secunda.

PROPOS: LXIII.

Theorema 45.

Quadrata ejus, quæ ex binis medijs secunda a b , ad Rationalem de applicatum d f , Latitudinem d g facit ex binis nominibus d l , lg tertiam.

p 19. X.

Constructis ipsis ut in 61, quia a c , c b sunt Medie potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis equalia d b , i k media illiusque totum d k a commensurabile, & medium. Ergo d l Latitudo est rationalis, ipsi d e longitudine incommensurabilis. Et cum a c b rectangulum sit Medium, quod duplum l f erit medium

p 16. X.
ycor. 24. X.

p 23. X.

& lg latitudo longitudine d incommensurabilis ipsi l k vel d e . Cum vero a c , c b sint longitudines incommensurabiles, sitque ut a c ad c b , ita quadratum a c ad rectangulum a c b , & erunt hæc inter se commensurabilia. Sed a c quadrato, compositum ex ipsis, id est d k est commensurabile,

p 3. Lemma

p 19. X.

p 10. X.

p 16. X.

ut patet, & rectangulo $ac b$ commensurabile
est eius duplum $l f$. Ergo $d k$ ipse $l f$ est incommen-
surabile, & ipsa $q_3 d l$, $l g$ sunt longitudine incommen-
surabiles: Cumq; etiam rationales, ut patet.
Ergo $d l$, $l g$ sunt rationales potentia tantum com-
mensurabiles, & tota $d g$ ex binis nominibus. 37. X.
Erit etiam tertia. Similiter enim ut in 61
ostenditur $d l$ esse nomen majus, posseq; plus
quam minus $l g$, quadrato recta sibi longitudine
commensurabilia. Sed ostensum est neutrum no-
men $d l$, $l g$ esse posita rationali de longitudi-
ne commensurabile. A Erit itaq; $d g$ ex binis, per de-
nominationibus tertia.

PROPOS. LXIV.

Theorema 40.

Quadratum Majoris $a b$ ad Ratio-
nalem $d e$ applicatum $d f$, latitudi-
nem $d g$ facit ex binis nominibus $d l$,
 $l g$ quartam.

Constitutis hysdem ut in 61, quia $a c$, $c b$ po-
tentia sunt incommensurabiles, continentes Medi-
um, faciuntq; compositum ex quadratis suis
Rationale, erit $d k$ rationale & $l f$ duplum
rectanguli $a b c$ Medium; adeoque $d l$ ra-
tionalis ipsi $d e$ longitudine commensurabilis;
Sed

EUCLIDIS ELEM:
PROPOS: LIIX

Theorema 40.

Si spaciū $a c$ contineatur sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus quarta $a d$: Recta linea $o p$ spaciū potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Divisa $a d$ in nomina $a e$ major & minor $e d$, cetera sicut ut in 55. propoſ. a Erunt $a g$, $g e$ longitudine incommensurabiles. Ostendeturq; $o p$ posse spaciū $a c$. Quoniam $a g$, $g e$ sunt longitudine incommensurabiles, β & $a h$, $g i$ restantia ejusdem cum illis rationis & ipsis equalia quadrata $l m$, $m n$ incommensurabiles erunt, & ita $e o m$, $m p$ potentia incommensurabiles. Sed qui & majus nomen $a c$ Rationali $a b$ est longitudine commensurabile; erit ipsa $a c$ rationalis & rectangulum $a i$ rationale, d & $e c$ rectangulum Medium propter $e d$ ipsi $a b$ longitudine incommensurabilem, ipsiq; $e c$ commensurabile $e k$ Medium & huius aequale $e m$ medium. Quare $e o m$, $m p$ sint incommensurabiles potentia, sicutq; compositum ex ipsarum quadratis $l m$, $m n$ rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, ita $o p$ rationalis erit, quæ appellatur Major.

40. X.

PRO

LIBER X
PROPOSITIO LIX.

171

Theorema 41.

Si spacium $a c$ contineatur sub Rationali, $a b$ & ex binis nominib. quinq. $a d$; Recta linea $o p$ spacium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

Divisa $a d$ in nomina $a e$ majus & $e d$ minus, sunt cetera ut in 55. propof. Erunt $a g$, $g e$ longitudo $a 19$. X
udine incommensurabiles; & $o p$ poterit ac ut in 55; quæ & Irrationalis erit, potens rationale & Medium. Erunt etiam ut in 58 $o m$, $m p$ potentia incommensurabiles. Ergo $a i$ est Medium $a 12$. X
lium, quia nomen majus ac binomij quinti ad est incommensurable longitudine Rationali $a b$ per definitionem, sed $a i$ quadratis $l m$, non simul est æquale; Summa ergo Media. Rursus rectangulum $e c$ est Rationale, quia minus nomen $e d$ longitudine commensurable est Rationali $a b$ ex definitione, ipsiusq. dimidium est & Rationale & ipsi æquale $m t$ Rationale, sub $o m$, $m p$ contentum. Quare cum $o m$, $m p$ sint potentia incommensurabiles, faciantq. ex ipsarum quadratis $l m$, $m n$ compositum Medium, & rectangulum sub ipsis contentum $m t$ Rationale; erit $o p$ irrationalis, quæ Rationale & Medium potens dicitur. $a 41$. X

EUCLIDIS ELEMENTA PROPOSITIO LX.

Theorema 42.

Si spatium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus secta, ad , recta linea op spatium potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

¶ 19. X.

Divisa ad in nomina ae majus & ed minus, cetera fiant ut in 55. Erunt ag , eg longitudine incommensurabiles & op poterit spatium ac . Erunt & om , mp potentia incommensurabiles ut in 58. Compositum ex quadratis lm , mn erit Medium ut in 59: & ut in 58, mt sub om , mp contentum, Medium. Quia vero duarum ae , ef rectarum, illa quidem longitudine est incommensurabilis ipsi ed ; hac vero commensurabilis; perunt ae , ef longitudine incommensurabiles, Ergo & in eadem cum his ratione ai , ek , sunt incommensurabilia. Quare & compositum ex lm , mn quadratis ipsi ai equale, & mt ipsi ek equale erunt incommensurabilia. Quamobrem cum om , mp sint potentia incommensurabiles, faciantque & ex ipsorum quadratis lm , mn compositum Medium & mt sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque ex ipsorum quadratis compositum.

¶ 2. X.
¶ 10. X.

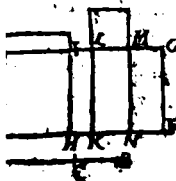
imposito, erit tota op^d Irrationalis quæ bina^d 42. X
ledia potens vocetur.

Porro docetur, quanam Irrationales. Eati-
nes faciant Irrationalium primo Senario propo-
arum, ad rationalem lineam applicata qua-
ata.

PROPOS. XL

Theorema 43.

Quadratū ejus ab , quæ ex binis no-
minibus ac , cb ad rationalem de ap-
icatum df , latitudinem dg facit ex
nis nominibus dl , lg primam.



Applicato ad de rectan-
gulo dh quadrato ac equali
& ad ih alio, ik quadrato
 cb equali; = erit l rectan- = 4. Hic
gula ac b bis sumto equalis;
Sig, ex puncto m inter lg
medio agatur parallela mn

ide, erit tam ln quam mf equalis ac b re-
ingulo. & Quoniam itaq, ac , cb potentia solum 47. X
incommensurabiles sunt, erant eorum quadrata ratio-
lia & incommensurabilia, quorū utriq, cum ex ijs
impositum y sit commensurabile, erit & quadra- 716. X
ū ae , cb compositum dk Rationale, quod ad
rationalem de applicatū, d facit latitudinem dl 21. X
rionale, ipsiq, de longitudine commensurabile.

da 4

Quia

22. X. Quia recta c, b sunt Rationales potentia autem commensurabiles, rectangulum sub ipsis erit
 24. X. Medium, & eundem duplum l. Medium. Itaq;
 23. X. Latitudo lg est Rationalis, ipsi lk , id est, d, e longitudine incommensurabiles. Sed d, l ipsi d, e est
 3. X. ostensa longitudine commensurabiles. Ergo d, l ,
 37. X. lg longitudine sunt incommensurabiles, adeoque rationales potentia solum commensurabiles, & d, g ex binis nominibus composita. Erat Prima. Quia enim a, c, b rectangulum inter quadrata a, c, c, b est medium proportionale, erit l, n inter d, h, i, k Medium proportionale, & l, m inter d, i, i, l . Itaq; rectangulum $d, i, quadrato, l, m$ est aequale: Et cum quadrata a, c, c, b sint commensurabiles, & recta d, i, l eandem cum illis habentes rationem longitudine sunt commensurabiles. Et quia d, k quam l, f est maior quadrataq; a, c, c, b rectarum, rectangulo a, c, b summo sunt maiora, & etiam d, l quam l, g est maior. Itaq; cum d, l sit maior quam l, g , & d, i rectangulum quadrato l, m ostensum aequale, & videns recta d, l in i in partes longitudine commensurabiles, ut patet & poteris d, l maior plus quam l, g minor quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Quare cum d, g sit ostensa ex binis nominibus, & d, l maior plus posse, quam l, g minus, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, atq; idem d, l nomen maius exposita rationali d, e longitudine commensurabile est. erit d, g per desumpta ex binis nominibus Prima.

● PROPOS: LXII.

Theorema 44.

Quadrata ejus, quæ est ex binis
 ac , cb , medijs prima ab , ad de Ra-
 tionalem applicatum df , Latitudi-
 nem $d g$ facit ex binis $d l$, lg nomi-
 nibus secundam.

Repetatur eadem constructio, qua in præce-
 denti est adhibita. Quia ergo ac , cb sunt Media
 potentia tantum commensurabiles, quæ cōtineant a 38. X.
 Rationale, erunt earum quadrata Media & com-
 mensurabilia, & ipsis equalia dh , lk , media qua-
 re & totum dk illis p commensurabile, & Medium;
 ipsiusq; Latitudo dl & rationalis ipsi de Longitudi- p 16. X.
 ne incommensurabilis. Et cum $ac b$ rectang- ycor. 24. X.
 lum sit rationale, ejus etiam duplum l frationa- d 23. X.
 le erit. Ergo lg Latitudo est rationalis longitu- Cum 21. X.
 dine commensurabilis ipsi lk , id est, de . Cum
 itaque duarum dl , lg , hæc longitudine sit com-
 mensurabilis ipsi de , illa verò incommen-
 surabilis, Serunt inter se longitudine incommen-
 surabiles. Sunt autem & rationales dl , lg ut 21. X.
 patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantum com- 37. X.
 mensurabiles: & tota $d g$ est ex binis nomi-
 bus. Erit etiam secunda. Similiter enim, ut
 in præcedenti, ostenditur dl esse nomen majus &
 posse plus quam minus lg quadrato rectæ sibi longi-
 tudine

tudine commensurabilis. Sed ostensum est nomen minus lg esse longitudine commensurabile rationali d eposita. Erit igitur dg ex binis nominibus secunda.

PROPOS: LXIII.

Theorema 45.

Quadrata ejus, quæ ex binis medijs secunda $a b$, ad Rationalem d applicatum $d f$, Latitudinem $d g$ facit ex binis nominibus $d l$, lg tertiam.

39. X.

Constructis iisdem ut in 61, quia $a c$, $c b$ sunt Medie potentie tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis equalia $d h$, $i k$ me-

36. X.
9 cor. 24. X

dia illisq, eorum $d k$ a commensurabile, medium. Ergo $d l$ Latitudo est rationalis, ipsi $d e$ longitudine incommensurabilis. Et cum $a c b$ rectangulum sit Medium, ejus duplum $l f$ erit medium

23. X.

& lg latitudo longitudine d incommensurabilis ipsi $l k$ vel $d e$. Cum vero $a c$, $c b$ sint longitudines incommensurabiles, fitq, ut $a c$ ad $c b$, ita qua-

3. Lemma

19. X.

10. X.

16. X.

dratum $a c$ ad rectangulum $a c b$, & erunt hæc inter se commensurabiles. Sed $a c$ quadrato, compositum ex ipsis, id est $d k$ est commensurabile.

ut patet, & rectangulo $ac b$ commensurabile
est e , ut duplum $l f$: Ergo $d k$ ipsi $l f$ est incommen-
surabile, & ipsa q , $d l$, $l g$ sunt longitudine incommen-
surabiles: Cumq; etiam rationales, ut patet.
Ergo $d l$, $l g$ sunt rationales potentia tantum com-
mensurabiles, & tota $d g$ ex binis nominibus. 37. X.
Erit etiam tertia. Similiter enim ut in 6r
ostenditur $d l$ esse nomen majus, posseq; plus
quam minus $l g$, quadrato recta sibi longitudine
commensurabilia. Sed ostensum est neutrum no-
men $d l$, $l g$ esse posita rationali $d e$ longitudi-
ne commensurabile. Erit itaq; $d g$ ex binis, per defini-
tionibus tertia,

PROPOS: LXIV.

Theorema 40.

Quadratum Majoris $a b$ ad Ratio-
nalem $d e$ applicatum $d f$, latitudi-
nem $d g$ facit ex binis nominibus $d l$,
 $l g$ quartam.

Constitutio q̄r̄dem ut in 6r, quia $a c$, $c b$ po-
tentia sunt incommensurabiles, continentes Medi- 40. X.
um, faciuntq; compositum ex quadratis suis
Rationale, erit $d k$ rationale. & $l f$ duplum
rectanguli $a b c$ Medium; adeoque $d l$ & ra-
tionalis ipsi $d e$ longitudine commensurabilis:
Sed

23. X. Sed l rationalis ipsi k , id est, d & longitudine
 incommensurabilis, ipsaq; d l , l g longitudine in-
 commensurabiles, & vel Rationales potentia tantum
 commensurabiles & d g binomialis. Erit
 etiam quarta. Quadratum enim l m , ut in 61,
 est æquale rectangulo d l . Et quia quadratus a c ,
 c b sunt incommensurabiles, etiam d h , i k ipsi
 æqualia sunt incommensurabilia, & d i , i l lon-
 gitudine incommensurabiles. Ita, ut in 61, osten-
 ditur d l maior quam l g ; & ad d l applicatum
 rectangulum d l æquale quadrato l m , quod d l
 dividit ad i in partes longitudine incommensura-
 biles. Itaq; & poterit d l plus quam l g . quadrato
 recte sibi longitudine incommensurabilis. Sed
 majus nomen d l longitudine commensurabile
 est posita Rationali d e . Erit ergo d g ex bi-
 nis nominibus quarta.

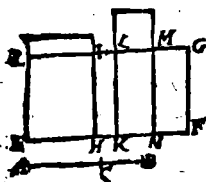
PROPOS: LXV.

Theorema 47.

Quadratum ejus a b , quæ Medius
 & Rationalis potest, ad Rationalem d
 applicatū d f , Latitudinem d g , facit
 ex binis nominibus d l , l g quintam.
 Peractis ceteris ut in 61, quia a c , c b sunt po-
 tentia incommensurabiles, facientes quidem ex suis
 quadratis Medius, et sub se contentum rationale.

61. X.

erit



erit dk aequale cōposito qua-
dratorum Medium, & In-
duplum rectanguli acb Ra-
tionale. Ergo Latitudo dl
est Rationalis longitudine p
commensurabilis posita de; $a : b :: x$

lg vero Rationalis eidem
longitudine y commensurabilis; & sic dl, lg sunt
longitudine d incommensurabiles; & quia Ratio-
nales, sunt Rationales potentia tantum commen-
surabiles, ex quibus composita dg est ex binis
nominibus & quidē quinta. Rursus enim; ut in
61 ostēditur, dl l rectangulū aequale esse quadrato
lm, & ut in 64. dl nominem majus plus posse quam
lg, quadrato recta sibi longitudine incommensura-
bilis. Sed minus nomen lg ostensum est posita
Rationali de longitudine commensurabile. Erit
itaq; dg ex binis nominibus quinta. $\begin{matrix} \gamma 21. X. \\ \delta 13. X. \\ \epsilon 37. X. \end{matrix}$ $\begin{matrix} \zeta \text{ per definiti-} \end{matrix}$

PROPOS: LXVI.

Theorema 48.

Quadrata ejus ab, quæ bina Me-
dia potest, ad Rationalem de appli-
catum df, facit Latitudine mdg ex
binis dl, lg nominibus Sextam.

Peractis cæteris ut in 61, quia ac, cb poten-
tia sunt incommensurabiles, a faciunt & ex suis qua-
dratis $\alpha 42. X.$

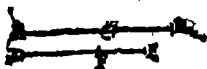
- dratis compositum medium, & sub se contentum Medium, incommensurabileq; ex quadratis composito, id est, $d k$ composito quadratorum equali & $l f$ rectangulo $a c b$ bis sumto æquale; erunt Media, & latitudines $d l$, $l g$ rationales ipsi de longitudine incommensurabiles. Quoniam verò $d k$, = incommensurabile est rectangulo $a c b$, etiam ipsius duplum $l f$, incommensurabile erit. $d l$ p se q; $d l$, $l g$, incommensurabiles longitudine, quæ sunt Rationales potentia solum commensurabiles, ac ob id $d g$ ex binis nominibus, & quidem Sexta. Nam $d l$, ut in 65; nomen majus plus potest quam $l g$ quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed neutrum illorum nominum $d l$, $l g$, est ostensum Rationali positæ $d e$ commensurabile longitudine. Ergo $d g$ est ex binis nominibus Sexta.
- ¶ 23. X.
 ¶ 13. X.
 ¶ 10. X.
 ¶ 17. X.

PROPOS: LXVII.

Theorema 49.

Ei $a b$, quæ ex binis nominibus $a c$, $c b$ Longitudine commensurabilis $d e$, & ipsa ex binis nominibus $d f$, $f e$ est, atque ordine eadem.

Fiat



Fiat, ut tota $a b$ ad totam $d e$; ita ablata $a c$ 12. VI.
 ad ablatam $d f$. Ergo & reliqua $c b$ ad reliquam 19. V.
 erit, ut tota $a b$ ad $d e$ totam. Cumq; $d e$
 ipsi $a b$ sit longitudine commensurabilis; & Erit 7 10. X.
 & $d f$ ipsi $a c$; & $f e$ ipsi $c b$. & Sunt verò $a c$, $c b$ 37. X.
 nomina binomialia $a b$ rationalia. Ergo & $d f$,
 & sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut $a c$ ad
 $d f$, ita $c b$ ad $f e$: & permutando, ut $a c$ ad $c b$,
 ita $d f$ ad $f e$. Sed $a c$, $c b$ sunt potentia solum
 commensurabiles. Ergo & $d f$, $f e$. Atq; ita $d f$,
 & sunt Rationales potentia solum commensurabi-
 les, & $d e$ ex binis nominibus. Erit & ipsi $a b$
 ordine eadem. Aut enim $a c$ plus potest, quàm $c b$,
 quadrato recta sibi longitudine commensurabilis; 15. X.
 poterit $a c$ plus quàm $c b$ quadrato recta longi-
 tudine commensurabilis, poterit & $d f$ quàm $f e$;
 itaq; si nomē majus $a c$ longitudine commensurabilis
 fuerit ipsi Rationali posita; erit & $d f$ & utraq; $a b$
 & binomialis prima: Si minus $c b$ etiam $f e$, &
 utraq; $a b$, $d e$ est binomialis secunda; Si neutrum
 $a c$, $c b$ vel $d f$, $f e$ erit ex binis nominibus tertia.
 Sed si $a c$ plus possit quàm $c b$ quadrato recta sibi
 longitudine incommensurabilis, etiam $d f$ quàm
 $f e$, & ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quin-
 ta vel sexta binomialis erit per definitionem.

Si *de* binomiali *ab* tantum potentia sit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiam si potentia sint commensurabiles.

PROPOS: LXIIX.

Theorema 30.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *cb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

a Fiat ut *a* *b* ad *d* *e*, ita ablata *a* *c* ad ablatum *d* *f*, *a* erit etiam reliqua *c* *b* ad reliquam *f* *e*, ut tota ad totam. Sed *d* *e* ponitur ipsi *a* *b* longitudine commensurabilis; *ergo* *d* *f*, *f* *e* ipsi *a* *c*, *c* *b* sunt longitudine commensurabiles. Sunt etiam

a 11. VI.

b 19. V.

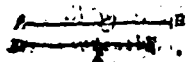
c 10. X.

tem a c, c b media. d Ergo & d f, f e. Rursus cum
 sit, ut a c ad d f, ita c b ad f e, & permutando, ut
 a c ad c b, ita d f ad f e; si uq, a c, c b potentia
 commensurabiles, & erunt & d f, f e. Sunt autem
 d f, f e etiam ostensa Media; sunt ergo Media po-
 tentia tantum commensurabiles, & d e ex binis
 mediis, & quidem cum a b eodem ordine. Quia e-
 nim est, ut a c ad c b ita d f ad f e. Sed ut a c ad
 c b, ita quadratum a c ad rectangulum a c b, &
 ut d f ad f e, ita d f quadratum ad d f e rectangu-
 lum; erit etiam, ut quadratum a c ad rectang.
 a c b, ita d f quadratum ad d f e rectang. &
 permutando, ut quadrata a c, d f, ita rectangula
 a c b, d f e; Sed a c quadratum quadrato d f,
 (quia a c, d f sunt longitudine commensurabiles)
 est commensurabile. Ergo & rectangula. Si ergo
 a c b fuerit rationale, erit & d f e rationale, &
 d e ex binis Mediis prima: Si uero Medium, deor. 24.
 Medium, & d e ex binis Mediis secunda. 39. X.

PROPOS: LXIX.

Theorema 51.

Majori a b commensurabilis d e
 & ipsa d e Major est.



Fiant, quæ in antecedenti.
 Quia ergo a b, d e longi-
 tudine vel potentia tan-

Bb

tum

10. X. *tum sunt commensurabiles, = eodem modo tam ad d f, quam c e, f e commensurabiles erunt. Rursus cum sit, ut a c ad d f, ita c b ad f e: & permittendo, ut a c ad c b, ita d f ad f e, p erit, ut quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum d f, ad quadratum f e; & componendo: ut compositum ex quadratis a c, c b, ad quadratum c b; ita compositum ex quadratis d f, f e, ad quadratum f e: & convertendo, ut quadratum c b, ad compositum quadratorum a c, c b, ita quadratum f e ad compos. Quadratorum d f, f e. Sed c b quadratum, quadrato f e est commensurabile, quia ipse recta vel longitudine vel potentia sunt commensurabiles: = Ergo & compositum quadratorum a c, c b, composito quadratorum d f, f e commensurabile erit. 7 Sed compositum illud est Rationale, quia recta a c, c b, componunt Majorem a b. 7 Igitur & hoc est Rationale. Rursus quia est, ut a c ad c b, ita d f ad f e, ut in precedenti; rectangulo a c b, rectangulum d f e ostenditur commensurabile; Illudq, cum sit 7 Medium, erit & hoc Medium. Sed cum sit, ut a c ad c b, ita d f ad f e, 7 Sinsq, a c, c b, potentia incommensurabiles, = erunt & d f & f e. Itaq, cum d f, f e potentia sint incommensurabiles, se oiantq, ex earum quadratis compositum Ratione; quod vero sub ipsis continetur, Medium; 7 erit eota de Major.*

PROPOSITIO LXX.

Theorema 52.

Rationale ac Medium potenti a b
commensurabilis d e, & ipsa d e Ra-
tionale ac Medium potens est.

Constructio hysdem, ut prius, etiam ut in p[re]ce-
denti compositum ex quadratis a c, c b compositum
ex quadratis d f, f e commensurabile esse ostendi-
ditur. Sed illud compositum est = Medium: & Er-
gò & hoc. Eodemq[ue] modo rectangulo a c b Ratio-
nali commensurabile & Rationale erit Rectangu-
lum d f e, & d f, f e = potentia incommensurabi-
les. Itaq[ue] tota d e Rationale ac Medium po-
tens = erit, (propter affectiones ipsi competentes.)

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti a b commen-
surabilis, d e, & ipsa d e bina Media
potens est.

Constructio hysdem, ut prius, etiam ut antea,
composito ex quadratis a c, c b compositum ex
quadratis d f, f e = commensurabile & Medium = 42. X
se ostenditur: & rectangulo a c b Medio commen-
surabile, & Medium rectangulum d f e. Sunt ve-
ro d f, f e potentia incommensurabiles, ut prius.

42. X. Deniq; cum quadratorum $a c$, & b composito rectangulum $a c b$ sit incommensurabile: sed composito quadratorum $a c$, $c b$, rectanguloq; $a c b$ commensurabilia sunt compositum quadratorum $d f$, $f e$, & rectangulum $d f e$; β erit etiam compositum quadratorum $d f$, $f e$ incommensurabile rectangula; α Eritq; $d e$ bina Media potens.
14. X.

Propositionibus duabus exponit aliam differentiam Senarij primi sex Irrationalem. Vocatur autem hactenus proposita Senaria per compositionem; quod signum componantur nomina: Sed à 7 sequuntur Senaria per detractionem, quia per signum. —, subducentur nomina. De quibus eadem quae in illis docentur.

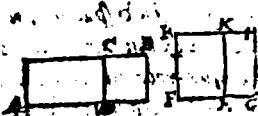
PROPOSITIO LXXII.

Theorema 54.

Si Rationale $a c$ & Medium $d b$ componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quae ex binis nominibus; vel quae ex binis Medijs primis; vel Major, vel Rationale ac Medium potens.

Erit $a c$ quàm $d b$ vel majus vel minus; & quare

le enim



de esse nequit, quia
db equalit rationalit ac
foret Rationale. Sit ergo
Majus. Applicetur ad ra-
tionalem e f, e h aequali

ipsi a c; & k g aequali ipsi d b, ut totum h i sit a-
quale toti a b. Erit e k a rationalis ipsi e f longi- a 21. X.
tudine commensurabilis p, sed k i rationalis eadem p 23. X.
longitudine incommensurabilis. Rursus quia e h ra-
tionale & h i Medium sunt incommensurabilis, erit
in eadem ratione e k, k i, longitudine & incommensurabilis.
Itaq, ex Rationalibus potentia incommensurabilibus
composita ex d erit binomialis. d 37. X.
Sed cum a c quam d b ponatur majus, e h quam
h i, & erit etiam e k major quam k i. Iam majus
nomen e k plus poterit, quam minus k i quadrato
recta sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis.
Si e k plus poterit quam k i quadrato recta sibi
longitudine commensurabilis. Sitq, e k nomen
majus rationali e f commensurabile lon-
gitudinis, ut patet erit e i per defn. ex binis nomi-
nibus prima. Itaq, recta potentis functione e g,
ipsa a b aequali sub rationali a b & binis nomi-
nibus prima e i contenta erit irrationalis, 58. X.
quae ex binis nominibus dicitur.

Si vero e k plus poterit quam k i, quadrato re-
cta sibi longitudine incommensurabilis; sitq, e k
potentis functione e g longitudinis incommensurabilis,
erit e i ex binis nominibus quarta per defn. Quare

¶ 33. X.

recta potens e.g. spacium ac equale ipsi a b spacio, con-
 tensum sub Rationali ef & e i ex binis nominibus
 quarta. Irrationalis est, qua vocatur Major.
 Sit jam a c majus Irrationale & Medium; d b ve-
 ro minus Rationale, constructis huiusmodi, erit e k lon-
 gitudine ipsi e f incommensurabilis, & k i com-
 mensurabilis, adeoque e k, k i rationales potentia
 tandem commensurabiles, & e i ex d. binis nomi-
 nibus. Itaque e k nomen majus potest, quam
 quicum k i, quadrato recta sibi longitudine vel com-
 mensurabili vel incommensurabili. Si commensurabilis,
 sitque e k rationali ef posita incommensurabilis,
 erit e i ex binis nominibus secunda.
 Quare recta potens spacium ac sive a b, sub ratio-
 nali ef & e i ex binis nominibus secunda, con-
 tensum, Irrationalis est qua ex binis Mediis
 prima appellatur.

¶ 34. X.

Si commensurabilis, erit e i ex binis nomi-
 nibus quinta. Quare recta potens spacium ac sive
 a b sub rationali ef , & ex binis nominibus
 quinta ei contentum, Irrationalis est, qua & Ra-
 tionale ac Medium potens dicitur.

¶ 35. X.

PROPOSITIO LXXIII

Theorema 33.

Si duo Media, ac , db inter se in-
 commensurabilia componantur, due
 reli-

Reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

Adhibita a precedenti constructione, erit $a c$ quædam $d b$ vel major vel minor, & nullo modo æqualis, quia contra hypotbesin forent commensurabilia. Cum ergo $a c$, $d b$ ponantur spacia Medea, erunt ipsi æqualia $e h$, $h i$ media; quare $e k$, $k i$ & ejusdem rationis rationales & longitudine β 1. VI. & incommensurabiles sunt ipsi $e f$ posita, & ex $e k$, γ 2. 3. X., $k i$ rationalibus potentia tantum commensurabiles δ 37. X. sibi composita $e i$ est ex d binis nominibus. Cumq; $a c$ quædam $d b$ ponatur major, erit $e k$ nomen majus, $k i$ minus. Itaq; $e k$ plus poteris quàm $k i$ quadrato recta sibi longitudine vel commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis, & utrumq; sit rationali exposta incommensurabile, erit $e i$ ex binis nominibus tertia: Quare recta potens spacium $e g$ quod a b est æquale contentum sub rationali $e f$ & ex binis nominibus tertia, irrationalis est, quæ ex binis Medis secunda dicitur. ϵ 57. X. Si incommensurabilis, & utrumq; $e k$, $k i$ incommensurabile ipsi $e f$ posita, erit $e i$ ex binis nominibus sexta. Quare recta potens $e g$ spacium sub rationali $e f$ & binomiali sexta ϵ i contentum; irrationalis est, quæ $e f$ bina ζ 60. X. Media potens vocatur.

B6

Corolla

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales, neq; Media, neque inter se easdem esse.

- Nam quadratum Medie ad Rationalem applicatum, a latitudinem efficit rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. At Quadratum ejus, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, a latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ est ex binis Medys prima, ad rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum deinde ejus, quæ ex binis mediis secundam ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. At Quadratum Majoris, ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum verò ejus, quæ Rationalem & Medium preest, ad rationalem applicatum, facit a latitudinem ex binis nominibus quintam. Postremò quadratum ejus, quæ bina Media preest, ad Rationalem applicatum, a latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ita, cum hæc latitudines differant a latitudine Media & inter se; a latitudine quidem Media, quòd hæc sit Rationalis; illa verò Irrationalis; inter se verò, quòd ordine non sint eadem

ad eam ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaq; de 7. Senarijs est actum. In primo à 37, ad 42. docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secunda à 43, ad 48. docuit earum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54. docuit irrationem Sex binomialium. In quarto à 55 ad 60. ostendit, quomodo primi Senarij sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spaciū contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c.; In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium primo Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendit commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa, In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7 alij Senarij, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex aliis Irrationalibus lineis, quæ per detractionem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

Si a Rationali $a b$ Rationalis a auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua $b c$ Irrationalis est. Vocatur autem Apotome.

3. Lemma
19. X.

~~Diagram~~ Quia enim est ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $a b$ ad

10. X. $b a c$ rectangulum; Sunt q. $a b$, $a c$ longitudine incommensurabiles, b erunt quadratum $a b$ & $b a c$ rectangulum incommensurabilia. Sed quadratum

16. X. $a b$ compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ est & commensurabile, quia lineae illae sunt potentia

14. X. commensurabiles; & rectangulo $b a c$ suum duplum est commensurabile, d Compositum itaq. ex quadratis $a b$, $a c$, & rectangulum $b a c$ bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ est, aequale rectangulo $b a c$ bis sumto una cum quadrato $b c$. Itaq.

7. II. Compositum ex quadratis rectarum $a b$, $a c$ reliquo quadrato $b c$ est & incommensurabile. Cum itaq. ex rectarum $a b$, $a c$ quadratis compositum sit rationale, utpote commensurabile quadrato $a b$ Rationali, erit $b c$ Irrationale & ipsa $b c$ Irrationalis. Vocatur autem Apotome, Resecta vel Residuum

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Si a Media $a b$, Media $a c$ auferatur potentia tantum commensurabilis existens

existens toti, quæ cū tota Rationale
 $b a c$ contineat; Reliqua $r b$ Irratio-
 nalis est. Vocetur autem Mediz A-
 potome prima.

Cum $a b, a c$ sint potentia commensurabiles, e-
 arum quadrata commensurabilia erunt. Et ex
 quadratis compositum quadrato $a c$ commensu-
 rabile. Sed quadratum $a c$ Media est Irratio-
 nale & Medium. Ergo & compositum ex quadra-
 tis $a b, a c$. Et cum $b a c$ rectangulum ponatur
 rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Itaq;
 compositum ex quadratis & rectang. $b a c$ bis sum-
 tum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex
 quadratis; $a b, a c$ est æquale rectangulo $b a c$, 7. II.
 bis sumto cum quadrato $b c$. Itaq; rectang. $b a c$
 bis cum quadrato $b c$ incommensurabile erit re-
 ctangulo $b a c$ bis sumto: & rectangulum $b a c$ bis
 incommensurabile est quadrato $b c$. Sed $b a c$ re-
 ctangulum est rationale. Ergo quadratum $c b$ est
 Irrationale & recta $c b$ Irrationalis, quæ vocetur
 Mediz Apotome prima (quia relinquitur post
 detractionem Minoris nominis linea ex hinc
 Mediz prime, à majori nomine.)

PROPOS: LXXVL

Theorema. 58.

Si à Media $b a$ Media $a c$ auferatur poten-
 tia tantum commensurabilis existens toti,
 quæ cum tota Media $b a c$ contineat; Reli-
 qua $b c$ Irrationalis est. Vocetur autem Me-
 diz Apotome secunda.

Quæ

Quoniam quadrata ab
a c potentia commensura-

16. X.

cor. 14. X.

J. 2.

18. 10.

17. X.

J. 1.

bilium sunt commensurabilia; erit & compositum
ex ipsis utriq; ipsorum a commensurabile. Sed u-
trumq; super Medij est Medium. Ergo utriq;
commensurabile compositum est Medium. Qui
verò rectangulum b a c ponitur Medium, ejus a-
iam duplurum Medium. Sed compositum ex qua-
dratis a b, c, aequale est rectangulo b a c
sumto cum quadrato b c. Compositum ergo et
quadrato Medium est majus rectangulo b a c
sumto Medio, quadrato b c. Sed Medium na-
superat Medium rationale. Itaq; quadratum b c
non est rationale, ipsaq; b c linea irrationalis quæ
vocetur Medix Apotome Secunda.

PROPOS: LXXVII

Theorema 59.

Si à recta a b linea recta a
auferatur, potentia incommensura-
bilis existens toti, quæ cum tota fa-
ciat compositum quidem, ex ipso-
rum Quadratis Rationale; quod au-
tem sub ipsis continetur huc Medi-
um. Reliqua b c irrationalis est. Vo-
cetur autem Minor.

Quæ

Quoniam compositum ex quadratis ab , ac est
 Rationale, & rectangulum bac Medium, etiam
 huius rectanguli duplum = Medium erit vel Irra-
 tionale; Compositum vero ex quadratis ab , ac a cor. 14. B
 incommensurabile rectangulo bac huius sumto. Sed a 10. def.
 Compositum quadratorum ab , ac , æquale est 7. 11.
 rectangulo bac huius sumto cum quadrato bc . d cor. 17. X
 & Exit itaq; compositum quadratorum incommen-
 surabile quadrato bc . Sed compositum qua-
 dratorum est Rationale. Ergo quadratum bc est
 Irrationale, ipsaq; bc Irrationalis, quæ vocetur
 Minor.

PROPOSITIO LXXIIX.

Theorema 60.

Si a recta ab recta ac auferatur po-
 tentia incommensurabilis existens
 toti, quæ cum tota faciat compo-
 situm quidem ex ipsarum ab , ac Qua-
 dratis Medium; quod autem sub ipsis
 continetur Rationale bac ; Reliqua
 bc Irrationalis est. Vocetur autem
 eum Rationali medium totum efficiens.

Quoniam compositum ex quadratis rectarum
 ab , ac est medium vel Irrationale, & compre-
 hensum sub ipsis bac rationale, sicut & ipsum du-
 plum;

10. def. pluri: a erunt compositum quadratorum & rectangulum bac bis sumtum incommensurabile. sed compositum ex quadratis est rectangulo bac bis sumso, cum quadrato bc , p aequale. Itaq, rectang. bac bis sumtum cum quadrato bc rectangulum bac bis sumso est $\vee$ incommensurabile. & rectangulum bac bis, quadrato bc incommensurabile. Cum itaq, bac rectangulum sit Rationale, erit quadratum bc irrationale, ipsaq, recta bc irrationalis, quæ vocatur cum Rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 51.

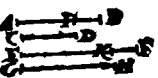
Si à recta ab recta ac auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis ab , ac , Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium bac , incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Quoniam ex quadratis rectarum a b , a c , compositum a aequale est rectangulo bac bis sumto cum quadrato bc ; superabit compositum ex quadratis Medium, rectangulum bac bis sumtum p Medi-

in quadrato $b c$, sed medium non superat Medium Rationali. Itaq; $b c$ erit Irrationalis, ipsaq; $a c$ Irrationalis, que vocetur cum Medio Medius totum efficiens.

LEMMA.

Si idem excessus $i b$ sit inter primam $a b$ magnitudinem & secundam $c d$, qui $k f$ inter tertiam $e f$ magnitudinem & quartam $g h$; erit & vicissim idem excessus $k f$ inter primam $a b$ magnitudinem & tertiam $e f$, qui inter secundam $c d$ magnitudinem & quartam $g h$.

 Quoniam $i b$ est excessus inter $a b, c d$; erunt $a i, c d$ aequales; ut & $e k, g h$. Erit ergo idem excessus inter $a i$ & $e k$, qui inter $c d$ & $g h$, cum magnitudines singula singulis sint aequales. Si autem totorum $a b, e f$ excessus idem, qui inter $a i, e k$; qui $i b$ & $k f$ ponuntur aequales. Idem itaq; erit excessus inter $a b, e f$, qui inter $c d$ & $g h$.

Corollarium.

Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmeticam analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmetica analogiam habere. Hæc enim in excessu eodem consistit, quem jam ostendimus.

PRO-

Theorema. 62.

Apotomæ $a b$ una $b c$ tantum con-
gruit recta linea Rationalis potentia
solum commensurabilis existens
toti $a c$.



Congruat ipsi $a b$, si potest, alia Rationalis
 $b d$, toti $a d$ potentia solum commensurabilis. Quia
 $b c$ est rationalis, erit $a c$ illi potentia solum com-
mensurabilis rationalis: Summe ergo $a c$, $b c$ poten-
tia tantum commensurabiles, ut & $a d$, $b d$. Cum
verò idem sit excessus, inter compositum ex qua-
dratis rectarum $a c$, $b c$ & rectangulum $a c b$ bi-
sumtum, qui inter compositum ex quadratis recta-
rum $a d$, $b d$, & rectangulum $a d b$ bis sumtum,

¶ 7. II.

¶ 79. X. quia utrumq; superat utrumq; quadrato $a b$; &
erit permutando etiam idem excessus compositi-
rum ex quadratis $a c$, $b c$, & $a d$, $b d$, qui re-

¶ 17. X.

ctangulorum bis sumptorum $a c b$ & $a d b$, & est
autem excessus inter illa composita spaciū rati-
onale; quod utrumq; sit rationale. Igitur & excus-
sus bis sumptorum rectangulorum est spaciū rati-
onale. Sed cum $a c$, $b c$ sint rationales potentia
solum commensurabiles, erit rectangulum $a c b$

¶ 21. X.

medium,

Medietate, & omnia, duplata medietate. Sic recta de
 causa a d b rectangulum b d erit medietas. Sed
 medietas non superat medietatem rationalem. Ergo re-
 cessus rectangulorum a c b & a d b, id est, qua-
 dratum ex ab erit spatium Medietas, id est, Irrati-
 onale, quod tamen modo rationalem esse debuit.
 Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 7.

Medie Apotomae primae a b una
 & eorum congruit recta linea Me-
 dia, potentia solum commensurabi-
 lis existens a toti, & cum tota Ra-
 tionale a c b continens.

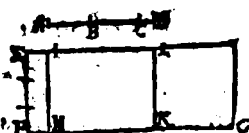
Congruat ipsi ab alia b d. Quia b c est media
 ipsi a c potentia solum commensurabilis, a erit & a 34. 3.
 c, medietas, & ac, cb Mediae potentia solum comen-
 surabiles. Quoniam vero intercompositum quadra- p 7. 11.
 torum a c, b c, & compositum quadratorum
 a d, b d idem est excessus, nempe quadratum a b,
 cuius inter rectangula a c b & a d b quodvis b d factum y Schol.
 e. Desumptus excessus rectangulorum, est spatium ra- 27. 3.
 tionale. Ergo & excessus compositorum ex
 monstratus. Sed cum a c, b c sine Mediae poten-
 tia solum commensurabiles, erunt ipsarum qui-
 dratum

246. X. data commensurabilia & compositum ex ipsis utriusque
 247. X. ipsorum & commensurabile atque ob id & Medium
 248. X. Nec aliter Medium erit compositum quadrato-
 rum ad, bd. Sed Medium non superat Medium
 rationale. Ergo excessus compositorum ex quadra-
 tis erit Medium Irrationale, quod modo effen-
 debatur Rationale. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 54.

Mediæ Apotomæ Secundæ ab,
 unâ bc tantum congruit recta linea
 Media potentia solum commensu-
 rabilis existens toti ac, & cum tota
 Medium acb continens.



Congruat ipsi ab, si
 potest, alia bd; & ad
 Rationalem ef applica-
 tur rectangulum eka
 quale composito quadra-

torum ac, bc & aliud eh aequale quadrato ab,
 & aliud eg aequale composito quadratorum ad,
 bd. Quoniam itaque compositum ex quadratis
 rectarum ac, bc, rectangulo acb bis sumto cum
 quadrato ab aequale est; erit ik aequale re-
 ctangulo acb bis sumto, & ig aequale rectan-
 gulo

ulo a d b bis sumto. Cumq; a c, b c sunt Media
 otentia cōmensurabiles & erunt earum quadrata & 24. VI.
 Media & cōmensurabilia; Atq; ex ipsis com- 7 16. X.
 ositum utriq; eorum cōmensurabile & d Medi d cor. 14. X
 m. Igitur e k, composito illi æquale, erit
 ledium. Quod cum sit applicatum ad Rationā
 m e f, erit f k rationale ipse e b longitudo, 23. X.
 incommensurabilis; neq; nō sit h k rationalis est
 si e f longitudine incommensurabilis. Et quia
 c, b c longitudine sunt incommensurabiles, &
 f, z ad a c ad b c, ita quadratum a c ad rectan- 23. Lemma
 ulum a c b, erit quadratum a c rectangulo 19. X.
 c b incommensurabile. Sed quadratum c com- 10. X.
 ositum ex quadratis a c, b c est cōmensurabile,
 test, e k rectangulum; & a c b suum duplum,
 test; k rectangulum cōmensurabile: Ergo e k,
 k sunt incommensurabilia; atq; si f h, h k re- 14. X.
 a e incommensurabiles. Quæ cum sint ostensa
 rationales: erunt f h & h k rationales poten-
 in folium cōmensurabiles. Cum ergo ex Ra-
 onali f k auferatur rationalis h k ipsi f k poten- 74. X.
 ia tantum cōmensurabilis, erit f h Apotome
 r illi congruens h k. Similiter ostenditur f h a-
 potome, illiq; congruens h g. Atq; ita apotoma
 h non una tantum congruet rectæ potentia so-
 m cōmensurabilis existens toti. Quod a ab- 10. X.
 iratum.

LIBER X.

LIBER X.

CE 2

P. RO.

EVLIDIS ELEM:
PROPOS: LXXXIII.

Theorema 65.

Minori ab una tantum congrua
recta linea bc potentia incommen-
surabilis existens tota ac , & cum to-
ta faciens compositum quidem ex
ipsarum ac , bc quadratis Rationale,
quod autem sub ipsis continetur,
Medium ac b .

 Congruat ipsi $a b$. Ap-
rest, alia $b d$. Quoniam

ut in 30. propos. idem est excessus compositorum
Schol. 23 quadratis $a c$, $b c$ & ex quadratis $a d$, $b d$ qui in
X ter rectangula $a c b$, & $a d b$ quolibet b sumcos. Sed
excessus compositorum ex quadratis est Rationale,
quia utrunq. ponitur rationale. Ergo & excessus
rectangulorum $a c b$ & $a d b$ est spaciū Rati-
onale. Idem vero etiam est non rationale, quia
p 27. X. rectangula ponuntur Media, p qua se non excedit
rationali. Ne ergo absurdum hoc sequatur, ven-
erit propositio.

PROPOS: LXXXIV.

Theorema 66.

Ei ab , quæ cum Rationali Medi-
um to-

rum facit, una tantum congruit re-
cta linea *b* potentia incommensura-
bilis existens toti *a c*, & cum tota fa-
ciens compositum quidem ex ipsa-
rum quadratis Medium; quod au-
tem sub ipsis continetur, est Ratio
nale.

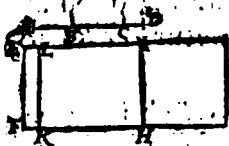
Praeterea hoc, quod *b c*, alia *b d*. Quonia-
m ut in 80. propos. idem est excessus compositi-
onum ex quadratis *a c*, *b c*, & ex quadratis *a d*,
b d, qui inter rectangula *a c b* & *a d b* qualibet
bis sumitur. Sed inter has rectangula, ut in 81. pro-
pos. spatium est rationale. Igitur & compositorum
ex quadratis excessus est spatium rationale. Sed
idcirco e iam est non rationale, quia utrumque est
medium quo se non extendit rationale. Ne ergo a 27. X.
absurdum hoc sequatur, vera est propositio.

PROPOS: LXXXV.

Theorema 67.

Et *a b*, quae cum Medio Medium
totum facit, una tantum congruit
recta linea *b* potentia incommen-
surabilis existens toti *a c*, & cum to-
ta faciens & compositum ex ipsa-

rum Quadratis Medium, & quod sub
 ipsis continetur $a c b$ Medium, in-
 commensurabileq; compositum ex
 ipsarum Quadratis.



Præstet hoc, si potest.
 quod $b c$, aliud $b d$; ca-
 demq; adhibeatur con-
 structio, quæ in 82 Quo-
 niam compositum ex qua-

23. X.

dratis $a c$, $b c$, est Medium ipsi æquale, $c k$ erit
 Medium, & recta $f h$ rationalis ipsi $c k$ longitudo-
 incommensurabilis. Rursus cum $a c b$ rectang-
 lum sit Medium, & ipsius duplum, id est, $i k$ Me-
 dium; erit & recta $h k$ Rationalis longitudinis
 incommensurabilis ipsi $c k$ rationali. Et quoniam
 $i k$ rectangulum $a c b$ utriusque duplum, est com-
 mensurabile, quod rectangulum $a c b$ incommensu-
 rabile ponitur composito ex quadratis, $a c$, $b c$,
 id est, ipsi $c h$, est $i k$ eidem compositum. $c h$ p in-
 commensurabile, & recta $f h$, $h k$, eandem ha-
 bentes rationem, longitudines γ incommensurabi-
 les. Quæ cum etiam sint Rationales. Ergo
 et $g d$ rationales potentia solum commensurabiles.
 Quare cum ex $f h$ rationali abscideretur ratio-
 nis $h k$, d erit $f h$ apotome, & ipsi congruens $h k$.
 Nec aliter ostendimus $f k$ esse apotomen, &

A 14. X.
 210. X.

274. X.

ipſi congruentem h k, inde ſolet, ut Apotome u-
na non una tantum congrueret. Quod abſur-
dum.

lib. X.

Definitiones

Tertia.

*Expoſita Rationalis & Apotome ſit tota plus poſſit quam congruens, qua-
drato recta linea ſibi longitudine com-
menſurabilia.*

1. Si quidem tota expoſita Ratio-
nalis ſit longitudine commenſurabi-
lis; vocetur Apotome prima.

2. Si vero congruens expoſita
Rationalis ſit longitudine com-
menſurabilis; vocetur Apotome Se-
cunda.

3. Quod ſi neque tota, neque con-
gruens expoſita Rationalis ſit lon-
gitudine commenſurabilis; vocetur
Apotome tertia.

Rationalis si tota plus possit congruens quadrata recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quarta.

5. Si vero congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota; neque congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Sexta.

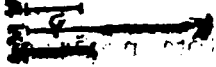
PROPOSITIO LXXXVI

Problema 19.

Invenire primam Apotomen.

ad Schol.
29. X.
p. cor. 6. X.

Assume Ceterum



• Inveniri debet a
metu quadratic a^2, b^2
quorum excessus $a^2 - b^2$ sit no
quadratic. Assumatur R
rationalis d. Et ipsi longi

tudine commensurabilis sit ut ab sit, in ab ad a
ita quadratum ef ad quadratum gf non focu
42. X. Erigat Apotome. Quoniam quadrata c
ef sit

ef sit

est autem, ut numeri a, b, a, c , & omnes potentia sit-
 tam commensurabiles, recta e, f, g, h . Sed e, g est
 rationalis, quia a potest d rationalis longitudine est
 commensurabilis. Ergo e, g est rationalis. Cum
 vero a, b & a, c proportio non sit numerorum qua-
 dratorum, & erunt e, f, g, h longitudines incommensura-
 biles & sic e, f, g, h recta potentia tantum commensurabiles.
 Reliqua igitur Apotome, & quidem
 prima. Positum enim e, f plus quam g, h quadra-
 ta recta a, b : Quia est, ut numerum a, b ad numerum
 a, c , ita quadratum e, f ad quadratum g, h ; erit &
 congruens, ut a, b ad c, b ita quadratum e, f , ad
 quadratum h . Sed a, b, c, b habent rationem
 quadratorum. Ergo & quadrata e, f & h , & sic
 e, g, h sunt longitudines & commensurabiles. Quoti-
 ens igitur, tota e, f plus potest, quam congruens
 g, h , quadrato recta a, b sibi commensurabilis longi-
 tudine erit e, g per defn. Apotome prima.

26. X.

29. X.

74. X.

PROPOS: LXXXVIII

Problema 20.

Invenire Secundam Apotomen.

Fiant autem ut de 10. propo. Erit e, g Apotome
 Secunda. Quotiens enim quadrata g, h , & e, f pro-
 portione habentia numerorum a, c, a, b commensurabilis sunt, & erunt recta g, h, e, f commensura-
 biles.

Q. 1

biles

89. X.
947. X.

biles saltem potentia. Sed g est rationalis, quā
posita rationali d commensurabilis longitudo;
erit ergo e etiam Rationalis. Quia a c , ab ,
et sic quadrata ag , cf , proportionem non habent
quam numeri quadrati: Perinde velut ag , cf
longitudine incommensurabiles et sic rationales
potentia solum commensurabiles. Et idcirco eg
reliquum est Apotome: Et quidem Secunda.
Posit enim e f plus quam gf , quadrato h : erit h in
antecedenti h ipse f longitudine commensurabi-
lis. Quare, cum tota e f plus possit, quam con-
gruens gf , quadrato velut h sibi longitudine com-
mensurabilis, erit eg Apotome Secunda.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 21.

Invenire Tertiam Apotomen.

Fiunt omnia, ut in 11. Erit
 $A \dots C \dots P$ eg Apotome. Quoniam enim
 $I \dots$ quadrata e f , gf proportionem
 $D \dots$ habentia numerorum a b , a c
 $E \dots$ commensurabilia sunt, erunt e f

gf , et commensurabiles saltem potentia: Et quia
 e rationalis, erit g rationalis. Quia vero a b ,
 a c et sic quadrata e g , gf proportionem non ha-
bent, quadratorum numerorum, erunt e f , gf

89. X.

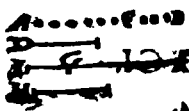
longi

longitudinem incommensurabilem & irrationalis
 potestas solum commensurabilis & ideoq; c g rea-
 liqua Apotome est, & quidem Tertia. Quo-
 niam est uti ad ab in quadratum d ad ef; & ut a 74. X
 a b ad a c ita quadratum c f ad quadratum g f
 erit ut a g ut a b ad a c ita quadratum d ad qua-
 dratum g f. Sed & a c non habent rationem
 numerorum quadratorum; ergo non d & g f a
 & f sed & g f & f sunt longitudines incommen-
 surabiles. Neutra igitur ipsarum c f g f posita
 rationali d longitudine commensurabilis est. Pos-
 set eam c f plusquam g f quia h d recta h sibi lon-
 gitudine commensurabilis; erit, ut in 86. h ipsa
 c f longitudine incommensurabilis. Quare, cum
 c f plus possit quam g f (neutra earum posita ra-
 tionali d existens commensurabilis) quadrato recta
 h sibi longitudine commensurabilis, uti & g f
 definitione Apotome tertia. uti in 86.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenio Quarta Apotomen.



Fiat angulus acutus. Erit
 ut in 86, c g Apotome; &
 quide quarta. Posuerim c f
 plusquam g f quadrato recta h.

Quia

24

EUCLIDIS ELEM:

Quia ergo desit, ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$; erit convertendo, ut $a b$ ad $c h$ ita quadratum $e f$ ad quadratum h . Cum itaq; $a b$, $c b$ non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt $e g$ & h recta longitudo incommensurabiles. Quoniam itaq; tota $e f$ prout a ratione existens incommensurabilis longitudinis, plus potest quadrato $g f$ quadrato recta $a h$ subtrahere incommensurabili, erit $e g$ ex desit. Apertissime Quarta.

25

PROPOS: XC.

Problema 22.

Invenire Apotomen Quintam.

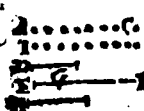
Fiant ut in 53. Erit, ut in 39. $e f$ apotomen; & quidem Quinta. Passit $a f$ plus quam $g f$ quadrato recta $a h$. Et quia similiter ut in 26. ostendimus per conversionem rationis esse, ut $a b$ ad $c b$; ita quadratum $e f$ ad quadratum h ; erunt rursus, ex 39. recta $e f$ & h incommensurabiles longitudinis; & itaq; congruent $g f$ ratione plus quam longitudine commensurabilis. Ergo ex desit ut $g f$ Apotomen Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 23.

Inve.

Invenire Apotomen Sextam.


 Fiant omnia ut in 14.
 Erunt, ut in 28. d & e f
 longitudine commensura-
 biles & e g apotome. octa.
 Sexta. Nam d & g f sunt
 longitudine incommensurabiles. atque, utrum
 ipsorum e f, f g commensurabiles ne possit a ratio-
 nali d. Possit e f plus quam g f quadrato ratio-
 nis, que ut in 29, ipsi e f longitudine incommensura-
 biles est. Est ergo e f ex definitione Apotome
 Sexta.

Solutio.

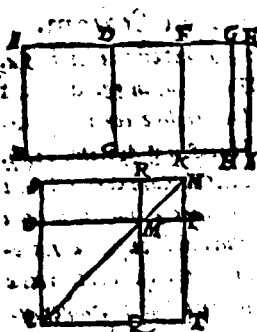
Theon invenit Apotomas prom-
 ptius, subductis binomiorum nomi-
 nibus minoribus ex majoribus; atque
 ita apotomarum ordo respondet or-
 dini binomiorum.

PROPOS: XCII

Theorema 68.

Si spatium a c contineatur sub Ra-
 tionali a b & Apotoma prima a d,
 recta linea a m spatium potens, Apo-
 toma est.

Ipsi a d congruas d e, & erunt ex definitione
 apoto-



17. X.

17. X.

18. X.

16. X.

12. X.

6. def.

10. X.

14. X.

22. X.

14. II.

26. VI.

apertum prima a c,
c potentia tantum
inmensurabilis, & a c
posita rationali longi-
tudine commensura-
bilis. Secta de li-
fari omnia f, quadra-
ta ad a c = applica-
tun aequalia recta a g
lum a g c. Et quia a c
plus potest quam d c

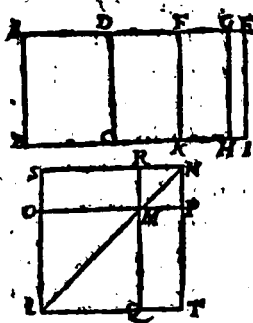
quadrato recte sibi longitudine commensurabili,
erunt a g, g c recte longitudine commensurabi-
les, & sic utraq, tota a c longitudine commen-
surabilis. Sed a c rationali a b longitudine est
commensurabilis. Ergo & utraq, a g, g c, ratio-
nali commensurabilis est longitudine, & irrationali
lis. Quare utraq, a h, g i ipsi a b paralleli, & erunt
a h, g i rectangula rationalis. Quia utraq,
d f, f c longitudine commensurabilis est ipsi d e;
d e vero longitudine incommensurabilis irrationali
a b; erit utraq, ipsarum d f, f c ipsi a b longitu-
dine incommensurabilis. Itaq, rectangulum f c sive
f i sub Rationalib. potentia commensurabilibus con-
tentum erit o Medium. Iam si sunt ipsi a h, g i
quadrata st, & p equalia ad componens angulum
n juncta, & erunt quadrata st, & p circa eandem
diametrum l n. Quoniam itaq, rectangulum
a g c,

ag , quadrato e est aequale; & erunt ag , fe , ge
 recte proportionales, adeoque, si medium proportio-
 nale inter ah , gi , id est, inter st , rp quadrata:
 sed sp inter eadem quadrata est & Medium pro-
 portionale. Sunt itaque, rectangulum sp & si aequa-
 lia: Sed ipsi si aequale est fe , & ipsi sp aequale rt :
 itaque, totum dignumoni unq , cum quadrato rp
 est aequale. Est a . totum ai = aequale quadrato st , rf . = ex const.
 itaque, reliquum a quadrato oq aequale est, & om-
 ne est spatium ac . Dico esse Apotomen. Quia
 enim ah , gi sunt spacia rationalia, ut patet;
 ipsa aequalia quadrata st , rp rationalia, & re-
 ctæ op , mp , Rationales erunt. Cumque, si sit
 medium, & ei aequale sp erit Medium; adeoque,
 incommensurabilia sunt sp , rp ; & quidem cum
 his rationis rectæ op , mp incommensurabiles;
 & reliqua om Apotome.

PROPOS. XCIII.

Theorema 39.

Si spatium ac contineatur sub
 rationali ab & Apotoma secun-
 da ad ; Recta linea om spatium
 otens, Mediæ est apotome pri-
 ma.



ipfi a d commensurabiles de, quibus conveniunt, quæ habet definitionem apertam secundæ. Sella d et h sarian in f reliqua omnia constructuræ ut in 92. Erunt insuper a g, g e longitudine commensurabiles tum inter se, tum ipsi

in 18. X.
p 16. X.

in 14. X.
p 6. defia.

in 11. X.
p ex hypot.

in 10. X.

a e. Sed a e posita rationali a b longitudine commensurabili; vergetur a g, g e, quæ rationali a e commensurabiles sunt; et ipsi a b potentia tantum commensurabiles sunt. Rectangula itaque a h, g i sunt media. Rursus cum d e, a b sine Rationales longitudine commensurabiles sunt et d f, f e longitudine tum inter se, tum ipsi d e commensurabiles, erunt f c, f d Rectangula sub rationalibus longitudine commensurabilibus contenta rationalia. Itaque vergetur præcedenti, ostenderetur omni posse spaciū ac. Erit autem omnis Media Apollonie prima. Quoniam a g, g e commensurabiles sunt longitudine, erunt et a h, g i, sunt, r p commensurabilia. Ergo et o p, m p ratione commensurabilia potentia tantum; et quidem Media, quod quadrata st, r p, æqualia Media a h, g i Media sunt. Cumque f i, et ipsi æquales

in rationale; & sic medio r p incommensurabiles erunt o p , m p eundem cum ipsis rationis incommensurabiles longitudine. Cum vero etiam sint Media, ut patet, & commensurabiles, erunt o p , m p Media potentia eandem commensurabiles, & quia continent rationale s p , erit o m Media A. 7. X. porome prima.

PROPOS. XCIV.

Theorema 70.

Si spacium a c contineatur sub Rationali ab , & Apotoma d tertia Recta linea o m spacium potens, Media est Apotome secunda.

Ipsi a d congruat d e , quibus conveniunt proprietates definitionis Apotome tertia. Secta d e bisariam in f , fiant omnia ut in 92; a erunt g , rursus a g , g e tum inter se. tum ipsi a e longitudine commensurabiles. Quare cum a e sit ipsi a b longitudine incommensurabilis, eidem a g , g e longitudine incommensurabiles erunt. Sed a e est rationalis: Ergo & ipsi potentia commensurabiles a g , g e sunt rationales; d atq; ita rectangula a h , g i sunt Media. Rursus cum d e ponatur. longitudine incommensurabilis rationali a b , utraq; d f , f c hinc d e commensurabilis, erit ipsi a b longitudine incommensurabilis; ipsaq; rectangula f c ,
a 11. X.
b 16. X.
per hypotenusa
d 11. X.
e 14. X.
D d fime-

§ 19. X.

Si media. Ostenditur autem. ut in 9a, rectum esse
posse spatium a c; quam dicimus Media. Apotome
Secundam. Quoniam entera b. i g sunt
Media, quod ut etiam s t, r p ipsi rationales con
Media, & ipsaq; latera o p. m p Media. Sed a g
& c sunt ostensa commensurabiles: Ergo & a
g i, vel s t, r p commensurabilia sunt, ipsaq; o
m p potentia tantum commensurabiles.
quia ipsi a c ostense est g c commensurabilis lon
gitudine & f e ipsi d e, erunt, g c, f e longitudi
ne incommensurabiles. & sic quidem rationem
fi, id est, r p, s p incommensurabilia; ipsaq; o
m p & incommensurabiles longitudine. Cum
etiam sint Media & commensurabiles, cum
o p, m p Media potentia tantum commensura
bles, & quia continet s p Medium; erit o p
Mediæ Apotome Secunda.

§ 76. X.

PROPOS: XCV.

Theorema 71.

Si spatium a c contineatur sub Ra
tionali ab, & Apotoma a d quarta, n
sta linea o m spatium potens, Minor
est.

X

Ipsi a d congruat d e, quibus conveniunt pro
prietates Apotome quartæ. Sed a d e bisariam

Eadem autem est in ag & ge longitudine
 incommensurabiles, cum ge plus possit quam de
 quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis.
 Et quia ag est rationalis, rationalis ab longitudi-
 ne commensurabilis, & erit ai rationale. Re- 20. X.
 Et angulum vero d i p medium (quia de rationa- 22. X.
 le ipsi ab longitudine incommensurabilis est) ipsiusque
 dimidium f i Medium. Incommensurabilia autem
 erunt ah , gi , cum ag , ge ostensa sint in-
 commensurabiles. Iam ostenditur ut in 92.
 rectam um posse spatium re , quam & Mino-
 rem dicemus. Quoniam enim ai rectangulum
 est rationale etiam compositum ex quadratis st ,
 & p ipsi y equale erit rationale. Et quia fi est
 Medium, ut patet; erit & sp , sub quadrato- & ex consti-
 tum lateribus op , mp comprehensum Medium.
 Cumque ah , gi sint incommensurabilia ostensa,
 ipsi etiam equalia quadrata st , & p incommen-
 surabilia erunt & recte op , mp potentia incommen-
 surabiles. Proinde quia bp , mp sunt po-
 tentia incommensurabiles, & compositum ex qua-
 dratis rationale, rectangulumque sub ipsis Medi-
 um, & erit reliqua om Minor. 77. X.

PROPOS: XCVI.

Theorema 72.

Si spacium $a c$ contineatur sub R
rationali $a b$ & Apotome quinta $a d$, R
cta linea $o m$ spacium potens est, qu
cum Rationali Medium totum c
ficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus conveniant p
prietates Apotome quinta. Secta $d e$ bisariam
ant omnia ut in 92; Eruntq, ut in 95. $a g$, g
longitudine incommensurabiles, & $a i$ ut in 9
Medium; di vero Rationale ipsiusq, $d i$ medium
rationale. Erunt & $a h$, $g i$ ut in 95 incommen
surabiles, poterinq, $o m$, ut in 92, spacium $a c$, p
 $o m$ dicitur cum rationali Medium totum effi
a. Quoniam enim $a i$ est Medium, erit compositum
quadratis $s t$, & p Medium: Cumq, $f i$ sit rational
etiam $s p$, sub $o p$, $m p$ rationale erit. Sane
sem $o p$, $m p$ potentia incommensurabiles, ut
95 patet. Itaq, cum $o p$, $m p$ sint potentia
commensurabiles, & compositum ex ipsarum q
dratis Medium, rectangulum vero sub ipsis Ra
onale; reliqua $o m$ erit, qua cum rationali M
dium totum efficit.

PROPOS: XCVII.

Theorema 73.

Si spacium $a c$ contineatur sub Ra
tionali

ionati $a b$ & Apotoma sexta $a d$; Re-
cta linea $o m$ spacium potens est, quæ
cum Medio Medium totum efficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus conveniunt pro-
prietates Apotome sexta. Seta $d e$ bisariam,
sunt reliqua, ut in 92; etiam q , ut in 95, $a g$, $g f$
longitudine incommensurabiles, & $a i$, $d i$ ut in
94, Media, huiusq; dimidium $f i$ Medium. Eraps
etiam $a b$, $g l$, ut in 95, incommensurabilia, po-
teritq; $o m$, ut in 92, spacium $a c$. Quæ $o m$ di-
stet cum Medio Medium totum efficiens.
Quoniam enim $a i$ est Medium, erit & compositum
ex quadratis rectarum $o m$, $m p$ Medium. At
cum $f i$ sit Medium, erit & $s p$ sub $o p$, $m p$ con-
tinentum Medium. Cumq; $f i$ ipsa i sit incom-
mensurabile, etiam $s p$ incommensurabile erit cõ-
posito ex quadratis $s e$, $r p$. Deniq; $o p$, $m p$
sunt incommensurabiles potentia, ut in 95. Quare
cum $o p$, $m p$ sint potentia incommensurabiles, &
compositum ex ipsarum quadratis Medium, re-
ctangulumq; sub ipsis Medium, & compositum ex
ipsarum quadratis incommensurabile: reliqua
 $o m$ erit ea, quæ cum Medio, Medium totum
efficit.

PROPOS: XCIIX.

Libere ma. 74

Dd 3

Quæ

et rationalis ipsi g f , id est, d e longitudine in-
 commensurabilis. Et cum d k sit rationalis, g k 23. X
 irrationale & Medium, et hinc inter se incom- 10. X
 mensurabilia, & sic d h , & g h incommensurabilia
 et Rationales potentia tantum commensurabi-
 les, adeoque d g Apotome, & quidem prima. 47. X
 Quoniam enim rectangulum d o h , id est, g k
 sit medium proportionale inter quadrata d o h & g k Lemma
 b o , id est, d h , & g k , erunt d h , m k , i k , con- 54. X
 tinue proportionales. & d i , m l , i l recte pro-
 portionales. Quare d l rectangulum quadrato-
 ni l est æquale. Cumq; quadrata a c , b c , id est, 17. VI
 est, & h g h sit communis mensura communis d l , i l
 longitudine commensurabilis. Quare ergo d l , g l
 sint inæquales. & ut hinc erit applicatum sit
 d l rectangulum æquale quadrato g l , id est,
 quarta pars g l : Sine ut d h , g l ostensa com-
 mensurabilis, poterit d l pignari g l quadrato
 recte sit longitudine commensurabilis. Quare
 cum d g sit ostensa apotome, itaq; d l plus pos-
 sit quam g l congruus quadrato recte sit lon-
 gitudine commensurabilis, adeoque rationa-
 nali & e longitudine commensurabilis sit. Erat ut
 de g h Apotome prima.

PROPOS. XCII.

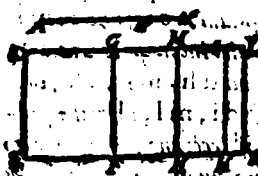
Theorema 75.

D.

4

Qua

Quadratum Medie Apotome primæ ad Rationalem de applicatum latitudinem dg facit Apotomen secundam.



Medie Apotome prima ab congrua bc , ut ac , bc sunt Medie potentia solum communisurabiles. contineturq; Rationale; & ad de rationalem applicetur $d f$ æquale quadrato bb ; erit dg Apotome. Eodem enim constructione, ut in præcedente. Quoniam ac , $b c$ sunt Medie potentia communisurabiles, erunt etiam quadratores id est, dh , ik Medie & communisurabiles uterq; dk utriq; ipsorum communisurabile & Medium. Hoc ad de rationale applicetur & facit dl Rationalem ipsi de longitudine incommensurabilem. Rursus, quia rectangulum $ac b$ per se rationale, erit etiam duplum gk rationale utiq; latitudo gl rationalis ipsi gt id est, de longitudine d communisurabilis. Sed quia dk Medium, gk rectè rationale, dl & gl sunt incommensurabiles; & quia etiam rationales, sunt rationales potentia tantum communisurabiles; dg Apotome eaq; Secunda. Oportet enim, ut in 98, esse dl plus posse quam gl a

18. X.
cor. 34. X.
733. X.

21. X.

10. X.

74. X.

grat

gruens quadrato recta sibi longitudine commensurabilis; quae gl cum sit longitudine commensurabilis rationali possit ad e; ex definitione igitur dg est Apotome Secunda.

PROPOSITIO C.

Theorema. 76.

Quadratum Medie Apotomæ secundæ, ab ad Rationalem de applicatum df, Latitudinem dg facit Apotomen Tertiam.

Medie Apotomæ secundæ ab, congruat bc, ut ac, bc sint Medie potentia solum commensurabiles, continentes Medium: Et ad de rationalem applicetur d f æquale quadrato ab: Erit dg apotome. Idem enim, quæ prius, constructis, ut in 99, dk est Medium, & dl rationalis longitudine a. 23. X. incommensurabilis ipsi de. Et cum acb rectangulum sit Medium, etiam ipsum duplum gk, & latitudo gl longitudine incommensurabilis rationali de. Sed quia ac, cb sunt longitudine incommensurabiles, & est, ut ac ad bc, ita quadratum ac ad rectangulum acb; erunt & hæc inter se incommensurabiles. Et quia quadrato ex ac compositum ex quadratis ac, bc est d commensurabile, rectangulo vero acb suum duplum, æquans compositum ex quadratis, id est, dk & . 14. X. 23. Lemma
19. X.
10. X.
16. X.

Dd s rectam.

rectangulum bic , id est, gk incommensurabile
 ha ; recta q, dl, gl longitudine incommensurabi-
 les. Quae cum etiam sint rationales; Erunt ra-
 tionales potentiae tantum commensurabiles & de
 74. X. Apotome, eaq; Tertia. Ostenditur enim;
 ut in 98. Al. sedam plus posse applicari fig. l qua-
 drato recte sibi longitudine commensurabilis. Sed
 cum neutra illarum dl, gl sit longitudine com-
 mensurabilis potest e. rationali d.e. erit ex definit.
 Apotome Tertia.

PROPOSITIO CL

Theorema. 28.

Quadratum Minoris a, b ad Rati-
 onalem d, e applicatur d, f , Latitu-
 dinem d, g facit Apotomen Quartam

Minori a, b congruat b, c , ut a, c , b, c potentia
 incommensurabiles sint, facientes ex his quadratu
 compositum rationale; sed rectangulum a, c, b Me-
 dium, & ad e rationalem applicetur d, f , ut an-
 tea, erit q, dl apotome. Iisdem enim ut prius
 constructis in 109; Quoniam d, k equale composito
 quadratorum ac, bc est rationale, erit dl ratio-
 nalis rationali d, e longitudine commensurabilis:
 a, c, b autem medium; erit & ejus duplum, id est,
 gk medium, & gl rationalis, ipsi d, e longitudine
 incommensurabilis. Rursum, quia d, k rationale,
 gk medium, erunt incommensurabilia, ipsae $q, dl,$
 gl longitudine incommensurabiles; at q ita Ra-
 tiona-

g potestas potentia rationum commensurabiles, & d g
 d Apotome, eac; Quarta. Quoniam enim
 b c potentia sunt incommensurabiles, eorum qua-
 drata d h, & incommensurabilia y & d i, A lon-
 gitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq; d i
 rectangulum aequale sit quadrato a i, ut ex o-
 paret, poterit d l plus quam g l quadrato recta-
 nguli longitudine incommensurabilis. It. q; cum tota
 d l posita rationali de longitudine commensurabi-
 lis, plus possit, quam congruens g l quadrato recta-
 nguli longitudine incommensurabilis: erit d g ra-
 tionalis ex definitione, Apotome Quarta.

PROPOSITIONE

Theorema 28

Quadratum cuius a h, quæ cum
 Rationali Medium totum efficit,
 ad Rationalem de applicatum d f,
 Latitudinem d g, facit Apotomen
 Quintam.

Rectæ cum Rationali Medium totum efficiens
 a b congruat b c, ut a c, b c sint potestas incom-
 mensurabiles; facientes compositum ex ipsarum
 quadratis Medium, rectangulum vero rationale;
 & ad d e rationalem applicetur d f ut antea. Erit
 d g apotome. Quoniam enim ex quadrato re-
 ctarum a c, b c compositum, id est, d k est Medium, &
 erit d l rationalis posita longitudine incom-
 mensurabilis: Rectangulum autem a c b,

quæ

611. X. Quia duplum gk rationale, & erit gl posita longi-
 tudine commensurabilis. Cum itaq; dk sit Medi-
 um, & gk rationale, incommensurabilia sunt, &
 710. X. dl , gl longitudines, incommensurabiles, adeoq;
 874. X. Rationales potentie tantum incommensurabiles, &
 dg Apotome eaq; quinta. Ostenditur
 enim, ut in 101, dl plus posse quam gl congruenti
 qua posita rationali longitudine commensurabilis
 est, quadrato recta sibi longitudine incommensura-
 bilis. Erit ergo ex definitione dg Apotome
 quinta.

PROPOS. CIII.

Theorema 29.

Quadratum ejus ab , quæ cum
 Medio Medium totum efficit, ad
 Rationalem de applicarum df , La-
 titudinem dg , facit Apotomen Se-
 xtam.

Recta cum Medio medium totum faciat ab
 congruat bc , ut ac , bc potentie sine incommen-
 surabiles, facientes compositum ex suis qua-
 dratis & rectangulum medium, & ad rationalem
 dc applicentur ut antea. Erit dg Apotome. Quan-
 tum enim tam compositum ex quadratis ac , bc
 id est dk , quam rectangulum ac b ipsiusq; du-
 plum gk sunt Media; & erunt dl & gl rationale.

les longitudine incommensurabiles posita rationali
 de. Cumq; a c b rectangulum compositum qua-
 dratorum sit incommensurabile, erunt g k, d k
 incommensurabilia, & g h, d l longitudine ip-
 so 10. X.
 commensurabiles, adeoq; rationales potentia so-
 lum commensurabiles, & d g, Apotome taq; 7 74. X.
 Sexta. Ostenditur enim ut in 101, d l plus posse
 quam congruens g l quadrato recta f l longitudi-
 ne incommensurabili: & quia neutra illarum po-
 sita rationali d e longitudine commensurabilis est,
 erit ex definitione d g Apotome Sexta.

PROPOS: CIV.

Theorema 30.

Recta linea de Apotomæ a b Longi-
 tudine commensurabilis, & ipsa
 de Apotome est, atque ordine ea-
 dem.

Apotome a b congruens sit



b c, ut a b, b c sint rationa-
 les potentia commensurabiles,

siq; de commensurabilis ipsi a b: Erit d e apotome
 ordine eadem cum a b. = Fiat, ut a b ad d e, sic
 d e ad e f. Ergo etiam est ut a c ad d f, ita b c a. 12. II.
 ad e f. Quoniam igitur a b, d e sunt longitudi-
 ne commensurabiles, & erunt & b c, e f, & a c, 7 10. X.
 d f lon-

d f longitudine commensurabiles. Et cum a c, h e
 sint rationales, & etiam d f, e f ipsi commensurabi-
 les rationales erunt. Rursus, quia est, ut a c ad d f,
 ita b c ad e f. & permutando, ut a c ad b c, na
 d f ad e f, erant h e, ut illa potentia tantum com-
 mensurabiles. Et quia etiam sunt rationales; Erit
 reliqua d e Apotome; quidem ordine eadem
 cum a b. Si enim possit a c plus quam b c quadra-
 to recta sibi longitudine commensurabilis: etiam
 d f quam e f. Si jam a c tota fuerit rationali posi-
 ta longitudine commensurabilis, & erit & d f, &
 sic Apotome prima; Si vero congruens b c, et-
 iam e f, & sic Secunda; si neutra, etiam neutra,
 & sic Tertia. Sed si a c plus possit, quam
 b c quadrato recta sibi longitudine incommensu-
 rabilis; Ergo etiam d f quam e f; siq, a c tota
 fuerit rationali posita longitudine commensurabi-
 lis; erit & d f, & sic d e eodem modo Apotome
 quarta; Si vero congruens b c, etiam e f, & sic A-
 potome quinta, sexta & ostenditur prout a b.

Scholium.

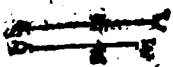
Eadem observationes, ad 67, de
 potentia commensurabilibus sunt
 additæ, possunt huc quoque trans-
 ferri.

PROPOS: CV.

Theorema 81.

Recta

Recta linea de Media Apotoma
 $a b$ commenſurabilis, & ipſa de Me-
 dia Apotome eſt, atque ordine ea-
 dem.

 Media apotome $a b$ con-
 gru. $a b c$, ut $a c$, $b c$; ſine
 Mediae potentia tantum com-
 menſurabiles: & ipſi $a b$ ſit $d e$ commenſurabiles
 vel longitudine vel potentia tantum: Factis qd-
 dam quae in precedenti, erunt $b c$, $e f$: & $a c$, ut o . X.
 & $d f$ eodem modo vel longitudine vel potentia com-
 menſurabiles prout $a b$, $d e$ fuerint. Cumq; $a c$,
 $b c$ ſint Mediae, etiam $d f$, & $e f$ ſint commenſurabi-
 les a Media erunt. Rurſum cum ſit, ut $a c$ ad $d f$,
 ſit $a b c$ ad $e f$: & permutando, ut $a c$ ad $b c$ ita
 $d f$ ad $e f$; erunt $b c$, ut illa, potentia tantum com-
 menſurabiles: & quia etiam Media, & erit $d e$ re-
 liqua Media apotome, & quidem ordine eadem
 cum $a b$. Quoniam eſt, ut $a c$ ad $b c$; ita $d f$ ad
 $e f$: & ut $a c$ ad $b c$, ita quadratum $a c$ ad re-
 ctang. $a c b$: ita ergo etiam erit quadratum
 $d f$ ad rectang. $d f e$; & permutando, ut quadra-
 tum $a c$ ad quadratum $d f$, ita rectangulum $a c b$
 ad rectang. $d f e$; & hoc, ut illa, commenſurabi-
 lia. Si itaq; rectangulum $a c b$ fuerit rationale,
 a erit & $d f e$; & $d e$ Mediae i Apotome pri-
 ma: ſed ſi Medium, Medium g & $d e$ Mediae
 apotome ſecunda.

EVCLIDIS ELEME:
PROPOS: CVL.

Theorema 82.

Recta linea *de* Minori *ab* com-
mensurabilis, & ipsa *de* Minor est.

Minori *ab* congruat *bc*, ut *ac*, *bc* sint po-
tētia incommensurabiles facientes eiusdem quadrato
compositum rationale, rectangulum vero Medium;
sed ipsi *ab* & *de* commensurabilis sive longitudo
sive potentia tantum. Factus igitur idem, quia in priori-
bus, erant *df*, *ef* ipsi *ac*, *bc* eodem modo ut in
105. commensurabiles. Cumque sit, ut *ac* ad *df*
ita *bc* ad *ef*; & permittendo, ut *ac* ad *bc*; ita
df ad *ef*; Ergo ut quadratum *ac*, ad quadra-
tum *bc*; ita quadratum *df* ad quadratum *ef*.
& componendo; ut compositum ex quadratis *ac*,
bc, ad quadratum *bc*, ita compositum quadra-
torum *df*, *ef* ad quadratum *ef*; & permittendo
do, ut compositum ex quadratis *ac*, *bc*, ad com-
positum ex quadratis *df*, *ef*; ita quadratum
bc ad quadratum *ef*; Ergo ut hoc sibi, ita illi
sibi commensurabilia erunt. Sed compositum ex
quadratis *ac*, *bc* est rationale: Ergo & ex *df*,
ef compositum. Rursus, quia, ut in 105. *ac* & *bc*
ut *de* sunt commensurabilia, hoc, ut illud, & ut
Medium. Denique, cum sit, ut *ac* ad *bc*, ita *df*
ad *ef*; Sed *ac*, *bc* sunt potentia incommensura-
biles; erunt & *df*, *ef*: Quia cum faciant ex his
quadra-

a 12. Vl.

a 10. X.

d cor. 24. X

quadrato compositum rationale; rectangulum vero
sub ipso $d f$, et $e f$ Medium, erit $d e$ Minor. 77. X.

PROPOS. CVII.

Theorema 33.

Recta linea $d e$ commensurabilis
est ei $a b$, quæ cum Rationali Medi-
um totum efficit, & ipsa $d e$ cum Ra-
tionali Medium totum efficiens est.

Rectæ $a b$ cum rationali Medium totum effi-
cienti, congruat $b c$; ut $a c$, $b c$ potentia sine in-
commensurabiles, facientes compositum quatra-
torum Mediæ, rectangulum vero rationale; sitq;
 $d e$ ipsi $a b$ quocumq; modo commensurabilis. Facili-
us idem, quæ in prioribus ostenditur, ut in 106, com-
positum ex quadrato $a c$, $b c$, compositum quadrato
 $d f$, et $e f$ commensurabile esse. Cumque illud
donatur Medium, erit & hoc Medium. Rursus
ostendetur etiam rectangulum $a c b$ commensu-
rabile esse rectangulo $d f e$, & hoc, ut illud Ra-
tionale, ex 105. Sunt deniq; $d f$, $e f$ eodem mo-
do, ut in 106, potentia incommensurabiles; qua-
rum ex suis quadratis compositum efficiens Medi-
um, rectangulum vero sub ipsis rationale, erit $d e$, 78. X.
quæ cum Medio rationale efficit.

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 34.

Et

Recta

Recta linea $a b$ commensurabi-
 lis ei $a b$, quæ cum Medio Medium
 totum efficit; & ipsa $a b$ cum Medio
 Medium totum efficiens est.

Recta $a b$ cum Medio Medium eorum efficiens
 congruat $b c$, ut $a c$; $b c$ potentia sine commen-
 surabilis facientes compositum quatuor totum Me-
 dium ex recta angulo Medium incommensurabili
 composito quadratoque. Hæc uero $a c$, ut antea
 ostenditur ut in 106; compositum ex quadrato
 $a c$, $b c$ composito quatuor ut angulo $d e$, & $a c$ commensurabile esse; quorum illud, cum sit Medium, æquum
 hoc est Medium. Rursus, ut ostendat, recta angulo
 $a c$ & rectangulo $d e$ commensurabile; & hoc uero
 illud, Medium ostendit; Sumi etiam $d e$, & $e f$
 in 106. potentia incommensurabiles. Denique
 ut compositum ex quadrato $a c$, & $b c$ incommensurabile est rectangulo $a c b$, ex hypothesi
 ita compositum ex quadrato $d e$, & $e f$ rectangulo
 $d e f$. Ergo est $d e$ quæ cum Medio Medium
 totum efficit.

114. K.

179. X.

PROPOSITIO CIX.

Theorema 85.

Medio $a b$ a Rationali, addito
 to; Recta linea, quæ reliquum
 ciu $a b$ potest, una ex duabus Irratio-
 nalibus sit, vel Apotome vel Minor.



Ad Rationalem, e
appl. etur recta angula
eh, kg equalia recta-
ulis ac, d b ut totum
i sit aequale tota

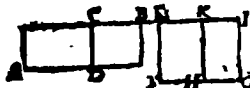
rationali a b; eritq; ei rationalis rationalis et lon-
gitudine commensurabilis; & quia kg Medio d b
est aequale, erit ki rationalis longitudine et com-
mensurabilis rationali e f. Itaq; ei, ki sunt
longitudine incommensurabiles, & sic rationales
potentia tantum commensurabiles; ipsaq; e k a-
potome, & congruens ki. Si iam ei plus potest
quam ki quadrato recte a sibi longitudine commen-
surabilis, erit e k Apotome prima; atq; sic recta po-
tens spacium f k contentum sub rationali e f & a-
potome prima, id est, a c est, Apotome. Si vero
plus potest quadrato recte incommensurabilis, cum
tot a e i posita e f longitudine sit commensurabilis,
erit e k Apotome quarta, & recta potens spa-
cium e k sub rationali e f & apotome quarta e k
erit? Minor.

PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

Rationali d b a Medio a b detra-
cto; alia duæ Irrationales fiunt, vel
Medie Apotome prima, vel cum ra-
tionali Medium totum efficiens.

Ec 2 Con:



Constructio q̄dam,
ut in precedenti; quia
si in medio ab est equal
le erit, e i longitudi-
nali rationali e f longitudine incommensurabi-
lis; k i verò a commensurabilis, quia hi rati-
nali db est equal: Itaq, e i, k i rationales; poter-
it tamen commensurabiles & reliqua e k , apo-
tome, e g , congruens k i. Si e i plus potius quàm k i
quadrato recte sibi longitudine commensurabilis;
& congruens k i commensurabilis longitudine ra-
tionali e f , erit e k apotome secunda; quare recte
potens spaciū e k contentum sub rationali e f , &
apotome secunda; & erit Mediæ Apotome pri-
ma. si verò plus quadrato recte longitudine in-
commensurabilis, erit e k apotome quinta; & re-
cta potens hoc spaciū f k contentum sub ratio-
nali & apotome quinta, erit cum rationali
Medium totum efficiens.

171. X.

172. X.

173. X.

174. X.

175. X.

PROPOSITIO CXI.

Theorema 87.

Medio db à Medio ab detracto.
quod db sit cōmensurabile ab toti; &
reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel
Mediæ Apotome secunda; vel cum
Medio Medium totum efficiens.

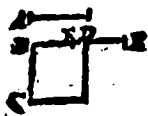
Constru-

Constructis $\bar{q}$ idem, ut antea; a erunt e l. k i
 rationales rationali e longitudine incommensu-^{231. X.}
 rabiles. Sed cum f i, h i ipsi a b, d b aequalia
 ponantur incommensurabilia, erunt e i, k i longi-
 tudine incommensurabiles, & sic rationales po-
 tentia tantum commensurabiles; & reliqua e k
 β apotome. Si ergo e i, plus possit quam k i qua-
 drato recta sibi longitudine commensurabilis, & β 74. X.
 utraque e i, k i rationali e f sit incommensurabilis,
 ut patet, erit e k apotome tertia. & recta potens
 spacium f k contentum sub rationali e f & apoto-^{94. X.}
 ma quarta e k, γ erit Medix Apotome Se-
 cunda: Si vero plus potest quadrato recta lon-
 gitudine incommensurabilis, erit e k apotome
 Sexta; & recta potens spacium f k contentum sub
 rationali & apotoma Sexta, δ erit ea quae cum δ 97. X.
 Medio Medium totum efficit.

PROPOSITIO CXII.

Theorema 88.

Apotome a non est eadem, quae
 ex binis nominibus.



Rationali b c posito applice-
 tur rectangulum c d aequale
 quadrato a . Quoniam ergo a est
 apotome, a erit b d apotome pri-^{96. X.}
 ma; cui congruat d c. Erunt
 Ha β b c, d e.

$b e, d e$ ex definitione apotome primæ rationali
 potentia tantum commensurabilis; quarum prior
 posita commensurabilis longitudine, plus potest
 quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.
 Rursus, quia e aperitur, esse ex binis nominibus,
 eadem latitudo $b d$ erit ex binis nominibus
 prima. Sic autem majus nomen $b f$. Ergo ex e-
 finitione binomii primi, $b f, f d$ sunt rationales po-
 tentia solum commensurabiles, quarum prior po-
 test existens longitudine commensurabilis, plus po-
 test quam $f d$ quadrato rectæ sibi longitudine com-
 mensurabilis. Itaque, cum tam $b e$, quam $b f$ lon-
 gitudine sint commensurabiles eidem $b c$, & tam
 quoque $b e, b f$ inter se commensurabiles longitu-
 dine: Ergo & eadem $b e$, relique parti $f e$ lon-
 gitudine commensurabilis est, & sic $f e$ ut $b e$ rationa-
 lis erit. Sed quia quarum commensurabili-
 um longitudine $b e, f e$, una $b e$ ipsi $d e$ est
 incommensurabilis, erit & altera $f e$ eadem $d e$
 incommensurabilis longitudine; & sic $f e, d e$ sunt
 rationales potentia solum commensurabiles. Itaque
 $f d$ reliqua est apotome & sic Irrationalis, quæ
 antea erat rationalis. Non ergo a existens ap-
 otome, est eadem quæ ex binis nominibus.

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & ce-
 teras ipsam consequentes Irrationa-
 les lineas neque Mediæ neque inter se ef-
 se easdem.

Nam

Nam quadratum Medie ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, postea longitudine incommensurabilem. Quadratum autem apotome ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen primam; quadratum Medie apotome primae, & apotomen secundam; Media apotome secundae d' Apotomen tertiam; Minoris, apotomen quartam: Ejus, quae cum rationali Medium totum efficit, & apotomen quintam: Ejus, quae cum Medio Medium totum efficit, & apotomen sextam. Cum itaque haec latitudines differant a Media latitudine, quia haec rationalis, illae irrationales sunt; & inter se, quia ordine non sunt eadem apotoma, patet apotomen & a Media illas consequentes, & a Media & inter se differre.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est, Apotome non sit eadem, quae ex binis nominibus: quadrata autem apotome & reliquarum ipsam consequentiū faciunt latitudines; Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam. Sed quadrata Binomiali, & reliquarum consequentiū faciunt latitudines ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam; constat latitudines Apotome & aliarum irrationalium, quae post ipsam, easdem non esse, latitudinibus ejus, quae ex binis nominibus & reliquarum post ipsam irrationalium; adeoque, inter se differre. Quare, cum & haec & illae a Media differant, patet, & a rationali posita. Mediam & a rationali esse lineas inter se differentes, de quibus hactenus.

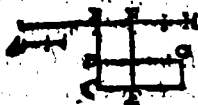
1. est Media. 2. Ex binis nominibus cum 6. speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. ex binis Medijs secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Media apotome prima. 10. Media apotome secunda. 11. Minor. 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. *Pergit jam Euclides expofitum Irrationalium proprietatibus, ut fe conferre Apotomas & binomiales propof. 14. 114. 115.*

PROPOSITIO CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis ad eam be , quæ ex binis nominibus bd , cd , applicatum be , latitudinem bf facit apotomen, cujus nomina tota fk & congruens bk commensurabilia sunt nominibus bd , dc , ejus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportione, & adhuc Apotome bf , quæ fit, eundem habet ordinem, quem ce be , quæ ex binis nominibus.

Ad nomen minus dc recte be , applicetur ce



dem quadrato rationalis

a, rectangulum cg equa-

le, fig , bh equalis ipsi dg .

Cum ergo cf , cg sint e-

qualia, erit, ut bc ad dc , ita dg , id est bh ad $14. vel$

bf ; & dividendo: ut bd ad dc , ita fh ad bf : $16. VL$

eritq, fh maior quam bf , sicut bd maior est quam

dc . Summa si ipsi fb equalis, fiat, ut hi ad if ;

ita fb ad bk : & componendo, ut hf ad fi , id est, $19. VI$

fb ; ita fk ad bk . Offensum verò est, esse, ut

hf ad bf , ita bd ad dc . Sed hec sunt no-

mino binomiali, rationales potentia tantum

commensurabiles. Ergo & hf , bf sunt po-

tentia commensurabiles. Rursum, quia est, ut

hf ad bf ; ita fk ad bk : & erunt hi , fk antea-

cedentes simul, id est, hk tota; ad consequentes fb , $11. X$

bk simul, id est, bk , ut hf ad bf . Quare ut hk

prima ad bk secundam, ita quadratum prima $20. VI$

ad quadratum secunde. Sed cum cg sit ratio-

nale, utpote quadrato rationalis a aequale, ratio-

nali dc applicatum & faciens dg rationale ipsi cd $21. X$

longitudine commensurabilis; erunt hb , id est,

dg & dc rationales longitudine commensurabi-

les. Cumq, sit offensum, esse, ut bd ad dc , ita fk

ad bk , & ut fk ad bk , ita hk ad fk . Ergo, $22. VI$

ut quadratum bd ad quadratum dc , ita quadra-

tum hk ad quadratum fk . Et sic commensura-

bilis sunt hec atq, illa. Sed fuit, ut quadratum

hk ad

fk , ad

ELEM. 16. X.

ELEM. 17. X.

ELEM. 18. X.

ELEM. 19. X.

ELEM. 20. X.

ELEM. 21. X.

ELEM. 22. X.

ELEM. 23. X.

ELEM. 24. X.

ELEM. 25. X.

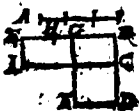
$h k$, ad quadratum $f k$; ita recta $h k$ ad $b k$; ideoq; sunt longitudine commensurabiles inter se & reliqua $b h$. Sed $b h$ est offensa rationalis: Ergo & $h k$ ipsi commensurabilis est rationalis, quare & $h b$, $h k$ rationales erunt. Cum itaq; $f k$ ipsi $b k$ potentia tantum commensurabilis sit, erit & $f k$ rationalis. Quare cum $f k$, $b k$ sint rationales potentia tantum commensurabiles, erit reliqua $b f$ apotoma congruens $b k$. Quod primum. Cumq; $h b$, $b k$ offensa sint longitudine inter se commensurabiles; ergo & ipsi $h k$: ipsaq; $h b$ sit longitudine commensurabilis $d c$, erit eadem $d c$ longitudine commensurabilis $b k$. Rursus, quia est, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, & permittendo, ut $b d$ ad $f k$; ita $d c$ ad $b k$; & itaq; $h a$, ita & illa sunt longitudine commensurabiles: runtq; ipsius $b f$ Apotoma nomina $f k$, $b k$, nominibus $b d$, $d c$ binomialis longitudine commensurabilia. Quod secundum. Rursus, quia est, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$; erunt apotoma $b f$ nomina $f k$, $b k$: eadem ratione cum $b d$, $d c$ nominibus ipsius $b c$ Binomialis. Quod est tertium. Deniq; vel $b d$ plus potest quam $d c$ quadrato recta sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis cum sit, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, poterit iam $f k$ plus quam $b k$ quadrato, recta sibi longitudine commensurabilis. Si incommensurabilis erit plus quadrato recta longitudine incommensurabilis. Quare, si rationalis posita longitudo

commensurabilis fuerit bd , erit & fk , quare vel prima vel quarta apotome erit, cum illa prima vel quarta, sit: Si dc , etiam bk , quare secunda vel quinta: Si neutra bd, dc , etiam neutra fk, bk , quare tertia vel sexta. Ergo apotome eadem ordine cum Binomiali.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratum Rationalis a ad Apotomen bc applicatum bi , latitudinem be facit ca , quæ ex binis nominibus bg, ge cujus nomina bg, ge commensurabilia sunt nominibus bd, cd , Apotome bc , & in eadem proportionem ut bd ad cd , ita bb ad he , & adhuc, quæ be ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome bc .



Applicetur ad bd, b frons Angulum aequale ipsi bi faciens latitudinem bg . Erat ut be ad bg , ita bd ad bc ; & conver- 14. vel 16. VI. tido, ut be ad ge , ita bd ad cd .

Secetur etiam ge ad h juxta proportionem be ad ge . Quia est, ut be tota ad ge totam, ita eh ad be ablata, ad hg ex ge ablatam. Erat ergo etiam reliqua bh ipsius bc , ad reliquam he ipsius ge , ut tota be ad totam ge . Sed ut be ad ge , ita erat eh ad hg . Ergo ut bh ad he , ita eh ad he , ipsa q , eh est media proportionalis inter bh, gh .
7 Quare

7 cor. 20.
VI.

210. X.

216. X.

231. X.

Scho. 12. X

37. X.

7 Quare ut $b h$ prima ad $g h$ tertiam, ita quadratum prima ad quadratum tertiam. Quia autem fuit, ut $b d$ ad $c d$; ita $b e$ ad $g e$, id est, $b h$ ad $h e$; Sunt autem $b d$, $c d$ nomina apotoma $b c$ rationales potentia solum commensurabiles; derunt etiā $b h$, $h e$ ex his quadrata cōmensurabilia; adeoq; $b h$, $h e$ propter quadrata cōmensurabilia longitudine, cōmensurabiles; & 104 $b h$ longitudine cōmensurabilis parti $g h$, etiā ipsi $b g$ longitudine commensurabilis erit. Sed cum quadratum rationali aequale rationale $b f$ sit applicatū ad rationale $b d$ ē erit $b g$ latitudo rationalis longitudine ipsi $b d$ cōmensurabilis: Eidem ergo & $b h$ longitudine commensurabilis erit & rationalis. Quare cum $b h$, $h e$ sint ostensa potentia solum commensurabiles, & $b h$ rationalis; erit & $h e$ rationalis; & sic $b h$, $h e$, sunt rationales potentia solum commensurabiles, e ipsaq; $b e$ ex binis nominibus. Quod primum est. Quia verò & patet esse $b h$ ad $h e$, ut $b d$ ad $c d$; & permittendo, $b h$ ad $b d$, ut $h e$ ad $c d$, Sicutq; $b h$, $b d$ longitudine commensurabiles; Ergo & $h e$, $c d$. Itaq; nomina $b h$, $h e$ binomialia $b e$; nominibus $b b$, $c d$ Apotoma $b c$ longitudine sunt cōmensurabilia. Quia secundū. Imò & in eadem ratione, cum sit ut $b h$ ad $h e$, ita $b d$ ad $c d$. Quod est tertium. Deniq; $b d$ plus potest, quam $c d$ quadrato recte sibi longitudine commensurabilis. vel incommensurabilis. Si commensurabilis, etiam $b h$ plus potest quam $b e$ quadrato

quadrato recta sibi longitudine commensurabilis,
 Si incommensurabilis, incommensurabilis, unde
 ordine sex binomia singula eisdem ordinis cum
 apotomis inveniuntur. Quod est quartum.

PROPOSITIO CXV.

Theorema 91.

Si spacium ab contineatur sub A-
 potoma ac & ea c b quæ ex binis no-
 minibus, cujus nomina cd , db , com-
 mensurabilia sunt nominibus ce , ae ,
 Apotomæ ac , & in eadem propor-
 tione, ut cd ad db , ita ge ad ae , recta
 linea f spacium ab potens est Ratio-
 nalis.



Quadrato rationali g aequale rectangulum
 h applicetur ad cb , erit bh apotome, cujus nomina hi , bi sunt longitudine commensurabilia
 nominibus cd , db , & in eadem ratione, nempe
 i ad bi , ut cd ad db , adeoque, ut ce ad ae .
 &

19. V. & permutando, ut tota $h i$ ad totam $c e$, ita $a d$
 12. X. lata $b i$ ad ablatam $a c$. Ergo & reliqua $b h$ ad re-
 liquam $a c$, ut $h i$ ad $c e$. Quae cum, sint commensurabiles longitudine, quia utraq, ipsi $c d$ longitudine commensurabilis est, erunt & $h d$. ac &
 10. X. $h c$ ipsi $a b$ cum sint in eadem ratione. Sed $h c$ e-
 7. VI. quale quadrato rationalis g est rationale. Ergo &
 • $a b$ ipsi commensurabile est rationale, & ipsum potius recta f rationale.

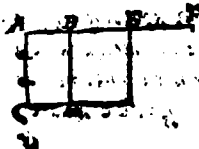
Corollarium.

Constat hinc, rationale spatium includi posse duabus irrationalibus ut hic binomiali & apotome inclusum est rationale $a b$.

PROPOS: CXVI.

Theorema 2.

A Media & infinita Irrationales fiunt, & nullam cui antecedentium est eadem.



Sub rationali $a c$ & Media, ab comprehensum spatium $a d$ = Irrationale possit dea Irrationalis quae nulli, Irrationalium eade erit.

Medium

38. XI
Lemma.

11. def.

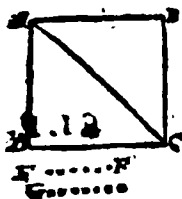
Medium tamen ad rationalem applicatum, faceret la-
 titudinem rationalem; reliquarum 12, Irrationalium
 quadrata applicata ad rationalem facerent lati-
 tudines vel binomiales vel apotomias. Sed Quadra-
 tum $b c$ applicatum ad $a c$ facit latitudinem $a b$
 Media differentem a reliquis omnibus Irrationali-
 um quadratorum latitudinibus. Ergo $b c$ Irratio-
 nalis differt ab illis 13 Irrationalibus. Si autem
 compleatur rectangulum $d e$, erit illud sub ratio-
 nali. Irrationali comprehensum Irrationale, quod
 cum possit $e f$, perit & hoc Irrationale, & differt a
 reliquis omnibus Irrationalibus. Cum enim huius
 quadratum applicatum ad rationalem $b d$, faci-
 at latitudinem $b c$ differentem a reliquarum Irra-
 tionalium quadratorum applicatorum latitudi-
 nibus, ut patet ex precedentibus, ipsam quoque $b c$
 Irrationalem peculiaritatem aliquam esse oportet.

PROPOS. CXVII.

Theorema 97.

Propositum sit no-
 bis ostendere, in qua-
 dratis figuris $d b$ dia-
 metrum $a c$ lateri $a b$
 incommensurabilem
 esse longitudine.

Si non



- Si non, esto communis mensura habensq, a c
a b proportionem quam e f & g numeri sua rati-
o mini & primi: quorum g unitas non tri-
 47. I. (Cum enim ex a c quadratum sit duplum qua-
drati a b, sitq, ut quadratum a c ad quadratum
a b, ita numerus quadratus ex e f, ad quadratum
numerus ex a g, erit etiam ille huius duplus, id est,
si g esset unitas, esset ipsum quadratum uni-
tas, numerusq, quadratus ex e f binarius, quod ab-
surdum;) Sed numerus. Et quia, ut iam ostensum est,
 14. IIX. ex e f est duplum quadrati ex g; & metietur quadra-
tum ex g quadratum ex e f & latus g metietur la-
tus e f. Cum vero g etiam metiatur seipsum, me-
tiant e f & g numeri inter se compositi, habent
communem mensuram g: qui tamen inter se
erant primi. Quod absurdum. Non ergo a c &
a b inter se commensurabiles sunt.





ELEMENTO- RUM EUCLIDIS.

LIBER XI.

Definitiones.

I.

Solidum est, quod longitudi-
dinem & latitudinē & cras-
situdinem habet.

Solidi autem extremum est su-
perficies.

Linea recta est ad planum recta,
cum ad rectas omnes lineas à quibus
la tangitur, quæque in proposito
int plano, rectos angulos efficit.

Planum ad planum rectum est
cum rectæ lineæ quæ communi pla-

Ff

norum

norm sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc enim modo non magis inclinabit in unam partem quam in alteram, sed æqualiter illi insisteret.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodē est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquit, angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis cōmunis punctū ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti intersectionis anguli inter se fuerint æquales.

8. Paral

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.
9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.
10. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.
11. Solidus angulus est plurimum quæduarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadē sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel: solidus angulus est, qui plurib. quæ duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.
12. Pyramis est figura solida, quæ planis cōtinetur ab uno plano ad unum punctum constituta. Potest autē illud unum planū, à quo omnia tendunt, esse vel triangulum vel quadrangulū, vel pentag. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrāgula solet dici. Reliqua omnia ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani. Eff. 2 13. Præf.

12. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia & parallela; alia verò parallelogramma. Est nimirum columna quadam laterali æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes & parallela, sive hæ sint triangula, sive quadrata, sive pentagona. Itaque tot continebis parallelogramma quodlibet Prisma, quot latera sive anguli in uno quoque, oppositorum planorum reperiuntur.

14. Sphæra est, quando semicirculus manente diametro, circumductus semicirculus, in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cæperat, circumassumita figura: vel, Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ interceptæ sunt æquales.

15. Axis autem sphære est quiescent illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Cæ-

16. Centrum Sphæræ est idem, quod est semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinq; à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectangulum manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur. Unde moveri caperat circumassumptâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus ad verticem vel rectus sit, vel obtusus, vel acutus.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quâ triangulum convertitur.

20. Basis verò coni, est circulus, cui à circumducta recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectangu-

li parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectū angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cæperat moveri, circumsumptâ figurâ.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri, sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes coni & cylindri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrum, est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

27. Octaedrum, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

28. Dodecaedrum, est figura solida, sub

da, sub 12. pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

29. Icosædum, est figura solida, sub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta. *Hæc s. corpora sola appellantur regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt æqualia æquilatera & æquiangula quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut quibus, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides.*

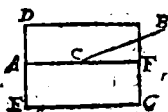
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel deniq; in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel deniq; planæ figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

EUCLIDIS ELEM: PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.



Sit, si potest, ac pars in plano dg , pars cb extra planum. Si ergo continuatur ac in illo plano dg neq; in f , erunt eidem a c lineæ duæ di-

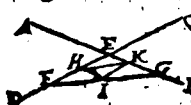
¶ 14. I.

versæ cb , cf ad eandem partem adjectæ, quod absurdum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duæ rectæ lineæ ab , cd , se mutuo secent in e uno sunt plano. Atque triangulum omne efg in uno est plano



In lineis ab , cd connectantur puncta f , g , ut fiat triangulum feg , cuius si per quædam, ut h i f , ducantur

se extra illud planum, erunt linearum ef , fg partes, supra partes in plano. = quod absurdum. Quod si jam totum triangulum efg , est in eodem plano

¶ 1. XI.

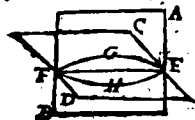
oportet

oportet & ipsius terminos, lineas ef , eg , & adeoq;
quarum sunt partes, ab , cd , totas, in eodem pla-
no esse.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana ab , cd , se mutuo se-
cent; communis eorum sectio ef est
linea recta.



Si quis ef lineam neget in utroq; plano existere, erit vel in neutro, & intra terminos ef ducta in alterutro plano recta egf : includent

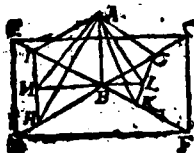
recte ef & egf figuram, quod = absurdum; vel in alterutro, intraq; eosdem terminos ducta in altero recta egf , idem sequetur absurdum.

PROPOSITIO IIII.

Theorema 4.

Si recta linea ab , rectis duabus cd , & lineis semutuo secantibus, in cōmuni sectione b ad angulos rectos consistat; illa ab ducto etiam per ipsas plano cd , & ad angulos rectos erit.

o 1. XL.



Quia enim semper fecerunt
ed. c. f. lineae, & erunt in eo-
dem plano. Sumptis h_g &
b_h, itemq_{ue} b_i & b_k equa-
libus, ductisq_{ue} g_k, i_h & l_m,
quae in punctis l & m illa

duas g_k, i_h fecer; demittantur ex a puncto sub-
limi a g_i, a l, a k, a h, a m, a i. Cum ergo latera
b_g, b_k, trianguli b_g k aequalia sint lateribus
b_h, b_i, trianguli b_h i, cum angulo compre-
hensio ad b aequalis. Erunt & g_k, & i_h bases
y aequales. Anguliq_{ue} h_k g, & b_h i aequales. Rursu
cum in triangulis b_k l, & b_i m, aequalium an-
gulorum ad a b, & l_k b ipsi b_i m, latera inter-
jacentia b_k, b_i, sint & aequalia, & erunt & reli-
qua latera k_l, l_b, reliquis i_m, m_b aequalia. Et
demq_{ue}, modo in triangulis & rectangulis a b g, a b h,

o ex const.

aequalium laterum b_g & b_h, & a b communis;
etiam a g, a h bases sunt y aequales. Sicut & a i

o 26. L.

& a k. Amplius in triangulis a k g & a i h aequa-
lium laterum g_k & i_h, a k & a i, & basium a;

o 1. L.

& a h; & erunt anguli comprehensio a i h, a k g aequa-
les. Itaq_{ue}, cum in triangulis a k l, & a i m, aequalium

angulos i & k comprehendunt latera sint aequa-
lia; & erunt & bases a l, a m aequales. Deniq_{ue}, cum

in triangulis a b l & a b m, aequalia sint latera
b l & b m; & a b commune; & bases a l, a m

erunt; & anguli ad b aequales; & quia deinceps
etiam & recti. Erunt ergo recta a b perpendiculari

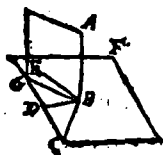
o 10. def.

ipsum; adeoque omnibus ipsam tangentibus in plano $c e, d f$, ipsi erit plane $c e d f$ perpendicularis.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si recta linea ab , rectis tribus lineis ae, bd, be , se mutuo tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistant; illae tres rectae in uno sunt plano.



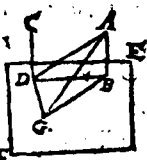
Cum qualibet duarum illarum per sectionem mutuam, sint in eodem plano, ut bc, bd , in plano ut bc, bd in plano fc ; ponatur, si potest tertia bc extra planum illud in sublimi

Quoniam $a b, b e$ sunt in eodem plano, sint in plano ae . Quoniam ergo plana fc, ae , sibi mutuo occurrunt in b necessario productae se mutuo secabunt, & quidem sectione communi bg . Sed quia $a b$ ponitur ad angulos rectos ipsis $b c, b d$; veris etiam plano fc , per ipsas ducto, ad angulos rectos; Et sic erit bg iam rectae bg , quae ipsam in b tangit. Itaque duo recti anguli abg, abc in eodem plano a g constituti, pars & totum erunt aequalia.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duae rectae lineae ab, cd , eidem plano $e f$ ad rectos sint angulos, parallelae erunt rectae illae lineae.



3. def. XI

ex const.

74. I.

8. I.

5. XI.

2. XI.

28. I.

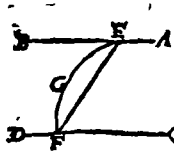
Ducta bd in plano ef ; erunt anguli d & b recti in eodem plano ef . Ducatur dg perpendicularis ad bd , equalis ipsi ab ; connectanturq; rectæ bg , ag , da . Iam in triangulis abd ,

bdg equalium laterum ab & dg ; & bd communis cum angulo comprehenso recto; & erunt etiam bases bd , ag , æquales. Rursus in triangulis abg , adg equalium laterum ad & bg , & basis communis ag ; erunt anguli abg & gda æquales. Sed ille rectus. Ergo & hic. Sed ex eadem definitione etiam angulus gdc est rectus. Erit ergo gd tribus rectis db , da , dc ad angulos rectos. Quare rectæ db , da , dc in uno sunt plano. Est & autem ab in eodem plano, in quo, db , da . Itaq; rectæ cd in eodem erit plano cum ab . Sed cum interni anguli b & d sint recti; & Erunt ab , cd parallela. Quod erat propositum.

PROPOS. VII.

Theorema 7.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ ab , cd , in quarum utraque sint quælibet puncta e , f ; illa lineæ ef quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

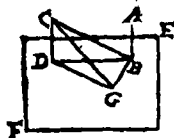


Sin minus, recta ef, est in eod. m plano, sed extra, ut quidem aliud secet planum, cuius cum plano harum parallelarum communis sectio sit egf a recta. Itaq, dua recte ef & eg intra eos. 3. XI. dem terminos e & f includunt superficiem. Quod p absurdum. Vera etiam est propositio de non pa. 14. 22. l. rallelis in eodem plano.

PROPOS: VIII.

Theorema 8.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ ab, cd, quarum altera cd ad rectos cuiusdam plano e sūt angulos, & reliqua ab eidem plano e f ad rectos angulos erit.



Ducta bd, angulus cdb fit a; def. XI. a rectus. Sed cdb, & abd p 29. l. sunt p duobus rectis æquales. Ergo & abd est rectus. Ductus in plano cf perpendicularis bg ad bd, æqualis ipsi cd; jungantur q, gd, gc, bc. Iam in triangulis cdb, gbd, rectangulis, æqualium laterum gb, cd, & communis bd, Erant & bases gd, bc æquales. Sic 7 4. l.

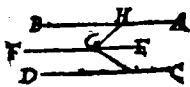
in

in triangulis cdg & cbg aequalium laterum cd ,
 bg & bc , gd & bases communis gc : anguli
 $d cg$ & $c dg$ sunt aequales. Cumq; hic sit rectus.
 Ergo & ille. Quare recta gb , duabus rectis
 bd , $b c$ se mutuo secantibus in b , ad angulos re-
 ctos insistit, & sic plano per bd , bc ducto, erit ad
 angulos rectos. In quo plano cum sit & ab , quia
 bd , bc , in eodem sunt plano, in quo parallela ab ,
 cd . Itaq; & gb recta ba ad angulos rectos in-
 sistit. Quare cum ab sit recta ad rectas bg , bd :
 erit recta ad planum per bg , bd , id est, ad pla-
 num cf .

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Quæ eidem est rectæ lineæ ab , cd sunt
 parallelæ, sed non in eodem cum il-
 la plano hæ ab , cd quoque inter se
 sunt parallelæ.



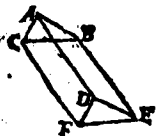
A quolibet puncto g , recta
 cf , ducantur due perpendi-
 culares gh , quod in plano pa-
 rallelarum ab , cf ; ac gi in plano parallelarum
 cf , cd . Quoniam ergo eg est recta ad gh & gi
 tangentes se in puncto g : erit etiam recta
 plano per illas gh , gi ducto: cumq; fc una pa-
 rallelarum sit illi plano per gh , gi perpendiculari:
 erit & altera ab ; & per eandem causam etiam
 cd , quia eidem cf est parallela. Cum itaq; ab ,
 cd

et eodem plano sint ad angulos rectos, verum et
iam parallela. Debuisset autem propositio hac sumere 76. XI.
re duas parallelas extra planum, quia alias cum
se coincidisset quæ de parallelis in eodem plano
loquitur.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si duæ rectæ lineæ ab, ac se mutuò
tangentes in a , ad duas rectas de, df se
mutuò tangentes in d , sint parallelae,
non in eodem plano; illæ angulos
 bac, edf , æquales comprehendunt.



Ponantur ab, de ; & ac, df
æquales: Ducanturq; bc, ef ,
 be, ad, cf . Erunt ergo be, ad
æquales parallelae ba, cd

conuectentes æquales, ut & 33. I.

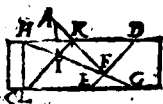
ad, cf : patetq; & be, cf , quia eadem ad
parallela. At ædeniq; bc, cf . Atq; ita in Tri. 9. XI.
angulis bac, edf , æqualium laterum, ab, de
& ac, df ; æqualiumq; basium bc, cf ; anguli
 bac , & edf sunt æquales.

78. h

PROPOSITIO XI.

Problema 11.

A dato puncto a in sublimi; ad sub-
iectum planum bc ; perpendicularem
ectam ducere.



In plano bc ducatur recta
atque, de , ad quam ex a
demittatur perpendicularis
a f , & in plano bc , per f ,

11. I.

11. I.

31. I.

ex const.

4. XI.

8. XI.

2. XI.

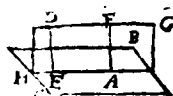
3. def. XI.

ad d ducatur perpendicularis gh , ad quam ex a
demittatur perpendicularis ai , que ad planum
subjectum perpendicularis est. & Ducta enim in
plano bc , per i , ipsi de parallela kl ; cum df sit
ad angulos rectos duabus fa , fh : & sic ad pla-
num per illas fa , fh : erit etiam ki ad idem pla-
num recta. Sed quia ai cum fa , fh , in eodem
est plano, tangitq, rectam ki in i : erit & angulus
 kia rectus; adeoque ai ad angulos rectos ipsis ki ,
 if : igitur & ad planum bc erit recta.

PROPOS: XII.

Problemà 21.

Dato plano bc à puncto a , quod
in illo datum est, ad rectos angulos
rectam lineam excitare.



Ex quovis puncto sublimi d
demittatur a ad planum bc
perpendicularis de , que, si
cecidit in a factum est quod
queritur: sed si ceciderit in punctum aliud e , ex-
tensa recta per e & a , ducatur per a ipsi de pa-
rallela

arella $a f$, in plano $g h$ per $d e$; $e a$, ducto erit: $a f$
 recta ad planum datum erecta. Cum enim $d e$, $a f$
 sint parallela, & $d e$ ad planum $b c$, recta; $d e$ ex contr
 is etiam $a f$ recta ad idem planum $b c$. d. 1. XL

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Dato plano $a b$ à puncto c , quod
 n illo datum est, dux recta lineæ ad
 ectos angulos non excitabantur ad
 asdem partes.



Ducantur, si potest fieri, $c d$
 $c e$ ad planum $a b$ perpendi-
 culares. Erunt ergo ambae 6. XL
 parallelae, quæ tamen in pun-
 cto c concurrunt, quod absur-

um. Eodem modo ex uho puncto sublimi impossi-
 le est, ad idem planum, duas perpendiculares
 mittere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Ad quæ plana $c d$, $e f$ eadem $a b$ re-
 a linea, recta est; illa sunt parale-
 la.

48. XI. 1.
12.



Si non sunt, concurrant ean-
dem producta illa plana ad
partes c, c. & faciantq; sectio-
nem g h lineam rectā, in qua
sumto puncto utcūq; i, ducā-
tur i a, i b, in planis g c d
& g e f. Itaq; cum a b, po-

17. I.

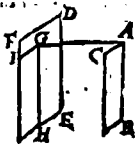
natur recta, ad utrunq; planum erunt trianguli
a i b, anguli i a b, & i b a recti, qui tamen
sunt duobus rectis & minores.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ a b, a c se mutuò
tangentes in a, ad duas rectas d e, d f
se mutuò tangentes in d, sint parallē-
læ non in eodem consistentes plano:
parallēlæ sunt, quæ per illa ducuntur
plana b c, e f.

11. XI.
31. I.



Ducatur ex a in planum e f
perpendicularis a g, & per par-
tē g p ducantur g h, g i
parallelae ipsis d e, d f. Cum
itaq; g h, a b, sint parallelae

29. XI.

29. I.

3. def. XI

4. XI.

psi d e; & etiam inter se sunt parallelae, anguliq;
b a g, a g h, duobus rectis & æquales: ac propter
hunc rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo c a
angulus est rectus. Itaq; cum g a ad a b, & a c sū
recta.

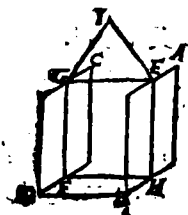
recta, recta etiam erit ga , ad planum bc , per illas ductum. Eadem autem ga , etiam, est recta ad planum ef . Itaq, bc & ef sunt plana parallela.

ex const.
014. XI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo plana parallela ab , cd , plano quopiam ef secentur: communes illorum sectiones eh , ef , sunt parallelae.



Si non sunt parallelae, convenient tandem producta, ut in puncto I . Quoniam linea he tota est in plano uno ab ; linea vero fg tota in plano cd . Itaq, cd producta: Producta itaq, illa plana concurrent quae tamen ponantur parallela.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duae rectae lineae ab , cd parallelis planis ef , gh , ik , secantur, in easdem rationes secabuntur, videlicet, ut segmenta inter plana dicta sint proportionalia, ut lm , ad mn , ita op , ad pq .

Gg 2

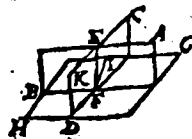
Ducan-

nem sectionem fg γ perpendicularis: eodemq; modo rectae omnes in plano gf ipsae ab parallelae erunt ad communem sectionem fg γ perpendiculares, ipsamq; planum gf ad planum cd rectum. Nec γ 3. def. XI. aliter habet cum omnibus alijs planis per ab g ductis 4. def. XI. Et sic & illa omnia ad planum cd recta sunt.

PROPOS: IX.

Theorema 17.

Si duo plana ab , cd se mutuo secantia, plano cuidam gh ad rectos sunt angulos; communis etiam illo sectio ef ad rectos eidem plano angulos erit.



Aut enim ef ad b f , d f , communes sectiones planorum ab , cd cum plano gh est recta, aut non. Si est ad illas recta, etiam ad planum gh , per ipsas ductum: si ad alteram tantum b f , recta dicatur ef ; quoniam ef in plano ab , 4. XI.

ad planum gh recto perpendicularis est communi eorum sectioni b f ; β erit & ad ipsum planum gh recta: Et ita, si ad alteram d f tantum poneretur recta, idem inferretur. Si autem ef ad neutram b f , d f credatur esse recta, γ ducatur ex f in plano ab , ad b f sectionem communem cum plano gh perpendicularis fi : & in plano cd γ 11. I. perpendicularis fk . Quoniam ergo planum ab

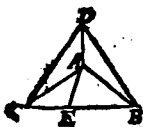
est rectum ad planum gh ; erit & $i f$ ad $b f$ sectio-
nem communem perpendicularis, ut & $k f$, ad idem
planum gh : adeoque ex puncto f ad planum gh
duæ erectæ sunt perpendiculares, & Quod absurdum.

13. XI.

PROPOS: XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus a tribus angulis
planis $b a c, c a d, d a b$, contineatur: ex
his duo quilibet, ut ut assumpti, tertio
sunt majores.



Si enim omnes tres sint inæqua-
les inter se, patet duos esse tertio
majores. Si autem duo tantum
æquales & tertium minor, idem
duo quilibet tertio sunt majores.

Si unus, ut $b a c$, sit maximus; reliqui autem sive
æquales sive inæquales, quilibet horum cum illo re-
liquo est major. Quo maximo $b a c$, majores etiam
sunt duo reliqui $b a d$ & $c a c$. In plano enim per
 $a b, a c$, ducto, a fiat angulus $b a c$, æqualis an-
gulo $b a d$, & recta $a d$ æqualis $a c$, & per c ex-
tendatur recta $b c$ secans ipsas $a b, a c$, in b & c ,
& connectantur rectæ $b d, c d$. Quoniam in tri-
angulis $b a d$, & $b a c$, latera $a d$ & $a c$ sunt æ-
qualia & $a b$ commune, illique comprehensæ angu-
li æquales, & Ergo & bases $b c, b d$ erunt æquales.
sed quia latera $d b, d c$ sunt majora latere $b c$,
& demis æqualibus $b d, b c$ erit $d c$, major quàm $a c$.

13. I.

4. I.
3. h

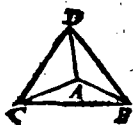
Itaque

Itaq, cum in triangulis dac & eac , latera da, ea sint equalia & a commune; basis autem dc major basi ec ; d erit & angulus dac major quam eac , & equalibus additis, erunt duo bad & dac simul majora angulis bae, eac simul, id est, angulo, bae maximo.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Omnis solidus a angulus a sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.



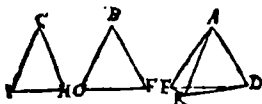
ductis rectis bc, cd, db , erunt tres anguli b, c, d solidi, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, ut b sub cba, abd & dbc ; c , sub bca, acd, dc ;

d sub oda, adb, bdc . Quoniam duo anguli cba, abd , majores sunt angulo dbc ; similiterq, duo adb, adc majores angulo bdc ; & duo acd, acb majores angulo dc . Sed tres hi c, b, d , & dc , sunt duobus rectis equalia; & erunt illi sex duobus rectis majores. Sed cum iidem sex ana sum tribus ad a angulis sint sex rectis & equaliter, ablatis illis sex, qui majores sunt duobus rectis, erunt tres reliqui ad a , constituentes angulum solidum, minores quatuor rectis. Nec diversa est demonstratio si angulus solidus constet ex pluribus, quam tribus planis angulis.

EVCLIDIS. ELEM:
PROPOS: XXII.

Theorema. 20.

Si fuerint tres anguli plani a, b, c quorum duo, ut libet, assumpti reliquo sint maiores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ $a, d, a, e, b, f, b, g, c, h, c, i$, fieri potest, ut ex lineis d, e, f, g, h, i , æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.



Si tres anguli dati,
 a, b, c , sunt æquales
erunt quoque bases
 d, e, f, g, h, i , æquales;

Et illarum qualibet duæ tertiâ majores si verò duo anguli sint æquales Et tertius minor, erunt etiam duæ bases æquales. Et basis tertij utraq, & minor; Et sic rursus qualibet duæ tertiâ sunt majores. Si autem unus a sit maximus; reliquis b, c vel æqualibus vel inequalibus; erit & d, e basis omnium maxima, & sic d, e, f, g , majores tertiâ h, i , & e item & h, i majores quam f, g . Erunt etiam f, g, h, i majores quam d, e . Fiat enim d, a, k angulus æqualis angulo b & a, k sit æqualis ipsi a, d , quia ex a per puncta d, k, e transit peripheria circuli ob eundem illarum rectarum a, d, a, k, a, e æqualis arcum, connectenturq, d, k, k, e . Quoniam ergo duo anguli b, c ponuntur majores angulo d, a, e & b æqualis est

q. 4. I.

p. 34. I.

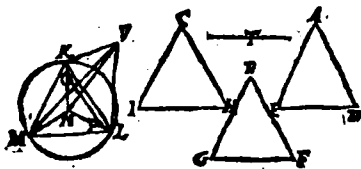
y 23. I.

est angulo dak ; erit angulus c major reliquo
 kac , basisq; dk aequalis basi fg : basis vero kc
 minor quam hi . Cum ergo dk , kc sint d ma-
 jores quam de , eadem d majores etiam erunt fg ,
 & hi , tribus ergo hisce ita comparatis, ut dua
 qualibet tertia sint majores, facile erit inde tri-
 angulum: efformare. 20. I.
22. I.

PROPOS: XXIII.

Problemata 3.

Ex tribus angulis planis abc , quo-
 rum duo quomodocunq; assumpti,
 reliquo sunt majores, solidum angu-
 lum constituere.

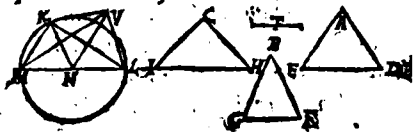


Tres illos angulos abc comprehendentes linea
 omnes ponantur aequales; & subtrahantur bases
 de , fg , hi , ex quibus potest triangulum, 22. XI.
 fieri, quod sit klm , ut $lasmkl$, basi de , lm
 & fg , & km , basi hi sit aequale; ac circa il-
 lud Gg

5. IV. *lud p describatur circulus, ex cuius centro n, datan-*
tur nk, nc, n m, quibus majores sunt qualibet
rectarum, ut a d, a e, angulos planos includenti-
um. Primo y cadat centrum n intra illud tri-
 7 cor. 5. IV. *angulum k l m, quia Oxygonium. Si ergo a d, a e,*
 8. L *non sunt majores, quatuor nk, nl: sint vel aqua-*
les: d eruntq, propter bases etiam aequales d e &
l k anguli k n l & a; ut & l n m & b; & m n
k & c aequales. Cumq, tres illi circa centrum n
 corol. 15. I *sint quatuor rectis: aequales: erunt & a b c qua-*
tuor rectis aequales, contra hypotbesin: vel mino-
res a d & a e, quam nk & nl, & sum n o, n p,
 2. VI. *equalibus abscissis, ducta o p parallela erit ipsi k l*
propter 2 proportionalem sectionem, trianguli l n k
& triangula l n k, p n o, equiangula. Cumq,
 14. V. *fit, ut nk, ad kl: ita n o ad o p: erit l k; id*
 4. VI. *est, de major quam o p: sicut nk, quam n o.*
 25. I. *Cum ergo in laterum, equalium triangulis, d a c*
& o n p, basis d e sit major basi o p; erit & an-
gulus a major, angulo o n p; & sic angulus b ma-
ior angulo l n m, angulusq, c major angulo m n k.
Erunt proinde a b c anguli quatuor rectis, quibus
illi tres circa n sunt aequales, majores, contra hy-
potbesin; itaq, a d, a e nec aequales, nec minores,
sunt ipsis nl, nk.

Deinde cadat centrorum n in latera l m, quod fit,
 si angulus k sit rectus, sintq, a d, a e, id est, b f, b g,
 vel aequales ipsis nl, nk, id est, linea l m, quae e-
 qualis

qualis est ipsi $f g$. Erunt ergo $b f$, $b g$ aequales ipsi $f g$, quod λ absurdum; vel sint minores, eruntq; $b f$, $b g$ minores ipsis $n l$, $n k$, id est, ipsa $l m$, vel $f g$, quod iterum absurdum.



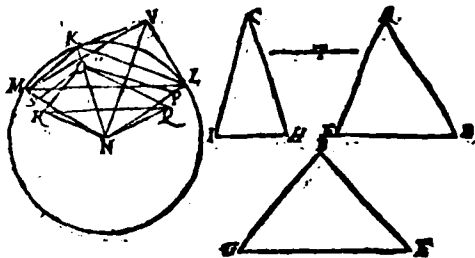
Postremo cadat centrum n extra triangulum
klm, quod sit, si angulus k sit obtusus: sintq; a d,
a e, vel aequales ipsis n l, n k; erunt propter ba-
ses d e, k l, aequales, etiam anguli a & k n l a-
equales d. & angulus c angulo k n m; totusq; l n m,
angulis a & c, qui duo simul ex hypothese. tertio
b sunt majores. Rursus, idem angulus l n m pro-
pter bases l m & f g aequales, aequalis est angulo
b, contra hypothesein. Vel minores sint a d, a e,
quam l n, n k, abscissis equalibus n o, n p, erit ut
in primo casu, angulus a major angulo o n p, an-
gulusq; c major quam angulus k n m. Itaq; si
at n angulo a equalis o n q, & angulo c angulus^{23. I.}
o n r, ponanturq; n q, n r aequales ipsis a d, a e;
& connectantur o q, o r; cadetq; o q infra o p, quia
per o, p, q ex centro n transit circulus, & quare, 29. I.
cum angulus, p o n, aequalis sit angulo n k l,
externus interno, erit angulus q o n, minor an-
gulo n k l. Eodemq; modo n o r minor, quam
n k m. Si ducatur o s parallela ipsi k m,
Totus ergo l k m, toto, q o r major erit.

Supp

§ 4. I.

§ 24. I.

Sunt autem in triangulis onq & dac equalium laterum, & anguli aequales a & onq etiā bases de & oq & aequales, id est, oq & lk , & sic or & km . Connexa jam recta qr , quoniam in triangulis qor & lkm , equalia sunt latera kl , km ; ipsis oq , or & angulus qor minor quā lkm : Erit basis lm , id est, fg , major basi qr . Sed quia bf , bg , sunt equalia ipsis nq , nr ; basis autem fg , major basi qr : Erit angulus b major angulo qnr . Rursus, quia anguli onq & a ; item onr & c facti sunt aequales: erit totum qnr equalis duobus, a & c . Sed a & c ponuntur majores angulo b : Igitur & qnr eodem b , major est, qui tamen modo ipso qnr major est demonstratum. Itaq; majores esse oportet ad , ac ipsis nk , nl .



Jam cum recta ad , ac majores sint rectis nk & nl ubicunq; centrum trianguli existat, possit recta ad plus quam recta nk , quadrato linea r per
 lemma

temma propositionis 15. X. ita ut quadratum re-
 ctæ a d æquale sit quadratis rectarum n k. Et ex-
 centro n = existeretur n u, ad planum circuli k l
 m æqualis ipsi t, connectanturq; u k, u l, u m. Quo- = 12. XL.
 niâ ergò n u est recta ad planum k l m, recta etiam
 erit ad rectas n k, n l, n m; ac proinde quadra- e 3. XI.
 tum rectæ u k, æquale quadratis rectarum k n, o 47. L.
 u n. Cumq; & quadratum a d æquale sit, ex con-
 structione, q̃s dem quadratis k n, n u, erunt ergò
 u k & a d quadrata æqualia, ipsaq; rectæ u k,
 a d æquales. Rursus, quia latera u n, n k, tri-
 anguli u n k æqualia sunt lateribus u n, l n,
 trianguli u n l, & anguli ipsius contenti
 u n k, u n l recti: Erunt bases u k, u l æ-
 quales ut & u m. Sunt ergò tres, u k, u l, u m
 æquales a d; ipsis etiam a e, b f, b g, c h, c i, æ-
 quales: adeoq; in triangulis u k l, l u m, k u m,
 equalium laterum & basium, cum triangulis d a e,
 f b g, h c i: erunt & angulis, a, b, c anguli ad u d
 æquales; ipsæq; angulus solidus u, tribus illis angu-
 lis continetur, quod erat propositum.

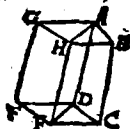
PROPOS: XXIV.

Theorema 21.

Si solidum a b, e f, parallelis planis a c,
 c f, f h, b a, a f, b e contineatur; adver-
 sa illius plana parallelogramma,
 sunt.

sunt similia & æqualia.

16. XL.



Cum enim parallela plana af, be secantur plano ac: erunt cōmunes sectiones a b c d parallela. Similiter cum plana af, be secantur plano a c: erunt cōmunes ipsorum sectiones ad, bc parallela; & fit figura quadrilatera a b c d est parallelogramma, adeoque & reliqua omnes. Sed & opposita parallelogramma sunt similia & æqualia.

11. XL.

Cum enim rectæ a b, b h, parallelae sint rectis d c, c e in opposito plano; erunt a b h, b c e anguli æquales; & sic etiam reliqui anguli parallelogrammi b g & reliquis parallelogrammi c f. Cumq; ad ipsi d c in parallelogrammo a c: & b h ipsi c e in parallelogrammo b c æqualis & sit: erit, ut a b ad b h; ita d c ad c e: ac propterea, ut b h ad b g, ita c e ad c f. Ob eandem causam erunt latera parallelogrammorum b g, c f circa æquales angulos proportionalia & parallelogramma ipsa similia.

34. L.

Ductis jam diametris a h, d e; cum in triangulis a b h, & d c e & æqualia sint latera a b b h lateribus d c, c e, & angulus a b h angulo d c e: erunt tota triangula d æqualia, ipsorumq; dupla parallelogramma b g, c f æqualia. Idem

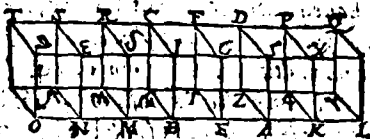
4. L.

de oppositis reliquis parallelogrammū demonstrabitur, quod & similia & equalia inter se sint.

PROPOSITIO XXV.

Theorema, 22.

Si solidum parallelepipedum $ab\ cd$, plano ef fecerur adversis $a\ d$ & $b\ c$ planis parallelo; erit, quemadmodum basis ag ad basin bg , ita solidum $a\ e\ f\ d$, ad solidum $b\ c\ f\ e$.



Intelligatur parallelepipedum $ab\ cd$ utring, productum, sumunturq, in $a\ h$, utring, protracta, quaecunq, recte $a\ k$, $k\ l$ ipsi $a\ c$: & quaecunq, recte $b\ m$, $m\ n$, $n\ o$ ipsi $b\ c$ equals; ducunturq, per puncta k, l, m, n, o plana $k\ p, l\ q, m\ r, n\ s, o\ t$, parallela planis $a\ d, e\ f, b\ c$: Quoniam igitur solidū $a\ c\ f\ d$ continetur planis parallelis, ex hypothesis; ipsum erit parallelepipedū, ex definitione; & habebitq, plana opposita parallelogramma similia, ut & reliqua omnia $a\ k\ p\ d, k\ l\ q\ p, e\ b\ c\ f, b\ m\ r\ c, m\ n\ s\ r, n\ o\ t\ s, e\ l\ q\ f, e\ o\ t\ f$.

Sed

p 36. L

v 19. L

d 10. defin.
IX.

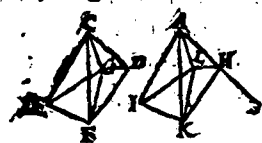
Sed cum parallelogramma ag, ku, lx super aequalibus basibus ae, ak, kl sint α equalia similiaq; propter angulos γ aequales, & latera circum illos equalia & proportionalia erunt. Sic equalia & similia sunt parallelogramma ay, kz, la . Itaq; cum & equalia & similia sint parallelogramma ad, kp, lq ; erunt tria plana ag, ay, ad solidi $acfd$, equalia & similia tribus planis ku, kz, kp , solidi $akpd$: bisce vel tribus in unoquoque solido planis opposita sunt equalia & similia, nempe ag ipsi zf ; ay , ipsi uf ; & ad ipsi cf . Itaq; α equalia sunt solida $acfd, akpd, klqp$. Eademq; ratione & $ebcf, bmr c, mnsr, nots$. Quare quam multiplex est basis lg , basis ag , tam multiplex erit solidum $lefq$. Solidum $acfd$, & quam multiplex basis og , basis bg . tam multiplex solidum $oefc$ solidi $befc$. Quoniam vero si basis lg , equalis est basi og ; aequale etiam est solidum $lefq$ solido $oefc$; quia basibus lg, og existentibus equalibus, equalia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi $oefc$. Si autem basis est maior base, solidum quoq; solidum majus est, & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione. Erit ergo, ut basis ag prima magnitudo, ad basin bg , secundam magnitudinem; Ita solidum $aofc$, tertia magnitudo; ad solidum $befc$, quartam. Eadem ratione demonstratur esse solidum ad solidum, ut basis dy ab basi cy ; &

cy; & ut basis ay, ad basin by; & ut basis bg ad basin cg.

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam ab, ejusq; punctum a, angulum solidum constituere, angulo solido dato c æqualem.



Ex f ad planū per c d
c e ductū, perpendicu-
laris a f g erigatur; a 11. XI
connectanturq; df, dg,
cf, cg, cg; & absis-

sa, ah equali cd, a fiat angulus hai, angulo
d c e, equalis, & recta ai, recta c e equalis. Ite-
rumq; in plano per a h, a i ductum, constituatur
angulus hai, equalis angulo d c g & al ipsi c g:
Sed ex l ad planum, in quo sunt a h, a l, ai; & ex l 12. XI
rigatur perpendicularis l k, quæ ipsi f g ponatur æ-
qualis; & conjungatur recta ka. Erit angulus solidus
a, contentus tribus planis hak, hai, & kai equa-
lis solido dato c. Connexi enim rectæ hk, hl, ik, il,
cum latera a h, a l, trianguli a h l, equalia sint
lateribus c d, c g trianguli c d g; anguliq; hai
& c d g æquales ex constructione: d erunt bases
hl, dg æquales. Rursus ablati equalibus angulis
a al & d c g, ex equalibus hai, d c e; relictis.

H b

æqua-

24. L
28. L

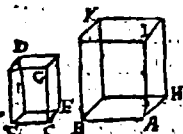
aqualibus la i, & g c c qui comprehenduntur a qualibus lateribus a b, a i ipfis c g. c c: Erunt & li & g e d aequales. Et sic in triangulis rectangulis h l k, d g f, & aequales bases, h k, & d f; iterumq; in triangulis rectangulis a h k, & c d f & aequales bases a k, c f Erunt ergo & h a k & d c f anguli aequales: Deniq; etiam in rectangulis k l i & f g e bases k i & f e & aequales. Iterumq; in triangulis k a i, & f c e, equalium laterum & basium, & aequales erunt anguli, k a i, & f c e. Sunt ergo tres anguli plani solidum angulum a includentes, aequales tribus planis angulum solidum c includentibus: Ex solidus a solido c aequalis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVII.

Problema 5.

Ad data recta linea a b, dato solido c & parallelepipedo, simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

216. XL



212. VI

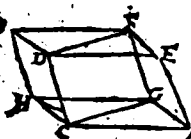
Ad recta a b punctum a, fiat a angulus solidus c equalis angulo solido c, ut in anguli plani h a i, i a b, b a h aequales sine tribus angulis planis e c g, g c f, f c e. Deinde fiat a u c f u e g, sic a b a u a i, & m c g a d c e, ut a i a d a h:

erit ex aquo, ut $c f$ ad $c e$, ita $a b$ ad $a h$: p
 ita a parallelogrammis completis absolvetur parat-
 telepipedū $a k$, quod parallelepipedo $c d$ simile simi-
 literq, posita erit. Cum enim equales sint anguli γ 24. XI.
 $b a h$, & $f c e$, lateraq, $b a$, $a h$, proportionalia γ 9. def. XI,
 lateribus $f c$, $c e$. Erūt parallelogramma $h b$, $e f$ simi-
 lia similiterq, posita: itemq, $h i$, $e g$; & $i b$, $g f$
 quibus tribus similibus similiterq, positis inter se
 erunt & opposita eorum plana similia similiterq,
 posita: & si solida $a k$, $c d$, similia similiterq,
 posita.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum $a b$ pla-
 no $c f$ secetur per diagonos $c g$, $d f$, ad-
 versorum planorum $a b$, $e b$: bifa-
 riā secabitur solidum $a b$ ab ipso pla-
 no $a b$.



Quoniam utraq, $c d$, $g f$, γ 34. I.
 parallela & aequalis est
 ipsi $a e$; erunt etiam in-
 ter β parallela & equal-
 es, γ ipsaq, connectentes γ 33. I.

$c g$, $d f$, parallela, per quas ductum planum $c f$,
 bifariam secat ipsum parallelepipedum $a b$.

H b a

Cum

24. XI.

26. VI.

20. def. X.

Cum enim plana $a h$, $e b$ sint parallelogramma equalia & similia: erunt & eorum dimidia seu triangula $a g c$, $g c h$; $c f d$, $f d b$, equalia, & propter latera circum aequales angulos proportionalia etiam, similia. Cum item & parallelogrammum $a f$, & equale sit, & simile parallelogrammo $c b$: & $a d$ ipsi $g b$, & $c f$ commune; erunt duo triangula $a g c$, $c f d$; & parallelogramma $a f$, $a d$, $c f$, prismae $a c g f e d$, equalia & similia duobus triangulis, $h c g$, $b d f$, & parallelogrammum $c b$; $b g$, $c f$ prismae $h g d c b f$: Ipsaeque prismae inter se & equalia. Quae cum componantur parallelepipedum $a b$; Erit ipsum bisectum plano $c f$.

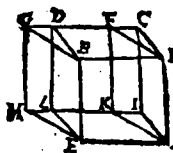
PROPOSITIO XXIX.

Theorema 24.

Solida parallelepipeda $a c d e$, $a f g i$ super eandem basin $a b$ constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes $a i$, $a k$, $e l$, $e m$, & $b c$, $b f$, $b d$, $b g$, lineae in iisdem collocantur rectis lineis $i m$ & $e g$; sunt inter se equalia.

25. L.

Quia enim equalia sunt parallelogramma $a l$, $a m$, erunt communi trapezio $a k l e$ ablato, equalia triangula $a i k$, $e l m$. Quia item equalia sunt



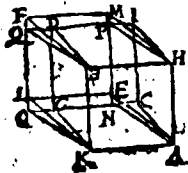
sunt omnia latera trian-
 gulorum aik & hcf ; item
 elm & bdg erunt, & equi-
 angula, & propter latera cir-
 cum aequales angulos & pro-
 portionalia, inter se similia.

Rursus & parallelogramma $aced$ inter se sunt
 equalia & similia, & sicut & if , & lg propter
 aequales bases ik , lm : adeoque omnia plana Pris-
 maticis aik , fch , aequalia sunt omnibus planis
 Prismaticis elm , gdb ; ipsaq; prismata equalia.
 Quibus si addatur commune solidum $ahlk$, $ldbe$;
 parallelepipeda super eadem basi in eadem altitu-
 dine sunt equalia.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda aik , $amfk$
 super eandem basin ab constituta &
 in eadem altitudine, quorum insi-
 stentes ac , ae , kg , kl : hi , hm , bd , bf ,
 lineæ non in iisdem collocantur re-
 ctis lineis cg , id : inter se sunt equalia.



Quia enim plana cd , ef ,
 opposita basi ab , sunt in ean-
 dem plano ob eandem pa-
 rallelepipedorum altitudi-
 nem: pertractis in eodem
 Hh 3 plana

14. I.

33. I.

92. XI.

plano rectis cg, id ; illam quidem cm & lf pro-
tracta secent in n & o : hanc vero ld in punctu
p, q: junganturq; recta an, ko, hp, bq Quia
igitur pq, mf recta sunt equales & parallelae.
sicut & mf, hb : erunt & pq, hb equales &
parallelae & $hpqb$ est parallelogrammum. Si-
cut eadem de causa & $hpna, anok, k oqb$.
Est autem & $noqp$ parallelogrammum. Igitur
 $apqk$ est parallelepipedum. Cui equale γ est pa-
rallelepipedum $a idk$, propter eandem basin ab &
lineas insistentes in iisdem rectis co, iq . Sed &
eidem $apqk$ propter eandem basin ab , & lineas
insistentes in iisdem rectis $nm of$, equale est pa-
rallelepipedum $amfk$. Igitur $a idk$ & $amfk$
etiam inter se sunt equalia.

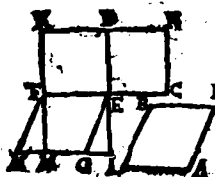
PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida parallelepipeda super æ-
quales bases ab, cd , constituta, & in
eadem altitudine; æqualia inter se
sunt.

Protractis duobus lateribus de, ce ad partes
& fiat angulus feg equalis angulo l : recta ef ,
recta lb ; & recta eg recta la : Erit pa-
rallelogrammum eh equale & simile paralle-
grammo ab . Convenias autem producta hg

cum



cum de in i, & compleat
tur parallelogrammum
ik. Iam concepiantur
L super bases eh, if, ek
aque alta parallelepipedo
da ipsis super ab, cd co-
structis parallelepipedis,
ut omnium insistentes

linee ad bases sint perpendiculares. Erunt super
ab & eh propter aequalia & similia plana inter
se aequalia; itemq, super eh & if aequalia. p. 19. XI.,
Cumq, parallelogramma eh, cd & fi sint aequalia, 25. I.
eidentq, eh aequale cd; erunt & if aequalia. d. 7. V.
igitur, ut if ad e k ita cd ad ek. Sed, ut if ad
ek, ita est solidum super if, ad solidum super ek: quia
planum super L i secans totum solidum super ik, est
parallelum plano adversis super dk, im, erectis.
Eademq, ratione ut e d ad e, k, ita solidum super
cd ad solidum super ek. Itaq, erit, ut solidum super
if, ad solidum super ek, ad solidum super cd 25. 9. VI.
ad solidum super ek. Eruntq, solida super if &
cd aequalia. Sed parallelepipedum super if est
aequale parallelepipedo super ab. Aequalia igitur
erunt & parallelepipeda super ab, cd.

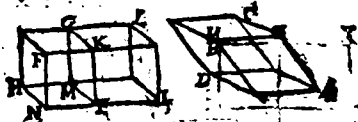
PROPOS. XXXII.

Theorema 27.

Solida parallelepipeda abcd, efgh,
sub eadem altitudine, inter se sunt,
ut bases, ab, ef.

Hb 4

super



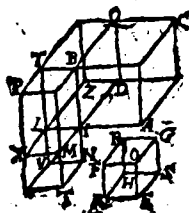
243. I.
31. XI.
7. XI.
35. XI.

Super rectam ek = constituatur parallelogram-
mum ik aequale parallelogrammo ab in angu-
lo iek , equali ipsi cnf : ita, ut if fiat unum pa-
rallelogrammum. Completo autem paralle-
pipedo $iflh$; erunt $abcd$ & $iklm$, equalia
& parallelepipeda. Erit igitur ut solidum $iklm$,
ad solidum $efgh$. Sed solidum $iklm$, ad solidum
 $efgh$ est, ut basis ik vel ipsi equalia b , ad ba-
sin cf . Igitur etiam solidum $abcd$, ad solidum
 $efgh$, est ut basis ab , ad basin cf .

PROPOS: XXXIII.

Theorema 28.

Similia solida parallelepipeda $abcd, efgh$ inter se sunt in triplicata ra-
tione homologorum laterum $ad ek$.



Producatur ai , ad l , ut
sit equalis ipsi er vel g .
Item di ad m , ut im sit
qualis ipsi hk vel go : ita
 bi ad n , ut in sit equalis
 kf , vel gs . Et completis pa-
rallelogrammis lm, in ,
perspicitur

perficiatur parallelepipedum txiu . Erunt pa-
 rallelogramma propter angulos & latera equalia
 ix & gf , in & rs , it & g & similia & equalia,
 quib. ut sua opposita in illis parallelepipedis otgh ,
 et xiu sint = similia & equalia; erunt & ipsa illa a 24. XI .
 Parallelepipeda inter se equalia & similia. Rursus pio. def. XI
 completis parallelogrammum ra b, bl, lm , perfici-
 iatur parallelepipedum m p, bl . Item com-
 pletis parallelogrammum iy, dl, iq perficiatur
 parallelepipedum iy q z . Quoniam ergo ex simili-
 tudine parallelepipedorum a b c d, e f g h , est; ut a i x 1. VI
 ad e k , id est il ; ita dl ad b k vel im ; & bi ad
 k vel in . Sed ut a i ad il , ita est paralle-
 logrammum ad ad dl ; & ut d i ad im , ita pa-
 rallelogrammum dl ad lm ; & ut bi ad in , ita
 parallelogrammum bl ad ln . Erit ergo ut a d ad
 dl , ita dl ad lm , & bl ad ln . Sed ut basis ad ad
 basin dl , ita est parallelepipedum a d c b , ad pa-
 rallelepipedum d ly q . Atque ut basis dl ,
 ad basin lm , ita parallelepipedum d ly q
 ad parallelepipedum lm b p ; & ut bases bl, ln ,
 ita parallelepipeda lm b p & n l t x . Quare erit,
 ut parallelepipedum a d c b ad parallelepipedum
 d ly q ; ita parallelepipedum d ly q ad bl b p ,
 & hoc ad ln t x . Quare quatuor sunt continuè
 proportionales quantitates a d c b, d ly q,
 lm b p, ln t x ; & proportio prima a d c b ad quartam
 ln t x , i.e. a d e f g h , est triplicata, proportionis
 primæ a d c b , ad secundam d ly q . Sic autem a d c b

ad d l y q. ita est *basia* d ad *basin* d h y. & ut ad
ad d l; ita est a i ad i l, id est e k. Est ergo propor-
tio parallelepipedorum a d c b & e f g h, tri-
plicata proportionis homologorū laterum a i & e k.

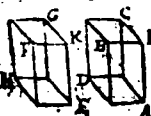
Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè pro-
portionalibus, ut est prima ad quartam;
ita sunt parallelepipeda primæ ad quartam
similia similiterq; descripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Equalium solidorū ad c b, e h g f, paral-
lelepipedorū bases a b, e h, & altitudi-
nes reciprocantur, & quorū solidorū
parallelepipedorū bases & altitudi-
nes reciprocantur, illa sunt æqualia.



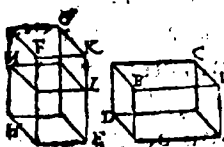
Ad bases a b, e h, sine insistentes
a i, e k perpendiculares, quæ sunt
parallelepipedorum datorū a b
altitudines: quæ si fuerint æque-
les, erant & propter ipsa paral-

lelepipeda equalia ipsæ bases a b, e h, æquales. & a
deq; ut basis a d ad basin e h; ita e k ad a i, u
est, bases & altitudines sunt, reciproca.

Si autem altitudines sint inæquales ex e k ma-
jore absindatur, ipsi a i equalis e l, & per l ip-
si basi e h ducatur planum parallelum l m. Quom-
am ergo equalia sunt solida a c d b & e h g f.
erit ut a c d b, qd e h l m; ita e h g f ad f h l m. & n

per 4.
defn. V I.

C. I. XL.
v. z. V.



autem solidum $adcb$ ad
solidum $ehlm$; ita e basis
ad basin eh , propter
altitudines ai, el aequales.

Atq; ut $ehgf$ ad $ghlm$,
ita basis kn ad basin ln .

igitur, ut basis ad ad basin eh ; ita est kn ad lm :

Et sic ek ad el , id est, ad ai ipsi aequalem. Quare est

ut basis ad ad basin eh ; ita altitudo ek ad alti-

tudinem ei , id est, reciproca sunt bases altitudinib.

Sine jam bases & altitudines reciprocae erunt etiā

parallelepipeda equalia. Si enim altitudines ek ,

& ai sint aequales, cum sit, ut altitudo ad altitu-

dinem, ita basis ad basin; erunt etiam bases ad, eh ,

equales & sic parallelepipeda ipsa aequae alta equa-

lia. Quod si inaequales sint altitudines, absindatur,

ut antea, equalis. Quoniā ergo est ex hypothesis, ut

basis ad ad basin eh ; sic altitudo ek ad altitudi-

nem ai , id est, el . Ut autē est basis ad ad basin eh ;

ita est solidum $adcb$, ad solidum $ehlm$, propter al-

titudines el, ai aequales: Et ut ek ad el , ita kn ad lm .

Atq; ut $ehgf$ ad $ghlm$, ita est solidum $ehgf$, ad solidum $ehlm$.

Ideoq; erit, ut solidum $adcb$, ad solidum $ehlm$;

ita $ehgf$, ad $ghlm$. Et sic $adcb$ & $ehgf$

sunt equalia. Poterat idē ostendi si insisteres, vel al-

titudines parallelepipedorum nō sint perpendicularares,

deinde demitteretur perpendiculares. Eadem haec et-

ā de Prismatib. hys deservatū principijs, vera sunt.

PROPOSITIO XXXV

Theorema 30.

Si

Si fuerint duo plani anguli æqua-
les bac, def , quorum verticibus a, b
sublimes rectæ lineæ ag, dh , insistant,
quæ cum lineis primò positæ angu-
los contineant æquales. bag & cag
utrumq; utriq; In sublimibus autem
lineis a, d, g, h quælibet sumit a fuerint
puncta g, h , & ab his ad plana, in qui-
bus cōsistunt anguli bac, def primū
positi, ductæ fuerint perpendicularæ.
res, $gi, hē$; à punctis, verò i, k quæ in
planis à perpendicularibus $gi, hē$ fi-
unt ad angulos bac, def primū po-
sitos adjunctæ fuerint rectæ lineæ $ia,$
 kd hæ ik, ed cum sublimibus ag, dh
æquales, angulos comprehendent.



Si enim ag, dh , fuerint
inequales, auferatur a
 ag ipsi dh æqualis al , &
ex l ad planum bac e-
mittatur perpendicularis
 lm . Quoniam igitur

æ 6. .XI.

gi, lm , sunt ad idem planum perpendiculariter, erunt & parallela, & in eodem plano trianguli gik & elm cadetq; lm in rectam ai . Iam ducantur ex punctis m, k ad rectas ab, ac, de, df perpendicu-

la

are mb, mc, ke, kf & connectantur rectæ, bc ,
 cl, lc, ef, eh, hf . Et quia lm est recta ad
 planum anguli b a c ipsa rectum angulum efficiet
 cum recta a m in eodem plano ducta. Quare lm est
 quadratum a l erit & equale quadratis a m, lm ; s3. def. XI.
74. l.
48. l.
 et quadratum a m est & equale quadratis, a c, 47. l.
 m. Igitur quadratum a l equale est quadratis 4. l.
8. l.
 c, cm, ml. At quadratis cm, ml equale
 est quadratum cl. Quia, cm l angulus est a rectus,
 igitur quadratum a l equale est quadratis a c, cl.
 Ideoq, a cl angulus erit d rectus. Rursus, quia qua-
 dratum a c equale est quadratis a m, ml: sed
 m & equale est quadratis a b, b m. Igitur qua-
 dratum rectæ a l, equale est quadratis rectarum
 b, b m, ml: at quadratis b m, ml equale est
 quadratum bl. Ergo quadratum a l equale est
 quadratis a b, bl angulusq, abl erit d rectus. Nec
 iter anguli d fh, & deh, ostenduntur recti. Quo-
 am itaq, a bl & lab anguli trianguli abl sunt
 uales angulis deh, hde, trianguli deh;
 inq, latera ac, dh equalia; erunt & reliqua
 tera a b, bl, reliquis lateribus de, he equalia.
 Eodemq, modo equalis erunt rectæ ac, cl,
 tis d f, fh. Quare in triangulis abc, def
 ualium laterum ab, ac, ipsis de, df, & an-
 gulorum bac ipsi edf; Erunt & bases bc, ef in-
 se, & anguli abc, acb, angulis def, dfe,
 uales. Sunt autem & toti anguli abm,

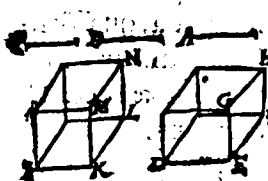
acm

ac in aequales totius dek, dsk, cum sint recti. Itaq;
 & reliqui mbc & mcb, reliqui kef, kfe, erunt
 aequales; propterea, cum & latera bc, ef sint o-
 stensa equalia, erunt latera bm, cm laterib. ek,
 fk equalia. Quia ergo latera ae, em equalia sunt
 lateribus df, fk angulib. acm, dfk recti, erunt
 & bases am, dk aequales. Cum autem aequales sint
 ostensa recta bl, eh; erunt & earum quadrata e-
 qualia. Sed quia quadratum bl, aequale est quadra-
 to bm, ml; & quadratum eh, quadratis ek,
 kh. Erunt & quadrata bm, ml equalia qua-
 dratis ek, kh. Ablatis ergo quadratis bm, ek
 aequalibus, reliqua quadrata ml, hk erunt equa-
 lia, rectaq. lm, hk aequales. Quamobrem
 sunt latera al, am equalia sint lateribus
 ah, dk; & basis lm, basi hk: erunt & an-
 guli lam, hdk aequales. Quod erat propositum.

PROPOS: XXXVI.

Theorema. 13.

Si tres rectae lineae a, b, c propor-
 tionales fuerint, quod ex tribus his
 fictolidum e b parallelepipedum,
 aequale est descripto a media linea
 b iolido parallelepipedo, im, quod
 aequaliterum quidem sit, equiangu-
 lum vero praedicto.



Compositum sit, ut de

H ad i k, ita k m ad e g

(quia de ipsa, &

i k, k m, ipsi b; & e g

ipsi c sumta sunt æ-

quales) & anguli de g

i k m æquales: Erunt α 14. VII.

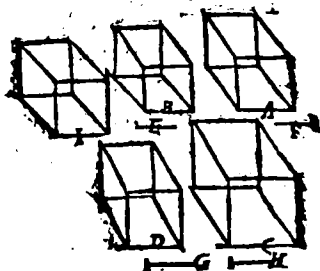
parallelogramma d g, i m, æqualia quia latera
habent circumæquales angulos reciprocos. Quoniam
verò anguli plani d e g, i k m sunt æquales, quo-
rum verticibus insistant sublimis lineæ æquales e f,
k l, quæ æquales angulos comprehendunt cum li-
neis primò positis, utrumq; utriq; ex constructio-
ne: erunt perpendiculæ ex f, l, ad plana basium
d g, i m, denique, nimirum altitudines parallele-
pipedorum d h, i n, si bases sint d g, i m inter se æ-
quales. Quare parallelepipedum d h, i n, propter ba-
ses d g, i m æquales, & æquales altitudines, inter
se sunt æqualia. Quod erat præpositum.

PROPOS. XXXVII.

Theorema 32.

Si quatuor rectæ lineæ a, b, c, d pro-
portionales fuerint ut a ad b, ita b ad
& solida parallelepipeda a b c d, quæ
b ipsis & similia & similiter de-
scribuntur, proportionalia erunt.
Et

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



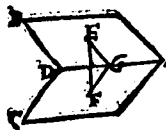
Cum eadem sit proportio a ad b , quæ c ad d , eadem quoq; erunt solidorum a ad b , & c ad d , quia sunt proportionēs triplicatæ ejusdem proportionis. Contra cum a ad b , & b ad c Solida habeant eandem proportionem triplicatam proportionis lineæ a ad b , & c ad d . Erunt etiam linearū sunt a ad b & c ad d eadem proportionem.

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum ab , ad planum ac , rectum fuerit, & ab aliquo puncto e eorum, quæ in uno sunt planorum ab
ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem ad eadem planorum ducta perpendicularis.

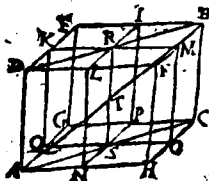


Si ex puncto e dato in plano demissa perpendicularis ad planum $a c$ non cadit in communem sectionem $a d$, sed in punctum f extra illum, ducatur ex e ad rectam $a d$ perpendicularis eg , quæ & ad planum $a c$ recta erit. Quare ex puncto e extra planum $a c$ ductæ sunt ad ipsum planum $a c$ duæ perpendiculares ef, eg . Quod *absurdum*. ut. def. XI. p. 13. XI.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedi ab eorum, quæ ex adverso planorum ac, bd latera bifariam secta sint in i, k, l, m, n, o , per sectiones autem plana in, ko , int' extensa: communis sectio rs planorum, & solidi parallelepipedi diameter ab bifariam se mutuo secabunt.



34. I.

29. I.

4. I.

13. I.

14. I.

9. XI.

33. I.

7. X I.

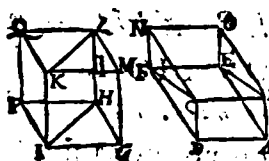
29 & 15. I

26. I.

Connexis enim rectis rd , rd ; sa , sc , in triangulo aq s , cos , propter equalia latera aq , qs ipsi cos , & angulum aqs equali alterno angulo cos . Erunt & bases as , cs & $equales$, anguliq; ast & cs o $equales$. Sed as & as o sunt duobus rectis & $equales$: igitur & cs & cos . Ac propterea as , cs unam rectam lineam constituent. Eodemq; modo $equales$ ostendentur br , dr ; & unam constituere rectam bd . Rursus, quia utraq; ad , bc parallela est & $equalis$ recte ab , ob parallelogramma af , fc ; ipsa quoq; parallela & $equales$ $erunt$. Quare & recta ac , bd , earum terminia coniungentes, parallela sunt & $equales$, ipsarumq; dividia as , br $equales$. Quia vero ac , bd sunt parallela: $erunt$ recta ab , rs in eodem circuli $ipsis$ plano. Ideoq; se mutuò secabunt in puncto. Cum autem duo anguli ast , ats , = $equales$ sunt duobus angulis brt & br , & latus as le rib ; a erunt & reliqua latera ta , ts re t b , tr $equalia$: ac propterea ab , rs , se mutuò bisariam secant in t . Quod erat propositum. Efficitur in omni parallelepipedo: Diametris omnes se mutuò bisariam secare in uno puncto, in quo bisariam dividuntur.

PROPOSITIO XL.
Theorema 35.

Si fuerint duo prismata $abcdef$,
 $ghiklm$, æqualis altitudinis; quorū
 hoc quidem habeat basin parallelo-
 grammum $abcd$, illud verò trian-
 gulum ghi duplum autem fuerit pa-
 rallelogrammū $abcd$ trianguli ghi :
 æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiantur enī in pa-
 rallelepipedis an, gq ,
 extrinsecis triangulorū
 basibus, & perfectis
 parallelogrammis bn ,
 av, gp, mq , ac du-

bitur, pq quæ æque alta sunt parallelepipeda
 cum ipsis prismatib. Quoniam igitur parallelogra-
 mmum gp , æ duplum est trianguli ghi , sed & ac
 parallelogrammum ejusdem trianguli ghi est du-
 plum. Erunt illa inter se æqualia: ipsaq; parale-
 pipeda æque alta super æqualibus basi-
 bus, & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æ-
 qualia. Quia parallelepipeda am, gk per diame-
 tros cf, de, hi, lk planorum adversorum secan-
 tur bisariam in bina videlicet prismata. Quod erat
 propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositio-
 nem tantummodo loqui de illis prismatib, quæ duo
 triangula habent opposita, quia jubet parallepi-
 peda complexi, quod non fieret, nisi utrumq; prisma
 opposita haberet triangula, quia jam antea esset
 completum, parallelepipedum.



EUCLIDIS

ELEMENTO.

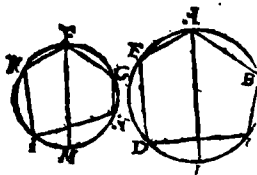
RUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Quæ in circulis polygona similia
abede, fghik, inter se sunt, in
 diametris *al, fm* quadrata.



Angulis equalibus
abc, fgh
 subtendantur rectæ
ac, fh; & con
 stantur rectæ *b*
gm. Quoniam
 similitudinem po

gonorum est, ut *abadbc*; sic *fgadgh*; tri
 a triangula *abc, fgh*, equiangula. Est autem
 angulus *acb*, & equalis angulo *alb*; & *fhg*
 ipsi *fm g*. Erant igitur & *alb* & *fm g* op
 ta, Sed cum & anguli *abl, fm g*, sint & equal
 tes.

¶ VI.

¶ III.

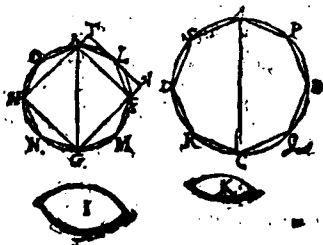
¶ III.

tanquam in semicirculo recti: & erunt & reliqui
 $\angle$ ba $\angle$ gfm aequales. Erit ergo, ut a $\angle$ adab,
 ita f $\angle$ madfg. Et permutando, ut a $\angle$ adfm;
 ita a $\angle$ ab, adfg. ^{32. I.} Igitur est, ut quadratum ex a $\angle$, ^{4. VI.}
 ad quadratum ex fm: Ita polygonum abcde, ^{32. VI.}
 super ab, ad polygonum fghi $\angle$ k super fg; cum tam
 quadrata quam polygona, sint figurae similes.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Circuli a bcd, efg h inter se sunt, quæ
 idmodum à diametris ac, e h quadrata.



Si in minus, esset, ut quadratum diametri a c,
 & quadratum diametri e g; ita circulus a b c d,
 & aliam magnitudinem i, quæ vel major vel mi-
 nor eris, circulo e f g h. Si enim esset æqualis, & ha-
 berent circuli a b c d, & e f g h eam rationem,
 eam diametri a c, e g; quod tamen non concedi-
 tur.

tur. Sit ergo minor circulo $efgh$, magnitudinet
ut quidam i & k simul sine circulo $efgh$ aqua-
les. Circulo ergo $efgh$ inscribatur quadratum
 $efgh$, quod quia quadratum, circulo eidem circum-
scripti, dimidium est, majus erit semicirculo. Iam
bisectetur peripheria $efgh$, he , in punctis
 m, n, o , adjungaturq; recte $el, lf, mf, mg, ng,$
 nh, ho, oe . Ducta autem per l Tangens tu , qua
ipse ef erit parallela, occurrens rectis he, gt pro-
tractis in t & p . Quoniam itaq; triangulum el
dimidium est parallelogrammi $tefu$, majus est
dimidio segmenti elf : & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & cum
simul in majori dimidio omnium segmentorum sunt.
Eodemq; modo bisectis hinc peripherijs el, lf , ut-
rum adjuncta linea efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si a circulo
 $efgh$, auferatur plus dimidio, nempe quadratum
 $efgh$, & reliquus segmentis rursus plus dimi-
dio, nempe triangula elf, fmg : & in hunc mo-
dum semper fiat subtractio, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circ-
lum $efgh$, & magnitudinem i . Sine itaq;
quoniam a circulo relicto el, lf, fm , simul sunt
minora magnitudine k . Cum ergo circulus $efgh$
ponatur aequalis ipse & k : simul segmenta in-
minora magnitudine k , subtracta ex circulo, re-
linquentur polygonum $elfmgno$, majus ma-
gnitudine reliqua. Huius polygoni simile inscri-

Datur circulo $abcd$, Quoniam hac polygona inter
 se sunt ut ex eorundem circulorum diametris qua-
 drata, id est, ut circulus $abcd$ ad i sed polygo-
 num $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$. 21. XII.
 igitur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 quam i : quod tamen modo demonstratum est ma-
 gius. Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponat-
 ur major circulo $efgh$. Cum itaq; ponatur $abcd$
 circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg :
 erit & convertendi ad circulum $abcd$, ut ex
 eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 culum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam o erit circulus $abcd$ ma-
 gnitudine k . Itaq; erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum.
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet, etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circulorum eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore maiorem. Item
 enim sequetur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se jam constat. Cum ergo magnitudine i , neg; maior
 minor esse possit circulus $efgh$; patet, eandem esse

tur. Sit ergo minor circulo $efgh$, magnitudinem
ut quidem i & k simul sint circulo $efgh$ equa-
les. Circulo ergo $efgh$ inscribatur quadratum
 $efgh$, quod quia quadrati, circulo eidem circum-
scripti, dimidium est, majus erit semicirculo. tam
viscetur peripheria $efgh$, he , in puncto l ,
 m , n , o , adjungaturq; recte el , fm , gn ,
 ho , oe . Ducta autem per l Tangens tu , qua
ipse e erit. parallela, occurrens rectis he , gt pro-
tractis in t & p . Quoniam itaq; triangulum el ,
dimidium est parallelogrammi $tefu$, majus erit
dimidio segmenti elf : & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia
similia. In his dimidiis omnium segmentorum summa.
Eodemq; modo bisectis hinc peripherijs el , lf , ut-
rum adjuncta lineae efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si a circulo
 $efgh$, auferatur plus dimidio, nempe quadratum
 $efgh$, & a reliquis segmentis rursus plus dimi-
dio, nempe triangula elf , fm , gn : & in hunc mo-
dum semper fiat subtractio, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circu-
lum $efgh$, & magnitudinem i . Sine itaq; se-
gmenra circuli rectis el , lf , fm , simul summa
minora magnitudine k . Cum ergo circulus $efgh$,
ponatur equalis ipsi i & k : simul segmenta illa
minora magnitudine k , subtracta ex circulo, re-
linquentur polygonum $elfmgnho$, majus ma-
gnitudinis reliqua i . Huius polygoni simile inscri-

batur circulo $abcd$, Quoniam hac polygona inter
 se sunt ut ex eorundem circulorum diametris qua-
 drata, id est, ut: ut circulus $abcd$ ad i sed polygo-
 num $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$. I. 14. V.
 gitur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 quam i : quod tamen modo demonstratum est ma-
 ius. Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponat-
 ur major circulo $efgh$. Cum itaq, ponatur $abcd$
 circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg :
 erit & convertendū ad circulum $abcd$, ut ex
 eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 culum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam o erit circulus $abcd$. ma. 14. V.
 gnitudine k . Itaq, erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum.
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet, etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circulorum eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore majorem. Item
 enim sequetur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se jam constat. Cum ergo magnitudine i , neq, major
 neq, minor esse possit circulus $efgh$; patet, eandē esse

circulorum rationem, quæ & ex ipsorum diametris
quadratorum. Hinc etiam patet.

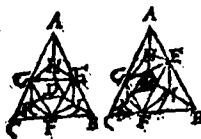
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut po-
lygona similia ipsis inscripta, quia
ipsa quoq; sunt ut ex diametris qua-
drata.

PROPOS: IIL

Theorema 3.

Omnis Pyramis $abcd$, triangula-
rem habens basin abc dividitur in
duas pyramides $aegh, hikd$ æquales
& similes inter se, triangulares ha-
bentes bases aeg, hik , & similes to-
ti, & in duo prismata $ebfgh, hie fgbik$
æqualia; quæ duo prismata maiora
sunt dimidio totius pyramidis.



Omnia latera pyramidis
secantur bisartam in $e, f, g,$
 h, i, k , connectanturq; $e, f,$
 $fg, ge, hi, ik, kh, he,$
 ei, if : erunt duæ pyrami-
des $aegh, hikd$, & æquales & similes inter se.

Et tot: Sicut & duo prismata $ebfghi$, $efgh$
 & ik inter se equalia, & maiora dimidio totius pyra-
 midis. Quia enim $a d$, $b d$, latera secta sunt bise-
 ctam, & sic proportionaliter, a erunt hi , ab , pa-
 rallela. Eademque ratione parallela ik , bc : hk ,
 ac : eg , bc : ef , ac : fg , ab : eh , bd : ei , ad :
 if , dc : hg , dc : a Sunt autem & fg , hi , inter
 se parallela, quia eidem ab , parallela sunt. Sicut
 & gh , fi , quia eidem dc . Sunt ergo parallelo-
 grammata aeh , $hebi$, $idhe$, $ebfg$, $ghkc$,
 $ckif$, $fghi$. Quia verò he , hg rectæ db , bc
 sunt parallela: & erunt anguli ehg , bdc aequales: &
 sicut & heg , dbc & hge , $dc b$. Sunt ergo
 triangulorum heg , dbc latera circum aequales
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula hae , hag , aeg , triangulus dab
 dac , abc sunt & similia: Sunt ergo pyramides
 $aegh$, $abcd$ similes. Rursus, quia rectæ hi , hk ,
 rectæ ab , ac sunt parallela: erunt anguli ihk ,
 bac aequales: & itemque hik , abc ; hki , acb .
 Quare triangula hik , abc habent circum æ-
 quales angulos latera proportionalia, & sunt si-
 milia. Sunt autem & triangula dhi , dik ,
 dkh , triangula dab , dbc , dca similia: Itaque
 pyramides $hikd$, $abcd$ sunt similes. Quo-
 niam autem triangula ahe , hdi , & sunt similia
 triangula adb ; ipsæ etiam inter se & erunt simi-
 les. Et quia super aequales rectas ah , hd sunt
 constructæ: & erunt etiam equalia. Itaque etiam
 ahg ,

a. 2. VI.

g. 2. XI.

v. 10. XI.

d. 4. VI.

g. def. XI.

g. 21. VI.

Lemma

2. VI.

ahg, hdk , triangula similia, super aequales bases ah, hd constituta sunt etiam aequalia; ut & aeg & hik super ae & hi aequales. Et denique ehg, idk super he, di aequales, aequalia sunt.

34. I.

10. def. XI.

8. I.

Itaque Pyramides similes $aegh$, & $hikd$, etiam sunt aequales. Rursus quia eh, hg, ge , sunt aequales & parallela rectis bi, if, fb : & erunt triangula ehg, bif , equiangula inter se & aequalia & similia. Sunt etiam parallela, quia eh, hg , per quas planum ehg est ductum, parallela sunt rectis bi, if , per quas planum bif est ductum. Igitur solidum bif, ghe , sub duobus his triangulis ex adverso aequalibus parallelis & similibus, & tribus parallelogrammis $egfb, behi, ifgh$, contentum est prisma. Eodemque modo propter triangula cfg, hik , ex adverso aequalia parallela

15. XI.

& similia, & propter parallelogramma $cfik, khgc, ifgh$, quibus continetur; solidum cfg, hik , est prisma. Quod cum cum priore bif, ghe sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana parallela bge, hik & parallelogrammum $ebfg$ est

41. I.

40. XI.

duplum trianguli cfg , & erunt haec inter se aequalia. Denique, quia prisma $ebfghi$ majus est pyramide $ebfi$; totum parte, quae aequalis & similis est pyramidibus $aegh$, & $hikd$. Et aequalitate & similitudine triangulorum erunt illi duo prismata pyramidibus $aegh$, & $hikd$

majores

in iora adeoque excedent quidem dimidium, pyramidis a b c d. hac vero a diuidio ejus deficiunt. Totum enim in partes inaequales diuiso, dimidium quidem superat pars major, scilicet a diuidio deficit minor.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duae pyramides $abcd$, $efgh$ ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases abc , efg ; Sit autem illarum utraque diuisa & in duas pyramides $ailm$, $mnod$, & $eprs$, $stuh$, aequales inter se & similes toti & in duo prismata aequalia $ibklmn$, $cklmno$, & $psqrst$, $gqrstu$, ac eodem modo diuisa sit utraq; pyramidum $ailm$, $mnod$ & $eprs$, $stuh$, quae ex superiore diuisione natae sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis $abcd$ basis abc , ad alterius pyramidis $efgh$ basin efg ; ita & omnia, quae in una pyramide prismata ad omnia, quae in altera pyramide prismata multitudine aequalia.

Con-



EUCLIDIS

ELEMENTO-

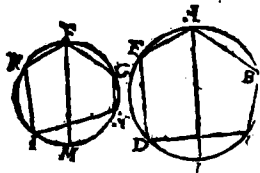
RUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

QUæ in circulis polygona similia
abedc, fghik, inter se sunt, ut à
 diametris *al, fm* quadrata.



angulis equali-
bus abc, fgh,
subtendantur rectæ
ac, fh; & con-
stantur rectæ bl,
gm. Quoniam
similitudinem poly-

gonorum est, ut ab ad bc; sic fg ad gh: erunt
a triangula abc, fgh, æquiangula. Est autem
angulus acb, æqualis angulo alb; & fgh,
ipsi fmg. Erunt igitur & alb & fmg æqui-
anguli. Sed cum & anguli alb, fmg, sint & æquali-

46. VI.

311. III.

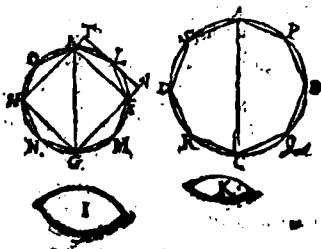
731. AL.

tanquam infemicyculo recti: & erunt & reliqui
 ba, gf in aequales. Erit ergo, ut al ad ab ,
 ita fm ad fg . Et permutando, ut al ad fm ,
 ita ab , ad fg . & igitur est, ut quadratum ex al ,
 ad quadratum ex fm : Ita polygonum $abcde$,
 super ab , ad polygonum $fghi$ Super fg ; cum tam
 quadrata quam polygona, sint figurae similes.

PROPOS. II.

Theorema 2.

Circuli $abcd, efgh$ inter se sunt, quæ
 admodum a diametris ac, eh quadrata.



Sin minus, esto. ut quadratum diametri ac ,
 ad quadratum diametri eg ita circulus $abcd$,
 ad aliam magnitudinem i , quæ vel maior vel mi-
 nor erit circulo $efgh$. Si enim esset æqualis, & ho-
 terent circuli $abcd$, & $efgh$ eam rationem,
 quam diametri ac, eg ; quod tamen non concedi-
 tur.

tur. Sit ergo i minor circulo $efgh$, magnitudine k
ut quidem i & k simul sint circulo $efgh$ equa-
lis. Circulo ergo $efgh$ inscribatur quadratum
 $efgh$, quod quia quadrati, circulo eidem circum-
scripti, & dimidium est, majus erit semicirculo. Iam
bisectetur peripheria $efgh$, he , in puncto l ,
 m, n, o , adiungaturq; recta $el, lf, mf, mg, ng,$
 nh, ho, oe . Ducta itaq; per l Tangens tu , qua
ipsa ef erit, parallela, occurrens rectis he, gt Pro-
tractis in t & p . Quoniam itaq; triangulum eli ,
& dimidium est parallelogrammi $tefu$, majus est
dimidio segmenti elf : & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia
similia majora dimidiis arcuum segmentorum simul.
Eodemq; modo bisectis hinc peripherijs el, lf , ut-
rum adjuncta linea efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si a circulo
 $efgh$, auferatur plus dimidio, nempe quadratum
 $efgh$, & a reliquis segmentis rursus plus dimi-
dio, nempe triangula elf, fmg : & in hunc mo-
dum semper fiat subtractio, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circ-
lum $efgh$, & magnitudinem i . Sint itaq; fr-
gmenta circuli restantia et, hf, fm , simul summa
minora magnitudine k . Cum ergo circulus $efgh$,
ponatur aequalis ipso i & k : simul segmenta illa
minora magnitudine k , subtrahantur ex circulo, re-
linquentur polygonum $elfmgnho$, majus ma-
gnitudine re reliqua i . Huius polygoni simile inscri-

batur circulo $abcd$, Quoniam hac polygona inter
 se sunt ut ex eorundem circularum diametris qua-
 drata, id est, ut circulus $abcd$ ad i sed polygo-
 num $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$. 21. XII.
 igitur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 quam i : quod tamen modo demonstratum est ma-
 jus. Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponat-
 ur major circulo $efgh$. Cum itaq³ ponatur $abcd$
 circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg :
 erit & convertendū ad circulum $abcd$, ut ex
 eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 culum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam a erit circulus $abcd$. 14. V.
 gnitudine k . Itaq³ erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum.
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet, etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circularium eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore majorem. Item
 enim sequeretur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se sū constat. Cum ergo magnitudine i , neq³ major
 neq³ minor esse possit circulus $efgh$; patet, eandem esse

*circulorum rationem, quæ & ex ipsorum diametris
quadratorum. Hinc etiam patet.*

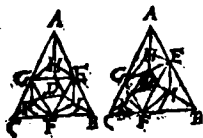
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut po-
lygona similia ipsis inscripta, quia
ipsa quoq; sunt ut ex diametris qua-
drata.

PROPOS: III.

Theorema 3.

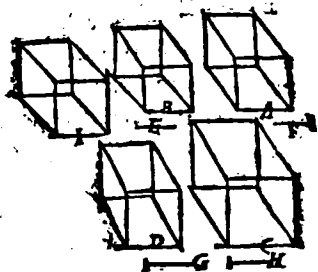
Omnis Pyramis $abcd$, triangu-
larem habens basin abc dividitur in
duas pyramides $aegb, bikd$ æquales
& similes inter se, triangulares ha-
bentes bases aeg, bik , & similes to-
ti, & in duo prismata $ebfg, hie fgbik$
æqualia; quæ duo prismata majori
sunt dimidio totius pyramidis.



Omnia latera pyramidis
secantur bisectam in $e, f, g,$
 h, i, k , connectanturq; e
 $fg, ge, hi, ik, kh, he,$
 ei, if : erunt due pyrami-
des $aegb, bikd$, & æquales & similes inter se

Et totum: Sicut & duo prismata $ebfghi$, $efgh$
 & ik inter se equalia, & maiora dimidio totum pyra-
 midis. Quia enim ad , bd , latera secta sunt bise-
 ctam, & sic proportionaliter, & erunt hi , ab , pa ^{2. VI.}
 parallela. Eademq; ratione parallela ik , bc : hk ,
 ac : eg , bc : ef , ac : fg , ab : eh , bd : ei , ad :
 if , dc : hg , dc : a Sunt autem & fg , hi , inter ^{3. XI.}
 se parallela, quia eidem ab , parallela sunt. Sicut
 & gh , fi , quia eidem dc . Sunt ergo parallelo-
 grammata $aeih$, $hebi$, $idhe$, $ebfg$, $ghkc$,
 $ckif$, $efgh$. Quia verò he , hg rectis db , bc
 sunt parallela: & erunt anguli ehg , bdc aequales: & ^{10. XI.}
 sicut & heg , dbc & hge , dcb . & Sunt ergo ^{4. VI.}
 triangulorum heg , dbc latera circum aequales
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula hae , hag , aeg ; triangula dab
 dac , abc sunt & similia: Sunt ergo pyramides ^{3. def. XI.}
 $aegh$, $abcd$ similes. Rursus, quia recta hi , hk ,
 rectis ab , ac sunt parallela; erunt anguli ihk ,
 bac aequales: & itemq; hik , abc ; hki , acb .
 Quare triangula hik , abc habent circum a-
 quales angulos latera proportionalia, & sunt si-
 milia. & Sunt autem & triangula dhi , dik ,
 dkh , triangula dab , dbc , dca similia: Itaq;
 pyramides $hikd$, $abcd$ sunt & similes. Quo-
 niam autem triangula ahe , hdi , & sunt similia
 triangulo adb ; ipse etiam inter se & erunt simi- ^{31. VI.}
 lia. Et quia super aequales rectas ah , hd sunt
 constituta: & erunt etiam equalis. Itaque etiam ^{Lemma}
 ahg , ^{12. VI.}

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



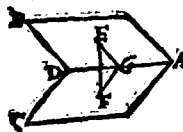
Cum eadem sit proportio a ad b , quæ c ad d , eadem quoq; erunt solidorum a ad b , & c ad d , a quia sunt proportionēs triplicatæ ejusdem proportionis. Contra cum a ad b , & b ad c Solida habeant eandem proportionem triplicatam proportionis lineæ a ad b , & c ad d . Erunt etiam linearū sunt a ad b & c ad d eadem proportionēs.

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum ab , ad planum ac , rectum fuerit, & ab aliquo puncto e eorum, quæ in uno sunt planorum ab ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem ad eadem planorum ducta perpendicularis.



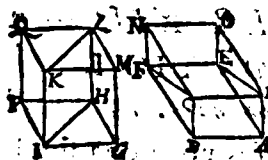
Si ex puncto e dato in plano demissa perpendicularis ad planum $a c$ non cadit in communem sectionem $a d$, sed in punctum f extra illum, ducatur ex e ad rectam $a d$ perpendicularis $e g$, quæ & ad planum $a c$ recta erit. Quare ex puncto c extra planum $a c$ ductæ sunt ad ipsum planum $a c$ duæ perpendiculares $c f$, $c g$. Quod p
absurdum. 24. def. XI.
p. 13. XI.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedorum $a b$ eorum, quæ ex adverso planorum $a c$, $b d$ latera bifariam secta sint in i , k , l , m , n , o , p ; per sectiones autem plana $i n$, $k o$, sint extensa: communis sectio $r s$ planorum, & solidi parallelepipedorum diameter $a b$ bifariam se mutuo secabunt.

Si fuerint duo prismata $abcdef$,
 $ghiklm$, æqualis altitudinis; quorū
 hoc quidem habeat basin parallelo-
 grammum $abcd$, illud verò trian-
 gulum ghi duplum autem fuerit pa-
 rallelogrammū $abcd$ trianguli ghi :
 æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiantur enī in pa-
 rallelepipedis an, gq ,
 extrinsecus triangulorū
 basīs, & perfectis
 parallelogrammīs bn ,
 av, gp, m, q, ac du-

bitur, p, q quæ æque altæ sunt parallelepipedis
 cum ipsis prismatib. Quoniam igitur parallelogra-
 mmum gp , æ duplum est trianguli ghi , sed & ac
 parallelogrammum ejusdem trianguli ghi est du-
 plum, Erunt illa inter se æqualia: ipsaq; para-
 lelepipedæ æque altæ super æqualibus basi-
 bus, & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æ-
 qualia. Quia parallelepipedæ an, gk per diame-
 tros cf, de, hi, lk planorum adversorum secan-
 tur bisariam in bina videlicet prismata. Quod erat
 propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositio-
 nem tantummodo loqui de illis prismatib, quæ duo
 triangula habent opposita, quia jubet parallelepi-
 peda complexi, quod non fieret, nisi utrumq; prima
 opposita haberet triangula, quia jam antea esset
 completum, parallelepipedum.



EUCLIDIS

ELEMENTO-

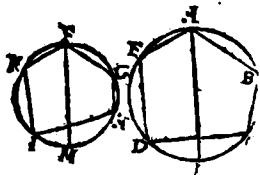
RUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

QUæ in circulis polygona similia
ab ede, fghik, inter se sunt, ut à
 diametris *al, fm* quadrata.



Angulis equali-
bus abc, fgh,
subtendantur rectæ
ac, fh; & con-
stantur rectæ bl,
gm. Quoniam
similitudinem poly-

gonorum est, ut ab ad bc; sic fg ad gh: erunt
a triangula abc, fgh, æqui angula. Est autem
angulus acb, æqualis angulo alb; & fgh,
ipsi fm g. Erunt igitur & alb & fm g æqui-
anguli. Sed cum & anguli alb, fm g, sint & æquali-
tati

¶ VI.

¶ III.

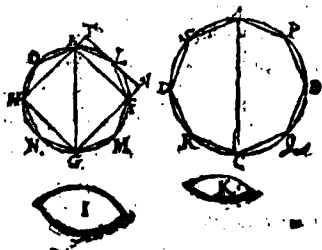
¶ III.

tanquam infemīcirculo recti: & erunt & reliqui
 ba , gf m a g u a l e s . Erit ergo, ut a l a d a b ,
 ita f m a d f g . Et permutando, ut a l a d f m ;
 ita a b , a d f g . ^{31. I.} Igitur est, ut quadratum ex a l ,
 ad quadratum ex f m : ita polygonum a b c d e , ^{4. VI.}
 super ab , ad polygonum f g h i k super fg ; cum tam
 quadrata quam polygona sint figura similes. ^{12. VI.}

PROPOS: II.

Theorema 2.

Circuli a b c d , e f g h inter se sunt, quē
 admodū a diametris ac , e h quadrata.



Sin minus, esto. ut quadratum diametri a c ,
 ad quadratum diametri e g ita circulus a b c d ,
 ad aliam magnitudinem i , quę vel major vel mi-
 nor erit circulo e f g h . Si enim esset equalis, e h ^{7. V.}
 haberet circuli a b c d , & e f g h eam rationem,
 quam diametri a c , e g ; quod tamen non concedi-

tur. Sit ergo i minor circulo e f g h, magnitudine k
ut quidam i & k simul sint circulo e f g h equal-
es. Circulo ergo e f g h inscribatur quadratum
e l g h, quod quia quadrati, circulo eidem circum-
scripti, & dimidium est, majus erit semicirculo. Iam
bisectetur peripheria e f g h, h e, in puncto l,
m, n, o, jungaturq. recta e l f, m f, n g, n g,
n h, h o, o e. Ducta itq. per l Tangens t u, qua
ipse e f erit. parallela, occurrens rectis h e, g t. Pro-
tractis in t & p. Quoniam itaq. triangulum e l f,
& dimidium est parallelogrammi t e f u, majus erit
dimidio segmenti e l f: & sic reliqua singula trian-
gula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnis
similis in his dimidiis omnium segmentorum simul.
Eodemq. modo bisectis h i, e peripherijs e l, l f, ite-
rum adjuncta linea efficerent triangula dimidiis se-
gmentorum majora. Quoniam autem si a circulo
e f g h, abstratur plus dimidio, nempe quadratum
e f g h, & a reliquo segmentis rursus plus dimi-
dio, nempe triangula e l f, f m g: & in hunc mo-
dum semper si a circulo, tandem relinqueretur
minor magnitudo quam est k excessus inter circulo
e f g h, & magnitudinem i. Sint itaq. se-
gmenta a circulo rectis e d, h f, f m, simul sum-
minora magnitudine k. Cum ergo circulus e f g h,
ponatur equalis ipsi i & k: simul segmenta illa
minora magnitudine k, subtrahat ex circulo, re-
linquentur polygonum e l f m g n h o, majus ma-
gnitudinis reliqua l. Huius polygoni simile inscri-

batur circulo $abcd$. Quoniam hac polygona inter
 sesant ut ex eorundem circularum diametris qua-
 drata, id est, a : ut circulus $abcd$ ad i sed polygo-
 num $apbqcrds$, minus est circulo $abcd$. 21. XII.
ex hypot.
1. 14. V.
 gitur & polygonum, $elfm$, $gnho$, minus erit
 quam i : quod tamen modo demonstratum est ma-
 jus. Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponat-
 ur major circulo $efgh$. Cum itaq³ ponatur $abcd$
 circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg :
 erit & convertendū ad circulum $abcd$, ut ex
 eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem
 circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad cir-
 culum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo
 $efgh$, major etiam o erit circulus $abcd$ ma-
 gnitudine k . Itaq³ erit ut diametrorum eg ,
 ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudi-
 nem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum.
 Quia ostensum modo est, non posse esse, ut qua-
 dratum diametri ad quadratum diametri; ita
 circulum ad magnitudinem minorem circulo. Sic
 patet, etiam, nunquam habere posse quadrata duo-
 rum circularum eandem rationem, quam circulus
 prior ad magnitudinem posteriore majorcm. Idem
 enim sequetur absurdum, ut quod quadratum dia-
 metri ac ad quadratum diametri eg , habeat e-
 andem rationem, quam circulus $abcd$, ad magni-
 tudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum es-
 se jam constat. Cum ergo magnitudine i , neq³ maior
 neq³ minor esse possit circulus $efgh$; patet, eandem esse

circulorum rationem, quæ & ex ipsorum diametris
quadratorum. Hinc etiam patet.

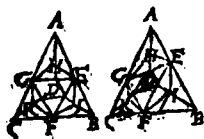
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut po-
lygona similia ipsis inscripta, quia
ipsa quoq; sunt ut ex diametris qua-
drata.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis $abcd$, triangu-
larem habens basin abc dividitur in
duas pyramides $aegb, bikh$ æquales
& similes inter se, triangulares ha-
bentes bases $aeg, bikh$, & similes to-
ti, & in duo prismata $ebfghi, cfbik$
æqualia; quæ duo prismata majora
sunt dimidio totius pyramidis.



Omnia latera pyramidis
secantur bisariam in $e, f, g,$
 h, i, k , connectanturq; $e, f,$
 $fg, ge, hi, ik, kh, hc,$
 ei, if : erunt due pyrami-
des $aegb, bikh$, & æquales & similes inter

& toti: Sicut & duo prismata $ebfghi$, $efgh$
 ik inter se equalia, & maiora dimidio totius pyra-
 midis. Quia enim ad , bd , latera secta sunt bifa-
 riam, & sic proportionaliter, $erunt hi$, ab , pa . 2. VI.
 rallela. Eademq; ratione parallela ik , bc : hk ,
 ac : eg , bc : ef , ac : fg , ab : eh , bd : ei , ad :
 if , dc : hg , dc : a Sunt autem & fg , hi , inter 3. XI.
 se parallela, quia eidem ab , parallela sunt. Sicut
 & gh , fi , quia eidem dc . Sunt ergo parallelo-
 grammata $aeih$, $hebi$, $idhe$, $ebfg$, $ghkc$,
 $ckif$, $fg hi$. Quia verò he , hg rectis db , bc
 sunt parallela: & erunt anguli ehg , bdc aequales: & 10. XI.
 sicut & heg , dbc & hge , $dc b$. & Sunt ergo 4. VI.
 triangulorum heg , dbc latera circum aequales
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula hae , hag , aeg , triangulis dab
 dac , abc sunt & similia: Sunt ergo pyramides 5. def. XI.
 $aegh$, $abcd$ similes. Rursus, quia rectis hi , hk ,
 rectis ab , ac sunt parallela: erunt anguli ihk ,
 bac aequales: & itemq; hik , abc ; hki , acb .
 Quare triangula hik , abc habent circum a-
 quales angulos latera proportionalia, & sunt si-
 milia. & Sunt autem & triangula dhi , dik ,
 dkh , triangula dab , dbc , dca similia: Itaq;
 pyramides $hikd$, $abcd$ sunt similes. Quo-
 niam autem triangula ahe , hdi , & sunt similia
 triangula adb ; ipse etiam inter se & erunt simi- 6. VI.
 lia. Et quia super aequales rectas ah , hd sunt
 constructa: & erunt etiam equalia. Ita etiam Lemma
2. VI.
 ahg ,

ahg, hdk, triangula similia, super equales bases ah, hd constituta sunt etiam equalia; ut & aeg & hik super ae & hi e quales. Et deniq, ehg, idk super he, di e quales, equalia sunt.

34. I.

10. def. XI.

8. I.

Itaq, Pyramides similes aegh, & hikd, etiam sunt equales. Rursus quia eh, hg, ge, sunt e quales & parallela rectis bi, if, fb: a erunt triangula ehg, bif, equiangula inter se & equalia & similia. Sunt etiam parallela, quia eh, hg, per quas planum ehg est ductum, parallela sunt rectis bi, if, per quas planum bif est ductu. Igitur solidum bif, ghe, sub duobus his triangulis ex adverso equalibus parallelis & similibus, & tribus parallelogrammis egfb, behi, ifgh, contentum est prisma. Eodemq, modo propter triangula cfg, hik, ex adverso a equalia parallela

15. XI.

& similia, & propter parallelogramma cfi k, khgc, ifgh, quibus continetur; solidum cfg hik, est prisma. Quod cum cum priore bif ghe sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana parallela bcege, hik & parallelogrammum cbfg est duplum trianguli cfg, & erunt hec inter se equalia. Deniq, quia prisma cbfg hi majus est pyramide cbi; totum partq, que equalis & similis est pyramidibus aegh, & hikd. Ex equalitate & similitudine triangulorum erunt illa duo prismata pyramidibus aegh, & hikd

41. I.

40. XI.

majora

in iora: adeoque excedent quidem dimidium, pyramidis a B & d. hac vero a dimidio ejus deficient. Totum enim in partes inaequales divisum, dimidium quidem superat pars major: scilicet a dimidio deficit minor.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duae pyramides $abcd$, $efgh$ ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases abc , efg ; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides $ailm$, $mnod$, & $eprs$, $stuh$, aequales inter se & similes toti & in duo prismata aequalia $ibklmn$, $cklmno$, & $psqrst$, $gqrstu$, ac eodem modo divisa sit utraq; pyramidum $ailm$, $mnod$ & $eprs$, $stuh$, quae ex superiore divisione natae sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis $abcd$ basis abc , ad alterius pyramidis $efgh$ basin efg ; ita & omnia, quae in una pyramide prismata ad omnia, quae in altera pyramide prismata multitudine aequalia.

Con-



Constructio cum prece-
dente coincidit. Cum ergo
sit, ut $b c a d c k i a f g a d$
gr. Quia utraq, $b c$ &

44. VL

$f g$ linea est bisariam secta: a . Sint autem $a b c$,
 $l k c$: itemq, $e f g$ & $r q g$ similia, similiterq, po-
sita; β erit, ut $a b c$, ad $l k c$, ita $e f g$ ad $r q g$.

42. VL

75. VL

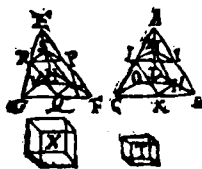
Ex permutando, ut $a b c a d e f g$, ita $l k c a d r q g$.
Sed ut $l k c a d r q g$, ita est prisma $c k l m n o$,
ad prisma $g q r s t u$, ita etiam prisma $i b k l m n$,
ad prisma $p f q r s t$, tanquam illis equalia. Et ut
unum prisma $i b k l m n$, ad unum prisma $p f q$
 $r s t$: ita sunt duo prismata $i b k l m n$, $c k l$
 $m n o$, ad duo prismata $p f q r s t$, $g k r s t u$. E-
runt igitur, duo prismata in pyramide $a b c d$, ad
duo prismata in pyramide $e f g h$, ut basis $a b c d$,
ad basin $e f g h$. Eodem modo, demonstratur, ita
esse duo prismata in pyramide $a i l m$, $m n o d$,
factis in pyramide $a b c d$, ad bina prismata in
pyramidibus $e p r s$, $s t u h$ factis in pyramide
 $e f g h$, ut sunt pyramidum illarum bases $a i l$, &
 $m n o$, ad bases earum $e p r$ & $s t u$. Et sic
porro eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illa
bases, ad bas.: ita est $l k c$, basis, illis equalis, &
similis, ad basin $r q g$, bis similem & equalem, hoc
est, ita est $a b c$ ad $e f g$. Itaq, erunt quoq, pris-
mata cujuslibet pyramidis facta, in pyramide $a b$
 $c d$, ad prismata cujuslibet pyramidis factae in py-
ramide $e f g h$, ut basis $a b c$, ad basin $e f g$.

ut propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis
 $abcd$ ad prismata pyramidis $efgh$; ita prismata
 pyramidis $ailm$, ad prismata pyramidis
 $eprs$, quàm prismata pyramidis $mno d$, ad
 prismata pyramidis $xtuh$: & sic deinceps. Qua-
 re, cum sint, ut duo prismata pyramidis $abcd$,
 ad duo prismata pyramidis $efgh$: ita omnia
 prismata in pyramidibus $abcd$, $ailm$, $mno d$
 simul, ad omnia prismata in pyramidibus $efgh$,
 $eprs$, $xtuh$ simul: si hæc illi multitudines sint æ-
 qualia. Erunt etiam, ut basis abc , ad basin efg ;
 ita omnia prismata in pyramide $abcd$, ad om-
 nia prismata in pyramide $efgh$. Quod erat
 propositum.

PROPŌS: V.

Theorema. 3.

Sub eadem altitudine existentes
 pyramides $abcd$, $efgh$, & triangula-
 res habentes bases abc , efg , inter se
 sunt, ut bases.



Sin minus esto, ut basis
 $abcd$ ad basin efg ; ita
 pyramis $abcd$, ad soli-
 dum x , quod majus vel mi-
 nus est pyramide $efgh$.
 Si primo minus magni-
 tudine y .

3. XII.

dine γ . α Dividatur ergo pyramis $efgh$ in duas pyramides aequales, & duo prismata aequalia. Rursusq; haec factae pyramides in alias duas pyramides & prismata aequalia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide $efgh$, auferatur plusquam dimidium, duo nempe prismata $pqrst$, $gqrscn$, α maiora dimidio pyramidis $efgh$: Itemq; è reliquis pyramidibus $eprs$, $stuh$, plus dimidio, utpote illarum prismata; Et sic deinceps;

1. X.

prehincitur tandem minor magnitudo, magnitudine γ , seu excessu, quo pyramis $efgh$, superat solidum x . Relicta ergo magnitudo jam sit minor.

4. XII.

Cum verò pyramis $efgh$, ponatur aequalis solidum x & γ : Erunt reliqua prismata in pyramide $efgh$, maiora solidum x . Dividatur pyramis $abcd$ in duas pyramides aequales & duo prismata aequalia. Itemq; factae pyramides $ailm$, $mnod$, in binis pyramides aequales, & bina prismata aequalia. Quod toties fiat, quoties in pyramide $efgh$ est factum. γ Quoniam ergo omnia prismata in pyramide $abcd$, ad omnia prismata numero aequalia, in pyramide $efgh$ sunt, ut basis abc , ad basin efg , id est, ut pyramis $abcd$ ad solidum x ; omniaq; prismata in pyramide $abcd$ minora quam pyramis tota $abcd$: & erunt

14. V.

etiam omnia prismata in pyramide $efgh$, minora solidum x ; quae tamen modo ostensa sunt maiora. Minus ergo nequit esse solidum x pyramide $efgh$.

Quod

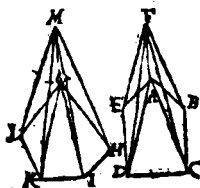
Deinde sit eadem majus. Quoniam ergo ponitur
 pyramis $abcd$, ad solidum x , ut basis abc , ad
 basin efg . Erat convertendo solidam x , ad
 $abcd$, ut efg , ad abc . Ponatur autem so-
 lidum x , ad pyramidem $abcd$, ut $efgh$ pyra-
 mis, ad solidum y . Quoniam ergo solidum x ,
 majus ponitur pyramide $efgh$: & erit & pyra-
 midis $abcd$ major solido y . Quare erit, ut ba-
 sis efg ad basin abc ; ita pyramis $efgh$, ad
 solidum y , quod minus est pyramide $abcd$. Quod
 absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut
 basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide
 minus. Cum ergo pyramis $efgh$ nec minor nec
 major sit solido x , erit ipsi equalis. Erat ergo, 7.V.
 basis abc , ad basin efg , ita pyramis $abcd$,
 ad pyramidem $efgh$, id est ad x . Manifesta et-
 iam hinc est conversa, quod si pyramides trian-
 gulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitu-
 dine. Et quod si pyramides super eadem sive equa-
 libus basibus, ejusdemq; sint altitudinis, etiam sint
 equales.

PROPOSITIO VI

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes
pyramides $abcdef, ghiklm$ & poly-
gonas habentes bases $abcde, ghikl$
inter se sunt ut bases.



Resolatis basibus in trian-
gula numero equalia: erit
qualibet pyramis divisa in
totidem pyramides trian-
gulares. Quia vero est, &
basis abc , ad basim acd ;
ita pyramis $abc f$, ad py-

ramidem $acd f$. Rursusq; ut bases acd , ad ade ,
ita pyramides $acd f$, ad $ade f$. Igitur ex aequo, ut
 $abcd$, ad ade ; ita $abcd f$, ad $ade f$. Et
componendo, ut bases $abcde$, ad ade ; sic pyra-
mides $abcde f$, & $ade f$. Similiter erit, ut ba-
ses $ghikl$, & gkl ; ita pyramides $ghiklm$,
& $gklm$: Et convertendo, ut bases gkl , ghi
 kl , $ghikl$; ita pyramides $gklm$, &
& $ghiklm$. Rursus quoniam est, ut ba-
ses, ade ad gkl ; ita pyramides $ade f$, ad gkl
 lm : erunt quatuor bases, $abcde$, ade , gkl ,
 $ghikl$, cum quatuor pyramidibus $abcde f$, ade
 f , $gklm$, $ghiklm$, in eadem ratione. Erat
ergo ex aequo, ut bases $abcde$ ad $ghikl$; ita py-
ramides $abcde f$ ad $ghiklm$. Quod erat
propositum.

PRO-

LIBER VII. PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma $abedef$, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ aequales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammīs tres diagoni ac , cf , fd , dividentes ea in trian-

gula inter se equalia. Est ergo, ut bases abc , adc aequales; ita pyramides $abcf$, $adcf$ ejusdem altitudinis, quae est perpendicularis ex f demissa in planum $abcd$ a-

equales. Ita etiā aequales sunt pyramides $adfc$, $efdc$, super aequales bases adf , def constituta, sub eadē altitudine, cū perpendiculari à vertice c ad planū adf demissa. Sed pyramis $adcf$, est eadē pyramidi. $adfc$, quippe iisdem contenta planis. Ergitur tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ vel $cdcf$, aequales inter se sunt; & sic prisma $abedef$ in tres aequales pyramides est divisum. Unde patet: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

PROPOS: VIII

Theorema 8.

K k

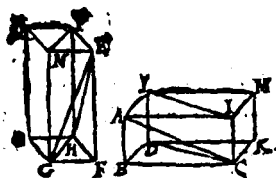
Simile

sunt inter se similia ipsaq; parallelepipeda simi-
lia. Quoniam verò ductis rectis li. p n, Prisma- 79. def. XI,
e a d b c i l a, h f g n p e habent & eandem pro- 15. V,
portionem, quam ipsorum dupla b m & f q. Et
pyramides a b c d, e f g h, eandem quam prisma-
ta dicta earum tripla: habebunt quoq; pyrami-
des eandem proportionem, quam parallelepipeda. 11. V.
Sed cum proportio parallelepipedorū b m, f q sit 33. XL
& triplicata rationis homologorum laterum b c, f g:
erit etiam proportio pyramidum triplicata eorun-
dem laterum b c, f g. Quod ipsum quoq; locum
habet in pyramidibus similibus plurium laterum,
sicut & in prismatibus similibus.

PROPOS. IX.

Theorema 9.

Equalium pyramidum a b c d, e f
g h, & triangulares bases a b c, e f g
habentium, recipiuntur bases &
altitudines; & quarum pyramidum
triangulares bases habentium reci-
procantur bases & altitudines, illa
sunt æquales.



Perficiantur, ut in
precedenti, parallele-
pipeda $b m, f q$, ea-
rundem altitudinum
cum pyramidibus;
connectanturq; recta
li, pn; erunt pri-

mata $d b c i l a, h f g n p e$, tanquam tripla
pyramidum equalium, inter se equalia ipsaq; pa-
rallelepipeda $b m, f q$ prismatum dupla equalis:

• 34. XI.

• 15. V.

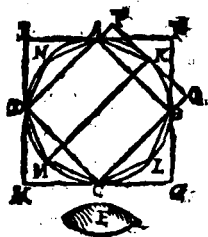
Eorum itaq; bases reciprocantur altitudinibus,
id est, erit, ut basis $b i$, ad basin $f n$: ita altitudo
solidi $f q$, ad altitudinem solidi $b m$. Sed ut sunt
bases $b i$ & $f n$, ita sunt triangula $a b c, e f g$.
Itaq; ut sunt bases $a b c, e f g$; ita sunt altitudi-
nes pyramidum $e f g h$ & $a b c d$. Quippe eadem
cum parallelepipedorum altitudinibus; & sic reci-
procatur bases altitudinibus. Jam sint bases & alti-
tudines reciproca. Erunt etiam pyramides aequa-
les. Constructa figura ut prius, cum sit, ut $a b c$
ad $e f g$; ita parallelogrammū $b i$, ad $f n$. Sintq; e-
adem altitudines parallelepipedorum & pyrami-
dum; erunt etiam bases & altitudines parallelep-
pedorum reciproca; Et sic equalia $b m, f q$.
Quare & ipsorum dimidia prismata, & horum par-
tes tertie pyramides, sunt aequales. Quod ipsa
de reliquis non triangularibus pyramidibus & pri-
matis quibuscunq; potest ostendi.

PRO

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin $abcd$, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus conici triplus, erit vel major vel minor triplo conici. Sit ergo major magnitudine c . & sic equalis triplo conici & magnitudini c simul. Circulo seu basi utriusque inscribatur quadratum

$abcd$, & circa eundem quadratum $efgh$ i superque quadrata intelligantur sub altitudine conici & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum $abcd$ = dimidium est quadrati $efgh$ q. 17. p. 32. XI. hi ; & estq; ut basis ad basin: ita parallelepipedum, ad parallelepipedum ejusdem altitudinis. Erit etiam unum alterius duplum. Et minus super basi $abcd$, majus dimidio cylindri. Iam secantur peripheriæ ab , bc , cd , da , bisariam in punctis k , l , m , n : coniunganturq; rectæ ka , kb , lb , lc , mc , md , nd , na , & per k agatur tangens op parallela q. 27. III. ipsi ab , occurrens rectis da , cb productis in punctis q , p : & super akb ; $abop$, intelligantur prif-

Kk 3

mata



Constructio cum praecedente coincidet. Cum ergo sit, ut bc ad ck ita fg ad gr . Quia utraq; bc &

44. VL

fg linea est bisariam secta: $\therefore$ Sint autem abc , lkc : itemq; efg & rqr similia, similiterq; posita; $\therefore$ erit, ut abc , ad lkc , ita efg ad rqr .

45. VL

75. VL

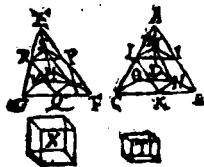
Ex permutando, ut abc ad efg , ita lkc ad rqr . Sed ut lkc ad rqr , ita est prisma $cklmno$, ad prisma $gqrst$, ita etiam prisma $ibklmn$, ad prisma $pqrst$, tanquam illis equalia. Et ut unum prisma $ibklmn$, ad unum prisma $pqrst$: ita sunt duo prismata $ibklmn$, $cklmno$, ad duo prismata $pqrst$, $gkrtu$. Erunt igitur, duo prismata in pyramide $abcd$, ad duo prismata in pyramide $efgh$, ut basis abc , ad basin efg . Eodem modo, demonstratur, ita esse duo prismata in pyramide $ailm$, mno , ad binas prismata in pyramidibus $eprs$, $stuh$ factis in pyramide $efgh$, ut sunt pyramidum illarum bases ail , & mno , ad bases earum ep & st . Et sic porro eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illae bases, ad bas.: ita est lkc , basis, illis equalis, & similis, ad basin rqr , huiusmodi & equalis, hoc est, ita est abc ad efg . Itaq; erunt quoq; prismata cujuscunque pyramidis factae, in pyramide $abcd$, ad prismata cujuscunque pyramidis factae in pyramide $efgh$, ut basis abc , ad basin efg :

ut propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis
 $abcd$ ad prismata pyramidis $efgh$; ita prismata
 pyramidis $ailm$, ad prismata pyramidis
 $eprs$, quàm prismata pyramidis $mno d$, ad
 prismata pyramidis $stuh$: & sic deinceps. Qua-
 re, cum sint, ut duo prismata pyramidis $abcd$,
 ad duo prismata pyramidis $efgh$: ita omnia
 prismata in pyramidibus $abcd$, $ailm$, $mno d$
 simul, ad omnia prismata in pyramidibus $efgh$,
 $eprs$, $stuh$ simul: si hæc illis multitudines sint æ-
 qualia. Erunt etiam, ut basis abc , ad basin efg ;
 ita omnia prismata in pyramide $abcd$, ad om-
 nia prismata in pyramide $efgh$. Quod erat
 propositum.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Sub eadem altitudine existentes
 pyramides $abcd$, $efgh$, & triangula-
 res habentes bases abc , efg , inter se
 sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut basis
 abc ad basin efg ; ita
 pyramis $abcd$, ad soli-
 dum x , quod minus vel mi-
 nus est pyramide $efgh$.
 Sic primo minus magni-
 tudine y .

3. XII.

dine γ . α Dividatur ergo pyramis $e f g h$ in duas pyramides aequales, & duo prismata equalia. Rursusq; ha factae pyramides in alias duas pyramides & prismata equalia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide $e f g h$, auferatur pbd quam dimidium, duo nempe prismata $p f q r s t$, $g q r s c n$, α maiora dimidio pyramidis $e f g h$: Itemq; e reliquis pyramidibus $e p r s$, $s t u h$, pum dimidio, utpote illarum prismata; Et sic deinceps;

1. X.

prelinquitur tandem minor magnitudo magnitudine γ , seu excessu, quo pyramis $e f g h$, superat solidum x . Relicta ergo magnitudo jam sit minor. Cum vero pyramis $e f g h$, ponatur equalis solidum x & γ : erunt reliqua prismata in pyramide $e f g h$, maiora solidum x . Dividatur pyramis $a b c d$ in duas pyramides aequales & duo prismata equalia. Itemq; factae pyramides $a i l m$, $m n o d$, in binis pyramides aequales, & bina prismata equalia.

4. XII.

Quod toties fiat, quoties in pyramide $e f g h$ est factum. γ Quoniam ergo omnia prismata in pyramide $a b c d$, ad omnia prismata numero equalia, in pyramide $e f g h$ sunt, ut basis $a b c$, ad basin $e f g$, id est, ut pyramis $a b c d$, ad solidum x ; omniaq; prismata in pyramide $a b c d$ minora quam pyramis tota $a b c d$: & erunt

14. V.

etiam omnia prismata in pyramide $e f g h$, minora solidum x ; quae tamen modo ostensa sunt in $e g o r$. Minus ergo nequit esse solidum x pyramidis $e f g h$.

Quod

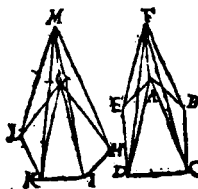
Deinde sit eadem majus. Quoniam ergo ponitur pyramis $a b c d$, ad solidum x , ut basis $a b c$, ad basin $e f g$. Erit convertendo solidum x , ad $a b c d$, ut $e f g$, ad $a b c$. Ponatur autem solidum x , ad pyramidem $a b c d$, ut $e f g h$ pyramis, ad solidum y . Quoniam ergo solidum x , majus ponitur pyramide $e f g h$: & erit & pyramidis $a b c d$ major solido y . Quare erit, ut basis $e f g$ ad basin $a b c$; ita pyramis $e f g h$, ad solidum y , quod minus est pyramide $a b c d$. Quod absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Cum ergo pyramis $e f g h$ nec minor nec major sit solido x , erit ipsi equalis. Erit ergo, 7.V.
 basis $a b c$, ad basin $e f g$, ita pyramis $a b c d$, ad pyramidem $e f g h$, id est ad x . Manifesta etiam hinc est conversa, quod si pyramides triangulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitudine. Et quod si pyramides super eadem sive equalibus basibus, ejusdemque sine altitudinis, etiam sint equales.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes
pyramides $abcdef, ghiklm$ & poly-
gonas habentes bases $abcde, ghikl$,
inter se sunt ut bases.



Resolutis basibus in trian-
gula numero aequalia: erit
qualibet pyramis divisa in
totidem pyramides trian-
gulares. Quia vero est, ut
basis abc , ad basin acd ;
ita pyramis abc , ad py-

5. XL, ramidem acd . Rursus, ut bases acd , ad
ita pyramides acd , ad ef . Igitur ex aequo, ut
 abc , ad ade ; ita $abcd$, ad $aedf$. Et
componendo, ut bases $abcde$, ad ade ; sic pyra-
mides $abcdef$, & $aedf$. Similiter erit, ut ba-
ses $ghikl$, & gkl ; ita pyramides $ghiklm$,
& $gklm$: Et convertendo, ut bases gkl , ghi
 kl , $ghikl$; ita pyramides $gklm$, &
& $ghiklm$. Rursus quoniam est, ut ba-
ses ade , ad gkl ; ita pyramides $aedf$, ad $gklm$:
erunt quatuor bases, $abcde$, ade , gkl ,
 $ghikl$, cum quatuor pyramidibus $abcdef$, ad
 ef , $gklm$, $ghiklm$, in eadem ratione. Erunt
ergo ex aequo, ut bases $abcde$ ad $ghikl$; ita py-
ramides $abcdef$ ad $ghiklm$. Quod erat
propositum.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma $abedef$, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ aequales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagoni ac , cf , fd , = dividentes ea in trian-

gula inter se equalia. Est ergo,

ut bases abc , adc = aequales; ita pyramides $abcf$, $adcf$ ejusdem altitudinis, quae est perpendicularis ex f demissa in planum $abcd$ = aequales. Ita etiam aequales sunt pyramides $adcf$, $efdc$, super aequales bases adf , def constitutae, sub eadem altitudine, seu perpendiculari a vertice c ad planum adf demissa. Sed pyramis $adcf$, est eadem pyramidi. $adfc$, quippe ejusdem contenta planis. Igitur tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ vel $cdef$, aequales inter se sunt; & sic prisma $abedef$ in tres aequales pyramides est divisum. Unde patet: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

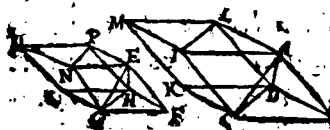
PROPOS: VIII

Theorema 8.

K k

Similes

Similes pyramides $abc d, efg h$,
quæ triangulares habent bases abc ,
 efg ; in triplicata sunt homologorum
lateralum bc, fg , ratione.



Extendantur
plana triangu-
lorum abc, e
 $ad b, da b$, per-
ficianturq; pa-

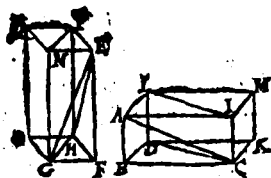
rallelogramma bi, bk, bl : & ducantur rectæ
ipsis ai, al æquales & parallele lm, im : conne-
ctaturq; km , ut parallelepipedum completum sit
 $b m$ ejusdem altitudinis cum pyramide, ut paralle-
la plana a ostendunt. Eodemq; modo perficiatur
parallelepipedum $f q$. Quoniam igitur propter simili-
tudinem pyramidum & anguli abc, efg sunt æ-
quales; estq; ut $a b ad b c$, ita $e f ad f g$; erunt
parallelogramma bi, fn similia: ita, cum anguli
 abd, efh sint æquales; & sit, ut $a b ad b d$, ita
 $e f ad h f$; ite anguli $d b c, h f g$ æquales, & sit
 $d b ad b c$, ita $h f ad f g$; erunt & parallelogram-
ma bl, bk parallelogrammis fp, fo similia. Sed
tam tria bi, bk, bl , parallelepipedum $b m$, reli-
quis tribus oppositis dm, am, cm ; quam tria
 fn, fo, ep , parallelepipedum $f q$, reliquis oppo-
sitis tribus hq, fq, gq , sunt æqualia & similia:
adeoq; sex plana parallelepipedorum $b m$, & $f q$

sunt inter se similia ipsaq; parallelepipeda simi-
 lia v. Quoniam verò ductis rectis li. p n, Prisma 7 9. def. XI.
 ea d b c i l a, h f g n p e habent & eandem pro- 15. V,
 portionem, quam ipsorum dupla b m & f q. Et
 pyramides a b c d, e f g h, eandem quam prisma-
 ta dicta earum tripla: habebunt quoq; pyrami-
 des eandem proportionem, quam parallelepipeda. 11. V.
 Sed cum proportio parallelepipedorū h m, f q sit 33. XI,
 triplicata rationis homologorum laterum b c, f g:
 erit etiam proportio pyramidum triplicata eorun-
 dem laterum b c, f g. Quod ipsum quoq; locutus
 habet in pyramidibus similibus pluriū laterum,
 sicut & in prismatibus similibus.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Equalium pyramidum a b c d, e f
 g h, & triangulares bases a b c, e f g
 habentium, reciprocantur bases &
 altitudines; & quarum pyramidum
 triangulares bases habentium reci-
 procantur bases & altitudines, illae
 sunt æquales.



Perficiantur, ut in
precedenti, parallele-
pipeda $b m, f q$, ean-
rundem altitudinum
cum pyramidibus;
connectanturq; recte
li, $p n$; erunt pri-
mata $d b c i l a, h f g n p e$, tanquam tripla
pyramidum equalium, inter se equalia ipsaq; pa-
rallelepipeda $b m, f q$ prismaticum dupla equalia:

• 34. XI.

• 15. V.

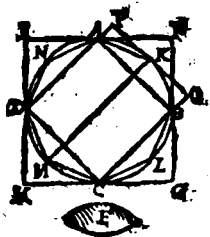
• Eorum itaq; bases recipiuntur altitudinibus,
id est, erit, ut basis $b i$, ad basin $f n$: ita altitudo
solidi $f q$, ad altitudinem solidi $b m$. & Sed ut sunt
bases $b i$ & $f n$, ita sunt triangula $a b c, e f g$.
Itaq; ut sunt bases $a b c, e f g$; ita sunt altitudi-
nes pyramidum $e f g h$ & $a b c d$. Quippe eadem
cum parallelepipedorum altitudinibus; & sic reci-
procatur bases altitudinibus. Iam sint bases & alti-
tudines reciproca. Erunt etiam pyramides equal-
es. Constructa figura ut prius, cum sit, ut $a b c$
ad $e f g$; ita parallelogrammū $b i$, ad $f n$. Sinq; e-
adem altitudines parallelepipedorum & pyrami-
dum; erunt etiam bases & altitudines parallelepi-
pedorum reciproca; Et sic = equalia $b m, f q$.
Quare & ipsorum dimidia prismata, & horum par-
tes tertie pyramides, sunt equalis. Quod ipsum
de reliquis non triangularibus pyramidibus & pri-
matis quibuscunq; potest ostendi.

PRO

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin $abcd$, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus cono triplus, erit vel major vel minor triplo cono. Sit ergo major magnitudine c . & sic equalis triplo cono & magnitudini c simul. Circulo seu basi utriusque inscribatur quadratum

$abcd$, & circa eundem quadratum $efgh$, super qua quadrata intelligantur sub altitudine cono & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum $abcd$, dimidium est quadrati $efgh$, ut basis ad basin: ita parallelepipedum, ad parallelepipedum ejusdem altitudinis. Erit etiam unum, alterius duplum. Et minus super basi $abcd$, majus dimidio cylindri. Iam secantur peripheriæ ab , bc , cd , da , bisariam in punctis k , l , m , n : conjunganturque rectæ ka , kb , lb , lc , mc , md , nd , na , & per k agatur tangens op , & parallela ipsi ab , occurrens rectis da , cb productis in punctis q , p : & super akb , $abop$, intelligantur pris-

4. I. *Smata aque alta conq. vel cylindro. Quoniam ergo*
 $a k b$ *est dimidium* $a b o p$, *erit & illius pri-*
 7. XII. *isma huius, dimidium.* Eritq. prima basis
 $a k b$ *maius, quam dimidium segmenti cylindri,*
cujus basis continetur linea $a b$, *& arcu* $a k b$.
Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum est.
Erunq. omnia prismata quatuor triangularum si-
mul majora dimidio, omnium segmentorum cylan-
dri simul. Idemq. sequeretur, si periphæria ha-
iterum bisariam secarentur, & fierent alia trian-
gula &c. Si ergo à cylindro, cuius basis est circulus
 $a b c d$, *auferatur plus, quam dimidium, de paral-*
lelepipedum basis $a b c d$, *& à reliquis segmentis*
plus, quam dimidium, nimirum prismata basium
 $a k b$, $b l c$. *Et sic fiat ulterius deductio: & relin-*
 per 1. X. *quitur tandem minor magnitudo, quam* c , *exces-*
sus cylindri supra triplū coni. Sint jã segmenta cy-
lindri relicta basium $a k$, $k b$, $b l$ *simul, sumpta*
minora, quam c . Cùm ergo cylindrus ponatur e-
qualis triplō coni & magnitudini c *simul, ablata*
segmentis illis ex cylindro & ex triplō coni una cum
magnitudine c , *ipsa* c , *que major est dictis segmen-*
tis erit reliquum prima basis multangula $a k h l$,
 $c m d n$, *eiusdem altitudinis cum cono & cylindro*
maius quam reliquum triplū coni. Erit itaq. totum
minor tertia parte Prismatis seu Pyramide, cuius
eadem ipso cū est basis & altitudo, totum parte mi-
nus, quod absurdum. Non ergo maior est cylindrus
triplō coni.

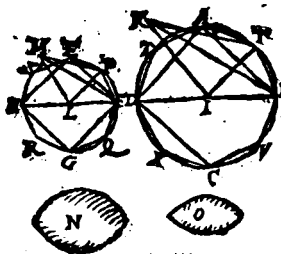
Si diminer, & sic conus major tertia parte cylindri
 magnitudinis e, ut conus sit equalis tertia parti
 cylindri, & magnitudini e simul. Constructio huius
 Pyramidis super a dimidia basi a b c d descripta erit
 dimidia pyramidis super f g h i. Majorque
 pyramis super a b c d, coni super a b c d 6. XII
 circulo descripti dimidio. Rursus jam, ut antea,
 divisu peripheriu, & completis triangulis, pyra-
 mis super a k b major est dimidio segmenti coni a-
 que alii, super basi linea a b & peripharia a k b
 contenta. Quod ipsum de reliquorum triangulorum
 pyramidibus, & segmentorum conis dimidijs verum
 est. Quae omnes pyramides simul majores sunt quam
 dimidia omnium segmentorum coni simul. Idem
 sequeretur, si peripharia haec rursus secaretur bis-
 riam. Si jam ex cono super circulo a b c d facto
 auferatur pyramis dimidio major, cujus basis a b c d
 aequale alii: relinquitur minus dimidio, & a reliquis
 segmentis iterum plus dimidio, ut pyramides super
 a k b, b l c, c m d &c. Et sic ulterius fiat detra-
 ctio, & relinquitur tandem minor magnitudo quam
 e; excessu coni supra tertiam partem cylindri. Sint
 jam segmenta coni relicta a k, k b, b l simul
 summa minora quam e. Cum igitur Conus po-
 natu equalis cylindri parti tertia, & magnitu-
 dini e simul; Si ex cono detrahatur segmenta pra-
 dicta, & ex tertia parte una cum magnitudi-
 ne e, quam major est praefatis coni segmentis

erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum $akbl$ & $emdn$, ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, major tertia parte cylindri reliqua. Et sic triplum pyramidis majus cylindro. Proinde cum prima ejusdem basis cum pyramide, & altitudinis cum cono & cylindro, triplum sit pyramidis; erit prismam majus cylindro, pars toto. Non ergo cylindrum est minor triplo coni. Sed neq; major, ut antea patet. Ergo equalis. Et sic conus quilibet cujuslibet cylindri aequi alti, & ejusdem basis, est pars tertia. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

Theorema II.

Sub eadem ik, lm , altitudine existentes coni & cylindri inter se sunt ut bases, $abcd, efgh$.



Sin minus, esto, ut basis $abcd$, ad basin $efgh$, sic Communis super $abcd$, ad aliam magnitudinem n , qua vel minor vel major est cono $efghm$. Sic ergo minor.

minor magnitudine O , ut conus sit equalis ipsis n & O simul. Inscripto quadrato $efgh$ in circulum,
 secantur quadrantes bisariam in p, q, r, s , quæ puncta
 connectantur cum e, f, g, h . Quoniam ergo, si
 ex cono $efgh$ m detrahasur pyramis, super basim
 $efgh$ ejusdem altitudinis, & à reliquis segmen-
 tis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basi-
 um epf, fqq ; eodemq; modo semper fiat, detra-
 ctio, semperq; plus dimidio subtrahatur, ut in
 precedenti propositione; & relinquitur tandem mi-
 nor magnitudo quam O , excessus coni $efgh$ m
 super n . Sint ergo relicta segmenta basium coni ep ,
 pf, fq simul sumpta minora quam O . Cum igitur
 Conus $efgh$ m ponatur equalis ipsis n & O
 simul; si ex cono detraherentur dicta ipsius segmen-
 ta, sed ex n O simul ipsa O major dictis segmentis
 simul, erit reliqua pyramis cujus basis est polygonum
 $epfqghs$ ejusdem altitudinis cum Cono, major
 quam n . Huic ergo polygono simile inscribatur ex-
 jam circulo, $abcd$, ut in secunda propositione est
 factum, & ducantur diametri bd, fh . Quoniam
 ergo est, ut circulus $abcd$, ad circulum $efgh$; ita
 polygonum $arbuexdy$, ad polygonum $epfq$
 $grhs$. Sed ut est circulus, ad circulum; ita poni-
 tur conus $abcdk$, ad magnitudinem n ; & ut
 polygonum ad polygonum: ita est pyramis ad py-
 ramidem ejusdem altitudinis cū Conis. Erit etiam
 pyramis ad pyramidem, ut conus $abcdk$ ad
 Kk 5. n. Cūq;

1. XL

2. XII.

3. 6. XII.

n. Cumq; Conus $abcdk$ sit major pyramide a
 $t, bucx dyk$; δ erit ϵ n major pyramide $c p$
 $f qgr hsm$: quæ tamen modo ostensa est minor.
 Quod absurdum. Non ergo minor est n, quam co-
 nus $efgh m$. Hinc ponatur major magnitudo n co-
 nus $efgh m$. Cum sit, ut circuli, $abcd$, ad ef
 gh ; ita conus $abcdk$ ad n: etiam convertendo
 erit, ut circuli $efgh$, ad $abcd$; ita n ad conum
 $abcdk$. Iam ponatur: ut n ad Conum abc
 dk ; ita conus $efgh m$ ad o: Et quia n
 major ponitur cono $efgh m$; δ erit conus $abcd$
 k major, quam o. Quare erit, ut circuli; $efgh$,
 ad $abcd$: ita conus $efgh m$, ad magnitudinem
 q, quæ minor cono $abcdk$ est. Quod absurdum,
 quia ostensum modo est, non posse esse conum ad
 magnitudinem minorem alio cono, ut basis est hu-
 jus con, ad basin illius con. Itaq; n non est ma-
 jor $efgh m$: ac proinde aequalis. Quare cum sit,
 ut circuli $abcd$, ad $efgh$: ita conus $abcdk$
 ad n, id est: ad conum $efgh m$: erit, ut basis ad
 basin, ita conus ad conum, si sint æquæ alti. Cumq;
 super η sde basibus æquæ alti cylindri cum conis sine
 ζ eorum tripli. α Erit etiam, ut basis ad basin,
 ita cylindrus ad cylindrum, si sint æquæ alti.

17. V.

§ 19. XII.

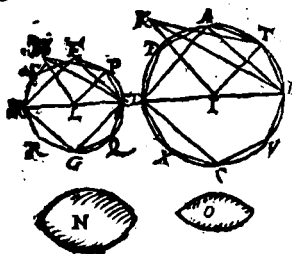
119. V.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in tripli-
cata ratione sunt diametrorum bd ,
 fh , quæ in basibus $abcd$, $efgh$.



Sin minus, habe-
at conus $abcdk$,
ad aliquam magni-
tudinem n , tripli-
catam rationem di-
ametrorum, bd ,
 fh ; erit ergo n vel
minor vel major
cono $efghm$. Proxi-

mus sit n minor, cono $efghm$, magnitudine o ;
adhibitaq; præcedentis constructione, erit rursus
pyramis $epfggrhsm$, major quam n . Iam du-
cantur kb , kt , mf , mp , ut fiant triangu-
 l
la bkt , fmp ; connectanturq; ti , pl . Quoniam
igitur Coni $abcdk$, $efghm$ ponuntur similes;

erit, ut diameter bd , ad diametrum fh : s; vel, ^{24. defin.}
ut semidiameter bi ad semidiametrum fl , ita a- ^{XI.}
xis ik , ad axem ml . Cumq; anguli bik , flm ^{8. 15. V.}
sint γ recti, quod & coniponantur recti; & ipsorum δ ^{3. def. XI.}
axes ad bases recti: δ erunt triangu- ^{6. VI.}
la bik , flm ^{4. VI.}
equiangula: adeoq; ut kb ad bi , ita mf ad fl . ^{4. I.}
Sed ut bi ad bt , ita fl ad fb , ob similitudinem δ ^{7. V.}
triangulorum bit , flp . (quia anguli bit , flp ,
similibus arcubus insistentes sunt æquales, cir-
cumq; ipsos latera proportionalia.)

Itaq;

Itaq; ex aquo, ut $k b$ ad $p t$, ita $m f$ ad $f p$. Rati-
 sit, quia latera $k i$, $i b$, trianguli $k i b$, equalia
 sunt lateribus $k i$, $i t$, trianguli $k i t$, & anguli
 ipsi, comprehensi recti γ . Erunt bases $k b$, $k t$, e-
 quales. Eodemq; modo equalis erunt recta $m f$,
 $m p$, atq; sic recta $k b$, $k t$, rectis $m f$, $m p$ pro-
 portionales: Quia verò, ut $k b$, ad $b t$; ita $k t$, ad
 eandem $b t$: item, ut $m f$ ad $f p$, ita $m p$, ad ean-
 dem $f p$. Erat autem ut $k b$ ad $b t$; ita $m f$ ad $f r$;
 erit quoq; ut $k t$, ad $b t$, ita $m p$ ad $f b$: & con-
 vertendo, ut $b t$ ad $t k$, ita $f p$ ad $p m$. Quare cum
 sit ut $t k$ ad $k b$, ita $p m$ ad $f m$; Et ut $k b$ ad $b t$;
 ita $m f$ ad $f p$. Et, ut $b t$ ad $t k$, ita $f p$ ad $p m$;
 habebunt triangula $b k t$, $f m p$, latera propor-
 tionalia: Eruntq; & equiangula & similia. Neq;
 aliter reliqua triangula pyramides $a t b u c x d y k$,
 & $e p f q g r h s m$, ambientia inter se similia ostē-
 dentur. Cumq; multitudine sint equalia, erunt
 dicta pyramides & similes & in triplicata propor-
 tione homologorum laterum. Ut autem $b t$ ad $f p$,
 ita est $b i$ ad $f l$, ob similitudinem triangulorū $b i t$,
 $f l p$: & Et ut $b i$ ad $f l$, ita $b d$ ad $f h$. Igitur py-
 ramis $a t b u c x d y k$ habebit quoq; proportionem
 triplicatam diametrorum $b d$, $f h$. Sed earundem
 diametrorum proportionem triplicatā habebat Co-
 mus $a b c d k a d n$: Erit igitur, ut pyramis $a t b u$
 $c x d y k$ ad pyramidem $e p f q g r h s m$; ita
 comus $a b c d k a d n$. Cum igitur pyramis prior sit

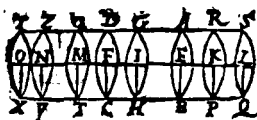
minor Cono $abcdk$, pars toto: erit etiam pō-
 sterior minor magnitudine n , qua tamen modo o-
 stensa est maior. Quod absurdum. Non ergo minor
 est magnitudo n , Cono $efgh m$. Iam sit n major
 cono $efgh m$. Cum ergo Conus $abcdk$, habeat
 proportionem triplicatam diametri bd ad dia-
 metrum fh , Sicut & pyramis $atbucxdyk$ ad
 pyramidem $epfqgrhs m$: erit, ut conus abc
 $d k$ ad n , ita pyramis ad pyramidem: & conver-
 tendo, ut n ad conum $abcdk$, ita pyramis epf
 $qgrhs m$ ad pyramidem $atbucxdyk$. Quare
 cum pyramides illa habeant rationem triplicatam
 homologorum laterum pf ad tb , id est, diametri
 fh , ad db , habebit etiam n ad conum $abcdk$
 rationem triplicatam diametri fh ad bd . Pon-
 tur ergo ut n ad conum $abcdk$: ita conus efg
 $h m$, ad o . Erit etiam inter hac ratio triplica-
 ta diametrorum fh ad bd . Cum autem n ponat-
 ur major cono $efgh m$: Δ erit & conus $abcd$
 k major quam o . Itaq, conus $efgh m$ ad o mi-
 norem cono $abcdk$, proportionem habet tri-
 plicatam diametrorum fh ad bd . Quod absur-
 dum: quia ostensum est modo non posse Conum ad
 magnitudinem alio cono minorem; proportionem
 habere triplicatam diametrorum baseos. Itaq, nec
 major est n , quam conus $efgh m$ sed sunt aequales.
 Idcoq, conus $abcdk$, ad n & μ conum $efgh m$, ν 7. V.
 habet rationem triplicatam diametrorum fh ad
 bd . Et

b d. Et quia eorundem conorum cylindri sunt tripli, & habebunt ipsi quoque eandem rationem triplicatam diametrorum basium fh ad b d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si Cylindrus $abcd$, plano gh , sectetur, adversis planis ab, cd , parallelo: Erit ut cylindrus, $abhg$, ad cylindrum, $ghcd$; ita axis, ci , ad axem if .



Intelligatur enim Cylindrus $abcd$ triq; protractus, una cum axe & rectangulo cg , ex cuius

revolutione est genitus. Sumanturq; in axe producto rectae ck, kl , aequales ipsi cl : & aliae fm, mn, no , aequales ipsi if , & per puncta, i, k, l, m, n, o , ducantur rectae ih, kp, lq, mt, nu, ox aequales & parallelae ipsis eb, fc ; quae ad revolutionem rectanguli describent circulos gh, pr, qs, ta, uz, xy , parallelos & aequales circulo ab, cd : erunt ergo $sp, pa, ah, hd, dt, tz, zx$, cylindri, ex definitione, componentes cylindrum totum $sqxy$. Quoniam vero tam cylindri sp, pa, ah , super aequales bases qs, pr, ba , & sub

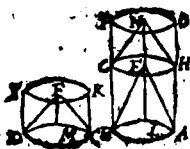
aequalibus

equalibus altitudinibus, kl, ek, ie , sunt & aequales;
 quant cylindri xz, zt, cd, dh , sub aequales bases
 xy, uz, ta, cd , & sub altitudinibus aequalibus
 no, mn, fm, if . Erit tam multiplex cylin- XII.
 drus xg cylindri c g , quam multiplex est a- p. 7. def. V.
 xis io , ipsius if : Et tam multiplex cylin-
 drus sh cylindri ah , quam multiplex axis il ipfi-
 mie. Si ergo axes il & io sunt aequales: &
 aequales etiam sunt cylindri sh & xg ; si vero axis
 axe est major, etiam cylindrus cylindro major est;
 & si minor, minor, in quacunque multiplicatione. E-
 rit igitur axis ie , ad axem if , ut cylindrus ah , ad
 cylindrum gh .

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super aequalibus basibus ab, cd, e -
 xistentes, conii abc, cdf , & cylindri
 $abgh, cdik$, inter se sunt ut altitudi-
 nes le, mf .



Extensio cylindri $abgh$,
 ad partes gh , una cum
 axe le , & rectangulo
 ag ; abscindatur axi mf ,
 aequalis en , ut n sit
 centrum circuli, aequa-
 lis & parallelus ipsi gh :

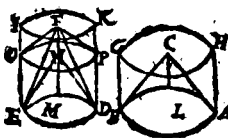
- a 11. XII. *Et fiat cylindrus $ghop$ ejusdem altitudinis cum
 c 7. V. cylindro $c di k$, qui & inter se sunt aequales =: ad
 y 13. XII. quos cylindrus ag habet eandem rationem. Est
 d 10. XII. & autem cylindrus ag ad cylindrum $a p$, ut axis
 e 15. V. vel altitudo lc , ad axem vel altitudinem en , id
 est, ad $m f$ huius aequalem. Igitur & cylindri ag ,
 ci sunt ut altitudines lc , $m f$. Cumq; conus abe ,
 $cd f$ sint partes tertiae cylindrorum, erunt et-
 iam coni hi, ut altitudines lc ad $m f$.*

PROPOS. XV.

Theorema 13.

Aequalium conorum abc , def , &
 cylindrorum $abgh$, $deik$, recipro-
 cantur bases ab , de , & altitudines lc ,
 $m f$: & quorum conorum & cylin-
 drorum reciprocantur bases & alti-
 tudines illi sunt aequales.

a 11. XII.



In cylindris enim si al-
 titudines lc , $m f$ sint
 aequales =, erunt &
 bases aequales: Eritq;
 ut bases ab ad de , i-
 ta altitudines aequales $m f$ ad lc , id est, bases re-
 ciprocantur altitudinibus reciproca. Si vero altitudines
 lc ,

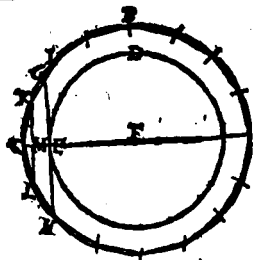
$ic, m f$, sint inaequales; abscondatur ex $m f, m n$
 equalis. $apfi bc$, & cent. o n describatur planum i-
 pfi basi dc equale & parall. lum, ut fiant duo cy-
 lindri do, ok . Quoniam ergo aequales ponuntur
 cylindri ag, di , & habebunt ad eundem cylindrum 7. V.
 do , eandem rationem. Sunt autem cylindri 4. XL
 ag, do , ut bases ab, dc , propter aequales altitu-
 dines; & cylindri di, do , ut altitudines mf &
 mn propter identitatem & basis & cylindri. Erit
 ergo ut bases ab ad dc ; ita altitudines mf ad
 mn , vel huic equalis ml cuius est, bases & altitu-
 dines sunt reciproca. In conis, si ponantur aequales,
 abc, def ; erunt & eorum cylindri ah, di . quo- 10. XII.
 rum sunt partes & tertiae, aequales. Et quia horum
 bases & altitudines reciprocantur. Ergo & cono-
 rum. Si verò ponantur bases & altitudines reci-
 procae, etiam conis & cylindri erunt aequales. In cy-
 lindro ergo ag, di , si altitudines ic, mf sint a-
 quales, cum bases ab, dc sint, ut altitudines: e-
 runt & ipse & toti cylindri aequales: si verò altitudi-
 nes sint inaequales, cū ponantur altitudines mf ad
 ic , id est, mn ut bases ad ad dc : = Sintq; bases
 ab ad dc ut cylindri ag ad do , propter altitudi-
 nes aequales, & ut altitudines mf , ad mn , ita
 cylindri di ad do propter identitatem basis dc .
 Erunt cylindri ag, di in eadem ratione, ad cylin- 9. V.
 drum do , & sic aequales. In conis verò reciproci po-
 suntur basibus, & altitudinibus; ipsorum quoq; tri-
 pli

pli cylindri reciprocantur propter easdem bases, & altitudines reciprocas, ex quibus cum cylindri concludantur aequales, aequales etiam erunt ipsorum partes tertiae vel coni.

PROPOS: XVI

Problema 1.

Duobus circulis abc , de , circa idem centrum f existentibus, in maiori circulo abc , polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum de .



Extendatur per f centrum diameter ac , qui secet circulum de in e , per quod a punctum ducatur perpendicularis ipsi ac , quæ e tangens erit circuli de . Quoniam arcus agc maior est

• 13. III.

• 1. X.

arcu gc subtracto dimidio ab & ex residuo bc , dimidio bi , & ex residuo ic dimidio ik , prælatquitur ck minor quam gc : eritq; ck subtenſa ipsi ck arcui latus polygoni inscribendi. Si enim arcus bi in partes numero & magnitudine aequales ipsius ci dividatur, & quadratis ab in aequales partes

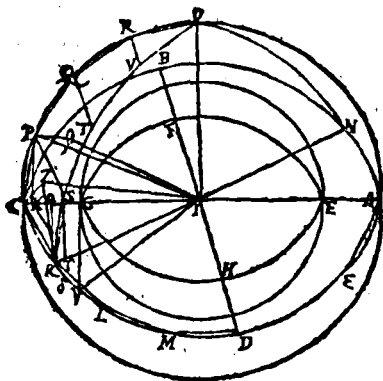
libus $b c$ quadrantis, & $a h c$ semicirculus in aqua-
 les semicirculi $a b c$ partibus, quibus arcubus sub-
 tensa linea omnes erunt & aequales recta $c k$: & sic
 polygonum aequilaterum erit perfectum, quod mi-
 norem circulum $d e$ non tangit. Demissa per-
 pendiculari $k l$ per k in $a c$, quam secat in m . Quo-
 niam anguli $g e m$, $k m e$ sunt recti: d erant $g h$, $d 28. I$
 $k l$, parallela. Quare cum $g h$ tangat circulum
 $g e$ in e erit $k l$ tota extra illum circulum, cumque
 nunquam attinget, quia nunquam cum recta $g h$
 convenire potest. Ideoque multo minus k longius ab
 eodem circulo remota tanget illum circulum. Pro-
 inde nec reliquorum polygoni laterum ullum huius
 $c k$ aequalium, aequaliter quippe a centro f distan-
 tium, circulum $d e$ continget. $d 29. III.$

PROPOS. XVII.

Problema 2.

Duabus sphaeris $a b c d$, $e f g h$, circa
 idem centrum i existentibus, in ma-
 jori sphaera $a b c d$, solidum polycedru
 inscribere, quod non tangat mino-
 res $e f g h$, sphaerae superficiem.

Ambae sphaerae secantur plano aliquo per centrum,
 suntque communes sectiones factae in sphaeris plana $a b$
 $c d$, $e f g h$, quae circuli sunt ex definitione sphaerae,
 idem habentes centrum i cum ipsis sphaeris.
 In his circulis ducantur diametri $a c$, & $b d$
 in centro i ad angulos rectos se secantes,

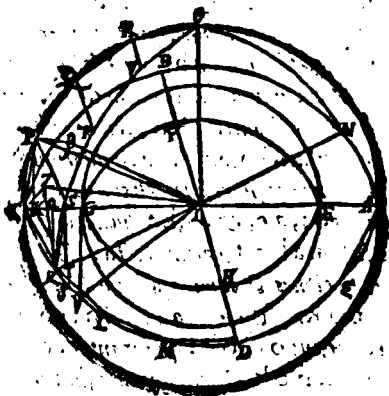


- ut sint quadrantes ab, bc, cd, da . Postea in
 a 16. XII. majori circulo a inscribatur polygonum non tangens
 b cor. 16. minorem, quod pro demonstrationis facilitate ita
 III.
 v 1. IV.
 d 19. I. fiat. Ex g ad e g ducatur perpendicularis $g\gamma$ usq;
 ad circumferentiā circuli $abcd$ quae circulum $efgh$
 tangit in g : cui $g\gamma$ aequalis applicetur ac in circulo
 $abcd$, quia verò si arcui; $c\gamma$ intelligatur sub
 tendi recta, ut fiat triangulum $g c \gamma$, est $c\gamma$ la
 tus majori seu recto angulo oppositum majus latere
 $g\gamma$, erit & ipso ac . Abscindatur ergò cd arcus a
 qualis ipsi ac , si jam ex quadrante cd auferatur
 dimidium dl & ex reliquo cl dimidium lk , & p
 o 18. III,
 q 1. X.
 o 19. III. deinceps, relinquetur tandem arcus minor arcui
 cd , seu arcui ac . Sit ergò arcus ck minor arcui
 cd , seu arcui ac . Sit ergò arcus ck minor arcui c

erit etiam ck subtensa minor recta ac , id est. gr .
 & ck erit inscribendi polygoni latus. Nam cum
 recta cd arcum subten dens minorem arcu $c\gamma$, non
 tangat circulum $efgh$; multo minus ck arcum
 cd minor et subten dens eundem circulum tanget.
 Rursum ducta diametro kn , erigatur ex centro i
 perpendicularis io , ad plana circulorum $abcd$,
 $efgh$, occurrens superficiem sphaerae maioris in o , &
 per rectas ao , ae , & oi , kn ducantur plana, quae
 ad circulum $abcd$ perunt recta; efficiensq; com-
 munes sectiones circulos, quorum semicirculi sunt
 aoc , nok . Quia vero anguli oik , oik sunt
 recti; & erunt oc , ok quadrantes, & quidem
 quia aoc , nok , circuli aequales sunt ipsi $abcd$,
 propter aequales diametros: erunt ipsi cd , oc , ok ,
 aequales quadrantes. Si ergo cl arcus dividatur
 in tot partes, in quot divisus est cl ; & quadrantes
 oc , ok in partes numero & magnitudine a-
 quales arcibus quadrantis cd : erunt illis omnibus
 subtensa recta ck , kl , lm , md ; cp , pq , qr ,
 rs , st , tu , uo aequales. Coniunctis autem rectis ps
 qt , ru , demittantur ex p & u ad planum circuli
 $abcd$ perpendiculares px , sy , quae in communes
 sectiones ac , nk , cadent, eruntq; inter se pa-
 rallelae. Quoniam ergo triangulorum pcx , sky
 anguli x & y sunt γ recti, anguliq; pex , sky ,
 & aequales, quod peripheria aop , n & u quibus in-
 sistunt, aequales sint. Erunt ergo propter illos an-

18. XI.
 3. def. XI.
 22. III.

58. XI.
 6. XI.
 27. III.
 26. I.



33. I.
 2. VI.
 9. XI.
 7. XI.

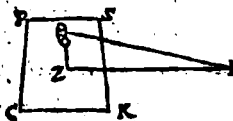
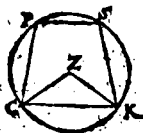
gulos aequales & latera $p c$, $s k$ aequalia. etiam re-
 liqua latera reliquis aequalia. Cum itaq, aequales
 sint $p x$, $s y$ & parallela erunt. & ipsas connec-
 tentes $p s$, $x y$, aequales & parallelae. Sed quia
 etiam $c k$, $x y$, sunt parallelae, propter latera $a i$,
 $i k$; proportionaliter secta erunt. & $p s$, $c k$ pa-
 rallelae, & has connectentes $c p$, $k s$ in eodem cum
 ipsis plano erunt. & totum quadrilaterum $c k$
 $s p$ in uno plano erit. Si ex q & t demittantur
 perpendiculares in planum $a b c d$, connectanturq,
 rectae $q c$, $t k$, quas similiter parallelas, ipsaq, $p s$,
 $q t$, tanquam eidem $c k$ parallelas, inter se pa-
 rallelas, ipsumq, quadrilaterum $p s t q$ in uno
 plano esse ostenderemus; sicut & quadrilaterum

q t u r

getur & triangulum ψ ruo. Quae ipsa constru-
 tio si & super reliqua latera $k l, l m, m d$, dictis ψ 2. XL
 videlicet quadrantibus, $o l, o m, o d$ exhibeatur,
 nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo ha-
 misphaerio, ut tota sphaera major quadrilateris &
 triangulis repleatur similibus & aequalibus modo
 praedictis super latum $c k$ inter quadrantes $o c, o k$
 constructis, inscriptum erit in majori sphaera solidum
 polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris acq-
 uisitis triangulis. Dico hoc sphaeram minorem $e f g h$ non tan-
 gere, ducatur $i \gamma$. Quoniam igitur ex constructione
 $c k$ est minor recta $c \gamma$: est enim $c k$ major, quam $i \gamma$. I.
 cz quod angulus czk est obtusus, multo major erit α per schol.
 quia cz & quadratum rectae $g \gamma$ majus quadrato $z c$. sequens.
 Quoniam vero quadratum $i \gamma \beta$ aequale est quadratis
 rectarum $i g, g \gamma$, & quadratum $i c$, quadratis $i z$
 $z c$: sunt autem aequalia quadrata $i \gamma, i c$, aequalia
 ergo sunt etiam $i g, \gamma g$, ipsis $i z, z c$: demptoq- A 47. I.
 illic quadrato $g \gamma$, & hinc quadrato $z c$, relinque-
 tur quadratum $i g$ minus quadrato $i z$; recta q-
 uoq- $i g$ minor recta $i z$. Quocirca cum $i g$ sit sphaera
 minoris $e f g h$ semidiameter, existet punctum z ,
 extra eandem sphaeram, ipsumq- planum $c k s p$,
 sphaeram $e f g h$ minime tanget quod & reliqua o-
 mnia ipsius puncta longius absint a sphaera illa quam
 z . Ducatur rursus ex i ad planum $p s t q$, perpen-
 dicularis $i \beta$; erit β centrum circuli circa $p s t q$,
 descripti, connexuq- $\alpha p, i p$, cum angulus $i \beta p$, sit
 γ rectus. Erit quadratum $i p$ aequale quadratis $i c, \beta p$.

Quia verò & quadratum ic aequale quadrato ip aequale est quadrato iz, zc : Est autem quadratum zc majus quadrato sp , quod & linea zc major sit, quam linea sp . Reliquum ergo quadratum recta is majus est quam iz : adeoque, multo magis punctum c extra sphaeram $efgh$, existet, quam z multoque, minus planum $pstq$ quam $cksp$, tanget sphaeram $efgh$. Eodemque modo demonstratur, nullum reliquorum planorum attingere posse sphaeram $efgh$. Quod erat faciendum.

Scholium.



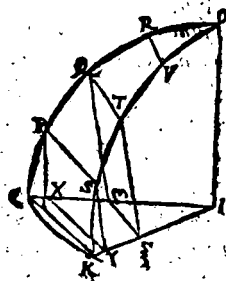
q. 4. VI.
p. 14. V.
p. 28. III.
c. 13. III.

In quadrilatero $cksp$ ponebatur angulus czk obtusus, quod ita probatur: Circumscribo circulo circa illud, quadrilaterum, cum sit, ut ik ad kc , ita iy ad yx : yk autem sm major sit quam iy ; major etiam erit ck , quam y x , id est, quam

sp . Quare cum equalibus arcibus subtenso sk , pc ipsi kc sint aequales, et erunt arcus illi singuli majores quadrante, ipseque, angulus czk obtusus. Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta quadrilateri $cksp$ longius abesse, quam z , quod patet. Punctum enim quodcumque, connectatur cum i ,

quo-

quoniam $\angle z$ est rectus. $\angle$ Erit ipsi oppositum latius
 et majus latere $\angle z$. & sic ostenditur $\angle z$. 13. def. XI.
19. L.



Denique probabitur, quomodo recta zc major sit
 recta ap ; si tamen prius
 fuerit ostensum, ps esse
 majorem recta qt . Opus
 autem est nobis huius figura
 superioris parte intra se-
 midiametros ic , io con-
 tenta, & quadrantibus
 oc , ok ; demissionemque per u 38. XL.

perpendicularium em , & z qua ad communes circulo- 46. XI.
rum sectiones ic , ik cadunt, ac parallela os sunt,
 quas aequales & parallela qt & u & connectunt. 2. VI.
 Quae u & cum ic sit parallela ipsi ck , quia ic & ik 30. L.
 latera similiter per u & sunt secta, etiam parallela u cor. 4.
 erit xy . Erit itaque ue y ad yx , ita ie ad em . VI.
 & sit yx vel sp major quam em vel qt .



Hoc ostenso ex centrīs
 z , p , circa quadrilate-
 ram $cksp$, p & q de-
 scribantur circuli cum
 semidiametris. Si zc

non credatur major quam ap , erit vel aequalis, vel
 minor. Si aequalis, cum lateribus ck , zc ponantur
 equalia latera ps , ap , & basis kc major quam
 sp , erit angulus kzc major angulo spz . Eo- 25. R

Ll 2

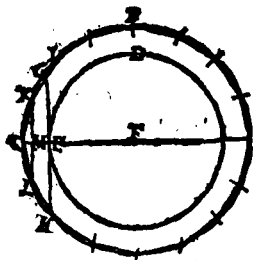
deniq.

pli cylindri reciprocantur propter easdem bases, & altitudines reciprocas, ex quibus cum cylindri concludantur aequales, aequales etiam erunt ipsorum partes tertia velconi.

PROPOS: XVI

Problema 1.

Duobus circulis abc , de , circa
dem centrum f existentibus, in ma-
jori circulo abc , polygonum z .
quilaterum, & parium laterum in-
scribere, quod non tangat minorem
circulum de .



Extendatur per
centrū diametere a c,
qui secet circulum
de in e, per quod
punctū ducatur per
pendicularis ipsi ac
que tangens in
circuli de. Quoniam
arcus a g c maior ē

III.

1. X.

arcus $g c$ subtracto dimidio $a b$ & ex residuo $b i$
dimidio $b i$, & ex residuo $i c$ dimidio $i k$, & reli-
quitur $c k$ minor quam $g c$: eritq; $c k$ subtensi-
psi $c k$ arcui latus polygoni inscribendi. Si enim arcus
 $b i$ in partes numero & magnitudine aequales ip-
sus $c i$ dividatur, & quadrans $a b$ in aequales po-

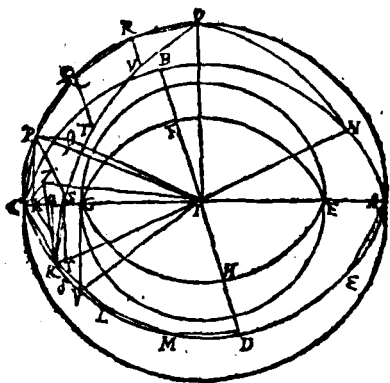
libus $b c$ quadrantis, & $a h c$ semicirculus in aqua-
 les semicirculi $a b c$ partibus, quibus arcubus sub-
 tensa lineæ omnes erunt & æquales rectæ $a c k$: & sic
 polygonum æquilaterum erit perfectum, quod mi-
 norem circulum $d e$ non tangit. Demissâ per-
 pendiculari $k l$ per k in $a c$, quàm secat in m . Quo-
 niam anguli $g e m$, $k m e$ sunt recti: d erant $g h$, d 29. III.
 $k l$, parallelele. Quare cum $g h$ tangat circulum
 $g e$ in e erit $k l$ tota extra illum circulum, eumq;
 nunquam attinget, quia nunquam cum recta $g h$
 convenire potest. Ideoq; multò minus k longius ab
 eodem circulo remota tanget illum circulum. Pro-
 inde nec reliquorum polygoni laterum ullum huius
 $c k$ æqualium, æqualiter quippe à centro f distan-
 tium, circulum $d e$ continget. 14. III.

PROPOS: XVII.

Problema. 2.

Duabus sphaeris $a b c d$, $e f g h$, circa
 idem centrum i existentibus, in ma-
 jori sphaera $a b c d$, solidum polyedrū
 inscribere, quod non tangat mino-
 res $e f g h$, sphaeræ superficiem.

Ambæ sphaerae secantur plano aliquo per centrum,
 suntq; cōmunes sectiones factæ in sphaeris plana $a b$
 $c d$, $e f g h$, quæ circuli sunt ex definitione sphaeræ,
 idem habentes centrum i cum ipsis sphaeris.
 In his circulis ducantur diametri $a c$, & $b d$
 in centro i ad angulos rectos se secantes,

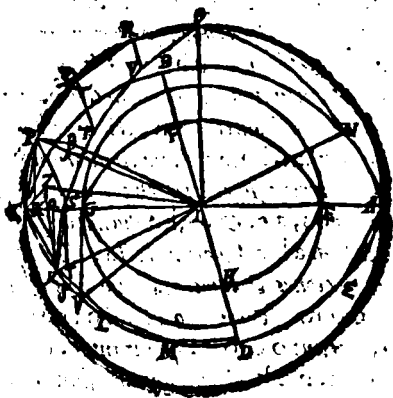


- ut sint quadrantes ab, bc, cd, da . Postea in
 a 16. XII. majori circulo a inscribatur polygonum non tangens
 cor. 16. minorem, quod pro demonstrationis facilitate ita
 III. fiat. Ex g ad e g ducatur perpendicularis gy inq.
 v 1. IV. ad circumferentiam circuli $abcd$ quae circulum $efgh$
 d 19. I. tangit in g : cui gy aequalis applicetur ac in circulo
 $abcd$, quia verò si arcui; c intelligatur sub
 tendendi recta, ut fiat triangulum gcy , est c , la
 tus majori seu recto angulo oppositum majus latere
 gy . erit & ipso ac . Abscindatur ergò cd arcus a
 qualis ipsi ac , si jam ex quadrante cd auferatur
 dimidium dl & ex reliquo cl dimidium lk , & sit
 deinceps, relinquetur tandem arcus minor arcu
 18. III. cd , seu arcu ac . Sit ergò arcus ck minor arcu
 1. X. cd , seu arcu ac . Sit ergò arcus ck minor arcu cl
 19. III.

erit etiam ck subtensa minor recta ae , id est, gy .
 & ck erit inscribendi polygoni latus. Nam cum
 recta cd arcum subtendens minorem arcu cy , non
 tangat circulum $efgh$; multo minus ck arcum
 cd minore recta subtendens eundem circulum tanget.
 Rursus ducta diametro kn , erigatur ex centro i
 perpendicularis io , ad plana circulorum $abcd$,
 $efgh$, occurrens superficiesi sphaerae maioris in o , &
 per rectas ao , ae , & oi , kn ducantur plana, quae
 ad circulum $abcd$, erunt recta, efficiuntq; com-
 munes sectiones circulos, quorum semicirculi sunt
 aoc , nok . Quia vero anguli o , oi , ok sunt
 recti; & erunt oc , ok quadrantes, & quidem
 quia aoc , nok , circuli aequales sunt ipsi $abcd$,
 propter aequales diametros: erunt ipsi cd , oc , ok ,
 aequales quadrantes. Si ergo cl arcus dividatur
 in tot partes, in quot divisus est cl ; & quadran-
 tes oc , ok in partes numero & magnitudine a-
 quales arcibus quadrantis cd : erunt illis omnibus
 subtensa recta ck , kl , lm , md , cp , pq , qr ,
 ro , rs , st , tu , uo aequales. Coniunctis autem rectis ps
 qr , ru , demittantur ex p & u ad planum circuli
 $abcd$ perpendiculares px , sy , quae in communes
 sectiones ac , nk , cadent, eruntq; inter se pa-
 rallelae. Quoniam ergo triangulorum pcx , sky
 anguli x & y sunt recti, anguliq; pex , sky ,
 & aequales, quod peripheriae aop , n & u quibus in-
 sistunt, aequales sint. Erunt ergo propter illos an-

18. XI.
 def. XI.
 22. III.

58. XI.
 6. XI.
 27. III.
 26. I.



33. I.
 2. VI.
 9. XI.
 7. XI.

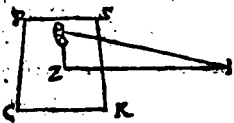
gulos equales & latera $p c$, $s k$ equalia. etiam re-
 liqua latera reliquis equalia. Cum itaq, *equales*
sint $p x$, $s y$ & *parallela* *erunt* & *ipsas* *conne-*
ctentes $p s$, $x y$, *equales* & *parallelae*. Sed quia
 etiam $c k$, $x y$, *sunt* *parallelae*, propter latera $a i$,
 $i k$; proportionaliter secta erunt p & $p s$, $c k$ pa-
 rallela, & *has* *connectentes* $c p$, $k s$ *in eodem* *com-*
ipsis *plano* *erunt* & *totum* *quadrilaterum* $c k$
 $s p$ *in uno* *plano* *erit*. Si ex q & t *demittantur*
perpendiculares *in planum* $a b c d$, *connectanturq,*
recte $q c$, $t k$, *quas* *similiter* *parallelas*, *ipsaq,* $p s$,
 $q r$, *tanquam* *eidem* $c k$ *parallelas*, *inter se* *pa-*
rallelas, *totumq,* *quadrilaterum* $p s c q$ *in uno*
plano *esse* *ostenderemus*; sicut & *quadrilaterum*

q t u r

quod & triangulum $\downarrow$ ruo. Quae ipsa constru-
 ctio si & super reliqua latera k, l, m, n, d , dictis $\downarrow 2, XL$
 videlicet quadrantibus, o, l, o, m, o, d exhibeatur.
 nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo ba-
 misphaeris, ut tota sphaera major quadrilateris &
 triangulis repleatur similibus & aequalibus modo
 praedictis super latera c, k inter quadrantes o, c, o, k
 constructis, inscriptum erit in maiori sphaera solidum
 polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atq;
 triangulis. Dico hoc sphaeram minorem esse gh non tan-
 gere, ducatur i, γ . Quoniam igitur ex constructione
 $c, k =$ est minor recta c, γ : est enim c, k major, quam $a, i, 9, I$.
 cz quod angulus czk est obtusus, multo maior erit a per schol.
 quam cz & quadratum rectae g, γ majus quadrato z, c . sequens.
 Quoniam vero quadratum i, γ & γ, g aequale est quadratis
 rectarum i, g, g, γ , & quadratum i, c , quadratis i, z
 z, c : sunt autem aequalia quadrata i, γ, i, c , aequalia $A 47. I$.
 ergo sunt etiam i, g, γ, g , ipsis i, z, z, c : demptisq; il-
 linc quadrato g, γ , & hinc quadrato z, c , relinque-
 tur quadratum i, g minus quadrato i, z ; rectaq;
 i, g minor recta i, z . Quocirca cum i, g sit sphaera
 minoris c, f, g, h semidiameter, existet punctum z ,
 extra eandem sphaeram, ipsumq; planum c, k, s, p ,
 sphaeram c, f, g, h minime tanget quod & reliqua o-
 mnia ipsius puncta longius absint a sphaera illa quam
 z . Ducatur rursus ex i ad planum p, s, t, q , perpen-
 dicularis i, s ; erit s centrum circuli circa p, s, t, q ,
 descripti, connexiq; s, p, i, p , cum angulus i, s, p , sit
 γ rectus. Erit quadratum i, p aequale quadratis i, s, s, p .

Quia verò & quadratum ic aequale quadrato ip aequale est quadrato iz, zc : Est autem quadratum zc majus quadrato op , quod & linea zc major sit, quam linea op . Reliquum ergo quadratum recte is majus est quam iz : adeoque, multo magis punctum c extra sphaeram $efgh$, existet, quam z multoque minus planum $pstq$ quam $cksp$. Tanget sphaeram $efgh$. Eodemque modo demonstratur, nullum reliquorum planorum attingere posse sphaeram $efgh$. Quod erat faciendum.

Scholium.



In quadrilatero $cksp$ ponebatur angulus czk obtusus, quod ita probatur: Circumscribo circulo circa illud, quadrilaterum, cum sit, ut ik ad kc , ita iy ad yx : yk autem sm major sit quam iy ; major etiam erit ck , quam y x , id est, quam

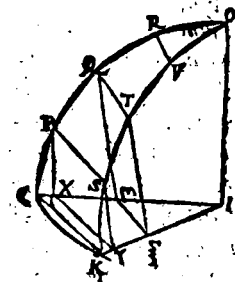
sp . Quare cum equalibus arcibus subtensa sk , p et ip kc sint aequales, et erunt arcus illi singuli majores quadrante, ipseque angulus czk obtusus. Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta quadrilateri $cksp$ longius abesse, quam z , quod patet. Punctum enim quodcumque, connectatur cum i ,

quo-

quoniam $\angle z$ est rectus. Erit ipsi oppositum latius majus latere $\angle z$, & sic remotius $\angle z$. 13. def. XI. 19. l.

Deniq, probabitur, quomodo recta $z c$ major sit

recta $a p$; si tamen prius fuerit ostensum, $p s$ esse majorem recta $q t$. Oportet autem est nobis huius figurae superioris parte intra semidiametros $i c$, $i o$ contenta, & quadrantibus $o c$, $o k$; demissioneq, per 38. XI.



pendicularium $\epsilon \mu$, & ϵ qua ad communes circulo- 36. XI. rum sectiones $i c$, $i k$ cadunt, ac parallelae sunt, quas aequales & parallelae $q t$ & $\mu \epsilon$ connectione 2. VI. Quae $\mu \epsilon$ cum sit parallela ipsi $c k$, quia $i c$ & $i k$ latera similiter per $\mu \epsilon$ sunt secta, etiam parallela 30. I. a erit $x y$. Erit itaque μy ad $y x$, ita ϵ ad $\epsilon \mu$ cor. 4. & sit $y x$ vel $s p$ major quam $\epsilon \mu$ vel $q t$. VI.



Hoc ostenso, ex centris z, p , circa quadrilatera $c k s p$, $p s t q$ describantur circuli cum semidiametris. Si $z c$

nunc credatur major quam $a p$, erit vel aequalis, vel minor. Si aequalis, cum lateribus $c k$, $z c$ ponantur aequalia latera $a s$, $a p$, & basis $k c$ major quam $s p$; erit angulus $k z c$ major angulo $s a p$. Eo 25. R

LI 8

deniq,

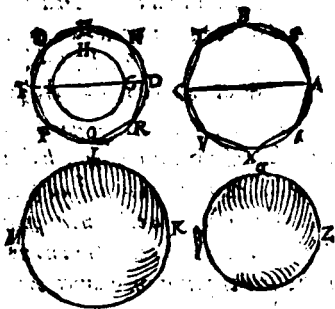
1. demq, modo s z p, major est angulo β q. Sed propter bases sk, pc, ts, qp equales, & equales sunt
 cor. 13. I. anguli k z s, c z p, s a t, p β q. Igitur quatuor anguli ad z, qui quatuor recti sunt, equales, majores sunt angulis quatuor ad β , qui & ipsi quatuor recti, equales sunt. Quod absurdum. Si vero minor sit z c quàm β p, abscindantur $\beta \pi$, βe , $\beta \phi$ equales ipsis zc, zk, zs, zp, connectantq, puncta π , e, ϕ lineis quadrilateri spqc lateribus parallelis. Erit itaq, ut βs ad sp, ita βe , ad πe nimirum π minor quàm βe , sicut & $e \phi$, & ϕ minores sunt quàm st, tq, qp. At tam sp sit minor, quàm ck; & st, pq, equales recti k β cp; tq & minor, quàm ps: erunt recte $e \pi$, $\pi \phi$, & ϕe minores recti ck, ks, sp, pc; sed propter $\beta \pi$, $\beta \phi$, βe , $\beta \phi$ equales posita ipsis zc, zk, zs, zp anguli ad z, majores angulis ad β , quibus tamē equales sunt. Itaq, nec β ipsa z c minor erit; & quia nec equales sunt. Proinde zc major erit quàm β p. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Sphæræ sunt a b c, d e f in triplicata ratione suarum diametrorum a c, d f.

Si min, erit sphaera abc ratio eadē, ad aliam vel majorem



majorem vel minorem sphaeram. Primum ergo habeat
 rationem triplicatam a c ad d sphaera a b c, ad spha-
 ram g h i minorem sphaeram d e f. Inscribebatur autem 17. XII
 in majore sphaera d e f polyedrum d n e o f p q r,
 non tangens minorem g h i, atq; huius simile a b c
 sphaera a s b t c n x y, quae cum sint in triplicata ra- Coroll.
 tione a c ad d f, sicut sphaera a b c, g h i: erit, 17. XII
 ut a b c, ad g h i, ita polyedrum ad polyedrum. Itaq;
 cum sphaera a b c sit major polyedro sibi inscripto,
 et erit et g h i sphaera major altero polyedro, d n e
 o f p q r, pars est. Quod absurdum, non ergo major 14. V.
 sphaera a b c, ad minorem g h i, ipsa d e f ha-
 bet rationem triplicatam diametrorum a c ad d
 f. Habeat porro rationem hanc ad quandam maio-
 rem k l m, ipsa d e f. Rursus est, ut polyedrum,
 a s b t c n x y ad polyedrum d n e o f p q r, si d
 est, ut a c ad d f, ita sphaera a b c ad sphaeram k l m:

Et convertendo, ut $k l m$ ad $a b c$, ita polyedrum
 posterius ad primum, id est, $\beta d f$ ad $z = \alpha$. Ponatur
 autem, ut $k l m$ ad $a b c$, sic $d e f$ ad $z = \alpha$. Quia
 ergo sphaera $k l m$ maior ponitur ipsa $d e f$. Erit
 Gra $b c$ maior ipsa $z = \beta$. Itaq, sphaera $d e f$ ad
 sphaeram $z = \beta$, ipsa $a b c$ minorem, habet ratio-
 nem triplicatam diametrorum $d f$ ad $a c$. Quod
 absurdum, quia ostensum est, non posse sphae-
 ram ad sphaeram aliam sphaeram minorem, pro-
 portionem habere triplicatam diametrorum. Cum
 ergo sphaera $a b c$, neq, ad minorem neq, ad ma-
 iorem sphaeram, ipsa $d e f$, habeat rationem tri-
 plicatam diametrorum $a c$ ad $d f$: habet, itaq, ad
 ipsam $d e f$. Et sic sphaera quavis ad quamvis tri-
 plicatam diametrorum rationem habet. Hinc
 fit: sphaeras esse inter se, ut in ipsis similia
 polyedra descripta propter proportionem
 eandem triplicatam diame-

trorum.





ELEMENTO-

RUM EUCLIDIS,

LIBER XIII.

PROPOSITIO I.

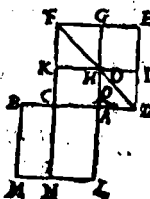
Theorema 1.



I linea recta $a b$ secundum
extremam & mediam ra-
tionē a secentur in c : ma-
ius segmentum assumens

10. II. vel
30. VI.

dimidiam totius, quintuplum potest
ejus, quod à dimidia totius descri-
bitur quadrati-



Super cd fiat quadratum ce ,
in quo ducta diametro df , du-
catur ag ipsi de parallela, se-
cans diametrum in h puncto per
quod ducatur ik parallela ipsi cd .
Deinde super ab perficiatur qua-
drat.

- p. cor. 4. II. dratum a m pertrahaturq, f c ad n. p. Erunt a i;
 73. def. VI. k g quadrata rectarum a d, a c. y Quia ergo est:
 d. 17. V L. ut a b ad a c, ita a c ad c b: d. erit re-
 ctangulum c m sub extremis aequale ipsi k g qua-
 drato medie a c. Cumq, ab, id est, a l ponatur du-
 pla ipsius a d, id est, a h; & sit, ut a l ad a h, ita
 rectangulum a n ad a k: erit a n, ipsum
 § 43. I. a k duplum. Quia vero a k & i g sunt æqualia,
 erit a n æquale duobus a k, i g. Ideoq, additis æ-
 qualibus, c m, k g erit quadratum a m, æquale
 gnomoni o p q. Quare cum quadratum a m sit
 quadruplum a i, quia a b est dupla ipsius a d: Erit
 etiam gnomon o p q, quadruplus ejusdem quadra-
 ti: additoq, quadrato a i, erit quadratum d f quin-
 tuplum quadrati.

Schol.
 4. I I.

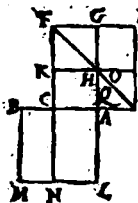
PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si recta linea d c sit ipsius segmen-
 ti d a quintuplū possit; duplex ab præ-
 dicti d a, segmenti extrema & media
 ratione sectæ in c; majus segmentum
 a c reliqua pars est ejus, quæ à prin-
 cipio, rectæ:

Super d c fiat quadratum d f. & diametrum
 d f secet a g parallela ipsi c f in h, per quod duc-
 tur i k parallela ipsi d c, productaq, a c fiat super
 a b dr-

LIBER XIII.



ab dupla ipsius da quadratum
am, & continetur cfin n. E-
runt ergo aikg quadrata re-
ctarum da, ac. Quia autem
quintuplum ponitur quadratum
cc quadrati ai; relinquitur
gnomon opq quadruplus ejus-
dem quadrati ai. Sed & am

quadratum est quadruplum ejusdem quadrati ai.
Quia ab est dupla ipsius da. Sunt igitur gnomon
opq & quadratum am equalia. Rursus, quoni-
am ab, id est, al, ponitur ipsius da, id est, ah, du-
pla; & p est, ut la ad ah; ita rectangula lc ad
ak. Erit quoque illud huius duplum, & sic equalibus
aik, hc, rectangulis simul aequale lc, & reliquum
rectangulum cm reliquo quadrato kg. Cumq; sint
tres recte ab, ac, cd: & rectangulum cm sub ab, c
b sit aequale quadrato recte ac d erit, ut a bad
ac, ita ac ad cb. Secta itaq; est ab extrema & d 17. VI.
media ratione in c, estq; majus segmentum ac.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si recta linea ab, secundum medi-
am & extremam rationem secetur in
o, minus segmentum cb assumens dimi-
diā cd majoris segmenti ac, quintu-
plū potest ejus, quod a dimidia ma-
joris segmenti describitur quadrati.

Quoniā

- ~~¶~~ ~~SP~~ ~~U~~ Quoniam $a c$ est bisecta in d , eiq;
 addita $c b$; erit a rectangulum sub
 6.11. $a b, b c$, una cum quadrato rectae $c d$, aequale
 quadrato rectae $b d$. Sed rectangulum sub $a b, b c$
 est quadruplum quadrati $c d$, quia intermedia
 quadratum $a c$, huic aequale, est quadruplum qua-
 drati ejusdem $c d$. Idem ergo rectangulum sub a
 $b : b c$ una cum quadrato $c d$, est quintuplum
 quadrati $c d$. Ideoq; & quadratum rectae $b d$,
 segmenti minoris cum dimidio majoris quintuplum
 est ejusdem $c d$ quadrati.

PROPOS: IV.

Theorema 4.

Si recta linea $a b$, secundum me-
 diam & extremam rationem sece-
 tur in c : quod à tota $a b$, quodq; à mi-
 nore segmento $c b$ simul, utraq; qua-
 drata $a b, c b$ tripla sunt ejus quod à
 majore segmento $a c$ describitur qua-
 drati.

17. VI.
 7. II.



Quia enim rectangulum sub
 $a b, b c$ aequale est quadra-
 to $a c$; & illud rectangulum
 bis, cum quadrato $a c$, triplu
 est quadrati $a c$: erunt & $b a, a$ equalia quadrata
 $a b, b c$ tripla ejusdem quadrati $a c$.

PRO.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si recta linea ab , secundum mediā & extremam rationem secetur in c ; apponaturq; ei da æqualis majori ac segmento: tota recta linea bd secundum mediam & extremam rationē secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea ab .

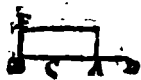
Quia enim est, ut ab
ad ac , vel $a d$, ita $a c$ ad cb :
etiam convertendo est, ut da
ad ab ; ita bc ad ca : &

componendo, ut db , ad ab , ita $a b$, ad ca , vel ad
 $d a$. Secta itaq; est bd in a , extrema & mediā
ratione.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab Rationalis extre-
mā ac media ratione secetur in c , u-
trumq; segmentorū ac , cb irrationa-
lis linea est, quæ vocatur Apotome.



Addatur majori segmento
 ac , recta ad , æqualis dimidia
totius ab . Quoniam ergo quadra-
tum rectæ cd , est quintuplum

quadrati rectæ ad ; habebunt quadrata cd ad ad ,

$M m$

ratio-

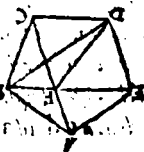
1. XIII.

- p. X. *Rationem, quatuor numerus ad numerum: & erunt
 inter se commensurabilia: ipseq; recta c d,
 a d commensurabiles saltem potentia. Sed a d di-
 midia Rationalis a b, est Rationalis. Ergo & c d,
 734. VIII. Quia vero quadrat: c d, a d non habent ratio-
 nem, quam numerus quadratus ad quadratum,
 d 9. X. cum sit quinarum ad unitatem: & erunt c d, a d re-
 ctæ longitudine incommensurabiles, ac proinde ra-
 tionales potentia solum commensurabiles. Quare,
 74. X. si ex Rationali c d detrahatur a d rationalis præ-
 sentia solum commensurabilis; erit reliqua c
 Irrationalis, quæ vocatur Apotome Rursus, appli-
 cato ad a b rectangulo a c, contento sub a b, c b:
 98. X. cum sit, ut a b ad a c; Sic a c ad c b: erit hoc re-
 ctangulum a c, æquale quadrato rectæ a c. Quare
 quadratum Apotomæ a c, i. e. rectang. a c applicatum
 um ad a b Rationale: scilicet alterum latius b c, vel
 huic æquale segmentum minus c b, Apotomen primam.*

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si pentagoni a b c d e æquilateri, tres anguli a b c sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonum.



Primo sint tres anguli a. b. c d.
 inceps. Angulus a b c æqualis
 subcendatur rectæ b c, a c, b d;
 atq; ex f intersectione illarum
 dico

ducantur recta fd . Iam in triangulis abe & cbd ,
 aequalium laterum, ex hypotbesi ab, ac , ipsis bc ,
 cd : & anguli contenti aequalis, a ipsis c : erunt &
 bases be, bd ; & anguli aeb, cdb , aequales. 4. L.
 Sed propter be, bd aequales, etiam anguli bcd ,
 bde sunt aequales. Igitur toti aed, cde sunt
 aequales: Eodem modo in triangulis abe, abc ,
 sunt aequales bases be, ac : Et anguli aeb, acb ,
 aequales angulis bac, bca . Itaq, cum anguli
 bac & aeb , trianguli bfa , sint aequales: erunt
 & bfa aequales γ : quia demum ex be, ac , a- 6. L.
 qualibus relinquuntur aequales fe, fc . Cum er-
 go trianguli fed latera fe, ed sint equalia tri-
 anguli fed lateribus fe, cd ; & basis fd com- 8. L.
 muni: & erunt & anguli contenti fed, fcd a-
 quales. Ideoq, aed, bcd , quadrati sunt equa-
 les. Adcoq, cum ipsi bcd , ponantur aequales bae
 & abc ipsisq, aed ostensus eodem sit equalis cde :
 erunt omnes quinque aequales & pentagonum a-
 quilaterum. Deinde tres anguli a, c, d , sint non
 deinceps. Rursus ergo in triangulis bae, bcd ,
 a sunt bases be, bd & anguli aeb, cdb , e-
 quales. Sunt autem & bed & bde aequa-
 les. Igitur toti aed, cde sunt aequales: & sic
 tres d, e, a , sunt deinceps aequales. Ideoq, ut prius
 Pentagonum aquilaterum.

Mm 2

P R O.

EUCLIDIS ELEM.
PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si pentagoni $abcde$ æquilateri & æquianguli duos e, d angulos, qui deinceps sint; subtrendant rectæ lineæ ab, ce ; hæ mediâ & extremâ ratione se mutuò secant; & majora ipsarum segmenta fb, fe , æqualia sunt pentagoni lateri.

m 14. f V.
p 28. III.



Descripto = circulo circa pentagonum. Erunt quoq; arcus ab, bc, cd, de, ea æquales. In triangulis autem cdb , & dce propter æqualia latera bc, cd, de ; & æquales contentos angulos c, d , æquales sunt bases bc, de , & anguli cdh, ecd : quibus cum sit externus bfc ,

γ 32. I.

δ 33. VI.

ε 6. I.

ζ 7. III.

η 40. VI.

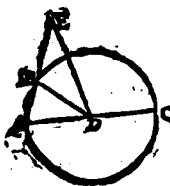
æqualis γ; Erit etiam angulus dce duplex: Sicut & bce , propter duplum arcum bac , unde dce duplex est. Ideoq; bfc , & bce erunt æquales rectæq; bf, bc , æquales, id est, latus pentagoni bc æquale est segmento majori bf , subtenso bd . Sunt autem & anguli cbd , anguli cdb , æqualiter peripheriæ bc, cd insistentur & æquales. Proinde triângula bcd, cfd , propter angulos cdb, cbd æquales, ipsis fdc , & fdc , erunt γ æquiangula. Eritq; ut bd ad dc , id est, bf ad bc .

d c, id est, b f, a d f d. Ideoq; b d in fecta est extrema & media ratione. Eodem modo & c c in f eadem ratione secta esse ostenderetur.

PROPOS. IX.

Theorema 9.

Si hexagoni latus b e, & decagoni ab, in eodem circulo a b c descriptorum, componantur: tota recta linea a c extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus b e.



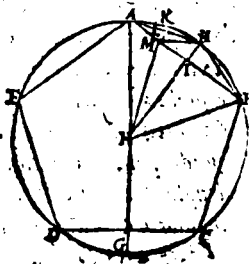
Ex a per centrum d ducatur diameter a c, & conjungantur recte d b, d e. Quoniam igitur ab arcus est decima pars circuli: Semicirculus ac continebit eam quinquies, eritq; b c quadruplus ipsius a b: & angulusq; b d c quadruplus anguli b d a. Rursus in triangulo d b c a 33. VI. equalium laterum d b, b e; & erunt b d c, & e a 35. I. quales, quibus equalis & externus d b a, duplus erit ipsius c: Sicut & d b a equalis & bad. Et sic ambo & 32. I. simul quadrupli anguli c: adeoq; b d & equalis externus b d c ejusdem c quadruplus. Qui cum & d 42. I. anguli a d b fuerit quadruplus: erunt c & a d b equaliter. Et sic propter angulos c & a equales ipsis b d a, & a, triangula a c d, & a d b, equiangula.

Erit igitur, ut $a c$ ad $a d$, id est, $e b$; Ita $a d$, vel $e b$, ad $a b$. Secti nimirum est $a e$ secundum extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latius hexagoni. Hinc patet, cum per quintam hujus deductum minus segmentum ex maiore, relinquat majus segmentum, divisum secundum extremam & mediam rationem, quod subtracto latere decagoni ex hexagoni latere fiat decagoni latius segmentum majus latere hexagoni media & extrema ratione secti.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo $a b c d e$, pentagonum equilaterum describatur; Pentagoni latus $a b$, potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.



Ducatur diameter $a g$
& semidiameter $f h$
& bisecto arcu $a h$
 h ; erit $a h$ latus decagoni, & $b f$ hexagoni. Rursumq; bisecto arcu $a h$, in k :
Ducatur $f k$ secans $a h$.

$\angle h, m$; & b, a, m in $\triangle hng$ sunt $\angle$ hnt. Propter
 arcus ergo a, h, b, h , & a equales erunt anguli in-
 stantes a, h, h, b . Et sic in $\triangle hng$ b, f, a, f ,
 propter equalitatem a, a, f, f ; & f commune &
 quales sunt bases b, h, b, a ; & anguli b, f, a, f ,
 id est, $\angle b, f, a, f$ sunt $\angle$ hnt sunt equales, anguliq;
 f, a, a, f, h, h , & recti. Si jam ex semicirculis a, b, c, g ,
 & a, e, d, g auferantur equales arcus a, b, c , a, e, d ,
 & relinquantur c, g, g, e equales inter se. Et sic &
 quales ipsis b, h, a, h . Quorum b, h , cum sit duplus
 arcus h, k ; ejusdem duplus erit c, g . Eodemq; modo
 ut a, b , ut & b, c duplus est arcus b, h . Quare ar-
 cus c, g, b, c , sunt æque multiplices arcuum h, k, b, h ,
 dupli: & adeoq; totus h, g duplus erit b, k : angu-
 lusq; b, f, g, d duplus anguli b, f, k . Cumq;
 idem b, f, g, a, d centerum duplus sit anguli b, a, f ad
 peripheriam: erunt ergo b, f, m, f, a, b equales; Et
 $\triangle hng$ b, a, f, b, f, m , propter equales angulos
 b, a, f, b, f, m , & a, b, f communem, equianguli.
 Quocirca ut a, b, a, d, b, f ut a, b, f, a, b, m . Ideoq;
 $\triangle hng$ a, b, b, m , equale erit quadrato
 recti b, f . Rursus in $\triangle hng$ rectangulo a, l, m ,
 & h, l, m , propter latera equalia a, l, l, h , & l, m
 commune. & equales sunt bases m, a, m, h , &
 anguli l, a, m, l, h, m : sed l, a, m est ipsi h, b, a, e ,
 qualis. Igitur & l, h, m , & ideoque $\triangle hng$
 a, h, b , & a, m, h sunt equianguli.

4. VI.

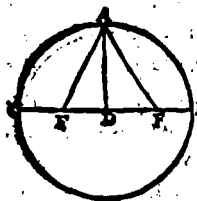
7. VI.

5. I.

A. 1. II.

Quamobrem, ut $a b$ ad $a h$, ita $a h$ ad $h m$. Itaque sub $a b$, $a m$, constructum rectangulum aequale quadrato $a h$. Sed sub $a b$, $b m$ est constructum aequale quadrato $b f$. Itaque rectangula sub $a h$, $b m$, & $a b$, $a m$ aequalia sunt quadratis $b f$, $a h$ simul. Sed illa duo rectangula sub $a b$, $b m$ & $a b$, $a m$ sunt aequalia quadrato $a b$. Aequale ergo est quadratum $a b$, quadratis $b f$, $a h$, laterum Hexagoni & decagoni. Hinc patet primo, quod linea ex centro bisecans arcum, ejus quoque subcentram bisecet. Secundo quod diameter circuli ex uno angularum pentagoni latus ipsi oppositum bisariam secet.

Scholium.



Ex Ptolemaeo usitata est praxis, quae una eademque opera in dato circulo & pentagonum & decagonum describantur. Ejus demonstratio haec est. In circulo $a b c$, super diametro $b c$

erigatur perpendicularis ex centro, $d a$, & $d c$ bisariam secata in e ducatur $e a$: ipsi quoque aequalis abscindatur $e f$; & ducatur $f a$. Erit $f a$ latus pentagoni & $f d$ decagoni. Quia enim $d c$ bisecta est in e , ipsi quoque adjecta $d f$, erit rectangulum sub $c f$, $d f$, una cum quadrato $d e$, aequale quadrato rectae $c f$

4. II.

Quod *ae* quadrato *cd* da.
 Dempto itaq, quadrato *comuni* *de* : relinquitur
 rectangulus sub *c f*, *d f*, *ae* quadrato recte *ad*,
 id est, quadrato *cd*. *erit* igitur, ut *c f* ad *cd* ; ita
cd ad *d f*, & sic *c f* *divisa* est secundum extremam
 & mediam rationem in *d*. Cum igitur illius segmen-
 tum majus *cd* sit latus *d* hexagoni : *erit* *d f* latus *d* *IV*.
 decagoni ejusdem circuli. Rursus quoniam qua-
 dratum *fa* *ae* quadrato laterum hexagoni
ad, & pentagoni *d f*, *erit* *fa* latus pentagoni.

PROPOSITIO XI.

Theorema 11.

Si in circulo *abcde* Rationalem
 habente diametrum *ag*, pentago-
 num *abcde*, æquilaterum describa-
 tur : Pentagoni latus *ab* latus Irrati-
 onalis est linea, quæ vocatur Minor.



Per centrum *f* ducantur diame-
 tri *ag*, *bh* : quorum *ag* secet
cd latus in *i* : connectanturq,
ac, *ah* : Quam *ab* secet dia-
 metrum *bh* in *k*. Abscindatur
 quoq, ex semidiametro *fh* quar-
 ta ipsius pars *fl* ; itemq, ex ra-
 dia *ac* quarta ejus pars *cm*. Quoniam igitur dia-
 metrum *ag*

metet.

216. X.
 8 cor. 10.
 XIII.

212. I.
 24. VI.

15. V.
 22. VI.
 8. XIII.
 1. XIII.
 6. X.
 20. VI.

notetur b h Rationalis est; erant & ipsius aliquot
 partes b f, f l rationales, Totaq; b l utriq; cōmensu-
 rabilis, & Rationalis. Rursus, quia f b ex centro se-
 rat arcum a c bisariam in b; ergo p & ipsum sub-
 versam ac in k, & ad angulos rectos. Sicut & a g
 ipsam c d in i. Atq; ita triangula a c i, a f k, re-
 ctangula, propter communem angulum a sunt e-
 quiangula; & utriq; ut c i ad c a; ita f k ad f a:
 & permutando; ut c i ad f k; ita c a ad f a. Et
 autem c a ad f a, ita est c m, quarta pars ipsius
 c a ad f l, quartam partem ipsius f a. Erit ergo ut
 c i ad f k, ita c m ad f l: & permutando ut c i
 ad c m, id est, b utrum dupla c d ad c k, ita f k ad
 f l: & componendo, ut c d c k simul, ad c k; ita f k
 f l simul, id est, k l ad f l. Ideoq; erit, ut quadra-
 tum rectarum c d, c k simul, ad quadratum c k;
 ita quadratū k l ad quadratū f l. Quia verò, si a c
 secetur media & extrema ratione, ducta videlicet
 recta b d, majus ipsius segmentum a quale est la-
 teri pentagoni; ut c d dō erit quadratum compo-
 situm ex c d segmento majore & c k, dimidia totum,
 quintuplum quadrati recte a c k seu dimidia totum.
 Quare & quadratum k l quintuplum est quadrati
 f l. Ideoq; quadrata k l, f l cōmensurabi-
 lia sunt, & recte k l, f l potentia solum com-
 mensurabiles. Sed f l erat Rationalis. Ergo & k l.
 Deinde, quia b l continet quatuor partes ipsius f l

equo

aequales sic b l talium quinque, a habebis q, b l qua-
 dratum talium 25, qualium f l, unam propter ra-
 tionem duplicatam quadratorum ad latera. Et k l
 quinque. Cum igitur quadrata b l, k l, non ha-
 beant rationem numerorum quadratorum: Sunt
 enim ut 25, ad quinque, vel quinque ad unum: 9. X.
 erunt recte b l, k l longitudine incommensura- 47. X.
 biles. Ideoq, cum & Rationales, erunt Ratio-
 nales potentia solum commensurabiles. Si itaq,
 ex rationali b l, dematur Rationalis k l, poten-
 tia tantum commensurabilis, & Erit reliqua f l k Irra-
 tionalis & Apostome, cuius congruens est k l. Iam
 recta b l possit plus, quam k l, quadrato recte n.
 Quoniam quadratum b l, aequale est quadrato k l
 & n, sed qualium b l sunt 5, talium k l est una:
 Erit n reliqua talium 4; habebunt igitur quadra-
 ta b l & n proportionem numeri ad numerum.
 Ideoq, erunt commensurabiles, ipseq, b l & n
 recte commensurabiles saltem potentia: Sed b l est
 ostensa Rationalis. Erit igitur & n rationalis.
 Quoniam illa b l ad n ratio, non est numerorum
 quadratorum. Est enim quae quinque ad quatuor.
 Erunt b l & n longitudine incommensurabiles,
 ac proinde rationales potentia solum commensura-
 biles. Quare cum tota b l rationalis longitudi-
 ne, sit commensurabilis rationali b h: (Qualium
 enim b h est octo, talium b l est quinque)

possit

§ cor. 8. VI
 o 3. IV.
 = 27. VI.
 p 95. X.

possit q, plus quam congruens k l quadrato recte n
 sibi longitudine incommensurabilis, erit b k Apoto-
 me quartæ ex definitione. Deniq, quia ab est t me-
 dia proportionalis inter b h, b k; Quia b a h est
 rectangulum • propter angulum rectum a, ex quo
 demissa perpendiculari a k, erit a b, quadratum
 aequale rectangulo sub b h, b k. Cum igitur super-
 ficies sub Rationali b h, & Apotoma quartæ b k,
 possit recta a b e erit a b Minor.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo a b c, triangulum æ-
 quilaterum a b c describatur; triangu-
 lilatus a b potentia triplum est ejus.
 lineæ d b, quæ ex centro circuli d du-
 citur.

coroll.
 10. XIII.



Ducta diametro a c; secetur
 = & arcus b c in e, & subten-
 b c in f bisariâ, & ad angulos
 rectos: erit b e, dimidia pars
 tertia b c, pars sexta circuli, i-
 phusq, subten- s a b e latus hexa-
 gonu, aequale a semidiametro circuli. Quoniam er-
 go quadratum æ = y aequale est quadrato a b, b e,
 quod angulus a b e in semicirculo sit rectus d. Et

§ cor. 15. IV
 y 47. I.
 § 21. III.

autem

autem recta ac quadruplum recte be dimidia.
 Qualium itaq; partium quadrata ab , b e sunt
 quatuor, talium b e est una, & ab tres; adeoq;
 quadratum ab triplum quadrati b e , vel semidia- Schol.
 metri db . Hinc patet 1. Diametrum circuli 4. II.
 potentia esse sesquiterciam ad latus trigoni
 æquilateri, quia ipsius partes sunt quatuor, qua-
 lium hujus sunt tres. 2. Semidiametrum de
 bifariam secari in f , à latere trianguli b e .
 Cum enim quadratum ab , sit triplum ipsius b e ,
 si ab penatur partium 12, erit b e talium 4. Est
 autem quadratum b e æquale quadratis fb , fe ,
 & talium partium tres habet bf , quia quarta
 pars quadrati ab ; Una igitur illarum est fe ; ipsi-
 usq; quadruplum be , id est, de , ac proinde fe di-
 midia est ipsius de .

PROPOS: XIII

Problema 1.

Pyramidem constituere & datâ
 sphaera complecti, & demonstrare;
 quod sphaeræ diameter potentia sit
 sesquialtera lateris ipsius pyramidis.



In diametro sphaerae,
 ad sit dupla ipsius db :
 ducaturq; perpendi-
 cularis cd , & linea

ca, cb. In quo intervallo he, id est, dc data ad
 eut, circulus efg, in quo inscribatur triangulum
 equilaterum efg. Iunganturq; hf, hg equales
 ipsi dc, super h erigatur perpendicularis hi, e-
 qualis recte ad: & ex i demittantur ie, if,
 ig. Erunt quatuor hñce triangulis comprehensum

17. VI.

solidum pyramis sive Tetrædrū. Quoniam enim

47. I.

quadratum ad est duplum quadrati cd; & qua-

4. I.

12. XIII.

dratum ca triplum ejusdem cd: Ideoq; etiam

ipsarum ie, if, ig equalium v ipsi ca quadrata

erūt d tripla quadratorū he, hf, hg, semidiamet-

rorū. Erunt triangula quatuor etg, est, t gi, gei,

equilatera & equiangulara, ex quibus constituta

pyramis, data sphaera, cujus diameter ab est, in-

scripta. Extensa enim ih, qua equalis ipsi ad in

k, dum ik fiat equalis ipsi ab. Quia inter ih,

hk medie proportionales sunt he, hf, hg. (Sunt

enim equales ipsi ad, db, dc.) ejusdem sphaera

sub ik. id est, ab diametro semicirculi transibunt

puncta i, k, e, f, g; eritq; sphaera data c diametri ab,

inscripta pyramidi efgi, ad cujus latus quodvis i-

psius sphaera diameter est sesquialtera. Cum enim

1. VI.

10. VI.

proportionales sint ab, ac, ad; erit, ut ab,

ad ad; ita quadratum ab ad quadratum ac:

Sed ab est sesquialtera ipsius ac. Igitur & ab, id

est, ipsius ik diametri sphaera quadratum erit ses-

quilaterum quadrati ac, id est, inaeq; lateris

pyramidis. Quod erat faciendum.

Corollarium.

1. Erit

1. Erit etiam diameter sphaerae potentia quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti.

Quia enim ab est ostensa sesquialtera ipsius ac , id est, ef : Erit quadratum ef ad alium partium 6, quod ab novem. Talium autem h e tantum est 2, quia quadratum e f ipsius h e est triplum. Quadratum igitur ab 9 est quadratum ab 2, quadruplum sesquialterum.

2. Perpendicularis ex centro l sphaerae ad planum basis efg pyramidis efg demissa sexta pars erit diametri ab sphaerae & tertia semidiametri l .

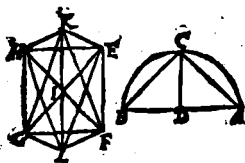
Quia enim ad 4, est dupla ipsius bd 2: erit ipsius ab , 6, l d , 3 pars sexta; & ipsius al pars tertia. Cumq; altitudo hi sit ipsa ad , continebit haec duas tertias diametri; & proinde quadratum diametri 9, ad altitudinem 4, exhibet ipsorum proportionem duplicatam ad 3, ad 2. Si ex materia fiant 4, triangula aequilatera quae hunc in modum disponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.



EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO XIV.

Problema. 2.

Octaedrum constituere, & sphaera
complecti; qua & pyramidem, &
demonstrare quod sphaerae diameter
potentiâ sit dupla lateris ipsius octa-
edri.



Circa diametrum ab ,
data sphaera, descripsi
semicirculo, erigatur
ex centro perpendicu-
laris dc ; & con-
stantur ca ; cb & c

quales. Super el equali ipsi ac fiat quadratum $efgh$,
diametri eg , fh , secantibus se in i aequaliter.
Iam ad planum hoc quadratum utringq; ex i eri-
gantur perpendiculares ik ; il aequales ipsi ic ,
longanturq; puncta k & l cum $efgh$ punctis:
erit ex octo triangulis aequalibus & aequaliteris kef ,
 kfg , $kg h$, keh , lfe , leh , lhg , lfg , fa-
ctum solidum octaedrum, quod data, diametri ab ,
sphaera inscriptum est. Quia super kl , id est, ab , dia-
metro mobilis semicirculus omnia etiâ e , f , g , h , tan-
quam aequaliter à centro i distantia puncta tran-
sit, estq; sphaera diameter ab dupla, ipsius ac , id
est, ek vel cuiusq; lateris octaedri.

Corol.

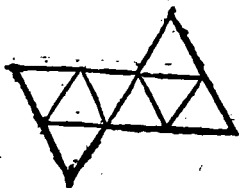
Corollaria.

1. In octaedro tres diametri kl, ef, fh se mutuo ad angulos rectos secant in i centro sphaerae. Quia omnes ad i anguli sunt ostensibiles.

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & aequales, quarum basis communis est quadratum $efgh$. Et vertex k , altitudinesq; ik, il , semidiametri. Habent enim plana similia & aequalia.

3. Si Tetraedrum & Octaedrum eadem sphaerae inscribantur Tetraedri latus potentia sesquitertium est lateris octaedri. Quia enim potentia diametri ab est sesquialtera 2 lateris Tetraedri 4, & dupla, Octaedri 3. Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est, sesquitertia. d. 13. XIII.

4. Bases octaedri oppositae sunt parallelae. 14. XIII.



Scholium.

Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complerentur octo triangula.

N. PROJ

Oppositorum enim planorum $efki$, $ghlm$ diametri sint ek , fi , gm , hl per quæ ducantur plana ek , lh , fi , mg ; quorum utrumque cum secet XI.
 Cubum, transibit & utrumque per centrum p , in quo Schol. 39.
 etiam omnes cubi diametri se bisariam secant, & XI.
 per idem punctum p communis planorum sectio non incedet. Quia vero plana ek , lh , fi , mg sunt
 rectangula, quod & he æquæ ad ek , quàm ef ,
 ad e perpendicularis est; & æqualia propter la- 4. XI.
 tera æqualia. Adeoque diametri sibi el , fm , hk , 34. I.
 gi æquales; ut & semidiametri pe , pl , ph , pk ,
 pf , pm , pg , pi . Quare ex centro p descriptus
 semicirculus, circa el circumductus, describet spha-
 ram omnes Cubi angulos attingentem. Hæc ergo
 el est ipsi ab æqualis. Quia enim quadratum
 ek æquale est quadrato el , fk , id est, duplum 47. I.
 quadrati ef , vel kl . Erunt quadrata ek , kl
 tripla quadrati kl & sic quadrati ek , kl , æ-
 quale quadratum el etiam est triplum quadrati
 kl , vel bc , cuius quadrati bc etiam triplum
 est quadratum ab . Cum enim ab , bc , bd ;
 sint proportionales; erit, ut ab prima ad bd ter-
 tiam: ita quadratum ab , ad quadratum secun-
 da bc , id est, ab est triplum ipsius bc ; sicut &
 el . Erunt ergo ab , el æqualia. Cumque qua-
 dratum el fuerit triplum quadrati kl , patet di-
 ametrum sphaerae potentia triplum esse lateris Cubi.

Corollaria.

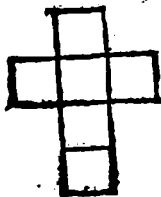
1. Omnes diametri cubi inter se sunt æquales seq; mutuo bifariam secant in centro sphaeræ; eodemq; modo lineæ centra oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentia diametri sphaeræ seu cubi, æqualis est potentijs laterum Tetraedri & cubi simul sumptis.

13. XIII. *Qualium enim partium quadratum diametri est 9, talium sex est quadratum lateris Tetraedri & taliumq; 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

Ex materia aliqua in 6 quadrata æqualia in hunc modum divisa optime fiet cubus seu figura 8 angulorum tessera similis.

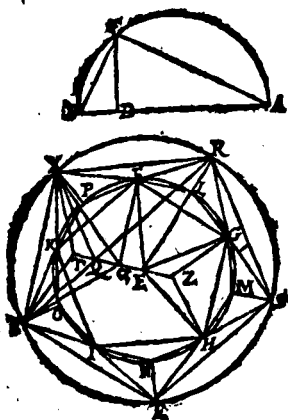


LIBER XIII.
PROPOSITIO XVI.

373

Problema 4.

Icosaedrum constituere, & sphaera
complecti, quâ & ante dictas figuras;
& demonstrare quod Icosaedri latus
Irrationalis est linea, quæ vocatur
Minor.



Circa diametrum datæ sphaeræ a b descripto se-
micirculo auferatur ex a b pars quinta d b, ut ab
ipsius b d sit quinquupla: Ipsius a d vero sesquiquar-
ta; & a d ipsius d b quadrupla. Ex d erecta per-
pendiculari d c connectantur ca, b c. Intervallo
c f id est, b c describatur circulus cui inscribatur
penta- ii. l. v.

N^o 3

penta-

¶ 6. XI.

7 33. I.

¶ 6. XI.

¶ 18. II.

¶ 47. I.

¶ 10. XHI.

pentagonum equilaterum $fg h i k$, divisiſſe arcu-
 bus fg, gh, hi, ik, kf , bisariam in punctis, $l, m,$
 n, o, p connectantur fl, lg, gm, mh , seu latera
 decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum cir-
 culi $ghik$ erigantur perpendiculares $eq, lr,$
 $ms, nt, ou; px$, aequales semidiametro ef vel
 bc ; & sic β parallela ipsi eq , quam cum singulis
 opposita binae aequales & parallela γ connectunt
 semidiametro aequales; ut sic δ plana duo opposita
 parallela $fg h i k$ & $r s t u x$ contineant quin-
 que semidiametros aequalium parallelorum cir-
 culorum. Connectantur jam puncta $r s t u x$,
 per lineas rs, st, tu, ux, xr , quae β parallela sunt
 lineis oppositis ut rx ipsi lp , & γ aequales; aequa-
 lesq; in circulis aequalibus subtendunt arcus: estq;
 rx pars quinta circuli $r s t u x$ sicut lp pars quinta
 est circuli $fg h i k$. Eodemq; modo reliqua omnes
 etiam quintas partes eorum circulorum auferunt &
 sic pentagono $fg h i k$ equilaterum aequale est $r s$
 $t u x$. Ductis $rf, rg, sg, sh, th, ti, ui, uk, xk,$
 xf ; quae omnes possunt & semidiametros seu
 perpendiculares lr, ms ; & latera decagoni ut $fl,$
 lg . Ideoq; sunt aequales lateri pentagoni ejusdem
 circuli, id est, ipsi $fg r x$; & sic decem triangula
 $rfx, rfg, rgs, sgh, sh t, t h i, t i u, u i k, u k x,$
 $x k f$ equilatera & aequalia sunt. Jam eq perpen-
 dicularis utrinq; extendatur ut $q y$ & $e z$, sint a-
 quales lateri decagoni quae puncta $z y$ connectan-

cum singulis angulorum pentagoni $f, g, h, i, k,$
 $\& r, s, t, u, x$; quae rursus omnes $\&$ possunt semi-
 diametros $\&$ latera decagoni illorum circularum.
 Ideoq; $\&$ aequales sunt lateri pentagoni, ut sic fiat
 utring; 5 triangula aequilatera $\&$ equalia priorib.
 10. Haec ergo 20 triangula, si suis lateribus connectan-
 tur, efficiunt icosaedrum. Dico hoc ipsum compre-
 bendi sphaera diametri ab . Divisa enim cq in 20
 ducantur af, ax, au . Quoniam latera $aq, qu,$
 trianguli qu , equalia sunt lateribus aq, qx
 trianguli qx , cum qu, ux sint semidiametri
 circuli $rstux$, $\&$ anguli qu, qx recti, $\&$ E- 3. def. XI.
 runt $\&$ bases pu, ux aequales. Ita si ducantur 4. I.
 ar, as, at , aequales ostenderentur, ipsis au, ax . 9. XII.
 Rursus, quia trianguli qx latera aq, qx aequa- 3. XII.
 lia sunt lateribus ce, cf , trianguli cf , quia cf
 $\&$ qx equalium circularum sunt semidiametri $\&$
 anguli qx, cf recti: Erunt bases ax, af ,
 aequales. Quibus eodem modo aequales ostende-
 rentur ah, ag, ai, ak . Sunt ergo omnes decem
 lineae, ex a ad decem angulos $f, g, h, i, k, r, s, t, u, x$
 ductae aequales. Quia vero qc est semidiameter
 seu latus hexagoni $\&$ cz decagoni: $\&$ erit qz divi-
 sa in c , secundum extremam $\&$ mediam ratio-
 nem, $\&$ minus segmentum cz , assumens c ad
 medium majoris, id est, cz , quintuplum $\&$ potest
 quadrati c^2 .

Potest autem ϵ a f quintuplum ejusdem quadrati
 ϵ a, quia ϵ f dupla ipsius ϵ a quadruplum, est qua-
 dratum ipsius ϵ a, & utriusq. simul quintuplum e-
 iusdem ϵ a. Erunt ergo quadrata a f, a z equalia; i-
 pſaq. recte aequales: & cum z y ſecta ſit biſariam
 in a, erunt omnes recte ex a, ad omnes Icoſaedri an-
 gulos ducte aequales, & ſphæra illius diameter erit
 equalis diametro ſphære a b. Cum n. ſit, ut a z ad
 ϵ a, ita y z dupla ipsius a z ad qe dupla ipsius a c; &
 ejusdem rationis erunt, earum quadrata, cumq. qua-
 dratum recta ſit quintuplum ipsius ϵ a, erit etiam
 quadratum y z quintuplum quadrati recte qe, id
 eſt, b c, cui poſit a eſt equalis. ſed & ejusdem qua-
 drati b c quintuplum eſt quadratum a b, i cum
 ſit, ut a b ad b c, ita b c ad b d: erit etiam, ut
 a b, ad b d; ita quadratum a b ad quadratum b c;
 adeoq. quadratum a b, quadrati b c quintuplum
 eſt, ſicut a b ipsius b d eſt quintupl. Ideoq. qua-
 dratis rectarum y z, a b, equalibus erunt ipſe que-
 que aequales; & ſphæra circa ipſas aequales. Quia
 deniq. diameter ſphære a b ponitur Rationalis, &
 poſeſt quintuplum quadrati b c vel c f: erit: & c f
 ſemidiameter circuli f g h i k Rationalis; cū ſint n.
 ut numerus ad numerum 5 ad 1 & ſic commenſura-
 biles ſaltem potentia: Eſt tota diameter ejusdem
 circuli Rationalis erit proptereaq. latus pentagoni
 id eſt, Icoſaedri Irrationalis; erit linea vocata Mi-
 nor.

Corollaria.

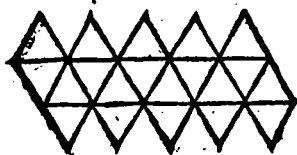
Diameter sphaerae est potētia quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. *Quadratum enim a b quintuplum est ostensum quadrati b c, id est, semidiametri e f.*

2. Diameter yz sphaerae componitur ex latere eq , hexagoni & duobus lateribus qz , ex decagoni ejusdem circulis $fg h i k$.

3. Latera Icosaedri opposita kx , hi , sunt parallela. *Quia eidem lp sunt parallela.*

Scholium.

Si triangula 20 disponantur hoc modo componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem.



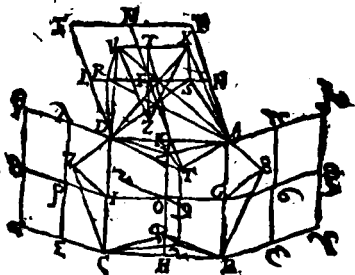
PROPOS: XVII

Problema 5.

Nn 5

Dode.

Dodecaedrum constituere & sphaera complecti, qua & praedictas figuras: & demonstrare, quod dodecaedri latus est Irrationalis linea, quae vocatur Apotome.



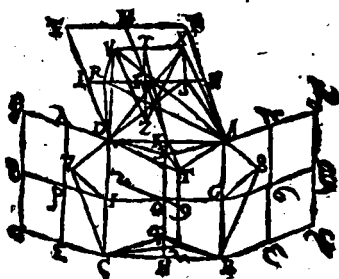
a 8. IV.

Sit una basis cubi, data sphaera comprehensi, quadratum a b c d cui aliud aequale ad angulos rectos insistat a d e f quorum communis sectio sit a d. Divisis cunctis lateribus bisariam in g, h, i, k, l, m, n, punctis, ijsq, connexis = secantibus se rectis in punctis o p, sequantur o k, p l, p n, extrema & mediaratione in punctis q r s ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares q t, r u, s x, aequales segmentis majoribus o q, p r, p s, & conjungantur rectis a t, a x, d t, d u, u x. Erit a t d u x, unum ex duodecim pentagonis aequilateris & equiangulis dodecaedri constituendi. Esse hoc in uno plano constat. Quia cum r u s x, ad quadratum

dratum a d e f, sine rectis & parallelis & aequales
tāquam equalium segmenta eadem: & Erunt et
iam r s u x illas connectentes aequales & parallelae. 86. XI.
733. I.

Et quia a d, r s, etiam aequales rectas parallelas
a n, d l connectentes, sunt parallelae; & erunt &
a d, u x parallelae, & has connectentes a x, d u, in
eodem cum ipsis plano. Et sic Trapezium a d u x 9. XI.
7. XI.
in uno est plano. Sed quia & triangulum a t d in
uno est plano; erit etiam in eodem cum trapezio,
Ducta enim p y, perpendiculari parallela ipsi r u;
connectantur k r, k y. Quoniam est, ut o k ad o q;
Ita o q ad q k: & k p equalis est ipsi o k. Quia
laterum cubi sunt dimidia, & p y ipsi o q., id est,
r u: erit etiam ut k p ad p y, ita o q, id est, q t,
ad q k. Quare cum triangula p k y, q t k duo latera
duobus, circum angulis conjunctis, proportionalia
habeant; latera q, p k, q k, homologa & p, r, e l l e l a,
quia utrumq, est rectum ad quadratum a b c d: &
p y, q k, parallela, quia utrumq, est rectum ad 332. VI.
4. XI.
quadratum a d e f: & erunt reliqua latera k y, k t,
in eandem rectam collocata, Et recta t y, in uno
erit plano, & sic plana a d t, & a d u x, unam
sunt planum per rectas a d, t y ductum. Est ergo
pentagonum a t d u x in eodem plano. Sed & e-
quilaterum esse ita patet. Triangula enim re-
ctangula a n s, a k q, duorum equalium la- 4. I.
terum a n, n s ipsis a k, k q; etiam bases a s, a q
habent aequales.

Rursus



- Rursus triangula rectangula asx , aqc , duorum
 equalium laterum as, sx , ipsis aq, qc , (quia sx, qc
 equalium eadem sunt segmenta) etiam bases ax ,
 et ac aequales habent. Idemq; in triangulis dqc ,
 dru , ostenderetur de lateribus cd , du , quod a-
 equalia sint ipsi at . Erunt ergo 4. pentago-
 nilatera equalia, quibus equalia etiam ostenderetur
 4. quadrata rectarum pn , ns , simul sunt tri-
 pla quadrati ps vel sx . Sed quadrato recte pn a-
 quale est quadratum recte an . Igitur & quadra-
 ta an , ns simul sunt tripla quadrati sx ; & illi
 equalia quadratum as ejusdem quadrati sx tri-
 plum: & quadrata as , sx simul quadrupla qua-
 drati sx : & sic ejusdem equalia & quadratum ax
 quadruplum quadrati sx , id est, quadrati ps , vel
 sx . Sed quia duple ipsius xy , id est xu ; Quadra-
 tum etiam est & quadruplum. Erunt quadrata ax ,
 xu equalia, ipsaq; recte aequales; cui ax cum &
4. I.
 4. XIII.
 47. I.
 34. I.

reliqua tria a r, c d du sunt equalia; Erit pentagonū
a r d u x equilaterum. Est verò & equiangulum.

Ductis enim a r, a u, cum p n sit in s secta media &, per schol.
extremā ratione, eiq; additā p r equalis majori se- 4. II.

mīto p s; ē erit quoq; n r secta in p extrema & me- 35. XIII.

dia ratione, majusq; segmentum n p. Erunt igitur
quadrata rectarum n r, r p. simul tripla qua-

drati n p, id est, a n. Est autem quadratum r u a-
quale quadrato r p. Ideoq; n r, r u etiam simul sunt

tripla quadrati a n; & proinde quadrata n r, r u,
a n, quadrupla sunt ejusdem quadrati a n. Sunt au-

tem quadrata n r, a n equalia quadrato a r. Igi-
tur & a r; r u quadrupla sunt quadrati a n, & il-

lis λ equalia quadratum a u, quadruplum recte a n.
Cumq; ejusdē a n duple ad quadratū sit etiā qua-

druplū quadrati a n. Igitur quadrata a d, a u sunt
equalia ipsiq; recte aequales. Eodemq; modo d x,

ad sunt aequales; & sic tres a d, a u, d x, sunt aequa-
les. Iam in triangulis t a d, & d u x, equalium

laterum ejusdem pentagoni, & basium a d, d x;
erunt & anguli a t d, d u x aequales. Eidemq;

d u x equalis a x u. Proinde, cum tres pentagoni
equilateri anguli sint aequales, erunt omnes in-

ter se aequales. Et sic pentagonum equilaterum
& equiangulum. Quod si sumantur alia duo cubi

quadrata c = p d, b γ d a, recta ad quadratum a
b c d, quorum singula latera secantur bisariani

tunc, o. λ, i r, ē = g punctis, quae jungantur rectis
secantibus

secantibus se mutuo in centro quadratorum e, a.
 Secentur jam o h, o k, e i, e g, extrema & me-
 dia ratione in punctis p, q, 3, 4, ex quibus plana
 quadratorum ad partes cubi exteriores perpendi-
 culares p 2, q t, 3 7, 4 8 aequales segmentis ma-
 joribus p o, q o, 3 e, 4 r, junganturque
 t z, z c, c 7, 7 d, d t, t a, a 8, 8 b, b 2: et
 eodemq, modo ostenduntur pentagona t z c 7 d &
 t 2 b 8 a, esse aequilatera & equiangula & a-
 equalia priori ob latera communia t d, t a. Et
 sic habent tria pentagona tangencia cubi tria la-
 tera a d, d c, a b, sibiq, mutuo coherencia late-
 ribus communibus t d, t a.

Qua methodo alia novem sunt fabricanda
 pentagona similia tangencia reliqua novem cu-
 bilatera, & habebitur sphaera comprehensum
 Dodecaedrum.

Iam intelligantur plana cubi opposita si-
 cari planis a d e f, & a b c d, per rectas pla-
 norum latera bisariam secantes k m & l n, g i
 & h k ductis.

19. XI. Haec plana secantia cum sint recta ad pla-
 na cubi, utpote parallela basibus cubi, recta ad
 plana a d e f, a b c d; e. erant & sectiones
 eorum communes ad cubi plana recta.

Ideoq, cum yp sit recta ad planum $adef$, ipsa versus z producta erit communis sectio planorum per rectas k, m, l, n ductorum.

Ita, si ex o ad planum $abcd$ erigatur perpendicularis goz : Erit ipsa communis sectio planorum per rectas gi, h, k , ductorum. Sed quia dictae omnes sectiones & diametri cubi se mutuò bisariam secant: Secent se in z ; & bisariam sese diametri cubi secant in centro sphaerae cubum complectentis.

39. XI.
cor. I. 13
XIII.

Erit igitur z centrum sphaerae circa cubum descriptae. & omnes lineae z , ad omnes angulos cubi erunt aequales.

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z ductae rectae erunt iisdem omnes aequales.

Ducta enim zx : quoniam parallelae sunt k, p, o, z , cum utraque sit recta ad planum $abcd$:

Itemq, & ok, zp tanquam rectae ad planum $adef$: erit pko, z (quia duo z conjuncta debent intelligi) parallelogrammum, & $pz =$ equalis ko , vel np , dimidio lateris cubi.

Est autem py , ipsi pr : aequalis, tota ergo $z\gamma$, tota nr aequalis erit.

Quare

• 15. V:

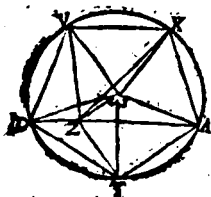
• 22. VI:

Quare cum quadrata nr , pr , simul sint tripla quadrati np , quod nr in p media & extrema ratione est secta; erunt etiam quadrata zy , py ; id est, zy , xy . simul tripla quadrati ps , quia xy , equalis est ipsi ps vel py . Sed quadratis zy , xy , λ equale est quadratum zx : Erit igitur & hoc triplum quadrati $z p$, id est, quadrati dimidij lateris cubi; cujus etiam triplum est quadratum semidiametri sphaerae cubum comprehendens (ut enim diameter ad latus cubi: Ita semidiameter ad dimidium cubi. Ideoque, o ut quadratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri sit triplum quadrati lateris; erit & semidiametri quadratum triplum quadrati dimidij lateris.) Erit itaque, quadratum zx , quadrato semidiametri sphaerae seu cubi aequale: Ipsaque, zx , equalis semidiametro. Eadem semidiametro & zu , quia zu & zx rectorum aequilaterorum zyx , & zyu bases sunt, est & equalis: cumque, & za , zd , ad angulos cubi, semidiametro sphaerae sint aequales, ut antea dictum, erunt jam ex centro z , ad α . angulos pentagoni a , d , u , x , aequales semidiametro sphaerae. Sed quod eodem semidiametro equalis etiam sit zt , ad angulum t , quintum, ita patet; si circa pentagonum aequilaterum illud describatur circulus $atd ux$, in cuius planum ex z centro sphaera demittatur perpendicularis.

LIBER XIII.

37

pendicularis z . & z connectatur cum a, t, d, u, x punctis. Quoniam quadratum $z a$ equale est quadrato $z u, u a$; & quadratum $z x$, equale quadrato $z u, u x$; erunt, subtracto communi quadrato $z u$, ex quadratis equalium restatum $z a, z x$,



equalia quadrata $u a, u x$; ipsæq; rectæ $u a, u x$ æquales.

Nec aliter rectæ $u u, u d$,

& inter se & ipsæ $u a, u x$

æquales sunt, quia $z u, z d$

sunt ostensa æquales. Cum

ergo ex u plures duabus æ-

quales cadant in periphe-

riam; x erit u centrum circuli. Ideoq; $u t$, reliquis $x y$. Illi

ex centro u equalis erit, & quadrata $z u, u t$, equalia

quadratis $z u, u a$, efficiunt æquales $z t, z a$. Ex z

igitur centro sphaera descripta complectens cubum, com-

prehendit etiam pentagonum $a t d u x$. Eodemq;

modo & omnia dodecaedri latera, adeoq; & spha-

ra eadem comprehenduntur cubus & dodecaedrum.

Deniq; cum sit, ut $n p$ ad $p s$; ita $p s$ ad $s n$. Erat

quoq; ut $n l$ dupla ipsius $n p$, ad $r s$ duplam ipsius $p s$:

ita $r s$ ad compositum ex $b n, r l$, seu duplam ipsius

$s n$. Si igitur latus cubi $n l$ secetur extrema &

media ratione, majus segmentum erit $r s$; sed $n l$

tota ita secta, est Rationalis, cum ipsius quadratum

quadrato diametri sphaera Rationalis sit commen-

surabile, tanquam hujus pars tertia. Majus igitur

segmentum $s r$, id est, latus dodecaedri $x u$, illi

æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

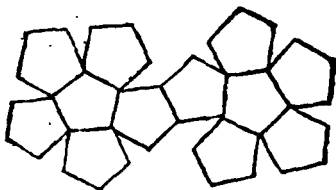
Corollarium.

Si latus cubi secetur extrema & media ratione, majus segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

Recta enim In, æqualis lateri cubi, secta extrema & media ratione, majus segmentum habet r s latus dodecaedri.

Scholium.

Si duodecim Pentagona hoc modo disponantur æquiangula & æquilatera; componetur ex illis dodecaedrum secundum totam soliditatem.

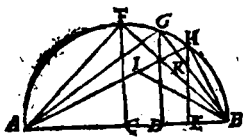


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

Dicitur.



Diameter a b secetur
bisariam in c, & ab-
scindantur b d, pars
tertia, & b e pars
quinta diametri; su-
perq; a b describatur

semicirculus, & erigantur perpendiculares c f, d g,
e h; connectanturq; f g h, cum a & b. Hinc ex
a h abscindatur aequalis lateri decagoni h i, cuius se-
midiameter scilicet hexagoni est b h: & conne-
ctantur b i. Deniq; b g secetur media & extrema
ratione in k, ut b k sit segmentum majus: erit a g
latus pyramidis, vel Tetraedri: a f latus Octaedri;

b g latus cubi; b i latus Icosaedri, b k latus Dode-
caedri. Quia enim a g est media proportionalis

cor. 8. VI

inter b a, a d; & erit, ut b a ad a d ita quadra-
tum a b ad quadratum a g. Est autem a b ad a d

cor. 20. VI

sesquialtera: Igitur & quadratum a b, quadrati
a g sesquialterum erit. Et sic a g est latus Tetra-
edri, cuius lateris est sesquialtera potentia diame-
ter. Rursus quoniam a f est media proportionalis

13. XIII,

inter b a, a c; erit rursus, ut b a ad a c, ita
quadratum b a, ad quadratum a f. Est autem

b a dupla ipsius a c: Igitur & quadratum a b,
quadrati a f. Et sic a f est latus octaedri, quippe

diameter est potentia dupla lateris octaedri. Dein
de cum b g sit media proportionalis inter a b,
b d; & erit, ut a b ad b d, ita quadratum a b ad

14. XIII.

quadratum b g. Est autem a b tripla ipsius b d:

q 15. XIII. Ergo & quadratum a b quadrati b g : & sic b g
 latus cubi ; quia diameter sphaera potentia est tri-
 pla lateris cubi. Postea proportionales = etiam sunt
 a b, b h, b e, & est q, ut a b ad b e, ita quadratum
 a b ad quadratum b h. Est autem a b quintupla
 ipsius b e : Ergo & quadratum a b quadrati b e.
 Cum igitur diameter sphaera potentia sit quintupla
 semidiametri circuli quinq, latera Icosaedri am-
 bientis, erit b h dicti circuli semidiameter, vel la-
 tus hexagoni. Est autem h i latus decagoni ejusdem
 circuli. Ideoq, b i potens = latus hexagoni b h &
 decagoni h i, erit o latus pentagoni ejusdem circuli.
 Et sic b i latus Icosaedri, Deniq, cum b g latus cu-
 bi sit extrema & media ratione sectum in k, & erit
 b k segmentum majus latus dodecaedri. Quinq,
 ergo figurarum regularium latera sunt exposita.
 Comparatio eorundem sic habet : | Quoniam dia-
 meter sphaera est potentia sesquialtera lateris py-
 ramidis : & potentia dupla lateris octaedri ; &
 potentia tripla lateris cubi ; erant partium talium
 quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium,
 Cubi duarum, qualium diameter est sex. Pro-
 deq, latus Tetraedri ad latus Octaedri potens
 sesquitertium est : Et ad latus Cubi potentia di-
 plum, Latus autem Octaedri ad latus Cubi po-
 tens sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum
 quadrata & diametri sphaera sunt inter se ut nu-
 merus ad numerum. Ideoq, sunt linea inter se

commensurabiles. Et propter diametrum Rationalem reliquæ etiam rationales sunt, Cumq̃
 non sint ut numerus quadratus ad quadratum, corol. 25.
 & nec erunt longitudine commensurabiles. Et sic VI II.
 Rationales potentia solum commensurabiles. At
 verò latera Icosædri & Dodecædri, quoniam sunt § 9. X.
 lineæ Irrationales, illud Minor, hoc Apotome, nec
 longitudine nec potentia productis sunt commen-
 surabiles. Si enim essent lateribus tribus prioribus
 commensurabiles, quæ diametro Rationali sunt
 commensurabilia, essent ipsæ quoq̃ Rationales
 quod absurdum, quia sunt Irrationales. Sed nec
 inter se sunt commensurabilia latera Icosædri &
 Dodecædri. Si enim longitudine inter se essent
 commensurabilia, Essent utraq̃ ejusdem speciei
 vel Minores vel Apotome. Si autem solum potentia, 104. X.
 eodem modo latus dodecædri erit Minor, quia
 Icosædri latus est Minor e. Quod absurdum, 106. X.
 quia nullæ Irrationales specie differentes, eodem, 10. XIII.
 sunt. Quamquam itaq̃ trium priorum quidem 102. X.
 figurarum latera tum inter se, cum ipsi diametro
 sphaera sunt commensurabilia & Rationalia: duo
 verò posteriora hysdem & diametro & inter se in-
 commensurabilia & Irrationalia: Inter eas ta-
 men figuras occurrit hic ordo, ut eodem ordine se
 excedant earum latera, quo ipsas construximus.
 Quamquam cum ordinem in definitionibus, non ob-
 servavit Euclides. Majus enim est latus Tetrae-
 dri a g, latere Octædri a f: quia majorem sub-

28. III.

20. VI.

15. XII.

10. V.

corol. 2.
16. XIII.

tendit arcum: Et hoc majus τ latere cubi $b g$. α
 bi autem latus majus esse latere Icosaedri ita patet.
 Quoniam $a b$ ponitur tripla ipsius $b d$, ν erit pro-
 pter duplicatam quadratorum rationem quadra-
 tum $a b$, nuncuplum quadrati $b d$; quia nuncupla
 est duplicata tripla. Propterea, qualium partium
 quadratum est novem, talium unum habet $b d$.
 Earundem autem est quadratum $b g$ trium, quod
 illud hujus sit ϕ triplum. Erunt igitur quadra-
 ta $g d$ & $d b$, etiam talium trium: sublatoq;
 quadrato $b d$; unius; erit $d g$ talium duarum.
 Sed quia quadratum $a b$ est quintuplum quadrati
 $b h$. χ erit hoc minus quam talium z ; quia $g a d$
 minorem quintupla habent proportionem. Idemq;
 quadratum $g d$ majus est quadrato $b h$, & $g b$
 major quam $b h$. Rursus quia diameter sphaerae
 & componitur ex $b h$ semi diametro circuli, ex qua
 Icosaedrum constituitur, & duplo decagoni $h i$.
 Erat latus decagoni $h i$ minus tertia parte $b d$ dia-
 metri $a b$. Si enim credatur equalis ipsi $b d$, τ
 duplum decagoni esset equale ipsi $a d$, & $h b$ &
 $d b$. Ideoq; quadratum $a b$ nuncuplum quadrati
 $b d$, erit etiam nuncuplum quadrati $b h$, ϵ
 modo erat quintuplū. Non ergo est $h i$ tertia pars
 ipsius $a b$. Sed neq; major. Si n. ducatur major ter-
 tia parte $b d$ erit. ϵ ipsius dupla major dupla
 tertia $a d$. Et sic $b h$ erit minor parte tertia
 Adeoq; quadratum $a b$, minus quam nuncuplum
 quadrati $b d$; quod magis ϵ absurdum. ϵ

ergo hi *ne* equalis sit nec major tertia parte, erit
 necessario minor. Itaq, cum gd, db sint majores
 et bh, hi , ut ostensum est: erunt etiam ipsa-
 rum quadrata majora, harum quadratis, sed qua-
 ratu recte bg est *ne* equale quadratis gd, db ; &
 quadratum bi equale quadratis bh, hi : Ergo qua-
 ratu bg majus erit quadrato bi ; latus cubi latere
 octaedri. Deniq, Icosaedri latus bi majus est latere
 dodecaedri bk , quod est segmentu majus linea bg
 extrema & media ratione secta. Est enim rectan-
 gulum sub bg, bk majus rectangulo sub bg, gk a-
 q, rectangula sub bg, bk & sub bg, gk si-
 ul, id est, *ne* quadratum bg , majora sunt duplo
 anguli sub bg, gk , id est, A quadrato bk bis.
 uia bg, bk, gk sunt proportionales, & quadra-
 ti bk , equale est rectangulo sub bg, gk . Idcirco
 iora erunt tria quadrata recte bg , sex quadra-
 recte bk ; sed tribus quadratis bg equalia sunt
 Quadrata bh . (quia quadratum ab tam est
 olum quadrati gb , quam quintuplum quadrati
) unumq, quadratum bg majus erit uno qua-
 ro bh . (si enim esset equale quadratum bh ,
 drato bk , vel minus; & quadrata bh essent
 iora sex quadratis bk , quibus tamen majora
 : ostensa.) Et recta bh major, quam recta bk :
 q, bi major sit quam bh ; erit etiam major
 bk , latus Icosaedri latere Dodecaedri. Ex-
 a itaq, sunt latera quinq, figurarum & inter
 nparata. Quod erat faciendum.

F I N I S.

2. I.
A 17. VI.

Corrēctiones Erratorum &c. tantiorum.

Pag.	Lin.	Errata	Corrēctiones.
4	5	nea	linea
16	23	ada	ad c
13	11	ex	&c
	12	abc	totus abc
27	12	p f	d f
40	12	idemq; e c b	deniq; e b
42	15	punt	fiunt
	18	fila a c	pla a c
43	8	ad b g	a vel b g
59	in marg.	g. 47. l.	y 2. ar.
69	penult.	in marg. omif.	a. 12. lll.
113	17	& g	h g
137	19	prout	praxis
164	7	ante o q omif.	am, quod deficit parallelogrammo
165	3	inverfa	inventā
218	desult.	denominatas	denominantur ;
227	15	Ergo f non ex	deleantur
277	14	per	qui
333	9	humorē	modo
338	in marg.	§ 33 X l.	33. lll.
362	25	quartus	in 49
364	ult.	habeatur	habeatv
415	11	e f	ex
428	19	faciunt	facienti
443	penult.	a had h e	ad h g
469	6	a u	bc
470	30	bd, ag	bg, ad
497	13	erunt & if	& cd & if
506	in marg. omif.		a 33. X l.

