

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque électronique suisse

LES
E L E M E N S
DE LA GEOMETRIE
D'EVCLIDES MEGARIEN.

Traduits & restitués à leur ancienne breueté, selon
l'ordre de Theon. Ausquels ont esté adioustez
les quatorze & quinziésme d'Ipicles
Alexandrien.

Le tout par DOVNOT DE BAR-LE-DVC, Docteur
*es Droicts, & Professeur en la diuine Mathematique
aux Academies du Roy.*



A PARIS,
Chez IACQUES LE ROY, à l'Esperance deuant
le College de Cambray.

clo lcc. x.



L'AVTHEVR

Au Lecteur.



L semble que la breueté & l'obscurité
soient tellement liées, que l'une ne
puisse estre sans l'autre: la premiere est
tant commune à la Geometrie, qu'elle
ne peut euirer la reputation de la der-
niere. Ainsi disoit vn ancien. *Quis igno-
rat, ij qui Mathematici vocantur, quanta
in obscuritate rerum, & quam recondita in arte versentur.*
Cependant & Aristote negligé la paraphrase, & Archi-
mede s'expédie en deux mots: que dirons nous de Pro-
lomée avec son Almageste tant racourcy? Et à mon iu-
gement, ces trois sont les plus excellens de toute l'anti-
quité, pour establir vne doctrine solide. Pappus repré-
sente si naïfvement son Archimede, qu'il semble auoir
peur de mettre quelque parole inutile. Quant à Eucli-
des, il est bien difficile de iuger, s'il a esté amateur de
cette breueté: puis qu'il ne nous reste de luy quasi pres-
que que la memoire de son nom. Car si on préd garde
aux demonstrations que Proclus luy attribue: tout l'ou-
rage des Elemens demeurera entierement à Theon.

Quoy que ce soit, tous les grands personnages ont affecté la breueté, bien que non pas si heureusement les vns comme les autres. Le Sieur de Candalles surprend quelquefois Theon en paralogisme, pour estre trop court: & quelquefois, Campanus luy semble se fier trop à son esprit. Ainsi ce sont les choses à demy prouuées qui engendrent l'obscurité, & en cette façon doit estre prise le dire du Poëte Lyricque, *Breuis esse laboro obscurus fio*. Non pas qu'il condamne le racourcissement des paroles, puis qu'ailleurs il veut que l'on s'en serue, *Quicquid præcipias esto breuis*. Nonobstant cela Theon & Campanus ont conserué long temps la dictature en cette Province: Iusques à ce que l'ignorance du temps, & le peu de soin des Libraires, a laissé glisser plusieurs erreurs dās leurs liures, qui les ont rendu presque incomprehensibles. Ainsi si tost que l'on a veu renaistre les bonnes lettres, les premiers Mathemathiciens ont fort bien iugé qu'ils auoient besoin de reformation: mais ils ont entrepris ce reſtabliſſement tout à contrepied. Car eſtimans que cette obscurité procedoit du peu de paroles, & que par icelles la promptitude de memoire estoit empeschée: Ils ont despliés les demonstrations, & par paraphrases infames ils ont baillé vingt paroles pour deux. De façõ que pensans rafreschir la memoire par redittes inutiles, Ils ont estourdy la viuacité d'esprit de ceux qui apprennent, sans considerer que les anciens auoient produict tant d'excellens Geometres, avec leurs courtes demonstrations. Aussi n'ont-ils rien aduancé iusques icy, que de rendre la Geometrie odieuse, & tourmenter les subtils & genereux esprits qui la connoient.

Ce n'est pas que ie vueille dire qu'il faille trancher si court les Elemens, comme si on auoit affaire à des Geometres desia faicts: N'y qu'il faille demonstrier comme Archimedes, Pappus, Appollonius, Ptolomée: lesquels parlent en grands Seigneurs, & ne prouuent la pluspart de ce qu'ils disent, sinon ce qui est plus difficile. Mais il y a vn chemin mediocre, par lequel toutes les difficultés sont esclaircies, sans auoir tant de langage. Ainsi ceux qui sont venus apres considerans ce deffaut, l'ont reparé en partie, en partie ont augmenté le mal par vne effrenée & insatiable ostentation. Car lors qu'ils font parade de leurs esprits en demonstrent vne mesme chose de trois ou quatre façons, ou qu'ils se contraignent de prouuer par certaines propositions, en repudiant les autres: Que font ils autre chose, que se mettre des entraues, pour marcher avec plus de peine, & grossir leurs liures d'un travail inutile. Vn grand esprit de nostre siecle auoit entrepris de deliurer la Geometrie des demonstrations literalles. il nous reste encores quelque chose de son travail, mais travail qui a mal reüssi: Car il est tombé dans l'obscurité, sans auoir affecté la breueté. Je dis donc que celuy la emportera le pris qui sera court & intelligible. Quant a moy i'ay bien visé à tous les deux, & suis certain d'en auoir touché l'un, mais ie doute de l'autre. C'est de ton equitable iugemēt (amy lecteur) que m'en viendra la cognoissance. Mon dessein a esté tel. Je me suis vn peu eslargy aux demonstrations des quatre premiers liures, tant par ce que cest le commencement de la Geometrie, & que l'explication en doit estre vn peu plus familiere, que aussi les demonstrations d'elles mesmes, estoient assez courtes: Et

EPISTRE AV LECTEUR.

aux endroicts ou elles me sembloient embarassées par leurs prolixitez, ie les ay racourcy par sommaires, afin que par iceux, le lecteur ait vne idée du chemin que tient le Geometre pour paruenir à sa conclusion, lequel autrement estoit difficile à recognoistre parmy la confusion de tant de preuues. Aux cinq liures d'apres, i'ay pris vn peu plus de licéce à racourcir: Mais i'ay employé tout mon estude, & mon trauail au dixiesme liure, voyant que chacun le tenoit pour fort difficil. Aussi qui considerera le grand nombre de lemmes, & de corollaires que i'ay retranché de ce liure, sans auoir grossi mes demonstrations, ny les auoir laissé defectueuses, & imparfaites; iugera aisément que ie y ay employé du temps. En beaucoup d'endroicts, i'ay esté contrainct de changer la demōstration du tout, lors qu'elle s'appuyoit sur lemmes, ou corollaires que i'auois reiecté. Autrement i'eusse esté contrainct de mettre deux demonstrations en vne. Quant aux quatorze & quinziesme liure, i'auois deliberé les retrancher du tout, n'estās iceux d'Euclides, que mesmes ils sont superflus à l'ouurage des Elemens, qui doit estre terminé à l'inscription des cinq figures regulieres dans vne mesme sphere: Veu mesmes que la fin d'iceux (comme enseigne Proclus) est la mesure d'icelles cinq figures, que Platon au Timée appelle mondaines: attribuant la Pyramide au feu, le Cube à la terre, l'octaèdre à l'air, l'icosaèdre à l'eau, & le dodecaèdre au ciel, le tout enfermé dans vne mesme sphere. Toutefois considerant le petit nombre de propositions, bien qu'elles n'ayent gueres d'vtilité, ie les ay ioinct avec les autres. Voila mon trauail: recois-le (Amy Lecteur) & qu'il te profite. A.D.I.E.V.



ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.



Epoinct n'a aucunes parties.

La ligne est vne longueur sans largeur.

Les extremittez de la ligne sont points.

La ligne droite est egallement comprise entre ses poincts.

Superficie: a longueur & largeur tant seulement.

Les extremittez de la superficie ce sont lignes.

Superficie plane est egallement comprise entre ses lignes.

Angle plan est l'inclination de deux lignes sur vn mesme plan, se rencontrans en vn mesme point, lesquelles estant continuees s'entrecouperont.

Si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera rectiligne.

Si vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite faict deux angles egaux entre eux, les angles sont appelez droitz, & la ligne est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

Angle obtus est plus grand qu'un droit.

Angle aigu est plus petit qu'un droit.

Terme est l'extremite de quelque chose.

Figure est comprise par vn ou par plusieurs termes.

Cercle est vne figure plane cōprise d'une seule ligne appelée

circonference vers laquelle toutes les lignes venant du centre sont egalles entre elles.

Le point du milieu du cercle est appellé centre.

Diametre du cercle est la ligne droite, laquelle passant par le centre du cercle le diuise en deux egallement.

Demi cercle est vne figure comprise du diametre, & de partie de la circonference.

Section de cercle est vne figure comprise d'une ligne droite, & de partie de la circonference.

Figure rectiligne est comprise de lignes droites.

Figure de trois costez est comprise de trois lignes.

Figure de quatre costez est comprise de quatre lignes.

Figure de plusieurs costez est comprise de plus de quatre lignes.

Le triangle equilateral a les trois costez egaux.

Triangle Isocele a deux costez egaux tant seulement.

Scalene a les costez inegaux.

Le triangle est rectangle qui a vn angle droit.

Ambligone qui a vn angle obtus.

Oxigone qui a les trois angles aigus.

Le quarré a les quatre costez egaux, & les quatre angles droits.

Quarré long a les quatre angles droits, mais non pas les costez egaux.

Rhombes est equilateral, mais non pas rectangle.

Rhombes a les angles & les costez opposez egaux sans estre rectangle ny equilateral.

Toute autre figure de quatre costez est appellée Trapeze.

Lignes paralleles sont, lesquelles estant constituées sur vn mesme plan, & prolongées de part & d'autre à l'infini ne se rencontrent iamais.

DEMANDES.

DVn point donné à vn autre point mener vne ligne droite.

Continuer infiniment vne ligne droite terminée.

Descrire vn cercle de quelque centre & interval que ce soit.

COMMUNES SENTENCES.

LEs choses égales à vne sont égales entre elles.

Si à choses égales on adioute choses égales, les tous sont égaux.

Si de choses égales on oste choses égales, les restes sont égaux.

Si à choses inégales, on adioute choses égales, les tous sont inégaux.

Si de choses inégales on oste choses égales les restes sont inégaux.

Les choses doubles d'une autre sont égales entre elles.

Les moitez d'une mesme chose ou de choses égales sont égales entre elles.

Les choses qui conuiennent entre elles sont égales entre elles.

Le tout est plus grand que sa partie.

Tous les angles droicts sont égaux entre eux.

Si vne ligne droite en coupant deux autres lignes droites fait les angles interieurs d'un mesme costé plus petits que deux droicts, icelles continuées à l'infini se rencontreront du costé où les angles sont plus petits que deux droits.

Deux lignes droites ne comprennent pas vn espace.

Cercle est vne figure plane cōprise d'une seule ligne appelée

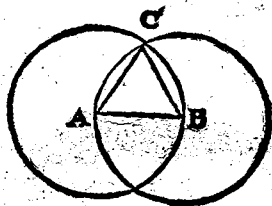
ELEMENT PREMIER

PROP. I.

Sur vne ligne droite donnée & terminée descrire vn triangle equilateral.

Soit la ligne donnée A B sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Sur les extremités d'icelle A & B soient descripts deux cercles del'intervál de la ligne donnée, & se coupans au point C: duquel point soient menez les deux lignes droictes C A & C B. Je dis que le triangle A B C est equilateral, c'est à dire qu'il a les trois costez egaux.



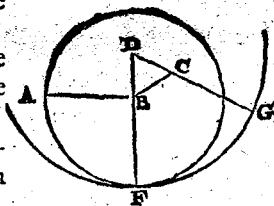
Car le costé A C est egal au costé A B par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé B A est egal au costé B C. Donc par la 1. com. sent. les costez C A & C B seront egaux, estant chacun egal à A B & les choses egales à vne sont egales entre elles.

PROP. II.

D'un point donné mener vne ligne droite egale à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné C, duquel on doit mener vne ligne droite egale à la donnée A B.

Soit mené vne ligne de B à C, & sur B C soit basti le triangle equilateral B C D par la 1. p. 1. Plus du centre B & du tefnal B A soit descript vn cercle, & soit continuée la ligne B D iusques à la circonference F. semblablement du centre D en interval D F soit descript vn cercle, à la circonference duquel soit continuée la ligne D C iusques en G. Je dis que C G est la ligne demandée egale à A B.



Car D C & D F sont lignes egales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste D B & D C qui soient egales, estant D B C triangle equilateral les restes B F & C G seront egales par la 3. com. sent. Mais B A est egal à B F parce qu'elle procedé de mesme centre vers vne mesme circonference: Donc C G sera egal à B A, parce que les choses egales à vne sont egales entre elles.

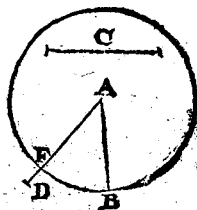
ELEMENT

PROP. III.

Deux lignes droites inegales estant donnees oster de la plus grande vne partie egalle à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales AB & C desquelles C est la plus grãde, & d'icelle il faut oster vne partie egalle à AB.

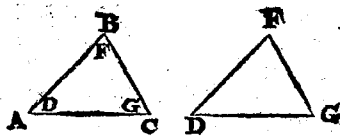
Soit mené du point A la ligne AD egalle à C par la 2. p. 1. & du centre A & interual AB soit décrit vn cercle coupant DA au point F. Il est euident que AF, & AB seront égales par la deffinition du cercle: dont on a ce qu'on auoit demandé.



PROP. III.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & les angles compris d'iceux costés, egaux, ils auront les bases egales, & les autres angles egaux, chacun au sien, & le triangle sera egal au triangle.

Soient deux triangles ABC & DFG desquels les deux costez egaux chascun au sien, sçauoir BA à DF: & BC à FG & l'angle B egal à l'angle F. Je dis que la base AC est egalle à la base DG: l'angle A à l'angle D. & l'angle C à l'angle G, & le triangle au triangle.



Qu'il ne soit ainsi, Si la ligne DF egalle à AB tombe sur icelle, elle la couurira egallemēt, tōbāt le point D sur le point A, & le point F sur le point B, pareillemēt l'angle B estant egal à l'angle F, la ligne FG tōbera sur BC, estāt DF sur AB. Que si quelcun le nioir, sçauoir que DF, estans sur AB, que FG ne tombasse sur BC, ou elle tomberoit dans le triangle ou dehors, & par consequent l'angle F seroit plus petit ou plus grand que l'angle B, & on les a posez egaux: donc FG couure BC, & icelles lignes, estant posées egales, le point F tombant sur B, le point G tombera sur C. De sorte que A & D feront vn mesme point. Item G & C, vn mesme point: & il est euident que les bases AC & DG sont egales: ainsi les triangles auront les trois costez egaux aux trois costez, chascun au sien, & estans couchez l'un sur l'autre, ils seront enclinez l'un comme l'autre, & les angles seront egaux aux angles, comme estans produits de mesme inclination de ligne. Que si les angles & les costez sont egaux, aussi les triangles seront egaux.

PROP. V.

Les triangles Iſoſceles ont les angles ſur la baſe egaux , & les coſtez egaux eſtans continuez, les angles extérieurs ſoubs la baſe ſont egaux.

Soit le triangle Iſoſcele ABC. Je diſ que les angles A BC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont egaux.

Qu'il ne ſoit ainſi, ſoient prolongés AB & AC, qui ſont les coſtez egaux du triangle Iſoſcele iulque en D. & F: & ſoit fait AD egale à AF par la 3. p. 1. & ſoient menées les lignes BF & CD, les deux triangles ADC, & AFB, ayans l'angle A commun, ont les deux coſtez AD & AC egaux aux deux coſtez AF & AB, chaſcun au ſien & par la 4. p. 1. la baſe BF ſera egalle à la baſe CD, & l'ag. ABF ſera égal à l'ag. ACD. Itē les angles D, & F ſont egaux, & les triagl. DCB, & FCB, ayans l'angle D égal à l'angle F, & les deux coſtez DB, & DC, egaux aux deux coſtez CF & FB. car BF a eſté prouvé tantotſt égal à DC, & ſi AD & AF eſtant egaux, & AB, & AC, auſſi egaux, les reſtes BD, & CF ſeront auſſi egaux par la 4. p. 1. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, chaſcun au ſien: ſçavoir l'angle BCD, ſera égal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACD, oſte les angles egaux CBF, & BCD, les demeurans ABC, & ACB, ſeront egaux.

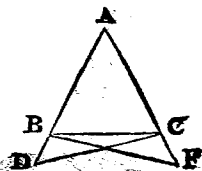
Pour la ſeconde partie. Que les angles extérieurs ſoubs la baſe ſont egaux, ſçavoir DBC à BCF, elle a eſté ſuffiſamment demonſtrée, lors qu'on a prouvé que les triangles BDC, & CFB, auoient leurs angles egaux chaſcun au ſien.

SOMMAIRE.

Les angles ABE, & ACD ſont egaux.

Mais le retranché CBF eſt égal au retranché BCD.

Partant le reſte ABC eſt égal au reſte ACB.

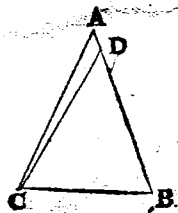


PROP. VI.

Les triangles qui ont les deux angles ſur la baſe egaux ont les deux autres coſtez egaux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ACB, & ABC ſur la baſe BC ſont egaux, Je diſ que les deux autres coſtez AC, & AB ſont auſſi egaux.

Autrement ſoit AB plus grand que AC, s'il eſt poſſible on en pourra retrancher vne partie egale à AC, par la 3. p. 1. ſoit icelle BD egale à AC, & ſoit menée la ligne DC: ainſi les deux triangles DBC, & ACB, ont les deux coſtez BD,

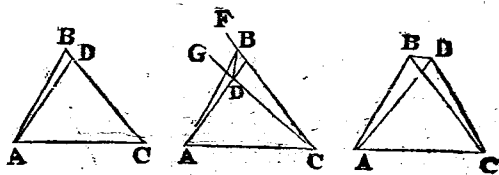


& BC egaux aux deux costez AC, & CB, & l'angle B egal à l'angle ACB, & par la 4. p. 1. ils seront egaux, ce qui est impossible: car l'un est partie de l'autre: dont les costez AC, & AB n'estoient pas inegaux. Partant egaux.

PROP. VII.

Si deux lignes droites menées des extremités d'une autre ligne droite se rencontrent en un point: & des mesmes extremités on en mene deux autres egales aux deux premieres, elles se rencontreront au mesme point: pourueu que chascune soit du costé de son egale.

Soient les deux lignes droites menées AB, & C B, menées des extremités A & C, de la ligne AC, se rencontrans au point B



Je dis que si des mesmes points A & C on en mene deux autres egales aux deux premieres, chascune du costé de son egale, qu'elles se rencontreront au mesme point D, comme les premieres.

Autrement si quelcun le nioit, il est evident que les dernieres lignes menées egales aux deux premieres AB, & CB, si elles, ne se rencontrent au point B, comme les deux premieres qu'elles se rencontreront ou en un point, dans le triangle ABC, ou en un point hors iceluy, ou en un point sur la ligne AB ou sur la ligne CB.

Premierement iceluy point de rencontre ne peut estre sur la ligne CB, car s'il est possible soit au point D. Il faudroit que les deux lignes AD, & CD fussent egales aux deux AB, & CB: sçavoir CD à CB, la partie autour: ce qui est absurde, partant la rencontre ne se fera point sur CB, ny sur AB à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre dans le triangle ABC comme au point D: & apres avoir prolongé CD iusques en G, & CB iusques en F, soit menée BD puis que les deux lignes AB, & AD doivent estre egales, le triangle ABD sera isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles ABD & ADB sur la base BD seront egaux pour la mesme raison, le triangle CDB doit estre isoscele, & les angles sous la base DB exterieurement, sçavoir FBD & GDB seront egaux par la 5. p. 1. ce qui est evidemment faux, car tantost l'angle ABD, qui n'est que partie de l'angle FBD estoit egal à l'angle ADB, qui est encores plus grande que l'angle GDB. Ainsi il est evident que le point de rencontre ne se pouvoit faire dans le triangle ABC, d'autant que quelque point qu'on puisse prendre dans iceluy, il s'en suivra mesme absurdité.

PREMIER.

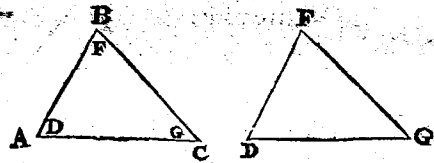
Soit donc iceluy point de rencontre hors iceluy triangle, comme au point D s'il est possible apres auoir mené la ligne BD, il s'ensuiura que les deux triangles BAD & BCD seront Isosceles, & qu'ils feront les angles sur la base BD egaux: ce qui est aussi faux comme cy dessus, d'autant que la partie seroit plus grande que le tout, comme il se voit euidentment. Le point de rencontre ne se fera pas donc hors le triangle, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AB & CB: Il faut donc que ce soit au point B.

PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base egale à la base, ils auront aussi l'angle egal compris d'iceux costez egaux.

Soient deux triangles ABC & DFG desquels le costé AB est egal à DF, BC à FG, & la base AC à la base DG; Je dis que les angles B & F sont egaux entre eux.

Car puis que la base AC est egale à la base DG estant posées l'une sur l'autre, elles se couvriront tombant le point D sur le point A, & G sur C: & par la 7.^{me} p. 1. les deux lignes DF & FG qui sont egales à AB & BC se rencontreront au point B, & couvriront les deux lignes AB & BC: partant elles seront semblablement enclinées, & feront angles egaux, sçavoir ABC & DFG, qui sont compris d'icelles lignes.



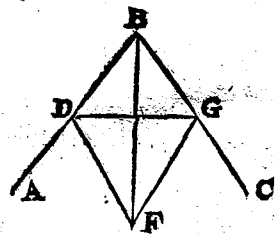
PROP. IX.

Couper en deux egallement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné ABC, lequel il faut couper en deux egallement.

Soit de AB, & CB retranché deux parties egales BD & BG: & apres auoir mené la ligne DG sur icelle soit basti le triangle equilateral DFG par la 1.^{re} p. 1. & soit menee la ligne BF. Je dis que icelle ligne coupera l'angle ABC en deux egallement.

Car les deux lignes BD & BF du triangle DBF sont egales aux deux lignes GB & BF du triangle CBF, & la base DF egale à la base FC estant DFC triangle equilateral par la 8.^{me} p. 1. l'angle DBF sera egal à l'angle GBF ce qu'il falloit faire

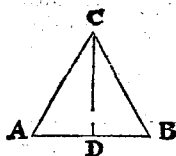


PREMIER.

PROP. X.

Couper en deux egallement vne ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne donnée & terminée AB, laquelle il faut couper en deux egallement: soit sur icelle ligne construit le triangle equilateral ACB, par la 1. p. 1. & soit l'angle C couppe en deux egallement par la ligne CD par la 9. p. 1. Je dis que CD coupe AB en deux egallement en D.

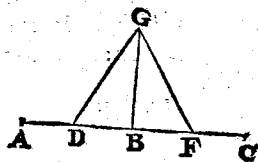


Car puis que les angles du point C sont egaux, & le triangle ACB est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez egaux à deux costez & vn angle egal à vn angle: qui sont sous le point C, & par la 4. p. 1. la base AD sera egale à la base DB.

PROP. XI.

Sur vne ligne droite donnée, & d'un point en icelle mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droite donnée AC, & le point en icelle B: d'iceluy point il faut mener vne ligne perpendiculaire.



Soient du point B prises les deux lignes egales BF, & BD par la 3. p. 1. & sur DF soit bastie le triangle equilateral DGF, & soit menée la ligne DG: Je dis que icelle DG est la ligne perpendiculaire demandée.

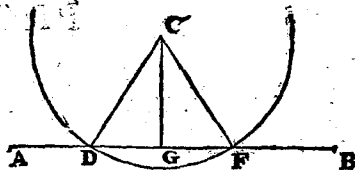
Car les triangles DGB, & FGB, ayans les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, sçauoir DB à BF: & DG à GF, par la construction & GB, comme ils auront les trois angles egaux chascun au sien, par la 4. & 8. p. 1. ainsi DBG, & FBG, seront egaux, & par la deff. de la ligne perpendiculaire iceux angles seront droits & BG sera perpendiculaire.

PROP. XII.

Abaisser vne ligne perpendiculaire sur vne ligne droite infinie, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnée AB, & le point hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire qui tombe sur AB.

Soit pris vn point à l'auenture, dans la ligne AB comme le point D: & apres auoir mené la ligne CD, soit descript vn cercle du centre C, & interval CD, coupant la ligne AB en D, & en F, & apres auoir mené la ligne CF, soit l'angle DCF coupé en deux egallément par la ligne CG, comme enseigne la 9. p. 1. Je dis que icelle ligne CG est la perpendiculaire demande.



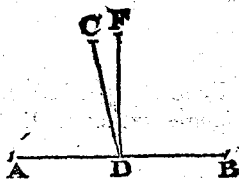
Car les deux triangles DCG, & FCG, ont deux costez egaux à deux costez: comme DC, & CG à FC & CG, & les deux angles sous le point C, egaux, & par la 4. p. 1. les bases DG & GF seront egalles, & les autres angles egaux aux autres angles, chascun au sien: ainsi les deux angles au point G seront egaux, & par la definition del'angle droit, ils seront droicts, & la ligne sera perpendiculaire.

PROP. XIII.

Si vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite fait deux angles, ou iceux seront droicts ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle tombe vne autre ligne CD, faisant les deux angles CDA, & CDB. Je dis que iceux angles sont droicts ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne CD est perpendiculaire, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, ~~DF~~ il est euident que les deux angles sont droicts par la 10. d. 1. Si elle n'est perpendic. du point D soit leuée la perpendiculaire DE par la 11. p. 1. les deux ang. ADE, & BDE seront droicts: mais les deux angles ADC, & CDB, n'occupent pas plus d'espace que iceux ADE, & EDB, & conuiennent avec iceux, & par la 8. comm. sent. ADC, & CDB seront egaux à deux droicts.



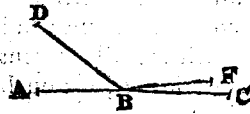
PROP. XIII.

Si à l'extremité d'une ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles egaux à deux droicts, icelles lignes se rencontreront directement.

PREMIER.

11

Soit la ligne donnée DB, à l'extrémité de laquelle B se rencontrent deux autres lignes droites AB, & CB, faisant les deux angles ABD, & CBD égaux à deux droits. Je dis que AB, & BC, se rencontrent directement, & que ABC est vne ligne droite.

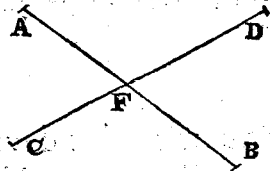


Autrement si ABC n'est ligne droite, soit continuée AB directement, tant qu'il sera de besoin: ce qui sera adionté à AB directement, ou bien tombera au dessous de BC, ou au dessus, soit au dessus, & soit ABF, ligne droite, les deux angles ABD, & DBF, seront égaux à deux droits par la 13. p. 1. & les deux ABD & DBC, sont aussi égaux à deux droits, & par la 1. com. sent. ils seront égaux aux deux ABD, & DBF, c'est à sçavoir que DBC, & DBF, seront égaux le tout à la parrie, ce qui est impossible: donc AB, & BC, se rencontrent directement.

PROP. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB, & CD, se coupant l'une l'autre au point F. Je dis que les angles opposez au sommet AFC, & DFB, sont égaux.

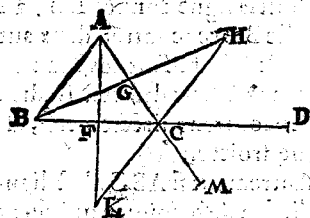


Car d'autant que AF tombe sur la ligne CD, les angles AFC, & AFD, sont égaux à deux droits par la 13. p. 1. Item pour la mesme raison AFD & DFB seront égaux à deux droits: partant les deux AFC & AFD, sont égaux aux deux DFA, & DFB. Que si on oste le commun AFD, le demeurant AFC, sera egal au demeurant DFB. Le mesme se peut dire des deux AFD, & CFB.

PROP. XVI.

Vn costé d'un triangle estant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des oposez interieurement.

Soit le triangle ABC duquel le costé BC : soit continué iusques en D. Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé intérieur ABC : ou BAC autre opposé intérieur.



Qu'ainsi soit. Apres avoir couppe AC en deux egallement, en G par la 10. p. 1. soit menée la ligne BG, continuée iusques en H. Et soient faictes BG : & GH egalles, & soit menée HC. Les deux triangles AGB : & CGH auront les deux costez AG : & GB egaux aux deux costez GC : & GH, par la construction, & l'angle AGB egal à l'angle HGC, par la 15. p. 1. & par la 4. p. 1. Les bases AB, & HC seront egalles, & les autres angles egaux chascun au sien, & par ce moyen l'angle BAG, sera egal à l'angle GCH, qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison sera plus grand que l'opposé BAC.

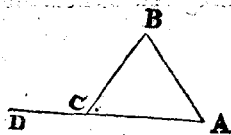
Pour la seconde partie, la mesme demonstration peut estre repetée pour monstrier que l'angle extérieur ACD est aussi plus grand que l'opposé intérieur ABC : car estant BC couppe egallement en F : & FK egal à FA, le triangle CFK sera egal au triangle AFB, & l'angle FCK egal à CBA. Item FCK, estant plus petit que FCM : lequel est egal à ACD, par la 15. p. 1. Aussi ABC sera plus petit que FCM, ou son egal ACD.

PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de quelle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC. Je dis que les deux angles B, & C sont plus petits que deux droits.

Car apres avoir continué le costé AC, iusques en D, Il est evident par la 16. p. 1. que l'angle extérieur DCB, est plus grand que l'opposé intérieur B. Mais les deux DCB : & BCA sont egaux à deux droits, par la 13. p. 1. Partant A B C : & B C A sont plus petits que deux droits. Le mesme se peut faire des autres angles en prolongeant vn autre costé.



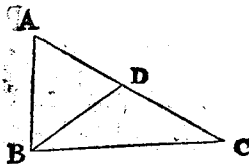
PROP. XVIII.

De tout triangle le plus grand costé soutient le plus grand angle.

Soit le triangle donné ABC, duquel le costé A C est plus grand que le costé A B. Je dis que l'angle A B C est plus grand que l'angle A C B.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que A C est plus grand que A B, soit d'iceluy retranché A D égal à A B: & soit mené B D. Le triangle A B D est Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base B D seront égaux. Or l'angle

extérieur A D B est plus grand que l'opposé intérieur C, par la 16. p. 1. Mais A B C estant plus grand que A B D sera aussi plus grand que son égal A D B: & à plus forte raison A B C sera plus grand que C.

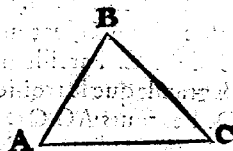


PROP. XIX.

En tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

Soit le triangle A B C duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé B C est plus grand que le costé A B.

Autrement il sera égal ou plus petit. Il ne peut estre égal, d'autant que le triangle seroit Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles A & C seroient égaux contre l'hypotese. Il ne peut aussi estre plus petit, d'autant que par la 18. p. 1. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypotese. Il sera donc plus grand.

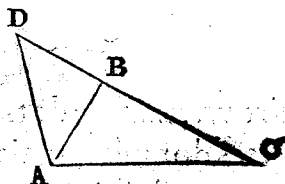


PROP. XX.

En tout triangle les deux costez, de quelle façon qu'ils soient pris sont plus grands que le troisieme.

Soit le triangle A B C. Je dis que les costez A B: & B C sont plus grands ensemble que le troisieme A C.

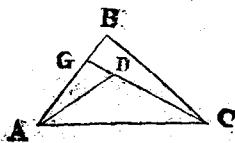
Qu'il ne soit ainsi apres avoir prolongé C B iusques en D. & fait B D égal à B A, soit menée la ligne D A. Le triangle D B A sera Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base D A, seront égaux, sçavoir A D B & D A B. Mais D A C, est plus grand que D A B: aussi sera-il plus grand que son égal A D B, & par la 19. p. 1. D C sera plus grand costé que A C. Mais D C est égal aux deux costez C B: & B A, partant iceux C B & B A seront plus grands que A C.



PROP. XXI.

Si des extremittez d'un costé de quelque triangle, on mène deux lignes droites se rencontrans au dedans, icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront l'angle plus grand.

Soit le triangle ABC , & des extremittez du costé AC , soient menés interieurement deux lignes se rencontrans au point D . Je dis que icelles lignes sont plus petites que AB , & BC . Mais que l'angle D est plus grand que l'angle C .



Qu'ainsi ne soit. C'est à sçavoir que les deux lignes menées interieurement ne soient plus petites que AB , & CB soit continuée CD , jusques au point G par la 20. p. 1. Les deux costez CB , & BG du triangle CBG , seront plus grands que le troisieme CG . Que si GB , & BC plus grands que GC , on adiouste chose egalle AG , les tous AG , & GC , seront tousiours plus petits que les tous AG GB BC . Pareillement les deux costez AG : & GD du triangle AGD sont plus grands que le troisieme AD : ausquels si on adiouste chose egalle : sçavoir CD . Les tous AG GD DC seront tousiours plus grands que les tous AD : & DC : à plus forte raison AB , & BC seront encores plus grands que AD & DC .

SOMMAIRE.

Les deux costez AB : & BC sont plus grands que les deux AG : & GC .

Mais les deux AG : & GC sont plus grands que les deux AD : & DC .

À plus forte raison AB : & BC seront plus grands que AD : & DC .

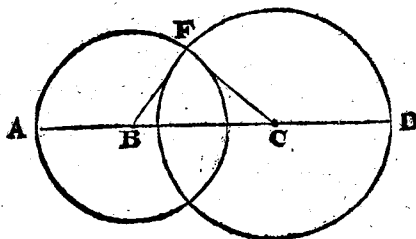
Pour la seconde partie. Je dis que l'angle D est plus grand que l'angle B . Car d'autant qu'il est exterieur au triangle DGA , il sera plus grand que son opposé interieurement DGA par la 16. p. 1. lequel pour la mesme raison est aussi plus grand que son opposé interieurement B : & à plus forte raison D sera plus grand que B .

PROP. XXII.

Faire un triangle de trois lignes droites egales à trois autres données, mais il faut que deux costez de quelle façon qu'ils soient pris soient plus grands que le troisieme.

Soient les trois lignes données $H I$
 K , desquelles deux de quelle façon
 qu'elles soient prises sont plus grandes
 que la troisieme. Il faut faire vn trian-
 gle d'icelles ou de trois autres egales
 à icelles.

Soit prise vne ligne droite, tant grãde
 qu'il sera de besoin, comme $A D$, de
 laquelle soit retranchée $A B$, egale à
 H , & du reste $B C$ egale à I : & $C D$
 egale à K : & soit décrit vn cercle du
 centre B : & interval $B A$. Item vn au-
 tre du centre C : & interval $C D$ coupant le premier cercle au poin t F , duquel
 soient menées les deux lignes $F C$ $F B$. Je dis que les costez du triangle $B F C$
 sont egaux aux trois lignes données $H I K$.



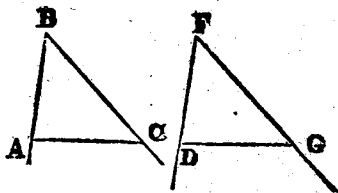
Car $B A$: & $B F$ estant egales par la diff. du cercle, item $C F$: & $C D$. Il
 est euident que les trois costez du triangle $B F C$, sont egaux aux trois lignes
 $A B$ $B C$ $C D$, lesquelles estant egales aux données, aussi les costez du trian-
 gle seront egaux aux lignes données.

PROP. XXIII.

Sur vne ligne droite donnée, & sur vn poin t donné en i-
 celle faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne
 donné

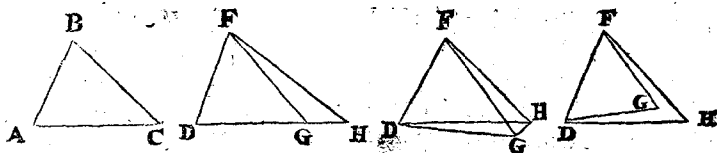
Soit la ligne donnée $A B$: & le point
 en icelle B , sur lequel il faut faire vn an-
 gle rectiligne egal à l'angle rectiligne
 donné $D F G$.

Soit menée la ligne $D G$: & sur $B A$,
 soit basti par la 22. p. 1. le triangle $B A C$,
 ayant les trois costez egaux aux trois co-
 stez du triangle $D F G$. Il est euident par la 8. p. 1. que l'angle $A B C$ sera egal à l'an-
 gle F .



PROP. XXIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez,
 chascun au sien, & l'angle d'iceux costez plus grand qu'
 l'angle, ils auront la base plus grande que la base.



Soient deux triangles ABC : & DFG , desquels les deux costez AB : & BC sont egaux aux deux costez DF : & FG , chacun au sien. Mais l'angle B est plus grand que l'angle DFG . Je dis que la base AC est plus grande que la base DG .

Et d'autant que l'angle DFG est plus petit que l'angle B , soit fait l'angle DFH égal à B par la 23. p. 1. Et apres avoir égalé FH à FG , soit menée la base DH . Laquelle ou tombera sur la base DG , comme à la 1. figure, ou au dessous d'icelle, comme en la 3. ou au dessus comme en la 2. figure.

1. Qu'elle tombe premiere sur la ligne DG , comme en la 1. figure par la 4. p. 1. La base DH sera égale à la base AC , ayans les deux triangles ABC : & DFH deux costez egaux à deux costez, & l'angle B égal à l'angle DFH . Et parce que DH est plus grande que DG , aussi AC sont égales, sera plus grande que DG .

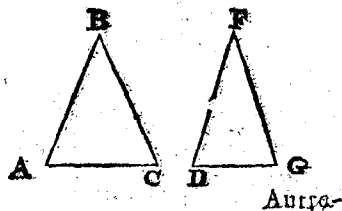
2. Qu'elle tombe au dessus de la base DG , comme en la 2. figure, & soit menée la ligne GH . Le triangle FGH sera isoscele. Et par la 5. p. 1. les angles FGH : & FHG seront egaux. Et partant au triangle DGH : l'angle DGH qui est plus grand que l'angle FGH sera aussi plus grand que DHG qui n'est que partie de son égal FHG : Et la 18. p. 1. DH sera plus grand costé que DG , d'autant qu'il soutient vn plus grand angle, & par consequent son égal AC .

3. Quelle tombe finalement au dessous de la base DG , comme en la 3. figure. Il est evident que les deux lignes interieures DG : & GF sont plus petites que DH & HF par la 21. p. 1. Mais FG est égale à FH ; par consequent DG plus petite que DH .

PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costés, chacun au sien, & la base plus grande que la base, ils auront aussi l'angle d'iceux costez plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC : & DFG , desquels les deux costez AB : & BC sont egaux aux deux DF : & FG chacun au sien. Mais la base AC est plus grande que la base DG . Je dis que l'angle B est plus grand que l'angle F .

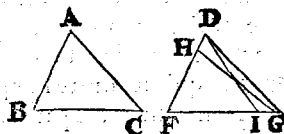


Autrement il sera egal ou plus petit. Mais il ne peut estre egal d'autant que par la 4. p. 1. les bases AC & DG seroient egalles contre l'hypotese. Pareillement il ne peut estre plus petit, d'autant que par la 24. p. 1. La base AC seroit plus petite que DG . Donc il sera plus grand.

PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles chascun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir son semblable, L'autre angle, & les autres costez seront egaux chascun au sien.

Soient deux triangles ABC & DFG , desquels les angles B & C sont egaux aux deux F & G chascun au sien, & le costé BC egal au costé FG . Je dis que les deux autres costez sont egaux chascun au sien. Et l'autre angle egal à l'autre angle.



Car puis que BC est egal à FG , aussi AB sera egal à FD , autrement il sera plus grand ou plus petit. Et s'il est possible que FD soit plus grand que AB , on pourra retrancher FH egal à AB . Et par la 4. p. 1. l'angle B estant egal à l'angle F la base sera egal à la base, & les autres angles egaux aux autres angles chascun au sien; c'est à sçauoir que l'angle HGF sera egal à l'angle C ; auquel est aussi egal l'angle DGF . Partant les deux angles DGF & HGF seroient egaux la partie au tout: ce qui est absurde: donc FD n'estoit point plus grand que BA .

Soient maintenant deux autres costez que BC & FG egaux, sçauoir AB à DF , ou AC à DG . Il s'ensuira tousiours le mesme inconuenient, les deux angles B , & C demeurans tousiours egaux aux deux F & G . Car en posant AB egal à FD il faudra que BC soit egal à FG . Que si on dict que FG soit plus grand, on retranchera FI egal à BC , & apres auoir mené ID , on conclurra par la 4. p. 1. que l'angle B estant egal à l'angle F , les autres angles du triangle ABC seroient egaux aux autres angles du triangle FDI , chascun au sien: sçauoir l'angle C egal à l'angle I . Mais les angles C , & G sont aussi egaux. Partant les deux angles I & G seroient egaux, l'exterieur à son opposé interieur contre la 16. p. 1. Donc FG n'estoit pas plus grand que BC .

SOMMAIRE

Les costez BC & FG estant egaux, aussi AB sera egal à DF .

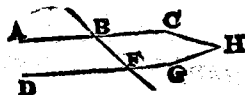
Mais les angles d'iceux B & F sont egaux.

Partant on peut conclure toute la prop. par le 4. p. de ce liure.

PROP. XXVII.

Si vne ligne droite tombant sur deux lignes droites fait les angles, angles opposez alternativement egaux, icelles lignes seront paralleles.

Soient deux lignes droites AC : & DG sur lesquelles tombant la ligne droite BF fait les angles CBF, & BFD alternativement egaux. Je dis que AC : & DG sont paralleles,

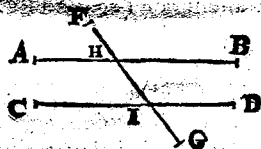


Autrement si elles ne sont paralleles estant continuées, elles se rencontreront. Que si elles se rencontrent comme au point H, elles feroient vn triangle avec le costé BF, & l'angle extérieur DFB seroit plus grand que l'opposé intérieur FBC par la 16. p. 1. ce qui est contre l'hypotese. Donc les deux lignes AC : & DG ne se rencontreront jamais : & par la dernière deff. icelles seront paralleles.

PROP. XXVIII.

Si vne ligne droite tombant sur deux lignes droites fait l'angle extérieur egal à son opposé intérieur du mesme costé, ou bien les deux intérieurs de mesme costé egaux à deux droits, icelles lignes seront paralleles.

Soient deux lignes AB & CD, sur lesquelles tombant vne autre ligne FG elle fait l'angle extérieur FHB egal à son opposé intérieur de mesme costé. Je dis que AB & CD sont paralleles.



Car par la 15. p. 1. l'angle FHB est egal à l'opposé au sommet AHI, & par la 1. comm. sent. AHI sera egal alternativement à HID egal à FHB, & par la 27. p. 1. AB, & CD seront paralleles,

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles intérieurs de mesme costé BHI : & HID sont egaux à deux droits, que aussi AB : & CD seront paralleles. Car par la 13. p. 1. Les deux angles CIH & HID sont egaux à deux droits partant aussi egaux aux deux BHI : & HID. Que si d'iceux angles egaux on oste le commun HI D, les demeurans BHI & HIC se trouueront alternativement egaux & par la 27, p. 1. AB & CD seront paralleles.

PROP. XXIX.

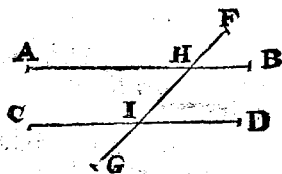
Si vne ligne droite tombe sur deux lignes parallèles, elle fera les angles opposez alternatiuement egaux, & l'exterieur egal à son oppose interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droits.

Soit la ligne droite FG tombant sur les deux parallèles AB, & CD. Je dis en premier lieu que les angles AHI, & HID opposez alternatiuement sont egaux.

Autrement s'ils ne sont egaux l'un sera plus grand ou plus petit. Soit donc AHI plus petit s'il est possible que HID: & si à iceux angles inegaux on a adjousté chose commune, sçauoir l'angle HIC, Les deux angles AHI & HIC seront plus petits, que les deux HIC & HID, lesquels par la 13. p. 1. estans egaux à deux droits, HIC & AHI seront plus petits que deux droits, & par la penult. comm. sent. Les deux lignes AB & CD ne sont point parallèles: ce qui est contre nostre hypotese. Donc il falloit que l'angle AHI fust egal à l'angle HID son alterne oppose.

Pour la seconde partie. Je dis que l'angle exterieur FHB est egal à son oppose interieur de mesme costé HID: ce qui est manifeste par ce qui a esté démontré cy dessus, que les angles AHI & HID estoient egaux, estant aussi FHB egal à AHI par la 13. p. 1. & par la 1. comm. sent. FHB & HID seront egaux, estans tous deux egaux au mesme AHI.

Pour la troisieme partie, Je dis que les deux opposez interieurement de mesme costé AHI, & HIC sont egaux à deux droits: car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient parallèles par la penult. com. sent.

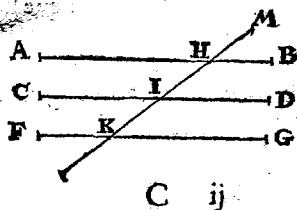


PROP. XXX.

Les lignes droites parallèles à vne mesme ligne droite, sont parallèles entre elles.

Soit AB parallèle à CD, & CD parallèle à FG. Je dis que AB, & FG sont parallèles.

Car par la 29. p. 1. si on mène la ligne MK l'angle exterieur MHB sera egal à l'opposé interieur HID, estant AB, & CD parallèles, pareillement HID sera egal à IKG pour la



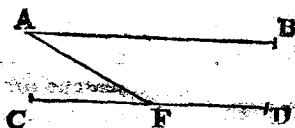
mesme raison, estans CD & FG paralleles, & par la 1. comm. sent. l'angle extérieur MHB sera egal à l'opposé intérieur IKG , & par la 28. p. 1. AB & FG seront paralleles.

PROP. XXXI.

Sur vn point donné mener vne ligne droite parallele à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné A , duquel faut mener vne ligne parallele à la donnée CD .

Soit menée la ligne AF faisant l'angle AF C , & sur icelle, & au point A soit fait l'angle BAF egal à l'angle AFC alternativement, & par la 27. p. 1. Les lignes AB & CD seront paralleles. Car la ligne droite AF tombant sur icelles fait les angles opposés alternativement egaux.

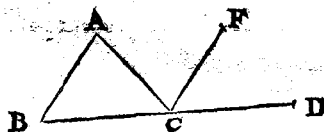


PROP. XXXII.

En tout triangle l'un des costez estant prolongé, l'angle extérieur est egal aux deux opposés intérieurs, & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont egaux à deux droits.

Soit le triangle ABC , duquel le costé BC soit prolongé iusques en D . Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD , est egal aux deux opposés intérieurs B & A .

Qu'il ne soit ainsi, qu'on mene CF parallele à BA par la 31. p. 1. & par la 29. p. les angles BAC , & ACF seront alternativement egaux: item l'extérieur FCD sera egal à son opposé intérieur CBA . Partant il est manifeste que le total ACD , est egal aux deux A & B opposés intérieurement.

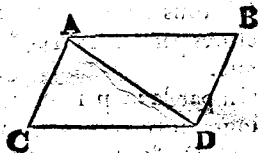


Pour la seconde partie que les trois angles A , B & C intérieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits: Il est evident, estant ACD egal aux deux A , & B ; Mais ACD avec ACB sont egaux à deux droits par la 13. p. 1. Partant les deux A & B avec ACB seront egaux à deux droits.

PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conioignent deux lignes droites égales & parallèles, & de mesme costé sont aussi égales & parallèles.

Soient deux lignes droites AC, & BD, qui conioignent de mesme costé les deux autres lignes AB, & CD égales & parallèles. Je dis que AC, & BD sont aussi égales & parallèles.

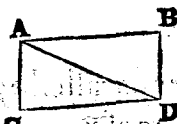


Qu'il ne soit ainsi, soit menée la diagonale AD, icelle tombant sur les deux parallèles AB, & CD fera les angles BAD, & ADC alternativement égaux par la 29. p. 1. Item AB, & CD étant égales, les deux triangles BAD, & CDA auront deux costez égaux à deux costez, & un angle égal à un angle; & par la 4. p. 1. la base AC sera égale à la base BD, & l'angle CAD sera égal alternativement à l'angle ADB, & par la 27. p. 1. les égales AC, & BD seront aussi parallèles.

PROP. XXXIII.

En tout parallélograme les costez & les angles opposés sont égaux, & la diagonale le coupe en deux égaux.

Soit le parallélograme ABCD. Je dis que le costé AB est égal à son opposé CD, & CA à DB. L'angle C égal à l'angle B, & l'angle A à l'angle D, & qu'il est coupé en deux également par la diagonale AD.



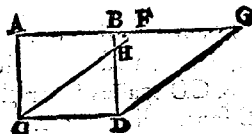
Car puis que ABCD est parallélograme AB sera parallèle à CD, & AC à BD, & par la 29. p. 1. l'angle BAD sera alternativement égal à l'angle ADC: Item l'angle CAD alternativement égal à l'angle ADB. Ainsi les deux triangles BAD, & ADC auront BAD, & BDA angles égaux aux angles ADC & CDA chacun à son sien, & le costé commun entre iceux angles AD. Et par la 26. p. 1. les autres costez AB & BD seront égaux aux autres costez AC, & CD chacun au sien et l'autre angle C égal à l'angle B. Et si il est évident que les deux angles au point A seront égaux aux deux ensemble au point D. Encore par la 4. p. 1. les triangles ABD, & ACD seront égaux: ce qui estoit à prouver.

C. III.

PROP. XXXV.

Les parallelogrames constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles sont egaux entre eux.

Soient deux parallelogrames ABCD, & C DGF tous deux sur mesme base CD, & entre mesmes paralleles AG, & CD, le dis qu'ils sont egaux.



Car par la 34. p. 1. les costez opozes des parallelogrames estans egaux AB, & CD seront egaux. Item CD, & FG, & partant AB, & FG egaux, auxquels si on adiouste la ligne commune BF, AF sera egale à BG. Item AC à BD: lesquelles estant paralleles l'angle exterieur DBG sera egal a l'opposé interieur CAF, & par la 4. p. 1. les triangles CAF, & BDG seront egaux: desquels si on oste le triangle commun BHF, les demeurans trapezes BACH, & DHFG seront egaux: auxquels si on adiouste le triangle commun CHD, le parallelog. ABCD sera egal au parallelograme CDGF.

SOMMAIRE.

Les triangles ACF, BDG sont egaux.

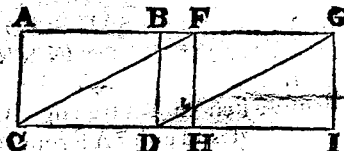
Mais les parallelogrames ABCD, & CDGF sont cōposez d'iceux en retranchant la piece; commune BHF, & adioustant aussi la commune CHD.

Par la 34. p. 1. les costez opozes des parallelogrames sont egaux.

PROP. XXXVI.

Les parallelogrames constituez sur bases egalles, & entre mesmes paralleles sont egaux entre eux.

Soient les deux parallelogrames ABCD, & FGIH ayans les bases CD, & HI egalles & entre les mesmes paralleles AG, & CL le dis qu'ils sont egaux.



Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes CF, & DG lesquelles par la 33. p. 1. serot paralleles, d'autāt qu'elles c onioignent CD, & FG egalles & paralleles. Car CD estāt egalle à HI, & HI à FG aussi FG & CD serot egalles. Et par cōsequēt FG DC sera parallelograme sur mesme base & entre mesmes paralleles que le parallelog. ABCD, & par la 35. p. 1. ils seront egaux, & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog.

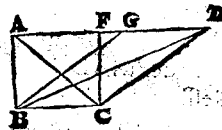
FG/H estant sur mesme base avec iceluy FG, & entre mesmes paralleles AG
CA. Et par la com. sent les parallelog, ABCD, & FG/H seront egaux.

PROP. XXXVII.

Les triangles qui sont sur mesme base, & entre mesmes pa-
ralleles sont egaux.

Soient deux triangles ABC, & BDC tous deux
sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles
AD, & BC. Je dis qu'ils sont egaux.

Car si on mene CF parallele à AB, & BC paral-
leles F à CD, les parallelogrames seront accomplis A
BC, & BCDG: desquels les triangles donnez sont la
moitié chascun du sien par la 34. p. 1. Lesquels par ce moyen seront egaux, estans
leurs doubles parallelogrames egaux par la 35. p. 1.

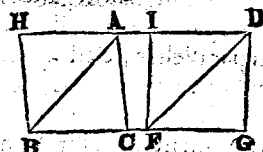


PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egales & entre mesmes
paralleles sont egaux.

Soient deux triangles ABC, DFG sur bases
egales BC, & FG, & entre mesmes paralleles
HD, & BG. Je dis qu'ils sont egaux.

Car apres avoir prolongé les paralleles tant
qu'il sera de besoin, soit menée BH parallele à
CA, & FI parallele à DG par la 31. p. 1. Les deux parallelogrames HC, & IG
estans sur bases egales, & entre mesmes paralleles seront egaux par la 36. p. 1.
aussi egales seront leurs moitiés, sçavoir les triangles donnez BAC, FDG par
la 34. p. 1. estant les parallelogrames coupez en deux egallement par les diag-
nals BA : & FD.

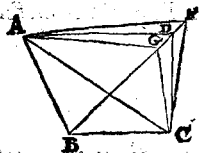


PROP. XXXIX.

Les triangles egaux constituez sur mesme base, & de mes-
me part sont aussi entre mesmes paralleles.

C iiij

Soient deux triangles égaux ABC , & BCD constituez sur mesme base BC , & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mesmes parallèles, c'est à dire que si on mène la ligne AD , elle sera parallèle à BC .

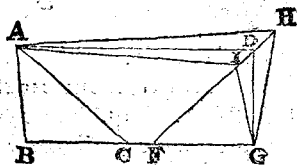


Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallèle à BC (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera on bien au dessus de AD ou au dessous qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AF , s'il est possible : & apres auoir continué BD iusques en F , & mene FC . Les deux triangles BAC , & BFC par la 37. p. 1. ayans mesme base, & entre mesmes parallèles seront égaux. Item BAC , & BDC sont aussi égaux partant BFC , & BDC seroient aussi égaux la partie au tout donc AF parallèle ne pouuoit tomber par dessus AD . Le mesme inconuenient s'ensuira si on pose la parallèle AG au dessous de AD , car ils s'ensuira que les triangles BGC , & BDC sont égaux, ce qui ne peut estre donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallèle à BC .

PROP. XL.

Les triangles égaux constituez sur bases égales & de mesme part sont aussi entre mesmes parallèles.

Soient deux triangles égaux ABC , & DFG constituez sur bases égales BC , & FG , & de mesme part. Je dis qu'ils sont aussi entre mesmes parallèles, c'est à dire que si on mène vne ligne droite de A , & D , que icelle sera parallèle à BG .



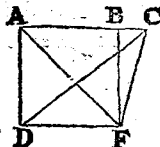
Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallèle à BG . (Si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera on au dessus de AD , ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AH s'il est possible. Les deux triangles BAC , & FHG seront égaux par la 38. p. 1. Mais BAC , & FDG sont aussi égaux : partant FHG & FDG seront égaux par la 1. com. sent. ce qui est impossible comme en la précédente. Partant la parallèle menée du point A ne tombera point au dessus de AD . Le mesme inconuenient s'ensuira si on la fait tomber au dessous, comme AI : car les triangles FID , & FDG se trouueroient égaux, d'où du point A ne pourra estre menée autre ligne que AD parallèle à BG .

PROP. XLI.

Si vn parallelograme & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles, le parallelograme sera double du triangle.

Soit le parallelograme ABDF estant sur la mesme base DF avec le triangle DFC, & tous deux entre mesmes paralleles AC, & DF, Je dis que le parallelograme est double du triangle.

Car si on mene la diagonale AF, le triangle ADF sera la moitié du parallelogr. par la 34. p. 1. Lequel sera egal au triangle DCF, par la 38. p. 1. partant le parallelograme qui est double de l'un sera aussi double de l'autre.

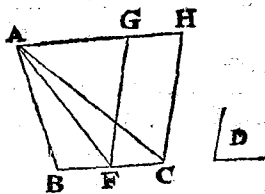


PROP. XLII.

Faire vn parallelograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC auquel il faut faire vn parallelograme egal ayant vn angle egal à l'angle donné D.

Soit la base du triangle BC coupée en deux également en F, & apres auoir mené AF soit fait l'angle GFC egal à l'angle D par la 23. p. 1. & par la 31. p. 1. soient menées les paralleles AH à BC, & CH à FG. Je dis que le parallelogr. FH est egal au triangle donné BAC: car il est euident qu'il a vn angle egal à l'angle donné par la construction, le reste se preuue par la prop. precedente, sçauoir que le parallelogr. FH est double du triangle FAC, duquel est aussi double BAC estant BAF egal à FAC par la 39. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egales, & entre mesmes paralleles, & les deux ensemble BAC (qui est le Triagle donné) seront egaux au parallelograme.

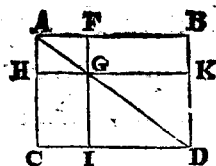


PROP. XLIII.

En tout parallelograme les suplemens des parallelogrammes qui sont sur le diametre sont egaux entre eux.

D

Soit le parallelograme CB: son diametre AD: à l'en-
tour duquel sont les parallelog. HF: & IK. Je dis que
les supplemens CG, & GB sont egaux.

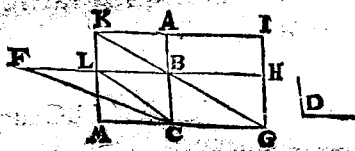


Car par la 34. p. 1. Le triangle ABD est egal au trian-
gle ACD, & AFG, & GKD egaux à AHG, & GID,
car iceux parallelogrames sont tousiours coupez en deux egallement, & par-
tant le reste GB sera egal au reste GC: d'autant que qui de choses egales oste
choses egales les restes sont egaux.

PROP. XLIII.

Sur vne ligne droite donnée descrire vn parallelograme e-
gal à vn triangle donné ayant vn angle egal à vn angle
rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il
faut descrire vn parallelograme egal au
triangle FBC, & ayant vn angle egal à
l'angle D.



Soit prolongée AB iusques en C, & soit
construit le parallelog. BMegal au trian-
gle FCB: tant l'angle LBC egal au donné D, le tout par la 42. p. 1. & apres auoir
continué les lignes ML iusques en K LB, & MC tant qu'il sera de besoin soit
menée AK parallele à LB, & la diagonalle KB continuée iusques à ce qu'elle
rencontre MG au point G, ce qui doit arriuer n'estant KB parallele à MC par la
penult. com. sent. & du point G soit menée GI parallele à CA, & soit prolong-
gée KA iusques en I. Je dis que BI est le parallelogr. demandé.

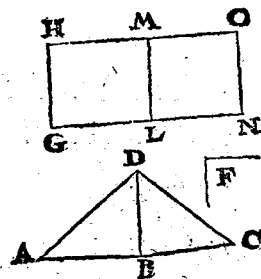
Car par la 43. p. BI construit sur la ligne BA est egal à BM partant aussi au
triangle FCB, & si par la 15. p. 1. l'angle ABH est egal à LBC, lequel estant egal
au donné D, ABH, sera aussi egal au donné D.

PROP. XLV.

Faire vn parallelograme egal à vne figure rectiligne don-
née ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le ^{20. ligne} triangle donné ABCD, & l'angle donné F sur lequel il faut bastir le parallélograme demandé.

Soit menée la ligne DB faisant deux triangles de la figure rectiligne donnée, & par la 42. p. 1. soit basti le parallélog. G M e gal au triangle ABD, ayant vn angle égal à l'angle donné F. Item sur LM soit basti le parallélog. L O e gal au triangle DBC ayant vn angle égal au donné F par la 44. p. 1. iceux GM, & LO seront egaux au rectiligne donné ABCD.



Je dis d'auantage qu'ils feront vn parallélograme: c'est à dire que les lignes GL & LN HM & MO se rencontrent directement: car les angles GHM, & LMO estant chascun égal à l'angle donné F, ils le seront aussi entre eux: ausquels si on adiouste l'angle commun LMH, les deux angles GHM, & LMH qui sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. estant HL, parallélograme: seront egaux aux deux angles LMH, & LMO, lesquels partant seront egaux à deux droicts, & par la 14. p. 1. les deux lignes H M, & MO se rencontreront directement, pareillement les deux angles GLM, & LNO estans egaux par la 34. p. 1. & pour estre opposez à angles egaux. Que si à iceux on adiouste l'angle commun MLN, par le mesme discours que cy dessus les deux lignes GL & LN se rencontreront directement ainsi HO, & GN estant lignes droictes, & conioignant de mesme part les egalles & paralleles HG & ON, elles seront aussi egalles, & paralleles par la 33. p. 1. & GO sera parallélograme.

PROP. XLVI.

Sur vne ligne droite donnée descrire vn quarré.

Soit la ligne droite AB sur laquelle il faut descrire vn quarré sur le point A, de la lig. AB soit menée AC ligne perpendiculaire par la 11. p. 1. laquelle soit faicte egalle à AB par la 3. p. 1. & apres auoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC par la 31. p. 1. Je dis que le parallélograme AD est quarré.



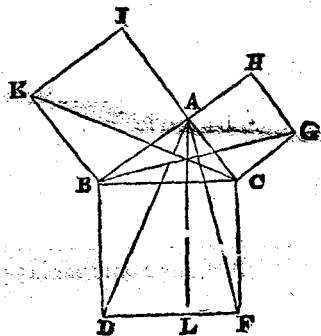
Car estant parallélograme, les costez, & les angles opposez sont egaux, partant AB e gal à CD, & AC à BD, & AC estant e gal à AB, par la construction il est euidet que les quatre costez sont egaux. Item l'angle A estant droit par la construction, aussi son opposé D sera droit par la 34. p. 1. & par la 29. p. 1. les deux angles A & C opposez interieurement de mesmes costez estans egaux à deux droicts: & l'angle A estant droit l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son opposé B, & les quatre angles A B C D seront droicts, & par la deff. du quarré, la figure AD sera quarrée.

PROP. XLVII.

Au triangle rectangle le quarré du costé qui soustient l'angle droit, est egal aux deux quarez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient descrits les trois quarez Ak, AG BF. Je dis que le quarré du costé BC, qui soustient l'angle droit BAC, sçavoir FB, est egal aux deux quarez des deux autres costez Ak: & AG.

Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que les quatre angles au point A sont droitz par la deff. du quarré, & par la 14. p. 1. IA, & AC se rencontrent ont directement. Item BA, & AH soient menées les deux lignes AD, & kC, & du point A soit menée AL parallèle à CF.



Je dis maintenant que les deux triangles ABD, & kBC ont deux costez, egaux à deux costez sçavoir kB à BA, & BC à BD car les costez des quarez sont egaux & l'angle kBC est egal à l'angle ABD, d'autant que les angles kBA, & CBD sont droitz & egaux, & ABC est commun à tous les deux, & par la 4. p. 1. les triangles ABD, & kBC sont egaux. Mais le quarré kA est double du triangle kBC par la 41. p. 1. car ils sont sur mesme base kB, & entre mesmes parallèles, il sera aussi double de son egal ABD: duquelle rectangle BL est aussi double de par la mesme 41. p. 1. & par consequent le quarré Ak sera egal au rectangle BL, car les choses doubles d'une mesme sont egal les entre elles par mesme discours on prouera que le rectangle CL est egal au quarré AG partant les deux ensemble BL, & CL seront egaux aux deux quarez ensemble Ak, & AG.

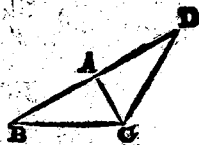
SOMMAIRE.

Le rectangle BL est egal au quarré BI, & LC egal au quarré CH.
Mais les deux rectangles BL, & LC sont egaux au quarré BF.
La conclusion est facile.

PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal aux quarez des deux autres costez, le triangle sera rectangle.

Soit le triangle donné ABC, duquel le costé BC décrit vn quarré egal aux deux quárez des deux autres costez BA, & AC. Je dis que l'angle BAC est droit.



Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. p. 1. & fait AD égale à AB soit menée CD.

Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. p. 1. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA, & AD lesquels sont egaux aux quarrez de BA : & AC, estant leurs lignes egales : & par la 1. com. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD : partant la ligne CB égale à CD, & les triangles BAC, & CAD ayās les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD par la 8. p. 1. partant il sera aussi droit.

Fin du premier Element.



ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

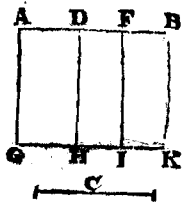
1. **T**out parallelograme rectangle est compris de deux lignes droites qui font l'angle droit.
2. En tout parallelograme l'un des parallelogrames descrits à l'entour du diametre avec les supplemens est appellé Gnomon.

PROP. I.

Si de deux lignes droites l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes est egal au rectangle de la non coupée, & d'une chascune partie de celle qui est coupée.

Soient les deux lignes AB, & C dont la premiere AB est coupée à l'aduanture en AD, DF, & FB. Je dis que le rectangle composé des deux lignes AB, & C sera egal aux trois rectangles compris des trois sections, & de la ligne C.

Qu'il soit ainsi, Qu'on mene AG perpendiculaire à AB par la 11. p. 1. laquelle par la 3. p. 1. soit faite egale à C, & du point G soit menée GK parallele à AB, & Bk parallele à AG par la 31. p. 1. Il est evident que le rectangle AK sera compris de deux lignes données. Item soient menées les deux lignes DH, & FI paralleles à AG par la 31. p. 1. les trois parallelogrames AH DI, & FK seront compris des lignes AG DH FI, & de trois segmens AD DF FB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrames rectangles occupent mesme espace, & conuiennent au rectangle AK compris des lignes



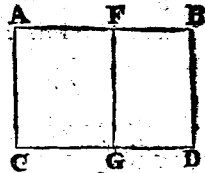
données : & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux,

PROP. II.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra, les rectangles compris de la toute & d'une chascune partie sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne AB coupée à l'adventure au point F. Je dis que les deux rectangles compris l'un de la toute AB, & partie AF, & l'autre de la toute AB, & partie FB sont egaux au quarré de la totale AB.

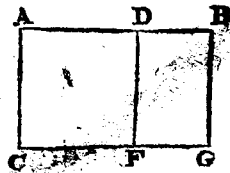
Qu'il n'en soit ainsi, sur la ligne AB soit construit le quarré AD par la 46. p. 1. item soit la ligne FG parallèle à BD par la 31. p. 1. il est evident que les rectangles AG, & FD sont compris, sçavoir AG de la toute AC, & de la partie AF, & FD de la toute FG, & de l'autre partie FB : car AC, & FG sont égales à la toute AB par la deff. du quarré & 34. p. 1. Mais iceux deux rectangles AG, & FD conuiennent avec le quarré, AD & par la 8. com. sent. ils luy seront egaux.



PROP. III.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties est égal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premierement prise.

Soit la ligne droite AB coupée à l'adventure au point D. Je dis que le rectangle compris de la totale AB, de la partie AD est égal au rectangle compris des deux parties AD, & DB, & au quarré de la partie AD, laquelle auoit esté premierement prise.



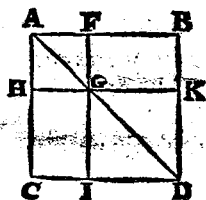
Qu'il ne soit ainsi, sur la partie AD soit fait le quarré AF par la 46. p. 1. item soit prolongée la ligne CF iusques à G, & menée BG parallèle à DF par la 31. p. 1. Il est donc evident que AF est le quarré de AD, & DG le rectangle de AD, & DB : car DF est égal à DA, par la definition du quarré, & AG le rectangle de AB AD partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or par la 8. com. sent. le quarré, & rectangle DG conuiennent avec le rectangle AG par consequent egaux à iceluy

PROP. III.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra le quar-
ré de la toute est egal aux deux quarez des deux parties &
deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB coupée à l'adventure au point
F. Je dis que les deux quarez descriptz sur les parties AF,
& FB avec deux fois le rectangle de AF, & FB sont egaux
au quarré de la totale AB.

Qu'ainfi ne soit sur la ligne totale AB soit descripte le
quarré AD, & apres auoir mené la diagonale AD, & du
point F, FI parallele à AC, par le point G soit menée HK pa-
rallele à AB le tout par la 31. p. 1. ie dis premierement que
HF, & IK sont quarez.



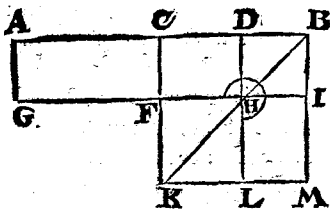
Car desja il appert qu'ils sont parallelogrames estans descriptz entre lignes
paralleles. Item puis que AD est quarré les deux costez AB, & BD seront egaux,
& le triangle ABD est isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base BAD, &
BDA seront egaux. Pareillement la ligne AD tombant sur les deux paralleles
FI, & BD fera l'angle extérieur EGA égal à l'opposé intérieur KDG par la 29.
p. 1. lequel estant égal à FAG par la 1. com. sent. FAG, & FGA seront egaux &
par la 6. prop. 1. les deux costez AF : & FG seront egaux : & par la
34. p. 1. le parallelograme AG aura les quatre costez egaux : on prouuera
aussi aisément que les quatre angles sont droits par la 29. p. 1. partant qu'il sera
quarré, par mesme discours, on monstrera IK estre aussi quarré. Item que le re-
ctangle FK est compris des deux lignes AF, & FB estant AF égale à FG. Mais
HI est égal à FK par la 43. p. 1. Partant HI, & FK sont deux fois, le rectangle de
AF, & FB, lesquels avec les deux quarez AG, & GD conuiennent avec le quar-
ré total AD & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux.

.P.R.O.P. .V.

Si vne ligne droite est coupée en deux parties egalles & en
deux inegalles : Le rectangle des deux parties inegalles
avec le quarré de la sectio du milieu sont egaux au quar-
ré de la moitié de la toute.

Soit

Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties égales au point C, & en deux inégales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inégales AD, & DB avec le carré de la section du milieu CD sont égaux au carré de la moitié CB.



Soit donc sur la ligne CB décrit le carré CM par la 46. p. 1. & après avoir mené DL parallèle à BM soit menée la diagonale BK coupant DL au point H soit mené GHI parallèle à AB, & AG parallèle à DH par la 31. p. 1. Je dis que les rectangles BH, & HK seront quarrés par ce qui a esté démontré à la 4. p. 2. Item que le rectangle AH composé des deux sections AD, & DB (d'autant que DH est égale à DB pour estre DI quarré) avec le quarré FL basti sur la section du milieu CD (d'autant que KL par la 34. p. 1. est égale à CD) est égal au quarré CM basti sur la ligne CB moitié de la toute AB.

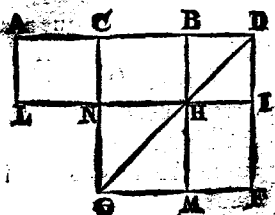
Car le rectangle AF est égal au rectangle CI par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases égales AC, & CB, & entre mesmes parallèles AB, & GI. Pareillement les suppléments CH, & HM sont égaux par la 43. p. 1. auxquels si on adiouste le quarré commun DI les tous CI, & DM seront égaux: & par la 1. com. sent. DM sera égal à AF: ausquels pareillement si on adiouste le supplément commun CH le gnomon FBM sera égal au rectangle AH. Mais le gnomon, & le quarré FL conuiennent avec le quarré CM, & sont égaux par la 8. com. sent. aussi le rectangle AH, & quarré FL seront égaux au quarré CM par la 1. com. sent.

P. R. O. P. .VI.

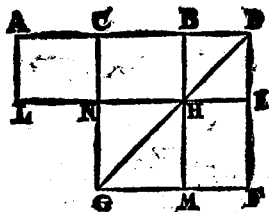
Si vne ligne droite est coupée en deux parties égales, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite: le rectangle de la toute & de l'adioustée comme d'une & de l'adioustée avec le carré de la moitié est égal au carré qui est faict de la moitié, & de l'adioustée comme d'une.

Soit la ligne droite AB, coupée en deux égales au point C, & à icelle soit adioustée directement BD. Je dis que le rectangle compris de la totale DA, & de l'adioustée DB avec le carré de la moitié CB est égal au carré de la ligne DC composée de la moitié CB, & de l'adioustée BD.

Qu'ainsi ne soit: sur la ligne DC soit décrit le quarré DG avec sa diagonale DG, & après avoir



menée BM parallèle à DFlaquelle coupera la diagonale au point H: d'iceluy point H soit menée IHL parallèle à AD par la 31. p. 1. Item AL parallèle DI.



Premierement le rectangle AI est compris de latoute, & adioustée comme d'une AD, & de l'adioustée DI: car elle est égale à l'adioustée BD, estant BI carré. Item le carré NM est fait sur N H égal à la moitié CB par la 34. p. 1. Je dis donc que le rectangle AI, & le carré NM sont égaux au carré CF.

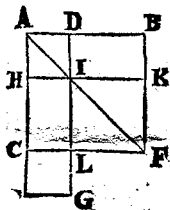
Car les deux suppléments CH, & HF estans égaux par la 43. p. 1. Item les deux rectangles LC, & CH aussi égaux par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases égales, & entre mesmes parallèles, & par la 1. comm. sent. AN sera égal à HF, & en adioustant à chascun d'eux le rectangle commun CI, le Gnomon NDM sera égal au rectangle AI. Mais iceluy gnomon avec le carré NM sont égaux au carré CF. Ainsi le rectangle AI avec le carré NM sera égal au mesme carré CF.

PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra: le carré de la toute, & le carré de l'une des parties sont égaux au carré de l'autre partie, & deux fois le rectangle de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupée à l'adventure au point D. Je dis que les deux carrés de la totale AB, & de la partie AD sont égaux au carré de l'autre partie DB, & le rectangle deux fois de AB, AD.

Qu'il ne soit ainsi, sur AB soit décrit le carré AF avec sa diagonale AF, & apres auoir mené du point D DL parallèle à AC, laquelle coupera la diagonale AF au point I, d'iceluy point soit mené HIK parallèle à AB par la 31. p. 1. & sur CL soit fait le carré CG.



Il est euident que AF, & CG sont les carrés de AB, & AD, car CL par la 34. p. 1. est égale à AD. Item que IF est le carré de DB, tant par ce qui a esté prouué la 4. p. 2. que par ce que IK est égale à DB par la 34. p. 1. Item que AK est vne fois le rectangle de AB, & AD, estant AH égale à AD, & HG vne autre fois le mesme rectangle estans les suppléments CI, & IB égaux. Item les carrés CG, & HD. Parant les deux rectangles HG, & AK estans deux fois le rectangle de AB, & AD, lesquels avec le carré IF conuiennent avec les deux carrés AF & CG, ils leur seront égaux par la 8. com. sent. ce qu'il falloit prouuer.

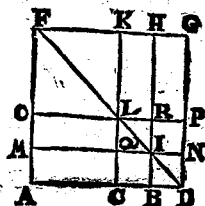
PROP. VIII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra quatre fois le rectangle de la toute, & de l'une des parties avec le quarré de l'autre partie est egal au quarré de la toute & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée à l'aduanture au point C. Je dis que quatre fois le rectangle de AB, & BC: c'est à dire de AB, & BD (si apres auoir prolongé la ligne, on fait BD egal à BC) avec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD.

Qu'il ne soit ainsi, sur AD soit fait le quarré FD avec la diagonale FD, & des deux points C, & B soient menées Ck. & BH parallèles à DG. Item des points I, & L auxquels elles coupent la diagonale soient menées PLO, & NIM parallèles à AD par la 31. p. 1.

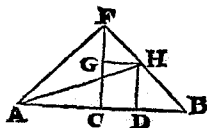
Premierement parce que résulte de la 4. p. 2. les rectangles FL, LI, ID, au long de la diagonale seront quarez. Item d'autant que CB est egal à BD CI: & ID seront egaux & quarez estât l'un d'iceux quarez, pareillement, QR, & RN aussi egaux quarez: ainsi les quatre QB, ID, QR, RN, seront quarez & egaux, & par la 43. p. 1. les quatre suplemens AQ, ML, LH, RG, seront aussi egaux. Mais comme aux precedentes, il est euident que AI est une fois le rectangle de AB, & BI egale BD qui est un des quatre suplemens, & un des quatre petits quarez egaux, dont iceux quatre suplemens avec iceux quatre quarez faisant le Gnomon ODK seront egaux à quatre fois le rectangle de AB, & BD, lequel Gnomon avec le quarré de OL (egal à AC par la 34. p. 1.) conuiennent avec le quarré FD, & par la 8. com. sent. ils luy seront egaux: ce qui estoit à demonstrier.



PROP. IX.

Si vne ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales, les quarez des parties inegales seront doubles des quarez de la moitié & de la section du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux également au point C, & en deux inégalement en D. Je dis que les quarrés de AD, & DB parties inégales sont doubles des quarrés de AC moitié, & de CD partie du milieu.



Qu'il ne soit ainsi au point C soit levée la perpendiculaire CF qu'on fera égale à CA, & après avoir mené AF, & FB soit levée la perpendiculaire DH par la 11. p. 1. & après avoir mené HG parallèle à CD soit menée AH.

Premièrement les triangles ACF, & FCB seront Isosceles, & feront les angles sur les bases AF, & FB égaux par la 5. p. 1. sçavoir GFH, à HBD, & demi droits par la 32. p. 1. estât l'angle FCB droit pour estre CF perpendiculaire. & égal à CB. HDB estât droit, & DBH demi droit aussi par la 32. p. 1. DHB sera demi droit & par la 6. p. 1. le triangle HDB sera Isoscelle, sçavoir HD sera égal à DB par le mesme discours FG sera égal à GH. Item il est evident que l'angle AFB sera droit estant composé de deux demy droits,

Maintenant il faut démonstrer ce qui est proposé, sçavoir que par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACF, le carré de AF costé qui soutient l'angle droit est double du carré de AC, estât égal à tous les deux de AC, & CF. Par le mesme discours FH est double du carré de GH, ou CD s'il est égal. par la 34. p. 1. partât les deux quarrés de AF, & FH seront doubles des deux de AC, & CD. Pareillemēt le carré de AH estant égal aux deux de AF, & FH par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC, & CD. Mais le carré de AH est égal aux deux de AD, & DH, ou DB son égale par la mesme 47. p. 1. ainsi les deux quarrés de AD & DB seront doubles des deux AC, & CD, ce qui estoit à démonstrer.

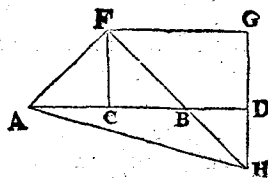
SOMMAIRE.

*Les deux quarrés de AD, & DB sont égaux aux deux quarrés de AF, & FH.
Mais les deux quarrés de AF, & FH sont doubles des deux quarrés de AC, & CD.
Partant leurs égaux quarrés de AD, & DB seront doubles des mesmes.*

PROP. X.

Si vne ligne droite est couppee en deux parties égales, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite le carré de la toute avec l'adioustee comme d'une, & le carré de l'adioustee sont doubles aux quarrés de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adioustee comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux égalementement au point C, à laquelle soit adioustée directement BD. Je dis que les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC, & CD.



Qu'ainsi ne soit au point C soit levée, la perpendiculaire CF par la 11. p. 1. & égale à AC, & apres avoir mené les deux lignes AF, & FB soient menées FG parallèle à CD, & DG à CF par la 31. p. 1. & soient continuées FB, & DG iusques à ce qu'elles se coupent au point H. Finablement soit tirée la ligne AH.

Premierement puis que AC, & CF sont égaux aussi par la 5. p. 1. les angles FAC, & CFA sont égaux & demy droicts par la 32. p. 1. étant l'angle ACF droit. Par mesme discours, les angles CBF, & BFC seront aussi demy droicts, & l'angle AFB droit étant composé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBH sera égal à CBF, & demy droit, & les deux lignes CD, & FG étant parallèles par la 29. p. 1. l'angle interieur de mesme costé BFG sera demy droit, & l'angle G étant droit par la 34. p. 1. car il est opposé à vn droit BHD, sera demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles FGH, & BDH seront isocèles rectangles, & CG parallélograme rectangle.

Maintenāt il faut démonstrer ce qui est proposé sçavoir par la 47. p. 1. que le quarré de AF costé qui soustient l'angle droit est égal aux deux quarrez des deux autres costez, partant double du quarré de AC. Par mesme discours FH se trouuera double du quarré de FG ou de CD qui luy est égal par la 34. p. 1. ainsi les deux quarrez de AF, & FH, ou le seul de AH qui leur est égal par la 47. p. 1. sera double des deux de AC, & CD. Mais par la mesme 47. p. 10. il est égal aux deux quarrez de AD, & DH ou BD son égal, & par conséquent les deux quarrez de AD, & BD seront doubles des deux de AC, & CD, ce qu'il falloit prouver.

SOMMAIRE.

Les deux quarrez de AF, & FH sont égaux aux deux quarrez de AD, & DB.

Mais les quarrez de AF, & FH sont doubles des quarrez de AC, & CD.

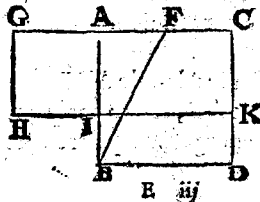
Partant les deux quarrez de AD, & DB seront doubles des deux quarrez de AC, & CD.

PROP. XI.

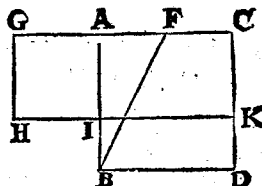
Couper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & del'vne des parties soit égal au quarré del'autre.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Après avoir construit sur icelle le quarré AD soit diuisée CA, en deux égalementement au point F: & apres avoir mené FB, & prolongé FA iusques en G soit faite FG égale à FB, & sur GA soit



fait le quarré GI, & soit continuée HI iusques en K. Je dis, que la ligne AB est coupee au point I, en sorte que le rectangle ID compris de BD égale à BA, & de BI partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AI, sçavoir à GI.



Car la ligne AC estant couppee en deux egallemēt en F, & on luy adioustē directēmēt GA, le quarré de la moitié & de l'adioustee cōme d'une, sçavoir FG ou de sō égale FB est egal au rect. de GC, & GA, & au quarré de AF par la 6. p. 2. Mais le quarré de FB est egal aux deux de BA, & AF par la 47. p. 1. ainssi les deux quarez de BA, & AF seront egaux au rectangle de GC, & GA & au quarré de AF, lequel estant commun à toutes les deux grandeurs, s'il est osté les demeurans quarré de AB, sçavoir AD & le rectangle de GA, & GC, sçavoir GK seront egaux: par les communes sentences desquels GI, & AD, si on osté le rectangle commun AK, le demeurant quarré GI sera egal au demeurant rectangle ID.

SOMMAIRE.

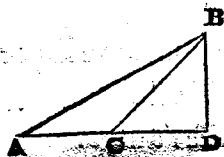
Le rectangle GK est egal au quarré AD.

Partant en ostant le rectangle commun AK, le demeurant GI sera egal au demeurant ID.

PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus est plus grand que les quarez des deux autres costez de la quantité deux fois du rectagle, compris du costé contenant l'angle obtus: celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le costé AC iusques en D, & du point B soit menée la perpendiculaire BD par la 2. p. 1. Je dis que le quarré du costé AB qui soustient l'angle obtus A CB est plus grand que les quarez de AC & CB de deux fois le rectangle de AC, & CD, sçavoir AC qui est l'un des costez faisant l'angle obtus celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire BD, & CD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire.



Car le triangle ADB estant rectangle, le quarré de AB sera egal aux deux quarez de AD, & DB par la 47. p. 1. pareillement au triangle CBD, le quarré du costé sera egal aux quarez des deux autres costez CD, & DB ainssi les quarez des

lignes AC CD, & DB seront egaux aux deux quarrez des costez AC, & CB. Mais les quarrez de AC CD, & DB sont plus petits que les quarrez de AD, & DB (d'autant que si on oste le carré de BD, les deux quarrez de AC, & CD se trouveront plus petits que le carré commun de AD de deux fois le rectangle de AC, & CD par la 4. p. 2.) lesquels estans egaux au carré de AD. Il s'ensuit que iceluy carré de AB fera plus grand que les quarrez de AC CD, & DB ou leurs egaux de AC, & CB de la quantité de deux fois le rectangle de AC, & CD ce qui estoit à prouver.

SOMMAIRE.

Le carré de AB vaut les trois quarrez de BD, DC, CA, & deux fois le rectangle de AC, & CD.

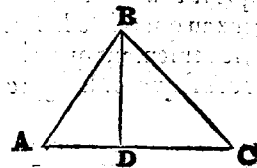
Mais les quarrez de AC, & CB ne valent que les trois quarrez de AC, CD, DB.

Partant le carré de AB est plus grand que les quarrez de AC, & CB de deux fois le rectangle de AC, & CD.

PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones le carré du costé qui soustient l'angle aigu est plus petit que les quarrez des deux autres costez de deux fois le rectangle de l'un des costez qui font l'angle aigu, sçavoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle oxigone ABC, & l'angle aigu en iceluy A, apres avoir mené la perpendiculaire BD. Je dis que le carré du costé BC, qui soustient l'angle aigu A est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez BA, & AC de deux fois le rectangle de AC, & AD, sçavoir AC, l'un des costez qui font l'angle aigu A sur lequel tombe la perpendiculaire & AD prise entre la perpendiculaire, & l'angle aigu A.



Car les deux triangles ADB, & CDB estans rectangles le carré de BC fera egal aux quarrez de CD, & DB. Item le carré de AB fera egal aux deux quarrez de AD DB, par la 47. prop. 1 il faut donc prouver que les quarrez de BD & DC sont plus petits que les quarrez de AD, & DB & AC de la quantité cy dessus. Mais les quarrez de AC, & AD sont egaux au carré de DC, & deux fois le rectangle de AC, & AD par la 7. p. 2. auxquels si on adionste le carré commun de BD les tous seront egaux, sçavoir les quarrez AD BD, & AC aux deux quarrez de BD de DC, & deux fois le rectangle de AC, & AD. En ostant donc iceux deux rectangles les quarrez de BD, & DC seront d'autant plus petits que les quarrez de AD DB, & AC

Les quarréz de BC , & CA sont égaux aux quarréz de DB , DA & deux fois le rectangle de AC , & CD .

Mais le quarré de AB ne vaut que les quarréz de DA , & DB .

Partant le quarré de AB est plus petit que les deux quarréz de AC , & CB de la quantité d'iceux deux rectangles.

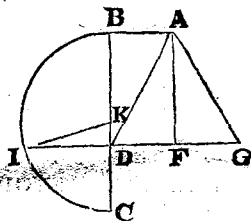
PROP. XIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnée la figure rectiligne ADG , à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le rectangle BF egal à la figure ADG par la 45. p. 1. Item soit prolongé le costé BD iusques en G , & soit fait DC egal à DF : & apres auoir coupé BC , & en deux egallement au point K , & d'iceuy point descrit le demy cercle BIC soit continuée DF iusques en I en la circonférence du demy cercle. Je dis que le quarré de ID est egal à la figure rectiligne DAG .

Car puis que BC est couppee en deux egallement au point K & en deux inegallement au point D le rectangle de BD , & DC , scauoir BF avec le quarré de la section du milieu KD est egal au quarré de la moitié KC par la 5. p. 2. ou de s^o égale KI , lequel estant egal aux deux quarréz de KD , & DI par la 47. p. 1, à cause que le triangle IDK est rectangle les deux quarréz KD , & DI se trouueront égaux au quarré de KD , & rectangle BF . Que si on oste le quarré commun de KD , le demeurant quarré de ID se trouuera egal au demeurant rectangle BF : & par consequent à la figure rectiligne donnee ADG .



Fin du second Element.



ELEMENT TROIS- IESME.

DEFINITIONS.



CERCELES égaux sont ceux desquels les diametres sont égaux, ou desquels les lignes menées du centre à la circonférence sont égales.

Vne ligne droite est dictée toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

Les cercles sont dictés se toucher l'un l'autre, quand en se rouchant ils ne se coupent point.

Les lignes droites sont dictées estre equi-distantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre sur icelles sont égales. Mais celle est plus esloignée du centre, sur laquelle tombela plus grande perpendiculaire.

Section de cercle est une figure comprise d'une ligne droite, & de la circonférence du cercle.

L'angle de la section est compris d'une ligne droite, & de la circonférence du cercle.

Vn angle se dit estre en la section, lors que sur vn point

pris en la circonferance font menees deux lignes droites des deux extremittez de la ligne qui sert de base à la section, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

Mais quand les lignes droites qui comprennent l'angle embrassent quelque circonferance, l'angle est dit estre en icelle.

Secteur de cercle est la figure de deux lignes droites embrassant quelque circonferance, & faisant angle au centre du cercle.

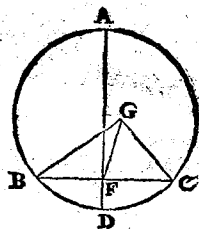
Semblables sections de cercle sont desquelles les angles sont egaux.

PROP. I.

Trouuer le centre du cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre

Soit tiree la ligne BC à l'aduanture, laquelle par la 10. & 11. p. 1. soit coupee en deux egallement, & à droicts angles par la ligne DA, Je dis que en DA est le centre du cercle.



Autrement il sera dehors DA d'une part ou d'autre d'icelle. Soit donc s'il est possible au point G, & soient menees les trois lignes droites GB, GF, & GC. Je dis doncque si G estoit le centre, par la def. du cercle, BG & GC seront egalles: mais BF & FC sont aussi egalles, & GF commune. Partant les deux triangles GFB & GFC ont les trois costez egaux au trois costez chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles BFG & CFG seroient droicts, & la ligne FG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BFA par la construction est droit, & tous les angles droicts sont egaux par la 10. commune sentence, ainsi les deux angles BFG & BFA seroient egaux, & auoir le tout à sa partie. Partant le centre ne peut estre hors la ligne DA. Soit donc icelle coupee en deux egallement, alors on aura le requis.

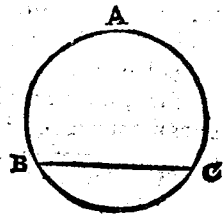
PROP. II.

Si en la circonferance d'un cercle on prend deux points à l'aduanture, la ligne droite menee de point à l'autre tom-

bera dans le cercle.

Soit la circonférence de cercle ABC, les deux points pris à l'adventure en icelle B & C, Je dis que la ligne droite menée d'un point à l'autre tombera dans iceluy cercle.

Ceste demonstration est fort intelligible : car si elle ne tomboit dans le cercle, il faudroit ou qu'elle tombast sur la circonférence du cercle, & elle seroit courbe, comme icelle circonférence, ou qu'elle tombast dehors la circonférence du cercle, ce qui n'est pas imaginable, d'autant qu'elle seroit encore moins droite que la circonférence : elle tombera donc dans le cercle.

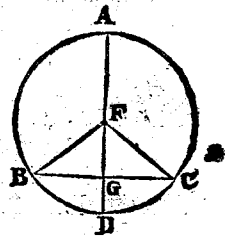


PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droite ne passant point par le centre, elle la coupera à droicts angles, & si à droicts angles aussi en deux également.

Soit le cercle donné ACDB son centre F la ligne passant par le centre AD, laquelle coupe en deux également BC, laquelle ne passe point par le centre, ie dis que AD coupera aussi BC en angles droicts.

Qu'il ne soit ainsi, soient menées les deux lignes CF & FB, les deux triangles BGF & CGF auront les deux costez BG & GF egaux aux deux costez CG & GF chacun au sien et la base BF égale à la base FC, & par la 8. p. 1. les deux angles au point G seront egaux & droicts par la 10. def. 1.



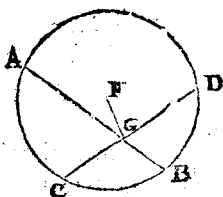
Je dis pareillement que si AD coupe BC en angles droicts qu'elle la coupe aussi en deux également. Car les deux angles au point G estans droicts seront egaux, & l'Angle B égal à l'angle C par la 5. p. 1. estant BFC Isoscèle, & le costé FG commun aux deux triangles BGF & CGF, & par la 26. p. 1. BG sera égale à GC.

PROP. IIII.

Si dans le cercle deux lignes droites ne passant point par le centre, s'entrecoupent, elles ne se couperont point l'une l'autre en deux également.

Soit le cercle ACBD les deux lignes AB & CD s'entrecoupons au point G, & ny l'une ne l'autre ne passe par le centre F. Je dis que l'une ou l'autre est coupée inégalement.

Car si du centre F on mène la ligne FG, icelles lignes se coupent en deux également au point G, FG les coupera au même point aussi en deux également & à droicts angles par la 3. p. 3. & les angles FGA & FGB seront droicts & égaux FGC, & FGD aussi droicts & égaux: ce qui est impossible, n'estant FGA que partie de FGC, ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux également.

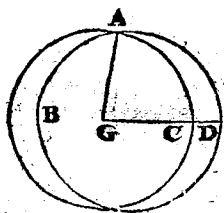


PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles se couppans l'un l'autre AFC & ABD, je dis qu'ils ne scauroient auoir vn même centre.

Autrement s'il est possible soit leur centre commun G, ainsi puis que toutes les lignes tirées du centre à la circonférence sont égales par la quinzième deff. 1. D'iceluy centre G soient menées les deux lignes GA & GD dans le cercle ABD, lesquelles seront égales. Item les lignes GA & GC dans le cercle AFC, lesquelles seront aussi égales, & par là. commune sentence GD & GC seroient égales: ce qui est impossible. Partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn même centre.

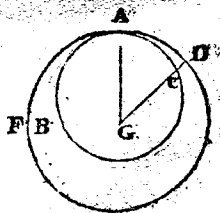


PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles AFD & ABC se touchans l'un l'autre au point A, Je dis qu'ils n'auront pas même centre.

Autrement s'il est possible soit leur centre commun G & d'iceluy soient menées les deux lignes GA & GD au cercle AFD. Item GA & GC au cercle ABC il s'en suivra la même absurdité que en la précédente, sçavoir que GD & GC seroient égales: donc G ne pouoit estre leur centre commun.



PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre, & d'iceluy point tombent quelques lignes droittes en la circonference, la plus grande sera celle en laquelle est le cétre, & la plus petite celle qui reste. Mais des autres tousiours la plus proche de celle qui coupe le centre est plus grande que la plus esloignée: Et deux lignes droites tant seulemēt venans d'iceluy point de part & d'autre du diametre sont egales.

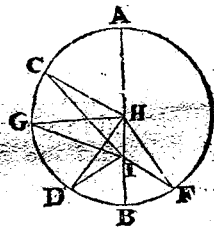
Soit le cercle doinné ACBF: le centre d'iceluy H le diametre AB, le point pris dans le diametre qui ne soit point le centre I, & d'iceluy point I soient menées les lignes IC, IG, ID, IF. Je dis que IA qui passe par le centre H, est plus grande que IC.

Qu'ainsi ne soit, il faut du centre H mener la ligne HC, laquelle par la defin. du cercle sera egale à HA: auxquelles si on adiouste la commune HI, les deux IH & HC seront egales aux deux IH & HA: mais IH & HC sont plus grandes que IC par la 20. p. 1. Aussi IA sera plus grande que IC.

Secondement ie dis que IB est plus petite que ID ou autre quelconque, car si on mene du centre H la ligne HD du triangle DIH, les deux costez DI & IH, seront plus grands que le troisieme HD par la 20. p. 1. ou que son egale HB. Que si on oste la ligne commune HI, le demeurant ID sera plus grand que le demeurant IB.

Tiercement ie dis que GI est plus petite que CI plus proche de la ligne AI: Car si on mene la ligne HG, les deux triangles CHI & GHI auront les deux costez CH & HI egaux aux deux costez GH & HI chacun au sien: mais l'angle CHI plus grand que GHI, & par la 24. p. 1. la base IC sera plus grande que la base IG.

Finablement ie dis que la seule ID est egale à IF estans autant distantes l'une comme l'autre du diametre AB, car il est evident qu'on ne pourra tirer du point I une autre ligne dans le cercle qui ne s'approche ou recule de la ligne IA tombant de costé ou d'autre de IF ou ID, & par ce qui a esté monstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite.



PROP. VIII.

Si on préd quelque point hors le cercle, & d'iceluy soient

menées quelques lignes droites dans la circonference, celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées dans la circonference concaue. Quant aux autres tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignée. Mais de celles qui passent par la circonference conuexe la plus petite est celle qui est comprise entre le point & le diametre. Quant aux autres la plus esloignée est plus grâde que la plus proche de la plus petite, & n'y a que deux lignes droites qui puissent tomber egalles de part & d'autre de la plus petite.

Soit le cercle donné $kDBH$, le point pris hors iceluy A duquel soient menees les lignes AB, AG, AD, AH , dās la concauité d'iceluy cercle, ie dis que la ligne AB qui passe par le centre C est plus grande que pas vne des autres, & specialement que la plus proche AG .

Qu'ainsi ne soit du centre C il faut mener la ligne CG , il est euident que les deux lignes AC & CB sont egalles aux deux lignes AC & CG , lesquelles estant plus grandes que AG par la 20. p. 1. aussi les deux AC & CB , ou la seule AB sera plus grande que AG .

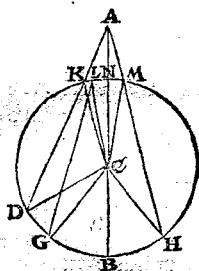
Ie dis secondement que AG est plus grande que AD , ce qui est euident par la 24. p. 1. comme il a esté prouué en la precedente.

Ie dis tiercement que les seules AG & AH sont egalles, ce qui se peut aussi prouuer comme en la precedente.

Ie dis quartement que des lignes qui tombent du point A sur la conuexité du cercle, sçauoir AN, AM, AL, AK , que AN comprise entre le centre C & le point A est la plus petite de toutes.

Car si du centre C on mene les lignes CM, CL, CK , par la 20. p. 1. Les deux lignes CL & LA seront plus grandes que CA : desquelles si on oste les egalles CN & CL : LA demeurera plus grande que NA . Item il se prouuera par la 24. p. 1. cōme cy dessus que KA est aussi plus grâde que LA , qui n'est pas tant esloignée de NA , car les deux costez LC & CA sont egaux aux deux costez KC & CA & l'angle KCA plus grand que l'angle LCA : la base KA sera aussi plus grande que la base LA .

Finablement il se prouuera cōme en la precedente que les seules lignes AL & AM sont egalles: car si on en mene vne autre du point A , il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AN .

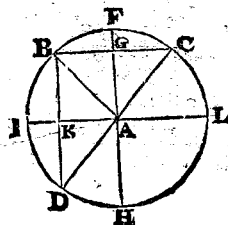


PROP. IX.

Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point vers la circonférence tombent plus de deux lignes droites égales, le point pris est le centre du cercle.

Au cercle donné BCD soit pris le point A, & d'iceluy point soient menées les trois lignes AC, AB, AD. Je dis que si elles sont égales que le point pris est le centre.

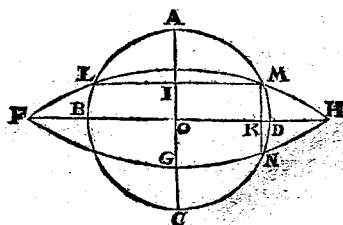
Qu'il ne soit ainsi: il faut mener les lignes BC & BD, & après les avoir coupées en deux également aux points G & K, d'iceux points au point A soient menées les deux lignes GH & KL, les deux triangles BGA & CGA ayans les trois costez égaux aux trois costez chacun au sien, les deux angles au point G seront égaux, & la ligne GAH sera perpendiculaire, & par ce qui a esté démontré à la 1. p. 3. Le centre du cercle sera en icelle par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en KL. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun.



PROP. X.

Vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles ABCD & FGHI se coupans aux trois points L, M, N, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes LM & MN, lesquelles soient coupées en deux également aux points I & K par la 10. p. 1. & soient menées les lignes IG & KB à droicts angles. Il faudra que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC, ils seront aussi en la ligne FH par ce qui a esté démontré à la première prop. 3. Cela donc au point de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient trois centres contre la 5. p. 3. Donc les cercles ne se pouuoient couper en trois points.



PROP. XI.

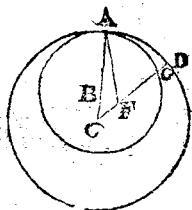
Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, la ligne

E 111

droite menée par les deux centres passera par l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles se touchans interieurement au point A, desquels les centres sont C du plus grand & B du plus petit. Je dis que la ligne droite menée par les deux centres CB tombera sur le point de l'attouchement A.

Autrement elle tombera ailleurs. Soit donc s'il est possible au point D coupant les deux cercles, & soient les deux centres C, & F desquels soient menées les lignes C A, & FA, le triangle CAF aura les deux costez CF, & FA plus grands que le troisieme AC par la 20. p. 1 Item la ligne CD estant egale à C A les deux CE, & FA seront aussi plus grandes que CD ce qui est absurde, estât FD egal à FA, & CF commun, donc la ligne passera par l'attouchement A.

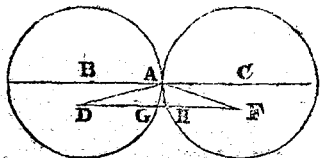


PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors la ligne menée d'un centre à l'autre, passera par l'attouchement.

Soient deux cercles se touchans au point A, desquels les centres soient B, & C. Je dis que si d'un centre à l'autre on mène une ligne droite, que icelle passera par le point d'attouchement A.

Autrement il s'ensuivra absurdité : car si icelle ligne ne passe par le point d'attouchement, qu'elle passe ailleurs : s'il est possible, sçavoir aux points G, & H, les deux centres estans D, & F : autrement la ligne ne sera pas droite, & du point A soient menées les deux lignes DA, & FA, lesquelles par la 20. p. 1. seront plus grandes que DF, & par la deff. du cercle, il s'ensuit que DG estant egal à DA, & FH à FA que les deux lignes DG, & HF seroient plus grandes que DF, ce qui est contre la 8. com. sent.

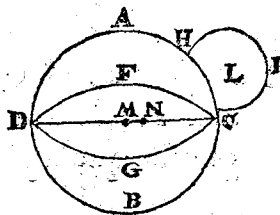


PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient

Soient les deux cercles $ADBC$, & $DFGC$ se touchans intérieurement aux deux points D , & C , s'il est possible, & d'autant qu'ils ne peuvent auoir vn mesme centre par la 6. p. 3. soient les deux centres diuers M , & N par la deff. du cercle, il faut que MC , & MD soient egalles. Item NC , & ND . Mais ND est plus grande que MD . Partant NC sera aussi plus grande que MC : ce qui est impossible, donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.



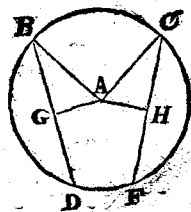
Pareillement il est impossible qu'ils se touchent extérieurement à plus d'un point: car si le cercle HIC pouuoit toucher le cercle ADC en deux points, sçavoir H , & C , il faudroit que la ligne droite menée par les deux centres M & L coupasse les deux points d'attouchement H , & C par la 12. p. 3. ce qui est impossible: ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'un point tant dehors que dedans.

PROP. XIII.

Dans vn cercle les lignes droites egalles sont equidistantes du centre: & les equidistantes du centre sont egalles entre elles.

Soient deux lignes egalles BD , & CF . Je dis qu'elles seront equidistantes du centre A .

Qu'ainsi ne soit par la 12. p. 1. soient menées les deux lignes perpendiculaires AG , & AH . Item les deux AC , & AB . Je dis premierement que les deux lignes BD , & CF estans couppees en angles droits par les perpendiculaires AG , & AH , qu'elles seront aussi couppees en deux egallement par la 3. p. 3. & partant BG sera egale à CH .



Pareillement BA estant egale à AC , & le quarré de AB estant egal aux deux quarréz de BG , & GA par la 47. p. 1. & son egal quarré de AC estant aussi egal aux deux quarréz de AH , & HC , les deux quarréz de BG , & GA seront egaux aux deux quarréz de AH , & HC . Mais le quarré de BG est egal au quarré de CH , & par consequent le quarré de AG est egal au quarré de AH , & la ligne AG sera egale à AH , & par les deff. du 3. BD , & CF seront equidistantes du centre du cercle donné.

Quant à la seconde partie. Je dis que si elles sont equidistantes qu'elles seront egalles: car les perpendiculaires AG & AH seront egalles, & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus BG se trouuera egale à CH , & par consequent aussi leurs doubles BD , & CF seront egalles, ce qui estoit à demonst. G

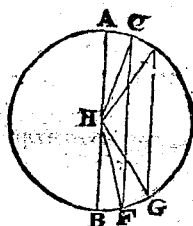
PROP. XV.

Dans le cercle la plus grande ligne est le diametre: quant aux autres tousiours la plus proche du centre est plus grande, que la plus esloignée.

Soit le cercle donné $ABGD$, les lignes dans iceluy AB , CF , DG . Je dis que AB (qui est le diametre) est plus grande que CF , ou autre quelconque, & CF plus proche du centre H que DG , est plus grande que DG .

Qu'il ne soit ainsi du centre H soient menées les lignes HC , HD , HF , HG . Je dis que au triangle CHF , les deux costez CH , & HF sont plus grands que le troisieme CF par la 20. p. 1. Mais CH , & HF sont egaux à HA , & HB par la definition du cercle, donc AB , sera plus grande que CF .

Item des triangles CHF , & DHG , les costez HC , HD , HF , HG , sont egaux par la definition du cercle, l'angle CHF , plus grand que DHG & par la 24. p. 1. la base CF sera plus grande que la base DG , & ainsi des autres.

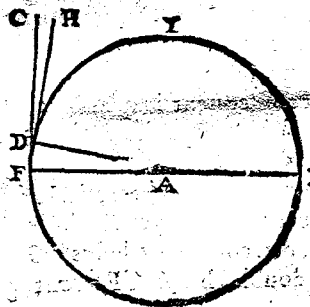


PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'un cercle on leue vne ligne perpendiculaire icelle tombera dehors le cercle, & entre icelle perpendiculaire & la circonferance ne tombera pas vne autre ligne droite, & l'angle du demi cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle donné soit le centre A , le diametre BF , sur l'extremité duquel B soit leuee la ligne perpendiculaire BC , par la 11. p. 1. Je dis premierement que toutes les parties d'icelle ligne BC , tomberont hors le cercle.

Qu'ainsi ne soit si on pense que quelque partie de BC entre dans le cercle soit marqué l'edroict d'icelle partie en la ligne BC & soit par exemple le point D duquel soit



menée la ligne DA, il est evident que le triagle DBA aura l'angle droit DBA plus grād que pas vn des autres; & par la 19. p. 1. le costé DA qui soustient le plus grand angle sera plus grand que le demidiamentre BA. Il est donc necessaire qu'il sorte hors la circonference, ainsi le point D ne touchera point icelle circonférence, ainsi aduiendra il de tous les autres points que l'on pélera toucher le cercle.

Je dis secondement qu'une autre ligne droite ne pourra tomber entre la premiere CB, & la circonference. BI, qu'elle n'entre dans le cercle.

Car, s'il est possible, soit menée HB, laquelle ne peut estre perpendiculaire à BA, donc par la 12. p. 1. Soit menée AD perpendiculaire sur icelle GB, l'angle ADB fera droit, & par la 19. p. 1. BA sera plus grand costé que AD. Il faut donc que AD ne voise point iusques à la circonference, autrement par la deff. du cercle elle seroit égale à AB. Partant il faut que HB entre dans le cercle.

Finablement il s'ensuit que tout l'angle du demi cercle IBA est plus grād que tout angle rectiligne aigu, & que celui qui reste IBC est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CBA est angle droit diuisé par la seule circonference IB, & que entre icelle circonference IB & la droite CB n'en peut tomber vne autre droite. L'angle CBI ne peut estre diuisé par aucune ligne droite, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite, ny par consequent IBA ne sera augmenté par aucune ligne droite.

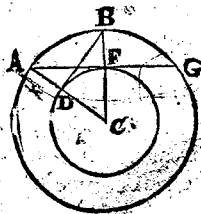
PROP. XVII.

D'un point donné mener vne ligne droite qui touche le cercle donné.

Soit le point donné A, duquel il faut mener vne ligne droite qui touche le cercle donné DF.

Soit menée la ligne AC du point donné au centre & du centre C & interval CA, soit décrit le cercle AB. Et apres auoir leué la perpendiculaire DB au bout du diametre DC par la 11. p. 1. Soit menée la ligne BC coupant le cercle DF au point F, & du point donné à iceluy point F. Soit menée la ligne AF, ie dis qu'elle touche le cercle au point F.

Car les deux triangles AFC & BDC ayans deux costez egaux & l'angle C commun, la base AF sera égale à la base DB, & l'angle droit BDC égal à l'angle AFC, qui sera aussi droit. Et par ce qui a esté demonstté à la 16. p. 3. la ligne AF touchera le cercle DF au seul point F.



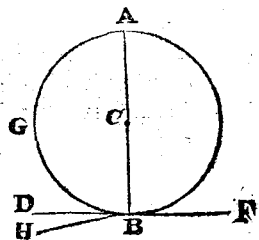
PROP. XVIII.

Si vne ligne droite touche le cercle, & du centre à l'arrou-

chement on mène vne ligne droite, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne DF touchant le cercle donné au point B, & d'iceluy point soit menée la ligne AB passant par le centre C. Je dis qu'elle sera perpendiculaire à DF.

Autrement si elle n'est perpendiculaire, l'angle DBC, sera plus grand ou plus petit qu'un angle droit. Il ne peut estre plus petit : car ayant leué la perpendiculaire BH, DB tomberoit entre la perpendiculaire HB, & la circonférence contre la 16. p. 3. Il ne peut estre aussi plus grand ; car par la 14. p. 1. l'angle de l'autre costé CBF, seroit plus petit qu'un angle droit, & de là s'ensuiuroit le mesme inconuenient que dessus, partant la ligne AB sera perpendiculaire à DF.

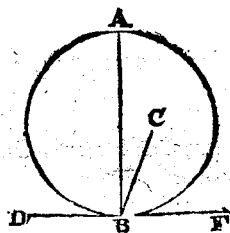


PROP. XIX.

Si vne ligne droite touche vn cercle, & au point de l'atouchement est leuee vne perpendiculaire, icelle coupera le centre du cercle.

Soit la ligne DF touchant le cercle au point B, & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire AB. Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne.

Autrement il sera dehors icelle ligne, soit donc au point C, s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne CB au point de l'atouchement B, elle sera aussi perpendiculaire à DF par la 18. p. 3. ce qui est impossible car les deux angles ABF, & CBF, seroient droicts, & egaux contre la 8. com. sentence, partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne AB, ains dedans.

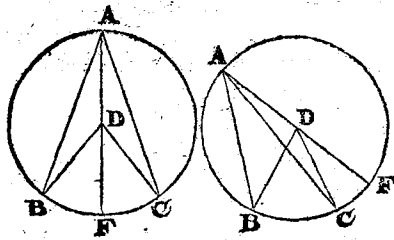


PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonférence quand iceux angles ont vne mesme circonférence pour base.

Dans le cercle ABC soient les deux angles, sçavoir BAC en la circonférence & BDC au centre ayant BC mesme circonférence pour base. Je dis que BDC sera double de BAC.

Qu'ainsi ne soit, il faut mener la ligne ADF diuisant iceux angles. Je dis que pour autât que les lignes DA, DB, & DC, sont égales, les deux triangles ADB, & ADC seront isosceles, & par la 5. p. 1. auront les angles égaux sur les bases AB, & AC. Mais l'angle extérieur BDF par la 32. p. 1. est égal aux deux angles intérieurs DAB, & DBA: qui sont égaux. Partant il sera aussi double du seul DAB, par mesme discours FDC se trouuera double de DAC, & par conséquent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC.



Que si l'angle de la circonférence A est comme en ceste seconde figure, il s'ensuivra toujours le mesme, sçavoir que BDC sera double de BAC.

Car apres avoir mené la ligne ADF tout ainsi comme cy dessus par la 31. p. 1. l'angle extérieur BDF sera égal aux deux opposez intérieurs ABD, & DAB, & double du seul DAB estant le triangle isoscele, par mesme discours CDF sera double de CAD, & par les com. sent. Si de BDF double de BAF on oste GDE, double de CAF le demeurant BDC sera double du demeurant BAC.

PROP. XXI.

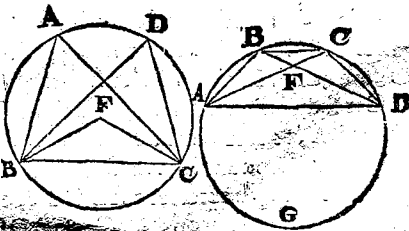
Dans le cercle les angles qui s'appuyent sur vne mesme section sont égaux.

Toute section est ou plus grande ou plus petite que le demi cercle. Soit donc premièrement vne plus grande section BADC, les deux angles, sur la mesme section BC soient BAC, & BDC. Je dis qu'ils sont égaux.

Car si du centre F on mene les deux lignes FB, & FC, l'angle du centre BFC sera double de l'angle en la circonférence BAC par la 20. p. 3. & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle CDB. Mais les choses qui s'ont moitié d'une mesme sont égales entre elles ainsi les angles A, & D seront égaux:

Soit maintenant la section ABCD, plus petite que le demi cercle. Je dis que les deux angles ABD, & ACD estans sur la mesme section AD sont égaux.

Car si on mene la ligne BC, il se fera vne section BGC, plus grande que le demi cercle, & comme nous auons demonsté cy dessus les deux angles BAC



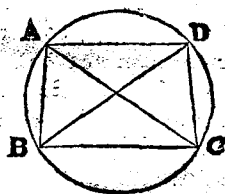
& BDC qui sont sur vne mesme section BC seront egaux, pareillement aux deux triangles BAF, & CDF: les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonstrez à la 32. p. 1. le troisieme B sera egal au troisieme C, ce qui estoit à prouuer.

PROP. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cercle ont les angles oposez egaux à deux angles droits.

Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle ABCD. Ie dis que les angles opposez B, & D sont aussi egaux à deux droits.

Car si on mene les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD sur la mesme section AD seront egaux par la 21. p. 3. Pareillement DBC, & CAD seront egaux sur la mesme section DC donc les deux angles sous le point B seront egaux aux 2. DAC, & DCA, lesquels avec les deux du point D sont egaux à deux droits par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le point B avec les deux sous le point D seront egaux à deux droits.

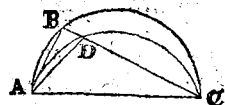


PROP. XXIII.

Deux sections de cercle semblables & inegales ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droite & de mesme part.

Soient deux sections de cercles semblables, & inegales ABC, & ADC sur la ligne droite AC, & de mesme costé. Ie dis qu'il s'ensuira absurdité.

Car si du point B on mene la ligne BC, & les deux lignes BA, & DA par la definition des semblables sections les deux angles ABC, & ADC seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle extérieur ADC doit estre plus grand que l'opposé intérieur B; donc les deux sections ABC, & ADC (estant semblables, & inegales) ne se pouuoient mettre sur la mesme ligne AC.

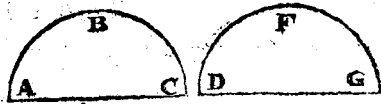


PROP. XXIII.

Semblables sections de cercle estans constituées sur lignes droites egales, sont egales entre elles.

Soient deux sections de cercles semblables ABC, & DFG constituées sur lignes égales AC, & DG. Je dis qu'elles sont égales.

Autrement, si elles estoient inégales il s'ensuivroit que deux sections semblables, & inégales pourroient estre posées sur lignes droites égales contre la 1. p. 3. donc les deux sections seront égales.

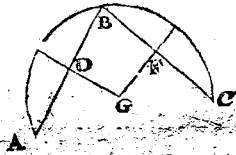


PROP. XXV.

La section du cercle estant donnée decrire le cercle duquel elle est section.

Soit la section de cercle ABC de laquelle il faut trouver le centre pour acheuer le cercle d'icelle section.

Soient pris trois points à l'aduanture en icelle section A, B, C, & apres avoir mené les deux lignes AB, & BC & icelles coupées en deux également, en D, & F d'iceux points soient leuées les perpendiculaires DG, & FG se rencontrans au point G. Je dis que G est le centre cherché pour acheuer le cercle.



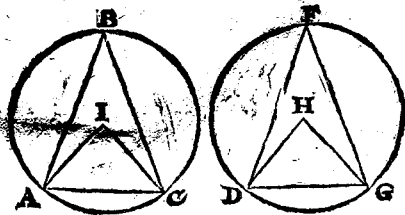
Car par ce qui a esté démontré à la 1. p. 3. le centre sera à la ligne DG. Il sera aussi en FG : ce sera donc au point G qui leur est commun.

PROP. XXVI.

Dedans cercles égaux les angles égaux, tant aux centres que aux circonferances ont pour base circonferances égales.

Soient les cercles égaux ABC & DFG, & les angles dans iceux égaux, sçavoir aux circonferances B égal à F, & aux centres I égal à H. Je dis que les circonferances qu'ils ont pour base sont égales, sçavoir AC, DG.

Car d'autant que les cercles sont égaux, les lignes du centre à la circonferance seront égales par la p. 3. Ainsi les deux triangles AIC, & DHG ont deux costez égaux chacun au sien, & l'angle I égal à l'angle H, & par la 4. p. 1. la base AC sera égale à la base DG. Pareillement l'angle B étant égal à l'angle F, la section ABC sera semblable à la section



DFG par la 10. d 3. & par la 24. p. 3. elles seront egales: & qui de cercles egaux oste sectiōs egales, ſçavoir ABC & DFG, le demeurant AC ſera egal au demeurant DG, ainſi les angles egaux auront pour baſe circonferances egales.

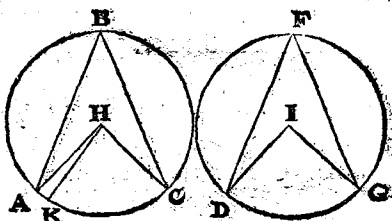
PROP. XXVII.

Dedans cercles egaux les angles ſont egaux, qui ont pour baſes egales circonferances, ſoit au centre, ou en la circonſerance.

Soient deux cercles egaux ABC & DFG, & ſur les circonſerances egales AC & DG ſoient les angles ABC & DFG tous deux en la circonſerance. Item AHC & DIG au centre, ie diſ que les angles H & I ſeront egaux.

Autrement l'un d'iceux ſera pl^o grād ou plus petit Soit donc AHC plus grād que DIG, ſ'il eſt poſſible il faudra par la 23. p. 1. ſur CH faire CHK egal à DIG, & par la 26. p. 3 les circonſerances KC & DG ſeront egales: ce qui eſt contre notre hypothēſe: car nous auions poſé AC egal à DG: Il faudroit donc que AC & KC fuſſent egales contre la 8. commune ſentence. Donc l'angle H n'eſtoit point plus grand que l'angle I.

L'egalité des angles du centre eſtant prouuée, les angles de la circonſerance ſont entendus egaux par la 20. p. 3.

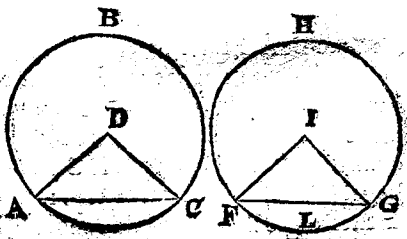


PROP. XXVIII.

Dedans cercles egaux les lignes droites egales coupent circonſerances egales, ſçavoir la plus grande, à la plus grande & la plus petite à la plus petite.

Soient les deux cercles egaux ABC, & FHG, & ſur iceux deux lignes egales AC, & FG. ie diſ que les circonſerances qu'el les coupent ſont egales, ſçavoir la petite AKC à la petite FLG, & la grande ABC, à la grande FHG.

Qu'il ne ſoit ainſi des centres D, & I ſoient menées les lignes DA, DC, IE, &



IG,

IG qui seront égales par la première deff. 3. étant les cercles égaux ; & la ligne AC, étant égale à la ligne FG, les deux triangles ADC, & FIG auront les 3. costez égaux chacun au sien, & par la 8. p. 1. l'angle D sera égal à l'angle I, & par la 26. p. 3. ils auront égales circonferences pour bases & AKC sera égale à FLG, & qui de cercles égaux ôte circonferences égales AKC, & FLG les demeurantes sections ABC, & FHG seront égales.

PROP. XXIX.

Dedans cercles égaux les circonferences égales comprennent lignes droites égales.

Soient les cercles égaux BAKC & FLG, desquels les sections de circonferences AKC & FLG sont égales, si on meine les lignes AC & FG, ie dis qu'elles sont égales.

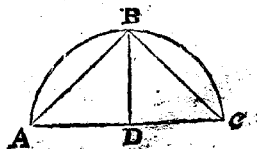
Qu'ainsi ne soit des centres D, & I soient menées les lignes droites DA, D C, FI, IG. Mais d'autant que l'on pose les circonferences AKC, & FLG égales, les angles D, & I, (qui ont pour bases icelles circonferences égales) seront égaux par la 27. p. 3. pareillement les costez DA, & DC, étant égaux aux costez FI, & IG par la 1. d. 3. la base AC, sera égale à la base FG, par la 4. p. 1. ce qui estoit à prouver.

PROP. XXX.

Couper vne circonferance en deux également.

Soit la circonferance donnée ABC, laquelle il faut couper en deux également.

Soit menée la ligne AC, laquelle sera coupée en deux également au point D, duquel point il faut mener la perpendiculaire DB. Ie dis que en B la circonferance est coupée en deux également.



Qu'il ne soit ainsi, il faut mener les lignes AB, & BC & pour autant que les deux costez AD, & DB du triangle ADB sont égaux aux deux costez CD, & DB du triangle CDB, & les deux angles au point D égaux par la 4. p. 1. la base AB sera égale à la base BC, & par la 28. p. 3. les circonferences AB, & BC seront égales.

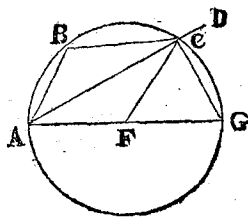
PROP. XXXI.

Dans le cercle l'angle qui est au demy cercle est droit : & celui qui est en la plus grande section est plus petit qu'un

droict : Mais celuy qui est en la plus petite est plus grand qu'un droit.

Soit l'angle dans le demi cercle ACG. Je dis qu'il est droit.

Qu'il ne soit ainsi, il faut mener la ligne FC apres avoir continué AC insques en D. Il est evident que les triangles AFC, & CFG sont Isoceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçavoir FAC, à FCA, & FCG, à FGC, & les deux ensemble AFC, & GCF seront egaux aux deux ensemble CAF, & CGF. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur DCG est egal à iceux deux angles CAF, & CGF, & partant les deux au point C, faisans le tout ACG seront aussi egaux à l'exterieur GCD, & par la 10. d. 1. ACG, & DCG seront tous deux angles droicts.



H

Je dis d'avantage que l'angle CGA qui est en la plus grande section CGHA est plus petit qu'un droit : ce qui est aisé à prouver par la 32. p. 1. d'autant que l'angle ACG, estant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit, ainsi l'angle G est plus petit qu'un angle droit, ainsi des autres.

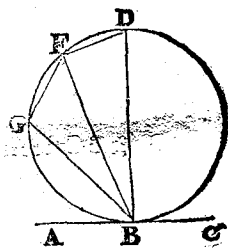
Je dis finalement que en la petite section ABC, l'angle ABC est plus grand qu'un droit : car par la 22. p. 3. la figure de 4. costez ABCG, inscrite au cercle fait les deux angles opposez egaux à deux droicts, sçavoir B, & G. Mais nous auons prouvé G estre plus petit, par consequent B sera plus grand.

PROP. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'attouchement on mene quelque ligne droite coupant le cercle : les angles qu'elle fait à la touchante sont egaux à ceux qui sont alternatiuement aux sections du cercle.

Soit la ligne droite AC touchant le cercle au point B, & d'iceluy point soit menée FB coupant le cercle en deux sections inegales. Je dis que l'angle FBA est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande section, & que FBC est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite section.

Qu'il ne soit ainsi apres avoir mené le diametre BD, soient menées les lignes DF, FG, GB, maintenant par la 31. p. 3. l'angle DFB dans le demi cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D, & FBD sont egaux à un droit, c'est à dire à DBA lequel est droit par la 13. p. 3. desquels si on oste l'angle commun FBD, le de-



meurant FBA, sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. p. 3. la figure de 4. costez inscrite au cercle DFGB ferales angles opposez G, & D egaux à 22. droicts: c'est à dire aux deux FBA, & FBC, desquels si on oste choses egalles: c'est à sçavoir les angles D, & FBA egaux, les demeurans FGB, & FBC seront egaux.

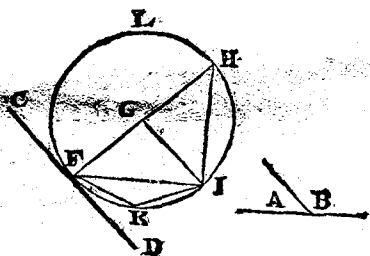
Que si la ligne coupant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'un que en l'autre demi cercle seroient droicts par la 31. p. 3.

PROP. XXXIII.

**Deffus vne ligne droite donnée deſcrire la ſection d'vn cer-
cle capable d'vn angle egal à l'angle reſtiligne don-
né.**

Soit la ligne donnée FI, il faut sur icelle descrire vne section de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné A.

Soit construit JFD égal à l'angle donné A par la 23. p. 1. & après avoir continué FD jusques en C , & du point F levé la perpendiculaire FH , sur la ligne FI , & au point I soit l'angle FIG égal à l'angle IFG par la 32. p. 1. rencontrant la perpendiculaire FH au point G par la 6. p. 1.



GI, & GF seront égaux. Partant le cercle décrit du centre G & internal GI passera aussi par le point F, & apres auoir mené la ligne HI l'angle IFD. qui est égal à l'angle A sera égal à l'angle H décrit dans la section FLHI par conséquent l'angle H sera égal à l'angle A, ainsi nous auons décrit vne section de cercle sur la ligne donnée capable d'un angle égal à vn angle donné.

Que si l'angle donné eust esté obtus comme B, il eust fallu construire IFC
égal à iceluy, & chercher le centre G comme dessus, pour descrire le cercle
LFIKH, & par la 32. p. 3. la plus petite section IKF eust compris l'angle IKF e-
gal à l'angle IFC.

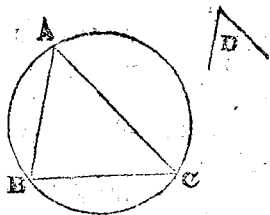
Que si l'angle donné eust esté droit, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée.

PROP. XXXIV.

D'un cercle donné ôter vne section capable d'un angle, égal à un angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut oster vne section capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit menée à l'adventure la ligne CA, touchant la circonference aux points C & A, & sur icelle ligne soit basti l'angle CAB egal à l'angle rectiligne donné D par la 23. p. 1. & soit menée la ligne BC, ie dis qu'icelle diuifera le cercle en deux sections, dont la plus grande comprend l'angle BAC, par construction egal au donné.



SCHOLIE.

Il aduient quelquesfois que l'angle donné estant obtus, si on faisoit vn angle obtus sur la ligne tirée, à l'adventure que l'autre ligne sortiroit hors le cercle. Mais pour euitier cet inconuenient, si vn angle obtus estoit donné faudra prendre l'angle aigu, lequel avec l'angle obtus donné accompliroit deux angles droicts, cela est aisé à pratiquer en continuant directement l'une des lignes qui comprennent l'angle donné, puis pratiquer comme enseigne la proposition. Et dedans la grande section on aura l'angle aigu. Et dans la petite section vn angle obtus egal au donné par la 32. p. 3. d'autant que iceux deux angles font vne figure de quatre costez.

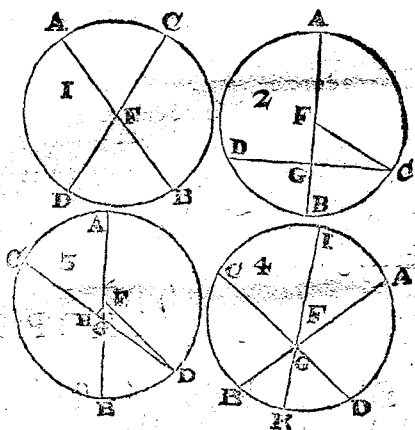
PROP. XXXV.

Si dans vn cercle deux lignes droittes se coupent l'une l'autre. le rectangle des deux pieces de l'une est egal au rectangle des deux pieces de l'autre.

Soit le cercle donné ACBD les deux lignes en iceluy se coupans au point F. Je dis que le rectangle des deux pieces AF & FB est egal au rectangle des deux pieces CF & FD.

Mais d'autant que les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre lignes seront egales, & par ainsi la propos. est euidente.

Que si la seule AB passe par le centre F, & diuise DC en deux egallement comme en la 2. figure, elle la diuifera aussi à droicts angles, par la 3. p. 3. Et apres auoir mené FC, il est euident par la 5. p. 2. que le rectangle de AG & GB avec le quarré de GF seront egaux au quar-



ré de FB ou FC (car la ligne AB est coupée en deux également au point F, & en deux inégalement en G) & par la 47. p. 1. le quarré de FC estant égal aux deux quarrés de FG & GC en ôstant le quarré commun de FG, le demeurant rectangle de AG & GB se trouuera égal au quarré de GC, comme il a esté démontré à la 14. p. 2. ou au rectangle de DG & GC.

Que si la ligne AB passant par le centre F, comme en la 3. figure diuise inégalement CD ne passant point par le centre, il s'ensuiura la mesme chose. Car apres auoir mené la perpendiculaire FH, & la ligne droite FD. Pour autant que AB est coupée en deux également en F, & en deux inégalement en G, le rectangle de AG & GB avec le quarré de GF sera égal au quarré de FB ou de son égale FD par la 5. p. 2. Mais le quarré de EG est égal aux deux, de FH & HG par la 47. p. 1. Pareillemēt le quarré de FD est égal aux deux de FH & HD par la 47. p. 1. Donc en ôstant le quarré commun de FH. Le demeurant quarré de HD sera égal au rectangle de AG & GB, & quarré de HG, par mesme discours & par la mesme 5. p. 2. le quarré de HD est égal au rectangle de CG & GD, & quarré de HG: & en ôstant le quarré commun de HG, le rectangle de AG, & GB se trouuera égal ou rectangle de CG, & GD.

SOMMAIRE.

Le rectangle de AG & GB avec les deux quarrés de FH & HG sont égaux aux quarrés de FH & HD: Mais le rectangle de CG & GD avec les deux quarrés de FH & HG sont aussi égaux aux mesmes quarrés de FH, & HD.

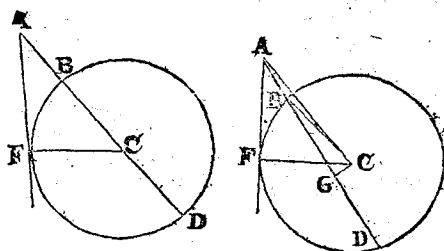
Parant en ôstant tous les quarrés de part & d'autre, le rectangle de AG & GB demeurera égal au rectangle de CG & GD.

Que si ny l'une ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuiura le mesme: car si on meine le diamettre Ik, passant par le point commun de la 4. figur. Le rectangle de IG & Gk, sera égal au rectangle de CG & GD, comme cy dessus a esté dict, & par mesme raison aussi au rectangle de AG & GB, & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AG & GB. Item de CG & GD seront égaux.

PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droittes, l'une desquelles coupe le cercle & l'autre le touche. Le rectangle de toute la coupante & de sa partie, dehors prise entre le point & la circonference conuexe est égal au quarré de la touchante.

Soit A point pris hors le cercle donné, duquel soit menée la ligne AD coupante & AF touchante : Je dis que le rectangle de la touse AD, & de la partie AB, prise entre le point donné & le cercle est égal au quarré de la touchante AF.



Qu'il ne soit ainsi du centre C, au point d'attouchement F, Soit menée la ligne CF, laquelle par la 18. p. 3. sera perpendiculaire à icelle touchante FA, & pour autant que la ligne BD est coupée en deux également au point C, & à icelle est adiouit directement BA, le rectangle de la totale AD, & de sa partie AB avec le quarré de BC ou FC son égale est égal au quarré de CA par la 6. p. 2. ou aux deux de AF & FC par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de FC, le demeurant quarré de AF sera égal au demeurant rectangle de AD & AB, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle donné faudra démonstrer en ceste sorte: du centre C soient menées les lignes CA, CB, CF, & la perpendiculaire CG, laquelle coupera BD en deux également par la 3. p. 3. & par la 6. p. 2. comme cy dessus le rectangle de AD & AB avec le quarré de BG sera égal au quarré de AG, auxquelles choses égales si on adiouste le quarré commun de GC, le rectangle de AD & AB avec les deux quarrés de BG & GC, ou le seul de BC, par la 47. p. 1. sera égal aux deux quarrés de AG & GC, ou au seul de AC, par la 47. p. 1. ou aux deux de AF, & FC, par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrés égaux de BC, & FC, les demeurant quarré de AF, & le rectangle de AD & AB seront égaux.

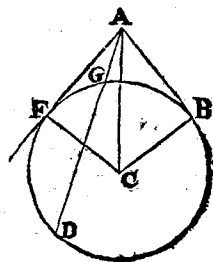
PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites vers iceluy cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre tombe au pres. Sile rectangle de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonferance convexe est égal au quarré de celle qui tombe au pres. Icelle tombante touchera le cercle.

Hors le cercle donné soit pris le point A, & d'iceluy soit menée la ligne AD qui coupe le cercle au point G, & la ligne AF terminée au point F sur iceluy cer-

ele, & soit menée FC, ie dis que si le quarré de AF, est
egal au rectangle de AD & AG, que la ligne AF touche
le cercle donné.

Car si du point A est menée la ligne AB touchant le
cercle au point B, apres auoir mené les deux lignes CA
& CB, par la 36. p. 3. le quarré de AB sera egal au rectan-
gle de AD & AG : Mais par hypotese le quarré de AF
est aussi egal à iceluy rectangle, & partant les quarez
& les lignes AF & AB seront egalles. Item CF, & CB
sont aussi egales par la deff. du cercle & CA à soy-mes-
me: ainsi les deux triangles ABC & AFC, ayans les trois costez egaux aux
trois costez chacun au sien, les angles B, & F seront egaux par la 8. p. 1. & B est
droit par la 18. p. 3. aussi F sera droit, & par ce qui a esté démontré à la 16. p. 3.
la ligne AF sera touchante.



Fin du troisieme Element.



E L E M E N T Q V A - T R I E S M E . D E F I N I T I O N S .

Vne figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors que vn chacun des angles de la figure inscrite touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

Semblablement aussi la figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chascun costé de la circonscrite touche vn chascun angle de l'inscrir.

Mais la figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle quand vn chacun angle de la figure inscrite touche la circonferance du cercle.

Et la figure rectiligne se dict estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite touche la circonferance du cercle.

Semblablement aussi le cercle se dict estre inscrit en vne figure rectiligne quand la circonferance du cercle touche vn chascun costé de la fig. en laquelle il est inscrit.

Mais le cercle se dict estre circonscrit à vne figure quand la circonferance du cercle touche vn chacun des angles, à l'entour de laquelle il est descript.

Vne ligne droite se dict estre accommodée dans le cercle
quand

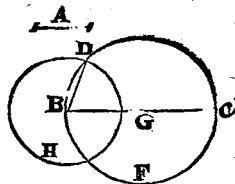
quand les extremitéz d'icelle sont en la circonferencedu cercle.

PROP. I.

Au cercle donné accommoder vne ligne droite égale à vne ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné dans lequel il faut accommoder vne ligne droite égale à la ligne droite donnée A.

Soit mené le diametre BC, & d'iceluy soit coupée BG portion égale à la ligne A. En apres du centre B, & interual BG soit décrit le cercle DGH coupant le cercle donné au point D, & soit menée la ligne BD. Je dis que BD est égale à A.



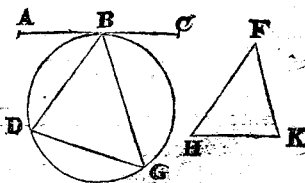
Car par la defn. du cercle BG, & BD sont égales, & par la construction BG est égale à A, & par la 1. com. sent. BD, & A seront égales. Ce qui estoit à démonstrer.

PROP. II.

Dans vn cercle donné inscrire vn triangle equiangle au triangle donné.

Soit le cercle donné DBG, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné FHK.

Soit menée la ligne AC qui touche le cercle au point B, auquel point soient faits les deux angles ABD égal à l'angle H, & CBG égal à l'angle K par la 23 p. 1. Puis soit mené DG. Je dis que le triangle inscrit BDG. est equiangle au donné FHK.



Car puis que la ligne BD coupe le cercle en deux, l'angle G en la grande section fera égal à l'angle de l'attouchement ABD, & par consequent à l'angle H par la 32. p. 3. & par la même raison la ligne BG coupant le cercle, l'angle D se trouuera aussi égal à l'angle K, & par la 32. p. 1. le 3. B fera aussi égal à l'angle F, & les triangles seront equiangles.

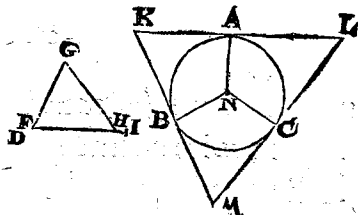
PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné descrire vn triangle equian-

gle au triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné FGH.

Soit prolongé le costé FH de part & d'autre iusques en D, & I, & du centre N soit menee la ligne à l'aduerture NA, sur laquelle au point N soient construits les deux angles ANB egal à DFG, & ANC, egal à l'angle GHI par la 23. p. 1. & soiēt menees les trois lignes perpendiculaires KAL à AN; LCM à CN, MBK à BN, lesquelles se rencontreront aux trois points K, L, M. Je dis que KLM est le triangle demandé.



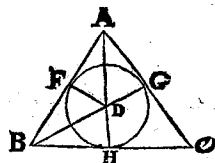
Car d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à 4 angles droits (car elle peut estre diuisee en deux triangles, & chaque triangle a les trois angles egaux à deux droits par la 32. p. 1.) ainsi le trapeze KANB aura les 4. angles egaux à quatre droits. Mais les deux A & B estans droits par la construction, les deux autres K & N seront egaux à deux droits, c'est à dire egaux aux deux GFD & GFH, qui sont egaux à deux angles droits par la 13. p. 1. & par construction ANB est egal à GFD : donc l'angle K sera egal à l'angle GFH, par mesme discours l'angle L se trouuera egal à l'angle GHF. Et par la 32. p. 1. le troisieme M sera egal au troisieme G : ainsi les triangles circonscrits & donnés seront equiangles.

PROP. IIII.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient les deux angles A & B coupez en deux également par la 9. p. 1. par les deux lignes AD & BD se rencontrans au point D. Item d'iceluy point de rencontre D soient menees les trois perpendiculaires FD, DG, DH par la 12. p. 1. & du centre D, & interval DG soit descript le cercle GFH. Je dis que iceluy cercle touchera les trois lignes DF, DG, DH, au mesme point où icelles lignes touchent les trois costez du triangle donné.



Car l'angle DGA estant droit, il sera egal à l'angle DFA qui est pareillement droit, & le total A estant couppé en deux également, les deux DGA, & GAD seront egaux aux deux DFA, & FAD, & le costé DA estant commun, le costé FD sera egal au costé DG par la 26. p. 1. Par mesme discours DH se prouuera

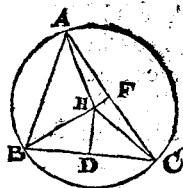
galle à DF, & par la 1. com. sent. les trois DF, DG, DH, seront egalles: ainsi le cercle de l'interval DG sera aussi de l'interval des deux autres, & partant il touchera les trois points F, G, H.

PROP. V.

A l'entour d'un triangle donné descrire un cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.

Soient coupez également les deux costez AC au point F & CB au point D par la 10. p. 1. d'iceux points D, & F soient leuees les perpendiculaires DH, FH, se rencontrans au point H par la 11. p. 1. & apres auoir mené les trois lignes HA, HB, HC. soit descript le cercle du centre H & interval HA. Je dis qu'il passera par les trois points A, B, C: c'est à dire que les trois lignes HA, HB, HC sont egalles.



Car les deux lignes BD, & DC est antegalles & DH comme & les deux angles au point D. egaux pour estre droicts les bases BH, & HC seront egalles par la 4. p. 1. par mesme discours HC, & HA seront egalles, & par la 1. com. sent. les trois lignes HA, HB, HC, seront egalles.

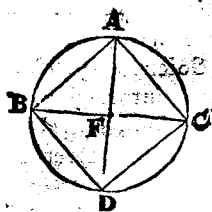
PROP. VI.

Dans un cercle donné descrire un quarré.

Soit le cercle donné ABDC dans lequel il faut descrire un quarré.

Soient menez les deux diametres BC, & AD se coupans au centre F en angles droicts, & soient menées les 4. lignes AB, BD, DC, & CA. Je dis que ABDC est quarré inscrit au cercle donné: c'est à dire qu'il a les 4. costez egaux & les 4. angles droicts.

Car les quatre lignes FA, FB, FD, FC estant egalles par la def. du cercle, & les quatre angles au point F droicts & egaux par la construction par la 4. p. 1. repetee, tant de fois qu'il sera de besoin les quatre bases AB, BD, DC, CA seront egalles. Item chascun des quatre triangles est isoscele faisant les angles sur la base egaux par la 5. p. 1. & par la 32. p. 1. ils seront chascuns demi droicts estans les 4. angles au point F droicts: partant les deux soubz chascun des points A, B, D, C, vaudront un droit, & par consequent ABDC, ayant les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts sera quarré.

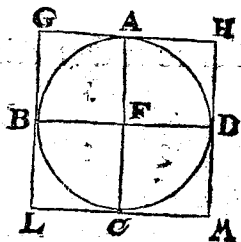


PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné descrire un quarré.

Soit le cercle donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire un quarré.

Soient menez les deux diametres AC, & BD se coupans au cẽtre F à droits angles, & sur les points A, & C soient menez les deux lignes GAH, LC M parallèles à BD. Item des deux points B, & D soient menez les deux lignes LBG, & MDH parallèles à AC par la 31. p. 1. icelles quatre lignes parallèles se rencontraux aux points G, H, L, M. Je dis que GHML est le quarré demandé.



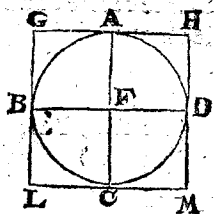
Car en premier lieu il est euident par la construction que GLMH est parallelograme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux à l'un ou l'autre des deux diametres AC, & DB qui sont egaux entre eux, pareillement par la mẽme 34. p. 1. les 4. angles G, H, M, L sont egaux aux 4. qui sont au point F chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrames. Mais icelles estans droites aussi les quatre G, H, M, L, seront chacun droit, & par consequent le parallelograme GHML aura les 4. costez egaux, & les quatre angles droits & sera quarré.

PROP. VIII.

Dans un quarré donné descrire un cercle.

Soit le quarré donné GHML dans lequel il faut descrire un cercle.

Soient les quatre costez coupez en deux egallement aux points A, B, C, D, & apres auoir mené les deux lignes AC, & BD se rencontraux au point F d'iceluy point F & interval FA, si on descrit un cercle ce sera le demandé.



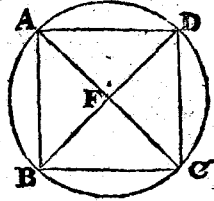
Car par la 33. p. 1. AC sera egalle & parallèle à HM & BD, & ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre parallelogrames, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez opposez egaux, ainsi AF, & BG seront egaux. Item BF, & GA, AH, & FD, FC, & DM, mais toutes icelles moitez des costez du quarré sont egales, partant FA, FB, FC, FD seront aussi egales, & comme elles touchent le quarré aux points A, B, C, D, aussi le cercle descrit de l'interval de l'une d'icelles touchera le quarré aux mẽmes points.

PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné deſcrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut deſcrire un cercle.

Soient menées les deux diagonales AC, & BD s'entrecoupons au point F, & du centre F, & interval FA, ſoit deſcrit le cercle ADCB. Je dis qu'il ſera le demandé: c'eſt à dire qu'il touchera les quatre angles du quarré.

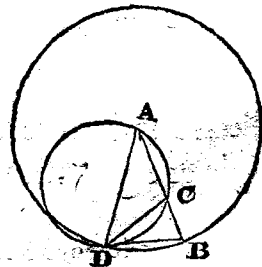


Car le coſté AB eſtant égal à AD. Le triangle BAD ſera Iſoſcele, & par la 5. p. 1. les angles ſur la baſe BD ſeront égaux, & ſeront chacun demy droit par la 32. p. 1. eſtant l'angle BAD droit par meſme diſcours, les deux angles ſur la baſe AC du triangle ADC ſeront auſſi demi droits, ainſi les deux angles FAD, & FDA ſeront égaux, & par meſme diſcours FD ſera égal à FC, & FC à FB, & les 4. lignes FA, FD, FC, FB, eſtans égales, il eſt aiſé de conclure comme aux précédentes que le cercle deſcrit de l'interval de l'une d'icelles touchera l'extrémité des autres qui ſont les angles du quarré donné.

PROP. X.

Deſcrire un triangle Iſoſcele ayant un chacun des angles de la baſe double de l'autre.

Soit la ligne AB coupée en C comme enſeigne la 11. p. 2. & ſoit accomodée dans le cercle la ligne DB égale à AC, & après ſoit menée la ligne AD. Je dis que ABD eſt le triangle Iſoſcele demandé.



Car après avoir mené CD, ſi à l'entour du triangle ACD, on deſcrit le cercle ACD comme il a eſté enſeigné cy deſſus, & puis que la ligne AB, a eſté coupée en C cō. enſeig. la 11. p. 2. le rect. de AB & BC ſera égal au quarré de CA ou ſon égal DB, & par la 37. p. 3. la lig. DB touchera le cerc. en D, & l'angle CAD ſera égal à l'angle CDB, par la 32. p. 3. & ſi à iceux on adiouſte l'angle commun ADC, les tous ſeront égaux, ſçavoir le total ADB aux deux CAD, & ADC. Mais l'angle extérieur DCB eſt auſſi égal aux deux CAD, & ADC, par la 32. p. 1. Partant il ſera auſſi égal à l'angle ADB ou à ſon égal ABD par la 5. p. 1. car le triangle eſt Iſoſcele, & par la 6. p. 1. le triangle DCB ſera auſſi Iſoſcele, & le coſté DC égal à DB partant auſſi égal à CA, & le triangle DCA eſtant Iſoſcele, il aura les deux angles ſur la baſe AD égaux par la 5. p. 1. & l'angle extérieur DCB qui eſt égal à tous les

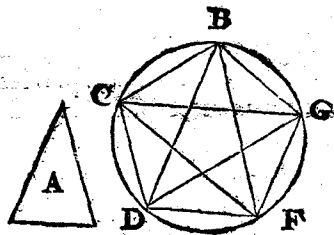
deux sera double du seul A aussi sera son egal B, & partant aussi son autre egal A DB:voila donc ABD triangle isoscele ayant les angles de la base doubles du 3^e.

PROP. XI.

Dans vn cercle donné descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné BDF dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Dans iceluy cercle, il faut inscrire le triangle BDF equiangle au triangle A, lequel ait esté construit selon le requis de la precedente prop. & apres avoir mené les deux lignes CF, & DG coupât les 2. ang. BDF, & BFD, en deux egallement par la 9. p. 1. soient menées les lignes DC, CB, BG, GF. Je dis que BCDGF, est le pentagone inscrit equiangle & equilateral.



Car puis que le triangle BDF est du precepte de la preced. prop. les deux angles sur la base DF seront doubles au troisieme B, lesquels estans coupez en deux egalement par les lignes CF, & DG les cinq angles BDG, GDF, BFC, C, FD, & DBF sont egaux, & par la 26. p. 3. ils auront circonferances egales pour bases, mais les egales circonferances comprennent lignes droites egales par la 29. p. 3. donc tous les cinq costez estans egaux le pentagone sera equilateral.

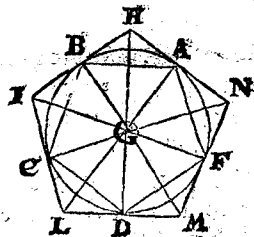
Aussi sera il bien aisé de prouver qu'il est equiangle par la 27. p. 3. d'autant que chacun angle est soutenu de circonferances egales, sçavoir de trois arcs comprenant trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux.

PROP. XII.

A l'entour d'un cercle donné descrire vn pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABLF, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demandé.

Dans iceluy soit descripte le pentagone ABCDF par la preced. & apres avoir mené les cinq lignes GA, GB, GC, GD, GE, soient menées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires HN, NM, ML, LI, IH, par la 11. p. 1. se rencontrans aux cinq points H, I, L, M, N. Je dis que HLMN est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.



Car il est euidentement circonscrit, en apres si on meine les cinq lignes GH, GI, GL, GM, GN, d'autant que les angles GBI, & GCI, sont droicts par la 47. p. i. le quarré de IG sera egal aux deux quarréz de GB, & BI. Il sera aussi egal aux deux de GC, & CI, & par consequent les deux quarréz de GB, & BI seront egaux aux deux de GC, & CI. Mais les quarréz de GB, & GC sont egaux estans décrits sur lignes egales aussi ceux de BI & IC seront aussi egaux, & les lignes BI, & IC seront egales, & par la 8. p. i. les angles BGI, & IGC seront egaux, & BGC double de BGI par mesme discours aussi CGD egal à BGC: car ils ont egales circonferences pour bases sera double de CGL, & par consequent IGC, & CGL seront egaux, & par la 4. p. i. IC sera egale à CL par mesme discours IB, & BH se trouveront egales. Mais BI, & IC estant egales aussi leurs doubles IH, & IL seront egales. Item par mesme discours on prouera tous les autres costez egaux, & le pentagone sera equilateral.

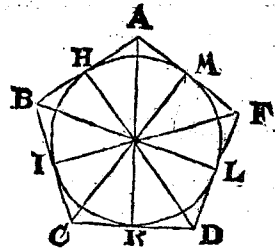
Qu'il soit aussi equiangle, nous auons monstré que les angles CIG, & CLG estoient egaux. Item BIG, & CIG, & que on en pouuoit dire autant des autres donc les deux angles sous le point I seront egaux aux 2. angles sous le point L: ainsi des autres, par ainsi le pentagone sera equiangle & equilateral.

PROP. XIII.

Dans vn pentagone equiangle, & equilateral descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABC DF, dans lequel il faut inscrire.

Soient coupez en deux egallement chacun des angles A, & B, par les lignes Ak, & BL par la 9. p. i. se rencontra au point G, & par la 12. p. i. du point G soient menees les perpendiculaires GH, GI, GM, & du centre G, & interval GH soit décrit le cercle HIKL M. Je dis que c'est le cercle, demandé.



Car pour prouuer qu'il touche chacun costé du pentagone donné, il faut prouuer que les cinq lignes GH, GI, Gk, GL, GM, sôt egales, ce qui s'obtient en ceste façon, puis que par construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total coupé en deux egallement & l'angle droit H egal à l'angle droit M: car les lignes GH, & GM sont perpendiculaires, & le costé GA commun aux deux triangles AHG, & AMG par la 26. p. i. les deux autres costez seront egaux, (sçavoir AH, à AM, & HG, à GM, & par mesme discours GL, Gk, & GI, se trouveront egales, & partant le cercle touchera le pentagone aux points H, I, K, L, M, ce qu'il falloit faire.

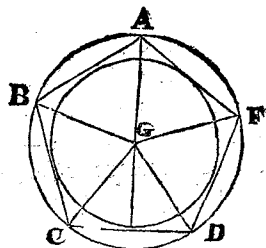
PROP. XIII.

A l'entour d'un pantagone equiangle, & equilateral des-

crire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABC DF, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient coupez les cinq angles A, B, C, D, F, en deux egallement par la 9. p. 1. avec les lignes GA, GB, GC, GD, GF se rencontrans au point G, & d'iceluy point G, & interval del'vne d'icelles cinq lignes soit descrit le cercle ABCDF. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone, c'est à dire que les cinq lignes GA, GB, GC, GD, GF sont egalles.



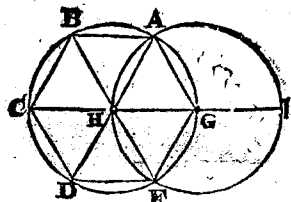
Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy couppe en deux egallement, les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6. p. 1. les deux costez AG, & BG seront aussi egaux, & par le mesme discours BG, & GC seront aussi egales ainsi des autres, & par la 1. commune sentence il est evident que icelles cinq lignes seront egales entre elles, & que partant le cercle descrit del'interval del'vne d'icelles touchera les extremittez des autres qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné.

PROP. XV.

Dans vn cercle donné inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDFG, dans lequel il faut inscrire l'exagone demandé equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre CG, & du cen. G & interval GH, soit descrit vn autre cercle AHF coupant le donné aux points A, & F desquels points soient menees les deux lignes AHD, FHB finalement soient menees les lignes AB, BC, CD, DE, FG, GA. Je dis que ABCDFG est l'exagone demandé.



Car il est evident en demonstrent comme en la 1. p. 1. que les deux triangles HAG, & HFG sont equilateraux, & par la 5. p. 1. repetee deux fois ils seront aussi chacun equiangle, & par la 32. p. 1. vn chacun de leur angles vaudra le tiers de deux angles droits, & l'angle CHD par la 15. p. 1. vaudra le tiers de deux angles droits, & l'angle étant de mesme valeur par la 14. p. 1. l'angle DHF vaudra le reste de deux droits, c'est à dire autant, & par ce moyen ils seront egaux aussi seront leurs opposez par la 15. p. 1. & les six angles au centre H seront egaux & par la 4. p. 1. les six bases AB, BC, CD, DE, FG, GA, sont egales, & l'exagone sera equilateral, il est aussi aisé à monstrier qu'il est equiangle.

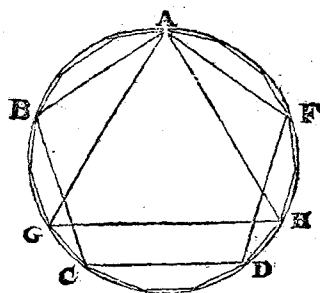
Dans

PROP. XVI.

Dans vn cercle donné deſcrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDF, dans lequel il faut inſcrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement deſcrit dans iceluy le triangle equilateral AGH par la 2. p. 4. les trois coſtez eſtans egaux, la circonſerance ſera diuiſee en trois egallement par les 26. & 28. p. 3. pareillement, ſoit en iceluy cercle inſcrit le pentagone ABCDF par la 11. p. 4. ayant l'un des angles ſur le point A. Je diſ que GC ſera le coſté du quindecagone deſmandé.



Car comme il a eſté dict l'arc ABG eſt le tiers de la circonſerance, partant doit contenir cinq coſtez du quindecagone. Item BA coſté du pentagone ſouſtient l'arc BA cinquieme partie de la circonſerance, partant doit contenir trois coſtez du quindecagone, & les deux arcs AB, & BC contiendront ſix coſtez du quindecagone. Mais l'arc ABG en contient cinq donc l'arc GC ſera la quinzieme partie de toute la circonſerance, partant la ligne droite GC ſera le coſté du quindec. ce qui eſtoit à prouuer.

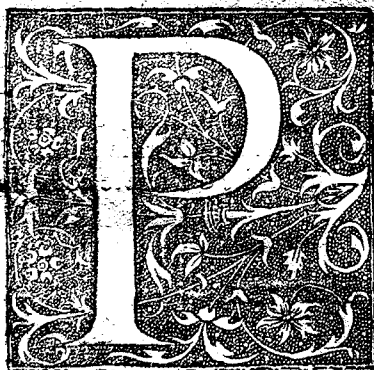
Fin du quatriefme Element.

K



ELEMENT CIN- QUIESME.

DEFINITIONS.



1 **P**artie est vne grandeur plus petite
tirée d'une plus grande, lors que
la plus petite mesure la plus gran-
de.

2 Multiplice est vne grandeur plus
grande qu'une plus petite, quand
la plus grande est mesurée de la
plus petite.

3 Raison est vne habitude de
deux grandeurs de mesme genre comparees l'une à l'autre
selon la quantité.

4 Proportion est vne similitude de raisons.

5 Les grandeurs sont dictes auoir raison l'une à l'autre, les-
quelles estans multipliées se peuuent excéder l'une l'autre.

6 Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, & la
premiere est à la seconde comme la troisieme à la quatries-
me. Quand les equemultiplices de la premiere, & troisieme
excedent, sont egalles ou defaillent aux equemultiplices
de la seconde, & quatrieme en quel que multiplication que

de soit.

Les grandeurs qui sont en mesme raison soient apellees proportionelles. 7

Quand des equemultiplices, celui du premier excède, celui du second, & le multiplie du troisieme n'excede celui du quatrieme, lors il y aura plus grande raison du premier au second, que du tiers au quart. 6

Proportion ne peut estre constituee sur moins de trois quantitez. 9

Quand trois grandeurs sont proportionelles, la premiere est dite auoir à la troisieme la raison doublee de celle de la seconde: s'il y en a quatre, la premiere est dicte estre en raison triplee de la premiere à la seconde. 10

Les grandeurs sont de semblables raisons, quand les antecedans sont aux antecedans, comme les consequens aux consequens. 11

Raison alterne est lors que l'antecedent est à l'antecedent comme le consequent au consequent. 12

Raison renuersee est lors qu'on prend le consequent cõme l'antecedent, pour le comparer à l'autre consequent, cõme si cestoit l'antecedent. 13

Raison composee est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, cõme vne mesme chose aumesme cõsequet. 14

Raison diuisee est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent, pour le comparer à celui mesme consequent. 15

Raison egalle est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs est à la derniere de mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes. 16

Autrement c'est lors qu'on prend les extremes par la sou-

straction des moyennes.

17

Proportion ordonnée est quand l'antecedent est au consequent, comme l'antecedent est au consequent de l'autre: & ainsi quel vn des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

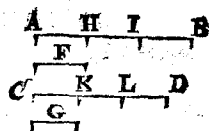
18

Proportion troublée est quand trois grandeurs estans d'un costé, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde comme la cinquième à la sixième, & comme la seconde à la troisième, ainsi la quatrième à la cinquième.

PROP. I.

Si l'y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, d'autant d'autres grandeurs chacune à la sienne, comme l'une sera multipliee de l'une, ainsi les toutes seront multipliques des toutes.

Soient deux grandeurs AB, & CD equemultiplices de deux autres F, & G. Je dis que les deux grandeurs ensemble AB, & CD seront autant multipliques de F, & G ensemble comme AB est de F.



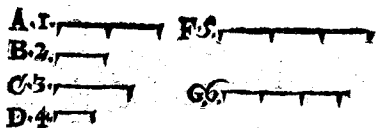
Qu'il ne soit ainsi puisque AB est multipliee de F, F mesurera AB certain nombre de fois par la 2. deff. 5. qu'elle la mesure donc trois fois, & de AB soient imaginees trois parties, egales AH, HI, IB, qui seront chacune egale à F. Le mesme se peut dire de la grandeur CD de laquelle on imaginera trois parties egales CK, KL, LD étant chacune d'icelles egale à G, mais qui à choses egales, sçavoir F, & AH adiousté choses egales, sçavoir G, & CK les tous AH, CK seront egales aux toutes F, & G, par mesme raison HI, & KL seront egales à F, & G, pareillement IB, & LD, & par ainsi il est evident que les trois ensemble AB, avec les trois CD seront triples des deux ensemble F, & G, comme la seule AB est triple de la seule F.

PROP. II.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, que la troisième de la quarte, & que les cinquième, & sixième soient equemultiplices de la seconde, & de la quarte, la composee de la premiere, & cinquième sera autant

multiplie de la seconde, comme la composee de la troiesme & sixiesme de la quarte.

Soit la premiere grandeur A autant multiplie de la seconde B comme la 3. C est de la 4. D, & soit la 5. F autant multiplie de la 2. B comme la 6. G de la 4. D. Je dis que la 1. & 5. ensemble A, & F seront autant multiplies de la 2. B comme la 3. & 6. ensemble C, & G seront de la 4. D.

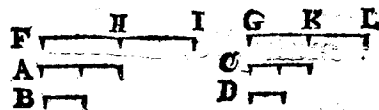


Car puis que A est autant multiplie de B, comme C de D, Item que F est autant multiplie de B comme G de D, la composee de A, & F sera autant multiplie de C, comme la composee de C, de G est multiplie de D par la 2. com. sent. en les prenant toutes l'une apres l'autre comme en la precedente.

PROP. III.

Si la premiere est autant multiplie de la seconde comme la tierce de la quarte, & on prend la cinquiesme autant multiplie de la premiere que la sixiesme de la tierce, aussi la cinquiesme sera autant multiplie de la seconde que la sixiesme de la quarte.

Soit A autant multiplie de B comme C est de D, & de la 1. & 3. A, & C soient prises les equemultiplies F, & G. Je dis que F sera autant multiplie de B que G de D.



Car puis que F est autant multiplie de A que G l'est de C, F contiendra autant de parties esgales à A, comme G de parties esgales à C, soit donc F diuisee en FH & HI chacune egalle à A. Item G diuisee en GK, & KL: chacune egalle à C, ainsi la premiere FH qui est egalle à A sera autant multiplie de la 2. B comme la 3. GK egalle à C est de la 4. C, & la cinquiesme HI aussi egalle à A sera autant multiplie de la 2. B comme la 6. KL aussi egalle à C est multiplie de la 4. D; & par la 2. p 5. la composee de la premiere & cinquiesme FI sera autant multiplie de la seconde B comme la composee de la 3. & 6. GL, l'est de la quatriesme D.

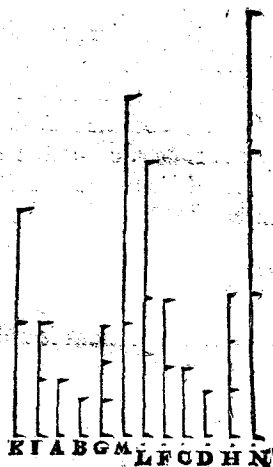
PROP. IIII.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, aussi leurs equemultiplies seront proportionnelles en quelque multi-

plication qu'a ce soit.

Soit la premiere A, à la seconde B comme la 3. C à la 4. D, & soit I autant multiplie de A, comme F l'est de C: pareillement soit G autant multiplie de B comme H l'est de D. Je dis qu'il y aura mesme raison de I à G que de F à H.

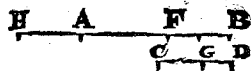
Car si on prend K, & L equemultiplices de I & F, pareillement M & N equemultiplices de G & H, d'autant que I, & F sont equemultiplices de A & C. Item G, & H aussi equemultiplices de B, & D, bien que par diuerses multiplications, aussi par la 3. p. 5. K, & L seront equemultiplices de A, & C, & par la mesme p. M, & N seront aussi equemultiplices de B, & D, & par la conuerse de la 6. def. 5. si K defaut, est egal ou plus grand que M, aussi L defaudra, sera egal ou plus grand que N, & pourautant que K, & L sont equemultiplices de I, & F, pareillement M, & N, de G, & H par la mesme 6. def. 5. il y aura mesme raison de I à G comme de F, à H, d'autant que de leurs equemultiplices K defaut à M comme L defaut à N.



PROP. V.

Si vne grandeur est autant multiplie d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée, aussi la reste sera autant multiplie de la reste que la toute de la toute.

Soit la toute AB autant multiplie de la toute CD comme la retranchée AF de la retranchée CG. Je dis que le reste FB sera autant multiplie de la reste GD, que la toute AB est de la toute CD.



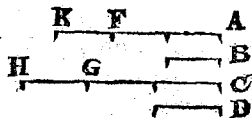
Qu'il ne soit ainsi, que le reste FB ne soit autant multiplie du reste GD que la toute de la toute: soit prise AH autant multiplie de GD comme AF est de CG, & par la 1. p. 5. FH sera autant multiplie de CD comme AF de CG. Mais aussi AB estoit autant multiplie de CD comme AF de CG. Il est donc euident que AB sera egale à FH, & en ostant ce qui est de commun AF, HA demeurera egal à FB, & par consequent puis que comme AB à CD, ainsi AH à GD, aussi de mesme FB sera à GD.

Il faut icy vn peu amplifier ceste com. sentence, les choses doubles d'une autre sont egales entre elles, & dire aussi que les triples, quadruples, quintuples, &c. d'une autre soient egales entre elles.

PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultiples de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des equemultiples : ou les restes seront egaux aux restes, ou equemultiples d'iceux.

Soient quatre grandeurs ABCD, desquelles A est autant multiple de B que C, l'est de D, & la retranchée FA est autant multiple de B, que la retranchée GC est multiple de D. Je dis que les restes G H, & Fk seront egales ou equemultiples.

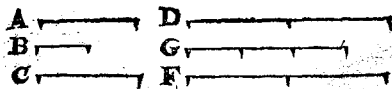


Car d'autant que A, & C sont equemultiples de B, & D, en A, il y aura autant de grandeurs egales à B, comme en C de grandeurs egales à D, pareillement d'autant que la retranchée AF est autant multiple de B que la retranchée CG l'est de D AF, contiendra autant de grandeurs egales à B que CG de grandeurs egales à D, par la 1. & 2. deff. 5. Si donc d'egales multitudes de grandeurs Ax, & CH on ôte egales multitudes de grandeurs FA, & GC, les multitudes demeurantes kF, & HG seront egales: c'est à dire que KF contiendra autant de fois B comme HG contiendra D, ou bien si KF est égale à B, aussi HG sera égale à D & si KF est multiple de B aussi HG sera autant multiple de D.

PROP. VII.

Les grandeurs egales ont mesme raison l'une que l'autre à une troisieme, & ceste troisieme aura mesme raison à deux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & C, & vne autre quelle, qu'elle soit B. Je dis que A, & C ont mesme raison l'une que l'autre à C & que B aura mesme raison à A que à C.



Qu'il ne soit ainsi soient pris D, &

F equemultiples de A, & C, soit aussi pris G multiple de B, donc pour autant que D est autant multiple de A que F est multiple de C, & que A & C sont egales, aussi D, & F seront egales par la 6. com. sent. Si donc G est plus grand, egal ou plus petit que D Il sera aussi plus grand egal ou plus petit que F & par la 6. deff. 5. il y aura telle raison de A à B comme de C à la mesme B.

Quant à l'autre partie elle se prouve tout de mesme par la 6. def. 5. en prenant les mesmes equemultiples, & montrant l'exces.

PROP. VIII.

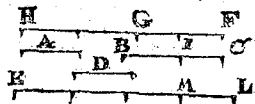
De deux grandeurs inegales la plus grande à plus grande raison à vne troisieme que la plus petite, & ceste troisieme à plus grande raison à la plus petite que a la grande.

Soient deux grandeurs inegales A, & BC desquelles BC est la plus grande. Je dis que BC à plus grande raison à la troisieme D, quelle qu'elle soit que non pas A.

Qu'il ne soit ainsi, soit entendue BC premiere D.

2. A 3. D, 4. & d'autant que BC est plus grande que A soit retranche BI egale à icelle A, & soient trouuees les equemultiplices, à sçavoir HG de BI, & GE, de IC en sorte que HG, & GE soient plus grandes chacune que D, & par la 1. p. 5. HF sera autant multipliee de BC, comme HG de BI: ou de A son egale: ainsi HF est autant multipliee de BC premiere comme HG, de A troisieme, maintenant soit multipliee D iusques à ce qu'il en vienne KL prochaine plus grande quantité que HG: ce qui s'obtiendra en adioustât tousiours vne fois de plus iusques à ce qu'elle excède HG, & de KL soit retranche ML egale à D. Il est donc euident que puis que KL est la prochaine plus grande que HG que KM sera plus petite que icelle H, G & d'autant que GF, par construction est plus grande que D ou son egale ML, il est euident que HF sera plus grande que KL. Si donc KL est prise pour lequemultiplice tant de D seconde que D quatrieme estant HF plus grande que KL, & HG plus petite que icelle, il est aisé à voir que HF multipliee de BC premiere estant plus grande que KL multipliee de D seconde HG multipliee de A 3. n'est pas plus grande que KL multipliee de D 4. & par la huitiesme def. 5. il y aura plus grande raison de BC à D que de A la mesme D.

Quant à la seconde parrie elle se prouue de mesme façon en changeant l'ordre seulement, c'est à sçavoir D premier A seconde D 3. BC 4. &c.

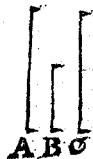


PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne troisieme, sont egales entre elles: & ceste troisieme ayant mesme raison à deux autres icelles seront egales entre elles.

Soient deux grandeurs A & C, lesquelles ont mesme raison à vne que l'autre à la troisieme B. Je dis qu'elles sont egales entre elles.

Car si elles n'estoient egales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande: & par la 8. p. 5. icelle plus grande auroit plus grande raison à B que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese



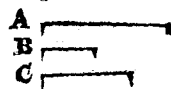
done

donc A ne fera pas plus grand que C.

PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur celle qui a la plus grande raison est la plus grande : & vne mesme grandeur qui a raison a deux autres celle à laquelle elle a plus grande raison est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à B soit plus grande que de C, à B. Je dis que A sera plus grande que C, & si B a plus grande raison à C que non pas à A, que C sera plus petite que A.

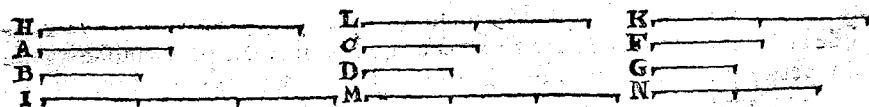


Autrement pour la premiere partie si A n'estoit plus grande, elle seroit egalle ou plus petite, ce qui est impossible : car si elles estoient egales elles auroient mesme raison l'une que l'autre à la grandeur B, par la 7. p. 5. ce qui seroit contre la supposition, si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à B que non pas à C par la 8. p. 5. ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A sera plus grande que C.

Quant à la seconde partie tant de ceste proposition que de la precedente elles sont aisees à demonstrier par les mesmes discours en changeant l'ordre.

PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne sont de mesme entre elles.



Soit A à B comme C à D, & comme C à D, ainsi F à G. Je dis que comme A à B ainsi F sera à G.

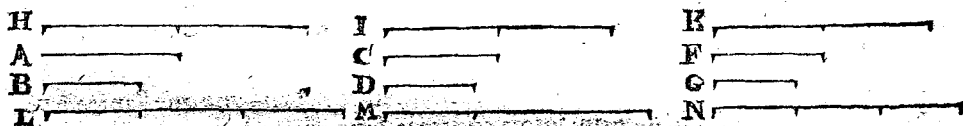
Qu'il ne soit ainsi, il faut prendre de A, C, & F, les equemultiples H, L, K. Pareillemēt de B, de D, de G les equemultiples I, M, N. Pour autāt dōc que A est à B comme C à D par la conuerse de la 6. def. 5. si H multiplie de A est egalle, plus grande ou plus petite que I multiplie de B, aussi L multiplie de C sera egalle, plus grande, ou plus petite que M multiplie de D. Item puis que comme C à D, ainsi F à G, si L multiplie de C est egalle, plus grande, ou plus petite que M, multiplie de D aussi K multiplie de F sera egalle plus grande ou plus petite que

L

N multiplie de G par le mesme discours. Et puis que comme H est plus grande, egalle, ou plus petite que I, aussi K est plus grande, egalle, ou plus petite que N, par la 6. d. 5. la raison de F à G sera comme de A à B.

PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, comme l'une des antecedentes sera à l'une des consequentes, ainsi routes les antecedentes seront à toutes les consequentes.

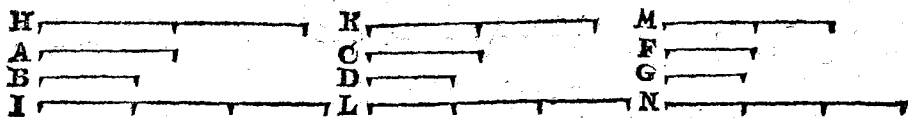


Soient six grandeurs proportionnelles AB, CD FG, sçavoir que A soit à B comme C est à D, & F à G. Je dis que comme A sera à B, ainsi toutes les trois ensemble A, C, F seront à toutes les trois ensemble B, D, G.

Qu'il ne soit ainsi, il faut prendre de A, de C, de F des equemultiples H, I, K. Item de B de D de G des equemultiples L, M, N toutes les trois multiplies ensemble H, I, K, seront autant multiplies de trois ensemble A, C, F, comme la seule H est multiplie de la seule A par la 1. p. 5. Pareillement par la mesme raison toutes les trois L, M, N, ensemble seront autant multiplies des trois B, D, G comme L sera multiplie de B. Partant puis que A, B, C, D, F, G sont proportionnelles, si H equemultiplie de A premiere est plus grande, egalle, ou plus petite que I equemultiplie de C, 3. aussi L equemultiplie de B deuxiesme sera plus grande, egalle, ou plus petite que M equemultiplie de D quatriesme par la conuerse de la 6. def. 5. Et par ce qui a esté dict cy dessus, si H est plus grande egalle ou plus petite que L, le composé des trois H, I, K, sera plus grand, egal, ou plus petit que le composé des trois L, M, N. Donc par la mesme 6. def. 5. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, F, seront aux trois B, D, G, ce qui estoit à prouver.

PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte, mais la tierce à plus grande raison à la quarte que la cinquiesme à la sixiesme, aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquiesme à la sixiesme.



Soit A premier à B 2. comme C 3. à D 4. & qu'il ait plus grande raison de C 3. à D 4. que de F 5. à G 6. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A 1. à B 2. que de F 5. à G 6.

Qu'il ne soit ainsi. Il faut prendre de A de C de F les equemultiples H, K, M & de B de D, de G aussi les equemultiples I, L, N. Donc pour autant que A est à B cōme C à D. Si H multiplie de A est egale plus grande ou plus petite que I, multiplie de B, aussi par la conuerse de la 6. def. 5. k multiplie de C sera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C, à D que de F à G, si k multiplie de C est plus grande que L multiplie de D, il n'est pas necessaire que M, multiplie de F excède N. multiplie de G, par la 8. d. 5. conuertie, aussi, si H excède I, il n'est pas necessaire que M excède N pour la mesme raison, & par la 8. d. 5. il y a plus grande raison de A à B, que de F à G.

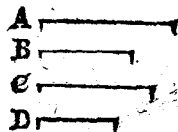
PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere est plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte: & si egale, egale: si plus petite plus petite.

Soit A à B comme C est à D, & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C 3. aussi B 2. sera plus grande, egale, ou plus petit que D 4.

Car d'autant que A est plus grande que C. il y aura plus grande raison de A à B que de C à la mesme B, par la 8. p. 5. & par consequent plus grande raison de C à D, que de C à B, estant icelle la mesme raison que de A à B & par la 10. p. 5. B sera plus grande que D.

On prouuera à egale. egale par la 7. & 9. p. 5.



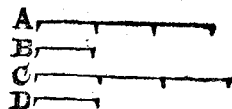
PROP. XV.

Les grandeurs sont entre elles comme sont leurs equemultiples entre elles.

Soit A autant multiplie de B, comme C est multiplie de D. Je dis que A sera à C comme B à D, ou cōme A à C, ainsi B à D.

Car on peut diuiser A en autant de parties egales à B comme C contient de parties egales à D, par la 2. d. 5. d'autant qu'elles sont equemultiplices & pour autant qu'une chascune partie de A est egale à B & une chascune de C egale à D

une chascune partie de A sera à une chascune partie de C comme B est à D, & par la 12. p. 5. toutes les antecedentes A seront à toutes les consequentes C, comme l'une d'icelle A, sçauoir B est à l'une de C, c'est à sçauoir D.



PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, elles le seront aussi alternatiuement.

Soit A, à C, comme B est à D A alternatiuement. Je dis que A sera à B comme C est à D.

Car si on prend F, & H equemultiplice de A, & C. Item G, &

I, equemultiplices de B, & D, par la 4. p. 5. F sera, à H, comme G est à I, & par la 14. p. 5. si F est egale plus grande ou plus petite, G aussi H sera egale plus grande ou plus petite que I, & par la 6. def. 5. A sera à B comme C, à D, ce qu'il falloit demonstrier.



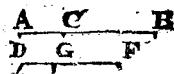
PROP. XVII.

Si les grandeurs diuisees sont proportionelles: icelles composees seront proportionelles.

Après auoir long temps consideré la demonstration de Theon, comme elle est embarrasée en la constructiō de tāt de quemultiplices differentes pour prouuer la 17. p. m'estudiant à la briefuer et à l'esclaircissement des demōstrations, ie me suis licentié de changer la 17. à la 18. l'utilité en est euidente, si on confere ma demonstration avec celles des anciens.

Soit AC, a CB comme DG, à GF. Je dis que en composant AB sera à BC cōme DF, à FG.

Car en changeant par la precedente AC sera à DG comme CB a GF, & par la 12. p. 5. toutes les antecedentes AB seront a toutes les consequentes DF comme



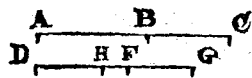
CB l'une des antecedentes à GF l'une des consequentes,

PROP. XVIII.

Si les grandeurs composees sont proportionnelles icelles di-
uisees seront aussi proportionnelles.

Soit AC, à CB, comme DG à GF. Je dis qu'en di-
uisant que AB sera BC comme DF à FG.

S'il n'est ainsi, soit donc imaginé comme AB à
BC ainsi DH à HG, en composant par la 17. p. 5. A
C sera à CB, comme DG à GH. Mais DG est à GF,
comme AC à CB, & par la 11. p. 5. DG auroit mesme raison à GF, que à GH, &
par la 9. p. 5. icelles seroient egales, ce qui est absurde. Donc comme AB à BC,
ainsi DF à FG.

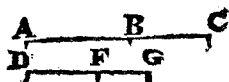


PROP. XIX.

Si le tout est au tout comme le retranché au retranché, le re-
ste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AC à la toute DG comme le retranché
AB au retranché DF. Je dis que le reste BC est au reste
FG comme la toute AC à la toute DG.

Car puis que AC est à DG, comme AB à DF en chā-
geant par la 16. p. 5. AC sera à AB comme DG à DF, &
par la 18. p. 5. en diuisant comme AB à BC, ainsi DF à
FG, & en changeant par la 16. p. 5. BC sera à FG, comme AB à DF, c'est à dire
par la 11. p. 5. comme la toute AC à la toute DG, étant par hypotese AB, à DF,
comme AC, à DG.



PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre étant pri-
ses de deux en deux se trouuent estre en mesme raison,
& que en raison egalle la premiere soit plus grande que
la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la
sixieme, & si egalle, egalle, si plus petite: plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, F, G, & comme

A à B, ainsi D à F, & comme B à C, ainsi F à G : & que A 1. soit plus grande que C 3. Je dis que D 4. sera plus grande que G. 6. & c.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B, par la 8. p. 5. Mais comme A à B ainsi D à F, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à F que de C à B. Item comme C est à B ainsi G à F. Il y aura donc plus grande raison de D à F que de G à F, & par la 10. p. 5. D sera plus grande que G.

Par le mesme discours en changeant les hypotheses si A est égale à C, ainsi D à G par la 7. & 9. p. 5. Si A est plus petite que C, aussi D sera plus petite que G, par la 8. & 10. p. 5.



PR OP. XXI.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & que la premiere soit plus grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme, & si égale, égale si plus petite plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, F, G, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison estant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi F à G, & comme B à C, ainsi D à F, & que A soit égale, plus grande, ou plus petite que C aussi D sera égale, plus grande, ou plus petite que G.

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B comme de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A à B, ainsi F à G, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de F à G que de C à B. Item C estant à B comme F à D, il y aura aussi plus grande raison de F à G, que de F à D, & par la 10. p. 5. D sera plus grande que G.

On peut prouver comme en la precedente, si elle est égale ou plus petite.



PR OP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres prises de deux en deux en mesme raison, icelles en raison égales seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, F, G, & soit A

à B comme D à F, & B à C, comme F à G. Je dis que en raison égale, comme A à C, ainsi D à G.

Qu'il ne soit ainsi, soient imaginees deux grandeurs H, & I, en sorte que A soit à B comme C à H, & D à F, comme G à I, d'autant que A est à B comme D à F, par la 11. p. 5. les 4. A, B, C, H, seront l'une à l'autre comme les 4. D, F, G, I, en changeant par la 16. p. 5. comme A à C ainsi B à H, ou comme D à G, ainsi F à I, & par la 11. p. 5. comme A à C, ainsi D à G.



PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres prises de deux en deux sont en mesme raison en proportion troublee : icelles en raison egales seront proportionelles.]

Soient 3. grandeurs A, B, C, & trois autres D, F, G, & soient prises de deux en deux, en mesme raison est à la prop. troublee, sçavoir que comme A à B, ainsi F à G, & comme B à C, ainsi D à F. Je dis que A sera à C, comme D à G.

Car si on prend H, L, M, equemultiples de A, D, F, & I, k, N, equemultiples de B, C, G, par la 15. p. 5. comme H à I, ainsi M à N, & comme I à K, ainsi L à M. Et par la 21. p. 5. si H est plus grande, égale, ou plus petite que k, aussi de mesme L sera à N, & par la 6. d. 5. comme A à C, ainsi D à G.

On pouvoit ainsi demonstrier la precedente.

PROP. XXIII.



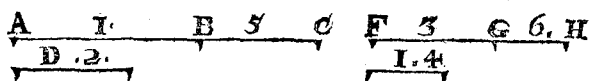
Si la premiere est à la deuxiesme, comme la troisieme à la quatriesme, & la cinquieme à la deuxiesme, comme la sixiesme à la quatriesme, la composee de la cinquieme, & sixiesme sera à la deuxiesme, comme la composee de la troisieme & sixiesme sera à la quatriesme.

Soit la premiere AB à la 2. D comme la 3. FG est à la 4. I, & la 5. BC à la 2. D comme la 6. GH à la 4. I. Je dis que la toute AC sera à D, comme la toute FH à I.

Car puis que comme AB à D ainsi FG à I, & comme D à BC ainsi I à GH par

la 22. p. 5. AB sera à BC,
comme FG à GH en
raison egalle, & en
composant par la 17. p.
5. AC sera à BC, comme
FH à GH. Pareillemēt

puis que AC est à BC comme FH à GH, & BC à D comme GH à I, en raison e-
galle, par la 22. p. 5. AC sera à D, comme FH est à I.



PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande, &
la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles A, D, F, I. Je dis
que la plus grande, & la plus petite A, & I sont plus grandes
que les deux autres D & F.

Car si de A on retranche AB egalle à H, & de D on oste DH
egal à I, AC sera à AB comme FH à FG. Et par la 19. p. 5. le
reste BC sera au reste GH, comme AC à IF. Mais AC est posée
plus grande que FH, aussi BC sera plus grande que FG, & qui
à choses egalles AB, & I, DF & H adiousté chose inegalle BC,
& FG les tous sont inegaux: ainsi la composée de AC, & I sera plus grande que la
composée des deux autres DG, & H.

Fin du cinquiesme Element.



ELEMENT SIXI- ESME.

DEFINITIONS.



Emblables figures rectilignes sont celles qui ont les angles egaux, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionaux.

Figures reciproques sont celles desquelles les costez sont alternativement proportionaux.

C'est à dire que des quatre costez proportionaux, le premier, & dernier sont en l'une des figures, le second, & troisieme

en l'autre.

Vne ligne droite est dite estre diuisee en la moyenne & extreme raison, quand la route est au plus grand segment comme le plus grand segment au moindre.

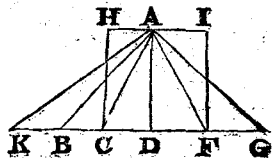
La hauteur d'une chacune figure est la perpendiculaire tiree du sommet à la base.

Vne raison est dicte estre composee de raisons, quand elle est produicte d'icelles raisons multipliees l'une par l'autre.

PROP. I.

Les triangles, & parallelogrames de mesme hauteur sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ACD , & AFD , de mesme hauteur sur les bases CD , & DF . Je dis que le triangle CAD , est au triangle FAD , comme la base CD , est à la base DF : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base CD , pour seconde la base DF , pour troisieme, le triangle CAD , pour quatrieme, le triangle FAD , que les equemultiples de la premiere, & troisieme seront plus petites, egales, ou plus grandes que les equemultiples de la seconde, & quatrieme ainsi que le requiert la 6. def. 5.



Qu'il ne soit ainsi, qu'on prolonge CF , de part & d'autre, & apres auoir coupé KB , & BC egales à CD , d'un costé. Item FG egale à DF , de l'autre, soient menees les lignes KA , BA , GA . Donc par la 38. p. 1. les trois triangles AKB , ABC , ACD , estant sur bases egales, & entre mesmes paralleles seront egaux, aussi par les mesmes raisons les deux triangles AGF , & AFD , seront egaux: ainsi il est euident que autant de fois que la base KD , contiendra CD , autant de fois le triangle AKD contiendra le triangle ACD . Pareillement autant de fois que DG contiendra DF , autant de fois DAG , contiendra DAF . Que si la base KD est egale à DG , le triangle KAD sera egal au triangle DAG , par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand, si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la base CD , à la base DF , ainsi le triangle CAD , sera au triangle DAF , ce qui estoit à demonstrier pour la premiere partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallelogrames, le mesme se peut dire qui a esté dict des triangles. Par ce que les parallelogrames, sont doubles des triangles, par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouué des triangles s'entendra des parallelogrames.

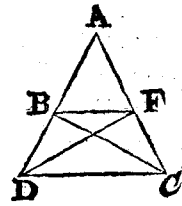
PROP. II.

Si l'on meine vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle, icelle coupera les autres costez d'iceluy proportionnellement: & si les costez sont coupez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ADC , dans lequel soit menee BF parallele à DC , coupant les deux autres costez AD , & AC aux points B , & F . Je dis que AB sera à BD ,

comme AF, à FC.

Qu'il ne soit ainfi. Il faut mener les deux lignes CB, & DF, & par la 37. p. 1. les deux triangles FBC, & BFD estans sur mesme base, & entre mesmes parallèles sont egaux, & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme ABF. Mais par la 1. p. 6. les triangles DFB, & BFA estans de mesme hauteur sont l'un à l'autre comme la base DB, à la base BA, & par la mesme proposition, le triangle CBF, estât de mesme hauteur que le triangle FBA, ils seront l'un à l'autre comme CF est à FA, & par la 11. p. 5. DB sera à BA, comme CF à FA.



Pour la seconde partie. Je dis que si DB est à BA, comme CF, à FA, que aussi BF sera parallèle à DC.

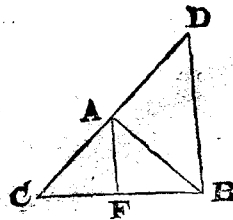
Car les triangles DFB, & BFA, seront par la 1. p. 6. l'un à l'autre, comme DB à BA. Item les deux autres CBF, & FBA seront aussi l'un à l'autre, comme CF, à FA, & par la 11. p. 5. le triangle DFB, sera au triangle BFA, comme le triangle CBF est au triangle FBA, & par la 9. p. 5. les deux triangles BFD, & FBC seront egaux, lesquels estans sur mesme base BF par la 39. p. 1. Il seront entre mesmes parallèles, & BF sera parallèle à DC.

PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également, tombant la ligne coupante sur la base : les segmens de la base seront l'un à l'autre, comme les autres costez, & si les segmens de la base sont l'un à l'autre, comme les autres costez, la ligne tombante coupera l'angle en deux également.

Soit l'angle BAC, du triangle BAC, coupé en deux également par la ligne AF. Je dis qu'il y a mesme raison de CF, à FB, comme de CA à AB.

Qu'il ne soit ainfi, apres avoir mené du point B, BD, parallèle à FA, soit continué CA directement iusques à ce qu'elle rencontre BD, car d'autât qu'elles ne sont parallèles, elles se rencontreront, estans continuées, & par ce que AF, & BD sont parallèles l'angle FAB, sera egal à son alterne ABD, par la 29. p. 1. Et si l'exterieur CAF, sera egal à l'opposé interieur ADB. Mais CAF, & FAB, estant egaux par hypothese, aussi par les com. l'ent. ADB, & ABD seront egaux, & par la 6. p. 1. les costez AB, & AD seront egaux. Mais par la 2. p. 6. CA est à AD, comme CF, à FB, estant AF parallèle à DB, & par consequent CA sera aussi à AB egale à AD, comme CF, à FD.



Pour la seconde partie. Je dis que si CA est à AB, comme CF à FB que l'angle

M ij

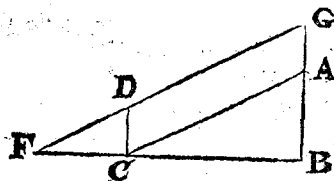
CAB sera couppe en deux egallement.

Car apres auoir construit, comme dessus CA sera à AD, comme CF à FB par la 7. p. 6. Et par la 11. p. 5. CA sera à AD, comme le mesme CA, à AB, & par la 7. p. 5. AD, & AB seront egaux, & par la 5. p. 1. les deux angles ADB, & ABD, seront egaux, & par la 29. p. 1. ils sont egaux, l'un à CAF, & l'autre à FAB, lesquels par ce moyen seront aussi egaux, ce qui estoit à prouuer.

PROP. IIII.

Les triangles equiangles ont les costez qui sont au long des angles egaux proportionaux.

Soient deux triangles sur la ligne FB, FC D, & CBA, equiangles : c'est à dire que l'angle F soit egal à l'angle ACB, & l'angle DC F à l'angle B, & le troisieme au troisieme. Je dis que comme DF, à FC, ainsi AC à CB, ou bien comme AB à BC, ainsi DC, à CF.



Qu'il ne soit ainsi, d'autant que les costez BA, & FD ne sont point paralleles, estans continuez ils se rencontreront, comme au point G. Il est evident que l'angle exterior FCD, estant egal à son opposé interieur CBA, car les triangles sont equiangles, & disposez ainsi DC sera parallele à GB, par la 29. p. 1. Pareillement l'angle exterior ACB, estant egal à son opposé interieur DFC, par la mesme raison del'hypotese aussi par la 29. p. 1. CA, & FG, seront paralleles. Rarrant ACDG, sera parallelograme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez oposez egaux. Mais DC, estant parallele à GB par la 2. p. 6. FD sera à DG, ou CA sont egale, come FC, à CB, & en chageant par la 16. p. 5. FD sera à FC comme CA, à CB. Pareillement CA estant parallele à FG, comme BA sera à AG, ou CD son egale, ainsi BG à CF, & en changeant BA sera à BC, comme DC, à CF, par les mesmes raisons que dessus, ainsi des autres.

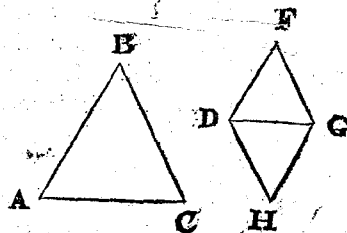
PROP. V.

Les triangles qui ont les costez proportionaux, ont aussi les angles egaux, qui sont compris des costez proportionaux.

Soient deux triangles ABC, & DFG, ayans les costez proportionaux. Je dis qu'ils ont aussi les angles egaux, sçauoir les compris des costez de mesme raison.

Qu'il ne soit ainsi, sur la ligne DG, & aux deux points D, & G soient construits les deux angles DGH, egal à C, & GDH egal à A par la 32. p. 1. le troisieme H sera egal au tiers B, & les deux triangles ABC, & DGH, seront equiangles

& par la 4. p. 6. comme BA, à AC, ainſi ſera HD à DG. Mais par hypothefe FD, eſt à DG à la meſme raiſon, & par la 9. p. 5. FD, & DH ſeront egales : & d'aurant que comme BC, à CA, ainſi FG à GD, & HG à GD, par les meſmes raiſons FG : & GH ſeront egales ainſi les deux triangles DFG, & DHG, ont les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien : & par la 4. & 8. p. 1. les angles ſeront egaux aux angles chacun au ſien, & ſeront equiangles, & par les com. ſent. FDG, & BAC ſeront auſſi equiangles.



PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long d'iceux angles egaux; proportionaux, ils ſeront equiangles.

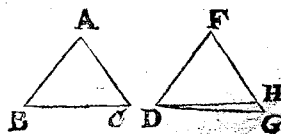
Soient les deux triangles ABC, & DFG, ayans l'angle A egal à l'angle D, & comme BA, à AC, ainſi FD, à DG. Je diſ qu'ils ſont equiaux.

ou il ne ſoit ainſi, ſur la ligne DG, ſaut baſſer comme en la precede nte, le triangle DGH, equiangle au triangle ABC : & par la 4. p. 6. HD ſera à DG, cōme BA, à AC, ou FD à DG, car ils ſont en la meſme raiſon, & par la 9. p. 5. FD, & DH, qui ont vne meſme raiſon à DG ſeront egales, & les deux triangles FDG & HDG aurōt deux coſtez egaux à deux coſtez, ſçauoir FD, & DG à HD, & DG, & les deux angles au point D, egaux: car ils ſont chacun egal à l'angle A, & par la 4. p. 1. ils auront la baſe egale a la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, & ſeront equiangles. Mais l'un d'iceux DGH eſt equiangle à ABC par conſtruction auſſi ſera l'autre par les communes ſentences.

PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long des autres angles proportionaux, eſtans iceux autres angles de meſme eſpece. Iceux triangles ſeront equiangles.

Soient deux triangles ABC, & DFG, deſquels les deux angles A, & F ſoient egaux, & pour les coſtez ſoit AB, à BC, comme FD à DG, &c. Mais les angles C, & G. de meſme eſpece: c'eſt à dire aigus, ou obtus. Je diſ qu'ils ſeront equiangles.

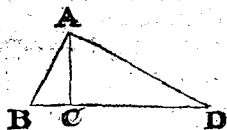


Car l'angle B sera egal ou non egal à l'angle D, si egal aussi par la 32. p. 1. l'angle C sera egal à l'angle G, les triangles seront equiangles. Si inegal, comme si B estoit plus petit que D, soit fait FDH egal à B, par la 23. p. 1. le troisieme FH D, sera egal au troisieme C, & partant aigu, ou obtus, comme iceluy, & les deux triangles ABC, & FDH seront equiangles, & par la 4. p. 6. comme AB, à BC, ainsi FD, à DH. Mais par hypothese, comme AB, à BC, ainsi FD à DG, & par la vnzieme proposition cinquiesme, comme FD, à DG, ainsi FD à DH par la 9. p. 5. DG, & DH seront egales, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base GH seront egaux, & tous deux aigus, & par consequent les deux angles au point H se trouveront aigus contre la 13. p. 1. Donc l'angle B, n'estoit pas plus petit que l'angle D.

PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire vne perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entre eux.

Soit le triangle, rectangle BAD, & l'angle droit A, duquel soit menee la perpendiculaire AC. Je dis que les triangles ABC, & ADC, sont equiangles au total BA C, & entre eux, & par consequent semblables.



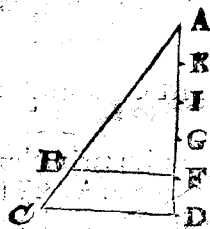
Qu'ainsi ne soit, d'autant que AC est perpendiculaire l'angle BCA est droit, & egal à l'angle droit BAD, du total, & si l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD, & BCA, & par la 32. p. 1. le troisieme BAC, est egal au troisieme ADB, & les deux triangles BAD, & BAG, seront equiangles, & par la 4. p. 6. & 1. def. 6. ils seront semblables. Par mesme discours on prouuera que les deux triangles BAD, & CAD sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle D est commun à tous les deux, & l'angle droit egal à l'angle droit, le troisieme CAD sera egal au troisieme B. Il est aussi aisé de montrer que les deux triangles BCA, & DCA sont equiangles, & semblables.

PROP. IX.

D'une ligne droite donnee oster la partie demandee.

Soit la ligne donnee AC de laquelle il faut oster la cinquiesme partie, ou telle autre qu'on voudra.

Du point A soit menee la ligne AD, faisant angle avec AC, & en icelle AD, soient prises à l'adventure cinq parties egales: car il faut que icelle ligne soit tant grande qu'il sera de besoin, & soient icelles AK, KI, IG, GF, FD, & apres auoir mené la ligne CD, du point F, soit menée FB, parallele à CD. Je dis que CB est la cinquiesme partie de CA.



Car par la 2. p. 6. AB est à BC comme AF, à FD, & en composant par la 18. p.

SIXIEME.

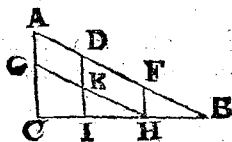
3. AC sera à BC, comme AD, à FD, mais FD est la cinquième partie de AD, partant aussi BC sera la cinquième partie de AC.

PROP. X.

Couper semblablement vne ligne donnee, non coupée, à vne autre ligne droite donnee, & coupée.

Soit la ligne donnée, & coupée CB, sçavoir en CI, IH, & HB, & la ligne non coupée AB, laquelle il faut couper en parties semblables, & proportionnelles.

Soient accommodées icelles lignes données en sorte qu'elles fassent vn angle ABC, & apres auoir mené la ligne CA.



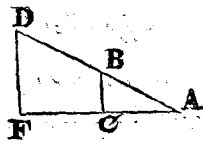
Soient menées ID, & HF parallèles à icelles, & GH parallèle à AB, par la 31. p. 1. Il est euidēt par la 2. p. 6. repetée deux fois que AB est coupée aux points D, & F, comme CB aux points I, & H.

PROP. XI.

A deux lignes droites données, trouuer la troisieme proportionnelle.

Soient deux lignes données AB, & AC, auxquelles il faut trouuer la troisieme proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en vn angle CAB, & apres auoir prolongé CA, iusques en F, soit faicte CF, égale à BA, & apres auoir mené CB, & du point F, FD parallèle à CB soit prolongé AB, iusques à ce qu'elle rencontre F D au point D. Je dis que BD est la troisieme proportionnelle demandée. Ce qui est euidēt par la 2. p. 6. car AC estant à CF, comme AB, à BD, & CF est égale à AB, AC sera à AB, comme AB, à BD, ce qu'il falloit prouuer.



PROP. XII.

A trois lignes droites données, trouuer la quatrieme proportionnelle.

Soient les trois lignes données AC, CF, AB auxquelles il faut trouuer la quatrieme proportionnelle.

Soit prolongé AB, tant qu'il sera de besoin, & apres auoir mené CB du point F soit menée FD parallèle à C B. Il est euidēt par la 2. p. 6. que comme AC, à CF, ain-



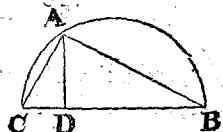
si AB à BD, ce qui estoit requis.

PROP. XIII.

A deux lignes donnees, trouver, la moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes donnees CD, & DB ausquelles, il faut trouver la moyenne proport.

Soient icelles disposées en vne ligne droite CB, sur laquelle soit décrit vn demi cercle CAB, & apres auoir du point D leué la perpendiculaire DA touchant la circonférence du cercle en A. Je dis que icelle est la moyenne proportionnelle demandée.

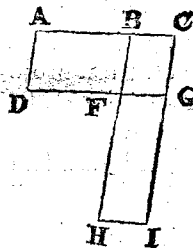


Car si on meine les deux lignes CA, & AB, l'angle CAB, dans le demi cercle sera droit par la 31. p. 1. & le triangle CAB, rectangle, & par la 8. p. 6. la perpendiculaire AD, le diuifera en deux triangles equiangles BDA, & ADC, & par la 4. p. 6. les costez qui sont au long des angles droits seront proportionaux, sçauoir que comme BD, à DA, ainsi DA, à DC: par ainsi DA sera moyenne proportionnelle.

PROP. XIII.

Les parallelogrames egaux ont les costez reciproques, & les parallelogrames qui ont les costez reciproques, sont egaux, moyennant qu'ils ayent vn angle egal.

Soient deux parallelogrames egaux AF, & FI, desquels si les deux angles BFD, & GFH soient egaux. Je dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux sont reciproques: c'est à dire que DF est à FG, comme HF à FB,



Qu'il ne soit ainsi. Il faut disposer les parallelogrames de telle façon que DF, & FG, fassent vne ligne droite, en apres prolonger AB, & IG iusques en C. Puis donc que les deux parallelogrames AF, & FI sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelograme BG, par la 7. p. 5. Mais la raison des parallelogrames AF, & BG est par la 1. p. 6. comme celle de la base DF à la base FG. Item celle de BG, & FI est comme celle de HF à FB, & par la 11. p. 5. comme DF, à FG, ainsi HF, à FB.

Pour la seconde partie, si DF est à FG, come HF à FG & que les angles DFB, & HFG soient egaux. Je dis que les parallelogrames AF, & FI seront aussi egaux.

Car demeurant la mesme construction, on prouuera par la 1. p. 6. & 11. p. 5. qu'il y a mesme raison du parallelograme AF, au parallelograme BG, que de H

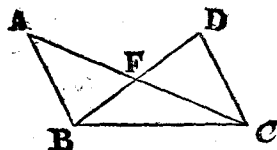
Gau

G au mesme BG estant à iceluy comme les bases aux bases, lesquels sont en mesme raison, & par la 9. p. 5. iceux parallelogrames AF, & FI qui ont mesme raison à vn tiers sont egaux.

PROP. XV.

Les triangles egaux ont les costez reciproques, & les triangles qui ont les costez reciproques sont egaux moyennant qu'ils ayent vn angle egal.

Soient deux triangles egaux AFB, & CDF, ayans les angles au point F egaux. Je dis que les costez qui sont au long des angles egaux sont reciproques : c'est à dire que comme AF, à FC, ainsi D F, à FB.



Qu'il ne soit ainsi. Il faut disposer les triangles, en sorte que les deux lignes AF, & FC, se rencontrent directement. Et mener la ligne BC. Pour autant que les deux triangles AFB, & DFC sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BFC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle AFB, au triangle BFC, estant de mesme hauteur est comme de la base AF, à la base FC, pareillement par la 7. p. 5. le triangle DCF sera au triangle FCB, comme DF, à FB, & par la 11. p. 5. AF sera à FC, comme DF à FB.

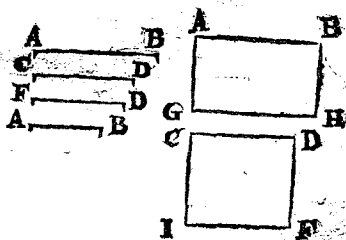
Pour la seconde partie elle se prouuera comme en la precedente en retrogradant par la 1. p. 6. 11. p. 5. & 9. p. 5.

PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes, & si le rectangle des extremes est egal au rectangle des moyennes les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes proportionnelles AB, CD, FD, HB. Je dis que le rectangle des extremes AB, & HB, sçavoir AH est egal au rectangle des moyennes CD, & FD, sçavoir CF.

Car puis que les angles D, & B sont egaux pour estre deux angles droits, & les costez au long d'iceux angles egaux reciproques (d'autant que comme AB à CD, ainsi DF à BH,



N

les rectangles seront egaux par la 14. p. 6.

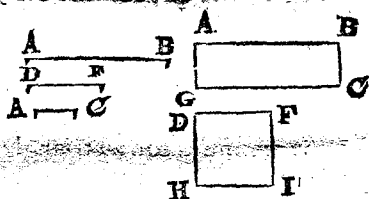
Pour la seconde partie. Je dis que s'ils sont egaux, que les quatre lignes seront proportionnelles, d'autant que par la mesme 14. p. 6. ils auront les costez reciproques: qui n'est autre chose que la proportion des 4. lignes données.

PROP. XVII.

Si trois lignes sont proportionnelles, le rectangle des extremes sera egal au quarré de la moyenne, & si le rectangle des extremes est egal au quarré de la moyenne, les trois lignes seront proportionnelles.

Soient les trois lignes proportionnelles AB, DF, AC. Je dis que le rectangle des extremes AB, & AC, sçavoir AC est egal au quarré de la moyenne DF, sçavoir DI.

Car d'autant que l'angle B est egal à l'angle F, estant tous deux droitz; & les costez au long d'iceux angles sont reciproques: car AB, est à DF, comme son egal FI, à BC, les rectangle, & quarré sont egaux par la 14. p. 6.

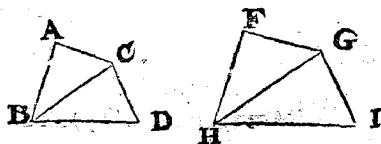


Au contraire si le quarré & rectangle sont egaux, les trois lignes seront proportionnelles, car l'angle B estant egal à l'angle F, & les costez qui sont au long d'iceux, (comme il a esté dict cy dessus à la 14. p. 6.) seront reciproques; c'est à sçavoir que comme AB à DF, ainsi DF (ou FI son egal) seront à BC.

PROP. XVIII.

Sur vne ligne droite donnée descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droite donnée HI, sur laquelle il faut bastir vne figure semblable, & semblablement posée à la figure AB D C.



Soit diuisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CB: & apres auoir par la 23. p. 1. basti sur la ligne HI, & aux points H, & I, les deux angles GHI, & GIH egaux, l'un à l'angle CBD, & l'autre à l'angle CDB. Il est euidet par la 32. p. 1. que le troisieme sera egal au troisieme & les triangles CBD, & GHI seront equiangles, & auront les costez proportionaux par la 4. p. 6. & seront semblables. Pa-

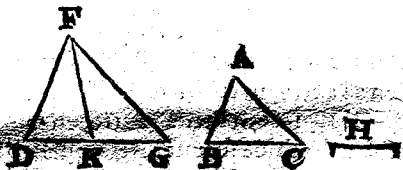
reillement sur la ligne HG, & aux deux points H, & G soient bastis les deux angles FHG, & FGH egaux aux deux ACB, & ABC, chacun au sien, aussi par la 32. p. 1. le troisieme A sera egal au troisieme F, & les triangles ABC, & HFG, seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux, ainsi l'angle F estant egal à l'angle A, & l'angle I à l'angle D, les deux de B aux deux de H. & les deux de G aux deux de C, les deux figures seront equiangles, & pour autant qu'elles sont composées de triangles equiangles, il est aisé à monstrier qu'elles ont les costez proportionaux, & par la 1. def. 6. elles seront figures semblables.

Que si la figure donnée auoit plus de 4. costez, il la faudra diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez proportionaux.

Soient deux triangles semblables F DG, & ABC. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez proportionaux DG, & BC : c'est à dire que si à DG, & BC on ajoute la troisieme proportionnelle H, que le triangle FDG sera au triangle ABC, comme la ligne DG, est à la 3. H, car telle est la raison doublee par la 10. def 5.



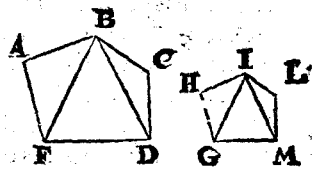
Qu'il ne soit ainsi de la ligne DG, il faut retrancher DK egalle à la troisieme proportionnelle H & mener la ligne FK, & pour autant que les deux triangles F DG, & ABC, sont semblables, les angles D, & B, seront egaux, & si comme DF, à DG, ainsi BA, à BC, & en changeant (par la 16. p. 5.) DF sera à BA, comme DG à BC: mais come DG à BC, ainsi BC à H, ou DK son egalle par la cõstruction & par la vnzieme proposition du cinquieme DF sera à BA, comme BC à DK, & par ainsi les deux triangles FDK, & ABC auront les costez reciproques, & l'angle D egal à l'angle B, & par la 15. p. 6. ils seront egaux, & par la 7. p. 5. ils auront vne mesme raison au triangle DFG. Mais DFG, & DFK, sont l'un à l'autre, comme la base DG à la base DK, & par la 1. p. 6. aussi DFG, & BAC seront l'un l'autre comme DG, à DK ou à la 3. proportionnelle H son egalle.

PROP. XX.

Les Poligones semblables, sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez proportionaux, & peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entre eux, & proportionaux à leur tout.

Soient deux polygones semblables ABCDF & GHILM. Je dis premierement qu'ils peuvent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables.

Car apres auoir mené les lignes BF, BD. Item IG, IM, il est euident que l'une des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Mais pourautant que les figures sont semblables, l'angle A sera egal à l'angle H, & comme BA sera à AF, ainsi I H, à HG & par la 6. p. 6. les triangles FAB, & GHI, seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles BCD, & ILM, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dict cy dessus BF est à FA, comme I G, à GH, mais AF est à FD, comme HG à GM, car ce sont costez de figures semblables, & en raison egalle par la 22. p. 5. BF sera à FD, comme I G, à GM, par mesme discours BD sera à DF, comme IM, à MG, & par la 5. p. 6. les triangles BFD, & IGM, seront equiangles, & semblables.



Je dis secondement, que iceux triangles sont proportionaux à leur tout, ce qui est euident par la 12. p. 5. estans les trois triangles de l'une des figures semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la 19. p. 6. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs costez proportionaux, les triangles FAB, & GHI, seront l'un à l'autre, en raison doublée de BF, à IG: aussi en la mesme raison doublée seront les triangles BFD, & IGM, & le troisieme BCD, estant au troisieme ILM, en raison doublée de BD, à IM, & que FB est à GI, comme BD, à IM, estans costez de triangles semblables, aussi les triangles BCD & ILM, seront l'un l'autre en raison doublée de BF à IG: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, à son respondant de l'autre.

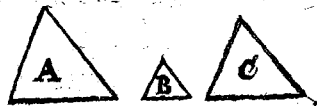
Je dis tiercement que le polygone est au polygone, en raison doublée des costez FD, & GM: car puis que toute la figure ABCD, est à toute la figure GHILM comme l'un des triangles de l'une FBD, est à l'un des triangles de l'autre GIM, lesquels par la 19. p. 6. sont en raison doublée de FD, à GM, par la 11. p. 5. le polygone sera au polygone, en raison doublée de FD, à GM.

PROP. XXI.

Les figures rectilignes semblables à vne, sont semblables entre elles.

Soit la figure A semblable à la figure B, & la figure C semblable aussi à la mesme B. Je dis que A, & C seront semblables entre elles.

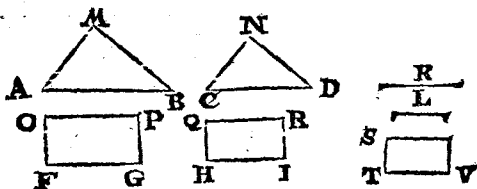
Cecy est aisé à demonstrier par la 1. d. 6. en explicquant l'egalité des angles, & proportion des costez par la 4. p. 6.



PROP. XXII.

Si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront proportionnelles: & si icelles figures ainsi descrites sont proportionnelles, icelles lignes seront aussi proportionnelles.

Soient 4. lignes proportionnelles AB, CD, FG, HI, & sur AB, & CD, soient descrites deux triangles semblables MAB, & NCD. Itē sur FG, & HI, soient descrites O G, & QI rectangles semblables.



Je dis premierement que iceux triangles, & parallelogrames sont proportionaux.

Qu'il ne soit ain si aux deux lignes AB, & CD, soit trouuée K troisieme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux FH, & HI soit trouuée L aussi troisieme proportionnelle & d'autant que AB est à CD, comme FG est à HI. Item CD, à K, comme HI, à L, en raison egale AB sera à K, comme FG, à L, par la 22. p. 5. Mais comme AB est à K, ain si le triangle MAB est au triangle CND, par la 19. p. 6. & comme FG à L, ain si le rectangle OG est au rectangle QI, & par la 11. p. 5. les quatre figures sont proportionnelles.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures, semblables sont, proportionnelles que les lignes sur lesquelles elles sont descrites serōt aussi proportionnelles.

Car si aux trois AB, CD, FG, HI, n'est quatriesme proportionnelle, soit prise TV quatriesme proportionnelle par la 12. p. 6. & sur icelle soit descrite SV figure semblable à OG, par la 18. p. 6. & par ceste proposition. Puis que AB est à CD, comme FG, à TV, le triangle MAB sera au triangle NCD, comme le poligone OG est au poligone SV. Mais telle est QI à OG par hypotese, & par la 9. p. 5. QI & SV sont égaux, ain si descris sur lignes egales, comme on peut recueillir de la 20. pr. 6.

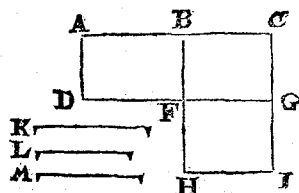
PROP. XXIII.

Les parallelogrames equiangles sont l'un à l'autre en raison composée de leurs costez.

Soient deux parallelogrames equiangles BD, & GH, ayant les deux angles, au point E égaux. Je dis que la raison de l'un à l'autre est composée de leurs costez DE, FG, BF, & FH

qu'il ne soit ain si, il faut disposer les deux parallelogrames, en sorte que DE,

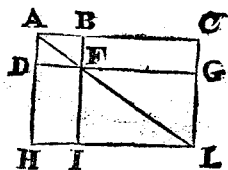
& FG, se puissent rencontrer directement, & paracheuer le Gnomon. Item soient prises les deux lignes K, & L, en la raison de DF, à FG. Pareillement soit L, à M, comme BF, à FH, par la 12. p. 6. alors BD sera à CF, comme DF est à FG par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5, les rectangles BD, & CF, feront l'un à l'autre comme K est à L, le mesme se peut dire de BG, & FI, qu'ils font l'un à l'autre, comme L est à M par la 1. p. 6. & 11. p. 5. partant en raison egalle BD est à GH, comme K est à M, par la 22. p. 5. Mais la raison de K à M, est composée de K, à L, & de L à M, par la 5. d. 6. & par conséquent puis que D F est à FG, comme K à L, & BF, à FH, comme L à M, BD sera à GH, en raison composée d'iceux costez DF, FG, BF, FH.



PROP. XXIII.

En tout parallelograme, les parallelogrames, descripts sur le diametre, ayans vn angle commun au total: sont semblables entre eux, & au total.

Soit le parallelograme ACHL, duquel le diametre est AL. Je dis que les deux parallelogrames BD, & GI descripts sur iceluy diametre, ayans les angles A, & L, communs avec le total sont semblables entre eux, & au total ACHL.



Car d'autant que les lignes AC, DG, & HL, sont paralleles, sur icelles tombans AL, & BI, elles feront les angles alternatiuement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles ABF, & FGL, feront equiangles entre eux, & au total ACL, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux. Le mesme se peut dire des trois autres ADF, FIL, & AHL, lesquels sont egaux aux trois premiers, chascun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelograme AF, ayant les costez AB, & BF, proportionaux à AC, & CL, costez du parallelograme AL, & aux costez FG, & GL du parallelograme FL, &c. Il est euidant par la 1. d. 6. qu'ils seront semblables entre eux, & au tout.

PROP. XXV.

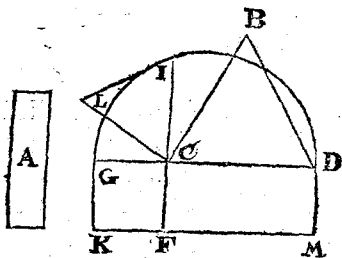
Descrire vne figure rectiligne semblable à vne autre donnée, & egale à vne autre proposée.

Soient deux figures rectilignes A, & BCD, ausquelles il faut faire vne figure rectiligne egale à A & semblable à BCD.

Sur la ligne CD, soit fait le parallelograme CM egal à la figure BCD. Item sur la ligne C F soit basti G F parallelograme egale à la figure donnée A

le tout par la 44. & 45. p. 1. & soient CK, & CM, rectangles : & apres auoir trouué CI, moyenne proportionnelle entre GC, & CD. Sur icelle, soit descrite la figure CIL, semblable, & semblablement posée à la figure CBD, par la 18. p. 6. Je dis qu'elle sera aussi égale à la figure donnée A.

Car puis que par construction, le rectangle CK, est égal à A, & CM, à BCD: & que par la 1. p. 6. CK, est à CM, comme GC, à CD. Pareillement que les deux figures semblables BCD, & ILC, sont l'une à l'autre, en raison doublée de CD à CI, par la 19. p. 6. sçauoir comme DC, à la 3. proport. CG. Et par la 11. p. 5. CBD, sera à CIL, comme CM, à CK, & en changeant CBD, sera à CM, comme CIL, à CK, par la 16. p. 5. & CBD, étant égal à CM, aussi ILC sera égal à CK, & par consequent égale à A.

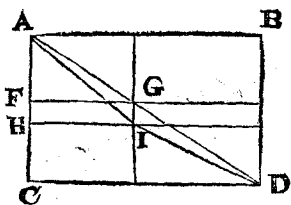


PROP. XXVI.

Si d'un parallélograme, on oste un parallélograme semblable, & semblablement posé au tout, ayant un angle commun, avec le tout: l'osté sera avec le tout sur un même diamètre.

Soit le parallélograme ABCD, duquel on retranche, AG parallélog. qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun, avec le total (sçavoir qu'ils sont sur même diamètre, AGD).

Autrement s'il ne sont sur même diamètre, AID Soit un autre diamètre, AID qui ne soit commun à tous les deux, & du point I, soit menée IH parallèle à AB par la 31. p. 1. donc le parallélog. AI, étant sur même diamètre avec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total AG est aussi semblable par hypothèse, & par la 21. p. 6. AG, & AI seront semblables, & par la 1. d. 6. GF sera à FA, comme IH, à HA. Mais IH, & GF, étant égales, il faudroit aussi que HA fust égale à FA: ce qui est absurde, donc les parallélogrames AG & AD retranché, & total estoient sur même diamètre.



PROP. XXVII.

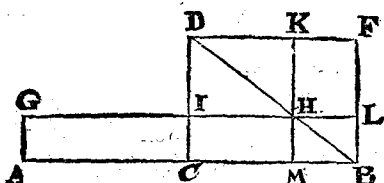
De tous les parallélogrames descris sur une même ligne defaillans à icelle d'un parallélograme semblable à un autre décrit sur la moitié de la même ligne, le plus

grand est celuy qui est descript sur l'autre moitié de la ligne.

Nous appellons vn parallelograme de faillir à vne ligne, lors qu'il ne l'occupe point entierement. Et le parallelograme descript sur le reste de la ligne est appellé le defect de la ligne.

Soit la ligne AB couppee en deux egallemēt, en C, & sur la moitié d'icelle, soit le parallelogr. DB, ayāt la diagonale DB. Je dis que de tous les parallelogrames defaillans à icelle ligne d'vne figure semblable à DB, le plus grand est celuy qui est descript sur la moitié, sçauoir DB.

Qu'ainsi ne soit, il faut descrire le parallelograme AH, ou autre quelconque sur plus ou moins que la moitié AC. Mais il est requis en ceste proposition que le parallelograme quel'on veut defaillir d'vne figure semblable à DB, viēne toucher la diagonale DB, afin que par la 24. p. 6. le defect HB soit semblable au parallelograme descript sur la moitié de la ligne CB : ainsi HA est defaillāt d'vne figure semblable à DB, sçauoir HB, & par la 36. & 43. p. 1. le Gnomon I Bk se trouuera egal au parallelograme AH. Partant AH sera plus petit que BD, comme celuy Gnomon est aussi plus petit que BD, ainsi de tous les autres. Mais celuy qui seroit descript sur la moitié AC seroit egal à DB, estans sur la bases egales, & entre mesmes paralleles, &c.



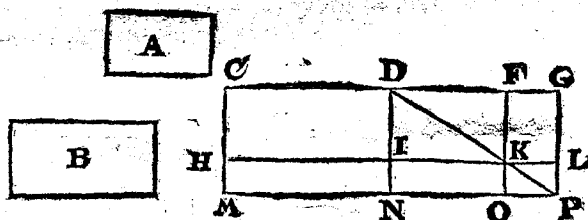
PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droite donnée, appliquer vn parallelograme defaillant d'vn parallelograme semblable à vn autre donné, & egal à vne figure donnée, laquelle soit plus petite que le parallelograme descript sur la moitié de la ligne, & semblable au donné.

Soit la ligne donnée MP, sur laquelle il faut bastir vn parallelograme defaillant d'vn parallelograme semblable à A. Mais egal à B.

Sur la moitié NP soit descript le parallelograme DNPG semblable à A, par la 18. p. 6. Puis

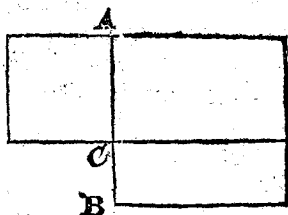
apres auoir accompli le parallelograme CP soit tirée la diagonale DP, maintenant



Soit la ligne AB, laquelle il faut couper en la moyenne & extreme raison.

Soit donc icelle couppee au point C de telle façon que le quarré de la partie AC soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie CB, comme il a esté enseigné en la 11. p. 2. Je dis que en C, elle sera couppee en la moyenne & extreme raison.

Car puis que le quarré de AC est egal au rectangle de AB & CB : Les trois lignes AB, AC, & CB seront continuelement proportionelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AC, comme AC, au plus petit segment CB, & par la 3. d. 6. AB est couppee en C, en la moyenne & extreme raison.

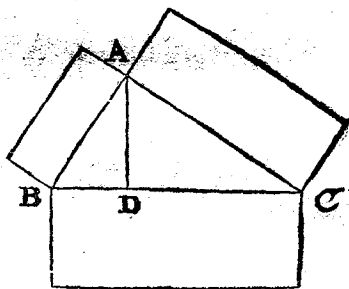


PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droit, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblables & semblablement posées sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, l'angle droit A. Je dis que la figure sur le costé BC qui soustient l'angle droit, est egale aux deux autres figures semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez AB, & BC.

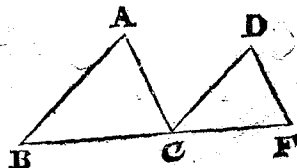
Car si du point A qui fait l'angle droit, on mene la perpendiculaire AD, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entre eux, & au total : ainsi les trois triangles ABD, DCA, & ABC seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. seront l'un à l'autre en raison doublée des costez AB, BC, CA. Pareillement les trois figures estans semblables, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs costez proportionaux AB, BC, CA les mesmes costez des triangles, & par la 17. p. 5. les parallelogrames seront entre eux, comme les triangles entre eux, mais le triangle BAC est egal aux deux autres, donc la figure sur BC sera aussi egale aux deux autres.



PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont disposez faisant vn angle de telle façon que les costez proportionaux soient parallels les deux autres costez se rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC, & CDF, ayan s les costez BA, & AC proportionaux aux costez CD & DF disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallel à CD, comme AC à DF, je dis que BC & CF se rencontreront directement.

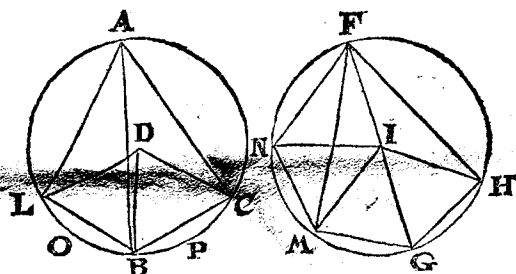


Car BA, & CD étant parallèles, l'angle ACD sera égal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC étant parallèle à DF, l'angle D sera égal à son alterne ACD, ainsi l'angle D sera égal à l'angle A, & par la 6. p. 6. les deux triangles seront equiangles, donc l'angle ACD, étant égal à l'angle A, l'angle DCF, à l'angle B, il est évident que les trois angles au point C seront égaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes se rencontreront directement.

PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux les angles tant au centre que en la circonférence sont entre eux, comme les circonferences qui les soustiennent. Les secteurs sont aussi de mesme.

Soient deux cercles égaux ABC, & FGH, desquels les centres sont D, & I, & soient les deux angles au centre BDC, & GIH, ou en la circonférence BAC, & FGH, ie dis qu'ils sont l'un à l'autre comme la circonférence BC à la circonférence GH.

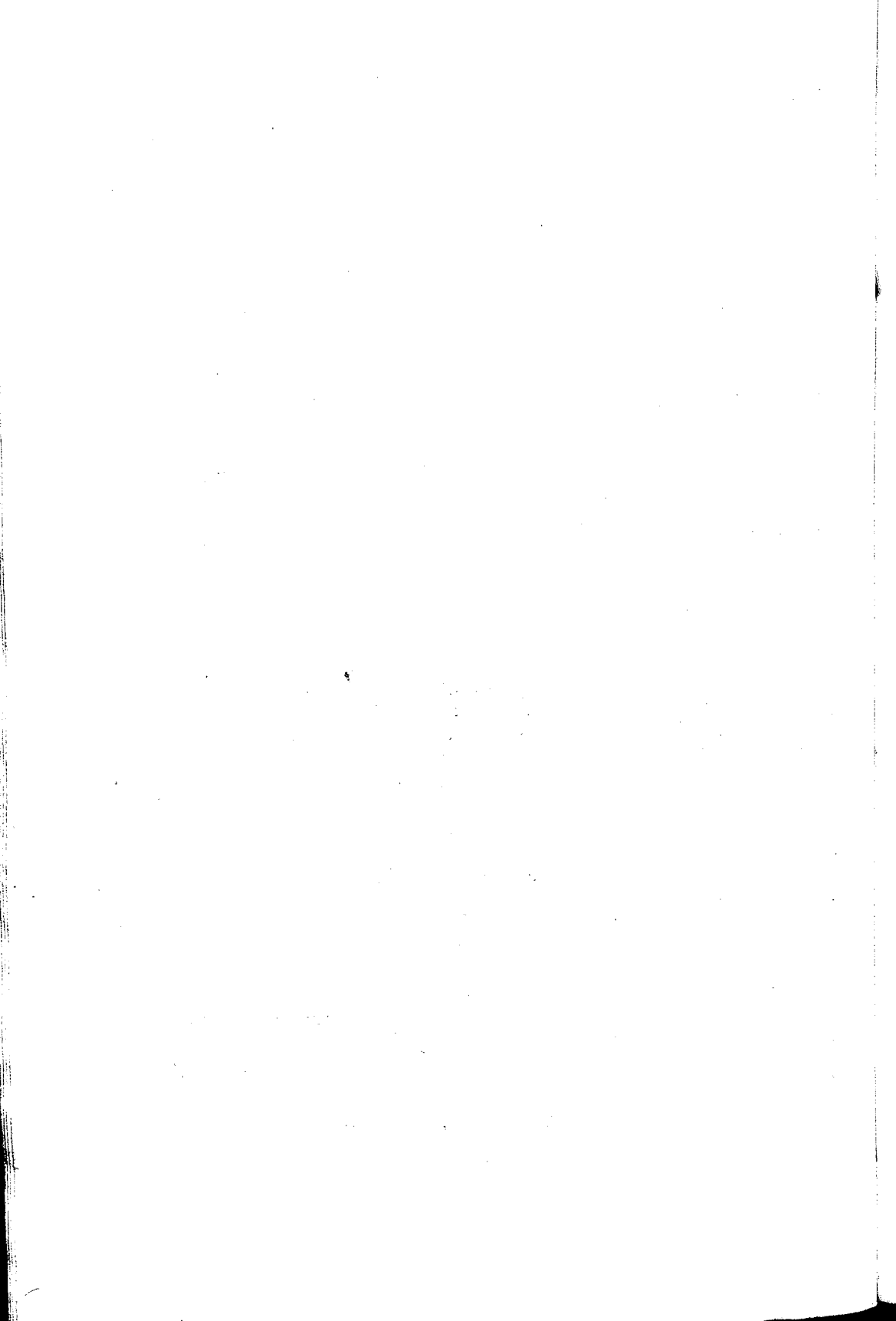


Qu'il ne soit ainsi, soient pris les deux arcs NM, & MG égaux à GH, item L B égal à BC, & soient menées les lignes LA, LD, NF, NI, MF, MI, les trois angles NIM, MIG, GIH sont égaux entre eux, par la 26. p. 3. ainsi NH est autant multiplie de GH, comme l'angle NIH l'est de GIH, & par le mesme discours LC, est autant multiplie de BC comme l'angle LDC, l'est de BDC: partant si l'arc LC est égal à l'arc NH, l'angle LDC sera égal à l'angle NIH par la 26. p. 3. si plus grand plus grand, si plus petit plus petit, & par la 6. d. 5. comme l'arc à l'arc, ainsi l'angle à l'angle, le mesme discours est des angles en la circonférence.

Pour la seconde partie. Je dis que le secteur BDC est au secteur GIH, comme l'arc BC est à l'arc GH.

Car on prouvera aisement (demeurant la mesme construction) que les trois arcs NM, MG, GH estans égaux que leurs cordes seront égales, & les trois secteurs égaux. mais les trois triang. NIM, MIG, & GIH sont égaux & par les communes sentences, les trois secteurs NIM, MIG, GIH seront égaux & l'arc NMGH sera autant multiplie de l'arc GH, que le secteur NIH, le sera de secteur GIH, & par mesme discours, l'arc LBC sera autant multiplie de l'arc BC que le secteur LDC sera du secteur BDC, la conclusion est aisée par la 6. d. 5. comme en la premiere partie.

Fin du sixiesme Element.





E L E M E N T S E P T I E S M E.

DEFINITIONS.

V Nité est selon laquelle toutes choses sont ap-
pellees vnes.

Nombre est vne multitude d'vnitez asséblees.

Partie est vn petit nombre tiré d'vn plus grand
lors que le petit mesure le plus grand, & ceste partie est ap-
pellee aliquote.

Partie aliquante est lors que le plus petit ne mesure pas
le plus grand, & icelle est apellée parties.

Multipliee est vn grand nombre composé d'vn petit
lors que le plus petit mesure le plus grand.

Nôbre pair est celuy qui peut estre diuisé en deux egalle-
ment.

Impair est celuy qui ne peut estre diuisé en deux egalle-
ment.

Pairement pair est celuy qu'vn nombre pair mesure par
vn nombre pair.

Pairement impair est celuy qu'vn nombre impair mesure
par vn nombre pair.

Nombre premier est celuy qui est mesuré par la seule v-
nité.

Ceux-là sont nombres premiers entre-eux, qui n'ont autre commune mesure que l'vnité.

Nombre composé est celuy qui est mesuré par quelque nombre.

Ceux là sont composez entre eux, qui ont autre commune mesure que l'vnité.

Vn nombre est dict multiplier vn autre, lors que le multiple est autant de fois composé qu'il y a d'vnitez au multipliant.

Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appellé plan, & les multipliers sont les costez d'iceluy plan.

Lors que trois nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appellé solide, & les multipliers sont les costez d'iceluy.

Nombre quarré est egallement egal, ou compris de deux nombre egaux.

Nombre cube est egallement egal, egalelement, ou compris de trois nombres egaux.

Nombres proportionaux sont lors que le premier est la mesme partie soit aliquote ou aliquante du second, comme le troisieme du quatriesme.

Nombres semblables plans ou solides, ont les costez proportionaux.

Nombre parfait est celuy, qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

COMMUNES SENTENCES.

Celuy qui mesure, le mesureur, mesure aussi le mesuré.
Celuy qui mesure le tout, & le retranché mesure aussi le reste.

Encores que ces principes soient icy posez pour tels, neantmoins ils ont esté prouuez généralement pour toute sorte de quantitez au 5. liure, mais en nombres ils peuuent estre posez plus aisement, ensemble plusieurs autres de mesme estoffe. Quant aux propositions, nous auõs tousiours suiui l'ordre de Theon, non pas de Campanus.

PROP. I.

Si de deux nombres proposez on soustraiet tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité, les nombres proposez seront premiers entre eux.

Soient deux nombres inegaux AB, & CD, si $A \dots 5 F \dots 2 G \dots 1 B$
 on soustrait continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité: le $C \dots 3 H \dots 2 D$
 dis qu'iceux nombres AB, & CD seront premier entre eux.

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. d. 7. ils seront mesurez par quelque nombre, soit iceluy E commune mesure à tous les deux, ainsi CD plus petit nombre estant soustrait de AB, soit le reste FB, plus petit que CD. Item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi AE, & d'autant qu'il mesure la toute AB, il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH, ainsi E mesurera aussi CH, & puis qu'il mesure la toute CD. il mesurera aussi le reste HD, & par conséquent FG, & par le mesme discours il mesurera le reste GB, scauoir luy estant vn nombre, ce qui est impossible, donc AB, & CD sont nombres premiers entre eux.

Cette demonstration, & quelques autres suivantes sont fondées sur le sens commun, & bien qu'elles se puissent appuyer sur quelques prop. du 5. toutefois nous les laissons, estant euidens que Euclide avoult distinguer le nombre d'avec la grandeur. Cela à esmeu Campanus de poser des principes nouveaux, lesquels chascun entendra aisement sans les poser.

PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure de deux nombres proposez non premiers entre eux.

Q. iiii.

Soient deux nombres non premiers A B, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure, laquelle sera nombre non pas vnité par la 1. p. 7. d'autant que les nombres proposez ne sont premiers entre eux.

A 9 F 6 B
C 6 G ... 3 D
H 4

Soit soustrait le plus petit CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB, s'il reste quelque chose comme FB soit soustrait du plus grand CD aussi continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'il ne reste rien. Côme GD mesurant FB, il ne reste rien. Je dis que GD est la plus grande commune mesure de AB, & CD.

Qu'ainsi ne soit. Je dis en premier lieu que GD mesure AB, & CD. Car mesurant FB, il mesure aussi CG, & d'autant qu'il se mesure soy mesme, il mesurera la toute CD. Pareillement il mesurera AF, & puis qu'il mesure aussi FB, il mesurera la toute AB, ainsi il mesure toutes les deux AB, & CD.

Je dis secondement que GD est la plus grande commune mesure de AB, & CD. Autrement soit vn plus grand nombre: sçauoir H qui mesure tous les deux nombres AB, & CD, & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AF, & mesurant le tout AB, il mesurera aussi le residu FB, & par consequent il mesurera C G. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste GD sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit, ce qui est impossible donc GD est la plus grande commune mesure entre AB, & CD.

Il resulte que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entre eux.

Soient trois nombres non premiers entre eux A, B, C, desquels il faut trouuer la plus grande, commune mesure car ils en ont vne autre que l'vnité par la 14. d. 7.

A 12 D 4
B 8 F .. 2
C 4 G ... 3
C 6

Soit tirée la plus grande commune mesure des deux A, & B, par la 2. p. 7. sçauoir D. Si D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons, que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D, & C seront composez entre eux, tant par l'hypothese que par ce qui resulte de la 2. p. 7. donc par icelle mesme proposition soit trouuée F plus grande comme mesure entre C, & D. il est evident que F mesurera toutes les trois A, B, C, d'autant qu'elle mesure C, & D, lequel mesure B, & A. Je dis d'auantage que F est aussi la plus grande mesure commune. Autrement si eilen'est la plus grande, soit vne autre plus grande, sçauoir G s'il est possible: car mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure D par ce qui resulte de la 2. p. 7. & par la

la mesme raison mesurant C, & D, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure F sçavoir le plus grand, le plus petit ce qui est impossible. Donc, F sera la plus grande commune mesure des trois nombres A, B, C.

PROP. IIII.

De deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux. Je dis que A plus petit est ou partie aliquote ou aliquante de A
 Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est B ... 3 B 5
 partie aliquote par la 3. d. 7. s'il ne le mesure pas ou bien A & B, seront composez, ou premiers: si composez, ils auront vne commune mesure par la 14. d. 7. si premiers ils auront l'vnité pour commune mesure par la 12. d. 7. ainsi B contiendra certain nombre d'vnitez de semblables qui sont en A.

PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart, le premier & tiers ensemble seront telle partie du second & du quart, qu'est le premier du second.

Soiét quatre nombres A B C D, desquels A est telle partie de B, que C est de D. Je dis que A, & C ensemble sont telle partie de B & D ensemble, comme A l'estoit de B.

Qu'ainsi ne soit, puis que A est telle partie de B, que C de D, B contiendra A autāt

de fois, comme D, contiendra C par la 3. d. 7. Soit donc B diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en BF, & FH, D se diuifera aussi en autant de parties egalles à C par l'hypotese, sçavoir en DG, & GI: & d'autant que BF est egal à A & DG à C, si à choses egalles on adionste choses egalles, sçavoir A & BF, à C & DG, les tous AC, & BFDG seront egaux: le mesme se dira de A, FH, C & GI, ainsi autant de fois que BH contient A, autant de fois BH, & DI ensemble contiendront A, & C ensemble.

Cette demonstration a esté semblable à la 1. p. 5.

PROP. VI.

R

Si de quatre nombres le premier contient telles parties du second que le tiers du quart: le premier & tiers ensemble feront telles parties du second & quart, que le premier du second.

Soient quatre nombres A, C, D, H, desquels le premier A contient autant de parties du second C que le 3. D est du 4. H. Je dis que A, & D ensemble contiendront autant de parties de C, & H ensemble que A de C.

A ... 3 F ... 3 B
C 9
D 4 I 4 G
H 12

Qu'ainsi soit, pour autant que AB contient telles parties de C, que DG en contient de H: estans A, & D diuisez aux parties de C, & H, il y aura autant de parties de C en AB, comme de H à DG, & par la 5. p. du 7. AF, & DI ensemble feront telle partie de C, & H ensemble comme AF est de C. Item FB & IG ensemble feront telle partie de C, & H ensemble comme FB seul, est de C seul, ainsi AB, & DG seront deux fois telle partie ensemble de C, & H ensemble comme AB, est de C.

PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'un autre nombre que le retranché du retranché, le reste sera telle partie du reste, comme le tout estoit du tout.

Soit AB telle partie du nombre CD que le retranché AF est du retranché CG. Je dis que le reste FB, sera telle partie du reste GD, que le tout AB estoit du tout CD.

A 4 F .. 2 B
H 4 C 8 G D

Qu'il ne soit ainsi, soit pris le nombre HC, de telle façon que le reste FB soit telle partie de HC, que le retranché AF est du retranché CG. Les deux AF, & B seront telle partie de HC, & CG, ensemble qu'est AF, de CG, par la 5. p. 7. Mais par l'hypothese AB, est à CD comme AF, à CG: donc HG, & CD seront egaux par la 9. p. 5. Et qui de choses egales, sçauoir HG, & GD, oste choses egales sçauoir le nombre commun CG, les demeurans HC, & GD seront egaux, le reste est aisé à conclurre.

PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché, le reste contiendra telles parties du reste que le tout du tout. A 6 F ... 3 B

H .. 2 C 3 G .. 2 D

Si le nombre total CD, contient telles parties du total AB, que le retranché

CG du retranché AF. Je dis que le reste GD contiendra telles parties du reste FB, que le total CD, du total AB.

Qu'il ne soit ainsi, si on pose HC, estre telles parties de FB que CG de AF, par la 6. p. 7. le tout HG sera telle partie du tout AB que le reste HC du reste FB, ou le retranché CG de AF, & par la 11. & 9. p. 5. on monstrera comme en la precedente que HC sera egalle à GD, & que par consequent ce qui se prouuera de l'une s'entendra de l'autre.

PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier sera telle partie ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soit A telle partie de B que C est de D. Je dis que
 1 A ... 3
 B sera telle partie, ou contiendra telles parties de
 2 B ... 3 F ... 3 G
 D, que A de C: pourueu que A & B soient plus pe-
 tits que C & D.

Qu'il ne soit ainsi, pour autant que par l'hypo-
 these A est telle partie de B, comme C, de D, DK sera
 diuisé en autant de parties egalles à C que BG, egalles à A. Or par la 4. p. 7. A est
 partie de C ou contient parties d'iceluy, & consequemment tous les autres BF,
 de DH, & FG, de HK. Mais par ce que BF est egal à A, & DH, à C, BF contiendra
 telles parties de DH, que A de C: semblablement aussi FG, de HK. Soient
 donc 4. nombres BF 1. à DH 2. comme FG 3. à HK 4. BG. 1. & 3. sera telle ou
 telles parties de DK second, & 4. que BF. 1. de DH, 2. ou leurs egaux A & C, par
 la 5. & 6. p. 7. ce qu'il falloit prouuer.

PROP. X.

Si de quatre nombres le premier contient telles parties du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier contiendra telle, ou telles parties du second que le tiers du quart.

Soient 4. nombres A, B, C, D, de
 quels A contienne telles parties de B,
 que C, de D. Je dis que en changeant
 A sera telle ou telles parties de C que B
 est de D, moyennant que A & B soient
 plus petits que C, & D comme en la

A.. 2 F.. 2 H

B..... 6

C..... 5 G..... 5 I

D..... 15

precedente.

Qu'il ne soit ainsi, soit diuisé A en AF, & FH parties de B, & C en CG, & G I parties de D, par l'hypotese AH sera diuisé en autant de parties que CI, estant A telles parties de B que C de D. Ainsi AF sera telle partie de B que CG, de D. Par la diuision. Et par la 9. p. 7. AF sera telle ou telles parties de CG, en changeant, que B est de D. Mais AF, & FH estans egaux comme CG, & GI, FH sera telle ou telles parties de GI, que AF, de CG: & par la 6. p. 7. les deux AH seront telles parties des deux CI que AF est de CG. Mais AF est telles parties de CG que B est de D, & par consequent AH sera telles parties de CI que B est de D, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XI.

Si le tout est au tout comme le retranché, au retranché, le reste sera au reste comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD, comme le retranché AF est au retranché CG, le reste FB sera au reste GD comme le tout au tout.

A ... 3 F ... B
C G D

Car puis que AB est à CD, comme AF, à CG, AB sera telle ou telles parties de CD que AF de CG, & le reste FB sera telle ou telles parties du reste GD, que le tout du tout par la 7. & 8. p. 7. & par la 20. d. 7. les proportions seront semblables.

PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportionaux: comme l'un des antecedens sera à l'un des consequens. ainsi tous les antecedens seront à tous les consequens.

Soient 4. nombres proportionaux ABCD: c'est à sçauoir qu'il y ait telle proportion de A, à C, que de B à D, A, & B, les deux antecedens ensemble seront aux deux consequens ensemble C, & D, comme A l'un des antecedens à C l'un des consequens.

A 9
B 6
C ... 3
D ... 2

Qu'il ne soit ainsi, puis que les 4. nombres sont proportionaux, par la 20. d. 7. D sera telle, ou telles parties de B que C de A. Et par la 5. ou 6. p. 7. A, & B ensemble seront telle ou telles parties de C, & D ensemble qu'est A de C, & par la 20. d. 7. conuertie, ce sera vne mesme proportion.

PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionaux, aussi en changeant ils seront proportionaux.

Soient 4. nombres proportionaux A, B, C, D, sçauoir qu'il y ait telle raison

de A, à B que de C, à D, le dis que en changeant il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

Car puis qu'ils sont proportionaux par la 20. d. 7. B sera telle ou telles parties de A que D est de C, & par la 9. ou 10. p. 7. C sera telle ou telles parties de A que D est de B, & par la 20. d. 7. conuertie, ce sera vne mesme proportion.

A 12
B 8
C 9
D 6

PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra d'un costé, & autant d'un autre sont de 2. en deux en mesme raison, iceux en raison egalle seront proportionaux.

Soient d'une part trois nombres A, B, C, & autant d'autre part DFG, & que de deux en deux, il y ait telle raison de A à B que de D, à F, & de B à C que de F à G. En raison egalle, il y aura telle raison de A, à C que de D à G.

A 9
B 6
C ... 3
D 6
F 4
G .. 2

Car par la 13. p. 7. A est à D, comme B à F, & B à F, comme C à G, & par la 11. p. 5. A sera à D, comme C, à G, & en changeant A sera à C, comme D à G par la mesme 13. p. 7. ce qu'il falloit prouver.

PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre, autant de fois qu'un tiers mesure un quart, aussi en changeant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois B que C mesure D. le dis que en changeant E mesurera D comme A mesure C.

A . I
B . I F . I G . I H
C .. 2
D .. 2 I .. 2 K .. 2 L

Car par l'hypothese B estant diuisé par vnité, & D par la partie de C, icelle partie C sera autant de fois en D comme A en B, & chacune partie de D sera égale à C comme chacune de B à l'vnité, donc l'vnité BF, est la partie DI, comme FG à IK, & GH, à KL, donc toutes les antecedentes BH seront à toutes les consequentes DL, comme BF à DI, ou leur egalle A à C, par la 12. p. 7. ce qui estoit à prouver.

PROP. XVI.

R. III.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produits seront egaux entre eux.

Soient deux nombres A, & B, & que A multipliant B produise C, & B multipliant A produise D. Je dis que iceux deux produits sont egaux entre eux

Car A multipliant B produit C, B sera autant dans C, que l'unité est en A, par la 15. d. 7. & par la 15. p. 7.

en changeant A sera autant de fois dans C que l'unité est en B. Item B, multipliant A, & produisant D, A sera autant de fois dedans D qu'il y a d'unités en B par la mesme 15. d. 7. & nous auons prouvé que A estoit autant en C, que l'unité en B, donc A est autant en C ou D que l'unité en B, ainsi C, & D seront egaux par la 9. p. 5.

Unité.

A ... 3. B 4
C 12
D 12

PROP. XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produits seront entre eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A multipliant B, & C. Je dis que les deux produits D, & F, sont entre eux, comme B, à C.

Car par la 15. d. 7. B multiplié par A est autant de fois dans son produit D, que l'unité est en A, & C dans son produit F, comme la mesme unité en A: par conséquent telle raison de l'unité à A que de B, à D & telle raison de l'unité à A que de C à F, & par la 11. p. 5. B sera à D, comme C à F, & en changeant par la 13. p. 7. D sera à F comme B, à C.

Unité.

A .. 2
B ... 3 C 4
D 6
F 8

PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre: les produits seront entre eux en mesme raison que les multiplians.

Soient deux nombres A, & B multiplians C, & soient les deux produits D, & F. Je dis qu'iceux D, & F seront l'un à l'autre comme A est à B.

Car A multipliant C produit D, aussi C, multipliant A produira D par la 16. p. 7. Le mesme se dit de B, C, F, ainsi A, & B multipliant C c'est comme si C multiplioit A, & B. Or C multipliant A, & B les deux produits D, & F seront l'un à l'autre comme A est à B, par la 17. p. 7. ce qui estoit à prouver.

A ... 3 B 4
C .. 2
D 6 F 8

PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux, le produit du premier, & quart sera egal au produit du second, & tiers. Et si le produit du premier, & quart est egal au produit du second & tiers, iceux quatre nombres sont proportionnaux.

Soient 4. nombres proportionaux A, B, C, D, & que le premier A multiplié par le dernier D produise F, & le second B par le tiers C produise G. Je dis que F, & G sont egaux.

A	6	B	4
C ...	3	D ..	2
F	12		
G	12		
H	18		

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A, par C, & le produit soit H d'autant

que A multipliant C, & D, produit, F, & H, il y aura telle raison de F, à H que de D à C par la 17. p. 7. Pareillement C multipliant A, & D produit G, & H, il y aura telle raison de G à H que de B à A, par la 18. p. 7. ou de D à C qui sont en mesme raison que B, & A. Mais F, & H sont comme D à C, & par consequent F, & H seront comme G, & H, ainsi F, & G auront mesme raison à H l'un comme l'autre, & par la 9. p. 5. égaux.

Pour la seconde partie soit F produit de D multiplié par A egal à G produit de C multiplié par B. Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si H est produit de C multiplié par A, F, & G égaux auront mesme raison à H, par la 7. p. 5. Mais il y a telle raison de H à G, comme de A à B, par la 18. p. 7. & telle raison de H à F, comme de C à D, par la 17. donc par la 11. p. 5. A sera à B, comme C, à D, ce qu'il failloit prouver.

PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extremes est egal au produit du milieu, & au contraire.

Campanus dict que ceste prop. n'est d'Euclide, & quelle se peut demonstrier ainsi que la precedente en posant le second, & tiers nombres égaux, à ces deux respondent la 16. & 17. p. 6.

PROP. XXI.

Les plus petits nombres selon quelque raison mesurent

tous autres nombres qui sont en mesme raison, sçavoir le plus petit, le plus petit, le plus grand, le plus grand.

Soient deux nombres les plus petits en leur raison A & B, & deux autres C & D en mesme raison qu'iceux A, & B. Ie dis que de mesme façon que A mesure C, aussi B mesure D.

A 3 B 4
C 6 D 8

Car puis que iceux A, B, C, D sont proportionaux, ils le seront aussi en changeant par la 13. p. 7. A sera donc à C, comme B, à D, & par la 20. d. 7. ils seront les mesme parties ou parties. No ta que si cest soient parties A, & B ne seroient les plus petits.

PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un costé, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en mesme raison, la proportion estant troublée, en raison egalle, ils seront proportionaux,

A 4 B ... 3 C .. 2
D 12 F 8 G 6

Soient trois nombres d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D F G, & que en proportion troublée A soit à B comme F à G, & B à C, comme D à F. Ie dis que en raison egalle A sera à C, comme D à G.

Car A estant à B, comme F à G. le produit de A multiplié par G sera egal au produit de B multiplié par F par la 9. p. 7. Item B estant à C, comme D à F. Le produit de B multiplié par F sera egal au produit de C multiplié par D, par la mesme prop. & par la premiere com. sent. le produit de A par G sera egal au produit de C par D, & par la 19. p. 7. Il y aura telle raison de A, à C comme de D à G.

PROP. XXIII.

Les nombres premiers entre eux, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

Soient deux nombres premiers entre eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

A 6 B 5
C 4 D ... 3 F .. 2

Car s'il n'est ainsi. Soient C, & D plus petits en la mesme raison s'il est possible, par la 21. p. 7. ils mesureront A, & B l'un comme l'autre: qu'ils mesurent donc par le nombre F, donc F sera comme mesure entre A, & B, ainsi ils ne seroient

seroient point premiers entre eux contre l'hypotese, ils sont donc aussi les plus petits de ceux qui sont en mesme raison.

PROP. XXIII.

Les plus petits nombres d'une mesme raison sont premiers entre eux.

Soient les mesmes nombres A, & B les plus petits d'une mesme raison. Je dis qu'ils sont premiers entre eux.

A 6 B 5
C D ... 3 F ... 2

Autrement s'ils ne sont premiers que F, les mesure tous deux s'il est possible A par C & B par D. Il y aura telle raison de A à B, comme de C à D, par la 17. p. 7. Mais C, & D estans plus petits que A, & B, il s'ensuyura que A, & B seroient pas les plus petits d'une mesme raison.

PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entre eux, celuy qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Ceste proposition est aisée: car s'il n'estoit premier à l'autre il seroit composé, ainsi il les mesurerait tous deux, & par consequent ils ne seroient pas premiers.

PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cet autre.

Soient deux nombres A, & B, tous deux premiers, à C, & A multiplié par B produise D. Je dis que D est premier à C.

A .. 2 B ... 3 C 5
D 6 F .. 2 G ... 3

Autrement si D & C ne sont premiers entre eux, qu'ils soient composez, & que F les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre G. F par G sera egal à D, comme aussi A par B, ainsi AB, & FG seront proportionaux par la 19. p. 7. Itē A, & C sont premiers, mais F mesurant C sera premier à A, par la 25. p. 7. & par la 23. p. 7. A & F estant premiers, ils seront les plus petits de leur proportion, ainsi ils mesureront B, & G qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera G, & F, B. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, contre la prop.

PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un d'eux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A, & B, & que A multiplié par soy produise C. Ie dis que B, & C sont premiers. $A \dots 3 \quad B \dots 4$
 $C \dots 9 \quad D \dots 3$

Car si on on prend D, égal à A, B sera premier à D, & A, & A multiplié par D, produira le mesme C premier à B, par la 26. p. 7.

PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres, leurs produits seront premiers entre eux.

Soient deux nombres A, & B premiers à deux autres C, & D, & que F soit le produit de A multiplié par B, & G produit de C multiplié par D. Ie dis que F, & G sont premiers entre eux. $A \dots 2 \quad B \dots 4$
 $C \dots 3 \quad D \dots 5$
 $F \dots 8 \quad G \dots 15$

Car A, & B estans premiers à C, leur produit F sera aussi premier à C, par la 26. p. 7. D est aussi premier à F par le mesme discours, & par la mesme 26. p. 7. G sera premier à F.

PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entre eux sont multipliez chacun par soy, leurs produits seront premiers entre eux. Et si iceux deux produits sont encores multipliez par les nombres premiers, les produits seront encores premiers entre eux.

$A \dots 2 \quad B \dots 3$
 $C \dots 4 \quad D \dots 9$
 $E \dots 8 \quad G \dots 27$

Soient deux nombres premiers entre eux A, & B, lesquels multipliez chacun par eux A produise C, B produise D. Ie dis que C, & D seront premiers entre eux. Item si A multipliant C produise F, & B multipliant D produise G, F

& G seront premiers entre eux, & ainsi à l'infini.

Car par la 27. p. 7. A, & B estans premiers, C produits de l'un multiplié par soy, sçavoir A sera premier à B restant; par la mesme raison D sera aussi premier à C, estant B & C premiers. Or A, & C estans premiers à B, & D leurs produits F & G, seront aussi premiers entre eux par la 28. p. 7.

PROP. XXX.

Si deux nombres premiers entre eux sont adioustez ensemble, le produit sera premier à tous deux: & si le produit est premier à iceux deux nombres, ils seront premiers entre eux.

Soient deux nombres premiers entre eux AB, & BC. Je dis que le composé des deux AC sera premier à tous deux.

A ... 3 B 4 C
D .. 2

Autrement s'ils ne sont premiers soit D leur commune mesure, si donc D mesure le tout AC, & la partie AB, il mesurera aussi le reste BC, ainsi AB, & BC ne seroient premiers entre eux contre l'hypotese.

Secondement si le tout AC est premier à D, & à BC, AB, & BC seront premiers entre eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers, il mesurera aussi le composé des deux AC, ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC.

PROP. XXXI.

Tout nombre premier est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Ceste p. est aisée à demonstrier, car s'ils n'estoient premiers, ils auroient vne commune mesure autre que l'unité, ainsi pas vn des deux ne seroient premiers contre l'hypotese.

PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un d'iceux deux nombres.

A ... 4 B 6
C 24 D ... 3 F 8

Soit C produit de A multiplié par B, & que D nombre premier le mesure,

S ij

A 4 B 6

C 24 D ... 3 F 8

Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre de A ou B.

Autrement s'il ne mesure pas un qu'il mesure C par le nombre F, donc s'il ne mesure A, par la 31. p. 7. il sera premier à iceluy, & par la 23. p. 7. ils seront les plus petits de leur proportion. Mais pour autant que D par F fait C aussi bien que A multiplié par B, par la 19 p. 7. A sera à D, comme F, à B, & par la 21. p. 7. D mesurera B, ce qui estoit à prouver.

PR OP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par un nombre premier.

Cette demonstration est évidente par la deff. du nombre composé : car tout nombre composé a un nombre qui le mesure, lequel est premier ou non : s'il n'est premier, il sera mesuré par un autre nombre, lequel sera premier ou non, ainsi on viendra jusques à un nombre premier, lequel mesurant le mesureur, mesurera aussi le mesuré.

BR OP. XXXIII.

Tout nombre est 1. ou bien mesuré par un nombre premier.

Cette demonstration est aussi évidente : car si un nombre n'est premier, il est composé, & par la 23. p. 7. tout nombre composé est mesuré par un nombre premier.

PROP. XXXV.

A tous nombres donnez trouver les plus petits de la même raison.

Soient les deux nombres A & B, auxquels il faut trouver les plus petits en la même raison.

Si A & B sont premiers entre eux, on a ce que l'on cherche, par la 24. p. 7. s'ils sont composés, soit trouvé C plus grande commune mesure d'iceux A, & B, par la 2. p. 7. laquelle mesure A, selon D, & B, selon F. Je dis que D, & F sont les plus petits nombres qui sont en la raison de A, & B.

S'il n'est ainsi, Soient G, & H plus petits en la même raison, s'il est possible, & que G mesure A par K, A sera produit de G multiplié par K, lequel étant aussi, le produit de C multiplié par D, par la 19. p. 7. Il y aura telle raison de C à K, comme de G à D, & par conséquent C sera plus petit que K, ainsi C n'estoit

A 6 B 8

C .. 2 D ... 3 F 4

G .. 2 H ... 3 K ... 3

pas la plus grande commune mesure contre l'hypotese, & la 2. p. 7.

PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez, A & B, il faut trouuer le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit mesure le plus grand, iceluy plus grand sera ce que nous cherchons, sinon, ou A & B seront premiers entre eux, ou non, si premiers, Soit C, produit de A multiplié par B. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

A ... 3 B 4
C 12
D 10
F... G ..

S'il n'est ainsi. Soit D plus petit nombre mesuré par A, & par B s'il est possible, & selon F, & G par la 19. p. 7. A sera à B, comme G à F, par ce que leurs produits sont egaux. Item A, & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur proportion: par la 23. p. 7. & A mesurera G, par la 21. p. 7. & d'autant que B multiplie A produit C, & multipliant G produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à G. Mais nous auons montré que A mesuroit G, donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qu'est impossible.

Soient donc les deux nombres A, & B composez, & par la 35. p. 7. soient trouuez C, & D les plus

petits nombres de la mesme proportion, par la 19. p. 7. F produit de A multiplié par D, sera egal au produit de B multiplié par C, ainsi F sera mesuré par B, & par A, & par le mesme impossible de la precedente demonstration, on montrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre: le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B qui mesurent vn autre DG, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit C. Je dis que C mesurera aussi DG.

A .. 2 B ... 3 C 6
D 4 F 8 G

Autrement si C ne mesure DG, apres auoir mesuré FG qu'il laisse DF plus petit que soy: A, & B mesurans C, ils mesureront aussi FG: Mais ils mesurent le tout DG, ils mesureront le reste DF plus petit que C, ce qui est impossible estant le plus petit qu'ils mesurent.

PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

A ... 3 B 4 C 5

D 12

F 60

G 59

Soient trois nombres donnez A, B, C, ausquels, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

Soit trouué D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B, par la 36. p. 7. si C mesure aussi D, on aura ce qu'on demande, sinon par la mesme 36. p. 7. soit trouué F plus petit nombre mesuré par C, & D. Je dis que F sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement F est mesuré par A, par B, par C, d'autant que C, & D, le mesurent, & A, & B mesurant D, mesureront aussi F mesuré par D. Que si F n'est le plus petit mesuré par A, par B, par C, soit G plus petit s'il est possible, A & B donc mesurant G, D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi G, par la 37. p. 7. Mais C mesure aussi G : car A, B, & C le mesurent, donc C, & D mesureront G. Et par la 37. p. 7. F plus petit mesuré par C, & D mesurera aussi G le plus grand vn plus petit qui est impossible, donc F estoit le plus petit mesuré par A, B, C.

PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre, le mesuré aura vne partie denommée par le mesurant.

Cette proposition veut dire que *vnité*. A ... 3 B ... 6 C ... 2 tout nombre mesuré par 3 à troisieme par 4. à quatriesme, &c. comme si A mesure B, iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'ynitez en C, par la 15. p. 7. C mesurera B, autant de fois que l'vnité A, & C sera telle partie de B quel'vnité de A. Mais par ce quel'vnité est telle partie de tout nombre, qu'iceluy nombre denommé, ainsi C sera telle partie de B denommée par A.

PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie qu'elle elle soit: le nombre nom-

mant ceste partie le mesurera.

C'est à dire que si 9. à trois pour partie que 3. mesurera 9. Or ceste prop. est evidente par la deff. de la partie sans autre demonstration.

PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les parties données.

Soient les parties données A, B, C, que doit auoir le nombre qu'on cherche.

Soient pris les trois nombres denommez par icelles G, H, I, & par la 38. p. 7. soit trouué D, le plus petit nombre qu'ils peuuent mesurer. Je dis que D contient les parties A, B, C ce qui est evident par la 39. p. 7. Je dis aussi que c'est le plus petit qui ait icelles parties par la mesme 38. p. 7.

A deuxiesme G... 2

B tiers — H... 3

C quart. I... 4

D 12

Fin du septiesme Element.



ELEMENT HVI CTIESME

PROP. I.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux, & les extremes sont premiers entre eux ils seront les plus petits de leur raison.

Soient trois nombres continuellement proportionaux A, B, C, & que les extremes A, & C, soient premiers entre eux. Je dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la mesme raison. A. 4. B. 6. C. 9. D. 3. F. 5. G. 8.

Autrement soient D, F, G, plus petits en la mesme raison s'il est possible, en raison egalle D, sera à G, comme A est à C par la 14. p. 7. & par ce que A, & C sont premiers entre eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21 p. 7. ils mesureront D, & G, ce qui est impossible pour estre plus petits que iceux. Donc A, B, C estoient les plus petits, en la mesme raison.

PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, les plus petits en la raison donnée.

Soient

Soient les deux nombres A, & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison, il faut trouver le requis.

G. 8.

Que A multiplié par soy produise C, A par B produise D, B par soy produise F. Je dis premierement que C, D, F sont continuellement proportionaux en la raison de A à B, par la 17. & 18. p. 7. & parce que A & B sont premiers aussi par la 29. p. 7. C, & F seront premiers: & par la 1. p. 8. C, D, F, seront les plus petits en la raison donnée.

C. 4.

A. 2.

H. 12.

D. 6.

B. 3.

I. 18.

F. 9.

K. 27.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise G, A par D produise H, B par D produise I, B par F produise K: Je dis que G H I K sont les nombres requis. Car par le mesme discours de la, 17. & 18. p. 7. Les 4. nombres seront continuellement proportionaux & par la 29. p. 7. G & K seront premiers entre eux: & par la 1. p. 8. Ils seront les plus petits qui ayent mesme raison avec iceux. Et en ceste façon on en trouvera tant que l'on voudra.

PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportion. sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: Les extremes seront premiers entre eux.

Soiét quatre nombres continuellement proportionaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D: Je dis que les extremes A, & D sont premiers entre eux.

A. 8.

L. 8.

H. 4.

B. 12.

F. 2.

M. 12.

I. 6.

C. 18.

G. 3.

N. 18.

K. 9.

D. 27.

O. 27.

Qu'il ne soit ainsi. Il faut prendre les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçavoir F, & G, ils seront premiers entre eux, par la 23. p. 7. & comme il a été enseigné en la precedente, soient trouvez quatre nombres continuellement proportionaux & les plus petits en la raison de F à G, sçavoir premierement les trois H, I, K. Puis après les quatre L, M, N, O. Iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extremes L, & O sont premiers entre eux, aussi seront A, & D.

PROP. III.

Estant données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons, trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionaux, selon les raisons données.

T

Soient données les deux raisons de A à B & de C à D. A. 2.
aux plus petits termes d'icelles, il faut trouver trois nom-
bres en continuelle proportion, les plus petits de ceux B. 3.
qui sont selon les raisons données.

G. 8. L. 7.
F. 12. M. 11.

Soit trouvé F, le plus petit nombre qui soit mesuré par C. 4.
B, & par C, par la 36. p. 7. en apres soit tronné G, autāt
de fois mesuré par A, que F, par B. Pareillement H autāt D. 5.
de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont les
nombres requis.

H. 15. N. 13.

Car on prouvera qu'ils sont continuellement proportionnaux en la raison
donnée par la 18. p. 7. d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F:
& que par conséquent que G est à F, en même raison que A à B. Et par même
discours que F sera à H, comme C à D.

On prouvera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les raisons données, d'au-
tant que s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible,
& qui respondent aux raisons données comme les trois F, H, G, il est evident
que B, & C doivent mesurer M, à cause des semblables raisons, par la 21. p. 7.
Mais F est le plus petit nombre mesuré par B, & par C, & par la 37. p. 7. F me-
surerà M, le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Partant G, F, H, e-
stient les plus petits selon les raisons données.

Que si trois raisons estoient données aux pus pe-
tits termes, selon lesquelles il fallut trouver quatres
nombres tels que requier la proposition: on procé-
dra en ceste sorte.

A. 2. I. 8. M. 16.

B. 3. H 12. N. 24.

Soient trouvez les trois nombres I, H, k, comme
dessus. Je dis que ou F mesure K: ou non. S'il le me-
sureroit faudroit prendre L autāt de fois mesurée par
G, que K par F. & par la precedente demonstration,
il est evident qu'on auroit satisfait. Que si F ne me-
sure k, soit trouvé O le plus petit nombre mesuré
par F, & par k, par la 36. p. 7. Et que G mesure autāt de fois P que F mesure O.
Item que comme k mesure O, ainsi H mesure N, & I mesure M. Je dis que M,
N, O, P sont les quatre nombres requis.

C. 4. k. 16. O. 30.

D. 5. F. 6. L. P. 35.

G. 7.

La demonstration se fera de même que la precedente.

PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en raison composée
de leurs costez.

Soient les deux nombres plans B, & C, les costez de B
soient D, & F, & les costez de C, soient G, & H. Je dis
que le plan B est au plan C, en raison composée de D à F,
& de G à H.

D. 5.
B. 12.
E. 4.

A. 8.

Qu'il ne soit ainsi. Que F multiplié par G produise A.
Donc F multipliant D & G, produira B & A en même
raison que D & G, par la 17. p. 7. Et par la même G mul-

G. 2.
C. 18.
H. 6.

ripliant F & H, produira A & C en mesme raison que F & H: ainsi la raison de B à A, & de A à C, sera comme de D à G, & de F à H. Et par la 5. d. 6. La raison de B à C estant composée de B à A & de A à C, la raison du nombre plan B au nombre plan C sera composée de la raison des costez D à G, & F à H.

PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux: Et que le premier ne mesure le second: ny pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, B, F. 4. G. 6. H. 9. C, D. Et que le premier A, ne mesure point le second B. Je dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

Car premierement, comme A ne mesure point B, ainsi B ne mesurera C, ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison, que si on vouloit dire que en passant quel que vn, les extremes se pourroient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C, Soiet trouuez trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A, B, C par la 37. p. 7. ainsi A estant à B comme F à G, & comme B à C, ainsi G à H: en raison egale A sera C comme F à H par la 14. p. 7. & comme F ne mesure point H estant iceux premiers par la 1. p. 8. aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on drouuera de tous les autres.

PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux A, B, C, D, A. 3. B. 6. C. 12. D. 24. & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car si A ne mesureroit B, aussi pas vn autre ne mesurerait pas vn autre, & par consequent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothese. La conclusion est aisee.

PROP. VIII.

Si entre deux nobres, tombent quelques nombres moyens proportionaux, il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & D, entre lesquels tombent B & C continuellement proportionaux : & qu'il y ait telle raison de k à N, que de A à D. Je dis que entre k, & N se trouveront deux nombres moyens continuellement proportionaux.

A. 3. F. 1. K. 2.
B. 9. G. 3. L. 6.
C. 27. H. 9. M. 18.
D. 81. I. 27. N. 54.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les quatre nombres F, G, H, I, continuellement proportionaux, & les plus petits en la raison de A, B, C, D: en raison égale comme sera A à D, ainsi F à I par la 14. p. 7. & par mesme discours, comme k à N, ainsi F à I. Mais F & I sont premiers entre eux, par la 3. p. 8. & par la 21. p. 7. F & I mesureront K & N. Que si on trouue L, & M autant mesurez par G & H, que K est mesuré de F, ou N, de I, comme F mesurera k, ainsi G mesurera L. H mesurera M, I mesurera N: & par la 20. d. 7. les 4. nombres k, L, M, N, seront continuellement proportionaux, comme F, G, H, I & partant L & M sont les deux nombres moyens tombans continuellement proportionaux entre k & N.

PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entre eux, autant de nombres continuellement proportionaux qui tomberont entre iceux: autant en tombera-il entre chascun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entre eux N, & Q, entre lesquels tombent deux nombres continuellement proportionaux O & P: Je dis que entre chascun d'iceux, & l'vnité, il en tombera deux continuellement proportionaux.

H. 8. N. 8.
G. 4.
B. 2. I. 12. O. 12.
A. 1. D. 6.
C. 3. K. 18. P. 18.
F. 9.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité A, puis B & C les plus petits nombres qui soient en la raison de N, O, P, Q, par la 35. p. 7. & par la 2. p. 8. soient trouvez les trois G, D, F, puis les quatre H, I, K, L, D'autant que les quatre nombres N, O, P, Q, sont égaux en nombre aux quatre H, I, K, L, & chascun les plus petits d'une mesme raison, ils seront égaux chascun au sien, Et si il est euident que B multipliant G, & produisant H par la 15. & 20. d. 7. l'vnité A sera à B multipliant, comme G multiplié à H produit: Item que B se multipliant soy mesme, & produisant G, l'vnité A sera à B multipliant, comme B multiplié à G produit: Et les quatre nombres A, B, G, H, ou N son egal, seront continuellement proportionaux: & entre l'vnité A, & N, tomberont B, & G. Par mesme discours A, C, F, L, ou Q son egal se trouveront continuellement proportionaux, C & F estans ceux qui tomberont continuellement proportionaux, entre l'vnité A, & le nombre Q.

PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionaux entre l'vnité, & chacun de deux nōbres proposez: autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient les deux nombres proposez K, & N, & que entre l'vnité A, & chacun d'iceux, tombent deux nombres continuellement proportionaux, comme B & G, entre A & k: Item C, & H, entre A & N. Je dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionaux entre K, & N.

K. 27.
G. 9.
B. 3.
L. 36.
A. 1.
F. 12.
C. 4.
M. 48.
H. 16.
N. 64.

Car si on acheue à multiplier par la 2. p. 8. pour trouuer les trois nombres, F, L, M, c'est à sçauoir que F, soit le produit de B multiplié par C: L, le produit de B, par F: & M, le produit de C par F. Puis que comme A à B, ainsi B à G, & G à k: comme A vnité mesure B, par les vnitez qui sont en B, ainsi B mesurera G, par les vnitez qui sont en B, & G mesurera K, par les mesmes vnitez de B, ainsi il est euident que B multiplié par soy-mesme produit G, & G multiplié par B, a produit K. Par mesme discours se prouuera que C par soy-mesme, a produit H, & que C par H, a produit N.

Maintenant puis que B multiplié par soy-mesme, & par C, a produit G, & F, par la 17. p. 7. comme B à C, ainsi G à F. Pareillement C, multiplié par B, & par soy-mesme produit F, & H: F aussi sera à H comme B à C: Et les trois nombres G, F, H, seront en continuelle proportion. D'auantage B multipliant G, & F, produit K, & L, comme G sera à F, ainsi K sera à L: & puis que B, & C multiplient F, & produisent L & M, L sera à M, comme B à C. Par mesme discours M sera à N à la mesme raison, estans les produits, de F, & H multipliez par C: le tout par la 17. & 18. p. 7. Il est donc euident que K, L, M, N, sont continuellement proportionaux, & que partant L, & M sont tombez en continuelle proportion entre K, & N.

PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez, tombe vn moyen proportionel, & le quarre est au quarre en raison doublee du costé au costé.

Soient deux nombres quarrez C & F desquels les costez soient A & B. Je dis que entre iceux tombera vn moyen proportionnel.

C. 9.
A. 3.
D. 12.

Car puis que A est le costé de C, A multiplié par soy-mesme produira C: pareillement B multiplié par soy-mesme produira F.

B. 4.
F. 16.

F. Maintenant soit trouvé D, produit de A multiplié par B: Et par la 17. p. 7. comme A à B, ainsi C à D & D à F. Partant D est le moyen proportionnel entre C & F.

Pour la seconde partie, il est évident que le carré C, est au carré F, en raison doublée du côté A au côté B. Car C, D, F estans continuellement proportionaux, C est à F en raison doublée de C à D par la 10. d. 5. qui est la même raison de A à B.

PROP. XII.

Entre deux nombres cubes, tombent deux moyens proportionaux: & le cube est au cube en raison triplee, du côté au côté.

Soient les deux nombres cubes G, & K, desquels les costez soient A & B. Je dis que entre iceux tomberont deux moyens proportionaux.

Qu'il ne soit ainsi. Que A se multipliant soy-même produise C: A par B produise D: B par soy produise F, & que A par D produise H: B par D produise I: & puis que G, & K sont cubes, ils seront les produits de A multiplié par C, & de B multiplié par F: il est donc évident que la construction est semblable à celle de la 2. p. 8. & par la demonstration de la même G, H, I, K seront continuellement proportionaux selon la raison de A à B. Partant H & I seront les deux moyens proportionaux.

Quant à la seconde partie, que le cube G, est au cube K en raison triplee de A à B, ou G à H: (car c'est la même raison) cela est clair par la 10. d. 5.

PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra, sont continuellement proportionaux, iceux estans multipliez chascun par soy leurs produits seront continuellement proportionaux: & si chascun multiplie encores sont produit, les derniers produits seront continuellement proportionaux: & cela aduendra toujours aux derniers.

Soient trois nombres continuellement proportionaux A, B, C: Et que iceux se multiplians chascun par soy produisent D, F, G. Item que les mesmes multiplians chascun son produit facent K, N, Q. Je dis que D, F, G, & K, N, Q, sont entre eux continuellement proportionaux.

Qu'il ne soit ainsi: Que R soit le produit de A multiplié par B: & S, de B par C: Pareillement que L soit le produit de A par R, M de A par F, O de B par S, P de B par G: par la 17. p. 7. A, se multipliant, & multipliant B, les produits D & R seront en la mesme raison de A à B: & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produits R, & F seront aussi en la mesme raison & ainsi des autres: Partant D, R, F, S, G, seront continuellement proportionaux en la raison de A à B, & en raison egalle D, F, G, seront continuellement proportionaux.

Pareillement, A, B, C, multiplias D, R, F, S, G, produisent K, L, M, N, O, P, Q, & par la 17. & 18. p. 7. K, L, M, N, O, P, Q, seront aussi continuellement proportionaux en les prenans de deux en deux, & en raison egalle en soustrayant L & M, O, & P: K, N, Q, seront continuellement proportionaux.

P R O P. XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé mesurera le costé que si le costé mesure le costé aussi le quarré mesurera le quarré.

Ceste demonstration est aisée, d'autant qu'entre deux nombres quarez y a vn moyen proportionel, & le quarré est au quarré en raison doublée du costé au costé, par la 11. p. 8. c'est à dire que le costé est au costé, commel'vn des quarez est au moyen proportionel partant d'autant que iceluy quarre mesurera le moyen proportionel par la 7. p. 8. aussi le costé mesurera le costé. Pour la seconde partie. Si le costé mesure le costé aussi le quarré mesurera le moyen proportionel, & le moyen proportionel d'autre quarré, & par consequent le quarré mesurera l'autre quarré, prace que qui mesure le mesureur mesure aussi le mesuré.

P R O P. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube, aussi le costé mesurera le costé: & si le costé mesure le costé aussi le cube mesurera le cube.

Ceste demonstration est aussi aisée comme la precedente: d'autant que entre deux cubes y a deux moyens proportionaux. Et puis que le cube est au cube en

raison triplée du costé au costé, par la 12. p. 8. c'est à dire que le costé est au costé comme l'un des cubes est à son prochain moyen proportionnel, lequel il mesurera par la 7. p. 8. & par consequent le costé mesurera le costé. La seconde partie se demonstrera comme en la precedente en prenant la raison triplée pour la doublée.

PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Ceste demonstration se fait par l'impossible de la 14. p. 8. Car si le costé mesuroit le costé, aussi le quarré mesurerait le quarré.

PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn nombre cube, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé aussi le cube ne mesurera le cube.

Ceste demonstration se fait aussi par l'impossible de la 15. p. 8. Car si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesurerait le cube.

PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plan en raison doublée du costé de semblable raison au costé de semblable raison.

Soient les deux nombres plans semblables, F, duquel les costez A, B, & H, duquel les costez C, D. Je dis qu'entre iceux F & H se trouuera vn moyen proportionnel, & que F est à H en raison doublée de A à C.

Car puis que les plans F & H sont semblables, A sera à B comme C à D, & si F sera le produit de A par B. Item H le produit de C par D, par la 17. d. 7. Maintenant que B multipliant C produise G, par la 17. p. 7. puis que B multiplie A & C produise F, & G, F sera à G, comme A à C. Item C multipliant B, & D produise G & H, iceux seront l'un à l'autre comme B à D ou A à G, ainsi F, G, H seront continuellement proportionaux, & G, sera le moyen proportionnel,

La seconde partie est aisée. Car F est à H en raison doublée de F à G qui est la mesme raison que de A à C, costez de semblable raison.

PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, y a deux moyens proportionaux: & le solide est au solide, en raison triplée du costé de semblable raison, au costé de semblable raison.

Soient les deux solides semblables L, duquel les costez soient A, B, C, & O, duquel les costez soient D, F, G. Je dis que entre L, & O, on trouuera deux moyens proportionaux, & que L est à O en raison triplée de A à D.

L. 24. A. 2.

H. 6. B. 3.

M. 48. C. 4.

I. 12.

N. 96. D. 4.

K. 24. F. 6.

O. 192. G. 8.

Qu'il ne soit ainsi. Que H soit produit de A multiplié par B, I produit de B par D, K produit de D par F, M produit de C par I, & N produit de G par I. Maintenant puis que A, B, C, sont l'un à l'autre comme D, F, G, aussi en changeant, comme A sera D, ainsi B sera à F, & C à G: Et puis que B multipliant A & D produit H & I, iceux H & I seront l'un à l'autre comme A à D par la 17. p. 7. Par mesme discours D multipliant B & F, produit I & K, iceux seront aussi l'un à l'autre comme B à F, c'est à dire en mesme raison: ainsi il est evident que H, I, K sont continuellement proportionaux en la raison de A à D. Pareillement, puis que le solide L est le produit des trois nombres A, B, C & H, le produit de A & B, aussi L sera le produit de H par C: & par mesme discours O sera le produit de G par K, & par la 17. p. 7. C multipliant H, & I, produit L & M, en la raison de H à I: & par mesme discours I, multipliant C, & G produit M & N en la raison de C à G, qui est la mesme de H à I, aussi G, multipliant I, & K, les produits N & O seront aussi en la raison de I à K. Et partant les quatre nombres L, M, N, O sont continuellement proportionaux, & M, & N seront les deux moyens.

Pour la seconde partie elle est evidente, puis que les quatre nombres ont esté prouuez continuellement proportionaux en la raison de A à D (estant L à O en raison triplée de L à M par la 10. d. 5.) & L à M comme à A à D.

PROP. XX.

Si entre deux nombres tombe vn moyen proportionel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient les deux nombres A, & C, entre lesquels tombe B, moyen proportionel: Je dis que A & C sont nombres plans semblables. A. 12. D. 6. G. 2. B. 18. F. 9. H. 3.

Qu'il ne soit ainsi. Soient pris G, & H les plus petits termes en la raison de A à B; iceux G, & H mesureront A & B l'un comme l'autre, par la 21. p. 7. Ils mesureront aussi B & C, qui sont en la mesme raison. Donc que G mesure les nombres A, & B selon le nombre D, & que H mesure B, & C selon le nombre F: D & F, seront en mesme raison que G & H, & par les deff. du 7. A, estant le produit de G par D, & C le produit de H, par F, iceux A & C seront plans semblables.

PROP. XXI.

Si entre deux nombres tombent deux moyens continuellement proportionaux: iceux seront nombres plans semblables.

Soient les deux nombres L & O, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionaux M & N. Je dis qu'ils sont nombres solides semblables. A. 2. L. 16. B. 2. H. 4. M. 24. C. 4. I. 6. D. 3. N. 36. F. 3. K. 9. G. 6. O. 54.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez trois nombres H, I, k, les plus petits en la raison de L à M, par la 2. p. 8. par la precedente 20. p. 8. H & K seront plans semblables. Soient leurs costez A, B & D, F, lesquels seront proportionaux par les definitions de ce liure, & puis que H, I, k, sont les plus petits en la raison que L, M, N, ils les mesureront egallement par la 21. p. 7. soit selon le nombre C: c'est à dire que H, I, k, estans multipliez par C produisent L, M, N: Item par le mesme discours H, I, k, mesureront egallement les trois nombres M, N, O, chacun le sien; soit selon le nombre G: c'est à dire que G multipliant H, I, k, produise M, N, O. Il est donc evident, que L & O sont nombres solides, desquels les costez sont A, B, C, & D, F, G, mais pour autant que C, & G multiplians I, produisent M & N: par la 18. p. 7. C sera G en la raison de M à N, qui est la mesme raison de H à I, ou de A à D, ou de B à F, ainsi A, B, C, seront en mesme raison que D, F, G, & par les definitions de ce liure L & O seront nombres solides semblables.

PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit quarré: le troisieme sera aussi quarré.

HVICTIESME.

141

Ceste demonstration est aisee, car par la 20. p. 8. les extremes seront plás semblables & l'un d'iceux quarré, partant aussi l'autre.

PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Ceste demonstration est aisee, car par la 21. p. 8. les extremes seront solides semblables, mais l'un est cube, & partant l'autre.

PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'un d'iceux soit quarré aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aisee, d'autant qu'il y aura un milieu proportionel entre iceux deux nombres, ainsi que entre les quarrés de semblable raison, & par la 20. p. 8. ils seront plans semblables, & par la 22. p. 8. tous deux quarrés.

PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aisee, d'autant qu'il y aura deux moyens proportionels entre iceux deux nombres, ainsi que entre les cubes de semblable raison, & par la 21. p. 8. ils seront solides semblables, & par la 23. p. 8. tous deux cubes.

PROP. XXVI.

Nombres plans semblables sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient les deux nombres plans semblables A & C, & le moyen proportionel entre iceux B, (car il y en doit auoir un par la 13. p. 8.) Je dis que A sera à C comme nombre quarré à nombre quarré.

Car si on prend les plus petits termes de la raison de A

A. 32. D. 9.
B. 40. F. 20.
C. 50. G. 25.

à B : & que en la raison d'iceux, on trouue les trois nombres en continuelle proportion D, F, G, par la 2. p. 8. D & G seront quarez, & si en raison egalle, comme D à G, ainsi A à C.

PROP. XXVII.

Nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient les nombres solides semblables A, & D, & les deux moyens continuellement proportionaux entre iceux B & C (car il y en doit auoir deux par la 19. p. 8.) Je dis que A sera à D, comme nombre cube à nombre cube.

Car si on prend les plus petits termes de la raison de A à B, & que en la raison d'iceux, on trouue les quatre nombres en continuelle proportion F, G, H, I, par la 2. p. 8. F & I seront cubes, & en raison egalle comme F à I, ainsi A à D, ce qui estoit à demonstrier.

A . 16. F . 8.
B . 24. G . 12
C . 36. H . 18.
D . 54. I . 24.

Fin du huitiesme Element.



ELEMENT NEV- FIESME.

PROP. I.

Deux nombres plans semblables, se multiplians l'un l'autre produisent vn nombre quarré.

Ceste demonstration est facile, d'autant qu'entre deux plans semblables y a vn moyen proportionel par la 18. p. 8. duquel le produit, c'est à dire le quarré est egal au produit des extremes par la 20. p. 7.

PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'un l'autre produisent vn nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Ceste demonstration est aussi facile. Car le nombre quarré estant egal au produit de deux autres nombres : iceux avec le costé du quarré seront continuellement proportionaux, & par la 20. p. 8. les extremes qui sont nos deux nombres seront plans semblables.

PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produit fera cube.

Soit le nombre cube B, lequel se multipliant soy mesme produise C. Je dis que C est nombre cube.

Ceste demonstration sera fort aisée, si on prend l'vnité A pour A. 1.
 vn nombre cube. Car puis qu'il y a telle raison de l'vnité A à B mul- B. 8.
 tipliant comme de B multiplié à C produit; & que entre A & B, C. 64.
 tombent deux moyens proportionaux par la 12. p. 8. autant en tombera-il en-
 tre B & C par la 8. p. 8. & par la 21. p. 8. B & C seront plans semblables, & par
 la 23. p. 8. C sera cube.

PROP. III.

Si vn nombre cube, multiplie vn nombre cube, le pro-
 duiet sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube A. 8. B. 27.
 B, produise D: Je dis que D est aussi nombre cube.

Car si on prend C, produit de A multiplié par soy mes- C. 64. D. 216.
 me, par la 3. p. 9. il sera cube, & A multipliant B, & soy il y aura telle raison de C
 à D que de A à B. par la 17. p. 7. Et par la 8. & 12. p. 8. il tombera deux moyens
 proportionaux entre C & D. Et par la 23. p. 8. D. sera cube.

PROP. V.

Si vn nombre cube, multipliant quelque autre n^obre, pro-
 duiet vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube D. produit de A nombre cube A. 8. B. 27.
 multipliant vn autre nombre B: je dis que B multiplié est
 aussi nombre cube. C. 64. D. 216.

Car si on prend C, produit de A multiplié par soy comme en la precedente:
 A sera à B comme C à D, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouveront deux moy-
 es proportionaux, comme entre les deux nombres cubes C & D. Et par la 23. p.
 8. B multiplié sera nombre cube.

PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy mesme produit vn nom-
 bre cube, iceluy nombre sera cube.

Soit B nombre cube produit de A multiplié A. 8. B. 64. C. 512
 par soy mesme. Je dis que A est aussi nombre cu-
 be.

Car si on prend C, produit de A multiplié par B, il sera cube par la 23. p. 8.

tion de nombre cube, & par la 5. p. 9. A sera aussi cube.

PROP. VIII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre, le produit sera solide.

Cette proposition n'a pas besoin de demonstration, car tout nombre composé est le produit de deux nombres. Que si on adiouste le troisieme multiplieateur, le produit sera solide par la 16. d. 7.

PROP. VIII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, le troisieme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn; Mais le quatriesme sera cube, & tous les suiuaus qui en laisseront deux. Et le septiesme sera cube & quarré, & tous les suiuaus qui en laisseront cinq.

Vnité A. B. C. D. F. G.

1 3 9 27 81 243 729

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux de puis l'vnité, A, B, C, D, F, G, Je dis que le troisieme B sera quarré ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre comme D & G: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres comme G. Pareillement que le septiesme G est cube, & quarré ensemble, & autant d'autres qui pourroient suivre en laissant cinq nombres.

Pour la premiere partie, puis que les nombres sont continuellement proportionaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, ainsi chacun mesurera, son suiuant selon les vnitez de A: partant B troisieme qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionaux, & B est quarré aussi D sera quarré. Par mesme discours G sera quarré, & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie, puis que A multiplié par soy produit B, & B par A produit C. Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23. p. 8. C, D, F, G, estans continuellement proportionaux, G sera aussi cube. Ainsi de tous les autres en laissant deux.

Pour la troisieme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que

G a esté prouué & quarré & cube, il en sera ainsi de tous les autres.

PROP. IX.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux; & que celui qui suit l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez: que s'il estoit cube, aussi les autres seront cubes.

<i>V</i> nité	A.	B.	C.	D.	<i>V</i> nité	A.	B.	C.	D.
I.	4.	16.	64.	256.	I.	8.	64.	512.	4096.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité A, B, C, D, le dis que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez: Que si le premier A est cube, que tous les autres seront aussi cubes.

Pour la premiere partie, Il est evident comme en la precedente que puis que les nombres sont continuellement proportionaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera B par les vnitez qui sont en A & par conséquent B sera nombre quarré, mais A est aussi quarré par hypothese, & par la 12. p. 8. C sera aussi quarré & par la mesme raison B estant quarré aussi sera D. Et ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie, Si A est cube aussi tous les autres seront cubes: Car il est evident que A mesurera B par soy mesme comme en la premiere partie: C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3. p. 9. Mais tous les suyans sont en la raison de A à B & par la 25. p. 8. Ils seront tous cubes.

PROP. X.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que celui qui suit l'vnité ne soit nombre quarré aussi pas vn autre ne sera quarre, sinon le troisieme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celui qui suit l'vnité n'est nombre cube, aussi par vn autre ne sera cube sinon le quatrieme depuis l'vnité, & tous les autres, qui en l'ordre en laissent deux.

Soient

Soient tant de nombres *Vnité* A. B. C. D. F. G.
qu'on voudra continuellement proportionaux de 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.
puis l'vnité A, B, C, D, F, G, Et que A qui suit l'vnité ne soit nombre quarré, le
dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisieme
B, ou D ou G en laissant C & F.

Car par la 8. p. 7. B, D, G sont quarez: Que si quelqu'un veut dire qu'il y en
ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fust aussi nombre quarré
(estans C, B, A, continuellement proportionaux & C quarré) ce qui est contre
l'hypotese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre
quarré sinon ceux qui ont esté exceptés.

Pour la seconde partie, si A n'est Cube aussi pas vn autre ne sera cube, sinon
C & G & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8. p. 9. C & G sont cubes, que si quelqu'un veut dire que D soit au-
si cube, Il faudroit par la 23. p. 8. que A le soit, contre l'hypotese. Par meisme de-
duction on monstrera tous ceux qui ne peuuent estre cubes.

PROP. XI.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra conti-
nuellement proportionaux, le plus petit mesure le plus
grand selon quelque vn de ceux qui sont entre les pro-
portionaux.

Soient tant de nombres qu'on voudra cōti- A. B. C. D. F. G.
nuellement proportionaux depuis l'vnité, B, 1. 3. 9. 27. 81. 243.
C, D, F, G: Je dis que B mesurera G par le nombre F.

Ceste demonstration est aisée. Car en raison egalle l'vnité A sera à F comme
B est à G. Et par les deff. du. 7. comme l'vnité A mesure F par E ainsi B mesurera
G par F.

PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra conti-
nuellement proportionaux; Autant de nombres pre-
miers mesureront le nombre d'après l'vnité qu'il y en
aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres A. B. C. D. F. G.
qu'on voudra continuellement proportionaux, 1. 3. 9. 27. 81. 3.
B, C, D, F, Je dis que autant de nombres premiers se trouueront mesurer le der-
nier F, autant mesureront celui qui suit l'vnité B.

Car si G nombre premier mesurant F dernier, ne mesure pas aussi B, B & G seront premiers: Et d'autant que B multiplié par soy produit C, C & G serot premiers par la 26. p. 7. Item B multipliant C produit D, D & G seront premiers par la 27. p. 7. Pareillement B multipliant D produit E, G & F seroient aussi premiers contre l'hypothese: Donc G mesuroit aussi B.

P R O P. XIII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionaux.

Soient tant de nombres qu'on A. 1. B. 3. C. 9. D. 27. F. 81. voudra continuellement propor- k. 00. I. 00. H. 00. G. 00. tionaux A, B, C, D, F, & que celuy qui suit l'vnité B soit premier, Je dis que le plus grand F ne sera mesuré par aucun autre que l'un d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que G mesure F: G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la 12. p. 9. qu'il mesurast B: G sera adonc composé & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B, d'autant qu'il mesurera F, & par la 12. p. 9. Il faudroit qu'il mesurast aussi B. Que B donc mesure G par H, & puis que B multipliant D & H produit F & G par la 17. p. 7. comme F à G ainsi D à H, mais G mesure F, aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus qu'il ne peut estre premier ny mesuré par un autre nombre premier que B. Donc H mesure D par le nombre I: On prouuera aussi comme dessus que comme H mesure D ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre k: par mesmes raisons comme I mesure C, ainsi k mesurera B nombre premier: Il faut donc que à tout le moins qu'il luy soit egal, ce qui est impossible, d'autant que B est moyen proportionel entre k & I par la 20. p. 7. puis que C est produit de k multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy mesme. Partant aucun nombre ne mesurera F, sinon B, C, D, qui le mesurent par la 11. p. 9.

P R O P. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par certains nobres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui A. B. C. D. F. G. peuuent estre mesurez par les trois nombres 30. 2. 3. 5. 00. 00. premiers B, C, D: Je dis que aucun nombre premier autre que B, ou C ou D ne mesurera A.

Autrement s'il est possible, que F autre nombre premier mesure A par G: donc F multiplié par G produira A, lequel est mesuré par B, C, & D & par la 32. p. 7. B, C, D, mesureront l'un ou l'autre de F; ou G: Ils ne mesureront pas F autre nombre premier que pas vn d'iceux, il mesureront donc G lequel estant plus petit que A, iceluy ne seroit le plus petit de ceux qui peuuent estre mesurez par A, B, C, D. Donc F ne pouuoit mesurer A.

PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison avec iceux: le composé dedeus tels que l'on voudra sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportionaux A, B, C, les plus petits qui soient en la mesme raison: Je dis que les deux ensemble A & B sont premiers à C, ou bien A & C sont premiers à B.

Car si on prend D & F les plus petits qui soient en la mesme raison par la 35. p. 7. Il est euident parce qui a esté démontré à la 2. p. 8. que A & C sont les quarrés de D & F, & que B est le produit de D multiplié par F: Et par la 3. p. 2. D & F comme vn seul nombre multiplié par D produira A & B comme vn seul nombre. Mais D & F estans premiers, les deux ensemble seront premiers au seul F par la 30. p. 7. ou à son quarré C par la 27. p. 7. Et par la mesme prop. D sera premier à C & par la 26. p. 7. Le produit de D & F comme vn seul nombre multiplié par D (scauoir A & B ensemble) sera premier à C. Par mesme discours on prouuera que B & C ensemble sont premiers à A.

Pour la seconde partie, je dis que A & C ensemble sont premiers à B produit de D multiplié par F. Car par la 4. p. 2. Le produit de D & F comme vn seul nombre multiplié par soy mesme est egal à A, & C, & deux fois B. Mais D & F estans premiers par hypothese, & premiers au composé des deux par la 30. p. 7. leur produit B sera 1. au composé des deux par la 26. p. 7. & par la 27. p. 7. Le produit de D & F come vn nombre, multiplié par soy, sera premier à B, c'est à scauoir, que A & C & deux fois B, sont premiers à B & par la 30. p. 7. Le composé de A & C sera premier au composé de deux fois B & à sa moitié vne fois B: ce qui se peut entendre aisement, autrement il faudroit qu'ils eussent vne commune mesure.

PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entre eux, on ne trouuera pas leur troisieme proportionel.

Soient deux nombres premier à entre eux A & B: A. 3. B. 4. C. 12.
Je dis que on ne trouuera pas leur troisieme proportionel.

Autrement s'il est possible, soit A à B, comme B à C: par la 23. d. 7. A & B estans premiers ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. p. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese, donc C n'estoit le troisieme proportionel.

PROP. XVII.

A trois nombres, desquels les extremes sont premiers entre eux, on ne trouuera pas le quatrieme proportionel.

Ceste demonstration est aisee, d'autant A. 3. B. 4. C. 5. D. 12.
que si A & C estoient premiers, & que D fut quatrieme proportionel par la 21. p. 7. Il faudroit que A estant à B comme C à D, que A mesurast C, & ils ne seroient pas premiers.

PROP. XVIII.

A deux nombres donnez considerer si on pourra trouuer leur troisieme proportionel.

PROP. XIX.

A trois nombres donnez considerer si on pourra trouuer leur quatrieme proportionel.

Les demonstrations de ces deux propositions sont aisées si on considere de pres les 19. & 20. p. 7. Car sans faire tant de distinctions que font Theon & Campanus, si les extremes sont premiers ou non: s'ils sont composez, si l'un mesure l'autre: Faut seulement considerer, pour la 18. si le carré du dernier peut estre mesure, c'est à dire diuisé par le premier, s'il peut estre mesure ou diuisé le quotient sera quatrieme proportionel par la 20. p. 7. Sinon on n'en trouuera point. Pour la 19. si le premier & des second & troisieme peut estre mesure par le pre-

mier on aura ce que l'on cherche, sinon on ne trouuera aucun quatriesme proportionel.

Que si on considere bien les demonstrations de Theon & Campanus, on trouuera que l'affaire reuiet tousiours la, si le premier terme mesure, on ne mesure pas le produit.

P. R. O. P. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit multitude quelconque de nombres premiers A, B, C , Je dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

$A.. B... C....$

$D..... F. G.$

$H.....$

Car si on trouue le nombre D le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesure par

les trois nombres A, B, C par la 38. p. 7. & a iceluy on adioust l'vnité F, G le tout D, G sera premier ou non: S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez, s'il n'est premier, il sera mesure par quelque nombre premier, par la 34. p. 1. Soit donc mesure par H : Il est euident que H ne peut estre pas vn des trois A, B, C , Car s'il estoit quelq'un d'iceux il mesureroit D, F , & le tout D, G , Partant il mesureroit aussi l'vnité F, G , luy qui est vn nombre. Donc H est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en trouuera infiniment d'autres.

P. R. O. P. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra, sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisee, d'autant que tout nombre pair peut estre diuisé en deux parties egales: partant les moities de chacun des proposez feront la moitie du tout: Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egellement, par la deff. du nombre pair.

P. R. O. P. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisee, d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité on les rendra pairs, & par la 21. p. 9. leur tout sera

pair: Et pour autant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchées feront vn nombre pair, lequel avec tout le reste qui est déjà nombre pair, Le tout sera pair: par la 21. p. 9.

PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adiouttez, & que le nombre d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Ceste demonstration est aisee, Car si on retranche vn nombre impair, tout le reste fera vn nombre pair par la precedente: Et si du restant impair on oste l'vnité ce qui restera sera pair, lequel adioutté à tout le reste fera vn nombre pair par la 21. p. 9. Partant il est euident que si on adioutte l'vnité restant que le tout sera impair.

PROP. XXIIII.

Si d'un nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy feroit aussi vn nombre pair par la 21. p. 9. Ce qui est absurde, d'autant que cest le tout nombre pair duquel on a retranché l'vnité.

PROP. XXV.

Si d'un nombre pair on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair le retranché ne pourroit estre impair par la 24. p. 9.

PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste vn nombre impair, le reste sera pair.

Car si le reste estoit impair, le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 22. p. 9. contre l'hypothese.

PROP. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Cecy est aisé à demonstrez.

PROP. XXIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

Cela est euident: Car le produit contiendra autant de fois le multipliant qu'il ya d'vnitez au multiplié nombre pair par les deff. du 7. Et par ainsi le produit fera la somme de plusieurs nombres impairs desquels la multitude est en nombre pair, & par la 22. p. 9. Le produit sera pair.

PROP. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair le produit sera impair.

Car comme en la precedente ce sera vne addition de plusieurs nombres impairs desquels la multitude fera en nombre impaire, & par la 23. p. 9. Le tout ou le produit sera impair.

PROP. XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair B, qui mesure le nombre pair C. Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié D.

Car puis que B mesure C, soit par le nombre A, iceluy sera pair, d'autant qu'il estoit impair, étant multiplié par B impair leur produit seroit aussi impair par la 29. p. 9. contre l'hypothese: A sera donc

pair & se pourra diuiser en deux egallement par les deff. du 7. Mais puis que A multipliant B produit C, B sera autant de fois en C qu'il y a d'vnitez en A: Et par consequent autant de fois en sa moitié D qu'il y a d'vnitez en la moitié de A.

A.... 4

B... 3

C..... 12

D.... 6

PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Ceste demonstration est euidente par la precedente. Car si il n'est premier au double, il le mesurera : partant aussi la moitié à laquelle il ne sera pas premier, contre l'hypotese.

P. R. O. P. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire en progression double, sont parement pairs seulement.

Soient tant de nombres qu'on voudra C, D, F, continuellement proportionaux en raison double depuis le binaire B, ie dis qu'ils sont tous parement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité A, Et puis que depuis l'unité A, B C D F sont continuellement proportionaux, le plus petit mesurera le plus grand selonc quelq'un de ceux qui sont entre les proportionaux par la 11. p. 9. lesquels estans tous pairs, il est euident par les deff. du 7. que C, D, F seront parement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la mesme progression. Mais pourauant que B prochain de l'unité A est nombre premier par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la mesme progression. Lesquels estans tous pairs: Iceux nombres seront parement pairs seulement.

P. R. O. P. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera parement impair seulement.

Soit le nombre A duquel la moitié B est impair, ie dis que A sera parement impair seulement.

Car puis que B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les deff. 7. A sera parement impair: Mais qu'il soit seulement parement impair on le prouuera ainsi. Si l'estoit parement pair, vn nombre pair comme D le mesurerait par vn nombre pair comme F, & par la 19. p. 7. Le produit de B par C estant egal au produit de D par F: Il y auroit telle raison de C à F, comme de D à B. Mais C nombre binaire mesure F, il faudroit donc aussi que D mesurasse B qui est vn nombre impair contre les deff. du 7. Donc A estoit nombre parement impair seulement.

A. 30.

B. 15.

C. 2.

F. 60.

D. 60.

PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair, n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié soit nombre pair: il sera parement pair, & parement impair.

Ceste demonstration est aisee. Car sa moitié estant pair il sera mesuré par vn nombre pair selon le binaire qui est aussi pair: Et pourautant qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, si on le diuise tousiours en deux egallement, on viendra a vne moitié ~~impair~~ ^{impair} auparavant que paruenir iusques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nombre impair. Et par les deff. 7. Il sera parement pair & parement impair.

PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que du second & dernier on soustrait le premier, comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionaux A, B, F, G, & du second B on retranche C D egal au premier A: Et du dernier G, l'on retranche K L aussi egal à A: Je dis que comme B C sera à A, ainsi l'autre reste G K sera à tous les trois A, B, F.

A..... 8
B.... 4 C..... 8 D
F..... 18
G.9. H.6. I.4. K.8. L.

Car si de GL on retranche LI egal à B D, il est euident que K I sera egal à B C (estans K L egal à D C) & si on retranche L H egal à F: comme les quatre nombres G, F, B, A, sont continuellement proportionaux, aussi seront leurs egaux G L, H L, I L, K L: & en diuisant G H sera H L, comme H I à I L, ou I K à K L & par la 12. p. 7. Tous les antecedens G H, H I, I K, (c'est à dire G K) seront à tous les consequens H L, I L, K L, (c'est à dire A, B, F,) comme l'un des antecedens I K, est à l'un des consequens K L, ou leur segaux B C à A, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XXXVI.

Si on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité & en raison double,

iufques à ce que le tout foit nôbre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira le nombre parfait.

Soient depuis l'vnité A, B, C, D continuellement doubles, la somme defquels & de l'vnité foit F nombre premier: Je dis que fi F eft multiplié par le dernier D, que le produict K Q fera nombre parfait.

Car fi on prend G double de F, H double de G & I double de H, ainfi des autres: F, G, H, I, feront continuellement proportionaux en la raifon de A, B, C, D: en raifon egalle A fera à D comme F à I, & par la 19. p. 7. A multiplié par I, fera le produit de D par F, fcauoir K Q: mais A eftans binaire K Q fera double de I, ainfi F, G, O, H, I, k Q, feront continuellement proportionaux. Maintenant de G O foit retranché G N egal à F, & de K Q foit retranché k P egal à F: par la 35. p. 9. comme G N eft egal à F (d'autant que G O eftoit double de F) ainfi P Q fera egal à F, G O, H, I: Mais K P egal à F, eft auffi egal à l'vnité & A, B, C, D: Et par confequent K Q fera egal à l'vnité plus A, B, C, D, F, G O, H, I. Et fi il eft euident que puis qu'ils font en proportion double I mesurera K Q par le binaire A, H par B, G par C, F par D comme cela peut eftre prouué aifement par la 19. p. 7. Que fi K Q ne peut eftre mesuré par aucun autre nombre que ceux cy par les deff. du 7. Il fera nombre parfait eftant egal à toutes fes parties aliquotes.

Si on penfe qu'il puiſſe eftre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits, que L le meſure il eft poſſible ſelon M, donc L multipliant M produira k Q & par la 32. p. 7. F nombre premier qui meſure k Q meſurera auffi L ou M, qu'il meſure L ſ'il eft poſſible, par la 19. p. 7. Il faudra que D meſure auffi M (car il y aura telle raifon de D à M, comme de L à F) ce ſera donc par A, ou B, ou C, par la 13. p. 9. Mais nous auons monſtré que A, B, C, meſuroiét k Q, par G, H, I, donc L & M ne ſeront point autres nombres que les deuant dits. Et K Q fera nombre parfait.

S O M M A I R E.

K Q n'a point d'autres parties aliquotes que A, B, C, D, F, G, H, I, & l'vnité, auxquels il eft egal. Et par les deff. du 7, K Q fera nombre parfait.

Fin du neufiefme Element.

Vnité.

A... 2

B.... 4

C..... 8

D..... 16

F. 31.

G. 31. N. 31. O

H. 124.

I. 248.

K. 31. P. 465. Q.

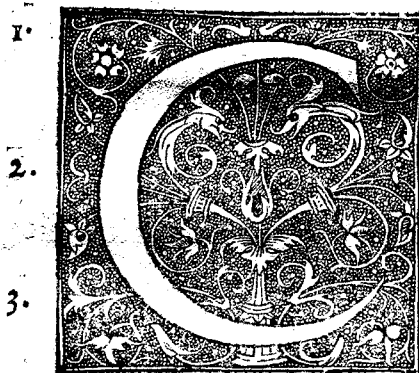
L. 00.

M. 00.



ELEMENT D'I- XIESME.

DEFINITIONS.



1. Commensurables grâdeurs sôt les mesurées par yne mesme mesure.
2. Incommensurables grandeurs sont celles qui n'ont aucune commune mesure.
3. Lignes droites commensurables par puissance, sont celles desquelles les quarrez peuvent estre mesurez par vne mesme superficie.
4. Lignes incommensurables sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

*Cel. estant ainsi il est euident que à toute ligne proposee on trouuera infinies lignes commensurables & infinies incommensurables: les vnes en longi-
tude & puissance, les autres en puissance seulement.*

Encore que ceste annotation soit mise entre les principes, si est ce qu'il est aisé à coniecturer qu'elle ne doit estre prise que pour Scholie. Ainsi nous l'aons distingué d'auec les principes par different caractere, elle est demonstree puis apres en la 11. p. 10.

5. Les lignes commensurables à vne ligne rationelle, soit en longitude, soit en puissance: sont appellees rationelles.
6. Et les lignes incommensurables à vne ligne rationelle: sont irrationelles.

Il faut remarquer icy trois sortes de lignes rationelles. La premiere scauoir toute ligne proposee, laquelle peut estre expliquee par quelque nombre. La seconde toute ligne commensurable en longitude à la rationelle proposee. La tierce toute ligne commensurable en puissance seulement à la rationelle proposee. Et toute ligne incommensurable tant en longitude que en puissance à la rationelle proposee est irrationelle.

7. Le quarré descript sur vne ligne rationelle, est appelle rationel.
8. Les figures commensurables au quarré rationel, sont aussi rationelles.
9. Et celles qui sont incommensurables au quarré rationel: sont irrationelles & sourdes.
10. Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationelles, sont irrationelles & sourdes.

Vne ligne est dicté pouuoir vne figure quand elle peut descrire vn quarré egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racine ou de son costé. Ainsi il a dict cy dessus deux lignes estre commens. en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarréz d'icelles lignes sont commensurables.

PROP. I.

Si de deux grandeurs inegales on retranche de la plus grande plus de la moitié, encores du residu plus de la moitié en continuant tousiours: Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la plus petite des deux proposees.

Soient deux grandeurs inegales A & B H, estant A la plus petite. Je dis que si on retranche plus de la moitié de B H & du residu encores plus de la moitié en continuant tousiours, on trouuera à la fin vn residu plus petit que A.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur A multipliee tant de fois qu'elle excede la plus grande B H (car cela est possible) & soit la produicte d'icelle multiplicatiō C D laquelle sera multipliee de A. Et plus grande que B H qu'elle soit donc diuisee en parties egales à A comme en C F, F G, & G D. Item soit osté de B H plus de la moitié scauoir B I, & du residu I H plus de la moitié scauoir I K, en continuant iusques à ce que B H soit diuisee en autant de parties que C D, scauoir en B J, I K, & K H, comme C D est diuisé en C F, F G, & G D. Pourautant que C D est plus grande que B H & que le retranché C F n'est plus grand que la moitié de C D comme le retranché B I est plus grand que la moitié de B H, le reste F D sera plus grand que le reste I H. Semblablement si du plus grand residu F D on oste F G qui n'est pas plus plus que la moitié, & du plus petit residu I H on oste plus de la moitié I K, le reste K H sera plus petit que le reste G D egal à A & par consequent K H sera plus petit que A: ce qu'il falloit demonstrier.



PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales on retranche tousiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure sa grandeur precedente, telles grandeurs sont incommensurables.

Soient deux grandeurs inegales A H & B F, Je dis que si on retranche continuellement & alternatiuement la plus grande de la plus petite, & que le residu ne mesure iamais la grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand residu, Je dis que A H & B F sont incommensurables.



Autrement il faudroit qu'elles soient commensurables. Partant aussi qu'elles ayent vne commune mesure, soit donc icelle C s'il est possible. Maintenant de la plus grande B F soit retranchée B D egale à A H. Et s'il se peut faire soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste D F soit plus petit que A H, donc C comme mesure mesurera D F car elle mesure la toute B F & la retranchée B D egale à A H, elle doit aussi mesurer le reste D F. Item soit retranchée D F de A H tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste G H soit plus petit que C, lequel mesure F D & par consequent sa multipliee A G & par consequent le reste G H. Ce qui est laissé pour impossible. Partant B F & A H n'auoient point de commune mesure, partant incommensurables.

PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables.

Soient deux grandeurs commensurables $A D$ & $B F$, il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Premièrement si $A D$ mesure $B F$, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne le mesure point, soit alternativement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste, ce qui doit aduenir d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables, donc que $A D$ soit retranché de $B F$ & que le reste $F G$ mesure $A D$, Iedis que $F G$ sera icelle commune mesure plus grande.

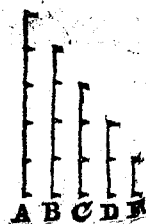


Car puis qu'elle mesure $A D$ elle mesurera aussi $B G$ son egalle, & se mesurant soy mesme, elle mesurera aussi la toute $B F$. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, que on en trouue vne autre plus grande scauoir C (s'il est possible) C donc mesurera $A D$ & $B F$ & le retranché $B G$ egal à $D A$ & par consequent le reste $F G$ qui est plus petit, ce qui est impossible. Partant $F G$ estoit la plus grande commune mesure.

PROP. IV.

Trouuer la plus grande commune mesure entre trois grandeurs commensurables.

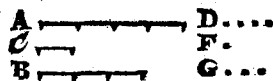
Soient trois grandeurs commensurables A, B, C , desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure, soit trouuee D plus grande commune mesure entre A & B par la 2. p. 10. Si D mesure C , on a ce que l'on demande: que si D ne mesure pas C , soit trouuee F plus grande commune mesure entre C & D par la meisme 2. p. 10. Il est euident que F mesurera aussi A & B d'autant qu'elle mesure D qui les mesure. Que si on nioit qu'elle fust la plus grande, on le prouuera par le meisme inconuenient que en la precedente, scauoir que si on en prenoit vne plus grande, il faudroit aussi qu'elle mesurasse F ce qui est impossible.



PROP. V.

Grandeurs commensurables sont entre elles comme nombre est à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B, Je dis qu'elles sont entre elles comme nombre à nombre.

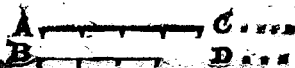


Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C, donc C mesurera A selon quelque nombre comme selon D: il mesurera aussi B selon quelque autre nombre comme selon G, ainsi puis que C est en A comme F est en D, & C en B comme F en G: A, C, B, seront l'un à l'autre comme D, F, G, & en raison egale A sera à B comme le nombre D est au nombre G par la 22. p. 5. ce qu'il falloit demonstrier.

PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Ceste propos. est aisee à entendre, Soient deux grandeurs A & B qui soient l'une à l'autre comme le nombre C est au nombre D, Je dis qu'elles seront commensurables.

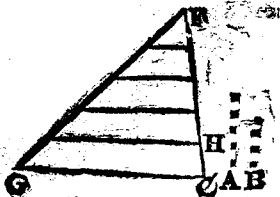


Car comme l'vnité mesure C & D par les deff. du 7. Si on diuise A en autant de parties, que C contient d'vnitez & B en autant que D contient d'vnitez, puis que A est à B comme le nombre C est au nombre D, vne partie de A sera cōmune mesure de A & B, cōme l'vnité est commune mesure des nombres C & D: Et par les deff. de celiure A & B seront commensurables.

SCHOLIE.

Il faut icy scauoir si deux nombres & vne ligne estoient donnez, comment on trouueroit vne autre ligne qui fust à la donnee comme le nombre est au nombre, ce qu'on trouuera en ceste façon.

Soient les deux nombres A & B & la ligne CF, Maintenant soit menee la ligne FG, de laquelle soient retranchees autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au plus grand des deux nombres, & apres auoir mene. CC soiēt menees les autres cinq qui luy soient paralleles par les 9. & 10. p. 6. CF sera diuisee comme FG: & par consequent en autant de parties qu'il y a d'vnitez au nombre A, maintenant si on prend FH contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez en B, FC & FH seront l'une à l'autre comme le nombre A est au nombre B.



Il faut encores trouuer à deux nombres donnez & vne ligne droite, vne autre ligne droite de laquelle le quarré soit au quarré de la premiere, comme l'un des

nombres est à l'autre.

Soit trouuee vne autre ligne laquelle soit à la donné comme le nombre est au nombre, ainsi que dessus CF & HF , & par la 13. p. 6. Soit trouuee la moyenne proportionnelle, le dis que le quarré d'icelle moyenne sera au quarré de CF cōme CF est à FH qui sera alors troisieme proportionnelle par la 20. p. 6. Et par consequent commele nombre A est au nombre B . Voila ce qu'il falloit demonstter.

PROP. VII.

Grandeurs incommensurables, ne sont entre elles comme nombre à nombre.

Ceste demonstration est aisée & par l'impossible. Car si les grandeurs donnees estoient entre elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6. p. 10. ce qui est contre l'hypothese.

PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne sont entre elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

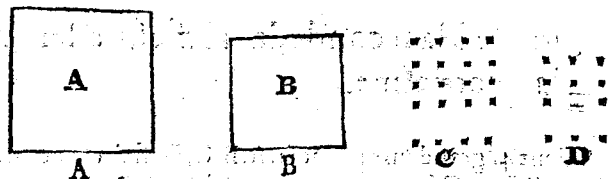
Ceste demonstration est aussi facile. Car si les grandeurs donnees estoient commensurables il faudroit quelles fussent comme nombre à nombre par la 5. p. 10. ce qui est contre nostre hypothese.

PROP. IX.

Les quarez descriptes sur lignes commens. en longitude sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, & les quarez qui sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commens. en longitude: Et les quarez descriptes sur lignes incommens. en longitude ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré ont les costez incommens. en longitude.

Soit

Soit la ligne A à la ligne B commens. en longueur: Je dis que leurs quarréz sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.

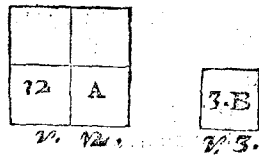


Car puis que les lignes A & B sont commens. en longueur, elles seront entre elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D: Mais les quarréz de A & B sont en raison doublee de leurs costez par la 20. p. 6. Le mesme se prouuera des quarréz des nombres C & D, par la 11. p. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré de C est au nombre quarré de D: C'est asscauoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré de C au nombre quarré de D: Je dis que les lignes A & B seront commens. en longueur. Car par la 20. p. 6. & 11. p. 8. La raison des quarréz aux quarréz, est la raison doublee de leurs costez, & par la 15. p. 5. comme le costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D. Et par la 6. p. 10. A & B sont commensurables en longueur.

SCHOLIE.

Nota que la proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourueu qu'elles soient commens. en longueur: Comme si les quarréz de A & B estoient 12. & 3. Leurs costez seroient $\sqrt{12}$. & $\sqrt{3}$. qui sont inexplicables par nombres, toutefois commens. Car par la 20. p. 6. 12. seroit à 3. en raison double de $\sqrt{12}$. à $\sqrt{3}$. Mais 12. est quadruple de 3. Ainsi le costé A seroit double du costé B par la 10. d. 5. Car la doublee railõ doublee est quadruple.



Quant à la troisieme & quatrieme parties, elles se prouuent par l'impossible, par consequence contraire à la premiere & la seconde partie, comme cy dessus les huitiesme & neuuesme propositions, par consequence contraire des 6. 5. prop. du 10. On doit icy noter que deux nombres estre quarréz, & estre en raisõ de nombre quarré à nombre quarré, n'est pas la mesme chose.

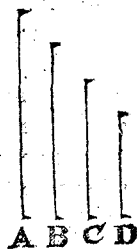
PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, & la premiere est comensurable à la secõde, la troisieme sera aussi comensurable à la quatrieme. Que si la premiere est incommen-

furable à la seconde, la troisieme sera aussi incommensurable à la quatrieme.

Soient 4. grandeurs proportion. A, B, C, D, si A est commun. à B, Je dis que C sera aussi commun. à D.

Car si A est commun. à B, ils seront entre eux comme nombre à nombre: Mais comme A à B ainsi C à D. Partant C est à D, comme nombre à nombre, & par consequent commun. par la 6. p. 10. Que si A estoit incommensurable à B, aussi C seroit incommensurable à D: Car ils ne seroient pas comme nombre à nombre: Partant incommensurables par la 8. p. 10.

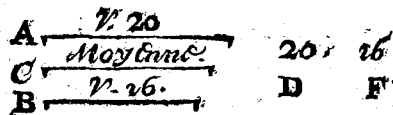


PROP. XI.

Trouver deux lignes droites incommensurables à une ligne rationnelle, sçavoir une en longueur seulement, & l'autre en longueur & puissance.

Soit la ligne rationnelle A, à laquelle il faut trouver deux autres lignes incommensurables. l'une seulement en longueur, & l'autre en longueur & puissance.

Soient trouvez deux nombres n'estans quarréz, ny ayans la raison entre eux de nombre quarré à nombre quarré: Item soit trouuee la ligne B, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre F est au nombre D: Mais d'autant que iceux quarréz de A & B sont comme nombre à nombre, ils seront commun. entre eux par la 6. p. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & B commun. en longueur, mais en puissance seulement par la 9. p. 10. Voila la premiere ligne trouuee. Puis entre A & B soit trouuee la moyenne proportionnelle C, par la 13. p. 6. D'autant que les quarréz sont entre eux en raison doublée de leurs costez, le quarré de B sera au quarré de C, comme B est à A troisieme proportionnelle par la 20. p. 6. C'est à dire incommensurable. Partant leurs costez B & C, seront incommensurables en puissance. Ainsi C'est la seconde ligne demandee.



PROP. XII.

Les grandeurs communensurables à une autre, sont communensurables entre elles.

Soient les deux grandeurs A & C, commens. chacune à la grandeur B: Je dis qu'elles sont commensurables entre elles.

Car puis que A & B sont commens. Icelles seront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. Ainsi de mesme B à C sera comme nombre à nombre: Et A, B, C seront entre elles comme trois nombres: Partant commens. Car tous les nombres sont commens. entre eux ayans l'vnité pour commune mesure.



PROP. XIII.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à une tierce, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commens. A & B, & que A soit incommens. à la tierce C: Je dis que B & C sont aussi incommensurables.

Autrement: Si B est commens. à C, il sera aussi commens. à A, par la 12. p. 10. Contre nostre hypothese: Donc B est incommensurable à C.



PROP. XIII.

Si quatre lignes sont proportionelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur aussi la troisieme pourra plus que la quatre du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longueur.

Soient 4. lignes proport. A, B, D, F, & que A puisse plus que B du quarré de C, & D plus que F du quarré de G: Je dis que comme A sera commens. ou incommens. à C, ainsi D sera commensurable ou incommensurable à G.

Car puis que A, B, D, F, sont proport. leurs quarréz seront aussi proportionaux, par la 22. p. 6. Et puis que les quarréz de B & C sont egaux au quarré de A, & les quarréz de F &

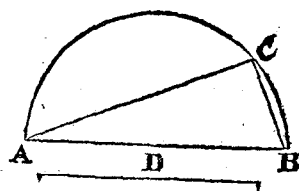


G font egaux aux quarré de D: Les quarréz de A & D seront les touts, Ceux de B & F seront les retranchez, & ceux de C & G seront les restes: Mais comme A à B ainsi D à F, & en changeant comme A à D, ainsi B à F: C'est à dire comme le tout quarré de A, est au tout quarré de D, ainsi le retranché quarré de B, au retranché quarré de F, le reste quarré de C, sera au reste quarré de G, comme le tout quarré de A, est au tout quarré de D: Et en changeant comme le quarré de A au quarré de C, ainsi le quarré de D, est au quarré de G, Et par la 22 p. 6. comme A à C ainsi D à G: Et par la 10. p. 10. Si A est commens. ou incommens. à C, ainsi D sera commens. ou incommens. à G: soit en longitude, soit en puissance.

SCHOLIE.

D'autant qu'il est parlé en ceste proposition d'une ligne qui peut plus qu'une autre, il faut icy enseigner comment on pourra trouver de deux lignes inégales combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donc les deux lignes inégales A B & D, & sur la plus grande A B soit décrit le demy cercle A C D, & dans iceluy soit accommodée A C égale à D par la 1. p. 4. Item soit menée C B: par la 31. p. 3. l'angle C dans le demy cercle est droit, Et par la 47. p. 1. Le quarré de A B vaudra les deux de A C & C B, Partant A B pourra plus que D (qui est égale à A C) du quarré de B C. Voila comment nous avons trouvé de deux lignes inégales combien la plus grande peut plus que la plus petite.



PROP. XV.

Si deux grandeurs commens. sont jointes, la composée sera commens. à chacune de ses parties: Et si la composée est commens. à vne de ses parties, icelles parties seront commens. entre elles.

Soient jointes deux grandeurs commens. A B & B C: Je dis que la composée A C, est commens. à A B & à B C parties.

Car puis que A B & B C sont commens. elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant A B & B C, mesurera aussi la toute A C: Partant la toute A C est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute A C est commens. à vne de ses parties, Icelles seront commens. entre elles. Car si A C & A B sont aussi commens. elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste, Partant le retranché & le reste seront commens. d'autant qu'ils ont vne commune mesure.



PROP. XVI.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommens. à chacune de ses parties: Et si la composee est incommens. à l'une de ses parties, Icelles parties seront incommens. entre elles.

Soient conioinctes deux grandeurs incommens. AB & BC: Je dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.



Autrement si AC estoit commun. à AB, il le seroit aussi à BC, Car la com-

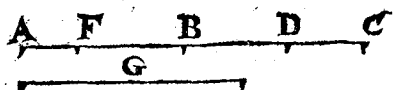
mune mesure qui mesurerait AC & le retranché AB, mesurerait aussi le reste BC: Et AB & BC seroient commun. (ce qui est contre l'hypothese) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuivra le mesme inconuenient si on nie que AC & BC soient incommensurables.

Pour la seconde partie: Je dis que si AC & BC. sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commun. La toute AC seroit aussi commun. à la partie BC par la 15. p. 10. contre nostre hypotese

PROP. XVII.

S'il y a deux lignes inegales, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties commun. en longueur, la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera commun. en longueur: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commun. en longueur, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, le rectangle diuifera icelle plus grande ligne en parties commun. en longueur.

Soient deux lignes inegalles AC & G, & sur la plus grande AC soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de G, defaillant d'une figure quarrée (c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé) Et soit iceluy de AD & DC,



trouvé par la 28. p. 6. Je dis que si AD & DC sont commens. en longitude, que AC pourra plus que G du quarré d'une ligne qui luy sera cōmens. en lōgitude.

Qu'il ne soit ainsi: Soit la ligne AC coupée en deux egallement en B, & soit faite BF egale à BD: Il est evident que AF sera egal à DC. Maintenant puis que AC est coupée en deux egallement en B, & en deux inegablement en D, Le rectangle de AD & DC avec le quarré de BD, seront egaux au quarré de BC, Lequel n'estant que le quart du quarré de AC, quatre fois le rectangle de AD & DC & quatre fois le quarré de BD, sont egaux au quarré AC. Mais quatre fois le rectangle de AD & DC valent le quarré de G, d'autant que par hypothese le rectangle de AD & DC est le quart du quarré de G, Donc le quarré de CA est plus grand que le quarré de G, de quatre fois le quarré de BD, ou du seul FD egal à iceux. Reste à prouver que si AD & DC sont commens. en longitude, La toute AC sera commens. en longitude à sa partie DC par la 15. p. 10. Et partant à son egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne. Et par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 15. p. 10.

Pour la seconde partie sans rien changer à la construction, Si AC peut plus que G du quarré de FD, lequel soit commens. en longitude à AC: AD & DC seront aussi commens. en longitude le tout par la 15. p. 10. en posant A C la toute, FD la retranchée, AF & DC. comme vne le reste: Que si AC est commens. à AF & CD comme vne, il le sera aussi à sa moitié DC, & par la 15. p. 10. les parties AD & DC seront commens. entre elles.

P R O P. XVIII.

S'il y a deux lignes inegalles, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, Et que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude: la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne egal au quart du quarré de la plus petite, & de-

faillant d'une figure quarree, le rectangle diuifera la plus grande ligne en parties incommens. en longueur.

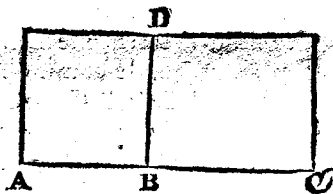
Soit l'hypothese la construction & la demonstration tout de mesme que en la precedente, Sinon que au lieu de prouuer AC & FD commens. en longueur par la 15. p. 10. estant posee AD & DC commens. en longueur, Il les faudra prouuer incommens. en longueur par la 16. p. 10. En posant AD & DC incommens. en longueur: Et tout de mesme en la seconde partie, sans en rien changer que la commensuration en incommensuration.

PROP. XIX.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en longueur selon quelqu'une des manieres cy deuant dictes, est rationel.

Soient les deux lignes rationelles commens. en longueur DB & BC, comprenant le rectangle DC: Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.

Car si sur DB on fait le quarré DA, il sera rationel par la 7. d. 10. Mais comme AB à BC ainsi le quarré au rectangle, par la 1. p. 6. Et AB est commens. à BC (estant AB & BD egales) Partant le quarré sera commens. au rectangle par la 10. p. 10. Mais le quarré est rationel (estant décrit sur une ligne rationelle) Aussi sera le rectangle qui luy est commens.



SCHOLIE.

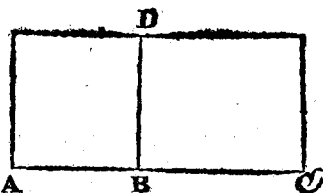
Faut icy noter qu'il a dit selon quelqu'une des manieres cy deuant dictes Parce qu'il y a trois sortes de lignes rationelles, sçauoir la proposee, la commens. en longueur à la proposee, & la commens. en puissance à la proposee. Or la proposition est generale à toutes les trois sortes: Que si on vouloit demonstrier des deux dernieres sortes, faudroit prendre une ligne à laquelle DB. & BC. seroient commens. en longueur ou en puissance, en proceder comme dessus.

PROP. XX.

Si un rectangle rationel à l'un des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux seront entre eux commens. en longueur.

Soit le rectangle rationel DC ayant le costé DB rationel, ie dis que BC sera aussi rationel commens. en longueur à DB.

Car sur DB. soit fait le quarré AD, lequel sera rationel, Et comme le rectangle au quarré ainsi CB à BA par la 1. p. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commens. Donc CB & BA ou BD son egalle, seront rationelles & commens. en longueur.



PROP. XXI.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement est irrationel, & la ligne qui peut iceluy, irrationelle. Soit icelle appelée Mediale.

Soit le rectangle DC, compris de deux lignes rationelles DB. & BC commens. en puissance seulement, ie dis que le rectangle est irrationel.

Car si sur le rationelle DB on décrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle comme AB ou DB son egalle est à BC, par la 1. p. 6. Mais AB & BC sont incommens. en longueur, & par la 10. p. 10. Le quarré & le rectangle seront incommens. Or le quarré est rationel, Et par consequent le rectangle sera irrationel. Item ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationelle.

Autrement si elle estoit rationelle, son quarré seroit rationel, & son egal rectangle aussi rationel, que nous auons prouué irrationel, Elle est donc irrationelle appelée ligne Mediale.

SCHOLIE.

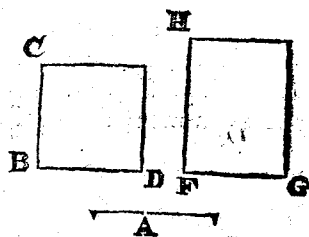
Il faut icy remarquer que ligne mediale, est celle qui peut vn rectangle irrationel medial: Or vne ligne est dite pouuoir vn rectangle laquelle est le costé d'un quarré egal à iceluy rectangle: Car tout quarré décrit sur vne ligne est la puissance d'icelle ligne. Il faut aussi noter que mediale est differente de moyenne proport. Car moyenne proportionnelle, generallyment, est celle qui peut vn quarré egal à tout rectangle tant rationel que irrationel, mais mediale est seulement celle qui peut vn quarré egal à vn rectangle irrationel medial,

PROP. XXII.

Le quarré d'une ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se fait l'application.

Pour

Pour appliquer sur vne ligne rationelle vn rectangle, egal au quarré d'une ligne mediale, faut poser quelconque ligne rationelle, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportion. Laquelle sera l'autre costé du rectangle: Car par la 17. p. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.



Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationelle BD, faisant le rectangle CD: Je dis que CB & BD sont rationelles commens. en puissance seulement:

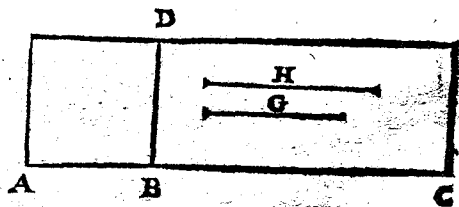
Car A estant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, comme il a esté défini en la precedente: soit iceluy HG, lequel sera egal à CD, estant aussi la puissance de A: & par la 14. p. 5. CD & HG auront les costez reciproques, sçavoir que comme CB à HF, ainsi FG à BD, & par la 22. p. 6. les quarréz d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BD ligne rationelle, est commens. au quarré de FG aussi ligne rationelle, & par la 10. p. 10. le quarré de HF sera aussi commens. au quarré de BC & le quarré de HF estant rationel, le quarré de CB sera aussi rationel, & les lignes CB & BD rationelles.

Reste à prouver que CB & BD sont commens. en puissance seulement: Ce qui est euidant par ce qui a esté démontré à la 10. p. 10. Car si si elles estoient commensurables en longueur le rectangle seroit rationel que nous auons posé medial c'est à dire egal au quarré de la mediale A.

PROP. XXIII.

Vne ligne droite commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la ligne H, commens. à la mediale G soit en longueur ou en puissance seulement: ie dis qu'elle est mediale.



Car si sur la rationelle DB on bastit le rectangle DC egal au quarré de H, & le rectangle AD egal au quarré de G: d'autant que le quarré de la mediale G, est appliqué sur la rationelle DB, l'autre costé BA est rationel commensurable en puissance seulement à B D par la 22. p. 10. Mais G & H estans commensurables, leurs quarréz (ou leurs egaux rectangles DA & DC) seront commens. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. AB & BC seront commens. en longueur: Partant BC rationel comme AB. Item AB estant incommens. en longueur à BD par la 13. p. 10. BC sera aussi incommens. en longueur à DB, mais en puissance seulement, & par la 21. p. 10. le rectangle DC sera medial, & la ligne H qui le peut sera mediale.

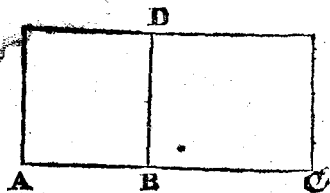
De cecy resulte que toute figure commenfurable à vne figure mediale, est aussi mediale : d'autant que les quarez egaux à icelles figures seront aussi commenfurables, & par consequent commenf. les lignes qui les pourrôt, à tout le moins en puissance seulement, & l'une d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera commenf. sera aussi mediale par ceste prop.

PROP. XXIV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenfurables en longitude, est aussi mediale.

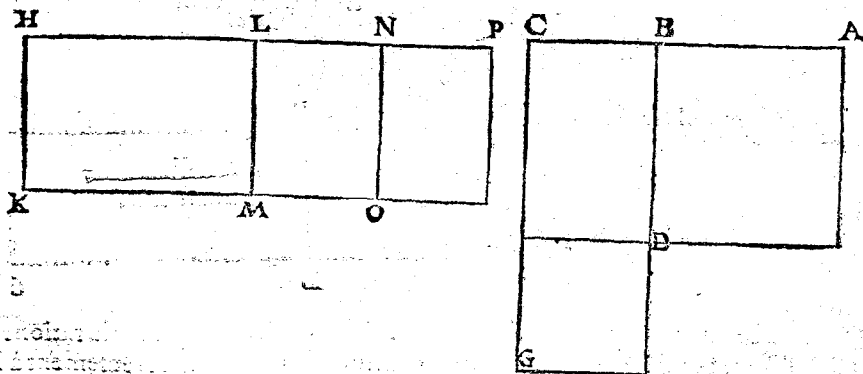
Soit le rectangle DC, compris des deux mediales commenf. en longitude DB & BC: ie dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DB on décrit le quarré DA, il sera medial, estant décrit sur vne ligne mediale: mais BD ou BA son egale est commenf. en longitude à BC. Partant par la 1. p. p. 6. & 10. p. 10. le quarré medial AD, sera commenf. au rectangle DC: & par ce qui resulte de la 23. p. 10. iceluy rectangle sera medial.



PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenfurables en puissance seulement, est rationel ou medial.



Soient les deux mediales commenf. en puissance seulement BD & BC, comprenant le rectangle DC: ie dis qu'iceluy rectangle est rationel ou medial.

Qu'ainsi ne soit. Sur DB & BC soient faits les quarez AD & DG, lesquels comme estans faits sur lignes mediales seront mediaux: maintenant soit proposee la ligne rationelle HK, & sur icelle soient décrits les trois rectangles KL, MN, OP, egaux aux trois figures AD, DC, DG, par la 45. p. 1. Et d'autant que

les quarrez AD & DG sont mediaux, leurs egaux rectangles KL & OP seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle HK leurs autres costez HL & NP seront rationaux commens. en puissance seulement à HK par la 22. p. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & DG sont commens. (estans faits sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles KL & OP seront aussi commens. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. HL & NP seront commens. en longitude, & par la 19. p. 10. le rectangle de HL & NP sera rationel, & par consequent le quarré de la moyenne proport. LN qui luy est egal par la 17. p. 6. Partant le costé LN sera rationel, & par consequent commens. à la rationelle LM, ou à son egalle HK, ou en longitude, ou en puissance seulement: si en longitude, MN sera rationel par la 19. p. 10. Si en puissance seulement, il sera medial par la 21. p. 10. Ce qui estoit à prouuer.

Or que LN soit moyenne proport. entre HL & NP on le prouue ainsi. Le rectangle DC est moyen proportionel entre les deux quarrez AD & DG par la 1. p. 6. repetee deux fois, aussi son egal rectangle MN sera moyen proport. entre les deux rectangles KL & OP, egaux aux deux quarrez AD & DG: Et puis que les trois rectangles sont continuellement proportionaux par la 1. p. 6. les lignes HL, LN, NP seront continuellement proportionnelles.

PROP. XXVI.

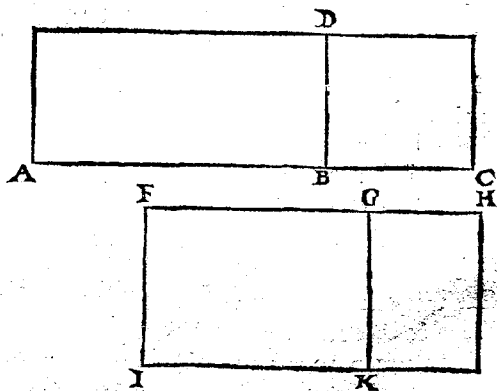
Vne figure mediale n'est pas plus grande qu'une figure mediale d'une figure rationelle.

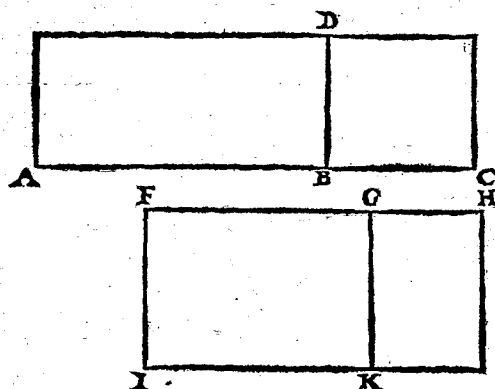
Soit la figure mediale ADC, de laquelle on retranche le mediale AD: ie dis que l'excez DC (par lequel ADC est plus grande que AD) n'est pas figure rationelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur la proposée rationelle FI soient faits les rectangles FK & KH, egaux aux rectangles AD & DC par la 45. p. 1. le total sera egal au total, partant IH sera medial. Item FK sera medial (estant egal à AD medial) mais FK & IH estans

mediaux, & appliquez sur la rationelle FI, font les autres costez FG & FH lignes rationnelles commens. en puissance seulement à FI par la 22. p. 10.

Maintenant si on dit que KH est rationel, estant appliqué sur la rationelle GK, l'autre costé GH sera rationel commens. en longitude à GK par la 20. p. 10. mais FG est incommens. en longitude à GK, ou FI: & par la 13. p. 10. FG & GH seront incommens. en longitude, mais comme FG à GH ainsi le rectangle de FG & G au quarré de GH par la 1. p. 6. (car ils sont de mesme hauteur) Partant le





quarré de GH est incommens. au rectangle de FG & GH. Il le fera aussi à deux fois le rectangle de FG & GH par la 13. p. 10. Item le mesme quarré de GH est commens. au quarré de FG qui est aussi rationel & par la 15. p. 10. les deux quarrés de FG & GH, seront commens. au quarré de GH lequel est incommensurable à deux fois le rectangle de FG & GH : & par la 13. p. 10. les deux quarrés de FG & GH seront incommens. à deux fois le

rectangle de FG & GH : lesquels deux quarrés & deux fois le rectangle de FG & GH estans egaux au quarré de FH par la 4. p. 2 & par la 16. p. 10. le quarré de FH sera incommens. aux deux quarrés de FG & GH ensemble : lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationelles) il faudra que le quarré de FH soit irrationel : & la ligne FH irrationelle : laquelle cy dessus nous auons monstré estre rationelle. Ce qui est absurde : Donc le rectangle KH ou son egal DC n'estoit pas rationel.

PROP. XXVII.

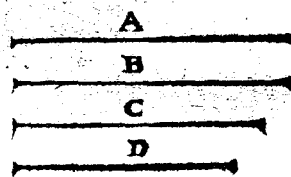
Trouuer deux medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationelles cōmens. en puissance seulement A & C (trouuées comme il est enseigné en la 11. p. 10.) Item soit trouuée la moyenne proportionnelle B, & la quatriesme proportionnelle D : Je dis que B & D sont les deux lignes demandées.

Car puis que B est moyenne proportion. entre A & C, le rectangle de A & C (lequel par la 21. p. 10. est medial) sera egal au quarré de B par la 17. p. 6. & par la 21. p. 10. B qui peut le rectangle medial, est mediale : Item puis que comme A à B ainsi C à D, en changeant A fera à C comme B à D : mais A est commens. en puissance seulement à C, aussi fera B à D. per la 10. p. 10. & par la 23. p. 10. D. fera ligne mediale (pour estre cōmens. en puissance à la mediale B) Voila donc les deux lignes medialles commens. en puissance seulement qui sont trouuées. Reste à prouuer que leur rectangle est rationel.

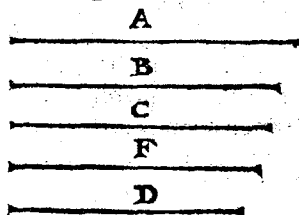
Car A, B, C, D, estans continuellement proportionelles, C sera moyenne entre B & D : & par la 17. p. 6. son quarré (lequel est rationel) sera egal au rectangle des deux medialles B & D : lequel par ce moyen sera aussi rationel.

27.



Trouuer deux lignes medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationelles cōmens. en puissāce seulemēt A, C, D, qu'il faut trouuer comme il a esté enseigné à la 11. p. 10. Puis soit trouuee la moyenne proportionnelle B: Item soit trouuee F par la 12. p. 6. laquelle soit à B comme D est à C: ie dis que B & F sont les deux medialles demandees.



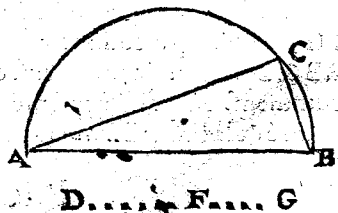
Car en premier lieu, il est euident que B est medialle par la 22. p. 10. d'autant que par la 17. p. 6. elle peut le rectangle irrationnel de A & C: mais comme C à D ainsi B à F, & C est commens. en puissance seulement à D, aussi par la 10. p. 10. B sera commens. en puissance seulement à F: Et par la 23. p. 10. B estant medialle, F sera aussi medialle commens. en puissance seulement à B.

D'auantage le rectangle des deux medialles B & F est aussi medial. Car puis que cōme B à F ainsi C à D en changeant B sera à C comme F à D, mais A est à B comme B à C: partant comme A est à B ainsi F est à D: & par la 16. p. 6. Le rectangle des extremes A & D (lequel est medial par la 21. p. 10.) sera egal au rectangle des moyennes B & F: & par ce qui resulte de la 23. p. 10. il sera aussi medial.

PROP. XXIX.

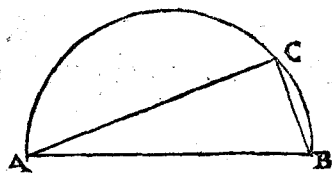
Trouuer deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soit trouué le nombre DG, diuisé en DF, & FGen sorte que le total DG soit à FG comme nombre quarré à nombre quarré: mais non pas à DF: Item soit trouué la rationelle AB, sur laquelle (apres auoir fait le demy cercle) soit menee la ligne AC, de laquelle le quarré soit au quarré de AB, comme le nombre DG est à DF: Finalement soit menee CB. Ie dis que AB & AC sont les deux lignes demandees.



Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AC comme nombre à nombre, ils seront commens. ensemble leurs costez AB & AC: mais AB est rationelle, & par consequent aussi rationelle AC qui luy est commens. mais les quarez de AB & AC n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AC seront rationelles commens. en puissance seulemēt.

Je dis d'avantage que CB est commens. en longueur à AB. Car d'autant que AB peut plus que AC du carré de CB, & que le nombre DG est plus grand que DF du nombre FG: Item que le tout DG est au retranché DF, comme le tout carré de AB, est au retranché carré de AC: par la 19. p. 5. le reste nombre FG est au reste carré de CB, comme le tout nombre DG est au tout carré de AB: & en changeant comme DG à FG (c'est à dire comme nombre carré à nombre carré) ainsi le carré de AB au carré de BC: & par la 9. p. 10. AB & BC sont commens. en longueur: ainsi AB & AC sont deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AC du carré de la ligne CB qui luy est commens. en longueur.



D.....F.....G

PROP. XXX.

Trouver deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement, & que la grande puisse plus que la plus petite du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur.

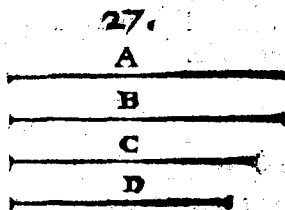
Soit trouvé le nombre DG, divisé en DF & FG, en sorte que le total DG ne soit ny à DF ny à FG comme nombre carré à nombre carré. Item soit trouvé la rationnelle AB, sur laquelle apres avoir fait le demi cercle, soit menée la ligne AC, de laquelle le carré soit au carré de AB comme le nombre DG est à DF (on la trouvera comme il a esté enseigné apres la 6. p. 10.) finalement soit menée CB: Je dis que AB & AC sont les deux lignes demandées.

Car on prouvera tout ainsi que à la précédente, que AB & AC sont rationnelles commens. en puissance seulement (d'autant que leurs quarrés ne sont entre eux comme nombre carré à nombre carré.) Pareillement tout ainsi que en la précédente, le carré de AB est au carré de BC, comme le nombre DG à FG, (ce n'est pas comme nombre carré à nombre carré) & par la 9. p. 10. AB & BC seront incommens. en longueur: ainsi AB & AC sont rationnelles commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AC du carré de la ligne CB qui luy est incommens. en longueur.

PROP. XXXI.

Trouver deux medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationnel, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du carré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouuees par la 29. p. 10. deux lignes rationnelles A & C commens. en puissance seulement, & que la plus grāde A puisse plus que la plus petite C du quarré d'une ligne qui luy soit cōmens. en longitude: Item soit trouuee B moyenne proportionnelle entre A & C, & la quatriesme en continuelle proport. D. Je dis que B & D sont les deux lignes demandees.



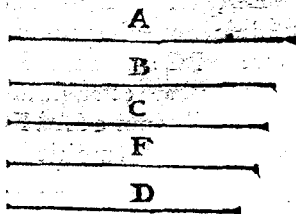
Car puis que comme A à B ainsi C à D en changeant A sera à C comme B à D: Mais A est commens. en puissance seulement à C, ainsi B sera commens. en puissance seulement à D par la 10. p. 10. Item B peut le rectangle medial de A & C par la 17. p. 6. elle sera donc medialle par la 21. p. 10. & par la 23. p. 10. D sera aussi medialle qui luy est commens. en puissance seulement: & par la 14. p. 10. A pouuant plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude aussi B pourra plus que D du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude. Item C estant moyenne proport. entre B & D son quarré (qui est rationnel) est egal au rectangle de B & D: lequel sera par consequent rationnel, ainsi B & D sont medialles commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationnel, B pouuant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude.

Que si on eust voulu que B peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommens. en longitude il ne falloit que demander pareille chose en l'hypothese de A & C comme en la prop. preced.

P R O P. XXXII.

Trouuer deux medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, & que la plus grāde puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trois lignes rationnelles commens. en puissance seulement A, C, D, & que C puisse plus que D du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude, comme enseigne la 29. p. 10. Item soit trouuee la moyenne B entre A & C: Soit aussi trouuee F laquelle soit à D comme B à C: Je dis que B & F sont les deux lignes demandees.



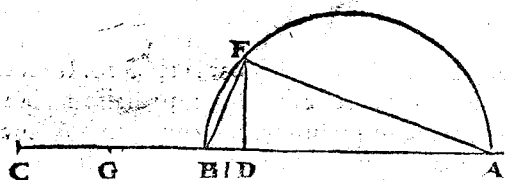
Car puis que c'est mesme construction que en la 28. p. 10. Il se prouuera comme là, que B & F sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial. Maintenant en changeant comme B à F ainsi C à D, & par

la 14. p. 10. C pouvant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, aussi B pourra plus que F du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude.

PROP. XXXIII.

Trouuer deux lignes incommensurables en puissance comprenant un rectangle medial, & le compose de leurs quarez rationel.

Soient deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude comme enseigne la 30. p. 10. & apres avoir couppe en deux également C B au point G, soit construit un rectangle sur BA égal au quarré de BG, defaillant d'une figure quarrée par la 28. p. 6. & soit iceluy rectangle de AD & DB & apres avoir faict le demy cercle sur la ligne BA & mené la perpendiculaire DF, soient menees BF & FA: Je dis que icelles lignes sont les lignes demandees.



Car puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude & que le rectangle defaillant de AB, & BD est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de GB: les deux lignes AD & DB seront incommens. en longitude par la 18. p. 10. entre lesquelles DF est moyenne proport. & comme il a esté demonstté à la 11. p. 10. elle sera incommens. en puissance à DA. Mais comme FD à DA ainsi BF à FA par la 4. p. 6. car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6. & par la 10. p. 10. BF & FA sont incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequel quarré de BA est rationel estant la ligne AB rationelle, partant le composé des quarez de BF & FA sera aussi rationel.

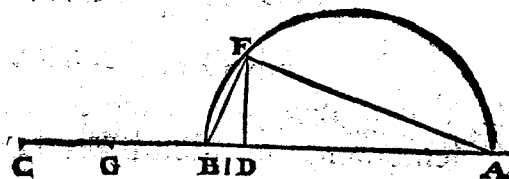
Je dis d'avantage que le rectangle de BF & FA est medial. Car le rectangle de AD & DB, est egal au quart du quarré de BC par hypothese, il est aussi egal au quarré de la moyenne proport. DF par la 17. p. 6. ainsi le quarré de FD sera egal au quarré de BG: partant DF egale à BG: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & DF ou BG son egale, car par la 8. & 4. p. 6. AB est à BF comme FA à FD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 21. p. 10. & aussi la moitié rectangle de AB & BG: & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA.

PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes incommensurables en puissance, comprenant

prenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial.

Soient deux medialles commens. en puissance seulement AB & BC comprenant vn rectangle rationel, & que AB puisse plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur par la 31. p. 10. & soit acheuée la construction comme en precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandées.



Car par la 18. p. 10. le rectangle de failant appliqué sur BA diuifera BA en B D & DA incommens. en longueur, & la moyenne proport. DF sera incommens. en puissance à BA (comme il a esté démontré en la precedente) & par la 4. p. 6. & 10. p. 10. BF & FA seront incommens. en puissance. Item le quarré de BA est medial, estant décrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le composé des deux quarrés de BF & FA est medial. reste à prouuer que le rectangle de BF & FA est rationel, le rectangle de AB & BC est rationel, aussi sera sa moitié le rectangle de AB & BG, & par consequent son egal rectangle de BF & FA, comme il a esté prouué à la precedente proposition 33. Ce qui estoit à faire.

PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes incommensurables en puissance comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrés aussi medial.

Soient deux medialles commens. en puissance seulement AB & BC comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur come nous auons enseigné à la fin de la 31. p. 10. & apres auoir acheuée la construction comme en la 33. p. 10. Je dis que BF & FA sont les lignes demandées.

Car premièrement elles sont incommens. en puissance, comme en la demonstration de la 33. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente le composé des quarrés de BF & FA fera aussi medial: Item le rectangle de AB & BC estant medial par hypothese, le rectangle de AB & BG (ou DF son egal) qui est sa moitié sera aussi medial par ce qui resulte de la 23. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF, & FA qui luy est egal comme il a esté démontré en la 33. p. 10.

Finalement d'autant que AB est incommens. en longueur à BC par hypothese, par la 13. p. 10. la moitié BC sera aussi incommens. en longueur à AB & par la 1. p. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & EG (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de BA) comme AB à BG c'est à dire incommens. & par consequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BG sera incommens. au quarré de BA, c'est à dire au composé des quarrés de BF & FA. Ce qui estoit à démonstrer.

Icy commencent les fixaines des lignes irrationnelles par la composition.

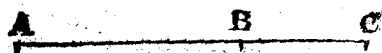
PROP. XXXVI. Six. 1.

Si deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement sont assemblees : la toute est irrationnelle soit icelle appelée Binome.

Soient assemblees deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement AB & BC : Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Car le rectangle de AB & BC est au carré de BC, comme AB à BC par la 1.

p. 6. & par la 10. p. 10. le rectangle sera incommens. au carré, & par la 13. p. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au carré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC sont rationnelles commens. en puissance seulement, leurs quarrés seront commensurables entre eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 15. p. 10. & par la 13. p. 10. les deux quarrés de AB & BC seront incômés. à deux fois le rectangle de AB & BC & par la 16. p. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarrés (qui est égal au seul carré de AC par la 4. p. 2.) est incômens. aux deux quarrés de AB & BC, lesquels ests rationaux & le composé d'iceux rationel, le carré de AC qui luy est incômés. sera irrationnel & par cōsequēt la ligne AC irrationnelle : icelle donc sera appelée binome.



PROP. XXXVII.

Si deux lignes medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel sont assemblees, la toute est irrationnelle, soit icelle appelée bimediale premiere.

Soient assemblees deux medialles AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel ainsi qu'il est ordonné en la 27. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Car par la mesme demonstration de la precedente propos. le carré de CA se trouuera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC : lequel estant rationel par hypothese, le carré de AC sera irrationnel qui luy est incommensurable par la 13. p. 10. & la ligne AC sera aussi irrationnelle laquelle sera appelée bimediale premiere.

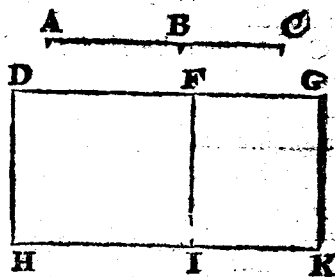


P R O P. XXXVIII.

Si deux medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la toute sera irrationnelle : soit icelle appelee bimedialle seconde.

Soient assemblees les deux medialles AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, ainsi que ordonne la 28. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la ligne rationelle DH soit appliqué le rectangle DK egal au quarré de AC, & le rectangle DI egal aux quarrés de AB & BC par la 45. p. 1. Il est evident par la 4. p. 2. que le rectangle FK est egal à deux fois le rectangle de AB & BC : lequel rectangle estant par hypothese medial, FK sera aussi medial par ce qui resulte de la 23. p. 10. car il est double d'iceluy rectangle. Item le rectangle DI, egal aux deux quarrés de AB & BC commensurables entre eux par hypothese, sera commensurable à vn chacun d'eux par la 15. p. 10. Mais iceux quarrés faits de lignes medialles sont mediaux : partant DI sera aussi medial par ce qui resulte de la 23. p. 10. ainsi les deux rectangles DI & FK estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DH, leurs autres costez DF & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH par la 22. p. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC par la 1. p. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. p. 10. & deux fois le rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC : & les deux quarrés de AB & BC estans commensurables entre eux, les deux ensemble seront commensurables au seul de BC par la 15. p. 10. & par la 13. p. 10. les deux quarrés de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DI & FK : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. DF & FG lignes rationnelles seront incommensurables en longueur : elles seront donc commens. en puissance seulement, (car autrement elles ne seroient rationnelles si elles estoient incommens.) & par la 36. p. 10. D G sera binome & irrationnel : & le rectangle DK sera irrationnel : car s'il estoit rationnel DH estant rationnelle, il faudroit par la 20. p. 10. que l'autre costé DG fut rationnel, ce qui n'est pas DK est donc irrationnel : & partant irrationnel son egal quarré de AC, & par consequent la ligne AC irrationnelle, qui sera appelee bimedialle seconde.



P R O P. XXXIX.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarez est rationel sont assemblees. La toute est irrationelle soit icelle appelée ligne maieure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, incommensur. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel par la 33. p. 10. Je dis que la toute est irrationelle.



Car par hypothese le rectangle de AB & BC estant medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial parce qui resulte de la 23. p. 10. Mais par hypothese le composé des quarez de AB & BC est rationel: partant incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC: Et par la 16. p. 10. le composé des deux rectangles & des deux quarez (qui est le quarré de AC par la 4. p. 2) sera incommens. au composé des deux quarez de AB & BC qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel: & son costé AC aussi irrationel, lequel sera appelé ligne maieure.

PROP. XL.

Si deux lignes incommensurables en puissance comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial, sont assemblees: La toute est irrationelle, soit icelle appelée ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, de telle nature que demande la propos. & qu'enseigne à trouuer la 34. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationelle.

Car puis que le composé des quarez de AB & BC est medially, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel & incommens. au composé des quarez de AB & BC, lequel estant medial: & par la 16. p. 10. le composé des deux quarez & des deux rectangles scauoir le quarré de AC par la 4. p. 2. sera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi le quarré de AC sera irrationel: & par consequent la ligne AC: laquelle sera appelée ligne pouuant vn rationel & vn medial.

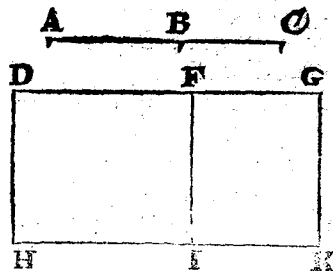
PROP. XLI.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensurable au composé

de leurs quarrez aussi medial sont assemblees : La toute est irrationnelle. Soit icelle appelee ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC de telle nature que demande la prop. & selon la 35. p. 10. le dis que la toute AC est irrationnelle.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la ligne rationnelle DH soit faite mesme construction que en la 38. p. 10. Sçavoir que le rectangle DK soit egal au carré de AC, DI aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial comme le composé d'iceux & incommens. au rectangle FK egal à deux fois le rectangle de AB & BC aussi medial : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. DF & GD seront aussi incommens. en longueur. Mais les deux rectangles DI & FK estons mediaux, & appliquez sur la rationnelle DH, feront les deux autres costez DF & FG rationaux par la 22. p. 10. Ainsi DF & FG seront rationnelles commens. en puissance seulement & par la 36. p. 10. DG sera irrationnelle. Mais DH estant rationnelle le rectangle DK sera irrationnelle comme nous auons prouué à la fin de la 38. p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle sçavoir AC sera irrationnelle : laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux.



PROP. XLII. Six. 2.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms qu'en vn point seulement.

SCHOLIE.

Auparauant que d'expliquer la diuision des six fortes de lignes irrationnelles composees, il faut remarquer en premier lieu que iamais les deux noms d'icelles lignes ne peuvent estre egaux : Autrement ils seroient entre eux commensurables en longueur, & nous les auons demontrees incommens. en longueur.

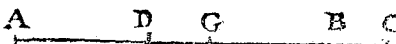
Secondement que quand l'auteur dict qu'elles ne peuvent estre diuisees qu'en vn seul point, cela s'entend qu'en toute diuision les deux parties de l'une sont egales aux deux parties de l'autre chacune à la sienne : car alors Euclide entend qu'elles ne sont diuisees qu'en vn seul point. De maniere que le contredisant apportant vne autre diuision que la proposée, on entendra que les deux parties de la diuision seront inegales aux parties de la proposée.

Tiercement que pour prouuer icelles diuisions, nous auons affaire de deux principes, outre ce qui a esté demonstré cy deuant : le premier est tel.

Si vne ligne est coupee en deux ineg. allement en vn point, & en deux ineg. allement en vn autre point, & les parties de l'une des diuisions sont inegales aux parties de l'autre diuision chacune à la sienne : les quarrez des deux lignes de la

plus inegalle diuision font plus grands, que les quarrez des lignes de la moins inegalle.

On le prouue ainsi.

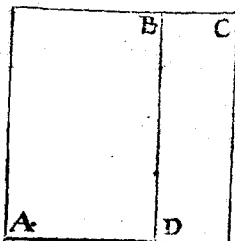
Soit AC diuisee inegallement en AD & DC: & encores plus inegallement en A  B & BC (c'est à dire que BC soit plus petite partie que AD.) Je dis que les quarrez de AB & BC sont plus grands que ceux de AD & DC.

Car si AC est coupee en deux egallement en G. Il est euident que puis que AD est plus grand que BC que DG sera plus petit que GB: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC avec le quarré de GB, est egal au quarré de GC: Item le rectangle de AD & DC, avec le quarré de DG, est aussi egal au quarré de GC: partant le rectangle de AD & DC avec le quarré DG est egal au rectangle de AB & BC avec le quarré de GB. Et en ostant les quarrez inegaux le rectangle de AD & DC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & son double aussi sera plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC & deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AD & DC & deux fois le rectangle de AD & DC. Et par consequent les composez des quarrez & rectangles, sont egaux entre eux: mais les deux rectangles de AD & DC sont plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC seront plus grands que les deux quarrez de AD & DC. Le second est tel.

Vne figure rationelle, excède vne figure rationelle, d'une figure rationelle.

Soient les deux rationelles AC & AB, estant AC plus grande que AB de DC: Je dis DC est figure rationelle.

Car AC & AB estant rationelles, elles seront aussi commens. & par la 15. p. 10. BA & DC seront commens. entre elles, & par consequent rationelles.



Venons à la demostratio de la proposition.

Soit le binome AC diuise en ses noms au point B: Je dis que on ne le diuise pas en ses noms en vn autre point.



Autrement s'il se peut faire soit diuise au point D suivant l'intention de l'auteur, il faut que AD & DC soient plus grandes ou plus petites que AB & BC chacune à la sienne: autrement si elles estoient egales elles seroient diuisees sur vn mesme point. Si AD & DC sont parties plus grandes que AB & BC, le composé des quarrez de AB & BC, plus grand que le composé des quarrez de AD & DC (comme nous auons demonsté au commencement de ceste proposition) & pour autant que iceux composez sont rationaux (car ce sont quarrez bastis sur lignes rationelles) leur excez sera aussi rationel comme nous auons demonsté: Or est il que le composé des quarrez de AB & BC avec deux fois le rectangle de AB & BC, egal au composé des quarrez de AD & DC avec deux fois le rectangle de AD & DC (car iceux sont chacun egaux au quarré de AC par la 4. p. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AB & BC, sont plus grands que les

quarrez de AD & DC, d'autant les rectangles de AB & BC soient plus petits que les rectangles de AD & DC: mais l'excez des quarrez est rationel, donc l'excez des rectangles sera aussi rationel (puis que c'est le mesme exciez) qui est contre la 26. p. 16. Car iceux rectangles par la 21. p. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AB & BC, ou AD & DC sont rationelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AC n'a peu estre diuise en ses noms que en B: Car en quelque autre point qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité.

PROP. XLIII.

La bimedialle premiere n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit la bimedialle premiere AC, diuisee en ses noms au point B en sorte que AB & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel: Je dis qu'on ne la pourra diuiser en ses noms en vn autre point.

Autrement s'il se peut faire soit diuisee en D, sçauoir que AD & DC soient mediales cōmens. en puissance seulement cōprenāt vn rectangle rationel: il s'ensuiura parce que nous auōs démontré à la 42. p. 10. Que deux fois le rectangle de AD & DC sera autāt plus grād que deux fois le rectangle de AB & BC, que les quarrez de AD & DC sont plus petits que les quarrez de AB & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux, donc leur exciez sera rationel: mais les quarrez estans mediaux il faudroit que leur exciez fust rationel, contre la 26. p. 10. Donc la ligne bimedialle premiere AC ne pouuoit estre diuisee en ses noms sinon au point B.

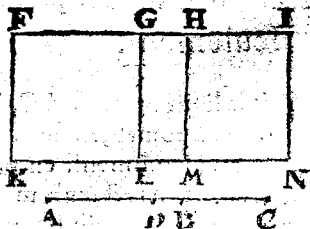
PROP. XLIV.

La bimedialle seconde, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

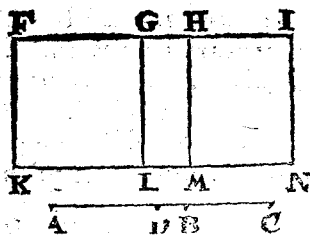
Soit la bimedialle seconde AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial: Je dis qu'elle ne pourra estre diuisee en vn autre point.

Autrement si faire se peut qu'elle soit encores diuisee en AD & DC en la sorte que dessus: & sur la ligne rationelle FK soit construit le rectangle FN, egal au quarré de AC, & FM egal aux deux quarrez de AB & BC (lequel sera medial comme iceux

quarrez) il est euident que HN sera egal à deux fois le rectangle de AB & BC, & sera medial comme iceux: & par la 22. p. 10. les deux rectangles mediaux FM & NH appliquez sur la rationelle FK, auront les autres costez FH & HI rationaux



Ité par la 1. p. 6. Le quarré de AB est au rectagle de AB & BC comme AB est à BC, laquelle luy est incommens. en longueur & par la 10. p. 10. le quarré sera incommens. au rectangle : Partant aussi incommens. à son double HN. Mais les deux quarrés de AB & BC sont commens. entre eux, & par la 15. p. 10. le composé des deux FM sera commens. à celui de AB, & par la 13. p. 10. les rectangles de FM & NH seront incommens. Aussi seront leurs bases FH & HI, lesquelles estant rationnelles & commens. en puissance eullement par la 36. p. 10. la route FI sera binome, & par la 42. p. 10. elle ne pourra estre diuisee en ses noms que au seul point H.



Maintenant si AC peut estre diuisee en D comme nous auons proposé, & que les deux quarrés de AD & DC soient plus grands ou plus petits que les deux de AB & BC (car autrement la bimediale ne seroit diuisee en vn autre point) Soiet donc plus petits: & sur la rationnelle KH soit basti le rectangle FL egal aux deux quarrés de DA & DC: & par les mesmes raisons que cy dessus, il est euident que GN rectangle sera egal à deux fois le rectangle de AD & DC: & les deux lignes FG & GI se trouueront rationnelles commens. en puissance seulement: & par la 36. p. 10. FI est binome, lequel seroit diuisee en G & en H contre la 42. p. 10. si AC estoit diuisee en autre point qu'en B.

Que si quelqu'un vouloit maintenir que FG & HI estant egales que le binome FI n'est point diuisee en diuers points en G & H: On niera l'egalité de FG & HI. Car il faudroit aussi que les rectangles FL & HN fussent egaux, scauoir les deux quarrés de AD & DC, egaux aux deux rectangles de AB & BC, ce qui est faux: par ce que les quarrés de AD & DC, sont plus grands que deux fois le rectangle de AD & DC, lesquels rectangles sont plus grands que deux fois le rectangle de AB & BC.

PROP. XLV.

La ligne maieure, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit la ligne maieure AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance,



comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationel: Iedis que on ne le pourra diuiser en vn autre point.

Autrement si faire se peut qu'elle soit diuisee en ses noms au point D. Par ce qui a esté démontré à la 42. p. 10. les composez des quarrés de AB & BC. Item de AD & DC ont vn mesme excez, que les doubles rectangles de AB & BC. Item de AD & DC. Mais d'autant que les quarrés sont rationaux leurs exces est rationel, Il faudroit donc que l'excez des rectangles fut rationel, estant iceux
mediaux

mediaux, ce qui est contraire à la 26. p. 10. Donc la ligne majeure AC, ne sera diuisee en ses noms en autre point qu'en B.

PROP. XLVI.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

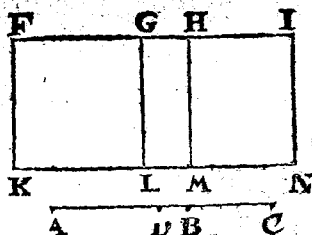
Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial. Je dis que on ne la pourra diuiser en vn autre point.

La demonstration peut estre semblable à la precedente, sçauoir que si on la diuisoit encores au point D, il s'ensuiuroit que l'excez des quarez & des rectangles, seroit rationel & irrational.

PROP. XLVII.

La ligne pouuant deux mediaux, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AC diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarez aussi medial: Je dis qu'on ne la diuifera point en ses noms en vn autre point.



Autrement si faire se peut soit diuisee au point D: & sur la rationelle FK soit faite pareille construction qu'en la 44. p. 10. Le rectangle FN egal au quarré de AC, FM egal aux deux quarez de AD & DC, & HN egal au double du rectangle de AB & BC cōme il a esté démontré en la 44. p. 10. les deux rectangles FM & HN qui sont mediaux, feront les lignes FH & HI rationelles: mais par hypothese le composé des quarez de AB & BC est incommens. au double de leur rectangle: partant aussi les rectangles FM & HN seront incommens. Ainsi les lignes rationelles FH & HI seront commens. en puissance seulement: & par la 36. p. 10. AC sera binome diuisé en ses noms au point B. Que si on veut dire que AC peut encores estre diuisé en ses noms au point D: ils'ensuiura, comme en la 44. p. 10. Que le binome FI diuisé en ses noms au point H se pourroit encores diuiser en ses noms au point G, Contre la 42. p. 10. Ainsi AC ne pouuoit estre diuisé en ses noms que au seul point B.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationelle estant proposée, & le binome diuise en ses noms: lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur.

Si le plus grand nom est commensurable en longueur à la rationelle proposée: toute la ligne soit appelée Binome premier.

Si le plus petit nom est commensurable à la rationelle proposée: toute la ligne soit appelée Binome second.

Si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable à la rationelle proposée: toute la ligne soit appelée Binome troisieme.

Lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incômésurable en longueur. Si le plus grand nom est commensurable en longueur à la rationelle: toute la ligne soit appelée Binome quatrieme.

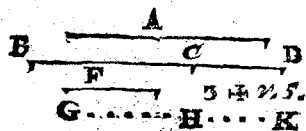
Si le plus petit nom est commensurable en longueur à la rationelle proposée: toute la ligne est appelée Binome 5. Si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longueur à la rationelle proposée, soit la toute Binome fixieme.

Icy ne se fait point mention de lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longueur à la rationelle proposée: parce que telles lignes ne sont irrationnelles: ny par consequent aucune sorte de binomes, puis que nous auons cy dessus demonstté en la 36. p. 10. que tout binome est ligne irrationnelle.

PROP. XLVIII. Six. 3.

Trouuer vn binome premier.

Soit le nombre quarré GK , diuisé en kH quarré, & HG non quarré: & soit proposée la rationelle A , avec vne autre BC , qui luy soit commun. en longitude: Et soit trouuée CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC , comme le nombre GH est à GK , ainsi qu'il est enseigné apres la 6. p. 10. Je dis que la toute BD est binome premier.



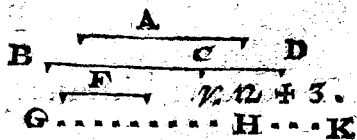
Car puis que les quarez des deux noms BC & CD sont comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes BC & CD seront rationelles, mais commun. en puissance seulement par la 9. p. 10. (car BC est rationelle) & par la 36. p. 10. BD sera binome. Je dis d'auantage qu'il est binome premier.

Car puis que les quarez de BC & CD sont entre eux comme les nombres GK & GH : Or GK est plus grand que GH , aussi le quarré de BC sera plus grand que le quarré de CD : soit donc du quarré de F . Ainsi les deux quarez de CD & F , seront egaux au quarré de BC : comme les deux nombres GH & Hk , sont egaux au seul Gk . Mais puis que le quarré total de BC est au nombre total GK , comme le retranché quarré de CD est au retranché GH : le reste quarré de F sera au reste nombre HK , comme le tout quarré de BC est au tout nombre GK : & en changeant, comme le nombre quarré GK est au nombre quarré HK , ainsi le quarré de BC est au quarré de F : & par la 9. p. 10. BC & F sont commun. en longitude. Mais BC plus grand non est commun. en longitude à la rationelle A par hypethese, & peut plus que CD du quarré de F qui luy est commun. en longitude, & par les secondes deff. BD est binome premier.

P R O P. XLIX.

Trouuer vn Binome second.

Au nombre quarré GH soit adiousté le nombre Hk , en sorte que le tout Gk soit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH : & soient proposées les deux rationelles A & CD commun. en longitude: & soit trouuée BC de laquelle le quarré soit au quarré de CD , comme Gk à GH nombre quarré à nombre quarré: Je dis que BD est binome second.



Car on prouuera premierement tout ainsi que en la precedente, que BD est binome. Pareillement que BC plus grand nom peut plus que CD plus petit nom du quarré de F qui luy est commun. en longitude. Item le plus petit nom BC est commun. en longitude à la rationelle A : & par les secondes deff. BD est binome second.

PROP. .L.

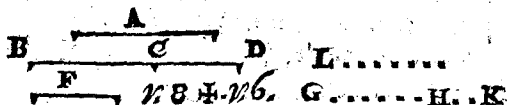
Trouuer vn binome troisieme.

Soient trouuez les deux nombres L & Gk, en sorte que GK diuisé en GH & HK le tout Gk soit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH :

& que L ne soit ne à GK ne à GH, comme nombre quarré à nombre quarré : & apres auoir trouué la rationnelle A, soit prise BC de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme le nombre L est au nombre GK : Item soit trouuee CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme le nombre Gk est à GH. Je dis que BD est binome troisieme.

Car puis que les quarez de BC & CD sont comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes BC & CD seront commens. en puissance seulement par la 9. p. 10. Item le quarré de BC est commens. au quarré de la rationnelle A (estans comme nombre à nombre non pas quarré) BC sera commens. en puissance seulement à A. & BC & CD seront rationnelles, & par la 36. p. 10. BD sera binome. Je dis d'auantage que c'est binome troisieme.

Car les trois quarez de BC, CD, & de la rationnelle A, sont l'un à l'autre comme les trois nombres L, Gk, GH, c'est à dire qu'ils ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 10. BC & CD sont incommens. en longitude à la rationnelle A. Pareillement on prouuera comme à la 48. p. 10. que B & C le plus grand nom peut plus que CD du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude (car Gk est à HK comme nombre quarré à nombre quarré) & par les secondes deff. BD est binome troisieme.

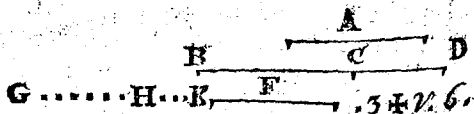


PROP. LI.

Trouuer vn binome quatrieme.

Soit le nombre quarré GK, diuisé en GH & HK en sorte que le tout ne soit a pas vne de ses parties cōme nombre quarré à nombre quarré : & apres auoir trouué les deux rationnelles

commens. en longitude A & BC, soit trouué CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme le nombre GH est à GK. Je dis que BD est binome quatrieme.

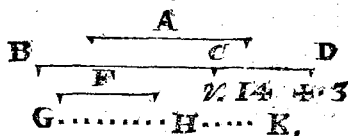


Car comme il a esté démontré au binome premier : BD sera binome. Item le plus grand nom BC est commens. en longitude à la rationelle A, & peut plus que CD du quarré de F, laquelle luy est incommens. en longitude par la 9. p. 10. (d'autant que GK n'est pas à HK comme nombre quarré à nombre quarré) & en cecy seulement il est différent du binome premier : & par les secondes deff. BD est binome quatriesme.

PROP. LII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Soit au nombre quarré GH, adiousté H K en sorte que le tout Gk ne soit à GH ny à HK comme nōbre quarré à nombre quarré : & apres auoir trouué les deux rationelles commens. en longitude A & CD, soit trouuee BC, de laquelle le quarré soit au quarré de CD, comme le nombre Gk est à GH. Je dis que BD est residu cinquiesme.

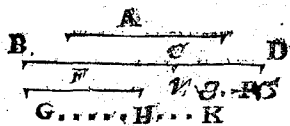


Car tout ainsi qu'il a esté démontré au binome second, BD sera premiere-ment binome: Puis CD estant plus petit nom & commens. en longitude à la rationelle. Item comme il a esté démontré en la 48. & 51. p. 10. BC peut plus que CD du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude & par les secondes deff. BD est binome cinquiesme.

PROP. LIII.

Trouuer vn binome sixiesme.

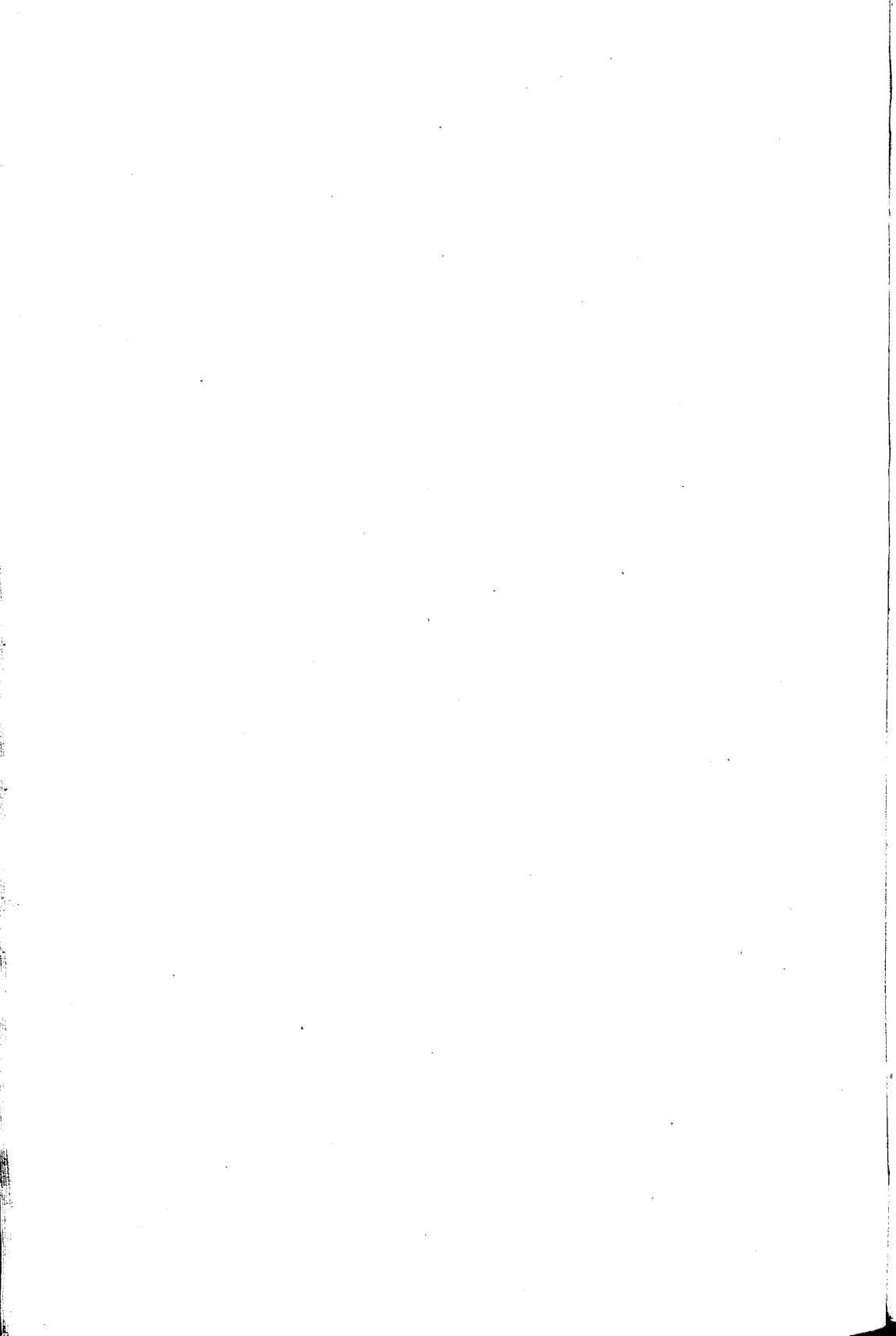
Soit le nombre GK non quarré, diuisé en G H & HK en sorte que GK ne soit à GH ny à HK, comme nombre quarré à nombre quarré. Item soit trouué le nombre L qui ne soit à GK ny à GH comme nombre quarré à nombre quarré : & apres auoir trouué la rationelle A, & BC de laquelle le quarré soit au quarré de la rationelle A, comme le nombre L est à G K: soit trouuee CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme GH à K. Je dis que BC est binome sixiesme.



Car comme il a esté monstre au binome troiesme, on prouuera premieremēt BD estre binome: en apres que les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle A, finalement que BC peut plus que CD du quarré de F qui luy est incommens. en longitude, comme au binome quatriesme & cinquiesme: & par les secondes deff. BD est binome sixiesme.

SCHOLIE.

Puis que les six sortes de binome ne sont trouuees que par benefice des nombres, & que nous auons obtenuz tous les lemmes seruans à l'inuention d'iceux, nous enseignerons icy en deux mots le moyen de les trouuer. Donc pour auoir binome premier, faut prendre nombre quelconque pour plus grand nom : & apres auoir soustraiët le quart de sa puissance, la racine du reste fera le plus petit nom : comme 4, sa puissance 16. le quart soustrait reste 12. ainsi $4 + r$ 12. est binome premier. Pour binome second, le nombre pris sera le plus petit nom : à la puissance duquel si on adiouste le tiers d'icelle, la racine quarree du tout sera le plus grand nom comme r 12. $+ 3$. Pour binome troisieme : la racine quarree de nombre quelconque non quarré sera le plus grand nom : & la racine des trois quarts du mesme pour le plus petit nom comme r 8 $+ r$ 6. Pour binome quatriesme, cinquieme, on fera ainsi que à binome premier & second, sinon qu'on osterà ou adiousterà la moitié de la puissance comme $4 + r$ 8. binome quatriesme : r 4 $+ 6$. binome cinquieme, pour binome sixieme, on prendra les racines de deux nombres non quarez l'un desquels sera double de l'autre : comme r 10. $+ r$ 5.



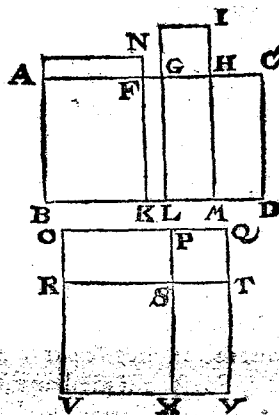
PROP. LIV. Six. 4.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome premier, la ligne pouvant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome premier AC : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est binome.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est binome premier, qu'il soit divisé en ses noms au point G , de sorte que AG soit le plus grand nom: Et soit le plus petit nom GC coupe en deux également en H , & soit sur GH décrit le carré GI qui sera le quart du carré de GC : Et sur AG , soit décrit le rectangle AN égal au carré GI , & defaillant d'une figure quarrée par la 28. p. 6. Soient aussi décrits les quarrés VS & SQ , egaux aux deux rectangles AK & FL , disposez en sorte que RS & ST fassent une ligne droite: Puis soit achevé le rectangle OY , lequel sera quarré. Maintenant il est evident que le rectangle OS , est égal au rectangle GM : Car d'autant que le rectangle AN est égal au carré GI , la ligne GH sera moyenne prop. entre AF & FN , ou son égale FG & par la 1. p. 6. le rectangle GM sera moyen proportionnel entre AK & FL , ou leurs egaux quarrés VS & SQ : Et par conséquent sera égal au rectangle OS , qui est aussi moyen proport. entre iceux quarrés par la 1. p. 6. Repetee deux fois & son égal SY sera aussi égal à l'autre HD . Et le quarré OY égal à tout le rectangle AD , & la ligne RT pourra iceluy rectangle: Laquelle ie dis qu'elle est binome.

Car puis que le rectangle defaillant AN est égal à GI quart du quarré de GC plus petit nom, & que AC est binome premier, (sçavoir que pour cela AG peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est commun. en longueur) par la 17. p. 10. AF & FG sont commun. en longueur, & par la 15. p. 10. La toute AG sera commun. à chacune de ses parties AF & FG , laquelle toute étant commun. en longueur à la rationnelle AB (pour estre AC binome premier) par la 12. p. 10. AF & FG seront rationnelles commun. en longueur à AB , & par la 19. p. 10. AK & FL seront rationaux, & leurs egaux quarrés VS & SQ : Partant rationnelles les lignes RS & ST . Pareillement AC étant binome, AG est incommens. en longueur à GC , partant aussi à sa moitié GH , & par la 13. p. 10. AF & GH seront incommens. en longueur, & les rectangles AK & GM seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. aussi incommens. leurs egaux RX & XT & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Les deux lignes rationnelles RS & ST seront incommens. en longueur, mais en puissance seulement & par la 36. p. 10. RT sera binome.

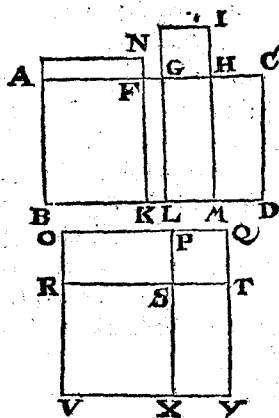


PROP. LV.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle premiere.

Soit le rectangle A D, compris de la rationnelle A B & du binome second A C: Je dis que (apres avoir fait pareille construction & demonstration que en la precedete) la ligne qui peut iceluy rectangle R T, est bimedialle premiere.

Car puis que A C est binome second, A G sera incommensurable en longueur à la rationnelle A B: Item A F & F G (qu'on prouvera estre commensurable en longueur entre elles, comme en la precedente; & par la 15. p. 10. à leur tour A G) seront par la 17. p. 10. commensurable en puissance seulement à la rationnelle A B, & seront rationnelles, & par la 22. p. 10. Les rectangles A k & F L seront mediaux, & leurs egaux quarez V S & S Q: Et partant les lignes R S & S T mediales, lesquelles on prouvera estre commensurables en puissance seulement tout ainsi que en la precedente. Et d'autant que G C est commensurable en longueur à la rationnelle A B le rectangle G D sera rationnel par la 19. p. 10. aussi sera sa moitié G M, & son egal S Y, compris des deux mediales R S & S T: Et par la 37. p. 10. R T est bimedialle premiere.



PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome troisieme, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle seconde.

Soit le rectangle A D, compris de la rationnelle A B & du binome troisieme A C (apres avoir construit comme aux precedentes) je dis que R T qui peut iceluy rectangle, est bimedialle seconde.

Car on prouvera comme en la precedente, que les deux quarez de V S & S Q sont mediaux, & partant mediales les lignes R S & S T, qu'on prouvera aussi estre commensurables en puissance seulement: Item d'autant que A C est binome troisieme, G C est commensurable en puissance seulement à la rationnelle A B, & par la 21. p. 10. Le rectangle G D sera medial, aussi sera sa moitié G M: Et par consequent medial son egal S Y (compris des deux mediales R S & S T.) Ainsi R S & S T sont deux mediales commensurables en puissance seulement comprenant un rectangle medial, & par la 38. p. 10. R T sera bimedialle seconde.

PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieur.

Soit le rectangle A D, compris du binome quatriesme A C & de la rationnelle A B (apres auoir construit comme aux precedentes) Je dis que R T qui peut iceluy rectangle, est ligne maieur.

Car puis que A C est binome quatriesme, A G plus grand nom est commens. en longueur à la rationnelle A B, & si il peut plus que G C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillant A N (egal au quart du quarré de G C) diuifera A G, en A F & F G incommens. en longueur: Et les rectangles A K & F L seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. aussi incommens. leurs egaux quarréz V S & S Q, & les lignes R S & S T seront incommens. en puissance: Mais le rectangle A L est rationel par la 19. p. 10. (qui est egal aux quarréz de V S & S Q) Et le rectangle S Y compris d'icelles lignes est medial) car son egal G M est medial, comme son double G D par la 22. p. 10. estant G C rationnelle commens. en puissance seulement à A B) & par la 39. p. 10. R T est ligne maieur.

PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome cinquiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle A D, compris de la rationnelle A B & du binome cinquiesme A C: Je dis (apres auoir construit comme aux precedentes) que R T qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que A C est binome cinquiesme, A G peut plus que G C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: Et comme en la precedente A F & F G seront incommens. Et les lignes R S & S T seront incommens. en puissance, & le compose de leurs quarréz scauoir le rectangle A L est medial par la 21. p. 10. car les lignes A B & A G sont rationnelles commens. en puissance seulement. Et d'autant que A B & G C sont commens. en longueur, par la 19. p. 10. G D est rationel, aussi sera sa moitié G M, & son egal S Y compris des lignes R S & S T, & par la 40. p. 10. R T est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

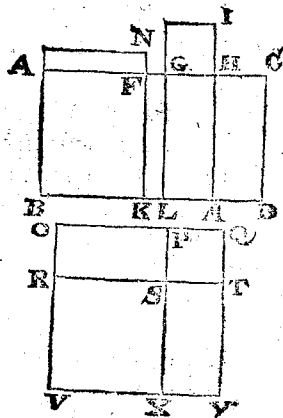
PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome sixiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est

ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome sixiesme AC , (apres auoir construit comme aux precedentes,) ie dis que RT qui peult icy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AG peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & si les deux noms sont incommens. en longueur à la rationnelle AB : Et comme il a esté démontré à la 57. p. 10. RS & ST seront incommens. en puissance, & si par la 21. p. 10. Le rectangle AL , qui est le composé de leurs quarrés est medial: Item G est aussi medial par la mesme prop. aussi medial sa moitié GM , & son egal SY compris d'icelles lignes RS , ST . Et si iceluy rectangle SY , ou son egal GM , est incommens. au composé des quarrés de RS & ST , scauoir AL : D'autant que les lignes AG & GC estant incommens. en longueur, aussi AG & GH le seront: Et par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Les rectangles AL & GM seront incommens. Et par la 41. p. 10. RT sera ligne pouuant deux mediaux.



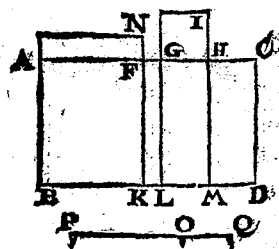
P R O P. LX. Six. 5.

Le quarré d'un binome, appliqué sur vne ligne rationnelle,
faict l'autre costé binome premier.

Soit le binome PQ diuisé en ses noms au point O , & sur la rationnelle AB soit fait le rectangle AD egal au quarré de PQ : Ie dis que l'autre costé AC est binome premier.

Soit construit AK egal au quarré de PO , & FL egal à celui de OQ : Il est euidant par la 4. p. 2. que GD est egal à deux fois le rectangle de PO & OQ , & en diuisant G egallement en H , & en menant HM parallele à CD : GM sera egal au rectangle de PO & OQ . Ie dis donc que AC est binome premier.

Car puis que PQ est binome, PO & OQ sont rationnelles commens. en puissance seulement, & leurs quarrés seront rationaux & leurs egaux rectangles AK & FL aussi rationaux, & par la 20. p. 10. les costés AF & FG seront rationnelles commens. en longueur à AB , & entre elles par la 12. p. 10. Et par la 15. p. 10. Ea toute AG sera commens. en longueur à AF & FG , & par la 12. p. 10. elle sera rationnelle & commens. en longueur à AB rationnelle: Et d'autant que le rectangle de PO & OQ est medial, son double GD sera aussi medial, & par la 22.



p. 10. GC sera rationelle commens. en puissance seulement à AB , à laquelle AG estant commens. en longitude par la 13. p. 10. AG & GC (qui sont rationelles) seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. AC est binome. Je dis en outre que cest binome premier.

Car les deux quarez de PO & OQ sont plus grands que leur rectangle deux fois: Partant AL plus grand que GD , & AG plus grand nom que GC : & si il peut plus que iceluy GC , du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude par la 17. p. 10. Aussi il se prouuera aisement comme aux precedentes que le rectangle de PO & OQ est moyen proportionel entre les quarez de PO & OQ partant AK , GM & FL , seront continuellement proport. aussi seront les lignes AF , GH , FG , & par la 17. p. 6. Le rectangle defaillant AN , sera egal à GI quart du quarré de GC , (veu mesmes que nous auons monstre que AF & FG sont commens. en longitude, car ce sont les hypotheses de la 17. p. 10.) Et puis que AG est commens. en longitude à AB , il est euident que AC est binome premier.

PROP. LXI.

Le quarré d'une bimedialle premiere, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre coste binome second.

Soit la bimedialle premiere PQ , diuisee en ses noms en O , (apres auoir construit comme en la precedente) Je dis que AC est binome second.

Car puis que PQ est bimedialle premiere, PO & OQ sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, duquel le double GD sera aussi rationel, & par la 20. p. 10. GC sera rationelle commens. en longitude à AB : Mais les deux lignes PO & OQ estans medialles, leurs quarez sont mediaux, & leurs egaux rectangles AK & FL : Et par la 15. & 23. p. 10. le total AL sera medial: Et par la 22. p. 10. son autre coste, AG sera rationel commens. en puissance seulement à la rationelle AB : Et par la 13. p. 10. AG & GC seront rationelles commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 6. AC sera binome. Je dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera aisement comme en la precedete que AG est plus grand nom, & qu'il peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude par la 17. p. 10. Nous auons aussi monstre que GC plus petit nom estoit commens. en longitude à la rationelle AB : & par les secondes deff. AC est binome second.

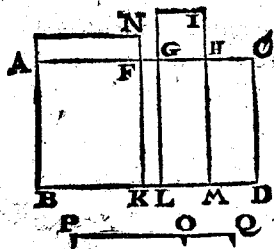
PROP. LXII.

Le quarré d'une bimedialle seconde, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre coste binome troisieme.

Soit la bimedialle seconde PQ , diuisee en ses noms en O (apres auoir construit comme aux precedentes) Je dis que AC est binome troisieme.

De iij

Car puis que PQ est bimedialle seconde, PO & OQ sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, duquel le double GD sera aussi medial, & par la 22. p. 10. son autre costé GC sera rationnel commens. en puissance seulement à AB , & comme il a esté demonstré à la precedente AG sera aussi rationnelle commens. en puissance seulement à AB . Item d'autant que comme PO à OQ ains le quarré de PO au rectangle de PO & OQ par la 1 p. 6. Il est euident que le quarré sera incommens. au rectangle (estans les deux lignes incommens. en longitude) il sera aussi incommens. au double du rectangle GD . Mais le quarré de PO estant commensurable au quarré de OQ , par la 15. p. 10. AL qui est le composé d'iceux quarréz sera commens. au quarré de PO , & par la 13 p. 10. Les rectangles AL & GD sont incommens. Et les lignes AG & GC rationnelles, seront commens. en puissance seulement & par la 36. p. 10. AC est binome.



Je diu d'auantage qu'il est binome troiesieme. Car tous les deux noms sont incommens. en longitude à la rationnelle AB , Et se prouuera comme aux deux precedentes que AG peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome troiesieme.

PROP. LXIII.

Le quarré d'une ligne maieur, applique sur vne ligne rationnelle, fait l'autre costé binome quatriesime.

Soit la ligne maieur PQ , diuise en ses noms en O (apres auoir construit comme aux precedentes) ie dis que AC est binome quatriesime.

Car puis que PQ est ligne maieur, PO & OQ sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel: partant le rectangle AL est rationel & son autre costé AG rationel commens. en longitude à la rationnelle AB . par la 20. p. 10. Item le rectangle GD estant medial, par la 22. p. 10. GC sera rationnelle commens. en puissance seulement à AB : Et par la 13 p. 10. Les rationnelles AG & GC seront commens. en puissance seulement & par la 36. p. 10. AC est binome.

Je dis d'auantage qu'il est binome quatriesime. Car puis que les lignes PO & OQ sont incommens. en puissance leurs quarréz seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles AK FL , & les lignes AF & FG incommens. (desquelles est compris le rectangle defaillant AN) & par la 18 p. 10. AG qui est commens. en longitude à la rationnelle, peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome quatriesime.

PROP. LXIV.

Le quarré d'une ligne pouvant un rationel & un medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome cinquiésme.

Soit la ligne pouvant un rationel & un medial PQ, diuisee en O (apres auoir construit comme aux preced.) Je dis que AC est binome cinquiésme.

Car puis que PQ est ligne pouvant un rationel & un medial, PO & OQ sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarréz medial: Partant le rectangle AL est aussi medial, & par la 22. p. 10. AG est rationelle commens. en puissance seulement à AB. Item le rectangle de PO & PQ estant rationel, son double GD sera aussi rationel, & par la 20. p. 10. GC sera rationelle commens. en longitude à AB & par la 13. p. 10. Les rationelles AG & GC feront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. AC sera binome. Je dis, de plus qu'il est binome cinquiésme. Car GC est commens. en longitude à la rationelle AB, & si on prouuera comme en la precedente, que AG peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome cinquiésme.

PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouvant deux mediaux, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome sixiésme.

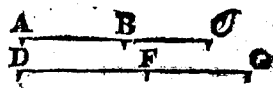
Soit la ligne pouvant deux mediaux PQ, diuisee en O (apres auoir construit comme aux precedentes) je dis que AC est binome sixiésme.

Car puis que PQ est ligne pouvant deux mediaux, PO & OQ sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarréz aussi medial: Ainsi il est euident que AL & GD sont mediaux & incommens. & par la 22. p. 10. Leurs autres costez seront rationaux commens. en puissance seulement entre eux & à la rationelle AB: & par la 36. p. 10. AC est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle AB: Et comme il a esté demonsté aux precedentes AG peut plus que GC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome sixiésme.

PROP. LXVI. Six. 6.

La ligne commens. en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre,

Soit la ligne DG, commenf. en longitude au binome AC, ie dis qu'elle est auffi binome de mefme ordre.



Qu'il ne foit ainfi (eftant AC binome diuifé en fes noms en B) de DG soit retranchée DF qui foit à AB, comme DG eft à AC : par la 19. p. 5. le refte FG fera au refte BC, comme le tout eft au tout : & par la 11. & 16. p. 5. AB fera à BC cōme DF eft à FG. Mais AB & BC font rationnelles commenf. en puiffance feulement, & par la 10. p. 10. DF & FG feront rationnelles commenf. en puiffance feulement (car DF eft commenf. à la rationnelle AB eftant à icelle comme la toute à la toute) & par 36. p. 10. DG eft binome. Maintenant ie dis pu'il eft auffi binome de mefme ordre.

Car fi AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy foit commenf. en longitude, auffi par la 14. p. 10. DF pourra de mefme plus que FG : Et fi AB. eft commenf. en longitude à la rationnelle, auffi fera DF par la 10. p. 10. Et AC & DG feront binome premier : Si BC eft commenf. en longitude à la rationnelle auffi fera FG, ainfi AC & DG feront binome fecond : Si AB & BC font incommenf. en longitude à la rationnelle auffi feront DF & FG, & AC & DG feront binome troifiēme. Le refte eft aifé par la 14. p. 10. & 10. p. 10. Partant AC & DG font binomes de mefme ordre.

PROP. LXVII.

La ligne commenf. à vne bimedialle, eft auffi bimedialle de mefme ordre.

Soit la ligne DG, commenf. à la bimedialle AC, ie dis qu'elle eft auffi bimedialle de mefme ordre.

Car (apres auoir conſtruit comme en la precedente) AB fera à BC, comme DF à FG, & AB commenf. à DF : Mais AB & BC font medialles commenf. en puiffance feulement, & par la 24. & 10. p. 10. DF & FG feront medialles commenf. en puiffance feulement : Et DG fera bimedialle. Maintenant comme AB à DF ainfi BC à FG, & par la 22. p. 6. Le quarré de AB fera au quarré de DF, comme le rectangle de AB & BC eft au rectangle de DF & FG (eftant iceux rectangles ſemblables d'autant qu'ils ont les coſtez proport.) Mais le quarré de AB eft commenf. au quarré de DF, ainfi par la 10. p. 10. les rectangles ſeront auffi commenf. que ſi l'un eft rationnel, l'autre ſera auffi rationnel Et AC & DG ſeront bimedialles premieres : Que ſi l'un des rectangles eft medial, l'autre ſera auffi medial, & AC & DG ſeront bimedialles ſecondes.

PROP. LXVIII.

La ligne commenf. a vne ligne maieur, eft auffi ligne maieur.

Soit la ligne DG, commenf. à la ligne maieur AC, ie dis qu'elle eft auffi ligne maieur.

Car

Car (apres auoir construit comme aux precedentes) AB sera à BC comme DF à FG, & AB commens. à DF: Mais AB & BC sont incommens. en puissance, aussi DF & FG seront incommens. Item puis que icelles lignes AB BC DF FG sont proport. par la 22. p. 6. leurs quarez seront proportionaux, & en composant, les deux de AB & BC seront au seul de AB, comme les deux de DF & FG sont au seul de DF, lequel estant commens. au carré de AB, aussi les deux de DF & FG seront par la 10. p. 10. commens. aux deux de AB & BC: & seront rationaux comme iceux. Item on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DF & FG est commens. au rectangle de AB & BC: lequel estant medial, aussi sera celui de DF & FG: & DG sera ligne majeure.

PROP. LXIX.

La ligne commens. a vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, est aussi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit la ligne DG commens. à la ligne pouuant vn rationel & vn medial AC. Je dis qu'elle est aussi pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction que aux precedentes) on prouuera que comme AB & BC sont incommens. en puissance aussi le seront DF & FG. Item les quarez de AB & BC composez seront commens. au composé des quarez de DF & FG, & le rectangle de AB & BC sera commens. au rectangle de DF & FG, mais le composé des quarez de AB & BC est medial & leur rectangle rationel, aussi le composé des quarez de DF & FG sera medial & leur rectangle rationel: & DG sera ligne pouuant vn rationel & vn medial par la 40. p. 10.

PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux mediaux, est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne DG, commens. à la ligne pouuant deux mediaux AC. Je dis aussi qu'elle est ligne pouuant deux mediaux.

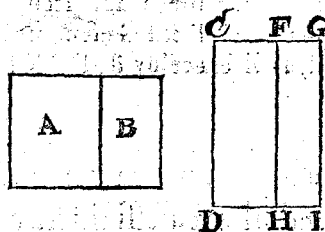
Car, apres construction faite comme aux precedentes, on trouuera tout de mesme que DF & FG sont incommens. en puissance, que le composé de leurs quarez est medial, & leur rectangle medial: Mais puis que le composé des quarez de AB & BC, est au composé des quarez de DF & FG, comme le carré de AB au carré de DF: Et que par la 22. p. 6. comme le carré de AB au carré de DF, ainsi le rectangle de AB & BC au rectangle de DF & FG: par la 11. p. 5. Le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en changeant, comme le composé des quarez de AB & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarez de DF & FG est incommens. à leur rectangle, Et par la 41. p. 10. DG est ligne pouuant deux mediaux.

PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationnelle & vne mediale sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soient ioinctes deux superficies A rationelle & B mediale, ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car premierement les deux superficies ne scauroient estre egales (car où elles seroient toutes deux rationnelles ou toutes deux mediales) Soit donc premieremēt A plus grande que B: Et sur la rationelle CD soient batis les deux rectangles CH, egal à A: & FI, egal à B. Donc CH sera rationelle, & FI mediale plus petite que CH: Et par la 20. & 22. p. 10. CF & FG seront rationnelles, CF estant commens. en longitude à CD, & FG, commens. à icelle en puissance seulement: Et par la 13. p. 10. CF & FG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. CG sera binome diuise en ses noms en F: Et par la 1. p. 6. CH estant plus grande que FI, CF sera le plus grand nom, lequel peut plus que FG du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude: Si commens. (estant CF commens. en longitude à la rationelle CD) CG sera binome premier: Et par la 54. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CG sera binome quatriesme, & par la 57. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne maieure. Que si A est plus petit que B, aussi CH sera plus petit que FI, & CF sera le plus petit nom commens. à la rationelle CD: & par ce moyen CG sera binome second ou cinquiesme: Si binome second, par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale premiere. Si binome cinquiesme, par la 58. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouuant vn rationel & vn medial.



PROP. LXXII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Soient les deux superficies mediales incommens. A & B: Ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Soit faicte construction comme en la precedente sur la rationelle CD: Les rectangles CH & FI seront mediaux & incommens. Et par la 22. p. 10. CF & FG seront rationnelles commens. en puissance seulement entre elles, & à la ration-

nelle CD: Et par la 36. p. 10. CG fera binome, Soit donc CF le plus grand nbm. Car CF & FG ne scauroient estre egales d'autant qu'elles sont incommens. en longueur: Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne qui luy est commun. ou incommens. en longueur. Si commens. CG est binome troisieme (estans les deux noms incommens. en longueur à la rationelle) & par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimedialle seconde: Si incommens. GC fera binome sixieme, & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 59. p. 10. ligne pouvant deux mediaux.

SCHOLIE.

Le binome & les suivantes cinq sortes de lignes irrationelles sont differentes entre elles & à la medialle, Car le quarré d'une ligne medialle, appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé rationel commun. en puissance seulement à la rationelle à laquelle il est appliqué par la 22. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre costé binome premier.

Le quarré d'une bimedialle premiere, fait l'autre costé binome seconde.

Le quarré d'une bimedialle seconde, fait l'autre costé binome troisieme.

Le quarré d'une ligne majeur, fait l'autre costé binome quatrieme.

Le quarré d'une ligne pouvant un rationel & un medial, fait l'autre costé binome cinquieme.

Le quarré d'une ligne pouvant deux mediaux, fait l'autre costé binome sixieme.

Mais il faut tousiours entendre qu'ils soient appliquez sur vne ligne rationnelle. Et puis que tous ces costez sont differens entre eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationelles sont differentes entre elles.

Icy commencent les Sixaines des lignes irrationelles par le retranchement.

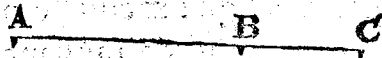
PROP. LXXIII.

Si d'une ligne rationelle, on retranche vne ligne rationelle commun. en puissance seulement à la toute, le reste est irrationel: Soit appelle Residu.

Soit retranchée de la rationelle AC la rationelle AB, en sorte que AC & AB soient rationelles commun. en puissance seulement: Je dis que le reste BC est irrationel.

Car par la 1. p. 6. comme AC est à AB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC & AB: mais AC est incommens. en longueur à AB, & par la 10. p. 10. Le quarré de AC est incommens. au rectangle

Ee ij

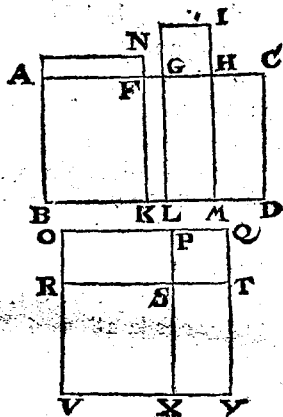


PROP. LV.

Si yn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle premiere.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome second AC : Je dis que (apres avoir fait pareille construction & demonstration que en la precedete) la ligne qui peut iceluy rectangle RT , est bimedialle premiere.

Car puis que AC est binome second, AG sera incommens. en longueur à la rationnelle AB : Item AF & FG (qu'on prouvera estre commens. en longueur entre elles, comme en la precedente, & par la 15. p. 10. à leur toute AG) seront par la 17. p. 10. commens. en puissance seulement à la rationnelle AB , & seront rationnelles, & par la 22. p. 10. Les rectangles AK & FL seront mediaux, & leurs egaux quarez VS & SQ : Et partant les lignes RS & ST mediales, lesquelles on prouvera estre commens. en puissance seulement tout ainsi que en la precedente. Et d'autant que GC est commens. en longueur à la rationnelle AB le rectangle GD sera rationel par la 19. p. 10. aussi sera sa moitié GM , & son egal SY , compris des deux mediales RS & ST : Et par la 37. p. 10. RT est bimedialle premiere.



PROP. LVI.

Si yn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome troisieme, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle seconde.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome troisieme AC (apres avoir construit comme aux precedentes) ie dis que RT qui peut iceluy rectangle, est bimedialle seconde.

Car on prouvera comme en la precedente, que les deux quarez de VS & SQ sont mediaux, & partant mediales les lignes RS & ST , qu'on prouvera aussi estre commens. en puissance seulement: Item d'autant que AC est binome troisieme, GC est commens. en puissance seulement à la rationnelle AB , & par la 21. p. 10. Le rectangle GD sera medial, aussi sera sa moitié GM : Et par consequent medial son egal SY (compris des deux mediales RS & ST .) Ainsi RS & ST sont deux mediales commens. en puissance seulement comprenant un rectangle medial, & par la 38. p. 10. RT sera bimedialle seconde.

PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un binome quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieur.

Soit le rectangle A D, compris du binome quatriesme A C & de la rationelle A B (apres auoir construit comme aux precedentes) Je dis que R T qui peut iceluy rectangle, est ligne maieur.

Car puis que A C est binome quatriesme, A G plus grand nom est commun. en longueur à la rationelle A B, & si il peut plus que G C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillant A N (egal au quart du quarré de G C) diuisera A G, en A F & F G incommens. en longueur: Et les rectangles A K & F L seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. aussi incommens. leurs egaux quarez V S & S Q, & les lignes R S & S T seront incommens. en puissance: Mais le rectangle A L est rationel par la 19. p. 10. (qui est egal aux quarez de V S & S Q) Et le rectangle S Y compris d'icelles lignes est medial) car son egal G M est medial, comme son double G D par la 22. p. 10. estant G C rationelle commun. en puissance seulement à A B) & par la 39. p. 10. R T est ligne maieur.

PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une lignerationelle & d'un binome cinquiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle A D, compris de la rationelle A B & du binome cinquiesme A C: Je dis (apres auoir construit comme aux precedentes) que R T qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que A C est binome cinquiesme, A G peut plus que G C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: Et comme en la precedente A F & F G seront incommens. Et les lignes R S & S T seront incommens. en puissance, & le compose de leurs quarez scauoir le rectangle A L est medial par la 21. p. 10. car les lignes A B & A G sont rationelles commun. en puissance seulement. Et d'autant que A B & G C sont commun. en longueur, par la 19. p. 10. G D est rationel, aussi sera la moitié G M, & son egal S Y compris des lignes R S & S T, & par la 40. p. 10. R T est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un binome sixiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est

de AB & AC : partant aussi a son double : mais les quarez de AB & AC sont commens. & par la 15. p. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AC, & par la 13. p. 10. les quarez de A C & AB sont incommens. à deux fois le rectangle de AC & AB, lesquels avec le quarré de BC estans egaux aux deux quarréz de AB & AC par la 7. p. 2. il s'ensuivra que le quarré de BC avec deux fois le rectangle de AB & AC seront incommens. à iceux deux rectangles : Et par la 16. p. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de BC (où les deux quarez de AB & AC) seront incommens. au quarré de BC lesquels estans rationaux : (car ils sont descriptz sur lignes rationelles) le quarré de BC sera irrationnel : Partant la ligne BC sera aussi irrationnelle appelée Residu.



PROP. LXXIV.

Si d'une ligne mediale, on retranche vne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec la toute vne rectangle rationel, le reste est irrationnel: Soit appelé residu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle on retranche la mediale AB en sorte que AB & AC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel: Iedis que le reste BC est irrationnel.

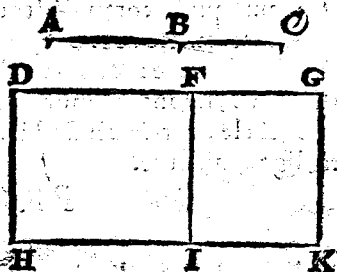
Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarez seront mediaux mais incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel : Et par la 7. p. 2. deux fois le rectangle de AB & AC avec le quarré de BC (estans egaux aux quarez de AB & AC) seront incommens. au double du rectangle de AB & AC : & par la 15. p. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle AB & AC, lequel estant rationel, le quarré de BC sera irrationnel, & la ligne BC irrationnelle, qu'on appellera residu medial premier.

PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale on retranche vne ligne mediale commens. en puissance seulement à la toute comprenant avec icelle vn rectangle medial le reste est irrationnel. Soit appelé residu medial second.

Soit la mediale AC, de laquelle on retranche la mediale AB En sorte que AC & AB soient commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial: ie dis que le reste BC est irrationel.

Car si on fait le rectangle DK egal aux deux quarrez de AB & AC, duquel on retranche DI egal à deux fois le rectangle de AB & AC, le reste FK par la 7. p. 2. sera egal au quarré de BC, Mais AC & AB estant



medialles, leurs quarrez seront mediaux & commens. & par la 15. p. 10. Le composé d'iceux est medial DK. Item le rectangle de AC & AB est medial, & par consequent son double DI aussi medial: mais par la 26. p. 10. vn medial n'est pas plus grand qu'un medial d'une figure rationelle, partant FK sera irrationel: & BC qui le peut aussi irrationel, qu'on appellera residu medial second.

SCHOLIE.

Quelqu'un pourroit s'estonner pourquoy nous nous sommes esloignez de la diligence de Theon en demonstrent ceste prop. & la 78. suivante, pensant que la conclusion n'est pas si certaine que celle de Theon. Car encores que par la 26. p. 10. l'excez des inegaux mediaux soit irrationel, il peut estre aussi medial, & le reste BC seroit aussi medial: qui est contre l'intention de l'auteur qui veut que routes ces lignes irrationelles soient differentes de la mediale. Mais on pourroit obiecter le mesme contre les conclusions des quatre autres sortes de residu auxquelles on prononce que tout ce qui est incommens. au rationel, est irrationel: & il pourroit estre aussi medial, ce qui n'est à pas vne sorte de residu: Partant il est euident que ce n'est pas icy le lieu de demonstrier la difference de ces lignes, tant entre elles que de la mediale: il suffit seulement de monstrier qu'elles sont irrationelles: Et ceste demonstration, est plus briefue, facile, & plus intelligible que celle de Theon ny de Campanus.

PROP. LXXVI.

Si d'une ligne droicte on en retranche vne partie incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: le reste sera irrationel: Soit appellé ligne Mineure.

Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche AB incommens. en puissance à la toute AC; comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez est rationel: Ie dis que le reste BC est irrationel.



Car puis que le composé des quarrez de AB, & AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial, partant aussi au double d'iceluy rectangle : & comme il a esté démontré à la 73. p. 10. iceux quarrez de AC & AB, seront incommens. au carré de BC, lesquels ensemble faisant vn rationel : le carré de BC est irrationel, & BC ligne irrationelle, qu'on appellera ligne mineure.

PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite on retranche vne partie Incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, le reste sera irrationel : soit appelé ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche AB incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez est medial : Je dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationel, aussi sera son double, & incommens. au composé des quarrez de AC & AB, lequel est medial : & par ce qui a esté démontré à la 74. p. 10. le reste BC sera irrationel appelé ligne faisant avec vne superficie rationelle tout medial, ainsi appelé à cause que le carré d'icelle ligne adoucté avec vne superficie rationelle fait vn tout medial comme il paroistrà à la 109. p. 10.

PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite on retranche vne partie incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, Incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial, le reste est irrationel, soit appelé ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche la ligne AB incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial. Je dis que le reste BC est irrationel.

Car si on fait la même construction que en la 75. p. 10. On concludra comme à icelle que le rectangle FK est irrationel, partant aussi irrationelle la ligne BC qui peut iceluy : qu'on appellera ligne faisant avec vne superficie mediale vn

tout medial: ainsi appellée par ce que le quarré d'icelle avec vne supercie mediale fait vn tout medial comme il a paroïstra à la 110. p. 10.

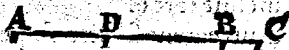
S C H O L I E.

En ces six propositions dernières, ou l'auteur monstre l'origine des residus il ne veut dire autre chose sinon que si aux six sortes de lignes irrationelles, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est residu. Comme si du binome $4 + 10$. du plus grand nom 4. on retranche le plus petit, restera $4 + 10$. lequel residu est irrationel: aussi si du plus grand nom d'une bimédiale on retranche le plus petit nom ce qui reste est irrationel appelle residu medial. Si du plus grand nom de la ligne majeure on retranche le plus petit nom ce qui reste est ligne mineure, &c.

PROP. LXXIX.

On ne scauroit adiouster au residu, qu'une seule ligne rationelle commens: en puissance seulement à la route.

Soit le residu AD, auquel on adiouste DB en sorte que AB & BD soient rationelles commens: en puissance seulement: Je dis qu'on ne y adiousterà pas une autre de même sorte.



Autrement soit adiouste DC s'il est possible:

en sorte que AC, & CD soient rationelles commens, en puissance seulement. Maintenant par la 7. p. 2. les deux quarrés de AC & CD sont plus grands que le rectangle de AC & CD deux fois, du quarré de AD. Pareillement les deux quarrés de AB, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AB & BD, du même quarré de AD, & en changeant les quarrés excéderont autant les quarrés, que les rectangles excèdent les rectangles, sçavoir du quarré de AD: & d'autant que tous les quarrés sont rationaux, leur excez sera rationel, & AD sera rationelle: Pareillement les rectangles estant mediaux, leur excez sera medial, & par la 26. p. 10. irrationel, & AD sera irrationelle. Mais tantost elle estoit rationelle: ce qui ne peut estre. Dont on n'a peu adiouster au residu AD autre ligne convenable que DB.

PROP. LXXX.

On ne scauroit adiouster au residu medial premier, qu'une seule ligne mediale commens: en puissance seulement à la route, comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AD, auquel on adiouste la mediale BD, en sorte que AB, & BD, soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel. Je dis que on ne y adiousterà pas une autre en.

mesme sorte.

Autrement soit encores adiouste DC selon le requis s'il est possible. Maintenant par la 7. p. 2. il se prouuera comme en la precedenté que les quarez de AC, & CD, excèdent les quarez de AB, & BD du quarré de AD. Item que les rectangles de AC & CD excèdent les rectangles de AB & BD du mesme quarré de AD: Or l'excez des quarez qui sont mediaux doit estre irrationnel, & l'excez des rectangles qui sont rationaux doit estre rationel, ainsi le quarré de AD seroit rationel & irrationnel ce qui est absurde. Donc à AD on n'a peu adiouster autre ligne que BD selon le requis.

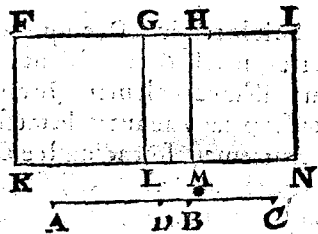
PROP. LXXX.

On ne scauroit adiouster au residu medial second, qu'une seule ligne mediale commens: en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial.

Soit au residu medial second A D adiouste DB en la sorte que demande la proposition: Je dis que on ny en adioustera pas vne autre en la mesme sorte.

Autrement si faire se peut, soit adiouste vne autre DC en la sorte requise. Et sur la rationelle FK soit basti FM egal aux deux quarez de AB & DB, & par la 7. p. 2. apres auoir basti GM egal à deux fois le rectangle de AB & BD: FL sera egal au quarré de AD: Item soit basti FN egal aux deux quarez de AC & DC, puis que FL est egal au quarré de AD aussi GN sera egal à deux fois le rectangle de AD & DC par la 7. p. 2.

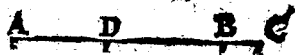
Maintenant les quarez de AB & DB sont mediaux (estans faits de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial, partant leurs egaux rectangles FM & GM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FK, auront les autres costez FH & GH rationaux commens: en puissance seulement à FK par la 22. p. 10. en apres le quarré de AB estant au rectangle de AB, & BD, comme AB est à BD, par la 1. p. 6. elles sont incommens. en longitude, & par la 10. p. 10. le quarré de AB sera incommens. au rectangle de AB & BD, & à son double GM. Item le quarré de BD est commens. au quarré de AB & par la 15. p. 10. leur total FM sera commens. au quarré de AB, auquel GM est incommens. Et par la 13. p. 10. FM & GM seront incommens. aussi seront les lignes FH & GH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. lesquelles estant rationnelles seront commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. FG sera residu & GH sa conuenable. Par mesme discours FG se trouuera residu, & la conuenable GI (si on maintient que DC soit bien adiouste à AD, & selon le requis) Ce qui seroit contre la 79. p. 10. Donc au residu medial AD on n'a peu adiouster autre conuenable que DB.



PROP. LXXVII.

On ne scauroit adiouster à la ligne mineure, qu'une seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel.

Soit adioustée à la ligne mineure AD, la ligne BD en la sorte requise: Je dis que on n'y en pourra adiouster d'autre en la mesme sorte.



Autrement soit adioustée DC selon le requis s'il est possible: il se prouvera comme en la 79. p. 10. que les deux quarez de AB & BD excèdent autāt deux fois le rectangle de AB & BD, que les quarez de AC & CD excèdent deux fois le rectangle de AC & DC & en chargeant les quarez excèdent les quarez d'un mesme excez, que les rectangles excèdent les rectangles. Or estans iceux quarez rationaux & les rectangles mediaux, il s'ensuiura que un mesme excez seroit rationel & irrationel. Donc DC n'a pas esté adiousté selon le requis.

PROP. LXXXI.

On ne scauroit adiouster à la ligne faisant avec une superf. rationelle un tout medial, qu'une seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel, mais le composé de leurs quarez medial.

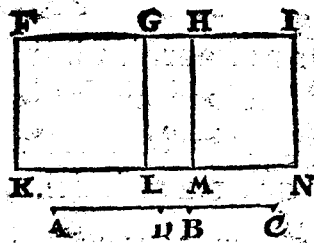
Soit la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial AD, à laquelle on adiouste DB en la sorte que demande la p. Je dis que on ny pourra adiouster une autre en la mesme sorte.

Autrement s'il est possible soit adioustée DC selon le requis: il se prouvera comme en la precedente que les quarez de AC, & CD excèdent les quarez de AB & BD d'un mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & CD excèdent deux fois le rectangle de AB, & BD, sçavoir du quarré de AD: lequel comme en la precedente seroit rationel & irrationel si on pouoit encores adiouster CD selon le requis.

PROP. LXXXIV.

On ne scauroit adiouster à la ligne faisant avec une superf. mediale un tout medial, qu'une seule incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarez aussi medial.

Soit la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial AD, à laquelle on adiouste BD en la sorte que demande la prop. le dis que on n'y en pourra adiouster vne autre en la mesme sorte.



Autrement soit adioustée DC en la sorte requise s'il est possible (apres auoir construit ainsi que en la 81. p. 10.) le composé des quarez de AB & BD étant medial & incommens. à deux fois le rectangle de AB & BD aussi medial, leurs egaux rectangles FM, & GM seront mediaux & incommens. Et par la 22. p. 10. estans appliquez sur la rationnelle FK leurs autres costez FH, & GH seront rationelles, & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. commens. en puissance seulement, (puis que leurs rectangles sont incommens.) & par la 73. p. 10. FG sera residu, auquel GH sera la conuenablement adioustée: Que si DC estoit adioustée à AD autre que BD selon le requis, on pourroit aussi adiouster au residu FG vne autre conuenable que GH, sçauoir GI: contre la 79. p. 10. Donc on ne pouuoit adiouster autre ligne conuenable à AB, sinon DB.

DEFINITIONS TROISIEMES.

Estant proposée vne ligne rationelle, & le residu: Lors que la toute composée du residu & de l'adioustée, peut plus que l'adioustée, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

Si la toute est commens. à la rationelle, le residu soit residu premier.

Si l'adioustée est commens. à la rationelle, Soit residu second.

Si ni l'une ny l'autre est commens. à la rationelle, Soit residu troisieme.

Lors que la toute peut plus que l'adioustée, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

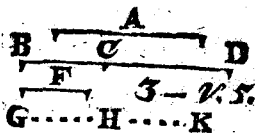
Si la toute est commens. à la rationelle, Soit residu quatriesme.

Si l'adioustée est commens. à la rationelle, Soit residu cinquieme.

Si ni l'une ni l'autre est commens. à la rationelle, Soit residu sixieme.

Trouuervn residu premier.

Soient deux lignes rationelles commens. en longitude A & BD, Item soit trouué le nombre quarré GK qui puisse estre diuisé en nombre quarré KH, & non quarré HG: Et de la ligne BD soit retranché CD de laquelle le quarré soit au quarré de BD, comme le nombre GH est au nombre GK (comme il a esté enseigné à la fin de la 6. p. 10.) Je dis que BC est residu premier.



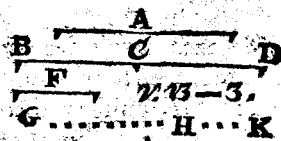
Car BD étant rationnelle, son quarré sera aussi rationnel, & le quarré de CD qui est à iceluy comme nombre à nombre, sera aussi rationnel: Et partant rationnelle la ligne CD, mais d'autant qu'ils ne sont pas comme nombre quarré, les lignes rationelles BD & CD seront commens. en puissance seulement & par la 73. p. 10. BC est residu.

Je dis dauantage qu'il est residu premier: Car BD étant plus grande que CD elle pourra plus que CD: soit du quarré de F. Ainsi les quarez de CD & F, seront egaux au quarré de BD: comme les deux nombres GH & HK sont egaux au seul de GK: Et par ainsi le tout quarré de BD étant au total GK, comme le retranché quarré de CD est au retranché nombre GH: par la 9. p. 5. le reste quarré de F sera au reste nombre HK, comme le tout quarré de BD est au total nombre GK: & en changeant le quarré de BD sera au quarré de F, comme GK est à HK c'est à dire comme nombre quarré est à nombre quarré: Et par la 9. p. 10. BD & F seront commens. en longitude: Ainsi la toute BD commens. en longitude à la rationelle A, Et peut plus que CD adioustée, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude. Et par les tierces deff, BC est residu premier.

P R O P. LXXXVI.

Trouuervn residu deuxiesme.

Soient les deux rationelles commens. en longitude A & CD, & au nombre quarré GH soit adiousté HK, en sorte que GK soit à HK, comme nombre quarré à nombre quarré: mais non pas GK à GH comme nombre quarré à nombre quarré: & soit trouué BD, de laquelle le quarré soit au quarré de CD, comme GK est à GH: si d'icelle on retranche CD, ie dis que BC est residu second.



Car le quarré de la rationelle CD est au quarré de BD comme nombre à nombre, par consequent rationnel, & la ligne BD rationnelle: mais n'estant pas comme nombre quarré à nombre quarré, les rationelles BD & CD seront commens. en puissance seulement, par la 9. p. 10. Et par la 73. p. 10. BC sera residu.

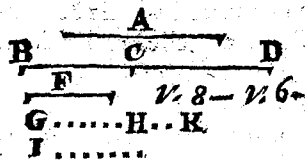
Il se prouuera pareillement comme en la précédente que BD peut plus que

CD du quarré d'une ligne qui luy est commun en longitude. Item que l'adionnée CD est commun en longitude à la rationnelle A: Et par les tierces deff. BC est residu second.

PROP. LXXXVII.

Trouver vn residu troisieme.

Soit la rationnelle proposée A, & les nombres Gk & I: & après avoir divisé Gk en GH & HK en sorte que Gk soit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH: Et que I ne soit ny GK ny à HG comme nombre quarré à nombre quarré: Item soit trouvé BD,



de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme I est à GK: Et d'icelle soit retranchée CD, de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme I à GH. Je dis que BC est residu troisieme.

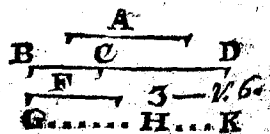
Car il est evident que puis que comme le nombre Gk à I ainsi le quarré de BD à A comme I à GH ainsi le quarré de A au quarré de CD & en raison egale comme Gk à GH ainsi le quarré de BD au quarré de CD, mais Gk n'est à GH comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 10. BD & CD seront commun. en puissance seulement, mais elles sont aussi rationnelles, car leurs quarrés sont commun. à la rationnelle A & par la 73. p. 10. BC est residu, je dis d'auantage qu'elle est residu troisieme.

Car les quarrés de BD & CD ne sont pas au quarré de A comme nombre quarré est à nombre quarréains seulement comme les nombres GH & GK au nombre I: & par la 9. p. 10. BD & CD seront incommun. en longitude à la rationnelle A. On prouuera aussi comme en la 85. p. 10. que BD peut plus que CD du quarré de la ligne F qui luy est commun. en longitude & par les tierces deff. BC est residu troisieme.

PROP. LXXXVIII.

Trouver vn residu quatrieme.

Soient trouuées les deux rationnelles A & BD commun. en longitude & soit trouué le nombre quarré GK divisé en sorte que GK ne soit à GH ny à HK comme nombre quarré à nombre quarré & soit trouuée la ligne CD de laquelle le quarré soit au quarré de BD comme GH est à GK, je dis que BC est residu quatrieme.



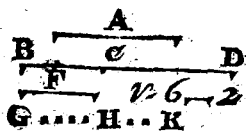
Car il se prouuera ainsi que au residu premier que BC est residu. Maintenant BD étant plus grand que CD elle pourra plus que icelle soit du quarré de F & comme au residu premier comme le nombre GK à HK ainsi le quarré de BD au quarré de F, mais les deux nombres ne sont entre eux comme nombre quarré

nombre carré & par la 9. p. 10. BD peut plus que CD du carré de F qui luy est incommens. en longueur, (BD étant commens. en longueur à la rationnelle) par les tierces deff. BC est residu quatriesme.

P R O P. LXXXIX.

Trouuer vn residu cinquiesme.

Soient trouuées les deux lignes rationnelles commens. en longueur A & CD & au nombre carré GH soit adiousté HK en sorte que le tout GK ne soit à GH ny HK comme nombre carré à nombre carré, & soit trouuée BD de laquelle le carré soit au carré de CD comme GK à GH, ie dis que BC est residu cinquiesme.

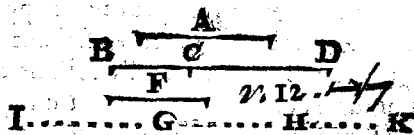


Car on prouuera comme au residu second que BC est residu, & comme au residu quatriesme que BD peut plus que CD du carré de F qui luy est incommens. en longueur (étant CD commens. en longueur à la rationnelle A) BC sera residu cinquiesme par les tierces deff.

P R O P. XC.

Trouuer vn residu fixiesme.

Soit la rationnelle A & le nombre non carré GK diuisé en GH & HK en sorte que le tout ne soit à ses parties comme nombre carré à nombre carré & soit trouué le nombre I qui ne soit ny à Gk ny à GH comme nombre carré à nombre carré. Item



soient trouuées les deux lignes BD & CD desquelles les quarez soient au carré de la rationnelle A comme les nombres Gk & GH sont à I ie dis que BC est residu fixiesme.

Car comme il a esté démontré au residu troisieme le carré de BD se trouuera au carré de CD non comme nombre carré à nombre carré, & par la 9. p. 10. elles seront incommens. en longueur: mais elles seront rationnelles estans leurs quarez au carré de la rationnelle A comme nombre à nombre ainsi elles seront rationnelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. BC est residu & comme au binome quatriesme la toute BD peut plus que l'adioustee CD du carré de F qui luy est incommens. en longueur, & puis que B D & CD sont incommens. en longueur à la rationnelle A par les tierces deff. C est residu fixiesme.

S C H O L I E.

Nous auons cy deuant enseigné comment il falloit trouuer les six sortes de

binomes en nombres pour les trouuer plus facilement en lignes il en faut autre faire des residus. Mais les binomes estans trouuez on trouuera aisement les residus n'estant residu autre chose que le reste du binome lors qu'on a soustrait le plus petit nom du plus grand. Donc pour residu premier faut seulement poser binome premier sinon que au lieu de $\dagger$ faut poser comme $3\dagger$ $\dagger$ est binome premier $3\dagger$ est residu premier ainsi des autres.

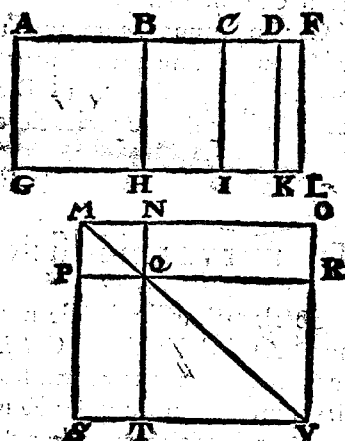
PROP. XCI. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AH compris de la rationelle AG & du residu premier AB, ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit faite ceste construction generale pour toute la sixaine. Au residu AB soit adiouste la rationelle BF en sorte que AF & BF soient rationelles commens. en puissance seulement & soit BF coupee en deux egallement au point C & apres auoir applique vn rectangle sur la ligne AF defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé & egal au quart du quarré de BF qui est le quarré de CF & soit iceluy rectangle de AD & DF & apres auoir menées les lignes BH CI Dk FL paralleles à AG Soit continuee GH iusques en L. En second lieu soit fait le quarré MV egal au rectangle AK, & sur la diagonale d'iceluy MV soit fait le quarré MQ egal au rectangle DL, & soient continuees les deux lignes PQR & NQT: Maintenant CF est moyenne proportionnelle entre AD & DF par la 17. p. 6. car par hypotese le quarré de CF est egal au rectangle de AD & DF, & par la 1. p. 6. le rectangle CL sera milieu proportionnel entre les deux rectangles AK & DL, il le sera aussi entre leurs egaux quarrés MV & MQ. Mais le rectangle MR est aussi milieu proportionnel entre iceux quarrés, comme il est aisé de prouuer par la 1. p. 6. repetée deux fois: Donc CL ou BI son egal sera egal au rectangle MR, Et par consequent CK & NR (estant DL egale à MQ) iceluy CK sera aussi egal à PT: ainsi le rectangle BK sera egal au gnomon TMR. Mais tout le quarré MV est egal au rectangle AK: Partant le rectangle AN sera egal au quarré QV. Je dis que la ligne QR qui peut le rectangle AH est residu. Soit ceste construction generale à la toute la sixaine.

Car puis que AB est residu premier, les deux lignes AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement estant la route AF commens. en longueur de la rationelle AG, & pouuant plus que l'adiouste BF du quarré d'une ligne



quiluy est commens. en longitude: Et par la 17. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AD, & DF commens. en longitude, & par la 15. p. 10. Il seront commens. en longitude à la totale AF: laquelle estans commens. en longitude à la rationelle AG, par la 12. p. 10. AF, AD, DF, AG seront toutes rationelles commens. en longitude, & par la 19. p. 10. les rectangles AK & DL seront rationaux, & leurs egaux quarréz MV & MQ aussi rationaux, & les lignes PR, & PQ rationelles.

Parcillemeut les deux lignes BC & CF estans egales & commens. elles le seront aussi à leur toute BF par la 15. p. 10. Laquelle BF estans rationelle, BC & CF seront aussi rationelles commens. en puissance seulement à AG comme leur toute BF, & par la 21. p. 10. leurs rectangles BI & CL seront mediaux. Mais le rectangle MR est egal au medial CK, partant aussi medial & incommens. au quarré rationel MQ. Et par la 1. p. 6. leurs costez PQ & PR seront incommens. en longitude, & pour autant qu'ils sont rationaux ils seront commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. QR est residu.

PROP. XCII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AH, compris du residu second AB, & de la rationelle AG: Redis (apres avoir constrint comme en la 91. p. 10.) que la ligne QR qui peut iceluy rectangle est residu medial premier.

Car puis que AB est residu second, les deux lignes AF & BF sont rationelles commensurables en puissance seulement, estant l'adioustée BF commens. en longitude à la rationelle AG, & AF peut plus que BF du quarré d'une ligne quiluy est commens. en longitude: & par la 17. p. 10. Le rectangle defaillant aura les deux costez AD & DF commens. en longitude, & par la 15. p. 10. ils seront aussi commens. à la totale AF, & par la 13. p. 10. icelle totale estant incommens. en longitude à la rationelle AG, aussi seront AD, & DF qui sont rationelles: car elles sont commens. à leur totale qui est rationelle) commens. en puissance seulement à la rationelle AG, & par la 21. p. 10. les rectangles AK, & DL seront mediaux, partant mediaux leurs egaux quarréz MV & MQ, & leurs costez RP, PQ seront lignes medialles.

Parcillemeut BF estant commens. en longitude à la rationelle AG, aussi sera la moitié CF, & par la 19. p. 10. le rectangle CL sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle MR compris des deux medialles PQ & PR, lesquelles sont incommens. en longitude (autrement leur rectangle seroit medial par la 24. p. 10.) & par la 74. p. 10. QR est residu medial premier.

PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un residu troisieme, la ligne pouuant iceluy rectangle, est residu medial second.

Soit le rectangle AH, compris du residu troisieme AB, & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que la ligne QR qui peut iceluy rectangle, est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, les lignes AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement entre elles & à la rationelle AG: mais AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, & par la 17. p. 10. AD & DF seront commens. en longueur, & à leur totale par la 15. p. 10. Et seront rationelles comme icelle: Mais AF est commens. en puissance seulement à la rationelle AG, & par la 13. p. 10. AD & DF seront commens. en puissance seulement à AG: Et par la 21. p. 10. les rectangles AK & DL seront mediaux: aussi mediaux leurs egaux quarez MV & MQ, & leurs costez PR & PQ seront lignes medialles.

Pareillement BF estant incommens. en longueur à la rationelle AG, aussi sera la moitié CF par la 13. p. 10. Et par la 21. p. 10. CF estant rationelle comme la double BF, le rectangle CL sera medial, partant aussi medial son egal MR compris des deux medialles commens. en puissance seulement PR, & PQ (car leurs quarez sont commensur. estans leurs egaux rectangles commens.) & ne scauroient estre commens. en longueur, car il faudroit par la 1. p. 6. que MQ & MR fussent aussi commens. & par consequent leurs egaux rectangles CK & DL, ce qui n'est pas, & par la 75. p. 10. QR est residu medial second.

PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu quatrieme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Mineure.

Soit le rectangle AH compris de la rationelle AG, & du residu quatrieme AB (apres luy auoir adiousté la conuenable, & construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que la ligne QR qui peut iceluy rectangle est ligne mineure.

Car puis que AB est residu quatrieme AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement, & AF qui est commens. en longueur à la rationelle AG, peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 18. p. 10. AD & DF seront incommens. en longueur: & par la 1. p. 6. les rectangles AK & DL seront incommens. aussi seront leurs egaux quarez MV & MQ. Partant les lignes PR & PQ seront incommens. en puissance: Mais AF estant commens. en longueur à la rationelle AG, par la 21. p. 10. le rectangle AL sera rationel. Partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarez MV & MQ. Pareillement BF estant commens. en puissance seule-

ment à

ment à AG, le rectangle BL sera medial par la 21. p. 10. aussi sera sa moitié CL, & par conséquent son egal MR sera medial: Partant les deux lignes PR, & PQ qui comprennent iceluy rectangle, medialles (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarez estant rationel par la 76. p. 10. QR est ligne mineure.

PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu cinquieme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie rationelle vn tout medial.

Soit le rectangle AH, compris du residu cinquieme AB & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que QR est ligne faisant avec une superficie rationelle vn tout medial.

Car puis que AB est residu cinquieme, les lignes AF, & BF sont rationelles commensurables en puissance seulement, BF est communf. en longueur à la rationelle AG, & AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 18. p. 10. Les lignes AD & DF sont incommensurables en longueur, & comme en la precedente PR, & PQ seront incommens. en puissance. Mais AF estant incommens. en longueur à la rationelle AG, le rectangle AL sera medial par la 21. p. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarez MV & MQ.

Pareillement BF estans communf. en longueur à la rationelle AG, par la 19. p. 10. le rectangle BL sera rationel, aussi sera sa moitié CL, & son egal MR compris de deux lignes incommens. en puissance PR, & PQ, desquelles les quarez assemblez font vn tout medial, & par la 77. p. 10. QR. sera ligne faisant avec une superficie rationelle vn tout medial.

PROP. XCVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu sixieme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AH, compris du residu sixieme AB & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que QR est ligne faisant avec une superficie mediale vn tout medial.

Car puis que AB est residu sixieme, AF & FB sont rationelles communf. en puissance seulement entre elles & à la rationelle AG, AF pouvant plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, Et par la 18. p. 10. AD & DF seront incommens. en longueur: Et comme aux deux precedentes PR & PQ serot incommens. en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AL estant medial, le composé de leurs egaux quarez MV & MQ sera medial: Item BF estant communf. en puissance seulement à AG rationelle, le rectangle BL

sera medial, aussi sa moitié CL & son egal MR, lequel estant compris des deux lignes PR & PQ incommens. en puissance, desquels les quarrez ensemble font vu tout medial incommens. à leur rectagle MR aussi medial, par la 78. p. 10. QR est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial. On prouuera l'incommensuration du composé des quarrez & du rectangle medial, par l'incommensuration en longitude des lignes AF & CF.

PROP. XCVII. SIX. 5.

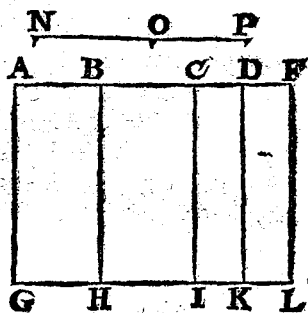
Le carré d'un residu appliqué sur vne rationelle, fait l'autre costé residu premier.

Soit le residu NO, & sur la rationelle AG soit appliqué le rectangle AH egal au carré de NO : le dis que l'autre costé AB est residu premier.

Soit faite ceste construction generale pour toute la sixaine, sçavoir à NO soit adjoustée la conuenable OP, & sur la rationelle AG soit basti le rectangle AK egal au carré de NP, & DL egal au carré de OP : mais AH est egal au carré de NO : & par la 7. p. 2. BL sera egal à deux fois le rectangle de NP & PO. Partant BF estant coupée en deux egallement en C, & la parallele CI estant menée : CL sera egale au rectangle de NP & PO : lequel estant moyen proportionel entre les quarrez de NP & PO (comme il a esté demonstré aux precedentes) CL sera aussi moyen proport. entre les rectangles AK & DL (qui sont egaux à iceux quarrez) & par la 1. p. 6. CF sera moyenne proport. entre AD & DF : & le carré d'icelle sera egal au rectangle de AD & DF qui est le quart du carré de BF. Il faut donc monstrer que BA est residu premier.

Car puis que NO est residu, & qu'on luy a adjousté la conuenable OP, NP & PO sont rationelles commens. en puissance seulement, & leurs quarrez seront rationaux, aussi rationel sera le rectangle AL qui leur est egal : & par la 20. p. 10. le costé AF sera rationel commens. en longitude à la rationelle AG. Item par la 21. p. 10. le rectangle de NO & OP est medial, partant son double BL sera aussi medial, & par la 22. p. 10. BF sera rationelle commens. en puissance seulement à AG. Mais les deux rectangles AL & BL sont incommens. (car l'un est rationel, l'autre medial) & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. AB sera residu. le dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car les quarrez de NP & PO sont commens. aussi le seront leurs egaux rectangles AK, & DL, & les lignes AD & DF seront commens. en longitude, qui sont les costez d'un rectangle defaillant d'une figure carrée, egal au quart du carré de BF : & par la 17. p. 10. AF (laquelle desia est commens. en longitude à la rationelle AG) pourra plus que BF du carré d'une ligne qui luy est com-



menf. en longitude : & par les tierces deff. AB est refidu premier.

P R O P. XCVIII.

Le quarré d'un refidu medial premier, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé refidu second.

Soit le refidu medial premier NO, duquel le quarré soit appliqué sur la rationelle AG. Je dis que l'autre costé AB est refidu second.

Car (apres auoir fait mefme construction que en la 97. p. 10.) puis que NO est refidu medial premier, NP & PO sont medialles commenf. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, partant leurs quarréz seront auffi mediaux, & leurs egaux rectangles Ak & DL mediaux & commenf. (puis que leurs egaux quarréz sont commenf. car les lignes NP & PO sont commenf. en puissance) & par la 15. p. 10. & ce qui refulte de la 24. p. 10. le total AL est medial, & par la 22. p. 10. AF sera rationelle commenf. en puissance seulement à AG, & d'autant que le rectangle de NP & PO est rationel, son double BL sera auffi rationel : & par la 20. p. 10. BF sera rationel commenf. en longitude à AG rationelle, & les deux rectangles AL, & BL estans incommenf. (car l'un est rationel l'autre medial) les rationelles AF & BF seront commenf. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. AB sera refidu. Mais l'adiouftee BF est commenf. en longitude à la rationelle AG : & si on prouuera de mefme que en la precedente que AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est communurable en longitude, & par les tierces deff. AB est refidu second.

P R O P. XCIX.

Le quarré d'un refidu medial second, appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé refidu troisieme.

Soit le refidu medial second NO, duquel le quarré soit appliqué sur la rationelle AG : Je dis que l'autre costé AB est refidu troisieme.

Car (apres auoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est refidu medial second, NP & PO sont medialles commenf. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & leurs quarréz seront mediaux & commenf. & partant leurs egaux rectangles Ak & DL mediaux & commenf. & par la 15. p. 10. le total AL sera auffi medial, & par la 22. p. 10. son autre costé AF sera rationel commenf. en puissance seulement à la rationelle AG (sur laquelle il est appliqué) Item le rectangle de NP & PO estant medial, auffi sera son double BL, & par la 21. p. 10. BF sera rationelle commenf. en puissance seulement à la rationelle AG : Et puis que NP & PO sont incommenf. en longitude, le quarré de NP sera incommenf. au rectangle de NP & PO par la 1. p. 6. & 10. p. 10. partant auffi à son double BL : Mais il est auffi commenf. au quarré de OP, & par la 15. p. 10. Les deux ensemble ou l'egal rectangle AL sera incommenf. à BL, & par

consequēt les lignes rationelles AF & BF seront cōmens. en puissance seulement & par la 73. p. 10. AB sera residu. Mais ny AF ny BF ne sont commens. en longueur à la rationelle AG, & l'on produera comme à la 97. p. 10. que AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: Et par les tierces deff. AB est residu troisieme.

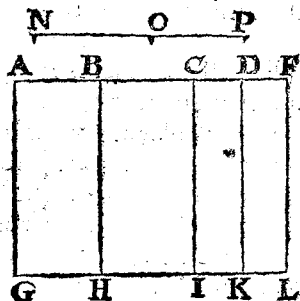
PROP. C.

Le quarré d'une ligne mineure appliqué sur une ligne rationnelle fait l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure NO, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle AG, ie dis que l'autre costé est residu quatriesme.

Car (après avoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est ligne mineure, les lignes NP & PO sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationel: partant le rectangle AL est rationel & BL medial par le discours des precedentes: & par la 20. p. 10. AF sera rationelle commens. en longueur à la rationelle AG, & BF par la 22.

p. 10. sera rationelle commens. en puissance seulement à AG: & puis que AL est rationel & BL medial ils seront incommens. & partant les rationelles AF & BF seront commens. en puissance seulement: & par la 73. p. 10. AB sera residu. Davantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes NP & PO sont incommens. en puissance, leurs quarrés seront incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles AK & DL, & par consequent incommens. les lignes AD & DF costez du rectangle defaillant d'une figure quarrée egale au quarré de FC & par la 18. p. 10. AF (qui est commens. en longueur à la rationelle) peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: & par les tierces deff. AB est residu quatriesme.



PROP. CI.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu cinquieme.

Soit la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial NO, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle AG: Ie dis que l'autre costé AB est residu cinquieme.

Car (après avoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, les deux lignes NP & PO sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel & le composé de leurs quarrés medial: partant le rectangle AL sera medial & BL rationel,

& par la 22. p. 10. AF sera rationelle, & par la 20. p. 10. BF sera aussi rationelle mais commenſ. en longueur à la rationelle AG : Item les rectangles AL & BL estans incommenſ. (car l'un est rationel l'autre medial) les rationelles AF & BF feront commenſ. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. AB sera residu. Mais BF estant commenſ. en longueur à la rationelle AG, & si comme en la precedente on prouuera que AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommenſ. en longueur, & par les tierces deſſ. AB est residu cinquieme.

PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu sixieme.

Soit la ligne declarée en la prop. NO, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle AG : Je dis que l'autre costé est residu sixieme.

Car (apres avoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, les deux lignes NP & PO sont incommenſ. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommenſ. au composé de leurs quarrés aussi medial : partant les deux rectangles AL & BL sont mediaux & incommenſ. & par la 22. p. 10. AF & BF seront rationelles incommenſ. en longueur entre elles & à la rationelle AG : & par la 73. p. 10. AB sera residu : Et si encores AF peut plus que BF du quarré d'une ligne qui luy est incommenſ. en longueur (ce qu'on peut prouver comme en la 100. p. 10.) & par les tierces deſſ. AB est residu sixieme.

PROP. CIII. Six- 6.

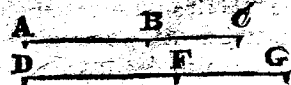
La ligne commenſ. en longueur a un residu, est aussi residu & de mesme ordre.

Soit la ligne DF, commenſ. en longueur au residu AB : Je dis que DF est residu de mesme ordre que AB.

Qu'il ne soit ainsi. Soit à AB residu adjoustée la convenable BC, & soit trouvée FG laquelle soit à DF comme BC est à AB : & en changeant

comme AB à DF, ainsi BC à FG, & par la 12. p. 5. les antecedentes ensemble AB & BC sont aux consequentes ensemble DF & FG, comme AB est à DF ou BC à FG : & par la 10. p. 10. comme AB est commenſ. en longueur à DF, ainsi AC à DG & BC à FG. Et en changeant comme AC à BC, ainsi DG à FG. Soit ceste construction & demonstration generale pour toute la sixaine.

Maintenant comme AC & BC sont rationelles aussi seront DG, & FG (car elles sont commenſ. à celles par la 10. p. 10.) Mais AC & BC sont commenſ.



en puissance seulement, partant DG & FG seront rationnelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. DF est residu.

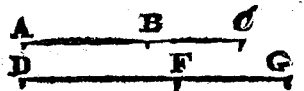
Je dis d'auantage qu'il est residu de mesme ordre que AB. Car la ligne AC peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur, si commens. aussi DG pourra plus que FG de mesme façon par la 14. p. 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AC est commens. en longueur à une rationnelle proposée, aussi DG qui luy est commens. en longueur sera commens. en longueur à la mesme rationnelle proposée par la 12. p. 10. & AB & DF seront residus premiers. Si BC est commens. en longueur à la rationnelle, aussi sera FG : & AB & DF seront residus seconds : si AC & BC sont incommens. en longueur à la rationnelle : aussi seront DG & FG : & AB & DF seront residus troisiemes. Que si AC peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur, aussi DG pourra plus de mesme que FG par la 14. p. 10. & si AC est commens. en longueur à la rationnelle, aussi sera DG : & AB & DF seront residus quatriemes. Si ~~BC est commens. en longueur à la rationnelle~~, aussi sera FG : & AB & DF seront residus cinquiemes. Si AC & BC sont incommens. en longueur à la rationnelle, aussi seront DG & FG : Partant AB & DF seront residus sixiemes : par ainsi DF est rest residu de mesme ordre que AB.

PROP. CIIII.

La ligne commens. à un residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AB, ie dis qu'elle est aussi residu medial, & de mesme ordre.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faite mesme construction que en la 103. p. 10. Donc AC & BC seront commens. à DG & FG lesquelles sont medialles commens. en puissance seulement, & par la 24. p. 10. DG & FG seront medialles commens. en puissance seulement par la 10. p. 10. Et partant DF est residu medial : ie dis d'auantage qu'il est de mesme ordre.



Car le quarré de AC est au rectangle de AC & BC cōme AC à BC : Item le quarré de DG est aussi au rectangle de DG & FG cōme DG est à FG par la 1. p. 6. Mais le quarré de AC est commens. au quarré de DG estant AC & DG commens. Et par la 10. p. 10. les deux rectangles seront aussi commens. Que comme l'un sera rationnel ou medial, aussi l'autre sera rationnel ou medial : partant si les rectangles sont rationaux, AB & DF seront residus mediaux premiers : si les rectangles sont mediaux, AB & DF seront residus mediaux seconds.

PROP. CV.

La ligne commens. à une ligne mineure, est aussi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commenſ. à la ligne mineure AB: Je dis qu'elle eſt auſſi ligne mineure. (Car ſi on fait conſtruction & demonſtration ſemblable à la 103. p. 10.) AC & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais comme AC à CB ainſi DG à FG, & par la 10. p. 10. DG & FG ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que AC à BC ainſi DG à FG, par la 22. p. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux: Et par la 12. p. 5. les deux antecedens quarrez de AC & CB enſemble, ſeront aux deux conſequens quarrez de DG & FG enſemble; comme celuy de BC eſt à celuy de FG: leſquelles ſont commenſ. (car les lignes BC & FG ſont commenſ. comme AB & DF) & partant le compoſé des quarrez de AC & BC (lequel eſt rationel) ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DG & FG: lequel ſera auſſi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, comme le quarré de AC au rectangle de AC & CB, ainſi le quarré de DG au rectangle de DG & GF, & en changeant comme le quarré au quarré, ainſi le rectangle au rectangle: c'eſt à dire commenſ. Car les lignes AC & DG ſont commenſ. par la 10. p. 10. & par la 24. p. 10. le rectangle de AC & BC eſtant medial, celuy de DG & FG ſera auſſi medial: partant DG & F G eſtant incommenſ. en puiſſance comprenant vn rectangle medial & le compoſé de leurs quarrez rationel DF ſera ligne mineure.

P R O P. CVI.

La ligne commenſ. à vne ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, eſt auſſi ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

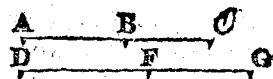
Soit la ligne DF commenſ. à la ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial AB. Je dis que DF eſt ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) comme AC à CB ainſi DG à FG: Mais AC & BC ſont incommenſ. en puiſſance, auſſi ſeront DG & GF (& comme en la precedente il a eſté demonſtré le compoſé des quarrez de AC & BC eſtoit commenſ. au compoſé des quarrez de DG & GF & que le rectangle de AC & CB eſtoit commenſurable au rectangle de DG & GF) compoſé des quarrez de AC & CB eſtant medial & leur rectangle rationel, auſſi le compoſé des quarrez de DG & GF ſera medial & leur rectangle rationel: par conſequent AF eſt ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

P R O P. CVII.

La ligne commenſ. à la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial, eſt auſſi ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commenſ. à la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial AB: Je diſ que DF eſt auſſi ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial.



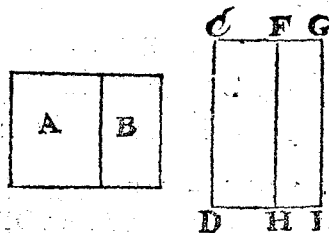
Car (apres auoir conſtruiſt comme aux precedentes, & monſtré que DG & FG ſont incommenſ. en puiſſance) on monſtrera que le compoſé des quarrez de AC & BC eſt commenſ. aux compoſez des quarrez de DG & GF & le rectangle de AC & BC commenſ. au rectangle de DG & FG: Mais le rectangle de AC, & CB eſt medial & incommenſ. au compoſé des quarrez de AC & CB auſſi medial: partant le rectangle de DG & GF ſera medial & incommenſ. au compoſé des quarrez de DG & FG auſſi medial: & DF ſera ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

PROP. CVIII.

Si d'une ſuperficie rationnelle on retrâche vne ſuperficie mediale, la ligne qui peut le reſte eſt reſidu ou ligne mineure.

Soit la ſuperf. rationnelle AB, de laquelle on retranche la mediale A: Je diſ que la ligne qui peut le reſte B eſt reſidu ou ligne mineure.

Qu'il ne ſoit ainſi. Sur la rationnelle CD ſoit baſſi CH egal à A, & FI egal à B. Il eſt euident que CI ſera rationnel & par la 20. p. 10. ſon autre coſté CG ſera rationnel commenſ. en longitude à CD. Item par la 22. p. 10. C-H eſtant medial CF ſera rationnelle commenſ. en puiſſance ſeulement à CD, & par la 13. p. 10. CG & CF ſeront rationnelles commenſ. en puiſſance ſeulement & par la 73. p. 10. FG ſera reſidu. Maintenant CG peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longitude: Si commenſ. GF ſera reſidu premier, & la ligne qui peut iceluy rectangle ou ſon egal B eſt reſidu par la 91. p. 10. Si incommenſ. GF eſt reſidu quatrieſme, & la ligne qui peut iceluy rectangle (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par la 94. p. 10.



PROP. CIX.

Si d'une ſuperficie mediale on retranche vne ſuperficie rationnelle, la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant avec vne ſuperficie rationnelle vn tout medial.

Soit

Soit comme dessus la superficie mediale AB, de laquelle on retranche la rationnelle A. Je dis que la ligne qui peut le reste B, (apres auoir construit comme en la precedente) ou son egale FI est residu medial premier, ou ligne faisant avec vne superficie rationnelle vn tout medial.

Car puis que la superficie totale AB est mediale, aussi la totale CI est mediale, & par la 22. p. 10. Le costé CG est rationel commens. en puissance seulement à la rationnelle CD. Item puis que le retranché A est rationel aussi sera son egal CH, & par la 20. p. 10. CF sera rationelle commens. en longitude à la rationnelle CD: & par la 13. p. 10. CG & CF seront rationelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. FG sera residu. Mais à cause que CG peut plus que CF, du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude FG sera residu second ou residu cinquieme. Si residu second, la ligne qui peut le rectagle FI est residu medial premier par la 92. p. 10. si residu cinquieme la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant avec vne superficie rationnelle vn tout medial par la 95. p. 10.

PROP. CX.

Si d'une superficie mediale, on retranche vne superficie mediale incommens. à la toute, la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle on retranche la superficie mediale A incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste, est residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit faite construction comme aux precedentes. Les rectangles CH & CI seront mediaux & incommens. entre eux: & par la 22. p. 10. & 1. p. 6. Les lignes CG & CF seront rationelles & incommens. en longitude entre elles, & à la rationnelle CD: & par la 73. p. 10 FG sera residu. Maintenant FG sera residu troisieme, ou residu sixieme comme aux precedentes (à cause que la plus grande ligne peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude) s'il est residu troisieme, la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est residu medial second par la 93. p. 10. Si FG est residu sixieme, la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) par la 96. p. 10. est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

PROP. CXI.

La ligne appelée residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit le residu A. Je dis qu'elle n'est pas mesme ligne que Binome.

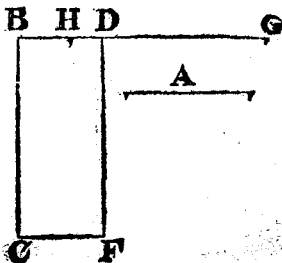
Autrement soit la rationnelle BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle BF egal au quarré du residu A, par la 97. p. 10. BD sera residu premier: auquel si

Hh

on adiouste fa conuenable DG, BG, & DG, seront rationnelles commens. en puissance seulement, & BG commens. en longitude à la rationelle BC.

Maintenant si on pose A estre Binome, BD sera Binome premier par la 60. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au point H, (estant BH le plus grand nom) BH & HD seront rationnelles commens. en puissance seulement, & BH commens. en longitude à la rationelle BC: & par la 12. p. 10. BG & BH, seront commens. en longitude, & par la 15. p. 10.

HG sera aussi commens. en longitude à BG: partant aussi rationnelle comme icelle BG. Mais DG qui est aussi rationnelle n'est commens. en longitude à BG, & par la 13. p. 10. HG & DG sont rationnelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. HD est irrationnelle, ce qui est absurde (car elle a esté prouuée tantost rationnelle au Binome) donc le residu sera differend du Binome.



SCHOLIE.

La ligne appellée residu & les cinq sortes de lignes irrationnelles suiuanes, sont differentes de la mediale, & entre elles. Car

Le quarré de la mediale appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé rationnel par la 22. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisieme.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriesme.

Le quarré de la ligne faisant avec vne superficie rationnelle vn tout medial, fait l'autre costé residu cinquieme.

Le quarré de la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, fait l'autre costé residu sixiesme.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens: les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarréz des Binomes & des cinq lignes irrationnelles suiuanes, estans appliquez sur vne ligne rationelle font l'autre costé Binome de quelque ordre: partant le Binome & les cinq suiuanes sont differentes du residu & des cinq suiuanes.

Ainsi toutes les lignes irrationnelles cy deuant dictes, sont treize.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne Maieure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.

7. Ligne pouvant deux mediaux.
8. Residu,
9. Residu medial premier,
10. Residu medial second.
11. Ligne Mineure.
12. Ligne faisant avec vne superficie rationnelle vn tout medial.
13. Ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

PROP. CXII.

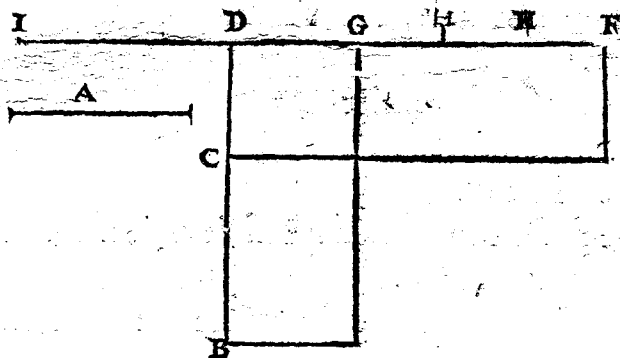
Le quarré d'une ligne rationnelle, étant appliqué sur un binome, fait l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux & commensurables aux noms du Binome: en outre le residu est de mesme ordre que le Binome.

Sur le binome DB, soit appliqué BG égal au quarré de la rationnelle A. Je dis que l'autre costé DG est residu tel que dict la proposition.

Qu'il ne soit ainsi (apres auoir diuisé le binome B D en ses noms au point C) sur le pl^r

petit nom CD soit appliqué le rectangle CF égal aussi au quarré de la rationnelle A: les deux rectangles BG & CF seront égaux, & par la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçauoir que comme BD à DC ainsi FD à DG: & en diuisant par la 18. p. 5. comme BC à CD, ainsi FG à GD, & par la 14. p. 5. comme BC est plus grande que CD, ainsi FG sera plus grande que GD. Maintenant de FG soit retranché GH égale à GD, & soit faite comme FH à HG ainsi GD à D I par la 12. p. 6. & en composant par la 17. p. 5. comme FG à GH (ou GD sont égales) ainsi GI à ID: & par la 12. p. 5. les deux antecedens FGI seront aux deux consequens GDI comme l'un des antecedens GI à l'un des consequens ID, &

Hh ii



les trois lignes FI, GI, DI, seront continuellement proportionnelles en la raison de FG à G D, ou BC à CD : & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BC est communurable au quarré de CD ainsi le quarré de GI sera communurable

au quarré de DI & par la 20. p. 6. & 10. p. 10. ID sera communurable en longueur à la troisieme proportionnelle IF : & par la 15. p. 10. ID & DF seront communurables en longueur. Et d'autant que le rectangle CF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationelle A) & DC ligne rationelle, DF sera aussi ligne rationelle commun. en longueur à CD par la 20. p. 10. Et ID sera aussi rationelle communurable en longueur à CD par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme DC & CB sont rationelles communurables en puissance seulement, aussi ID & IG seront rationelles communurables en puissance seulement, & par la 73. p. 10. DG sera residu, duquel les noms ID & IG sont proportionaux & communurables aux noms du binome BC & CD par la 10. p. 10. d'autant que en changeant on trouuera CD commun. en longueur à ID, & par consequent IG à CB.

Pour prouver que le residu est de mesme ordre que le binome, les noms de l'un estans proportionaux & communurables aux noms de l'autre, par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commun. ou incommun. en longueur, le plus grand nom du residu pourra plus de mesme : Que si le plus grand nom du binome est commun. en longueur à la rationelle, aussi sera le plus grand du residu, & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commun. en longueur à la rationelle, aussi sera le plus petit du residu, & ils seront binome & residu second : & ainsi des autres.

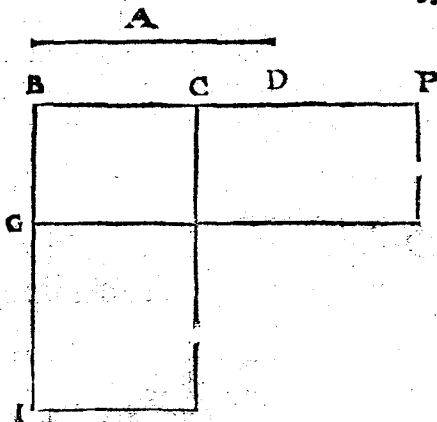
PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationelle, estant appliqué sur un residu, fait l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux & commun. aux noms du residu : En outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Sur le residu BG, soit décrit le rectangle GF egal au quarré de la rationelle A : Je dis que l'autre costé BF sera binome tel que demande la proposition.

Qu'il ne soit ainsi. Au residu BG soit trouuee la conuenable GH, & sur BH

soit d'escrit le rectangle HC egal au quarré de la rationelle A : les rectangles CH & GF seront egaux, & ayās les costez reciproques par la 14. p. 6. FB sera à BC comme HB à BG, le tout au tout, comme le retranché au retranché, & par la 19. p. 5. le reste FC sera au reste HG, comme le tout BF au tout BH. & en changeant comme BH à HG ainsi BF à FC. Maintenant soit faicte FD à DC cōme FB à FC par la 10. p. 6. sçavoir cōmme le tout BF est au tout CF, ainsi le retranché FD au retranché DC, par la 19. p. 5.

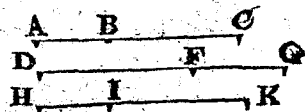


Aussi le reste BD sera au reste DF, comme le retranché DF est au retranché DC: Ainsi DF sera moyenne proportionnelle entre BD & DC, & par la 20. p. 6. BD sera à DC, comme le quarré de BD est au quarré de DF, ou le quarré de BH au quarré de HG par la 22. p. 6. lesquels estans commensurables, aussi par la 10. p. 10. BD & DC seront commensurables en longitude, & par la 15. p. 10. BC & BD seront commensurables en longitude: mais BC estant rationelle par la 20. p. 10. (car HC est rectangle rationel appliqué sur BH ligne rationelle) BD sera aussi rationelle. Pareillement puis que BD est à DF cōmme BH à HG, aussi par la 10. p. 10. BD & DF, seront rationelles commensurables en puissance seulement: Et par la 36. p. 10. BF. est Binome, duquel les noms sont proportionaux & commensurables aux noms du residu, Et si on prouuera comme en la precedente qu'il est de mesme ordre que le residu.

PROP. CXIV.

Le rectangle compris d'un residu & d'un Binome, desquels les noms sont proportionaux & commensurables, est rationel.

Soit le residu AB, duquel les noms AC & CB sont proport. & commenf. aux noms DF & FG du Binome DG: Je dis que le rectangle compris du Binome DG & du residu AB est rationel.



Qu'il ne soit ainsi. Sur le Binome DG soit appliqué vn rectangle rationel faisant l'autre costé HI: il est euident par la 112. p. 10. que HI est residu, duquel les noms HK & KI sont commenf. aux noms du Binome DG: & par la 11. p. 5. ils seront aussi proport. & commenf. aux noms du residu AB. Ainsi AC sera commenf. à HK & BC à IK, & par la 19. p. 5. & 10. p. 10. le reste AB sera commensurable au reste HI. Mais iceux rectangles de AB & DG, de HI & DG estans de mesme hauteur

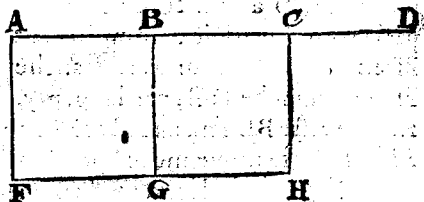
font l'un à l'autre comme à leurs bases AB & HI par la 1. p. 6. lesquelles estans commens. les rectangles seront aussi commens. Et l'un d'iceux estans rationel, l'autre sera aussi rationel. Ainsi il est evident qu'un rectangle rationel peut estre compris de lignes irrationnelles, & si la ligne qui pourra iceluy sera rationelle,

PROP. CXV.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationnelles, toutes differentes des deuant dictes.

Soit la ligne mediale AB, ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationnelles toutes differentes des deuant dictes.

Car si sur l'extremite de la mediale on meine la perpendiculaire AF qui soit rationelle, il faudra que le rectangle AG soit irrationnel: Autrement s'il estoit rationel par la 20. p. 10. AB seroit aussi rationel que nous auons posé mediale: & la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationnelle soit icelle BC, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationelle comme AF, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle BH il sera aussi irrationnel, & la ligne qui le peut irrationnelle, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes: Car le quarré de pas vne des deuant dictes appliqué sur vne ligne rationelle, ne fait l'autre costé tel que BC. Soit donc icelle ligne pouuant CD: & de cette façon on peut proceder à l'infiny.

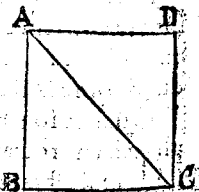


PROP. CXVI.

Au quarré la diagonale est au costé incommens. en longitude.

Soit le quarré AC. Ie dis que la diagonale AC est incommens. en longitude au costé AB.

Car par la 47. p. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB: mais toute grâdeur double d'une autre est comme 4. à 8. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 8. à 4. qui n'est pas comme nombre quarré, à nombre quarré, & par la 9. p. 10. leurs costez AB & AC sont incommens. en longitude.



Fin de l'Element dixiesme.

Pour extraire racine quarrée de binome ou residu.

Nous auons cy dessus enseigné comment il falloit trouuer toute sorte de binome ou residu en nombres, lesquels multipliez par vn nombre rationel produisent les rectangles dequoy il a esté parlé, lesquels ne sont: expliquez que par binomes ou residus: Doncques nous enseignerons maintenant à tirer la racine quarrée d'iceux rectangles, c'est à dire à expliquer par nombre la valeur des lignes qui peuent iceux rectangles.

$2 + \sqrt{2}$	
$\sqrt{8}$	2
4	$\sqrt{8}$

Soit vn binome $6 + \sqrt{32}$. ou autre tel qu'on vouldra, le quel soit imaginé estre vn quarré tel que celuy que nous auons figuré: le plus grand nom 6. estans la valeur des deux quarez, & par la 4. p. 2. le plus petit nom $\sqrt{32}$. sera la valeur des deux rectangles egaux, partant vn rectangle vaudra $\sqrt{8}$. (car la moitié d'une racine cest la racine du quart de sa puissance) & iceluy rectangle est moyen prop. entre les deux quarez, lesquels multipliez l'un par l'autre la racine du produit est la valeur du rectangle.

Toute la question consiste donc à diuiser 6. en deux nombres tels, que leur produit soit 8. Car les racines des deux quarez adioustées donneront la racine du binome. Ceste question est aisée à vider à celuy qui aura tant soit peu de connoissance del'algebre.

FIN.





ELEMENT VN- ZIESME.

DEFINITIONS.

Vne ligne droite est perpendiculairement esleuee sur vn plan, quand toutes les lignes sur iceluy plan menees vers elle la rencontrent en angles droits.

2 Vn plan est esleue perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, seront aussi perpendiculaires à l'autre plan.

3 Vn plan est encline sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section & vers vn mesme point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les vnes aux autres.

4 Plans parallels, sont ceux lesquels estans continuez ne se coupent point.

5 Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, egales en nombre.

6 Solides egaux & semblables, sont ceux qui sont compris de semblables superficies egales en nombre & grandeur.

7 Angle solide, c'est la rencontre de plus de deux angles plans

plans en vn mesme point estans iceux constituez sur plans differens.

8 Pyramide est vn solide compris de plusieurs plans, se rencontrans en vn mesme point, & ayans vn autre plan pour baze.

9 Prisme est vn solide compris de cinq plans, desquels deux qui sont opposez sont triangles egaux semblables, & parallels, & les trois autres sont parallelogrames.

10 Sphere est vne figure comprise par le demicercle, lors que son diametre demeurant immobile, iceluy demicercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là, d'où il estoit parry.

11 L'axe de la sphere est iceluy diametre immobile alentour duquel tourne le demi-cercle.

12 Le cétre de la sphere est celuy mesme que du demi cercle.

13 Diametre de la sphere est vne ligne laquelle passant par le centre d'icelle, est terminée à la superficie de la sphere.

14 Cone est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'un des costez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, les deux autres font vn tour à l'entour d'iceluy.

15 Et si le costé immobile est egal à l'autre costé comprenant l'angle droit, le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

16 Icelle ligne immobile est l'axe du cone.

17 Mais le cercle descript par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne, est la base du cone.

18 Cylindre est vn solide compris par vn parallelograme rectangle, lors que l'un des costez demeurant immobile, les trois autres font vn tour alentour d'iceluy.

19 L'axe du cylindre est icelle ligne immobile.

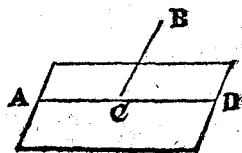
20 La base du cylindre est le cercle descript par l'autre costé qui avec l'axe du cylindre comprend l'angle droit.

- 21 Semblables cones & cylindres, sont desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.
- 22 Cube est vn solide compris de six quarez.
- 23 Octaëdre est vn solide compris de huit égaux triangles equilateraux.
- 24 Dodecaëdre est vn solide compris de douze égaux pentagones equilateraux.
- 25 Icosaëdre est vn solide compris de vingt triangles equilateraux égaux.

PROP. I.

Il est impossible qu'une partie d'une ligne droite soit sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

La démonstration de ceste prop. est aisée. Car si partie de la ligne ACB est sur le plan sçavoir AC, & l'autre partie en l'air sçavoir CB, il est evident que ACB ne sera pas ligne droite comme il est requis.

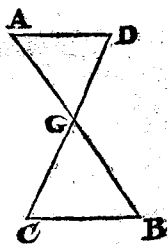


PROP. II.

Si deux lignes se coupent l'une l'autre, elles seront sur vn mesme plan: Item tout triangle est en vn mesme plan.

Soient deux lignes AB & CD se coupans l'une l'autre au point G: Je dis quelles sont en vn mesme plan: ensemble le triangle BGC.

Car d'autant qu'elles se coupent en G, CG & BG feront vn angle au point G: & par la definition de l'angle plan conuertie elles seront en vn mesme plan, & par la mesme CB faisant deux angles avec icelles deux lignes CG & BG, elle sera aussi au mesme plan: Partant tout le triangle CGB est en vn mesme plan: & les lignes CG & BG estant continuees iusques en A & D les toutes AB & CD seront en vn mesme plan, d'autant que leurs moities sont en vn mesme plan, & que par la 1. p. II. il est impossible que vne ligne soit en partie sur vn plan en partie en l'air.



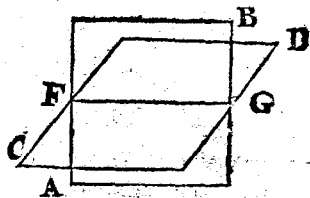
PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur commune section

fera vne ligne droite.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD. Je dis que leur commune section est vne ligne droite.

Qu'il ne soit ainsi. Soient marquez les points de commune rencontre F & G, lesquels sont communs à tous les deux plans: Or d'un point à l'autre soient menées vne ligne droite sur le plan AB, item des mesmes points soit menée vne ligne droite sur le plan CD: Je dis qu'il est impossible que icelles deux lignes soient autres qu'une seule ligne droite sçavoir FG: car si elles estoient différentes, il s'ensuiuroit que deux lignes droites auroient leurs extrémités communes, ce qui est impossible, car elles enfermeroient vn espace.

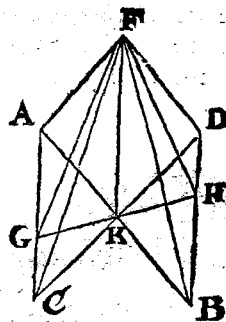


PROP. IIII.

Si deux lignes droites se coupans l'une l'autre, & au point de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droite, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point K, & du point de section K soit esleuee la perpendiculaire KF à chacune d'icelles: ie dis aussi qu'elle est perpendiculaire à leur plan.

Qu'il ne soit ainsi, soit egalée AK à KB Item CK à KD, il est evident par la 4. p. 1. que AC sera egalée à DB. Item du point en l'air F soient menées les lignes FA, FB, FC, FD, lesquelles par la 4. p. 1. seront egalées: Car en les prenant deux à deux les triangles FKC & FKA ont les deux costez egaux à deux costez & l'angle d'iceux costez egal à l'angle (estant FK perpendiculaire à AK & CK) la base FA sera egalée à la base FC, ainsi des autres. Maintenant sur la ligne DB soit pris le point H comme on voudra, & soit menée la ligne HKG: DH sera egalée à GC, & HK à KG par la 26. p. 1. Car les deux triangles DKH & GCK ont deux angles egaux à deux angles, & le costé CK egal au costé KD, & par la 4. p. 1. Si on mene les lignes FH & FG elles seront egalées (Car les deux costez FC & CG & leur angle sont egaux aux deux costez FH & HD & à leur angle) & les triangles FKH & FKG auront les trois costez egaux chacun au sien, & par la 8. p. 1. les trois angles seront egaux aux trois angles chacun au sien: ainsi les angles FKH & FKG seront egaux, & par la 10. d. 1. FK sera perpendiculaire à GH.



On pourra semblablement prédre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FK selon les

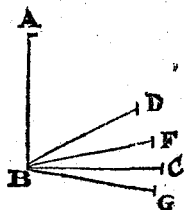
raisonns cy deuant dictes: & par la 1. d. 11. Fk sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD.

PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droites, icelles trois lignes droites seront en vn mesme plan.

Soient trois lignes droictes se rencontrans au point B, sçauoir DB, FB, GB, & que AB soit esleuee perpendiculairement sur vne chacune d'icelles: le dis que icelles trois lignes sont sur vn mesme plan.

Qu'il ne soit ainsi, les deux lignes DB & GB peuvent estre en vn mesme plan par la 2. p. 11. Si donc on dit que BF n'est point sur le plan DBG, mais qu'il est esleué en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. Ainsi ABF & DBG, sons deux plans differens, lesquels se touchans au point B, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne BC, laquelle par cemoien sera au mesme plan que DB, & par la 1. d. 11. AB & BC se rencontreront en angles droicts: mais par hypothese AB & BF se rencontrent aussi en angles droicts, par ainsi les angles ABF & ABC seroient egaux, la partie au tout: Ce qui est impossible: Donc BF estoit au mesme plan que BD & BG.



PROP. VI.

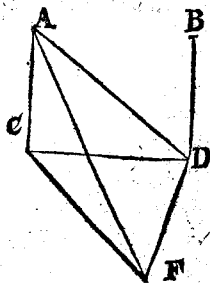
Si deux lignes droites sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan, elles seront paralleles.

Soient les deux lignes esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan AC & BD: le dis qu'elles sont paralleles entre elles.

Car si des points ou icelles lignes rencontrent vne mesme superficie plane C, & D, on meine la ligne droite CD, les deux angles ACD & CDB seront droicts: partant si les deux lignes AC & BD sont en vn mesme plan, elles seront paralleles par la 28. p. 1.

Oresqu'elles soient en vn mesme plan on le prouue ainsi. Sur le plan de CD du point D soit menee DF perpendiculaire à CD p. 11. p. 1. & soit egallee à AC, & soient menees les lignes AD, AF, FC.

Premierement les deux triangles ACD & CDF ont les deux costez AC & DF egaux, & CD commun, & l'angle ACD droit egal à l'angle CDF aussi droit: & par



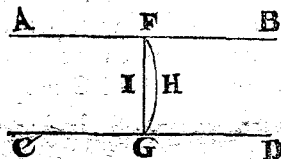
la 4. p. 1. la base AD sera egale à la base CF: Item les deux triangles ACF & ADF ayans les deux costez AC & DF egaux, Item les deux autres AD & CF egaux & la base AF comme à tous deux par la 8. p. 1. l'angle ADF sera egal à l'angle droit ACF: partant l'angle ADF sera aussi droit: il est donc euident que FD touche perpendiculairement en vn point D les trois lignes CD AD BD & par la 5. p. 11. icelles trois lignes seront en vn mesme plan: mais par la 2. p. 11. les trois lignes AC, CD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AC & BD seront en vn mesme plan.

PROP. VII.

Si deux lignes droites sont paralleles & de l'une à l'autre on mene vne ligne droite elle sera au mesme plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes paralleles AB & CD, & de l'une à l'autre soit menee FG ligne droite: Je dis que icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CB.

Car si e'le n'estoit sur le mesme plan: soit icelle en l'air FHG, & du point F au point G soit menee la ligne droite FIG sur le plan des lignes paralleles, ce qui est possible, il fensuiroit que deux lignes droites auroient mesmes termes, ce qui est absurde: Donc la ligne droite FG est au mesme plan des paralleles.

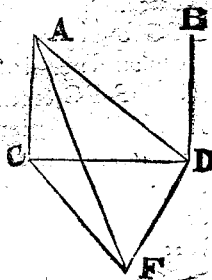


PROP. VIII.

Si deux lignes paralleles passant par vn mesme plan, l'une d'icelles le coupe en angles droites, aussi l'autre le coupera en angles droites.

Soient les deux lignes paralleles AC & BD, & que l'une d'icelle soit esseeue perpendiculairement sur quel que plan, ie dis que l'autre BD est aussi esseeue perpendiculairement sur le mesme plan.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faite mesme construction que en la 6. p. 11. & comme il a esté la demonstrez, les deux angles ACF & ADF seront droits, le premier par hypothese, le second ADF par la 8. p. 11 & par la 4. p. 11. FD sera esseeue perpendiculairement sur le plan des lignes AD & CD mais par la 7. p. 11. les deux lignes AC & CD sont au mesme plan de AC & BD: car elles sont paralleles par hypothese, il s'ensuit que F D est perpendiculaire sur le plan où est la ligne BD: Ainsi l'angle BDF sera droit,

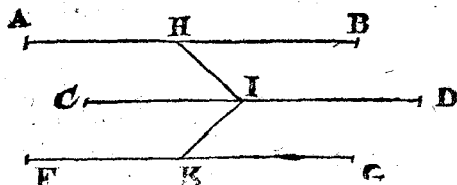


Mais l'angle BDC est aussi droit par la 29. p. 1. estans AC & BD parallèles & par la 4. p. 11. BD sera perpendiculaire au plan de CD & DF (sur lequel est aussi perpendiculaire AC.) Ce qu'il falloit demonstrier

PROP. IX.

Les lignes parallèles à vne, sont parallèles entre elles, encores qu'elles soient en diuers plans.

Soit la ligne AB parallèle à la ligne CD, Item FG parallèle à la mesme CD: Je dis que AB & FG sont parallèles entre elles, encores qu'elles ne soiēt pas au mesme plan de AB & CD.

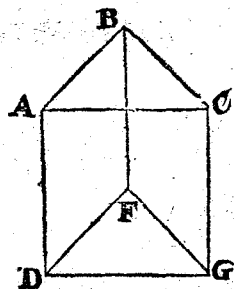


Qu'il ne soit ainsi. Soit pris le point I en la ligne CD, & d'iceluy soient menées les deux lignes perpendiculaires par la 12. p. 1. sçauoir IH sur AB, & IK sur FG: il est evident que HI & IK feront en vn mesme plan par la 2. p. 11. & que les lignes AB & FG coupent iceluy plan en angles droicts, & sont perpendiculaires à iceluy, & par la 6. p. 11. elles seront parallèles entre elles.

PROP. X.

Si deux lignes droites se touchant angulairement, sont parallèles à deux autres lignes droites, aussi se touchant angulairement & à diuers plans, leurs angles seront egaux.

Soient les deux lignes AB & BC se touchans angulairement au point B, lesquelles soient parallèles aux deux autres lignes DF & FG se rencontrans aussi angulairement au point F: Je dis que les angles ABC & DFG sont egaux.

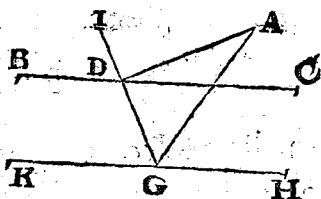


Qu'ainsi ne soit. Soient egalees les quatre lignes AB, BC, DF, FG, & soient menées les lignes AD, BF, CG, AC, DG. Premièrement AB & DF estant égales & parallèles, AD & BF seront aussi égales & parallèles par la 33. p. 1. & par la mesme raison BF & CG seront égales & parallèles & par la 9. p. 11. AD & CG seront égales & parallèles, & par la 33. p. 1. AC & DG seront égales & parallèles: Ainsi les deux triangles ABC. & DFG auront les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, & par la 8. 1. les angles B & F seront egaux.

PROP. XI.

D'un point pris en l'air, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy point.

Soit le point en l'air A, & sur le plan qui est au dessous d'iceluy point soit menée comme on voudra la ligne KH, & par la 12. p. I. du point A vers KH, soit menée la perpendiculaire AG, & par la 1. p. I. du point G, soit menée la perpendiculaire GD, sur le plan mesme où est la ligne KH, & du point A soit menée AD perpendiculaire à DG par la 12. p. I. Je dis qu'elle est la perpendiculaire demandée.



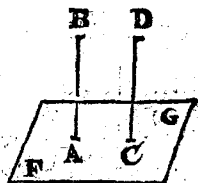
Qu'il ne soit ainsi. Soit menée BDC parallèle à KGH: il est évident par la 4. p. II. que la ligne KG est perpendiculaire au plan du triangle DGA (d'autant que les angles KGD & KGA sont droits, & par la 8. p. II. BD parallèle à KG, sera aussi perpendiculaire au mesme plan: ainsi l'angle BDA sera droit: mais GDA est aussi droit, & par la 4. p. II. AD sera perpendiculaire au plan des deux lignes BD & DG, qui est le plan au dessous du point A, ce qui estoit à monstrier.

P R O P. XII.

D'un plan donné, & d'un point pris en iceluy, esleuer en l'air vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan FG, du point A en iceluy il faut esleuer perpendiculairement vne ligne:

Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menée sur le plan FG, la perpendiculaire DC, rencontrant le plan au point C par la 11. p. II. Et du point A soit menée AB parallèle à CD: il est évident que par la 8. p. II. elle sera aussi perpendiculairement esleuée en l'air sur le plan FG.

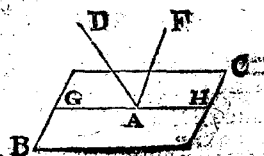


P R O P. XIII.

D'un mesme plan, & d'un mesme point d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'un mesme costé, deux lignes perpendiculaires.

Soit pris quelque plan comme BC, & le point en iceluy A: je dis que du point A, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & du mesme costé.

Autrement s'il est possible: du point A, soient esleuées en l'air les deux pend. AD & AF, elles seront



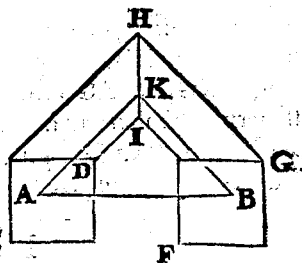
en vn mesme plan par la 2. p. 11. Et iceluy plan d'autant qu'il touche le plan BC au point A, il n'est point parallèle à iceluy: partant estans continuez ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droite: soit icelle GH. Et parce que les lignes AD & AF sont perpendiculaires à iceluy plan BC, les angles FAG & DAG seroient droicts & egaux, la partie au tour: ce qui est impossible.

PROP. XIV.

Si vne ligne droite est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallèles.

Soit la ligne droite AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & FG: ie dis que iceux plans sont parallèles entre eux.

Autrement s'ils n'estoient parallèles, estans continuez ils se rencontreroient, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. soit icelle HI, en laquelle soit pris cōme on voudra le point K, & soient d'iceluy menées les lignes KA, KB: maintenant puisque la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans CD FG, les angles KAB & KBA, seront droicts dans le triangle KAB: contre la 17. p. 1. donc les deux plans ne se rencontreront point, ains seront parallèles.



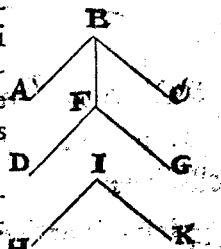
PROP. XV.

Si deux lignes droites se touchant angulairement sont parallèles à deux autres lignes droites se touchant aussi angulairement, & en diuers plans: iceux diuers plans seront parallèles l'un à l'autre.

Soient les deux lignes AB & BC, se touchans angulairement au point B, & les deux autres HI & IK se touchans aussi angulairement au point I, qui soient parallèles aux deux premières, chacune à la sienne, & constituées en diuers plans, ie dis que le plan des lignes AB & BC, est parallèle au plan des lignes HI & IK.

Qu'il ne soit ainsi. Du point B soit levée en l'air la perpendiculaire BF vers le plan HIK par la 11. p. 11. rencontrant iceluy plan au point F, & du point F, soient menées FD, HI: & FG parallèle à IK: par la 11. p. 11. des lignes parallèles DF & HI: Item FG & IK seront en mesme plan: & par la 9. p. 11. Seront aussi parallèles: sçavoir DF à AB, & FG à BC: & par la 19. p. 1. les angles DFB, & GFB seront droicts (d'autant que les angles ABE & CBE sont droicts par la construction.)

Ainsi.



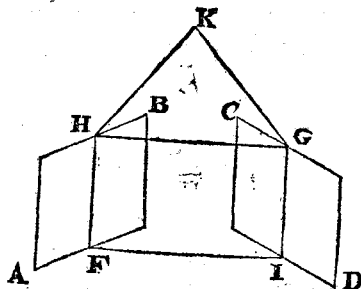
Ainsi la ligne BF est perpendiculaire aux deux lignes AB & BC, & à leur plan par la 4. p. 11. Item aux deux lignes DF & FG, & à leur plan, par la mesme 4. p. 11. & par la 14. p. 11. les plans ABC & DFG (ou HIK, car c'est le mesme) sont parallèles. Ce qui estoit à prouver.

PROP. XVI.

Si deux plans parallèles sont coupez par vn autre plan, les lignes de commune section seront parallèles.

Soient les deux plans parallèles AB & CD, coupez par le troisieme plan HI: ie dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçavoir HF & GI) sont parallèles.

Autrement si elles n'estoient parallèles, estans continuees elles se rencontreroient comme au point K: Mais d'autant que iceux plans sont parallèles estans continuez ils ne se rencontrent iamais: il faudroit donc que les lignes FHK & IGK (lesquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors: ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HF & GI estant continuees ne se rencontrent point & sont parallèles.

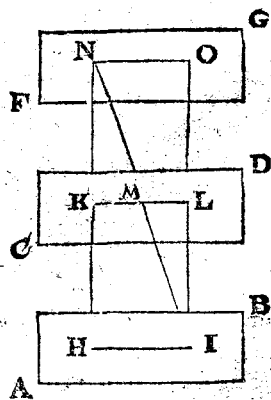


PROP. XVII.

Si deux lignes droites sont coupees par plusieurs plans parallèles, elles seront coupees proportionnellement.

Soient les deux lignes HN & IO, trauerfants les trois plans parallèles AB, CD, FG, aux points H, K, N, O, L, I: ie dis que NK est à KH, comme OL est à LI.

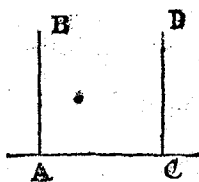
Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes NO, kL, HI: Item NI, coupant KL au point M. D'autant que les plans parallèles AB & CD, sont coupez par le plan KM IH les lignes de commune section KM & HI sont parallèles par la 16. p. 11. & par la 2. p. 6. au triangle NHI, kM estant parallèle à HI, comme NK à KH, ainsi NM à MI. Par les mesmes raisons & propositions au triangle NIO comme NM à MI, ainsi OL à LI: & par la 11. p. 5. d'autant que comme NM à MI ainsi Nk à kH) OL sera à LI comme Nk à kH, ce qui estoit à demonstrier.



PROP. XVIII.

Si vne ligne droite est esleuee perpendiculairement sur vn plan, tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan : Je dis que tous les plans de la ligne AB, menez quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le plan auquel BA est perpendiculaire.



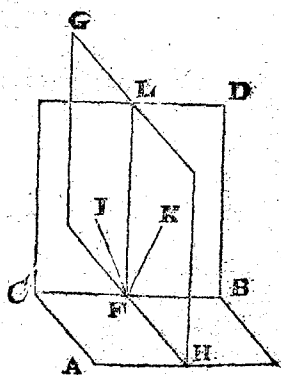
Qu'ainsi ne soit. Soit mené quelque plan de la ligne AB sur le plan proposé, leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. Soit icelle AC : & du point C pris en icelle comme on voudra, soit menée CD perpendiculaire sur le plan de BA par la 11. p. 1. & par la 28. p. 1. CD sera parallèle à AB : & par la 8. p. 11. AB & CD seront perpendiculaires au plan proposé : & par mesme discours on en trouuera autr qu'on voudra de semblables : & par la 3. d. 11. le plan de BACD sera esleué perpendiculairement sur le plan proposé.

PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecourent : leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre G.H & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan A.B, & soit la ligne de leur commune section FL : ie dis que icelle est perpendiculaire au plan AB.

Autrement si elle n'est perpendiculaire au plan AB, puis que le plan CD est perpendiculaire au plan AB, ils auront vne commune section qui sera ligne droite, soit icelle CB : & du point F pris en icelle soit menée FI perpendiculaire à la ligne CB, sur le plan CD par la 11. p. 1. & par la 3. d. 11. conuertie, elle sera perpendiculaire au plan AB. Tout de mesme le plan GH estant perpendiculaire au plan AB, si à leur commune section FH, & du point F, on lève la perpendiculaire FK sur le plan GH, elle sera aussi par la mesme deff. conuertie perpendiculaire au plan AB : ainsi FI & FK seroient toutes deux d'un mesme point esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan : ce qui est contre la 13. p. 11. Donc du point F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan AB, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux



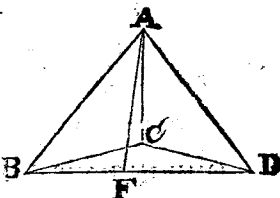
autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FL.

PROP. XX.

Si vn angle folide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme.

Soit l'angle folide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB, ie dis que deux pris comme on voudra comme BAC & DAC, sont plus grands que le troisieme.

Autrement, si on dit que BAD soit plus grand que les deux autres: Soit fait $\angle BAF$ egal à $\angle DAC$ par la 23. p. 1. & soient faites egales les trois lignes AC, AD, AF: & apres auoir mené les deux lignes CD & DF, & continué DF iufques à B du costé AB: soit menée CB. Maintenant puis que les deux costez CA & AD sont egaux aux deux costez DA & AF, & leurs angles egaux, la base CD fera egalle à la base DF. Item puis que l'on pose l'angle BAD plus grand que les deux autres, & que le retranché FAD est egal à l'un d'iceux CAD, le reste BAF sera plus grand que l'autre BAC: mais les deux costez FA & AB sont egaux aux deux costez CA & AB, & l'angle BAF est plus grand que l'angle BAC: & par la 24. p. 1. la base BF sera plus grande que la base BC: & FD estant egalle à CD, il est euident qu'au triangle BCD le costé BD est plus grand que les deux autres: ce qui est contre la 20. p. 1. Donc l'angle BAD n'est point plus grand que les deux autres. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuiura par le mesme discours que BD est egalle à BC & CD: ce qui contreuiuent tousiours à la 20. p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres.

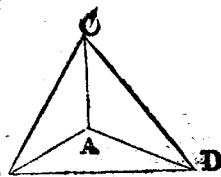


PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle folide, sont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle folide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis que iceux trois angles plans sont plus petits que quatre droicts.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menées les trois lignes BC, CD, BD, faisant le triangle de la base de l'angle folide BCD: il est euident qu'aux trois angles B, C, D, il y aura B trois angles folides, & que par la 20. p. 11. les deux angles d'iceux pris comme on voudra, seront plus grands que le troisieme: comme les deux sous le point C, BCA & DCA, seront plus grands que le troisieme BCD, & les deux sous le

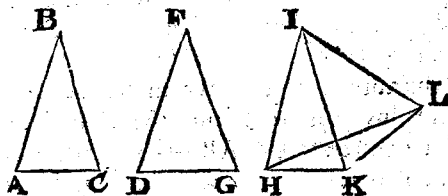


point B, seront plus grands que le troisieme DBC: Item les deux CDA, & BDA, sont plus grâds que BDC: & partât que les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts (car iceux trois angles valent autant par la 32. p. 1.) Mais iceux six angles avec les trois qui font l'angle solide A, valent six droicts par la 32. p. 1. (D'autant que ce sont trois triangles plans) & iceux six angles sont plus grands que deux droicts: Ainsî est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts.

PROP. XXII.

Il est possible de faire vn angle solide, de trois angles plans compris de lignes egales, moyennant que deux soient plus grands que le troisieme, & les trois plus petits que quatre droicts.

Soient les trois angles plans A BC, DFG, HIK, en sorte que les deux pris comme on voudra soient plus grands que le troisieme, & les trois plus petits que quatre angles droicts: Je dis qu'on peut faire vn angle solide d'iceux trois angles



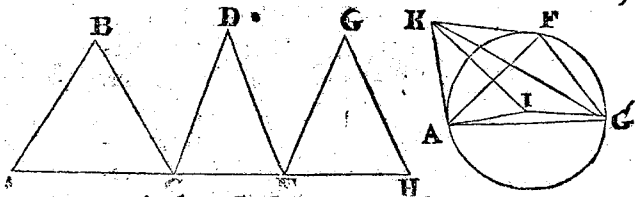
plans, (c'est à dire que iceux angles estans compris de costez egaux, si on meîne les bases AC, DG, HK, que d'icelles bases on pourra faire vn triangle.)

Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme: qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à HIK, on adiouste KIL égal à DFG par la 23. p. 1. & on fait IL égal à FG, l'angle HIL estant plus grand que le troisieme ABC, la base HL par la 24. p. 1. sera plus grande que la base AC (car leurs costez sont egaux) & à plus forte raison les deux HK & KL, seront plus grandes que la troisieme AC. Et par mesme discours, on montrera tousiours que deux d'icelles bases prises comme on voudra sont plus grandes que la troisieme. Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Voila ce qui estoit à demonstret.

PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, plus petits que quatre droicts, moyennant que deux d'iceux soient plus grands que le tiers.

Soient trois angles plans comme les demâde la proposition. ABC , CD F , FGH , compris de costez egaux, lesquels soient soustenuz des trois bases AC , CF , & FA . Il faut faire vn angle solide.



Soit fait le triangle FAC , ayans les trois costez egaux aux trois bases AC , CF , FA par la 22. p. 1. lequel soit circonscript. du cercle FAC par la 5. p. 4. & du centre soient menees les trois lignes IC , IF , IA : & apres auoir esleué en l'air perpendiculairement IK par la 12. p. 11. Soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de IA , soient egaux au quarré de l'un des costez d'iceux angles plans (lesquels doiuent estre tous egaux par hypothese) apres auoir mené les lignes KA , KC , KF : Je dis que $ACKF$ est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez.

Car les trois lignes IA IC IF estant egales, & KI perpendiculaire à icelles, les trois lignes KA , KC , KF , seront egales par la 47. p. 1. d'autant qu'elles peuuent autant l'une comme l'autre: & puis qu'elles peuuent autant que l'un des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans: puis les trois bases AC , CF , FA , estans egales aux bases des angles donnez, par la 8. p. 1. les trois angles au point K , seront egaux aux trois dōnez B , D , C : ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

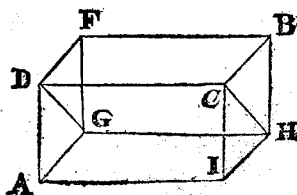
Quelqu'un pourra obiecter que la perpendiculaire KI ne peut pas tousiours estre retranchée, en sorte que son quarré avec le quarré de IA soient egaux au quarré de l'un des costez des triangles donnez: comme par exemple si iceluy costé estoit egal ou plus petit que AI , ce qui n'arriue iamais, non pas seulement qu'il soit egal à AI : car si AI & IF estoient egaux à AB & BC , & la base à la base, (& ainsi des deux autres triangles) les trois au point I seroient egaux aux trois angles BDG , chacun au sien, ce qui est euidentement faux: Car tousiours par hypothese les trois angles B , D , G , sont plus petits que quatre droicts, & les trois au point I sont egaux à quatre droicts.

PROP. XXIIII.

Les solides compris de six plans parallels, ont les plans opposez egaux & parallelogrames.

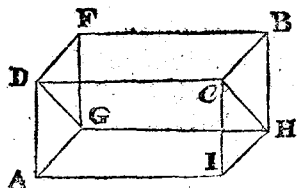
Soit le solide de six plans parallels AB : ie dis que les plans opposez sont egaux & parallelogrames.

Car puis que les plans DB & AH sont parallels estans coupez par les plans AF & IB , les lignes de cōmune section DF & AG sont paralleles: Item CB & IH par la 16. p. 11. par la mesme raison les



Kk iij

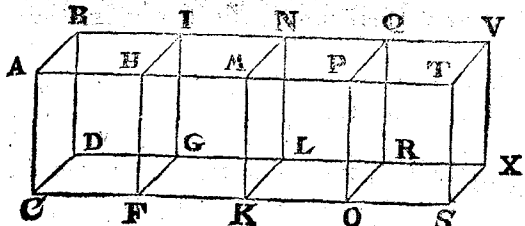
plans DI & FH estans parallels, les lignes de commune section DA & FG, Item CI & BH sont paralleles: partant AF & IB sont parallelogrames. Par le mesme discours BD, DI, GI, GB, se prouueront estre parallelog. & par la 34. p. 1. les costez opposez seront egaux: partant DF & FG seront egaux à CB & BH, & paralleles à icelles: & par la 15. p. 11. les angles DFG & CBH en diuers plans sont egaux, & par la 4. p. 1. le triangle DFG sera egal au triangle CBH: & par la mesme raison DAG à CIH: partant le plan AF egal à son opposeé IB: par le mesme discours on prouuera les autres plans opposez egaux.



PRO XXV.

Le parallelograme solide, estant couppe par vn plan parallel aux plans opposez: les solides coupez seront l'un l'autre comme leur base.

Soit le solide parallelog. FQ couppe par le plan kN parallel aux deux opposez FI & OQ, & faisant deux solides FN & NO: ie dis que iceux solides seront l'un à l'autre, comme la base FM est à la base kP.



Qu'il ne soit ainsi (la ligne FO estant prolongee de part & d'autre) Soient faictes egalles OS à OK, & CF à Fk, & soient accomplis les parallelogrames AF & OT. Item les solides AG & OV. Doncques puis que KO & OS sont egalles, les parallelogrames kP & OT seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la 24. p. 11 les plans opposez LQ & RV seront egaux: Item kR & OX egaux à MQ & PV plans opposez, & ainsi des autres: & par les deff. de celiure le solide KQ est egal au solide OV. Par le mesme discours le solide KI sera egal au solide FB, comme la base FM est egale à la base CH: partant le solide kB est autant multiplie du solide KI, comme la base CM est multiplie de la base FM: Item le solide KV est autant multiplie du solide kQ, comme la base kT est multiplie de la base kP: & par la 14. p. 9. comme la base CM sera plus grande egale ou plus petite que la base FM, Ainsi le solide kB sera plus grand egal ou plus petit que le solide KI. Tout de mesme comme la base kT sera plus grande, egale ou plus petite: que la base kP ainsi le solide KV sera plus grand egal ou plus petit que le solide kQ. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases FM & kP, & les deux solides KI & KQ. Desquels de la premiere & troisieme (sçavoir de la base FM & du solide KI) on a pris les equemultipliees CM base & KB solide: Item de la seconde & quatrieme (sçavoir de la base kP & du solide KQ) les equimultipliees KT base, &

KV solide, lesquels nous auons montré estre comme demandela 6. d. 5. plus grands egaux ou plus petits: & partant comme la base FM à la base KP, ainſi le ſolide KI au ſolide KQ: ce qu'il falloit démonſtrer.

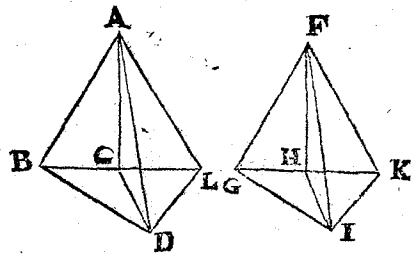
PROP. XXVI.

Sur vne ligne droite, & d'un point donné en icelle, baſtir vn angle ſolide egal à vn angle ſolide donné.

Soit l'angle ſolide donné A compris de trois lignes AB, AD, AL qui comprennent trois angles plans, deſquels eſt compoſé le ſolide: ſur la ligne donnée FG & au point F, il faut baſtir vn angle ſolide egal au donné A.

Soit menée comme on voudra vne ligne qui touche angulairement FG, icelles deux lignes ſeront en vn meſme plan par la 2. p. 11. & ſur iceluy plan ſoit fait l'angle GFK egal à l'angle BAL par la 23. p. 1. Maintenant du point D ſoit menée la ligne DC tombant perpendiculairement ſur le plan BAL par la 11. p. 11. En après ſoient menées les trois lignes BC, CA, BD. Item ſur le plan GFK ſoit fait l'angle GFH egal à l'angle BAC par la 23. p. 1. & après auoir fait egales GF à AB & FH à AC, du plan GFK, & du point en iceluy H, ſoit eſſeue la perpendiculaire HI par la 12. p. 11 laquelle ſoit faiſte egale à CD: & ſoient menées les trois lignes FI, IG, & GH: le diſque l'angle ſolide compris des trois lignes GF, FI, KF ſera egal à l'angle ſolide A.

Car par la conſtruction, les deux coſtez AC & CD ſont egaux aux deux FH & HI, & l'angle ACD droit egal à l'angle FHI auſſi droit, & par la 4. p. 1. la baſe AD ſera egale à la baſe FI: & par la meſme prop. d'autant que les deux coſtez BA & AC & leur angle, ſont egaux par la conſtruction aux deux coſtez GF & FH & à leur angle: BC & GH ſeront egales: mais CD & HI ſont auſſi egales, & les angles BCD & GHI egaux (d'autant qu'ils ſont droits) la baſe BD ſera egale à la baſe GI: & par la 8. p. 1. l'angle BAD ſera egal à l'angle GFI. Pareillement par les meſmes raiſons on prouuera que l'angle DAL eſt egal à l'angle IFK: & par la conſtruction l'angle BAL eſt egal à l'angle GFK: & par les deſſe de ce liure les angles ſolides A & F ſont egaux.



PROP. XXVII.

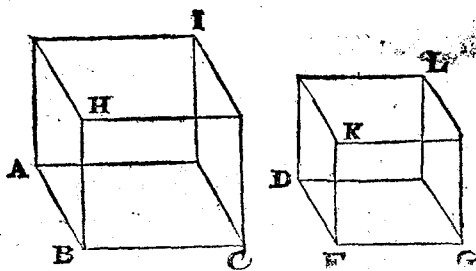
Sur vne ligne droite donnée, deſcrire vn parallélograme ſolide, ſemblable, & ſemblablement poſé, à vn ſolide parallélograme donné.

Soit la ligne donnée BC, sur laquelle il faut bastir vn paralllog. solide semblable, & semblablement posé au donné FL.

Sur la ligne BC & au point B, soit basti vn angle solide egal à l'angle solide F par la 26. p. 11. lequel soit compris des

trois lignes CB, HB, AB, & par la 10. p. 6. soit faicte comme FG à FK ainsi BC à BH, & comme FG à FK ainsi BC à BA en raison egal AB sera à BH comme DF à FK Soient maintenant paracheuez les paralllog. AC, CH, HA, IA, IH, IC: le dis que le solide BI est semblable & semblablement posé au solide FL donné.

Car ils ont autant de superficies plans l'un comme l'autre: & d'autant que H B est à BC comme KF est FG, & l'angle HBC egal à l'angle KFG, le paralllograme HC est semblable au paralllog kG: par la même raison le paralllograme HA sera semblable au paralllog. kD, & AC à DG. Partant trois paralllog. du solide BI sont semblables & semblablement ptez, à trois paralllog. du solide FL. Mais par la 24. p. 11. les trois opposez estant egaux, ils seront aussi semblables, & par les deff. de ce liure les solides BI & FL seront semblables & semblablement ptez.

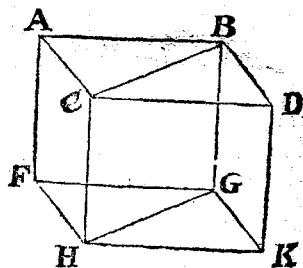


PROP. XXVIII.

Si vn paralllograme solide est coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez: il sera coupé en deux egallement.

Soit le paralllog. solide Ak, coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez CB & HG. Je dis qu'il est coupé en deux egallement.

Car il est enident par la 34. p. 1. que les triangles BDC & BAC sont egaux, item les deux GKH & GFH: & le plan AH egal au plan Bk, & A G à Ck par la 24. p. 11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes GAH & GDH sont compris de paralllogrammes, & de triangles opposez semblables & egaux: & par les deff. de ce liure iceux prismes sont egaux.

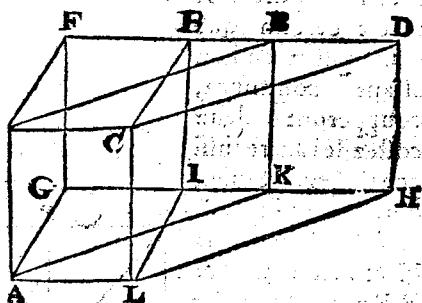


PROP. XXIX.

Les paralllogrammes solides ayans mesme base, & de mesme

me hauteur, & desquels les plans opposez à la base sont entre mesmes lignes droites, sont egaux.

Soient les deux parallelog. solides AB & AD, tous deux sur la mesme base AC, de mesme hauteur, ayans les deux plans FI & BH opposez à la base AC constituez entre les mesmes lignes droictes FD & GH: ie dis que iceux deux parallelog. solides sont egaux entre eux.

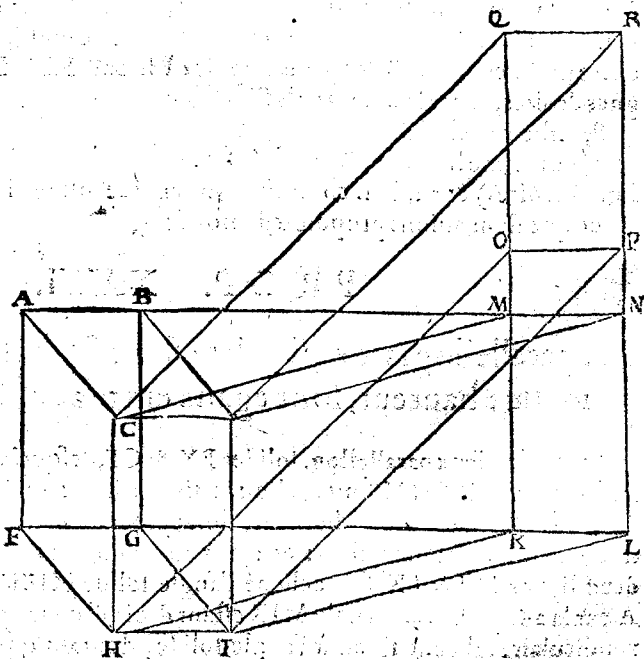


Ceste demonstration est aisee à qui a bien conceu celle de la 35. p. 1 Car ce que celle-là prouue par les triangles egaux auxquels on oste & adiouste. Icy on prouue par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFK, & LBH seront montrez egaux par la 24. p. II. par ce que les plans opposez des parallelogrammes solides, sont egaux: & d'iceux sont faits les prismes. Le reste est aisé.

PROP. XXX.

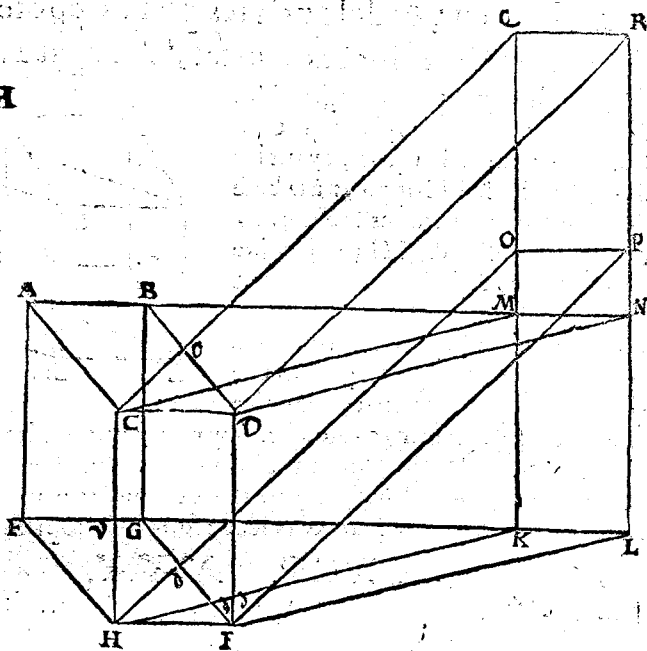
Les parallelogrammes solides ayans mesme base, & de mesme hauteur (encores que les plans opposez à leur base ne soient entre mesme lignes droites) sont egaux.

Soient deux solides parallelogrammes HB & HR tous deux sur mesme base CI, & de mesme hauteur (c'est à dire que leurs plans opposez & parallels à leur base CI, sçauoir AG & QP soient en vn mesme plan, lequel soit parallel à la base CI) ie dis qu'ils sont egaux encores que les plans PQ & AG opposez à leur base commune CI, ne soient entre mesmes lignes droites.



Qu'il ne soit ainsi. Puis que les plans AG & PQ sont en vn

mesme plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droites: il est certain que deux costez de l'un estans continuez, couperont deux costez de l'autre aussi continuez. Soient donc les costez AB & FG continuez vers N & L: Item QO & RP vers K & L: elles se couperont donc aux points K, L, & M, N, faisant un parallelograme (d'autant que les lignes continuees sont paralleles) lequel sera egal à la base plane CI: car par la 34. p.



1. les lignes MK & NL estant egales à AF & GB, elles le seront aussi à CH & DI: Item KL & MN estant egales à OP & QR, elles le seront aussi à CD & HI: & apres auoir mené les quatre lignes CM, DN, HK, IL: il est manifeste que les deux solides HB & HN, sont sur mesme base & de mesme hauteur (car ils sont entre mesmes plans) & les plans opposez à la base FB & KN, entre mesmes lignes droites, & par la 29. p. II. ils sont egaux.

Pareillement le solide HN se trouuera egal au solide HR, (estans sur mesme base, de mesme hauteur, & les plans opposez à la base LM & PQ entre mesmes lignes droites) & par la 1. commune sentence le solide HB, sera egal au solide HR: ce que nous auons proposé à demonstrier,

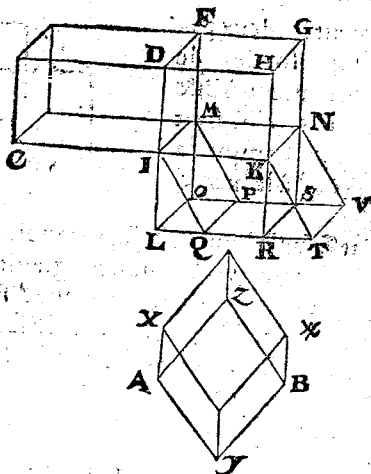
P R O P. XXXI.

Les parallelogrames solides estant sur bases egales, & de mesme hauteur, sont egaux entre eux.

Soient les deux parallelog. solides BX, & CF, desquels les bases AB & CD, & les hauteurs AX & IM sont egales: ie dis que iceux solides sont egaux.

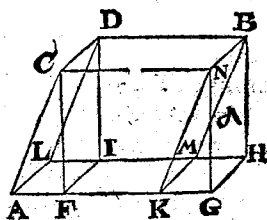
Qu'ainsi ne soit. Leurs hauteurs sont perpendiculaires, ou non: Soient premierement perpendiculaires: & apres auoir continue C I iusques à K, sur les deux lignes MI & IK soit acheué l'angle solide MIKIQ, egal à l'angle solide A. par la 26. p. II. (Car l'angle MIK estant droit, d'autant que c'est la hauteur perpendiculaire, il peut seruir à l'angle solide, d'autant que l'angle plan XAZ est

aussi droit, estant la hauteur AX aussi perpendiculaire) & les lignes IM & AX estât egalles, soit faicte IQ egalle à AZ : & IQ egalle à AY : & soit acheué le parallelograme solide IV. Il est euident qu'il sera egal & semblable au solide BX, par le mesme discours de la 25. p. 11. Item soit continues TQ iusques en L, VP iusques en O, DI iusques en L, FM iusques en O, GN iusques en S, & HK iusques en R, faisant le parallelograme solide NL : les deux parallelogrames IT & KL sont egaux par la 35. p. 1. Mais IT pour estre egal à AB est aussi egal à CD : partāt les bases IT & CD & KL sont egal. & par la 7. p. 5. les deux CD & KL, aurōt mesme raison l'une comme l'autre à la troisieme DK : mais par la 25. p. 11. comme CD à DK ainsi le solide CF au solide FK : Item comme D K à KL, ainsi le solide DN au solide NL : & par la 11. p. 5. les deux solides CF & LN, auront mesme raison l'un comme l'autre au solide DK : & par la 9. p. 5. ils seront egaux, & par la 29. p. 11. les deux solides NL & IV estāns aussi egaux (car ils sont ainsi que demande icelle propos.) le solide CF sera egal au solide IV & par consequent à son egal BX.



Maintenant si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires, il les y faudra reduire en ceste sorte.

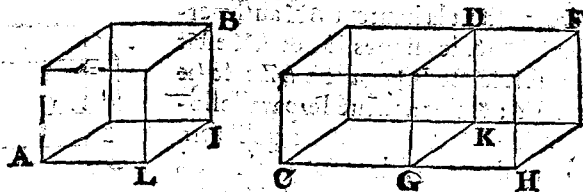
Soit le parallelog. solide AB duquel la hauteur AC n'est point perpendiculaire : Soient continuez les costez Ax & LM iusques en G & en H, & sur le plan d'icelles lignes soient laisseez tomber des quatres points en l'air C, D, B, N : les quatre perpendiculaires CF, DI, BH & NG par la 11. p. 11. accomplissans le solide FB : il est euident que les solides AB & FB sont egaux par la 29. p. 11. Ainsi demeurant la mesme base CB le solide AB de hauteur non perpendiculaire, est reduit à FB de hauteur perpendiculaire. Ce qui estoit à faire.



PROP. XXXII.

Les parallelogrames solides estāns de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient les deux parallélog. solides de même hauteur AB & CD . Je dis qu'ils sont entre eux comme la base AI est à la base CK .



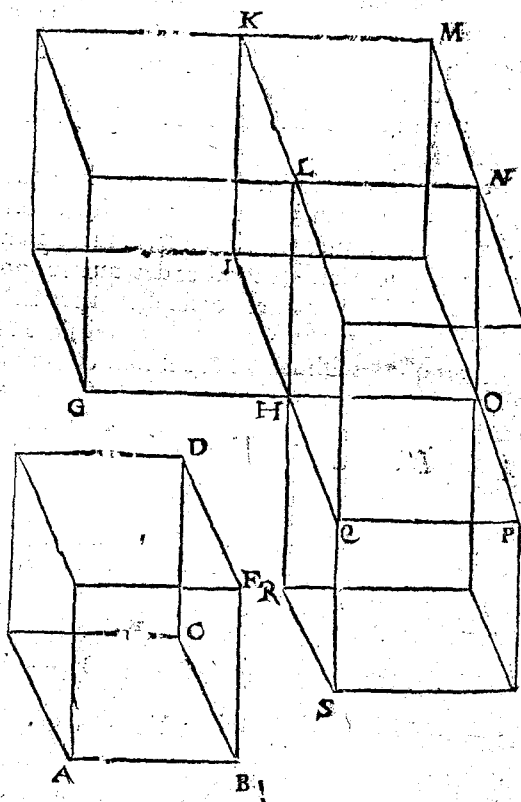
Car si sur la ligne Gk (après avoir prolongé le plan Ck vers H) & sur l'angle KGH on construit le parallélograme kH , puis on achève le parallélog. solide GF , étant de même hauteur que AB , & sur base égale. Il sera égal à AB par la 32. p. II. & le parallélog. solide CF sera coupé par le plan GD , parallèle à HF : Le solide CD sera au solide GF (ou AB son égal) comme la base Ck à la base kH : laquelle étant construite égale à AI base de AB , il est manifeste que le solide CD est au solide AB , comme la base CK est à la base AI .

PRO P. XXXIII.

Les parallélogrames solides semblables, sont l'un à l'autre en raison triplee de leurs costez proportionaux,

Soient les deux parallélogrames solides semblables GK & AD , leurs costez proportionaux GH & AB : Je dis qu'ils sont l'un l'autre en raison triplee de GH à AB :

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongées les lignes GH vers O , IH vers Q , & LH vers R : en après les avoir fait égales, sçavoir HO à AB , HQ à BC , & HR à BF , soit accompli le parallélograme solide SO : item soient accomplis les parallélog. solides QN & HM . Premièrement d'autant que les deux solides Gk & AD sont semblables, les lignes GH , HL , HI , sont l'une à l'autre comme AB , BF , BC , ou leurs égales HO , HR , HQ : c'est à sçavoir que comme GH à HO : ainsi LH à HR , & IH à HQ : Mais par la 1. p. 6. cōme GH à HO , ainsi la base G à la base OI : & comme IH à HQ , ainsi la base IO à la base OQ . Et comme LH à HR , ainsi la base LQ à la



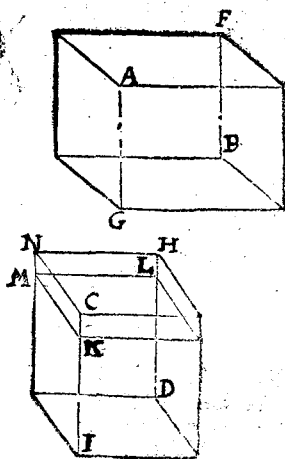
base QR : Mais toutes icelles lignes sont en mesme raison, partant icelles quatre bases planes seront en mesme raison & continuellement proportionelles. Mais le solide GK est au solide KO comme la base GI est à la base IO , item le solide KO au solide NQ comme la base IO à la base OQ , item le solide NQ au solide OS comme la base LO à la base OR : Et icelles quatre bases sont continuellement proport. & par la 32. p. 11. iceux quatre solides seront continuellement proportionaux: Et le premier GK sera au quatriesme SO (ou à son egal AD) en raison triplee du premier GK au second KO par la 10. d. 5. Mais GK est à KO , comme la base plane GI est à la base plane IO par la 32. p. 11. lesquelles bases planes sont l'une à l'autre comme GH est à HO par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. Le solide GK sera au solide SO , comme GH est à HO : Partant la raison doublee de GK à KO sera la mesme que de GH à HO , ou son egalle AB : Et par consequent GK estant à AD en raison doublee de GK à KO , il sera aussi en raison doublee de GH à AB . Ce qu'il falloit demonstrier.

PROP. XXXIII.

Les egaux parallelogrames solides, ont les bases & les hauteurs reciproques: Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient deux parallelog. solides GF & IH . Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques: c'est à dire que comme la base GB à la base ID , ainsi la hauteur IC à la hauteur GA . Nota que presques à toutes les demonstrations de celiure, il faut que les hauteurs des solides soient perpendiculaires: que si elles n'estoient telles il les y faut reduire comme nous auons enseigné à la fin de la 31. p. 11. Je dis donc que les hauteurs & les bases sont reciproques.

Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que si les bases GB & ID sont egalles (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egalles. Soient donc les bases inegalles, sçavoir GB plus grande que ID : Je dis que la hauteur IC doit estre plus grande que GA car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egalle, d'autant que par la 32. p. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre comme leurs bases, partant AB plus grand que CD , & nous les posons egaux: IC sera donc plus grande que GA : & d'icelle soit retranchee Ik egalle à GA , & d'iceluy point K soit imaginé le plan kL parallel à ID , couper le solide CD : les deux solides AB & CD estans egaux ils auront mesme raison l'un commel'autre au solide KD par la 7. p. 5. Or AB & DK estans de mesme hauteur, ils seront l'un à l'autre commela base GB à la base ID par la 32. p. 11. Partant CD sera aussi à KD comme la base GB à la base ID . Or comme CD à KD



ainsi la base IN à la base IM par la 25. p. 11. & icelle base IN est à la base IM comme IC à IK par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. le solide CD est au solide KD comme IC à IK . Le solide CD est aussi à KD comme la base GB à la base ID & par la 11. p. 5. comme la base GB à la base ID , ainsi la hauteur CI est à la hauteur Ik ou à son egale AG ,

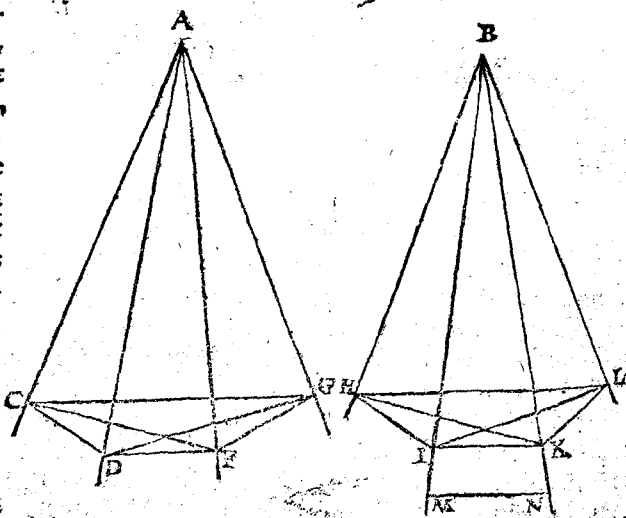
Pour la seconde partie si GB base est à ID base, comme IC hauteur est à AG hauteur (ou son egale Ik) ie dis que les deux solides AB & CD sont egaux.

Car demeurant la mesme construction, les solides CD & KD sont l'un à l'autre comme CI à KI (comme nous auons tantost dict par la 25. p. 11. & 1. p. 6.) mais comme CI à KI ainsi GB à ID , & par la 11. p. 5. CD sera à KD comme AB à ID : Item comme AB à ID ainsi le solide AB au solide KD (car ils sont de mesme hauteur) par la 32. p. 11. & par la 11. p. 5. CD sera à KD comme AB au mesme KD : & par la 9. p. 5. AB & CD seront egaux.

PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux, du sommet desquels on leue en l'air deux lignes droites faisant angles egaux avec les costez des angles premieremēt posez chacun au sien, & d'un point pris à chacune des deux lignes, on meine des lignes perpendiculaires sur les plans qui sont au dessous, & des points où tombent icelles perpendiculaires on meine des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, avec les leuees en l'air sont egaux entre eux.

Soient les deux angles plans egaux HLB & CAG , du sommet desquels B & A on leue en l'air les lignes BN & AF en sorte que LBN & GAF soient egaux, Item HBM & CAB : ie dis que si des points pris à l'aduenture en icelles N & F , on abaisse les perpendiculaires NM , & FD sur le plan des angles donnez, & on meine les lignes MB & DA , que l'angle MBN sera



egal à l'angle DAF.

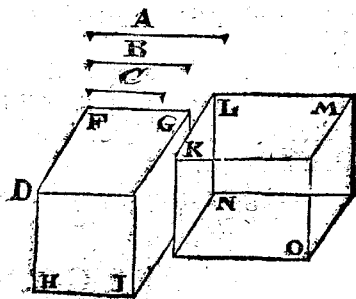
Qu'il ne soit ainsi. Si les deux lignes AF & BN ne sont égales, soit de la plus grande BN retranché Bk égale à AF, & après avoir abaissé la perpendiculaire k l sur le plan HBL par la 11. p. 11. & sur les lignes HB & BL mené les perpendiculaires IH & IL, item DC & CG sur les lignes CA & GA le tout par la 12. p. 1. soient menées les lignes KH, KL, item FG FC.

Premièrement les triangles KBI, KIH, IHB, ILB sont rectangles: item FDA FDC, DCA, DGA aussi rect. & les deux trig. BkH, & AFC ayas les angles droits BHk & ACF, & par hypothese HBk egal à CAF, & le costé BK egal au costé AF, par la 26. p. 1. les deux autres costez BH & Hk, seront egaux aux deux autres costez AC & CF chacun au sien. Par mesme discours de la 26. p. 1. on trouuera BL égale à AG: & par la 4. p. 1. la base HL du triangle HBL, sera égale à la base CG du triangle CAG (car par hypothese les angles HBL & CAG sont egaux) & l'angle LHB sera egal à l'angle GCA: mais le droit IHB estoit aussi egal au droit DCA: partant le reste IHL sera egal au reste DCG. Par mesme discours les angles ILH & DGC se trouueront egaux, & par la 26. p. 1. HI sera egal à C D: mais Hk est egal à CF, & par la 47. p. 1. IK sera egal à DF: & puis que BK est égale à AF, aussi par la mesme prop. BI sera égale à AD: & les deux triangles A Ik & ADF auront les trois costez egaux chacun au sien, & par la 8. p. 1. Les angles seront egaux chacun au sien.

PROP. XXXVI.

Si trois lignes sont proportionelles, le parallelograme solide compris d'icelles trois lignes, est egal au parallelograme solide compris de la moyenne: moyennant qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient les trois lignes continuellement proportionelles A, B, C, desquelles on a construit le parallelograme solide O L, ayât sa base KM parallelograme compris des lignes K & LM, egales aux deux A & C, & la hauteur LN égale à B: & soit iceluy OL equiangle au parallelog. solide FI compris de trois fois la moyenne B, sçavoir deux fois à la base GD (qui est parallelograme) & la troisieme à la hauteur DH: ac dis qu'iceux solides sont egaux.



Car puis qu'ils sont equiangles, l'angle solide F sera egal à l'angle solide L: & par les dess. de celiute ils seront composez d'angles plans egaux, ainsi les angles plans DFG & KLM seront egaux: mais comme LM à FG, ainsi FD à KL: c'est à dire que les parallelogrammes plans DG & KM ont les costez reciproques, & par la 14. p. 6. ils sont egaux. Or iceux solides FI & LO sont de mesme hauteur

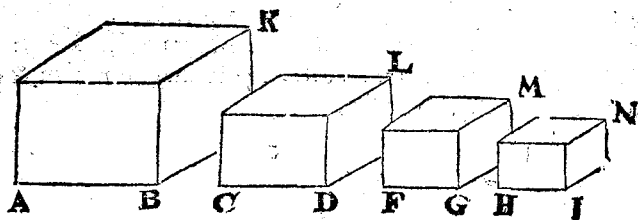
DH & LN, lesquelles sont égales: & par la 32. p. 11. ils sont égaux.

Mais il faut noter icy que la hauteur doit estre perpendiculaire pour tirer la consequence demandée de ceste proposition.

PROP. XXXVII.

Si quatre lignes sont proportionelles, les parallelogrames solides semblables & semblablement posez descriptz sur icelles, seront proportionaux: Et si ceux quatre semblables solides parallelogrames sont proportionaux, les quatre lignes sur lesquels ils seront semblablement posez, seront proportionelles.

Soient quatre lignes proportionelles comme AB à C D ainsi FG à HI: & soient descriptz sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez AK, CL, FM, HN.



Nous dis que iceux solides sont proportionaux.

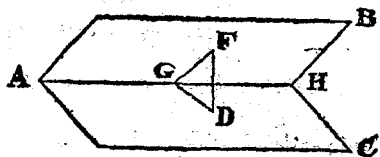
Car, puis que AK est semblable à CL, par la 33. p. 11. ils seront l'un à l'autre en raison triplée de AB à CD: Pareillement FM & HN seront aussi en raison triplée de FG à HI: mais la raison de AB à CD est comme de FG à HI: & par la 14. p. 5. la raison triplée de AB à CD, sera semblable à la raison triplée de FG à HI, & partant par la 11. p. 5. le solide AK sera au solide CL, comme le solide FM à HN.

Maintenant si les quatre solides sont proportionaux, AB sera à CD comme FG à HI. Car tout de mesmes AK sera à CL en raison triplée de AB à CD: Item FM à HN en raison triplée de FG à HI: mais le solide AK est au solide CL cōme le solide FM solide HN: partāt leur raison triplée sera semblable, & par cōsequent les quatre lignes seront proportionelles.

PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, & d'un point de l'un d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre: elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan AB, esleué perpendiculairement sur le plan AC, leur ligne de commune section AH, & du point F pris en A B on laisse tomber vne perpendiculaire sur AC: ie dis qu'elle tombera sur la commune section AH.

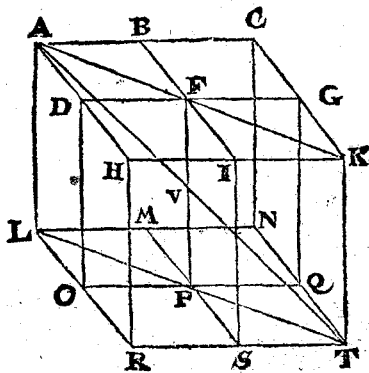


Autrement qu'elle tombe au point D, du plan AC s'il est possible: & par la 12. p. 1. du point D vers la ligne AH soit menee la perpendiculaire DG: & la ligne GF faisant le triangle GDF. Or si la ligne FD est perpendiculaire, estant GF aussi perpendiculaire, les deux angles sur la ligne GD seroient tous deux droits contre la 17. p. 1. Partant FD n'estoit pas perpendiculaire, puis qu'elle debuoit tomber sur AF.

PROP. XXIX.

Si les costez opposez d'un parallélograme solide sont coupez en deux egallement, & on mene des plans par les sections: la ligne de commune section d'iceux plans & le diametre du solide, se coupent en deux egallement.

Soit le parallélog. solide AT, les costez opposez AC, AH, CK, KH. Item LN, LR, TN, TR, soient tous coupez en deux egallement en D, G, B, I: Item en O, S, Q, M: & par icelles sections soient imaginez passer les plans DQ & BS, se coupans l'un l'autre en la ligne FP: & soit menee la diagonale AT, coupant FP au point V. Ie dis que les lignes FP & AT se coupent l'un l'autre en deux egallement.

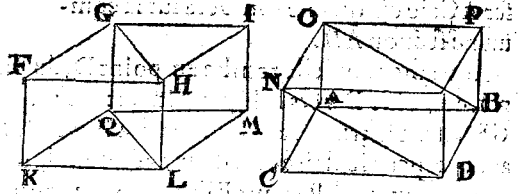


Car par la 2. p. 6 BF estant parallele à C K, comme AB est egale à BC, ainsi AF se trouuera egale à FK. Item le plan BS estant parallele au plan CT, aussi la ligne FV en iceluy, sera parallele à la ligne KT aussi d'as le même plà par la 16. p. 11. & par la 2. p. 6. cōme AF est egale à Fk ainsi AV à VT. Itē les deux lignes Ak & LT estā paralleles (car leurs plās sōt parallels.) les angles FAV & VTP sont egaux par la 27. p. 1. & les opposez au sommet vers V par la 15. p. 1. & par la 32. p. 1. les troisiēmes seront egaux, & par la 4. p. 6. Les triangles AVF & BVT estans equiangles auront les costez proportionaux, & comme AV à VF ainsi TV à VP: & en changeant comme AV est egal à VT, ainsi FV est egale à VP: Partant les deux lignes AT & FP se coupent en deux egallement.

PROP. XL.

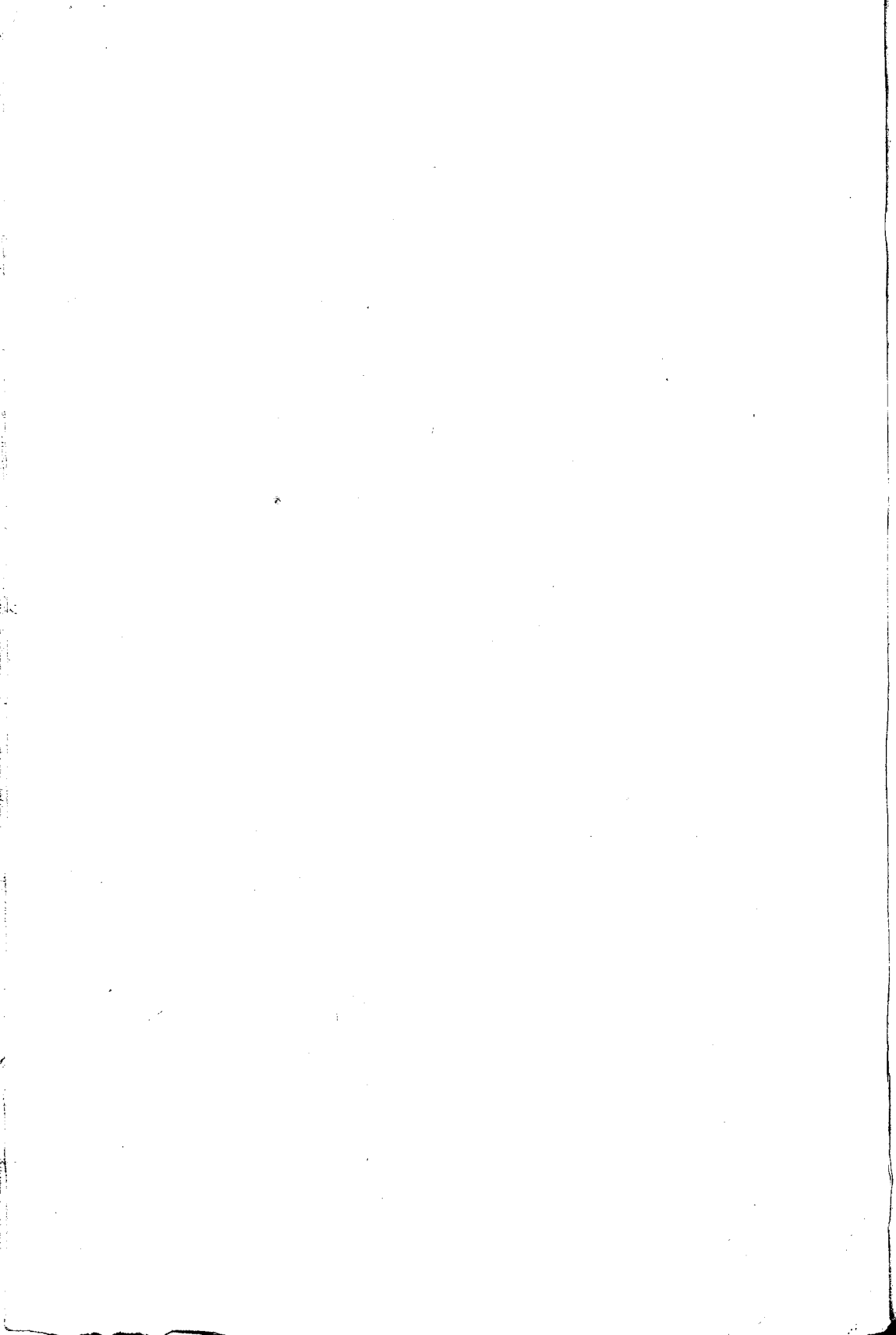
Deux prismes de mesme hauteur sont egaux, si la base de l'un triangulaire, n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelograme.

Soient deux prismes de mesme hauteur KGL & OD , & que OD ait le parallelograme CB pour base, double du triangle QKL , base du prisme $HkGL$: Je dis qu'ils sont egaux.



Car si on les accomplit pour estre parallelogrammes solides, KI & CP , la base KM sera egale à la base CB : & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 32. p. 11. & par la 28. p. 11. les plans diagonaux les diuiseront en deux egalemment, & les prismes donnez au commencement estans les moitez de choses egales seront egaux.

Fin del'Element vnzieme





E L E M E N T

D O V Z I E S M E.

PROP. I.

ES polygones semblables inferits aux cercles, sont l'un à l'autre comme les quarréz descriptes des diametres des cercles.

Soient deux polygones semblables $ABCGDF$ & $IHLNMK$, inferits dans les cercles: ie dis qu'ils sont l'un à l'autre comme les quarréz des diametres AG & IN .

Qu'il ne soit ainsi. Soient menées les lignes AC, IL , item BG , & HN : puis que les pentagones sont semblables AB est à BC , comme IH à HL , & l'angle B , égal à l'angle H , & par la 6. p. 6. les triangles BAC & HIL sont equiangles, partant l'angle BCA sera égal à l'angle HIL . Mais ilz sont chacun égaux, l'un à l'angle G , l'autre à l'angle N , par la 21. p. 3. (car ilz sont sur mesmes sections BA & HI) ainsi l'angle G sera égal à l'angle N : Et par la 31. p. 3. les angles GBA & NHI estans droicts dans les demy-cercles, & égaux, les triangles GBA & NHI seront equiangles (car le troisieme sera égal au troisieme par la 32. p. 1.) & par la 4. p. 6. comme BA à AG , ainsi HI à IN : & en changeant comme BA à HI , ainsi AG à IN : & par la 22. p. 6. comme le pentagone sur BA , à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur HI : ainsi le quarré de AG au quarré de IN , ce qui estoit à prouver.

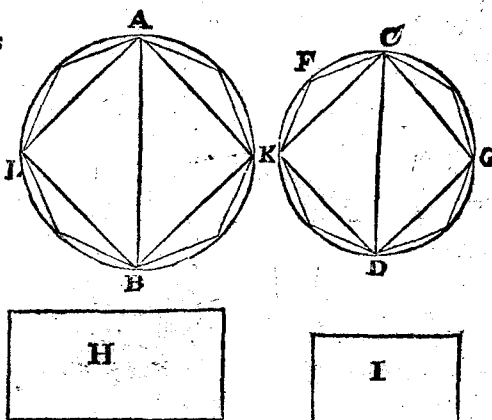
PROP. II.

M.m

Les cercles sont l'un à l'autre, comme les quarrés des-
crist de leurs diametres.

Soient les deux cercles sur les
deux diametres AB & CD: ie dis
qu'ilz sont l'un à l'autre comme
le quarré de AB est au quarré de
CD. C'est à dire que si on imagine
que comme le quarré de AB, au
quarré de CD, ainsi le cercle AB
a quelque figure quatriesme pro-
port. (comme H) que icelle figu-
re H est égale au cercle CD.

Autrement elle sera plus pe-
tite ou plus grande. Soit premie-
remēt plus petite s'il est possible:



& soit le cercle CD plus grand qu'icelle de la figure I. Or par la 1. p. 10. ie
peus retrancher plus de la moitié du cercle CD, & du residu plus de la moitié
tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que I. Soit dōc dans
iceluy cercle descript le quarré CGDK, qui est plus grand que la moitié du cer-
cle (d'autant que le quarré de CD, qui est son double, est plus grand que le cer-
cle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petites que I, nous auons ce que
nous demandons: Sinon, soit coupé l'arc KC en deux également au point F,
& les trois autres arcs semblablement, & soit inscrit l'octogone dans le cercle: Il
est euidēt que dans les quatre sections égales, il y aura quatre triangles égaux,
& que chacun comme KFC, est plus de la moitié de sa section (car le triangle
Isoscele KFC est la moitié du rectangle de mesme hauteur & sur mesme base
KC, par la 41. p. 1. lequel rectangle est plus grand que la section KFC.) Soient
maintenant les huit petites figures restantes plus petites que la figure I: que si
cela n'estoit, il faudroit tousiours couper les arcs derniers, & tousiours inscrire
des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son
precedent, & soustraire tousiours plus de la moitié de chacune section, sçauoir
son triangle Isoscele: Il est certain qu'à la fin les dernieres sections serōt plus pe-
tites que la figure I. Mais, pour abreger, soient les deuant dictes huit sections
restantes plus petites que la figure I: Il est euidēt que l'octogone sera plus grād
que la figure H, puis que les deux H & I sont égales au cercle CD. Soit pareil-
lement inscrit vn octogone semblable au cercle AB: & par la 1. p. 12. l'octogone
AB sera à l'octogone CD, comme le quarré de AB est au quarré de CD: mais
comme le quarré de AB au quarré de CD, ainsi le cercle AB à la figure H: &
par la 11. p. 5. comme le polygone AB sera au polygone CD, ainsi le cercle AB est
à la figure H: & en changeant comme le polygone AB est au cercle AB, ainsi le
polygone CD est à la figure H: mais le polygone CD, est plus grād que la figure
H: Il faudroit donc par la 14. p. 5. que le polygone AB fust plus grand que le
cercle AB: ce qui est faux: Donc la figure H ne pouuoit estre plus petite que le
cercle CD.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande. Autrement s'il est possible, puis que comme le quarré de AB au quarré de CD, ainsi le cercle AB à H: aussi en changeant la figure H sera au cercle AB, comme le quarré de CD au quarré de AB: Mais soit imaginé que comme H est au cercle AB, ainsi le cercle CD soit à quelque autre figure, comme I: & par la 14. p. 5. comme la figure H est plus grande que le cercle CD, ainsi le cercle AB sera plus grand que la figure I: & si par la 11. p. 5. le cercle AB sera à la figure I, comme le quarré de AB est au quarré de CD: ce qui contreuient à la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous auons montré que l'un des cercles estant à vne figure, en la raison des quarrés des diamètres, que icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure H ne pouuoit estre plus grande que le cercle CD: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle estoit donc égale à iceluy. Ce qu'il falloit prouuer.

P R O P. III.

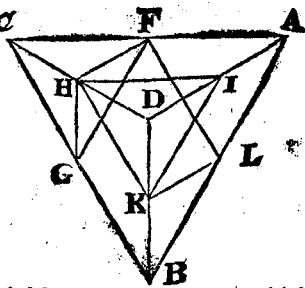
Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisée en deux pyramides égales, semblables entre elles, & à la totale, & en deux prismes égaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD, ayant la base triangulaire ABC, & le sommet au point D: ie dis qu'elle peut estre diuisée en deux pyramides égales, semblables entre elles, & à la totale: & en deux prismes égaux, plus grands que la moitié de la pyramide donnée.

Qu'il ne soit ainsi. Soient coupez en deux également tous les costez d'icelle pyramide, sçauoir les trois de la base ABC aux poinctz F, G, L, & les trois hypotenusés DA, DB, DC aux trois poinctz H, I, K, & soient menées les lignes FL, FG, HI, IK, KH, HG, HF, KL. Premièrement la base ABC est diuisée en trois figures: au quadrangle BLFG, & les deux triangles CGF, & FLA, lesquels sont semblables entre eux & au tout ABC, duquel les costez sont coupez proportionnellement, & par la 2. p. 6. la ligne FG est parallèle à BA, & FL à BC: Partant estât l'angle A commun aux deux triégles BAC, & LAF, l'angle extérieur LFA sera égal à l'opposé intérieur GCF par la 29. p. 1. & par la 32. p. 1. le troisieme sera égal au troisieme, & par la 4. p. 6. & 1. d. 6. les deux triangles BAC & LAF serót semblables. Par le mesme discours le triégle GFC, sera semblable au triégle BAC, & par la 21. p. 6. les deux triangles CGF & FLA, seront semblables entre eux & égaux, d'autant que leurs costez sont égaux. Quant au quadrangle BLFG, il est euident par la 41. p. 1. qu'il est double au triangle FLA (car il est sur base égale, & entre mesmes parallèles) il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est diuisée aux deux pyramides CGFH, & HKID égales & semblables, & aux deux prismes, l'un FHGBKL duquel la base est le quadrangle BLFG, l'autre HIKLAF, duquel la base est le triangle LAF: & pourautant qu'ilz sont de mesme hauteur sçauoir de la hauteur du point H, ou

du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire: ilz seront egaux par la 40. p. 11.

Que les pyramides GCHF, & KHID soient semblables, on le prouue en ceste sorte: d'autant que HK, & CB sont paralleles, l'angle extérieur DHK est egal à son opposé intérieur HCG par la 29. p. 1. Et CHG à HDK, & par la 32. p. 1. le troisieme sera egal au troisieme, & par la 4. p. 6. Les triangles equiangles DHK, & HCG seront seblables entre eux & au triagle CDB: ilz seront aussi egaux entre eux par la 20. p. 6. estans les lignes CH & HD egalles. Par les mesmes raisons les triangles IDH, & FHC seront egaux, & semblables entre eux & au triangle ADC: Ité le triangle IKH se prouuera facilement equiangle & semblable au triangle ABC par la 10. p. 11. (ayans leurs costez parallels se touchant angulairement en diuers plans) partât aussi semblable au triagle GCF, & egal à iceluy par la 20. p. 6. Car HK est egal à GB, & GB à GC: & par la 10. p. 11. KDI & BDA seront semblables à GHF, & KDI egal à iceluy: & par la deff. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides faictes de plans semblables, seront semblables, & les deux petites seront egalles, faictes de plans egaux.



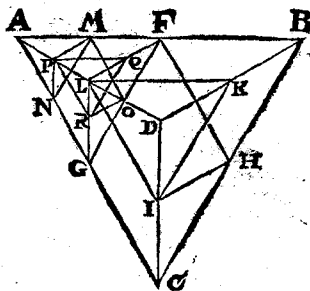
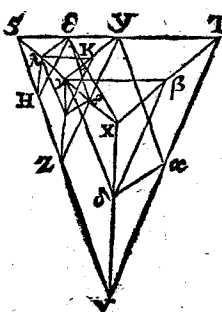
Que les deux prismes FHGBKL, & HIKLAF soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'un d'eux FHGBKL, ayant base quadrangulaire double de la base GFC de la pyramide CGHF, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide FCGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide. Et par consequent les deux prismes ensemble seront plus grands que les deux pyramides retranchées ensemble, ce qui estoit à demonstrier.

PROP. IIII.

Si deux pyramides de mesme hauteur ayans base triangulaire, sont diuisées en deux autres pyramides semblables entre elles & à la toute, & en deux prismes egaux, & les pyramides de la diuision sont tousiours subdivisées de mesme façon: comme la base de l'une des pyramides à la base de l'autre, ainsi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdivision d'icelle pyramide, à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient les deux pyramides de mesme hauteur ABCD, & SVTX (sçavoir que la hauteur du point X soit egale à la hauteur du point D) lesquelles sont

diuifées chacune en deux pyramides egalles & semblables, & en deux prismes egaux comme enseigne la 3. p. 12. Et en continuant, les pyramides rescindées AGFL & SZY γ sont aussi subdiviufées en deux autres pyramides egalles & semblables, & en deux prismes egaux en continuant tous-



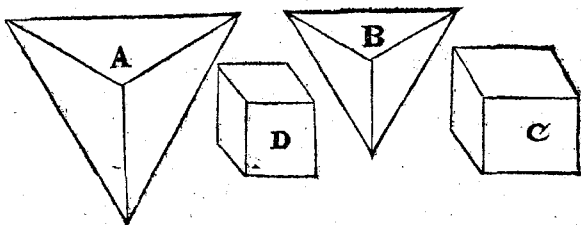
jours de mesme façon: ie dis que comme la base ABC, à la base SVT, ainsi les quatre prismes tant de la diuision que subdiviusion de la pyramide ABCD, aux quatre prismes de la diuision & subdiviusion de la pyramide SVTX.

Car les deux lignes AB & ST, estant chacune couppée en deux egalle-
ment aux poinctz Y, & F, il est euident que comme AB à BF, ainsi ST à TY:
Et par la 22. p. 6. comme le triangle ABC, au triangle BHF, ainsi le triangle
SVT au triangle SZY ou Y α T (car par la precedente ilz sont semblables, &
semblablement posez). Et en changeant comme le triangle ABC au triangle
SVT, ainsi le triangle FHB au triangle Y α T: Mais les deux prismes de
mesme hauteur LKIHBF & $\gamma\beta\delta\alpha TY$ (car ilz sont chacun de la demye
hauteur de leur pyramide, lesquelles sont de mesme hauteur) sont l'un à l'autre
comme la base FHB à la base Y α T par la 32. p. 11. & 15. p. 5. estans chacun la
moitié de leur parallelog. solide comme il appert par ce qui a esté demonsté
à la 28. p. 11. & par la 7. p. 5. les deux autres prismes GLFHIC, & Z $\gamma Y \alpha \delta V$,
egaux aux deux premiers chacun au sien, seront l'un à l'autre comme la base
FHB à la base Y α T: Et en raison composée les deux ensemble GLFHIC,
& LKIHBF seront aux deux ensemble Z $\gamma Y \alpha \delta V$ & $\gamma\beta\delta\alpha YV$, comme
la base FBH à la base Y α T par la 18. p. 5. ou comme la base ABC à la base
SVT par la 11. p. 5. car c'est la mesme raison. Maintenant en la subdiviusion des
pyramides AGLF & SZ γY , les deux prismes ensemble de l'une, seront par
le mesme discours aux deux prismes ensemble de l'autre, comme la base AGF
à la base SZY, ou par la 11. p. 5. comme la base ABC à la base SVT: mais en la
premiere diuision les deux prismes de la pyramide ABCD, estoient en la
mesme raison aux deux prismes ensemble de l'autre pyramide SVTX: & en
raison composée par la 18. p. 5. Les quatre prismes de la pyramide ABCD sont
aux quatre prismes de la pyramide SVTX, tant de la diuision que subdiviusion,
comme le triangle ABC au triangle STV.

PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans base triangu-
laire, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de mesme hauteur A & B, desquelles les bases s'ont les triangles A & B (sçavoir ceux qui soustiennent les deux points des hauteurs A & B) ie dis que comme la base A est à la base B, ainsi la pyramide A, à la pyramide B.



Autrement, soit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme le base A à la base B, ainsi la pyramide A a quelque solide comme C : ie dis que iceluy solide C est egal à la pyramide B, autrement il sera plus petit ou plus grand : & soit en premier lieu plus petit comme de la quantité du solide D. Ainsi nous imaginons que les deux solides C & D, soient egaux à la pyramide B. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides semblables & en deux prismes, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale. Que si de la pyramide B on retranche plus de la moitié, sçavoir les deux prismes comme dessus, & de chacune pyramide restante encores plus de la moitié, sçavoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide D : ce qui peut auir par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide B, seront plus grands que le solide C, puis que le reste est plus petit que le solide D. Pareillement soient retranchez autant de fois deux prismes de la pyramide A, comme on en a retranché de la pyramide B : il est euident par ce qui a esté demonsté à la precedente proposition, que comme la base A, à la base B, ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide A, à tous les prismes retranchez de la pyramide B. Mais nous auons posé que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide A au solide C. Et par la 11. p. 5. Les prismes retranchez de la pyramide A seront aux prismes retranchez de la pyramide B, comme la pyramide A est au solide C : & en changeant les prismes retranchez de la pyramide A, seront à la pyramide A, comme les prismes retranchez de la pyramide B sont au solide C. Or les prismes retranchez de la pyramide A, sont plus petits qu'icelle pyramide : Et par la 14. p. 5. les prismes retranchez de la pyramide B, seront plus petitiz que le solide C, & nous les auons tantost prouuez estre plus grands en posant le solide C plus petit que la pyramide B. Partant icelle hypothese a esté fausse, qui nous a conduit à l'absurde : Et le solide C n'estoit plus petit que la pyramide B.

Soit donc plus grand s'il est possible, puis que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide A au solide C, en changeant la base B, sera la base A, comme le solide C est à la pyramide A. Pareillement comme le solide C à la pyramide A, soit la pyramide B à quelque autre solide, comme D : Et par la 14. p. 5. d'autant que le solide C est posé plus grand que la pyramide B, aussi la pyramide A sera plus grande que le solide D : & par la 11. p. 5. comme la base B à la base A, ainsi la pyramide B à vn solide plus petit que l'autre pyramide : mais nous auons de-

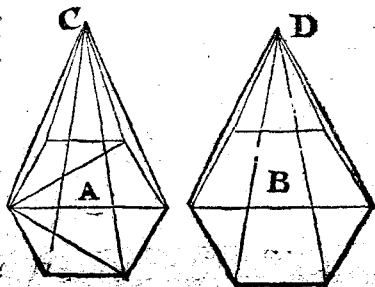
monstré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sçauoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ilz sont retranchez: Partant le solide C ne peut estre plus grand que la pyramide B, ny aussi plus petit, il sera donc egal. Ainsi comme la base A à la base B, la pyramide A est à la pyramide B, puis qu'elle est egalle au solide C.

PROP. VI.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide AC de mesme hauteur que la pyramide BD, desquelles les bases A & B sont polygones: ie dis que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide AC, à la pyramide BD.

Ceste demonstration est aisée à comprendre par la veüe seulement de la figure: Car la base estant polygone elle peut estre reduicte en triangles: & autant que la base contiendra de triangles, la pyramide se diuise en autant de pyramides de mesme hauteur que la totale ayans bases triangulaires, lesquelles seront toutes particulièrement l'une à l'autre cōme leurs bases par la 5. p. 12. & par la 24. p. 5. repetée tant de fois qu'il sera besoin, la totale pyramide AC sera à la totale BD, comme la totale base A, à la totale base B: ce qu'il falloit prouuer.

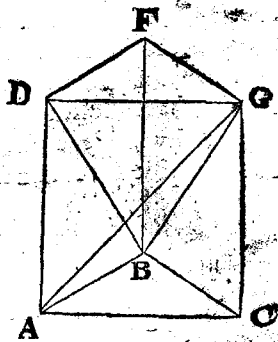


PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Soit le prisme ABCDFG, ie dis qu'il peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Car si des trois parallelogrames on meine les trois diuisantes DB, BG, GA, il est euident que le prisme sera diuisé en trois pyramides: montrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AG, couppât le parallelog. DC en deux egallement, les triangles DGA, & GAC sont egaux: Partant la pyramide ayant pour base le triangle DGA, & de la hauteur du point B par la 5. p. 12. est egalle à la pyramide, ayant pour base le triangle GAC & de la mesme hauteur du point B: laquelle pyramide



estant la mesme qui a pour base le triangle ABC, & la hauteur GC, par la 5. p. 12. fera egalle à la pyramide, ayant pour base le triangle DFG (qui est egal au triangle ABC par la deff. du prisme) & de la hauteur de FB egalle à la hauteur GC par la 34. p. 1. (car les deux lignes FB & GC estant egalles & paralleles, ou elles sont toutes deux perpendiculaires, ou toutes deux semblablement inclinées sur mesme plan: & par consequent icelles trois pyramides seront egalles entre elles. De cecy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base ou sur base egalle.

PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplée de leurs costez proportionaux.

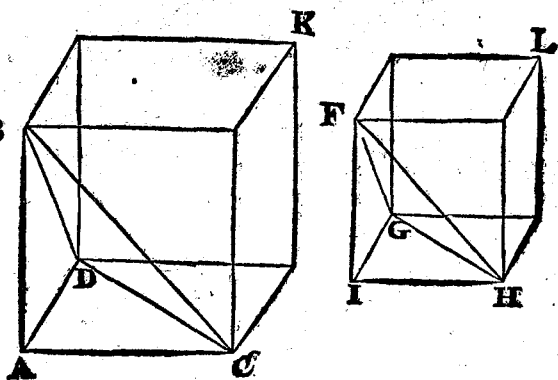
Soient les deux pyramides semblables ABCD & IFGH, ayant bases triangulaires ADC & IGH: ie dis qu'elles sont en raison triplée des costez de mesme raison AC & IH.

Qu'ainsi ne soit. Soient a cheuez les parallelogrammes solides AK & IL. D'autant que les pyramides sont semblables les trois costez AD, AB, AC,

seront proportionaux aux trois costez IG, IF, IH, & l'angle solide A egal à l'angle solide I, par la deff. des solides semblables: Et par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. p. 11. les deux solides AK & IL seront semblables, ayans les trois costez AB, AD, AC, proportionaux aux trois costez IF, IG, IH, & les opposez seront aussi proportionaux, & par consequent les six plans proportionaux aux six plans: Mais les deux solides AK & IL, estans semblables, ils seront en raison triplée de leurs costez de semblable raison AC & IH par la 33. p. 11. Et comme le solide AK au solide IL, ainsi la pyramide ABDC à la pyramide FIGH (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide, d'autant que par la 28. p. 11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux, & chacun prisme en trois pyramides egalles par la 7. p. 12) & par la 11. p. 5. les pyramides seront en raison triplée des costez de mesme raison AC & IH.

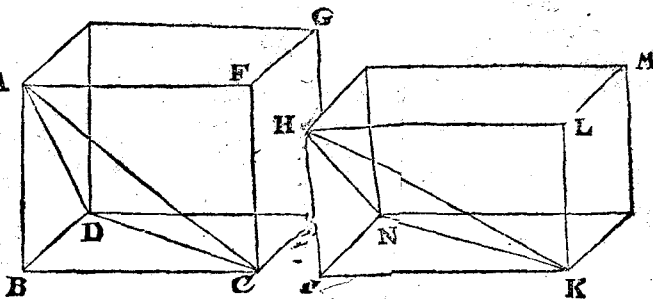
PROP. IX.

Les pyramides egalles ayans bases triangulaires, leurs hauteurs



hauteurs sont reciproques aux bases: Et les pyramides ayans bases triàngulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egalles.

Soient les deux pyramides egalles ABCD & HIKN, ayans bases triàngulaires: ie dis que comme la base ABC à la base HIK, ainsi la hauteur du point N à la hauteur du point D:



car c'est ainsi que les bases sont reciproques aux hauteurs.

Qu'il ne soit ainsi. Soient acheuez les parallelogrammes solides BG & IM, & comme en la precedente il sera euident que chacun solide ainsi basti sera sextuple de sa pyramide: Et les deux pyramides estant égales, iceux solides BG & IM seront egaux: & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases (C'est à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point N, ainsi la base IL à la base BF) mais comme IL à BF, ainsi la moitié le triangle HIK, à la moitié de BF, sçavoir le triangle ABC, & par la 11. p. 5. comme la hauteur du point D à la hauteur du point N, ainsi le triangle IHK au triangle BAC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du point D est à la hauteur du point N, comme le triangle HIK est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD. & HIKN seront egalles. Car il est euident comme cy dessus que la hauteur du point D, sera à la hauteur du point N, comme la base HL, à la base BF (d'autant qu'elles sont doubles des triangles HIK & ABC) ainsi les parallelog. solides BG & IM, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34 p. 11. Ilz seront egaux, & par conséquent leurs sixiesmes parties sçavoir les pyramides ABCD, & HIKN.

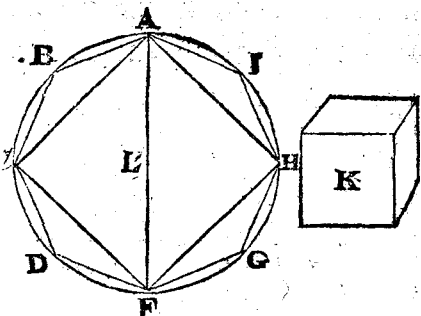
PROP. X.

Tout cone est la troisieme partie du cylindre ayant base egalle & de mesme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone tous deux de mesme hauteur & ayans vne mesme base sçavoir le cercle L: ie dis que le cylindre est triple du cone.

Autrement il sera plus grand ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premierement plus grand s'il est possible, & de la quantité du solide K (c'est à dire que si on retranche le solide K du cylindre L, le reste sera egal au triple du

cone L.) Maintenant dans le cercle soit inscrit le quarré ACFH, diuisé en deux triangles par la diagonale, & sur iceux deux triâgles soit esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre L. Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident que iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens du cylindre (les deux prismes estans soustraictz) scauoir B, D, G, I, sont encores plus grands



que le solide K: sur les bses d'iceux segmens soient faictz les quatre triangles isosceles D, G, B, I, & si iceux soient esleuez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre L: il est euident que iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huitz petitiz segmens restans ne sont plus petits que le solide K, soit toujours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusques à ce que par la 1. p. 10. les segmens restans soient plus petitiz que le solide K. Et pour abreger soient iceux huitz petitiz segmens plus petits que le solide K: Il est donc manifeste que la colonne composée de ces six prismes, ayant pour base le poligone inscrit au cercle L, & de mesme hauteur que le cylindre donne: sera plus que triple d'iceluy cone, par ce quia esté dict cy dessus. Or par ce que chacun prisme est triple de la pyramide de mesme hauteur & ayant base egalle, car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egalles par la 7. p. 12. Il s'ensuit que tous iceux prismes faisant la colonne ayant pour base le poligone inscrit au cercle L (c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre L) est triple de toutes les six pyramides faisant la seule pyramide, ayant le mesme poligone pour base & de mesme hauteur que icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone, de mesme hauteur, ayant le cercle pour base, ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

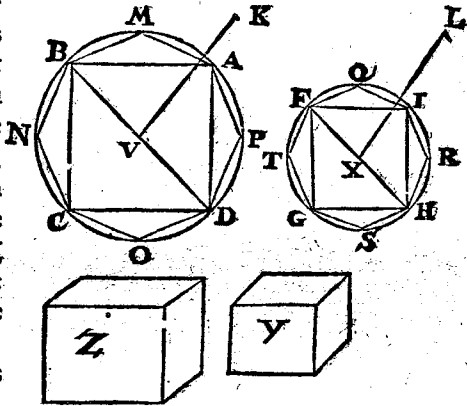
Soit donc plus petit s'il est possible: & de la quantité du solide K, c'est à dire que si on retranche le solide K du cone, que le residu soit la troisieme partie du cylindre. Maintenant du cone L, soit retranché plus de la moitié, scauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ACFH, & du residu, scauoir des quatre segmens B, D, G, I, soit retranché plus de la moitié, scauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle isoscele en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide K: ce qui doit arriuer par la 1. p. 10. Soient donc pour abreger iceux huitz petitiz segmens plus petits que le solide K: il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone ayant iceluy octogone pour base est plus que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide K: Or iceluy cone ainsi rescindé est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, comme il a esté dict cy dessus, le tiers de

la colonne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base. Partant icelle colonne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: Il faut donc qu'il soit egal, ce qui estoit à demonstrier.

PROP. XI.

Les cones & cylindres de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

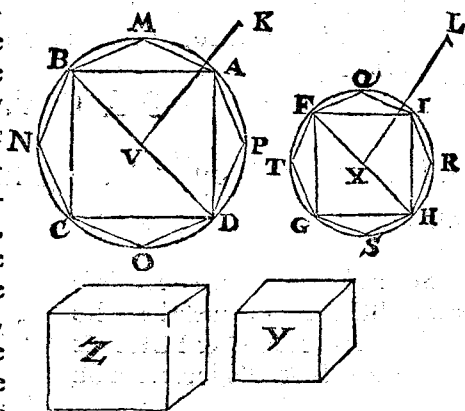
Soient les deux cones de mesme hauteur BK, & FL, desquelz les bases sont les cercles ABCD & FGHI, & les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs VK & XL: ie dis que cōme le cercle ABCD au cercle FGHI, ainsi le cone BK au cone FL. C'est à dire que si on imagine que comme le cercle au cercle, ainsi le cone BK a quelque autre solide, comme Z: que iceluy solide Z fera egal au cone FL.



Autrement il sera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide Y: ainsi les deux solides Z & Y seront egaux au cone FL. Maintenant du cone FL comme en la precedente, soit retranché plus de la moitié, sçavoir vne pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant pour base le quarré FGHI: & du residu. encores plus de la moitié, sçavoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour base les quatre triangles isosceles FQI, IRH, HSG, GTF, en continuant tousiours iusques à ce que par la 1. p. 10. le residu soit plus petit que le solide Y: & soit iceluy residu pour abreger les huit petitiz segmens: Il s'ensuit que la pyramide FL, de mesme hauteur que le cone FL, & ayant pour bases l'octogone FTGSHRQ, sera plus grande que le solide Z. Dans le cercle DB, soit inscrit vn poligone semblable au poligone de la base circulaire FH, & sur iceluy soit bastie vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK: par la 1. & 2. p. 12. cōme le quarré du diametre BD au quarré du diametre FH, ainsi le poligone BD au poligone FH: & cōme le quarré de BD au quarré de FH, ainsi le cercle BD au cercle FH, & par la 11. p. 5. cōme le poligone BD au poligone FH, ainsi le cercle BD au cercle FH: mais comme le cercle BD au cercle FH, ainsi le cone BK au solide Z: & par la 6. p. 12. comme le poligone BD au poligone FH, ainsi la pyramide BK à la pyramide FL, & par la 11. p. 5. La pyramide BK sera à la pyramide FL, comme le cone BK à la solide Z: & en changeant comme le cone BK à la pyramide BK, ainsi le solide Z à la pyramide FL: lequel estant plus petit qu'icelle pyramide par la

14. p. 5. Le cone BK sera aussi plus petit que la pyramide BK, qui n'est que la partie, ce qui est impossible: D'où le solide Z n'estoit pas plus petit que le cone FL.

Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en changeant comme le solide Z au cone BK, ainsi le cercle FG au cercle BD: & comme iceluy solide Z au cone BK, soit aussi le cone FL à quelque autre solide comme Y: Et par la 14. p. 5. puis que le solide Z est plus grand que le cone FL, aussi le cone BK sera plus grand que le solide Y. Item comme le cercle FH est au cercle BD, ainsi le solide Z est au cone BK. & par la 11. p. 5. come le cercle FH est au cercle BD, ainsi le cone FL au solide Y plus petit que le cone BK, ce que tantost nous auons monstré estre impossible, donc le solide Z n'est plus grand ne plus petit que le cone FL: ains egal.



Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur, d'autant que le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur & ayant base egalle. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. p. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base.

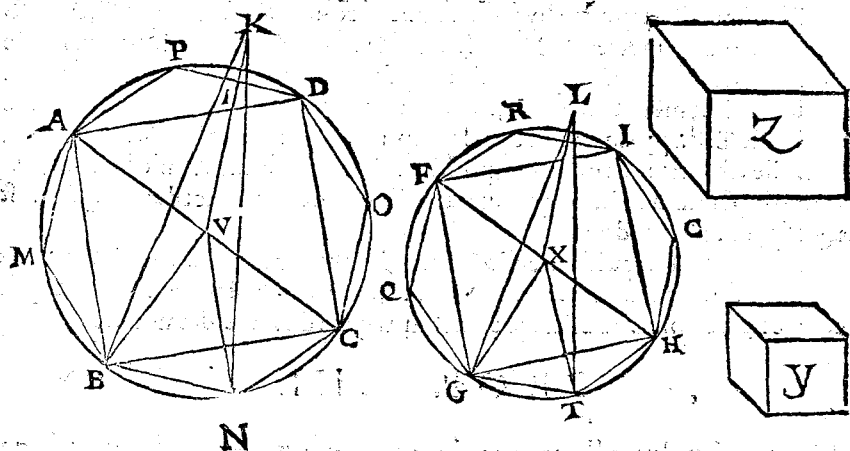
Or on prouue la triplicité du cylindre au cone par la 10. p. 12. Voila ce que nous auons entrepris à demonstrier.

PROP. XII.

Les cones & cylindres semblables sont l'un à l'autre en raison triplée des diametres de leurs bases.

Soit le cone AK, ayant pour base le cercle ABCD, & l'axe VK, semblable au cone FL, qui a pour base le cercle EFGH, & l'axe XL: ie dis qu'ilz sont l'un à l'autre en raison triplée du diametre AC au diametre FH: c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes que le cone AK soit à quelque solide, comme à Z, en raison triplée du diametre AC au diametre FH: Ie dis que le solide Z est egal au cone FL.

Autrement il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçauoir de la quantité du solide Y: Donc les deux solides Y & Z seront egaux au cone FL: Et soit faite detraction de plus de la moitié du cone FL, & du residu encores plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. p. 10. les restes (c'est à sçauoir pour abreger les huit petits segmens, qui sont alentour de la pyramide à la base octogone FL, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide Y: Il est euident qu'icelle pyramide à base poligone FL, sera plus grande que le solide Z. Maintenant dans le cercle AC soit inscrit vn mesme poligone que le



plus grand qui soit inscrit au cercle FH, sçavoir AMBNCODP : & sur iceluy soit esleuée vne pyramide de mesme hauteur que le cône AK : Il est manifeste qu'icelle pyramide est composée d'autant de pyramides egalles, qu'il y a de costez au polygone inscrit dans le cercle (c'est à sçavoir que la pyramide totale AC est composée de huit pyramides egalles & semblables à la pyramide BVNK de mesme hauteur de la totale). Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale FL est composée de huit pyramides egalles & semblables à la pyramide GXTL, de mesme hauteur que la totale. Mais d'autant que les cônes AK & FL par la deff. des cônes semblables, sont comme le diametre AC à l'axe VK, ainsi le diametre FH à l'axe XL. Et par la 15. p. 5. le demy diametre BV sera à l'axe VK, comme le demy diametre GX est à l'axe XL : Et les angles BVK & GXL estant droicts, par la 6. p. 6. Le triangle BVK sera equiangle au triangle GXL. Item NVK sera aussi equiangle à TXL, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux & seront semblables. Item BV est à VN comme GX à XT (estans chascun egaux) & l'angle V egal à l'angle X, (ayant chacun la huitiesme partie de sa circonference pour base) & par la 6. p. 6. les triangles BVN, & GXT, seront equiangles, partant semblables. Item NB est à BV comme TG à GX (d'autant que les triangles NBV, & GTX sont semblables) & pour la mesme raison VB est à BK comme XG à GL, & en raison egalle, NB, sera à BK comme TG à GL : Et par mesme discours BN, est à NK, comme GT à TL. Et les egalles BK & KN, seront l'un à l'autre : comme aussi les egalles GL à LT. Et par la 5. p. 6. Les triangles BKN & GLT, seront equiangles & semblables, & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides BNVK & GXLT, seront semblables : Et par la 8. p. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez proportionaux, sçavoir des demy diametres BV & GX. Par mesme discours on prouvera les sept autres pyramides de la totale AK, proport. à vne chacune des sept autres pyramides de la totale FL : Et par la 12. p. 5. Les toutes seront aux toutes, come l'une d'icelles est à l'une d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide AK est à toute la pyramide FL, en raison triplee du demy diametre BV au demy diametre GX, ou bien par la 15. p. 5. come le diametre AC au dia-

metre FH. Or est il par nostre hypothese que le cone AK est au solide Z, en raison triplee des deux diametres AC & FH: Et par la 11. p. 5. Le cone AK sera au solide Z, come la pyramide AK, à la pyramide FL: Et en chargeant le cone AK, sera à la pyramide AK, comme le solide Z, à la pyramide FL: Laquelle estant plus grande que le solide Z: La pyramide AK par la 14. p. 5. sera plus grande que le cone AK, duquel elle est partie, ce qui est impossible. Donc le solide Z, n'estoit pas plus petit que la pyramide FL. On prouuera aussi comme aux precedentes qu'il n'est pas plus grand: Il sera donc egal.

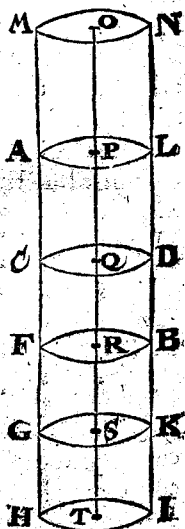
Ceste preuue soit aussi entenduë des cylindres semblables, car leurs cones estans en raison triplee des diametres par la 15. p. 5. Les cylindres qui sont triples d'iceux cones seront l'un à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

PROP. XIII.

Si vn cylindre est couppé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre: les segmens des cylindres sont l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre AB, couppé par le plan CD, parallel aux deux plans, opposez AL & FB: ie dis que le segment de cylindre AD, est au segment de cylindre CB, comme l'axe PQ, est à l'axe QR.

Qu'il ne soit ainsi, apres auoir continué l'axe de part & d'autre, soit faite PO égale à PQ & RS & ST de l'autre costé égales à QR: Et soit imaginé le cylindre AB, continué d'un costé iusques au point O, & de l'autre iusques au point T. Il est euident que tous les cylindres ML, AD, CB, FK, GI, sont tous sur bases egales, & par la 11. p. 12. les deux qui ont les axes egaux ML & AD (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont egaux: Item les trois CB, EK, GI, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux: Ainsi il est euident que comme l'axe OQ est multiplie de l'axe PQ, ainsi le cylindre MD, est multiplie du cylindre AD: Pareillemēt que come l'axe QT est multiplie de l'axe QR, ainsi le cylindre CI, est multiplie du cylindre CB. & par la 14. p. 5. si l'axe OQ est egal plus grand ou plus petit que l'axe QT, aussi le cylindre MD sera egal plus grand ou plus petit que le cylindre CI: Et par la 6. d. 5. comme l'axe PQ à l'axe QR, ainsi le cylindre AD au cylindre CB. Ce qui estoit à demonstrier: Il faut noter que ceste demonstration sera aisée à quiaura compris la 1. p. 6. & 25. p. 11.



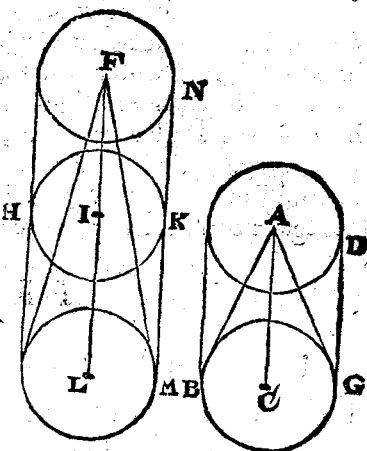
PROP. XIII

Les cones & cylindres ayans bases egales, sont l'un à l'autre, comme leur hauteur.

Soient deux cylindres BD, & HN, sur bases egales BG & HK: ie dis qu'ils sont l'un à l'autre comme leur hauteur, c'est à dire comme l'axe AC à l'axe FI.

Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe FI, iusques au point L, & soit faicte IL egalle à AC, & soit imaginé le cylindre NH continué iusques au point M. Et d'autant que le plan KH coupe le total cylindre NHM estant parallel aux deux plans opposez, par la 13. p. 12. Les cylindres NH, & HM, seront l'un à l'autre comme les axes FI & IL: Mais IL est egale à AC, & la base HK à la base BG: Et par la 11. p. 12. Le cylindre HM sera egal au cylindre BD: Partant comme CA à IF: ainsi le cylindre BD au cylindre HN. Ce qui estoit à demonstrier.

Il faut aussi noter que comme aux precedentes, cecy soit entendu des cones par la 15. p. 5. estans iceux cones la troisieme partie de leurs cylindres.

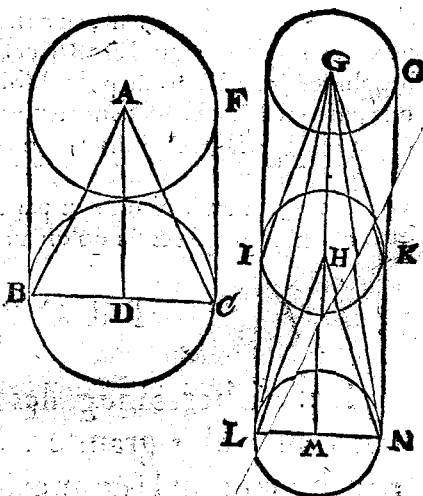


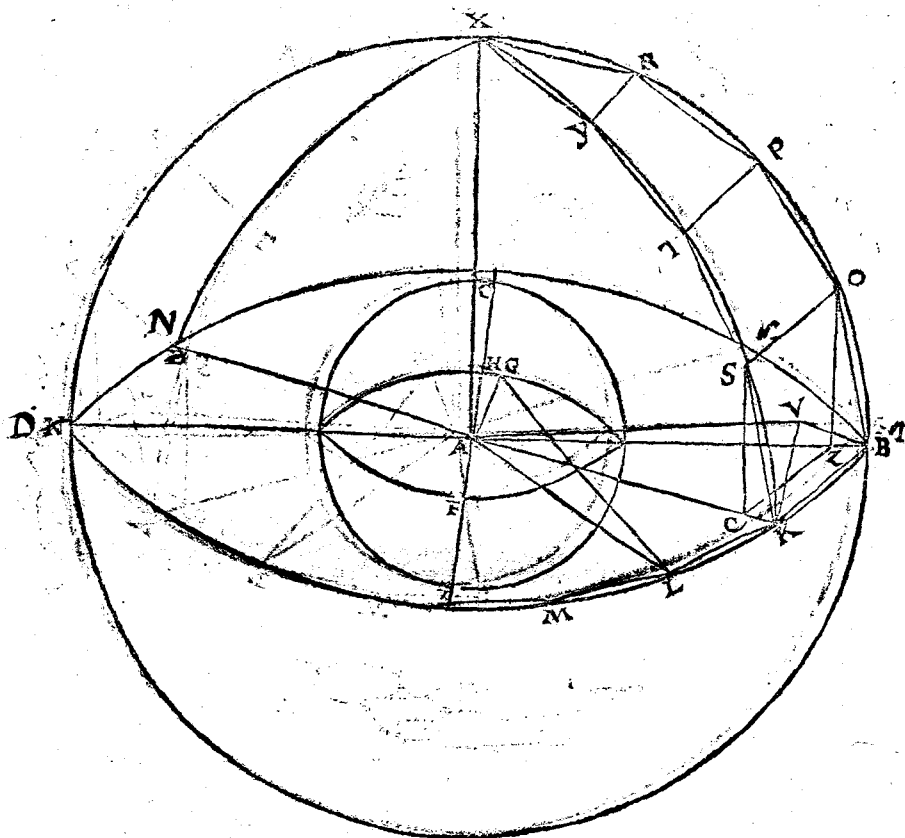
PROP. XV.

Aux cones & cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases: Et les cones & cylindres sont egaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.

Soit le cylindre BF egal au cylindre LO: ie dis que leurs hauteurs sont reciproques à leurs bases, c'est à dire que comme la base BC, à la base LN, ainsi la hauteur MG à la hauteur DA.

Qu'il ne soit ainsi: Premièrement, si MG est egal à DA, les cylindres estans egaux, il est euident par la 11. p. 12. que la base sera egale à la base. Que si MG est plus grand que DA, soit retranchée MH egale à DA: Et soit coupé le cylindre au point H, par le plan IK, parallel à LN par la 13. p. 12. Le cylindre LO sera au cylindre LK, comme l'axe MG à l'axe MH, & par la 7. & 11. p. 5. son egal BF sera au cylindre LK, comme MG est à MH: & par la 11. p. 12. comme le cylindre BF est au cylindre de mesme hauteur LK, ainsi la base BC à la base LM: Et par la 11. p. 5. comme la base BC, à la base LM, ainsi la hauteur MG, à la hauteur MH, ou DA son egale.





font egaux (ayans les diametres egaux) aussi leurs moitez seront egales, sçavoir les quartes IB, BX, XK. Partant autant qu'il y aura de costez du polygone en la quarte BI, on en pourra inscrire autant en chacune des quartes KX, & BX: Soient iceux KS, ST, TY, YX, & BO, OP, PR, RX, & soient menees les lignes SO, TR, YR: Item les perpendiculaires SQ, & OZ, par la 11. p. 11. Elles tomberont sur les lignes AK, & AB, qui sont les communes sections des quarts de cercles ABX & AKX, esleuez perpendiculairement sur le quart ABI, par la 38. p. 11. Soit aussi menee la ligne QZ. Maintenant puis que les arcs & les cordes SK & OB, sont egales: les perpendiculaires SQ & OZ, (estans demies cordes d'arcs egaux dans demy cercles egaux) aussi ZB, & QK, seront egales par la 47. p. 1. Et par consequent egales les restantes AZ & AQ (car AB & AK sont egales.) Partant comme AZ, à ZB, ainsi AQ, a QK: & par la 2. p. 6. QZ sera parallele à KB. Item les deux perpendiculaires QS & ZO estant egales, sont aussi paralleles par la 6. p. 11. & par la 33. p. 1. SO & QZ, seront egales & paralleles: & par la 9. p. 11. SO & KB seront paralleles, & par la 7. p. 11. SK & OB, seront au mesme plan d'icelles: Partant tout le quadrilatre BKSO, est en un mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres OT,

PP, & le triangle XYR, ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plan: Que si des points S, O, T, R, Y, P, on imagine des lignes menees vers le centre A, on se representera vne figure poliedre, comprise entre BX & XK, & composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre A, & leurs bases sont les quadrilateres KO, OT, TR, & le triangle RXY. Et si on construit pareillement sur les distinctions KL, LM, & MI, comme on a fait sur BK: Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn poliedre en la sphere donnee.

Je dis dauantage que iceluy poliedre ne touche la petite sphere. Car si du centre A on mene vne ligne perpendiculaire sur le plan KO, sçauoir AV: Je dis qu'elle sera plus grande que le demy-diametre de la petite sphere.

Qu'il ne soit ainli: Pour inscrire le poligone par la precedente proposition, on mene vne ligne qui touche le petit cercle, de laquelle la moitié est plus grande que le costé du poligone inscrit: Soit imaginee estre icelle demy touchante GL: il est euident par la precedente prop. que GL, sera plus grande que KB, costé du poligone inscrit: Mais KB est plus grande que BV: Aussi GL, sera plus grande que BV. Item par la 47. p. 1. Les quarez de AG & GL, sont egaux aux quarez de AV & VB, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles AVB, & AGL, sont rectangles) & le quare de GL, est plus grand que le quare de BV: Partant le quare de AV, sera plus grand que le quare de AG, & la ligne AV, plus grande que la ligne AG: ce qu'il falloit prouuer.

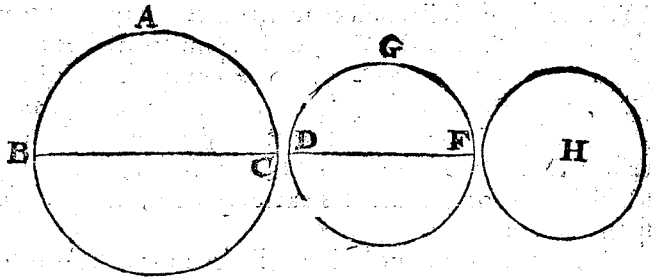
On prouue que KB soit plus grande que BV, d'autant que par la 47. p. 1. on prouuera que VK & VB sont egales, aussi par la mesme prop. VO, & VS, seroient egales, partant V, seroit le centre du cercle circonscrit au quadrilateral KO, du quelles costez SK, KB, BO, estans egaux, & OS plus petit l'angle KVB, sera plus que droit, & par la 19. p. 1. KB, sera plus grand costé que BV.

De ceste demonstration & des autres cy dessus, resulte que si en vn autre sphere, on inscrit vn poliedre semblable au poliedre cy dessus descrit, que iceux poliedres seront en raison triplee des diametres des spheres, auxquelles ils seront inseris. Car iceux poliedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'un comme l'autre: Partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'un comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur sphere pour vn de leurs costez: Partant prises vne à vne elles seront en raison triplee du demy diametre au demy diametre, par la 8. p. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy diametres par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplee des diametres entiers.

PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison triplee de leurs diametres.

Soient les deux
spheres ABC, DGE:
Je dis qu'elles sont
l'une à l'autre en rai-
son triplee du dia-
mètre BC, au dia-
mètre DG: C'est à
dire que si on ima-
gine que comme la
raison triplee de BC



à DF, ainsi la sphere BAC, à quelque autre sphere, comme H: icelle sera egalle
à la sphere DGF.

Autrement elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere H, plus petite que la sphere DGF s'il est possible: Elle pourra estre enfermee dans icelle, & on les met toutes deux sur vn mesme centre. Maintenant dans la sphere GDF, soit inscrit vn poliedre qui ne touche point la plus petite sphere H, par la 17. p. 12. Et dedans l'autre sphere soit pareillement inscrit vn semblable poliedre par la mesme prop. Et par ce qui resulte d'icelle, le poliedre en la sphere BAC, est au poliedre de la sphere GDF, en raison triplee du diametre BC, au diametre DF: mais en telle raison est la sphere BAC, à la sphere H, & par la 11. p. 5. comme la sphere BAC, à la sphere H, ainsi le poliedre de la sphere BAC, au poliedre de la sphere GDF: & échangeant comme la sphere BAC, à son poliedre, ainsi la sphere H au poliedre de la sphere GDF. Or la sphere BAC, est plus grde que son poliedre n'estant que partie d'icelle, & par la 14. p. 5. La sphere H est plus grde que le poliedre de la sphere GDF, ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy (d'autant que iceluy poliedre inscrit à la sphere GDF, a esté circonscrit à la sphere H, sans la toucher). Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplee des diametres BC & DF, à vne autre sphere plus petite que GDF.

Soit donc la sphere H plus grande que GDF: icelle H sera à la sphere BAC, en raison triplee du diametre DF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere H à la sphere BAC, ainsi la sphere GDF, à vne quatriesme proportionelle, laquelle sera plus petite que BAC par la 14. p. 5. d'autant que H est posée plus grande que GDF: Et partant icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC: Et si par la 11. p. 5. La sphere GDF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplee du diametre DF au diametre BC, ce que nous auons demonstté estre impossible: Donc la sphere H, n'a peu estre plus grande ne plus petite que la sphere DGF, mais egalle: Et par consequent les spheres sont l'une à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

Fin de l'Element douzieme.



E L E M E N T

T R E Z I E S M E.

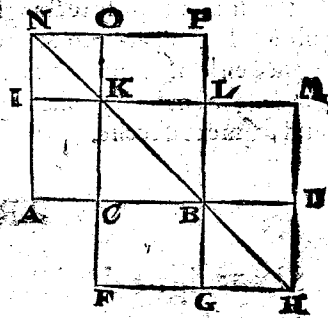
PRO P. I.

S Une ligne est coupée en la moyenne & extrême raison: le quarré de la moitié de la toute & du plus grand segment comme d'une ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne AB, coupée en la moyenne & extrême raison au point C, à laquelle on adiouste BD, ligne égale à la moitié de la totale AB: ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DB.

Qu'ainsi soit sur la ligne AB, soit construit le quarré AP, & soit menée CO parallèle à BL, & la diagonale NKBH, & du point de section K soit menée IM égale & parallèle à AD, & sur KM soit fait le quarré KH, & soient prolongez les lignes CD, LG: ie dis donc que le quarré de CD sçavoir FM, est quintuple du quarré de BD, sçavoir DG.

Car par la 4. p. 2. il est évident que le quarré de AB, sçavoir AP, est quadruple du quarré GD qui est fait de la moitié BD: & le rectangle IB est double du rectangle LD par la 1. p. 6. ou égal aux deux LD & FB par la 43. p. 1. & par la 17. p. 6. le rectangle IP est égal au quarré de CB, sçavoir CL (estant NP coupée en la moyenne & extrême raison au point O, comme AB au point C) & par conséquent le gnomon GKD sera égal au quarré AP: Partant quadruple de GD, lequel étant adiouste fera le quarré FM, euidentement quintuple du quarré GD.

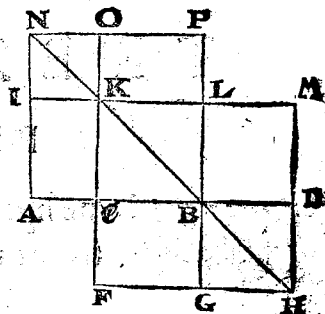


ELEMENT
PROP. II.

Si le quarré d'une ligne, est quintuple du quarré d'une partie d'icelle: le double d'icelle partie estant coupée en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera l'autre partie de la donnée.

Soit la ligne CD diuisée en CB & BD , en sorte que le quarre de la toute, sçauoir FM , soit quintuple du quarre de la plus petite partie BD , sçauoir GD : ie dis que si on prolonge BA , iusques à ce qu'elle soit double de BD , & qu'on la diuise en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment fera CB , autre partie de la totale CD .

Qu'il ne soit ainsi. Soit achevée la construction comme en la précédente: Et puis que AB est double de BD, le rectangle AL sera double du rectangle BM par la 1. p. 6. ou égal aux deux BM & BF. Or par la 4. p. 2. Le carré AP est quadruple du carré GD, & le carré FM est quintuple du même par hypothèse: Il est donc évident que le carré AP est égal au gnomon GKD: du quelles deux rectangles FB & BM sont égaux au rectangle AL. Il faut donc que le rectangle IP soit égal au carré CL, fait sur vne ligne égale à OP: & par la 7. p. 6. comme NP à PO, ainsi PO à CN: partant NP sera coupée en la moyenne & extrême raison au point O, ou son égale AB au point C: partant il est évident que CB autre partie de la totale CD, est le plus grand segment d'icelle.



PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grand segment comme d'une est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.

Soit la ligne AB, coupée en la moyenne & extreme raison au point D, de laquelle le plus grand segment BD est coupé en deux également en C: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand AC, est quintuple au quarré du grand segment DC.

TREZIESME.

III

Qu'il ne soit ainsi, sur AB soit descrite le carré AN, & sur AC le carré CK, & soient menées les parallèles DP & CO, & aux points où la diagonale NA les coupera, soient menées les parallèles FI & KM: ie dis donc que le carré KC est quintuple au carré LH fait sur la ligne GH égale à DC.

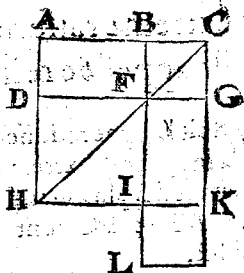


Car par les deff. du 6. & 17. p. 6. Le rectangle des extremes AB & AD (sçavoir AI) est égal au carré de la moyenne DB, lequel est quadruple de LH carré par la 4. p. 2. Le rectangle AI sera aussi quadruple de LH: mais DH & CI étant sur bases égales, sont égaux par la 1. p. 6. Et DH étant égal à FL par la 43. p. 1. Le gnomon LAH sera égal au rectangle AI, quadruple du carré HL: Ainsi il est évident que le carré KC est quintuple du carré LH.

PROP. IIII.

Si une ligne est coupée en la moyenne & extreme raison, le carré de la toute, & le carré du petit segment ensemble, sont triples du carré du plus grand segment.

Soit la ligne AC, coupée en la moyenne & extreme raison au point B: ie dis que le carré de la toute AC, & le carré de BC plus petit segment, sont triples du carré de AB plus grand segment.

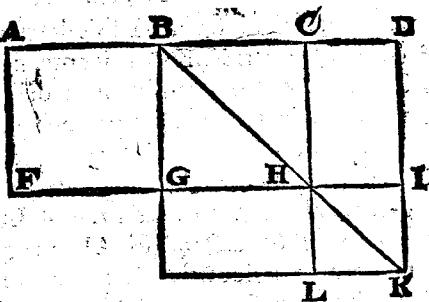


Soit faite construction comme en la 7. p. 2. en laquelle construction les deux rectangles AG & GL, sont égaux (étant KL carré de BC) partant égal à BG & AF égal à FK) mais l'un d'iceux rectangles AG, est égal au carré FH, fait sur ligne égale à AB par la 17. p. 6. Partant le gnomon DGL sera double au carré HF: Il est donc évident que les carrés AK & KL, sont triples au carré HF.

PROP. V.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adiouste directement le plus grand segment, la toute composée, sera coupée en la moyenne & extreme raison, & la toute simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne BD, coupée en la moyenne & extreme raison au point C, & à icelle on adiouste directement BA egale à BC grand segment: ie dis que AD est aussi coupée en la moyenne & extreme raison au point B, & que la toute donnée BD est le plus grand segment, c'est à dire que le quarré de BD est egal au rectangle de DA, & AB.



Qu'ainsi ne soit, Sur la toute simple

BD soit fait le quarré BK, & sur AB le quarré BF, & apres auoir mené la diagonale BK, soient menées les parallèles CL & FI. Maintenant puis que BD est coupée en la moyenne & extreme raison, le rectangle de BD & DC (sçauoir GK) est egal au quarré de BC (sçauoir GC) ou à son egal GA par la 17. p. 6. Ainsy le quarré BF estant egal au rectangle GK, en leur adioustant le rectangle commun BI: le rectangle AI sera egal au quarré BK, & par la 17. p. 6. BD sera moyenne entre AD & AB, ainsi AD la toute composée est diuisée en la moyenne & extreme raison au point B, & la toute simple BD est le plus grand segment.

PROP. VI.

Si vne ligne rationelle est coupée en la moyenne & extreme raison: l'un & l'autre segment est ligne irrationnelle appellée residu.

Soit la ligne rationelle AC, coupée en la moyène & extreme raison au point B (estant AB plus grand segment) ie dis que AB & BC sont irrationnelles & residus.



Car si à AC on adiouste directement DA, egal à la moitié de AC: Il est euident qu'estant moitié d'une rationelle, qu'elle sera aussi rationelle: Item le quarré de DB composée de la moitié de AC & du plus grand segment AB, est quintuple du quarré de DA par la 1. p. 13. Et partant est à iceluy comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré: Et par la 9. p. 10. DA & DB seront commens. en puissance seulement. Mais DA est rationelle, partant DB sera aussi rationelle, & par la 73. p. 10. AB sera residu. Item AC estant coupée en la moyenne & extreme raison au point B, le quarré de AB sera egal au rectangle de AC & CB par la 17. p. 6. Or le quarré du residu AB appliqué sur la rationelle AC, doit faire l'autre costé BC residu premier par la 97. p. 10. Donc AB & BC sont residus.

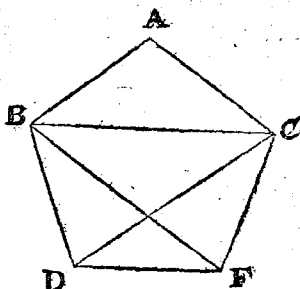
PROP.

P R O P. V I I.

Si en vn pentagone equilateral trois angles pris cōme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Soit le penragone equilateral $ABDFC$, duquel trois angles pris comme on voudra sont egaux scauoir A, D, F , ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Qu'il ne soit ainsi: il faut tirer les bases d'iceux trois angles egaux BC, CD, BF : lesquelles par la 4. p. 1. seront egalles (estans tous les costez egaux). Itē les deux triangles DBF & DCF ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les deux angles DBF & DCF seront egaux par la 8. p. 1. Item BAC estant isoscele les deux angles sur la base BC seront egaux. Pareillement les deux triangles CBF & BCD , ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, ils auront l'angle CBF egal à l'angle BCD par la 8. p. 1. Partant le total angle B est egal au total angle C . Mais d'autant que BCD est triangle isoscele, & que BAC a les trois costez egaux aux trois costez du triangle DFC chacun au sien, l'angle ABC sera egal à l'angle CDF , par la 8. p. 1. le total D sera egal à l'angle total B , & par la 1. comm. sent. Ilz seront tous egaux entre eux. Partant le pentagone sera equiangle.

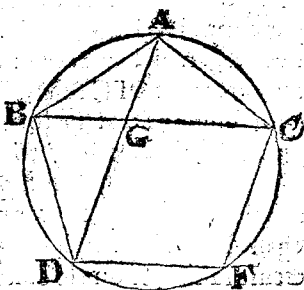


P R O P. V I I I.

Si deux lignes droictes sont tirées d'angle en angle en vn pentagone equiangle & equilateral, elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grāds segmēs seront egaux aux costez du pentagone.

Soit dans le cercle le pentagone $ABDFC$ equiangle & equilateral, & d'angle en angle on mene les deux lignes AD & BC se couppans au point G : ie dis qu'elles seront ainsi couppées en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grāds segmēs DG & CG , seront egaux au costez BD .

Car les costez & les angles estans egaux, il est euident par la 4. p. 1. que les deux bases BC & DA sont egales: Item que les deux angles GBA & BAG sont egaux, estā appuyez sur circonférences egales BD & AC par la 33. p. 6. & que l'angle exterieur BGD est egal à tous les deux,



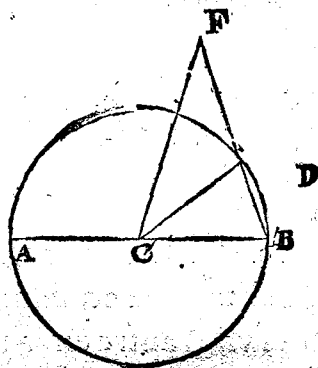
partant double de BAG, duquel DBG est aussi double (estant la circonference CFD double de BD) ainsi les deux angles GBD & BGD sont egaux: partant DG egal à DB par la 6. p. 1. de mesme GC sera egal à CA, & si les deux triangles DAB & GAB seront equiangles (estant l'angle BAG commun à tous deux, & BDA egal à ABC par la 33. p. 6.) & par la 32. p. 1. Le troisieme sera egal au troisieme, & par la 4. p. 6. comme DA à AB, ainsi AB à BG, ou leurs egalles DA à DG, ainsi DG à GA (car DG est egal à BA, & BG à GA) ainsi de l'autre BC. Voyla ce qui estoit à demonstrier.

PRO P. IX.

La ligne droicte composée du costé de l'hexagone & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle: est couppée en la moyenne & extreme raison, de laquelle le plus grand segment est le costé del'hexagone.

Dans le cercle ADB soit inscrit le costé du decagone BD, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone DF qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que DF soit egalle à CB ou CD: ie dis que BF est couppée en la moyenne & extreme raison, & que DF costé de l'hexagone est le plus grand segment.

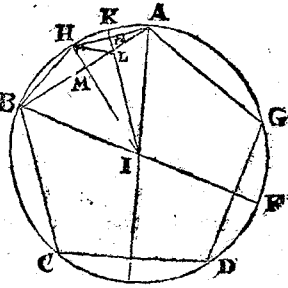
Car si du centre C on meine les deux lignes CD & CF, il est euident par la 33. p. 6. que comme la circonference AD est quadruple de la circonference BD (qui est celle du costé du decagone) aussi l'angle ACD sera quadruple de l'angle DCB: & par la 32. p. 1. estant extérieur, il vaudra les deux CDB & CBD: lesquels estans egaux par ce que le triangle BCD est Isoscele par la 5. p. 1. L'un ou l'autre sera double de DCB: mais l'un d'iceux CDB estant extérieur est egal aux deux opposez interieurement DFC & DCF (lesquelz sont egaux, estant le triagle FDC Isoscele) ainsi l'angle BDC sera double de l'angle F: lequel par ce moyen sera egal à l'angle DCB, ainsi les deux triangles FCB & CDB seront equiangles, ayans l'angle B commun, & l'angle F egal à l'angle DCB, par la 32. p. 1. Le tiers sera egal au tiers, & par la 4. p. 6. comme FB à BC, ou FD son egalle, ainsi CB ou FD son egalle à BD: Partant il est manifeste que FB est couppée en la moyenne & extreme raison, & que le costé de l'hexagone est le plus grand segment.



PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Soit dans le cercle inscrit le pentagone ABCDG, l'un des costez d'iceluy BA, duquel la circonference BA soit couppée en deux egallement par la ligne menée du centre IH, & soient menées les lignes HA & HB: il est euident que l'une d'icelles sera le costé du decagone, & IB le costé de l'hexagone: ie dis que les quarrez d'iceux deux costez HA & BI, sont egaux au quarré du costé du pentagone BA.



Car apres auoir acheué le diametre BIF, & mené IA, & couppé l'arc HA en deux egallement au point K, par la ligne IK: icelles lignes JK & IH couppans le costé du pentagone BA aux points M & IL, ie dis que les deux triängles BIL & BIA sont equiangles, estant l'angle BIK egal à l'angle LBI: car les deux arcs GF & FD estans egaux, Item les deux AK & KH, il est euident que l'arc FGA sera double de l'arc BHK: & par la 20. p. 3. l'angle à la circonference FPA, sera egal à l'angle au centre BIK: ainsi l'angle IBA estant egal à l'angle IAB (car le triangle est isoscele) les deux angles BIL & IAB seront egaux; & l'angle IBA estant commun à tous les deux triangles, le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. Et les deux triangles BIA & BIL seront equiangles, & par la 4. p. 6. comme AB à BI, ainsi BI à BL: Et par la 17. p. 6. le quarré de BI sera egal au rectangle de BA & de BL.

Pareillement la ligne IK couppant l'arc HA en deux egallement, couppera aussi la corde HA en deux egallement & à droicts angles (par ce qui a esté demonstré au troisieme liure) & le costé LN estant commun aux deux triangles ALN & HLN par la 4. p. 1. les deux bases AL & LH seront egales, & les angles LAN & LHN seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle LAN est aussi egal à l'angle LBH, d'autant que les arcs BH & HA sont egaux: l'angle ABH sera egal à l'angle LHA: & l'angle LAH estant commun à tous les deux triangles BAH & HALE, le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. ainsi ils seront equiangles: & par la 4. p. 6. comme BA à AH, ainsi AH à AL: & par la 17. p. 6. le quarré de HA sera egal au rectangle de AL & AB. Or nous auons tantost prouué que le quarré de IB estoit egal au rectangle de AB & BL: Partant les deux quarrez ensemble de IB & HA costez de l'hexagone & decagone, sont egaux aux deux rectangles de AB & BL: Item de AB & LA: lesquels ensemble sont egaux au quarré de BA costé du pentagone par la 2. p. 2.

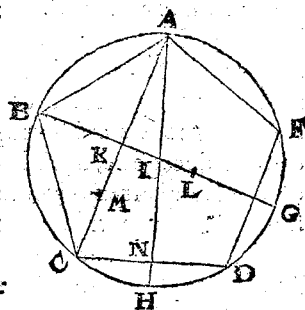
PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral, le costé du pentagone est irrationel: appellé ligne Mineure.

Soit le pentagone equilateral $ABGDF$, inscrit dans le cercle $ABGDF$, duquel le diametre BG ou AH est rationel: ie dis que le costé du pentagone BC est irrationel appellé ligne mineure.

Qu'ainsi ne soit (apres auoir mené la ligne AC) Il est euident que le point I rencontré des deux diametres est le centre du cercle, & que les deux arcs CH & HD estans egaux, que les deux lignes CN & ND sont aussi egales: & par la 3. p. 3. la toute CD sera couppée par le diametre en angles droicts: Item CA sera aussi couppée en deux egallement & en angles droicts par le diametre BG , par la 3. p. 3. Car les arcs BA & BC estans egaux, les lignes BA & BC seront aussi egales, & les deux triangles ABK & CBK auront deux costez egaux à deux costez, & les deux angles au point B egaux, les arcs qui les soustiennent estans egaux, les deux bases CK & KA seront egales & par la 3. p. 3. BK coupera CA à droicts angles.

Or par ce moyen il est manifeste que les deux triangles ACN & AKI sont equiangles, car l'angle du point A est commun à tous les deux, & le droict AKI egal au droict ANC , le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. Et par la 4. p. 6. come NC à CA , ainsi KI à IA . Item du demy diametre IG (lequel est rationel & egal à IA) soit retranché IL egal au quart de IA , lequel IL sera rationel estant le quart d'une ligne rationelle: Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne: Et par la 15. p. 5. CN sera à CM quart de CA , comme KI à IL quart de IA : Que si on double les deux CN & CM par la mesme 15. p. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KI à IL : & en composant par la 18. p. 5. Comme les deux CD & CK à CK , ainsi les deux KL à IL : Et par la 22. p. 6. le quarré de CD & CK comme vne, sera au quarré de CK , comme le quarré de KL au quarré de IL : Mais d'autant que la ligne AC estant couppée en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est egal au costé du pentagone par la 8. p. 13. Le quarré de CD & CK comme vne sera egal au quarré du plus grand segment & de la moitié comme d'une de la ligne AC estant couppée en la moyenne & extreme raison: & par la 1. p. 13. Iceluy quarré de CD & CK come vne sera quintuple au quarré de CK : partant aussi le quarré de KL sera quintuple du quarré de IL : Mais la ligne BL est aussi quintuple de IL ,



estant IL quart de IB, donc comme BL à IL, ainsi le carré de KL, au carré de IL, c'est à dire en raison doublee de KL à IL. Et il s'ensuit que KL sera moyenne proportionnelle entre BL & IL. Partant par la mesme raison doublee de la 10. d. 5. & 29. p. 6. Le carré de BL, sera au carré de KL, comme BL à IL, c'est à dire que le carré de BL sera quintuple du carré de KL : Partant iceux quarrés seront entre eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 19. Les lignes BL & KL, seront commens. en puissance seulement: desquelles BL étant rationelle, BL & KL seront rationelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. BK sera résidu. Et pour autant que BL est rationelle commens. en longueur à la rationelle proposée BI (étant entre elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du carré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, (car étant la puissance quintuple de la puissance de KL, ce qui restera apres avoir osté le carré de KL, sera au carré de BL, comme 4 à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré (& par la 9. p. 10. BL pourra plus que KL du carré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur) Et par les tierces deff. du 10. BK sera résidu quatriesme.

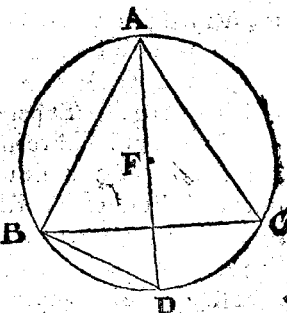
Maintenant par la 35. p. 3. le rectangle de GK & KB, est egal au rectangle de AK & KC, c'est à dire au carré de KC, lequel adjoüsté au carré de KB, est egal au carré de BC, costé du pentagone par la 47. p. 1. (étant le triangle BKC rectangle :) Partant le carré de BK, & le rectangle de BK & KG, ou le seul rectangle de BK & BG auquel sont egaux, iceux carré de BK & le rectangle de BK & KG, sera egal au carré de BC : Lequel carré étant appliqué sur la ligne rationelle BG, & faisant l'autre costé GK résidu quatriesme par la 94. p. 10. BC sera ligne mineure.

. P R O P. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral inscrit en vn cercle ABC, duquel le demy diametre est FD : Je dis que le quarré de AB costé d'iceluy, est triple du quarré de FD.

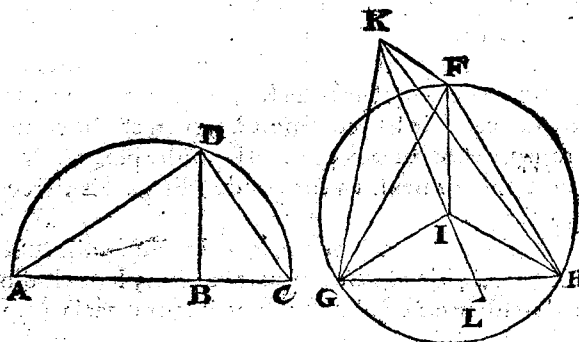
Car si on mene la ligne BD, l'arc BDC étant le tiers de toute la circonference, BD sera la sixiesme partie: partant sera le costé de l'hexagone, & egal au demy-diametre DF. Or le quarré du diametre AD sera quadruple du quarré de BD, egal au demy diametre par la 4. p. 2. & par la 47. p. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BD: il est donc manifeste qu'il sera triple de BA.



PROP. XIII.

Dans la sphere donnée inscrire vne pyramide equilaterale : Et monstrier que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesqui-autre au quarré du costé d'icelle pyramide.

Soit la ligne AC, diametre de la sphere donnée, diuisee en B, de sorte que AB soit double de BC: Et apres auoir mené le demy cercle, & leuee la moyenne proportionnelle BD, & mené les lignes DA & DC: Soit descript le cercle FGH, duquel le demy diametre



IH soit egal à BD : & apres auoir inscrit en iceluy le triangle equilateral FGH, du centre I soit leuee la perpendiculaire IK, par la 12. p. 11. laquelle soit egallee à AB, puis soient menees les lignes KH, KG, KF : Le dis premierement que la pyramide KGHF, est equilaterale, qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diametre est AC, & que le quarré du diametre AC, est en raison sesqui-autre au quarré du costé HG.

Que la pyramide soit equilaterale: Il appert en pretnier lieu que le triangle FHG, est equilateral: Item que les trois lignes KF, KG, KH, sont aussi egalles entre elles (d'autant que par la 47. p. 1. le quarré d'vne chacune d'icelles est egal au quarré de la perpendiculaire IK, & au quarré de l'vne des trois lignes IF, IG, IH, lesquelles sont egalles) Pareillement que HF, est egalle à HK. Car IK estant egalle à AB, & IH à BD, par la 47. p. 1. HK & AD seront egalles: Et pour autant que le quarré de AB, est double du quarré de BD (car ils sont l'un à l'autre comme AB, à BC) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarré de DB, ou de son egalle HI: Mais par la 12. p. 13. Le quarré de HF, est aussi triple du quarré de HI: Partant HF, & AD sont egalles: & par la 1. comm. sont HF & HK, seront egalles: Et par consequent la pyramide KGHF, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere ayant pour diametre AC, il appert: Soit continuee la ligne perpendic. KI par dessoubz la base de la pyramide iusques en L, Et soit faicte KL egalle à AC, & soit posé le demy cercle ADC à l'enrouer de la pyramide: scauoir le point A, au point K, le point C, au point L. Puis que AB & BC sont egalles à KI & IL, & IG egalle à DB, faisant angle droit avec KI, aussi bien que leurs egalles AB & BD: il est certain que le point D, du demy cercle tombera sur le point G. Partant le diametre de la sphere est AC.

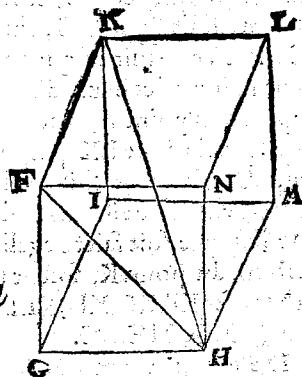
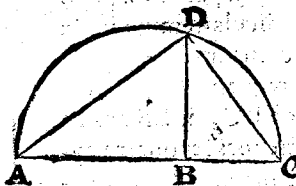
file demy cercle fait vn reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide H & F, (estans les lignes IF, IG, IH, egalles) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnée. Ou bien si on ayme mieux prouuer que l'angle KGL, seroit droit, si on auoit mené la ligne GL: & que l'angle dans le demy cercle estant droit par la 31. p. 3. Et par la conuerse d'icelle le demy cercle sur le diametre KL, touchera les poincts I, H, G, en faisant sa reuolution.

Que le carré du diametre AC, soit sesquialtre au carré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert: Car puisque AC est triple de BC, aussi AC sera en raison sesquialtre à AB: Mais par la 8. p. 6. comme AD, se trouue moyenne proportionnelle entre AC & AB, estans les deux triangles DAC & DAB, equiangles: Partant le carré de AC, sera au carré de la moyenne AD, comme AC à AB, c'est à dire en raison sesquialtre.

PROP. XIII.

Dans la sphere donnée, inscrire vn cube: Et monstrier que le carré du diametre de la sphere, est triple au carré du costé d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnée AC, lequel soit coupé au point C, en sorte que AB, soit double de BC: Puis apres auoir construit le demy cercle, leué la moyenne proportionnelle BD, & mené les deux lignes AD, & DC: Sur GH, egalle à DC, soit fait le carré GHMI: Sur lequel soit basti le



cube GL, en leuant les 4. lignes perpendiculaires GF, IK, ML, HN, par la 12. p. 11. qu'on fera egalles à GH, & en menant les 4. lignes KF, FN, NL, LK.

Je dis premierement qu'il est inscriptible en la sphere donnée: Car apres auoir mené les lignes FH, & KH, sur la ligne KH, soit imaginé vn demy cercle, comme sur son diametre faire vn reuolution à l'entour du cube: Il est euident que iceluy demy cercle touchera tous les angles du cube: Car l'angle K, H, estant droit (d'autant que KF est perpendiculaire au plan FH) le demy cercle passera par l'angle F, (car tout angle dans le demy cercle est droit): Semblablement si on meine la ligne KG, l'angle KGH, sera aussi droit (estant GH perpen-

diculaire au plan GK) ainsi le demy cercle passera par l'angle G, de mesme façon on prouuera qu'il touche en passant tous les autres qui sont tous angles droicts, par la construction.

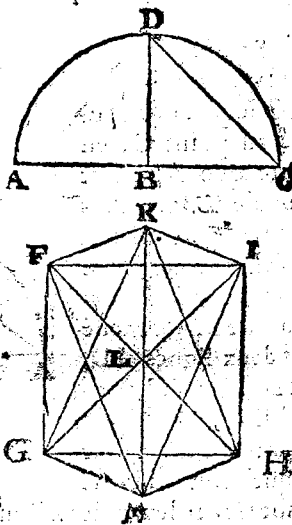
Je dis finalement que KH, est egal au diametre de la sphere donnee AC : Et que son quarré est triple du quarré de GH. Car GH estant egale à GF, le quarré de FH sera double du quarré de GH par la 47. p. 1. ou de son egale FK: Mais le quarré de KH, est egal à tous les deux de KF, & FH : Partant il sera triple du seul de KF, ou de son egale GH. Item le quarré de AC est aussi triple du quarré de DC. Car ils sont l'un à l'autre comme la ligne AC, à la ligne BC: Or la ligne DC est posée egale à DH, par consequent aussi sera egale KH à AC, & le quarré du diametre AC, sera triple du quarré du costé du cube.

PROP. XV.

Dans la sphere donnee, inscrire vn octaëdre : Et mon-
strer que le quarré du diametre de la sphere, est double du
quarré du costé de l'octaëdre.

Soit le diametre de la sphere donnee AC, coup-
pé en deux egalement au point B : & apres auoir
construit le demy cercle, & leué la perpendiculaire
BD, & mené la ligne DC, sur la ligne FG, egale à
DC, soit construit le quarré FGHI, dans lequel
soient menees les deux diagonales FH, & GI, se
coupans au point L, duquel point par la 12. p. 11.
soit esleuée la ligne LK, perpendiculairement sur le
quarré GI : laquelle soit aussi continuée perpendi-
culairement par dessous iceluy plan, & soit icelle
LM : laquelle soit faite egale à BC, & LK aussi à
BC: Item du point K, soient menees les quatre hy-
pothenuses KF, KG, KH, KI: Et du point M, les qua-
tre MB, MG, MH, MI.

Je dis maintenant que icelle figure solide KM,
est enuironnée de huit triangles equilateraux, &
que c'est vn octaëdre. Car le quarré FH, ayant les
costez egaux à DC : Il est euident que les diagona-
les FH & GI, seront egales à AC : Partant leurs moitez à BC par la 47. p. 1.
Mais les deux lignes LK & LM, sont aussi egales à BC : Et par consequent elles
seront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales, & par la 4. p. 1. les huit
lignes KF, KG, KH, KI, & MF, MG, MH, MI, seront toutes egales entre elles,
& aux quarrés du quarré FGHI, par la mesme 4. p. 1. (estans les demy diagona-
les egales aux perpendiculaires LK & LM, en constituant des angles droicts au
point L milieu du quarré) & puis que tous les costez sont egaux, tous les trian-
gles se-



gles seront equilateraux, sçauoir quatre au dessus du quarré FGHI, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au point K: & quatre autres au dessous du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminant au point M, ainsi le solide KM, cōpris de huit triangles equilateraux fera octaëdre.

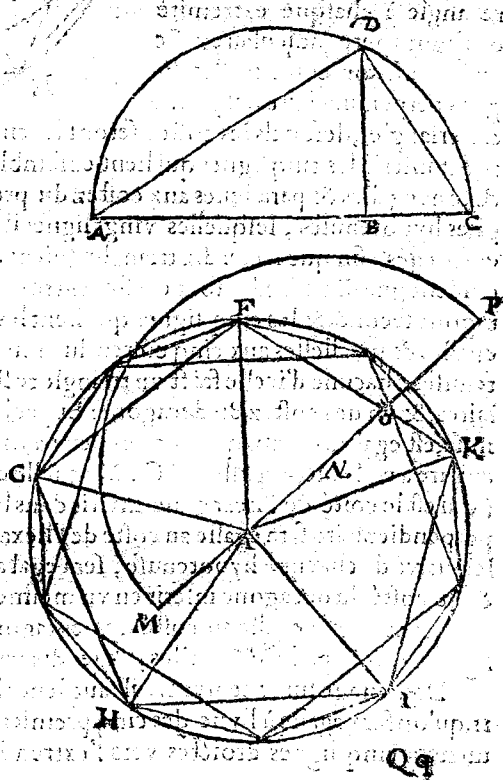
Le dis dauantage que iceluy octaëdre est inscriptible en la sphere donnee. Car il est euident que la ligne KM, est egale au diametre AC: & que l'angle KGM est droit (d'autant que les deux lignes KL, & LG estant egales, les angles sur la base seront egaux, & l'angle KLG, vaudra vn demy droit: Car les deux ensemble valloient vn droit, & par mesme raison MGL, demy droit:) Partant le demy cercle ayant pour diametre KM, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaëdre touchera le point G: Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres F, I, H, desquels les angles sont egaux à l'angle G.

Finablement il est aisé à voir que le quarré du diametre KM, est egal aux deux quarez de KG & GM, par la 47. p. & partant double du quarré de l vn d'eux costez, ce qu'il falloit demonstren.

P R O P. XVI.

Dans la sphere donnée, inscrire vn icosaëdre: Et mōstrer que son costé est ligne irrationnelle appelée ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AC, lequel soit diuisé au point B, en sorte que AB soit quadruple de BC, & apres auoir construit le demy cercle, leue la moyenne proportionnelle BD, & mené la ligne DC, du centre L, & internal LG, egale à DC: Soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & du centre L, soient menees les lignes LF, LG, LH, LI, LK, & dans le mesme cercle soit inscrit vn decagone equilateral (ce qui se fera en coupant en deux egale-ment l'arc d vn chacun costé du pentagone:) & par la 12. p. 11. soient leuees des lignes perpendiculaires sur chacun angle du pentagone, qu'on fera toutes egales à BC, & seront paralleles entre elles par la 6. p. 11. & de l'extremite d'vne chachu

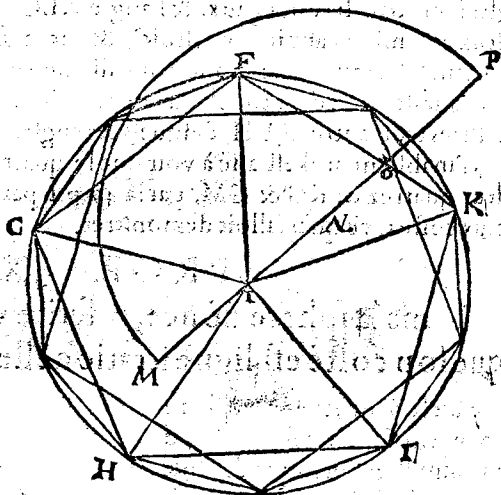
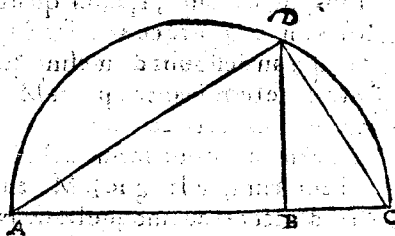


ne, à l'extremité de l'autre, soient menées des lignes droites, lesquelles par la 33. p. 1. seront égales & parallèles, aux costez du pentagone FGHK.

Maintenant le decagone inscrit à cinq angles communs avec les cinq du pentagone, & cinq autres, desquels vn chacun est posé également entre deux angles du pentagone: soit menée vne ligne d'angle en angle, de ces dernières on fera vn autre pentagone, de chacun angle duquel si on mene deux lignes hypotenusalemment vers l'extremité de chacune des cinq lignes perpendiculaires, de sorte que deux d'icelles hypotenuses se viennent terminer, & faire angle à chaque extremité des lignes perpendiculaires: Et en ceste façon entre icelles lignes perpendiculaires, il y aura

dix triangles, desquels les costez seront les cinq costez du pentagone secondement inscrit, les cinq lignes qui lient ensemble les cinq lignes perpendiculaires, & sont égales & parallèles aux costez du premier pentagone: Item les dix lignes hypotenuses, lesquelles vingt lignes il faut montrer qu'elles sont égales entre elles, afin que iceux dix triangles soient equilateraux: En premier lieu il est euident que dix d'icelles sont égales entre elles, sçauoir les cinq costez du pentagone second, & les cinq lignes qui lient les perpendiculaires (car elles sont égales & parallèles aux cinq costez du premier pentagone.) Quand aux hypotenuses, chacune d'icelle fait vn triangle rectangle, avec vne des perpendiculaires, & vn des costez du decagone. Et par la 47. p. 1. le quarré d'icelle hypotense, est egal aux deux quarrés des deux autres lignes, desquelles la perpendiculaire a esté faite égale à DC, à laquelle est aussi égale demy diametre LG, (qui est le costé de l'hexagone inscrit dans le mesme cercle:) partant chaque perpendiculaire sera égale au costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle: Et le quarré de chacune hypotense, sera egal aux quarrés du costé de l'hexagone & du costé du decagone inscrit en vn mesme cercle: & par la 10. p. 13. chaque hypotense sera égale au costé du pentagone: Et par ce moyen icelles vingt lignes seront égales entre elles, & les dix triangles seront equilateraux.

Dauantage sur le centre L, il faut leuer la perpendiculaire LO par la 12. p. 11. qu'on fera égale à l'vne des cinq premieres: Et de l'extremité d'icelles, on menera cinq lignes droictes vers l'extremité de chacune des cinq premieres



perpendiculaires, & icelle perpendiculaire du centre, sera parallele aux autres perpendiculaires par la 6. p. 11. & par la 33. p. 1. les cinq lignes menees vers chacune des cinq autres perpendiculaires, sera costé de l'hexagone, comme les cinq qui leur sont opposees dans le premier pentagone: auxquelles elles sont egales. Item soit adiousté directement à icelle perpendiculaire du centre LO, la ligne OP, qui sera egale au costé du decagone inscrit dans le cercle: Et au dessous du cercle soit aussi adiousté directement la ligne LM, aussi egale au costé du decagone: Et du point P, soient menees cinq hypotenuses vers les cinq angles, lesquels de tous ceux des dix triangles sont tournez en haut: Et du point M, soient aussi menees cinq hypotenuses vers les cinq angles tournez en bas: Icelles dix lignes seront toutes egales aux costez du pentagone (côme nous auons prouué des autres par la 47. p. 1. & 10. p. 13.) Et feront encores dix triangles equilateraux: Voila donc vn Icosaëdre enuironné de vingt triangles equilateraux, desquels les dix sont à l'entour du milieu du diametre PM, entre les cinq lignes perpendiculaires, cinq autres sont au dessus se terminans au point P, & cinq au dessous se terminans au point M.

Je dis encores que iceluy icosaëdre, est inscriptible en la sphere donnée, de laquelle le diametre est AC. Car puis que la ligne LO, est egale au costé de l'hexagone, & OP au costé du decagone, la toute LP sera coupée au point O en la moyenne & extreme raison par la 9. p. 13. & le plus grand segment sera LO: Soit donc diuisee LO en deux également au point N: NP sera egale à NM (estant LM egale à OP.) Or le quarré de NP estant quintuple du quarré de NO par la 3. p. 13. aussi le quarré de PM sera quintuple du quarré de LO par la 15. p. 5. (ou de son egale DC, au quarré de laquelle le quarré de AC est aussi quintuple, car par la 8. p. 6. elle est moyenne proport. entre AC & CB) partant les diametres AC & MP sont egaux: Ainsi si on décrit vn demy cercle sur le diametre MP, faisant vne entiere reuolution à l'entour de l'icosaëdre, il escrira vne sphere egale à la donnée. Et d'autant que LO, est moyenne proportionnelle entre LP & LM, aussi les demy diametres qui luy sont egaux, seront aussi moyens proport. entre LP & LM: Partant le diametre MP estant perpendiculaire au diametre LG, le demy cercle touchera iceluy point G par la 13. p. 6. Et toutes les extremités des autres demy diametres: Et par le mesme discours il touchera aussi les extremités des cinq lignes procedant du point O, vers les perpendiculaires esleues sur les angles du premier pentagone, que nous auons monstré estre egales aux demy diametres. Et par ainsi iceluy icosaëdre est inscriptible à la sphere donnée.

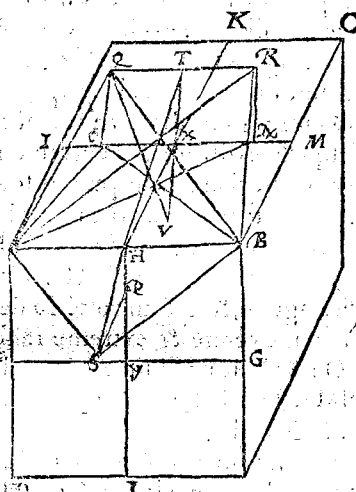
Je dis finalement que le costé de l'icosaëdre est ligne mineure: ce qui est euident par la 11. p. 1. étant le demy diametre LG ou son egale DC, ligne rationnelle commens. en puissance à la rationelle AC, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de DC.

Q. 9. n.

PROP. XVII.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn dodecaëdre: Et montrer que son costé est ligne irrationelle appelée residu.

Soit le cube DC, & d'iceluy les deux plans extérieurs AC & DB, se rencontrans à droicts angles à la ligne de cõmune section AB: & d'iceux plans tous les costez soient coupez en deux egallement, scavoir AC, par les deux lignes HK & LM, se coupans au point X, & DB par les lignes FG & HI, se coupans au point Y. Item soient les trois lignes LX, MX, HY, coupées en la moyenne & extreme raison aux points O, N, P, desquelles les plus grands segmens soient OX, NX, PY. Et par la 12. p. 11. soient levées les trois lignes perpendiculaires OQ & NR sur le plan AC, & PS sur le plan BD, qu'on fera egalles à OX, XN, PY. Puis soient menées les lignes AS, SB, BR, RQ, QA: Je dis que ASBRQ, est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan & equiangle.



Qu'il ne soit ainsi: Soient menées les lignes AO, AN, AR: Et d'autant que LX est coupée en la moyenne & extreme raison au point O, & que OX est le plus grand segment, par la 4. p. 13. les deux quarrés de LX & LO seront triples du quarré de OX: Et LX étant égale à LA, & OX à OQ, les deux quarrés de LA & LO, ou par la 47. p. 1. le seul de AO, est triple du quarré de OQ: & le quarré de AQ, qui est égal à tous les deux par la 47. p. 1. sera quadruple du seul de OQ. Et d'autant que QR est double de OQ, son quarré par la 4. p. 2. sera aussi quadruple du quarré de OQ, aussi bien que le quarré de AQ: Partant les lignes AQ & QR seront egalles. Par mesme discours on monstrera l'egalité des trois autres costez RB, BS, SA. Voila donc le pentagone equilateral.

Je dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit menée XT parallèle à OQ. Item les deux TH & HS, Je dis que icelles deux lignes se rencontrent directement, & font vne seule ligne droite THS. Car pour autant que HY est coupée en la moyenne & extreme raison au point P, YH sera à YP, comme YP, à PH: Or HX est égale à HY & XT à YP, & PS à PY: Partant comme HX à XT, ainsi SP à PH: Et les deux lignes XH & PS étant parallèles par la 6. p. 11. aussi par la 32. p. 6. THS sera vne seule ligne droite: Or par la 1. p. 11. Toute ligne droite est en vn mesme plan: par consequent le pentagone est en vn mesme plan.

Je dis encorres qu'il est equiangle : Car puis que LX est couppee en la moyenne & extreme raison, estant OX plus grand segment, par la 5. p. 13. en adioustant à LX, XN egalle au plus grand segment OX: la toute LN sera couppee en la moyenne & extreme raison au point X, & fera LX le plus grand segment : & par la 4. p. 13. les quarrez de LN & NX (ou NR son egalle) sont triples du quarré de LX (ou de son egalle LA), & en adioustant le quarré de LA avec les deux de LN & NR, iceux trois quarréz seront quadruples du seul de LA (ou par la 4. p. 1. au lieu des deux de LN & LA, le seul de NA avec celui de NR, ou encorres le seul de RA, sera quadruple du quarré de LA) duquel le quarré de AB est aussi quadruple par la 4. p. 2. estant AB double de AL: partant les deux lignes AB & AR seront egales: Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles ABS & ARQ auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, Et par la 8. p. 1. l'angle au point Q sera egal à l'angle au point S. Et semblablement nous monstrerons que l'angle QRB est egal à l'angle BSA: ainsi trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. p. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral & sur AB l'un des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon vn pentagone, sur chacun des vnze costez restans, on trouuera vne figure solide enuironnée de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les deff. sera dodecaëdre

Je dis dauantage qu'il est inscriptible en la sphere donnée, car si on prológe TX par la 3. p. 11. elle coupera la diagonalle du cube en deux egalemēt: qu'elle la coupe donc au point V, auquel point sera le centre de la sphere enuironnant le cube, & XV est egalle au demi costé du cube: Soit mené la ligne QV. Or nous auons tantost montré par la 4. p. 13. que les quarrez de LN & NX sont triples du quarré de LX: Mais TV est egalle à LN (car XV & XL sont egales, & XT XN) Item QT & XN: Partant les deux quarrez de QT & TV (ou le seul de QV par la 4. p. 1.) est triple du quarré de LX: Mais par la 15. p. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite au cube, est triple du quarré du costé d'iceluy cube: Et par la 15. p. 5. le quarré du demy-diametre est triple au quarré du demy-costé. Or LX est le demy costé du cube, partant QV sera le demy-diametre de la sphere circonscrite au cube DC, duquel le centre est V. Par mesme discours nous monstrerons que du point V toutes les lignes menées vers les autres angles du dodecaëdre, sont egales au demy-diametre de la sphere circonscrite au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscrite au cube & au dodecaëdre.

Je dis finalement que le costé du dodecaëdre est irrationel appellé residu. Car d'autant que les deux demy-costez du cube LX & XM sont chacun couppez en la moyenne & extreme raison, en raison composée toute la ligne LM sera aux deux plus grands segmens, comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits par la 15. p. 5. Par ainsi il est euidēt que d'autant que les deux plus grands segmens ensemble ON, sont le costé du dodecaëdre: que si le costé du cube est couppe en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment sera le costé du dodecaëdre inscrit en vne mesme sphere, de laquelle le diametre ensemble le costé du cube, estant posees lignes rationelles, le costé du dodecaëdre

dre (ſçavoir le plus grand ſegment d'icelle ligne, diuiſee en la moyenne & extreme raiſon) eſt reliu par la 6. p. 12.

PROP. XVIII.

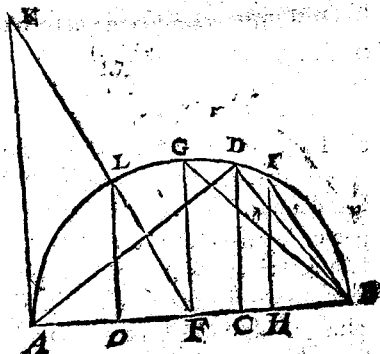
Le diametre d'une ſphere eſtant donné, trouver les coſtez des cinq figures inſcrites en icelle, enſemble leur raiſon.

Auparavant que de venir à la demonſtration de ceſte propoſition, nous tiendrons pour certain, que outre les cinq figures devant déclarées, on n'en pourra trouver d'autre comprises de ſuperficiés planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou deux autres ſuperficiés planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouvant conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide : de quatre, l'angle de l'octaèdre : de cinq, l'angle de l'icosaèdre : de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide : car iceux ſont égaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'un angle ſolide, doiuent eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. p. 11. Partant on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube : de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide : car ce ſeroit toujours contreuenir à la 21. p. 11. L'angle ſolide du dedecaèdre eſt compris de trois pentagones equiangles. De quatre pentagones, il ſera impoſſible : eſtans iceux plus grands que quatre droicts. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il ſ'enſuiroit abſurdité. Partant il eſt evident que outre les cinq figures regulieres cy deſſus déclarées, on n'en trouuera point d'autres.

Venons à la demonſtration de ceſte propoſition. Soit le diametre de la ſphere donnée AB, il faut trouver les coſtez des cinq figures, enſemble la raiſon qui eſt entre iceux.

Soit le diametre AB de la ſphere donnée diuiſé au point C, en ſorte que AC ſoit double de CB : & au point C ſoit leuée la perpendiculaire & moyenne proportionnelle CD : Item ſoit coupé AB en deux également au point F, & apres auoir leuée la perpendiculaire FG, ſoient menées les lignes AD, DB, BG.

Premierement par la 8. p. 6. les triangles DAB & DAC ſont equiangles, & par la 4. p. 6. comme CA à AD, ainſi AD à AB : & par la 10. d. 5. le quarré de AD ſera au quarré de AB, comme la ligne AC eſt à la ligne AB : laquelle eſtant double de BC, il eſt evident



que AB sera à AC en raison sesquialtre. Partant aussi le quarré du diamètre AB sera sesquialtre au quarré de AD: & par la 13. p. 13. AD sera à costé de la pyramide inscrite en la sphere du diamètre AB.

Pyramide.

Et pour autant que par le mesme discours de la 8. & 4. p. 6. AB est à BD comme BD à BC par la 10. d. 5. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC, qui est en raison triple: Et par la 14. p. 13. DB sera costé du cube inscrit en la sphere du diamètre AB.

Cube.

Et pour autant que AB est couppé en deux également en F: & la perpendiculaire FG est égale à FB par la 47. p. 1. le quarré de AB sera double du quarré de GB: & par la 15. p. 13. GB sera le costé de l'octaëdre inscrit en la sphere de AB.

Octaëdre.

Et pour autant que DB est costé du cube, soit iceluy couppé en la moyenne & extrême raison au point M, duquel le plus grand segment soit MB: iceluy (par ce qui a esté démontré à la fin de la 17. p. 13) sera le costé du dodecaëdre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-là mesme qui a pour diamètre AB.

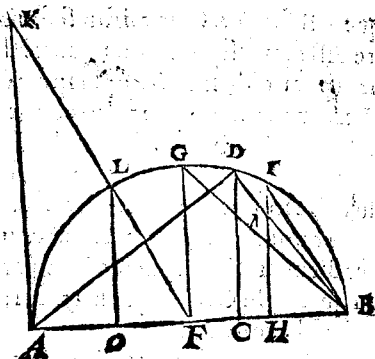
Dodecaëdre.

Pour le costé de l'icosaëdre soit leuë la perpendiculaire AK égale à AB: & apres avoir mené la ligne FK du point L, ou icelle coupera le demy-cercle, soit menée LO perpendiculaire à AF par la 12. p. 1. Or KA est égale à AB, elle sera double de AF: & par la 4. p. 6. LO sera double de OF (car les triangles sont equiangles) & le quarré de LO sera quadruple du quarré de OF par la 4. p. 2. & le quarré de LF qui est égal à tous les deux par la 47. p. 1. sera quintuple du seul quarré de OF: aussi le quarré de FB sera quintuple du quarré de OF, estant FB & FL égales. Mais pour autant que CB est le tiers du diamètre AB, & FB la moitié, FC sera le demi-tiers: & FB sera triple de FC, & son quarré vaudra neuf fois le quarré de FC. Or iceluy quarré de FB, n'est que quintuple du quarré de OF: donc OF sera plus grande que FC: Soit prise FH égale à FO: & apres avoir leuë la perpendiculaire HI, soit menée la ligne IB. Puis donc que le quarré de FB est quintuple du quarré de OF par la 15. p. 5. Le quarré de AB (la double de FB) sera quintuple du quarré de OH (la double de FO.) Or si on considere bien la demonstration de la 16. p. 13. Le quarré du diamètre de la sphere circonscrite à l'icosaëdre, est quintuple au quarré du demi-diametre du cercle sur lequel se fait la construction. Partant si on pose AB pour diametre de la sphere qui doit estre circonscrite à l'icosaëdre, OH sera le demy-diametre du cercle sur lequel se fera la construction: lequel comme il a esté démontré à la mesme proposition, est égal au costé de l'hexagone inscrit au cercle de construction: & qu'auec deux fois le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle, il doit estre égal au diametre de la sphere que nous auons montré estre AB. Il faut donc que HB & AO lignes égales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle, dans lequel OH est le costé de l'hexagone. Mais OH & HI sont égales (car HI est égale à LO pour estre en mesme distance du centre, laquelle estant double de OF sera égale à OH.) Partant LH sera costé de l'hexagone, & HB du decagone: & par la 47. p. 1. & 10. p. 13. IB sera le costé du pentagone

Icosaëdre.

inscrit dans un cercle comme nous
avons déclaré à la 16. p. 13. Il sera aussi
le côté de l'icosaèdre. Partant IB est
le côté de l'icosaèdre.

Venons maintenant à la raison
d'iceux costez : C'est à dire lesquels
d'iceux sont les plus grands. Parce que
a esté dict cy dessus AD côté de la
pyramide, est plus grand que GB co-
sté de l'octaèdre : parce que l'arc AGD
est plus grand que l'arc GDB. Ité GB
est plus grand que DB côté du cube :



& DB plus grand que IB, côté de l'icosaèdre pour la mesme raison. Il faut
maintenant prouver que IB est plus grand que BM côté du dodecaèdre.
Nous avons montré cy devant que par la 4. & 8. p. 6. que AB est à BD
comme BD à DC : & par la 10. d. 5. comme AB à BC, ainsi le quarré de
BD au quarré de BC, c'est à dire triple, comme AB est triple de BC ; mais
le quarré de AC est quadruple du quarré de BC (estant AC double de CB)
partant le quarré de AC sera plus grand que le quarré de BD : & la ligne
AC plus grande que BD : & AH sera donc encor plus grande que BD.
Mais les deux lignes AH & DB sont couppees l'une comme l'autre en la
moyenne & extreme raison aux points O & M : & par la 4. p. 5. Le plus
grand segment OH de la ligne AH, sera plus grand que le plus grand
segment MB de la ligne BD. Mais OH est égale à HI, & HI plus petite
que IB, à plus forte raison MB sera plus petite que IB. Ce qui estoit à dé-
monstrer.

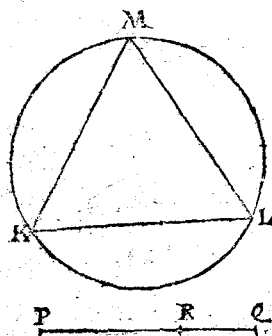
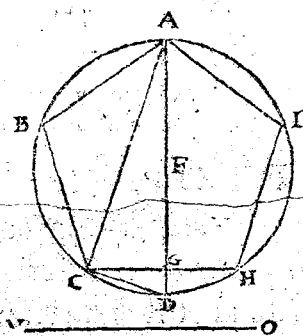
Fin du treziesme Element.

ELEMENT

PROP. II.

Si en vne mesme sphere on inscrit le dodecaëdre & l'icosaëdre, aussi vn mesme cercle contiendra le triangle de l'icosaëdre, & le pentagone du dodecaëdre.

Auparuant que d'expliquer ceste proposition, il conuient demonstrez que le quarré du costé du pentagone avec le quarré de la ligne qui soustient vn angle d'iceluy, est quintuple du quarré du demy diametre du cercle, dás lequel est inscrit iceluy pentagone.



Soit le costé du pentagone inscrit en vn cercle CH, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FD: iedis que les deux quarréz de CA & de CH sont quintuples du quarré de FD.

Car si on meine CD ce sera le costé du decagone: & le quarré de AD, sera quadruple du quarré du demy diametre FD, aussi les deux de AC & CD seront quadruples du quarré de FD: & les trois de AC, CD, & DF, seront quintuples du seul de DF: Mais les deux de CD & DF, costez de l'hexagone & decagone sont egaux au quarré de pentagone CH par la 10. p. 13. partant les deux quarréz de AC & CH sont quintuples du seul quarré de DF.

Pour la proposition. Soit le diametre de la sphere comprenant le dodecaëdre & l'icosaëdre ON, & d'iceluy dodecaëdre soit vn pentagone ABCHI, & de l'icosaëdre soit le triangle equilateral KLM; ie dis que les cercles qui les environnent dans icelle sphere sont egaux, & que ce n'est qu'un mesme cercle.

Car CA sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere par la construction de la 17. p. 13. Soit trouuee la ligne PR egallé au demy diametre du cercle dans lequel on construit l'icosaëdre: Il est euident que le quarré du diametre de la sphere NO sera quintuple du quarré de PQ, côme il a esté móstré à la 16. p. 13. Soit icelle ligne PR couppée en la moyenne & extreme raison, & soit le plus grand segment RQ adiousté à la toure directement, la composée PQ sera aussi diuisée en la moyenne & extreme raison par la 5. p. 13. & PR estant le costé de l'hexagone inscrit au cercle de la construction de l'icosaëdre par la 9. p. 13. RQ sera le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Et d'autant que le quarré de NO est quintuple du quarré de PR comme nous auons dict, & le mesme quarré du diametre NO est triple du quarré de CA costé du cube inscrit

en la meſme ſphere: Trois quarrez de CA, ſerôt egaux à cinq quarrez de PR: Mais parla 7. p. 13. lors que CA eſt diuiſée en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment eſt BA, Item PR diuiſée de meſme ſon plus grand ſegment eſt RQ. Partant trois quarrez de AC ſeront à cinq de RP, comme trois de BA à cinq de RQ: & parla 14. p. 5. Trois quarrez de BA ſeront egaux à cinq de RQ. Or par ce qui a eſté démontré en la 16. p. 13. Le coſté du triangle KL, eſt egal au coſté du pentagone inſcrit dans le cercle, dans lequel PR eſt coſté de l'hexagone: & parla 10. p. 13. Cinq quarrez de MK, ſeront egaux à cinq quarrez de PR & à cinq de RQ: ou à trois de BA & trois de AC: & les deux quarrez de BA & AC eſtans quintuples du quarré du demy diametre FA: (car nous auons demôſtré cela au cômancement de ceſte propoſition) trois quarrez de AB & AC ſeront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA du meſme cercle. Mais cinq quarrez de KM coſté du triangle equilateral, ſont auſſi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle KLM (car chacun quarré de KM eſt triple du quarré du demy diametre parla 12. p. 13.) Et les trois de BA & AC eſtans egaux aux cinq de KM, les quinze du demy diametre FA ſeront egaux aux quinze du demy diametre du cercle KLM: Partant vn quarré d'iceux ſera egal à vn quarré, & le demy diametre au demy diametre: & les cercles ſeront egaux, ce qu'il falloit demonſtrer.

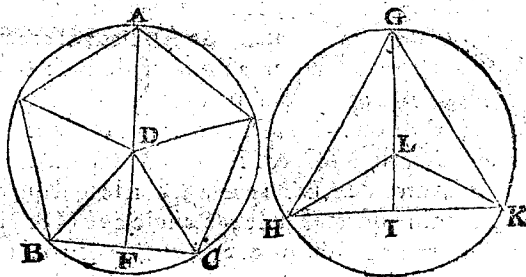
PROP. III.

Si vn pentagone equiangle & equilateral eſt inſcrit en vn cercle, du centre duquel on mene vne ligne perpendiculaire vers le coſté d'iceluy, trente fois le rectangle de la perpendiculaire & du coſté du pentagone, ſont egaux à toute la conuexité du dodecaèdre.

Soit le pentagone equiangle & equilateral inſcrit dans vn cercle ABC, la perpendiculaire du centre vers le coſté BC ſoit DE: Je dis que trente fois le rectangle de DE & BC, eſt egal à la conuexité du dodecaèdre.

Car par la 34. p. 1. il eſt euident que le rectangle de

DE & BC eſt double du triangle BDC, comme auſſi par la 41. p. 1. Or en la conuexité du dodecaèdre il y a douze pentagones egaux, & chaſque

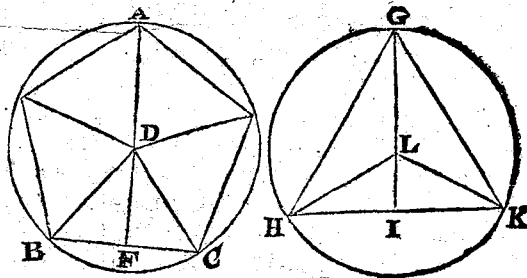


pentagone à cinq pareils triangles que BDC, qui font en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles seroient le double: Donc trente rectangles de DF & BC leur seront egaux.

Semblablement pour l'icosaedre, la conuexité contient vingt triangles equilateraux semblables à GHK, & chacun, d'iceux se diuise en trois egaux

entre eux, & semblables & egaux à HLK, qui font en tout soixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LI & du costé HK est double du triangle HLK par la 34. & 41. p. 1. Et soixante rectangles seroient doubles des soixante triangles: Donc trente rectangles de LI & HK seront egaux à la conuexité totale de l'icosaedre.

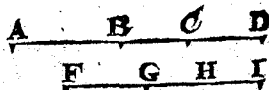
De cecy resulte par la 15. p. 5. que comme vn seul rectangle de DF & BC, à vn seul rectangle de LI & HK, ainsi la conuexité du dodecaedre à la conuexité de l'icosaedre.



PROP. IIII.

Si vne ligne est couppee en la moyenne & extreme raison, les segmens d'icelle, seront proportionaux aux segmens de toute autre ligne couppee de mesme.

Soient les deux lignes AC & FH couppees en la moyenne & extreme raison aux poincts B & G, leurs plus grands segmens AB & FG: ie dis que come AC à FH ainsi AB à FG.



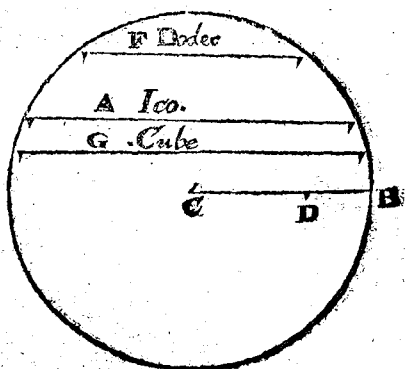
Car par la 17. p. 6. le rectangle de AC & CB comme il sera egal au quarré de AB, ainsi le rectangle de FH & HG sera egal au quarré de FG: & par la 15. p. 5. quatre fois le rectangle de AC & CB sera au quarré de AB, comme quatre fois le rectangle de FH & HG au quarré de FG: & en composant (après auoir adiousté directement CD egale à BC, & HI egale à HG) quatre fois le rectangle de AC & CB avec le quarré de AB (ou par la 8. p. 1. le seul quarré de AD) est au quarré de AB, comme quatre fois le rectangle de FH & HG avec le quarré de FG (ou le seul quarré de FI) est au quarré de FG: & par la 22. p. 6. come AD à AB, ainsi FI à FG. Et en composant comme AD & AB à AB, ainsi FI & GF à FG: mais AD & AB sont double de AC, & FI avec FG double de FH: & par la 15. p. 5. come AD & AB à AB, ainsi FI & FG à FG: & la moitié AC sera à BA, ainsi FH la moitié à FG: & en changeant comme AC à FH, ainsi AB à FG: & le reste au reste BC à GH par la 19. p. 5.

conuexité de l'icosaëdre à la conuexité du dodecaëdre : Partant icelles conuexitez seront aussi l'une à l'autre comme le rectangle de BC & HA, au rectangle de FD & HA : Lesquels estans de mesme hauteur, ils sont l'un à l'autre comme leurs bases BC & FD, par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. La conuexité de l'icosaëdre est à la conuexité du dodecaëdre comme BC costé de l'icosaëdre à FD costé du cube.

PROP. VI.

Si vne ligne est couppée en la moyenne & extreme raison, comme les deux quarrez de la toute & du plus grand segment, sont aux deux quarrez de la toute & du plus petit segment, ainsi le quarré du costé du cube, au quarré du costé de l'icosaëdre.

Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icosaëdre & le pentagone du dodecaëdre, duquel le demy diametre CB, soit couppé en la moyenne & extreme raison en D, le plus grand segment soit CD, lequel sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par la 5. & 9. p. 13. (estant CB costé de l'hexagone :) Item soient prises trois lignes, F costé du dodecaëdre, A costé de l'icosaëdre, G costé du cube : Le disque le quarré de G, est au quarré de A, come les deux quarrez de CB & CD, sont aux deux quarrez de CB & DB.



Car F estant le costé du pentagone, & A costé du triangle, tous deux inscrits dans le cercle donné : lors que G costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison F est son plus grand segment comme il a esté démontré à la 17. p. 13. Donc A estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy diametre CB, par la 12. p. 13. & par la 4. p. 13. les deux quarrez de CB & BD sont triples du quarré de DC : Ainsi le quarré de A, est au quarré de CB, comme les deux quarrez de CB & BD sont au quarré de CD : Et en changeant le quarré de A, sera aux deux quarrez de CB & BD, comme le quarré de CB au quarré de CD. Mais comme le quarré de CB au quarré de CD, ainsi le quarré de G, au quarré de F, par la 4. p. 14. (car F est le plus grand segment de G) & par la 11. p. 5. comme le quarré de A aux quarrez de CB & BD, ainsi le quarré de G, au quarré de F : Et en changeant comme le quarré de A au quarré de G, ainsi les quarrez de CB & BD, sont au quarré de F, costé du

pentagone:lequel par la 10. p. 13. est egal aux deux quarrez de CB & CD costez de l'hexagone & decagone inscrits en vn mesme cercle, & par consequent le quarré de A costé de l'icosaëdre est au quarré de G, costé du cube, comme les deux quarrez de CB & BD, aux deux quarrez de CB & CD. Ce qui aduiendra à quelque ligne que ce soit diuisee en la moyenne, & extreme raison, d'autant que par la 4. p. 14. tous leurs segmens sont proportionaux.

PROP. VII.

Comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre inscrits en vne mesme sphere.

Ceste demonstration est facile à celly qui a bien entendu les precedentes. Car puis que le pentagone du dodecaëdre & le triangle de l'icosaëdre sont inscrits dans vn mesme cercle, iceux triangle & pentagone seront equidistans du centre de la sphere: Partant si on diuise le dodecaëdre & l'icosaëdre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'un que de l'autre solide seront de mesme hauteur: Et parce qu'il a esté mōstré au douzieme liure, elles seront l'une à l'autre comme leurs bases: c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaëdre à vingt pyramides de l'icosaëdre, comme douzes pentagones à vingt triangles: C'est à dire que comme la conuexité du dodecaëdre à la conuexité de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre. Mais par la 4. p. 14. icelles conuexitez sont l'une à l'autre comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre: & par la 11. p. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre.

Fin du quatorziesme Element.



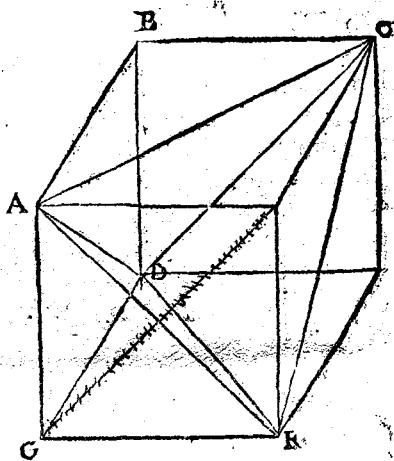
E L E M E N T

QVINZIESME.

PROP. I.

DANS le cube donné, inscrire vne pyramide.

Soit le cube donné GC, dans lequel il faut inscrire vne pyramide: Soient menez les diagonales AF, FC, CA, AD, DF, DC. Toutes lesquelles diagonales sont egalles entre elles: par ce que les six quarez dans lesquelles elles sont menees sont egaux par la deff. du cube: Partant les quatre triangles composez d'icelles ACD, DCF, ADF, ACF, sont equilateraux: Et par la deff. de la pyramide ADCF est pyramide equilaterale inscrite au cube donné.

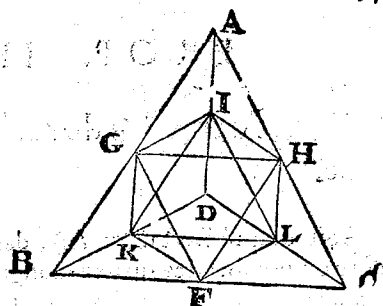


PROP. II.

Dans la pyramide donnée, inscrire vn octaëdre.

Soit

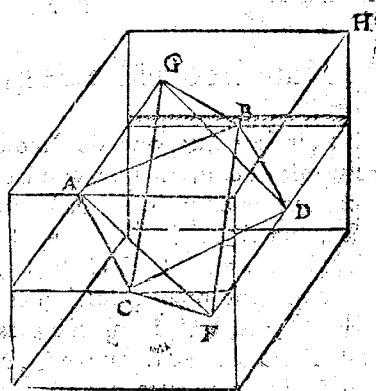
Soit la pyramide donnée ABCD, dans laquelle il faut inscrire vn octaëdre. Soient coupez tous les costez d'icelle pyramide en deux également aux poinçts G, F, H, L, I, K: Et soient menees les lignes GI, IH, HG, GF, FH, GK, KL, LF, LH, KI, IL. Toutes lesquelles lignes sont egalles entre elles par la 4. p. 1. estant toutes les lignes couppees egalles, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et passant le quadrilatre IKFH, à les quatre costez egaux, & les quatre triangles commençant sur iceluy & finissant au point G, IGH, IGK, KGF, FGH, sont tous equilateraux: Item les quatre autres commençans au dessous du quadrilatre & finissans au point L, ILK, ILH, HLF, FLK, sont aussi equilateraux, & par la definition de l'octaëdre la figure comprise entre les deux poinçts G & L, ayans le quadrilatre au milieu est octaëdre inscrit en la pyramide ABCD.



PROP. III.

Dans le cube donné, inscrire vn octaëdre.

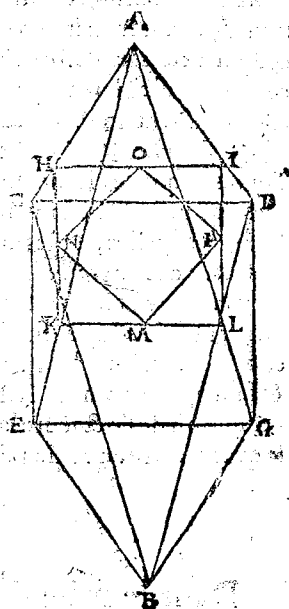
Soit le cube donné KH, dans lequel il faut inscrire vn octaëdre. Soient trouvez les centres des six quarrés d'iceluy cube, & soient les poinçts A, B, C, D, G, F: Item soient menees les quatre lignes AB, BD, DC, CA, lesquelles seront toutes egalles par la 4. p. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Icelles quatre lignes seront aussi vn quarré qui est au milieu de l'octaëdre. Or des quatre angles d'iceluy quarré soient menees les quatres lignes vers le point G, lesquelles comme il a esté dit cy dessus seront toutes egalles AG, BG, DG, CG, & feront les quatre triangles equilateraux AGB, BGD, DGC, CGA. Item des mesmes quatre angles au dessous du quarré vers le centre F, soient aussi menees les lignes qui seront egalles comme dessus AF, BF, DF, CF, faisant icelles quatre autres triangles equilateraux AFC, CFD, DFB, BEA, lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers: Et par la def. de l'octaëdre le solide compris entre les deux poinçts F & G, ayant au milieu le quarré ABCD, sera octaëdre inscrit au cube donné.



PROP. IIII.

Dans l'octaëdre donné, inscrire vn cube.

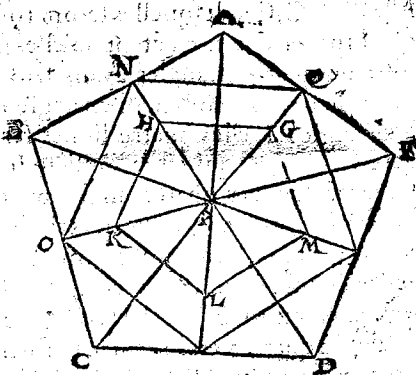
Soit donné l'octaëdre AB, dans lequel il faut inscrire vn cube des quatre triangles qui se terminent au point A, CAD, CAF, FAG, GAD: Soient pris les centres M, N, O, P, & soient menees les lignes MN, NO, OP, PM: Il est euident que MNOP, sera quarré, & si d'iceux quatre centres on mene KH, HI, IL, LK , parallèles chacune à son costé, du quarré du milieu de l'octaëdre CDGF. Aussi est-il aisé à prouuer que LIHK est quarré: Que si semblablement des autres triangles on prend les centres, & par le moyen d'iceux & des lignes parallèles, on descrit des quarréz, on trouuera à la fin le cube inscrit à l'octaëdre donné.



PROP. V.

Dans l'icosaëdre donné, descrire vn dodecaëdre.

Soit le pentagone de l'icosaëdre composé de cinq triangles equilateraux se terminans au point P, ABCDF, & soit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux points H, G, M, L, K, & d'iceux soient menees les lignes HG, GM, ML, LK, KH: Item les lignes PG, PH, PK, continuees iusques à Q, N, O: Il est euident qu'elles coupperont en deux egallement les lignes FA, AB, BC: Et apres auoir mené les lignes NO, NQ, on prouuera aisément par la 4. p. 1. qu'elles sont egalles, & par la 4. p. 6. que comme NQ à NO, ainsi GH à HK, (car tous les triangles sont equilateraux) ainsi on monstrera que les cinq costez du pentagone GHKLM, sont egaux. On prouuera encores aisément que iceluy pentagone est equiangle (estans tous les triangles equilateraux) il se prouuera encores aisément cômme à la 17. p. 13. qu'il est en vn mesme plan. Partant puis



qu'il y a douze angles à l'icosaëdre composez chacun de cinq triangles equilateraux, on pourra comme dessus des centres d'iceux triangles descrire douze pentagones qui feront le dodecaëdre. Nous auons legerement expliqué ces inscriptions de figures n'en estant la cognoissance tant excellente en Geometrie qu'on pourroit bien dire, voirez mesme quel'on se passeroit bien aysement de ce dernier liure.

Fin de l'Element quinziesme & dernier.