EVCLIDIS ELEMENTORVM SEX LIBRI PRIORES

DEMONSTRATI
ab
HENRICO COETSIO

E

I

H

A

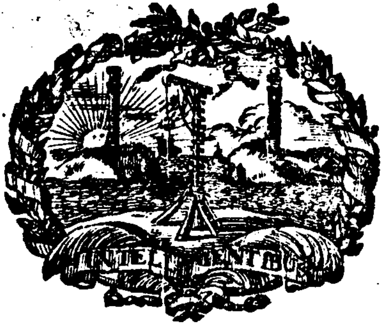
EUCLIDIS ELEMENTORUM SEX LIBRI PRIORES

Magnam partem novis demonstrationibus

ADORNATI

OPERA & STUDIO

HENRICI COETSII.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud DANIELEM à GAESBEEK,
M DC XCII.

PRÆFATIO AD LECTOREM.

Elementa demonſtrare aggredior Euclidis, Illuſtris Mathematici, qui tum propriis inventis, tum ab aliis inventorum, quæ paſſim diſperſa jacebant, collectione & juſta ordinatione Magni adeptus Geometræ nomen, de omni Matheſeos optime meritus eſt ſtudio: id quod abunde teſtatum faciunt tot doctiſſimorum virorum commentarii, quibus hæc Elementa, quorum utilitas paucos latet, per multa celebrata ſunt ſecula.

Admirandæ ſane ſunt Theonum, Proclorum, Commandinorum, Clauiorum, Bettinorum, & aliorum nominis haud obſcuri Mathematicorum lucubrationes, quæ adeo fertiles ſunt ac dilucidæ, ut univerſæ Matheſeos, quantum imo plus quam ſufficit, exinde depromi queant fundamenta. Quare ego, ne actum agere videar & aliorum ſolummodo repetere dicta, quod rem ipſam ſpectat & hujus Opuſculi, quem intendo, ſcopum paucis eloquar. Omnium Mathematicorum, qui in horum Euclidis Elementorum dilucidatione & demonſtratione poſteritati ſuam probare ſategerunt induſtriam, non una eademque obſervatur methodus; aliis quidem veterem & ab Euclide traditum nobia ſervantibus ordinem;

aliis vero non mordicus iſti ordini inhærentibus, ſed veritatum iis comprehenſarum maxime naturalem contemplanribus concatenationem. Ego neglecta poſteriori hac demonſtrandi via, illorum, qui Clariſſimi Geometræ authoritate ducuntur & veneratione, caſtra ſequor; in quorum partes me vel unica hæc trahit ratio, quod illis, qui horum Elementorum notitia jam quodammodo ſunt imbuti, ad ſublimiora Veterum Mathematicorum evolvenda opera faciliorem longe ſuppeditare mihi manuductionem videantur& aditum. Licet ab alterà parte minime ſua laude deſtituendi ſint, qui liberiorem ineuntes viam & rerum ipſarum, quantum fieri poteſt, naturalem ſequentes ductum, proprio ingenio & ratiocinio litare maluerunt quam Veteris jurare in Verba Magiſtri.

In quo laborum genere haud poſtremo loco collocandi ſunt clariſſimus Chriſtophorus Sturmius & Ignatius Gaſton Pardies, quorum alter natione Germanus in ſua Matheſi enucleata, alter ex Galliis ortum ducens in ſuis Elementis Geometriæ, non ſolum Euclidis omnibus, verum etiam præcipuis Apollonii & Archimedis demonſtratis theorematibus, haud exiguam ſibi apud poſteros gratiam conciliabunt & laudem. Cum autem hæc Methodus, ut modo dixi, nos ab Antiquorum de-

demonſtrandi fontibus alienos reddat nimium, præſcriptum Euclidis potius quam alium ſequi placuit ordinem; cui tamen me non ita mancipare in animum induxi meum, ut illum ullo in loco invertere nefas duxerim: Siquidem Benignus comperiet Lector me non raro in demonſtranda aliqua propoſitione ſequentem & nondum demonſtratam vocare in auxilium; quam tamen transpoſitionem haud mediocrem afferre facilitatem non minori cum brevitate conjunctam videbit is, qui inſpicere dignabitur noſtram demonſtrationem ad 5 Libri I propoſitionem, eamque conferre cum Clavio, aut aliis, qui huic Propoſitioni multo plus quam altero tanto longiorem accommodarunt demonſtrationem; cujus prolixitas multorum tyronum vel maximam in diſcendo frangit conſtantiam; præterquam quod ſuæ demonſtrationi immiſceant æqualitatem angulorum infra baſin, cum duo æqualia producta ſint latera: quæ tamen æqualitas iſtius Propoſitionis primarium minime facit ſcopum. Cui malo ab omni parte noſtram demonſtrationem remedium afferre putamus. Nec huic tranſponendi methodo ſcrupulum Mathematicorum figit rigor, qui Paralogiſmos, Principii petitiones & ſic dictos Circulos evitandi ſtudio omnem ſuam vim referens acceptam, priorum per poſteriora haudquaquam admitmittit demonſtrationem. Sic enim noſtris ordinatis demonſtrationibus, ut propoſitiones præcedentes ope ſequentium demonſtratæ, harum demonſtrationi vice verſa non iterum inſerviant, in iſtum ſcopulum impingendi ne minimo quidem laboramus periculo. Cæterum ipſis Demonſtrationibus Methodum Algebraicam applicuimus quodammodo, ita tamen ut a tyrone debitam non reſpuente attentionem facile intelligi poſſint; præſertim ſi paginam, quam ſignorum, quibus utimur, dabimus interpretem & huic præfationi immediate ſubjungemus inſpicere non recuſaverit: quo facto totius plurimarum propoſitionum demonſtrationis

curſum

cursum nullo negotio statim comprehendet.

Problematum quidem constructiones ita disponimus, ut singulæ illorum partes vel primo distinguantur intuitu; Theorematum vero propositionem statim distincta, si quæ desideratur, excipit præparatio, quæ claram ac perspicuam comitem habet demonstrationem, ut sic omnibus & Problematum & Theorematum partibus satisfactum sit abunde. Quid autem porro in singulis Libris, præsertim quinto, præstitum sit, non meum sed æquum Benigni Lectoris esto judicium. Cujus tamen fiduciæ eam non postulo interpretationem, ac si mihi ipsi persuadere velim provectiorum ad alteriora aſpiranti nihil hic deſiderari curioſitati; cum non fercula doctorum palato grata virorum condire, ſed Tyronum Mathematici ſtudii cupidorum vota qualicunque hoc meo implere labore unice habeam in ſcopo; quem ſi mihi aſſequi detur, tum ſub idonea forma editorum, quorum jam diu laboravimus inopia, exemplarium defectum ſupplendo; tum quam plurimas horum Elementorum propoſitiones noxio prolixarum nimis demonſtrationum nudatas involucro, in clariorem, ut ſpero producendo lucem; abunde futurum puto, quod mihi gratuler. Hiſce vale, Benigne Lector, & ſi quid hoc opuſculum contineat proficui, in tuum verte commodum.

EXPLICATIO NOTARUM.

NE Tyronum in demonstrando ardori vel minimam injiciamus moram, datam in Præfatione liberamus fidem, illique notarum ac signorum, quæ demonstrationum brevitati inservire fecimus, significationem subjungimus.

1.

Nota ꝏ *significat æqualitatem; ut A* ꝏ *B, idem est ac si dicam A. est æqualis B.*

2.

Nota $<$ *indicat majoritatem; quare si occurrat* $A < B$, *intellige A est major quam B.*

3.

Signum $>$ *minoritatem exprimit: quare* $A > B$ *significabit A est minor quam B.*

4. *Nota*

4.

Nota $+$ *vel plus significat Additionem; adeoq. A* $+$ *B, idem sit ac A cum B, vel A & B simul; vel* B *ipsi A addendum esse.*

5.

Nota $\div$ *seu minus subtractionem dicit: ut A* $\div$ *B significet A minus B: vel A dempta B: vel B ab A subtrahendum esse.*

6.

Si occurrat alicubi hæc formula.

$$\left.\begin{array}{l} A \infty B. \\ D \infty C. \end{array}\right\rangle A.$$

$$\overline{A + D \infty B + C.}$$

intelligendum est ab una parte A & D debere addi, ut etiam ab altera parte C *addendum esse ipsi B: & tum priorem summam A* $+$ *D esse æqualem posteriori B* $+$ C. *per Axioma scilicet primum.*

7.

Si vero ſeſe offerat talis deſignatio

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} A \propto B. \\ D \propto C. \end{array}\right\rbrace S \\ \hline A \div D \propto B \div C. \end{array}$$

illa ſignificabit ab una parte D ſubtrahi debere ab A, ut & ab altera parte C a B, & tum primum reſiduum A ÷ D poſteriori B ÷ C eſſe æquale.

8.

Eadem formula etiam non raro occurret applicata ſignis < & >. hoc modo.

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} A < B. \\ D \propto C. \end{array}\right\rbrace A. \\ \hline A + D < B + C. \end{array}$$

Vel.

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} A > B. \\ D \propto C. \end{array}\right\rbrace A. \\ \hline A + D > B + C. \end{array}$$

&

& tum intelligendum est post factam additionem summam $A + D$ esse vel majorem in signo $<$ vel minorem in signo $>$ quam summa $B + C$.

Nec aliter si loco) A occurat) S vel S (denotabitur residuum $A \div D$ esse majus in signo $<$ vel minus in signo $>$ quam residuum $B \div C$. idquod ex numero 7 suum ducit fundamentum.

9.

Si in materia proportionum se offerat.

A — B = C / D.

Vel in numeris

4 — 8 = 3 / 6.

denotat quantitatem A sese habere ad B, sicut C se habet ad D: vel numeram 4 *se habere ad numerum* 8, *sicut* 3 *ad* 6: *adeoque ista quatuor esse proportionalia.*

10.

Litera X cum duobus punctis utrinque notata hoc modo ·x· significat multiplicationem: ut si occurrat A ·x· B, designat A per B multiplicandum esse, ut ita fiat rectangulum AB. Eodem modo 4 ·x· 8 significat 4 debere multiplicari per 8: quæ tamen multiplicatio non semper absolvitur, ut clarius pateat ex quanam multiplicatione aliquod productum sit generatum.

11.

Nota □, cujus omnia latera sunt æqualia, significat Quadratum: ut □ AB idem est ac Quadratum AB.

12.

Nota ▭, cujus latera sunt inæqualia, denotat Parallelogrammum Rectangulum, vel simpliciter

ter

ter Rectangulum; ut si occurrat ▭ CD, idem erit ac Rectangulum CD.

13.

Nota √ *significat radicem alicujus quantitatis; ut* √ *AB, denotat ex AB extrahandum esse radicem: similiter* √ 12 *vult, ut ex* 12 *extrahatur radix, quæ non aliter quam per* √ 12 *designatur.*

14.

In demonstrationibus non paucis quædam literæ occurrunt, infra se invicem scriptæ, cum linea intermedia; quod ubique in genere significat inferiora superioribus esse æqualia; ac proinde inferiora in locum superiorum esse substituenda ac usurpanda: quemadmodum hoc in specie etiam notavimus ad demonstrationem Casus 3. *Proposit.* 35. *III. Id quod etiam in propos.* 36. *III. probe notandum.*

Si-

Similiter in Proportionibus hoc observandum est bene, quando una quantitas collocatur supra aliam: tunc inferiorem legendam esse pro superiori, cum supponantur inter se æquales esse: Exemplo sit demonstratio propositionis 3, VI. quæ est pag. 411. quæ sic habet,

$$\text{Tri. Z} - \frac{\text{Tri X}}{\text{seu Y.}} = \text{AE} / \text{BC.}$$

dicendum est Triangulum Z se habet ad Triangulum X hoc est Triangulum Y: sicut basis AE se habet ad basin BC.

15.

Pro citationibus marginalibus notandum primum numerum minorem significare propositionem, secundum vero majorem denotare librum: ut 4. III. quantam propositionem Libri tertii dicit: & sic porro in omnibus aliis.

EU-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

CUm ſcientiæ nomen ſolummodo mereatur illa cognitio, quæ ex certis & indubitatis deducta principiis, omnem vel leviſſimæ dubitationis diſcutit nebulam; Mathematicæ procul dubio diſciplinæ maximo cum jure hoc ſibi vendicant nomen, Cum enim in aliis diſciplinis tam ſæpe de concluſionibus non aliam ob cauſam quam principiorum ambiguitatem contentionis ſerra reciprocetur; Mathematicæ vel ob hoc ſolum illis palmam præripiunt, quod concluſiones offerant, non ex veriſimilibus & aſſenſum emendicantibus, ſed ex ſimpliciſſimis & inconcuſſis deductas principiis. Quid enim certi-

A tu-

tudini & veritatis propagationi magis contrarium, quam in alicujus materiæ pertractatione de varia & nunquam fere sibi simili vocum significatione sæpius repetita disputatio? Quid nos in majorem circa conclusiones dejicit fluctuationem, quam si illas superstruamus assertionibus aut temere assumtis, aut non probatis? quorum unum si contingat a veritate recedentes in turpissimum incidimus errorem; quod si vero alterius semitæ prementes vestigia veritatem assequimur, non firmum nostrum ratiocinium sed casum nos eo deduxisse certo certius existimandum est.

A quo duplici vitio Mathematici sese omnino præstiterunt liberos, tum Definitionum suarum claritate omnem vocabulorum & terminorum, quos in demonstrationum progressu adhibent, ambiguitatem tollendo; tum

tum præmissorum Axiomatum evidentia & naturali certitudine firmissimum demonstrationibus substruendo fundamentum.

Hinc est quod studia Mathematica, ex primis & simplicissimis emergentia principiis ad tam sublime perfectionis fastigium provecta cernere licet. Hinc est quod illæ scientiæ, quæ in suo initio & quasi nativitatis momento humi repere & pulverem lambere videntur, relicta terra per aerem volitantes, ad ipsum Cœlum ascendant, illiusque aliis inaccessa arcana inconcussis calculi sui subjiciant legibus.

Horum autem Principiorum, quibus tota Mathesis ortum, progressum, omnemque qua eminet evidentiam acceptam referre debet, genera sunt tria: Definitiones, Postulata, Axiomata.

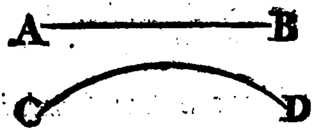
DEFINITIONES.

1. *Punctum est, cujus pars nulla.*

Facile concipimus tale punctum in rerum natura minime dari. Quicquid enim est, ant ad Spiritum refertur aut ad corpus: nemo autem facile sibi persuadebit scientias Mathematicas Spiritum aut rès spirituales & omni materia carentes pro suo subjecto assumere, cum agat de corpore quatenus mensuram & ad alia corpora proportionem aliquam admittit: unde patet omne punctum quantumvis parvum concipiatur, pertinere ad corpus, esse ipsum corpus & æque ac corpus trinam admittere dimensionem, sc. longitudinem latitudinem & profunditatem: licet enim puncta possint occurrere adeo minuta, ut harum dimensionum accurata distinctio vel intensissimam sensuum fallat aciem, longius tamen patentem vim nostrarum cogitationem non effugiunt, cum semper in illis destinguere liceat partem dextram a sinistra, superiorem ab inferiori.

Si vero ab illis punctis in nostra cogigitatione trinam istam dimensionem abstrahamus, eamque licet istis propriam & semper inhærentem, in illis non consideremus, obtinemus puncta Mathematica; quæ ad sensum nostrum relata acutissimæ acus impresso vestigio aliquo modo designari possunt, in quo sensus dubium relinquunt, utrum longitudo latitudinem superet nec ne, an vero latitudo longitudinem excedat: & utrum quælibet ex his profunditate sit major.

2. *Linea vero longitudo latitudinis expers.*



Quemadmodum a parte rei non datur punctum omni prorsus dimensione carens, ita nec datur linea longitudinis tantum capax: quare etiam per abstractionem in linea unam tantum consideramus dimensionem secundum longitudinem, seposita latitudine cum profunditate. Ad cujus considerationis imitationem in communi vitæ usu ulnam re-bus menſurandis ſolummodo applicamus ſecundum longitudinem, reliquis dimenſionibus in latitudinem & profunditatem neglectis.

Cæterum lineæ generationem hoc modo concipere licet. Si conſideremus punctum quoddam in aliquo loco conſtitutum inde moveri incipere; ita ut motus ſui viſibile relinquat veſtigium; illud nobis exhibebit lineam hoc modo generatam.

Quia autem illud punctum ab uno loco ad alium moveri poteſt vel per viam rectam vel per curvam, uti videre eſt in lineis A B. C D, inde oritur lineæ diviſio in Rectam vel Curvam.

3. *Lineæ autem termini ſunt puncta.*

Hoc facile intelligitur ex lineæ jam allata generatione; quod nimirum idem illud punctum quod in principio ſui motus erat in loco A vel C, in fine perveniat ac ſubſiſtat in loco B vel D.

4. *Linea recta eſt, quæ ex æquo ſua interjacet puncta.*

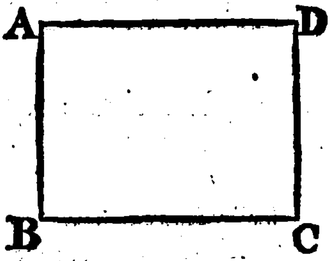
Vel

Vel cujus puncta extrema obumbrant omnia media,

Vel minima earum, quæ a puncto ad punctum duci possunt. Juxta Archimedem.

Ex quibus per definitiones contrarias facile innotescit quænam sit Linea curva.

5. Superficies est quæ longitudinem latitudinemque tantum habet.



Sicut non datur punctum cum nulla, nec linea cum una tantum dimensione, sic etiam a parte rei non datur superficies cum duabus, sc. longitudine & latitudine tantum, seclusa profunditate, quæ idcirco nostro tantum cogitandi modo a reliquis separatur ac in corpore non consideratur, Su-

Superficiei autem generationem hac ratione concipere possumus.

Cogitemus punctum A versus partes inferiores motum descripsisse lineam rectam AB; deinde eandem lineam AB moveri incipere versus partes dextras, donec linea AB perveniat ad locum DC. Patet isto motu punctum A descripsisse lineam AD, & punctum B lineam BC; quemadmodum etiam omnia puncta intermedia lineæ AB suas lineas descripsisse concipiendum est: ut ex tali motu lineæ AB generata sit Superficies ABCD.

6. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

Quod facile innotescit ex illis quæ circa superficiei generationem modo dicta sunt.

Quemadmodum autem antea pro diversa motus via vidimus lineam generari aut Rectam aut curvam; eodem etiam modo per diversum lineæ motum superficies describitur aut Recta seu Plana aut Curva.

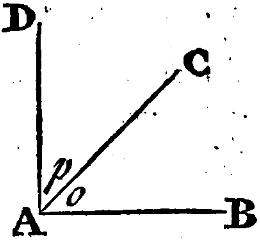
7 Pla-

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet rectas.

Quæ antea de linea recta dicta sunt, similiter hic applicari possunt.

Hinc nullo negotio intelligitur quænam sit superficies curva.

8. *Planus autem angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium & non indirectum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.*



Ad constituendum angulum planum seu angulum in superficie, requiritur.

1. Ut duæ lineæ se mutuo tangant.

2. Ut non jaceant in directum, sed una ad alteram inclinet.

Quemadmodum utramque hanc conditionem cernere licet in angulo CAB, ubi duæ lineæ AC. AB, se invicêm tangentes in puncto A, non jacent in directum, sed ad se mutuo inclinant.

Non autem pauciores nec plures duabus ad angulum planum exiguntur lineæ.

Non pauciores, quia si unica ista linea dividatur in duas, duæ illæ sibi jacebunt in directum; id quod repugnat secundæ conditioni.

Non plures, quia ex: gr: tertia AD, si cum reliquis in eodem sit plano, non unum sed duos faciet angulos DAC. CAB: si vero sit extra planum reliquarum linearum, non angulum faciet planum, sed solidum, cujus Definitionem Euclides libro XI. tradit.

Quia jam natura anguli plani consistit in duarum linearum ad se invicem inclinatione, patet anguli alicujus quantitatem non consistere in majori vel minori longitudine linearum: sed tantum in illarum majori vel minori inclinatione; duæ enim lineæ majores eandem possunt habere inclinationem cum duabus minori-

bus,

bus, minime mutata anguli quantitate.

Deinde notandum Geometras ad designandum aliquem angulum tres adhibere literas, quarum media punctum denotat ad quod lineæ angulum continentes concurrunt. Ut ad denominandum angulum qui ad punctum A, constituitur à duabus lineis AC. AB. scribitur angulus CAB: vel ab altera parte angulus DAC est qui in puncto A fit à lineis AD. AC.

Nos autem brevitatis & perspicuitatis gratia in sequentibus non semel loco trium literarum angulo designando adhibemus unam ipsi inscriptam.

Ut ad nominandum angulum DAC. efferemus angulum P. sic etiam loco anguli CAB scribemus angulum O.

9. *Cum autem continentes angulum lineæ fuerint rectæ, rectilineus appellatur angulus.*

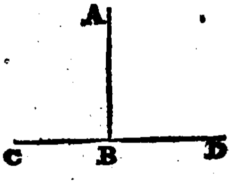
Accedit Euclides ad anguli divisionem. Supra vidimus linearum duo esse genera, scilicet illas esse vel rectas, vel curvas.

Quia autem illæ tribus diversis modis possunt conjungi, sc: vel recta cum recta: vel recta cum curva; vel curva cum curva; hinc etiam tria oriuntur angulorum genera.

Primus quippe casus suppeditat angulum rectilineum, cujus Definitionem hic tradit Euclides.

Secundus casus nobis dat angulum mixtilineum, cujus mentionem factam videmus in Libro III. Tertius denique casus constituit angulum curvilineum.

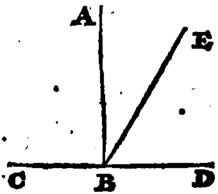
10. *Cum vero recta AB rectæ CD insistens duos Angulos ABC. ABD æquales inter se facit; Rectus est uterque æqualium angulorum: & insistens recta AB vocatur Perpendicularis lineæ CD. cui insistit.*



Anguli ABC. ABD dicuntur recti, quia linea AB, ipsi CD ita directo situ in-

insistit, ut ab una parte non magis inclinet versus BC quam ab altera parte versus BD;

11. *Obtusus angulus EBC est, qui recto ABC major est.*



12. *Acutus vero EBD, qui recto ABD minor est.*

In tribus hisce definitionibus Euclides tradit anguli rectilinei subdivisionem petitam a triplici linearum inclinationis forma: quæ ab utraque parte vel est æqualis; vel ab una parte major altera; vel ab una parte minor altera: ut in Schemate videre est.

13. *Terminus est quod alicujus est extremum.*

Ut punctum lineæ: linea superficiei: superficies corporis.

14. *Figura plana est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.*

Cum lineæ sint vel rectæ vel curvæ, illæque tribus modis possint conjungi; figurarum planarum inde oriuntur tres species.

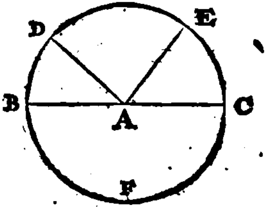
Curvilineæ, quæ vel una vel pluribus curvîs terminantur. Una terminatur circulus, cujus definitionem statim tradit Euclides.

Mixtilineæ, quæ partim curvis partim rectis terminantur: huc pertinent semicirculus & segmentum Circuli.

Rectilineæ quæ solis rectis terminantur, quæ comprehendunt omnia polygona sive regularia sive irregularia.

15. *Circulus est figura plana sub una linea curva DCF comprehensa, quæ vocatur Peripheria: ad quam ab uno puncto A eorum quæ intra figuram sunt posita,*

ta, omnes cadentes rectæ AB. AD. AE. AC inter se æquales sunt.



Proponit Euclides definitionem Circuli jam descripti, cujus delineationem & generationem hoc modo concipere possumus. Ducta sit quælibet recta linea AB. cujus una extremitas A ponatur immota & affixa plano; altera vero extremitas B cum tota linea moveatur circa punctum A, per loca AD. AE. AC. AF, donec tandem redeat ad locum AB, unde moveri cœperat: ista linea AB hâc circumductione describet circulum BDECF.

Ex qua descriptionis forma patet omnes Radios cujuslibet Circuli esse inter se æquales: cum linea AB, cujus circumvolutio circulo ortum dedit, per omnia

omnia loca, AD. AE. AC & ſimilia tranſiit, adeoque punctum B fuit aliquando in punctis D. E. C. &c. adeoque lineæ AD. AE AC. ſunt æquales eidem lineæ AB.

Hinc jam etiam immediate ſequitur omnia puncta circumferentiæ DCFB æqualiter diſtare a puncto A.

16. *Illud autem punctum A centrum circuli dicitur.*

17. *Diameter Circuli eſt recta quædam BC per Centrum A ducta, & utrinque in punctis B.C. peripheriâ terminata; quæ & Circulum biſariam ſecat.*

Ut linea in Circulo ducta ſit Diameter duæ requiruntur conditiones.

I. Ut tranſeat per centrum.

II. Ut ab utraque parte terminetur in peripheria.

Adeoque omnis linea, harum nullam aut tantum unam habens conditionum, Diameter dici nullo modo poteſt.

Cæterum Diametrum circulum divide-

re

re bifariam patet ex eo quod transeat per Circuli punctum, quod ex omnibus medium est: quia scilicet est medium omnium Diametrorum quæ in Circulo duci possunt.

Sequitur jam secunda species figurarum, nempe mixtilineæ.

18. *Semicirculus autem BDECAB est figura, quæ continetur sub Diametro BC, & dimidia circumferentia BDEC.*

19. *Segmentum circuli est figura quæ continetur sub qualibet recta circulo inscripta & abscissa peripheria.*

Segmentum, excluso semicirculo, est duplex, vel majus Semicirculo, vel minus.

Segmentum majus est illud in quo reperitur centrum.

Segmentum minus est illud quod centrum non continet.

Nunc Euclides aggreditur tertiam speciem figurarum sc: rectilinearum.

20. *Rectilineæ figuræ sunt quæ sub rectis lineis continentur.*

Distinguuntur autem rursus hæ figuræ rectilineæ in tres species; vel enim sunt Trilateræ; vel Quadrilateræ; vel Multilateræ.

21. *Trilateræ quidem figuræ sunt, quæ sub tribus.*

22. *Quadrilateræ vero quæ sub quatuor.*

23. *Multilateræ denique quæ sub pluribus quam quatuor rectis comprehenduntur.*

Generali vocabulo hæ dicuntur Multilateræ ad infinitam nominum evitandam multitudinem.

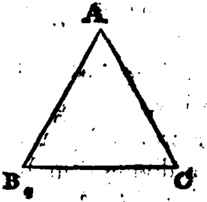
Jam cum figurarum rectilinearum primam speciem constituant figuræ Trilateræ, seu vulgo sic dicta Triangula, illorum divisionem proponit Euclides, petitam ex consideratione tum laterum, tum angulorum, quorum numerus (ut & in omnibus figuris rectilineis) est

æqua-

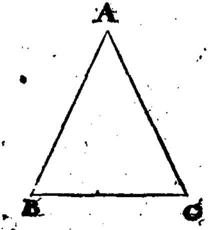
æqualis: quippe triangulum tot continet angulos quot latera.

Triangulum respectu laterum est triplex; Æquilaterum, Isosceles, & Scalenum.

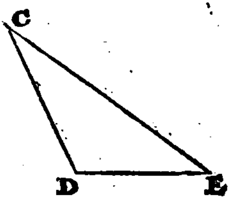
24. *Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia.*



25. *Isosceles autem, quod duo tantum habet æqualia AB. AC.*

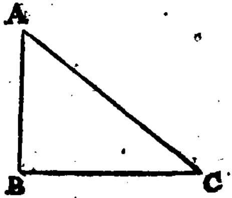


26. Scalenum denique quod tria inæqualia habet latera.



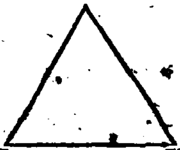
Secunda Triangulorum divisio pro fundamento habet tres angulorum species; sc: rectum, obtusum & acutum; hinc enim Triangulum dividitur in Rectangulum, Obtusangulum, & Acutangulum.

27. Triangulum rectangulum est, quod unum habet angulum rectum ABC.



28. *Obtusangulum est, quod unum habet angulum CDE obtusum id est majorem recto.*

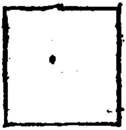
29. *Acutangulum denique quod tres angulos F. G. H. habet acutos, hoc est, minores recto.*



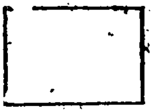
G H

Sequitur jam secunda species figurarum rectilinearum: scilicet Figuræ Quadrilateræ, Hæ autem ab Euclide recensentur quinque: Quadratum: Figura altera parte longior; Rhombus; Rhomboides; & Trapezia.

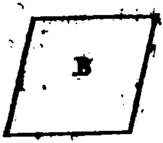
30. *Quadratum est, quod æquilaterum est & rectangulum.*



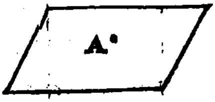
31. *Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.*



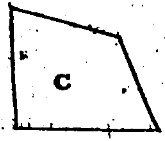
32. *Rhombus autem, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.*



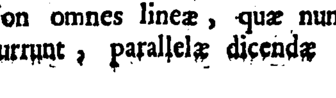
33. *Rhomboides est, quæ adversa & latera & angulos æqualia inter se habens, neque æquilatera est, neque rectangula.*



34. Trapezia denique dicuntur reliquæ figuræ quadrilateræ, quæ ad nullam ex quatuor præcedentibus referri possint.



35. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes AB. CD sunt, quæ in eodem plano existentes, & utrimque in infinitum productæ, ad eandem distantiam a se invicem manent remotæ; ideoque nunquam concurrent.

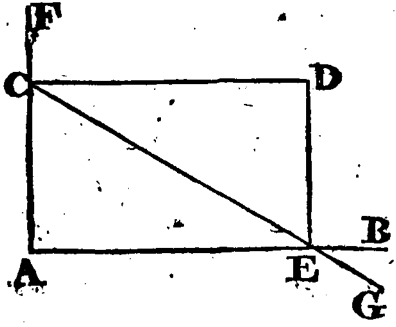


Non omnes lineæ, quæ nunquam concurrunt, parallelæ dicendæ sunt; cum

cum dentur lineæ, quæ licet ſimul in infinitum producantur, ita ut ad ſe mutuo in infinitum magis ac magis accedant, nunquam tamen concurrent; ut Hyperbola & recta linea; Conchois & recta linea; Duæ æquales Parabolæ circa eandem Diametrum: quæ idcirco nequaquam dicendæ ſunt parallelæ.

Unde facile manifeſtum evadit ad naturam paralleliſmi neceſſario requiri æqualem ab omni parte diſtantiam: quam conditionem ab Euclide omiſſam nos cum celeberrimo Tacqueto adjecimus.

Cæterum linearum parallelarum, quas Euclides ut jam deſcriptas conſiderat, generationem & delineationem duobus modis concipere poſſumus.

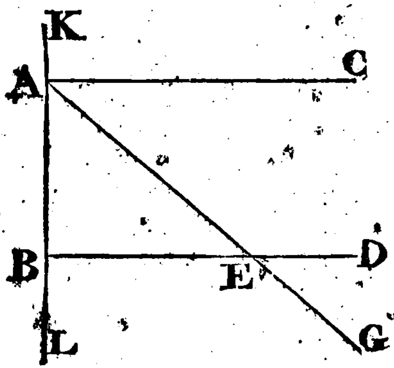


PRI-

PRIMUS MODUS.

Ponamus lineam CA perpendiculariter insistere lineæ AB, ut angulus CAB sit rectus; deinde cogitemus lineam CA una suâ extremitate moveri super lineam AB, ut semper ipsi maneat perpendicularis; si jam linea CA hoc suo motu pervenerit in DE, punctum C descriptam relinquet lineam CD, quæ nunquam potest magis recedere a linea AB, nec ad ipsam propius accedere, cum linea AC durante suo motu semper fuerit eadem & sibi æqualis: adeoque linea CD in omnibus suis punctis manet cum AB in eadem distantia, & si iste motus lineæ CA in infinitum duraret, etiam linea CD in infinitum ab AB distaret, adeoque nunquam cum illa concurreret: unde jam certo concludere licet lineam CD hoc modo generatam lineæ AB esse parallelam.

Deinde cum jam constet lineam CD non posse magis in uno puncto ad lineam AB accedere aut ab illa recedere quam in alio, sequitur lineam CD ad lineas CF, CA habere æqualem inclinationem, adeoque per definitionem Perpendicularis angulum DCA esse rectum, & æqualem angulo CAB qui positus est rectus; adeoque duos angulos interiores ACD. CAB simul sumtos esse æquales duobus rectis. Id quod natura parallelarum AB. CD hac ratione descriptarum omnino requirit.



SECUNDUS MODUS.

Ad lineæ KL punctum A concipiatur facta linea AC perpendicularis, quæ licet in infinitum producatur, nunquam inclinationem quam ad AK, AL habet (illa autem utrimque æqualis est) mutabit.

cum

cum anguli quantitas non in majori vel minori linearum longitudine, sed in majori vel minori inclinatione consistat.

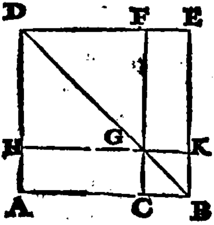
Deinde ex alio quovis puncto B cogitemus duci lineam perpendicularem BD, quæ etiam licet infinite protrahatur, nunquam aliam acquiret inclinationem ab illa quam jam habet ad lineas BK, BL.

Cum jam linea AC in infinitum producta non possit ascendere versus superiora nec descendere versus inferiora: similiter linea BD etiam in infinitum continuata nec altiora nec demissiora petere possit, necessario sequitur istas lineas AC. BD semper servaturas eandem a se invicem distantiam nec concurrere posse unquam; adeoque juxta hanc definitionem illas esse parallelas.

36. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia.*

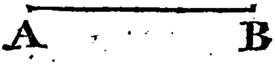
37. *Cum vero in parallelogrammo Diameter BD ducta fuerit, duæque rectæ CF. HK lateribus parallelæ secantes Diametrum in uno*

no eodemque puncto G, ita ut parallelogrammum distributum sit in quatuor parallelogramma; illa per quæ Diameter non transit, scil: AG. GE. appellantur complementa eorum quæ circa Diametrum consistunt, ut HF. CK.

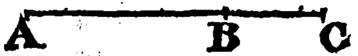


POSTULATA.

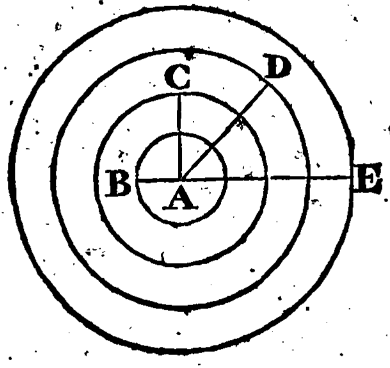
1. *Postuletur a quovis puncto A ad quodvis punctum B rectam lineam AB ducere.*



2. *Et terminatam rectam AB in continuum recta producere in C.*



3. *Et quovis centro A & quolibet radio AB. AC. AD. AE. circulum describere.*



AXIOMATA.

1. *Quæ sunt eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.*

2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.*

3. *Si ab æqualibus æqualia demantur, residua manebunt æqualia.*

4. *Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.*

5. *Si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia,*

6. *Et quæ ejusdem sunt duplicia, inter se sunt æqualia.*

Idem intelligendum de triplicibus, quadruplicibus, quintupliicibus & sic in infinitum.

7. Et

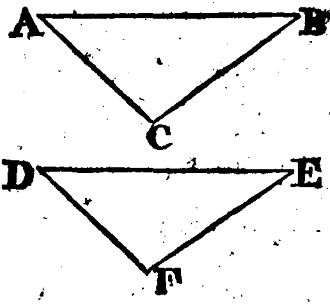
7. Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia.

Nec hoc axioma se tantum restringit ad partes dimidias; sed etiam in tertiis, quartis, in quintis & sic porro in infinitum suam habet veritatem.

8. Quæ congruunt sibi mutuo, inter se sunt æqualia.

Si primo concipiamus lineam DE superimponi lineæ AB, ita ut puncta extrema D. A. ut & E. B. coincidant; similiter omnia puncta intermedia lineæ DE correspondeant omnibus mediis punctis lineæ AB, pro certo hinc asserere possumus lineam DE esse æqualem lineæ AB: quia omnes partes lineæ DE examussim conveniunt cum omnibus partibus lineæ AB.

Deinde



Deinde sub qualibet inclinatione ad lineæ AB punctum A ducatur linea AC: si jam ad lineæ DE punctum D ducatur linea DF, ita ut inclinatio lineæ DF ad lineam DE, sit æqualis vel similis inclinationi lineæ AC ad lineam AB: & linea DF sit æqualis lineæ AC: & tum angulus FDE superimponatur angulo CAB, omnia correspondebunt: scilicet linea DE cum AB, inclinatio cum inclinatione, & linea DF cum AC. Adeoque jam non tantum lineæ congruunt sed & anguli.

Si denique ducatur recta CB, ut & FE, & una figura DEF imponatur alteri ABC: jam etiam tertium latus FE congruet cum tertio latere CB; adeoque

que totum triangulum DEF congruet triangulo ABC: unde necessario sequitur unum alteri esse æquale.

9. *Totum sua parte majus est.*

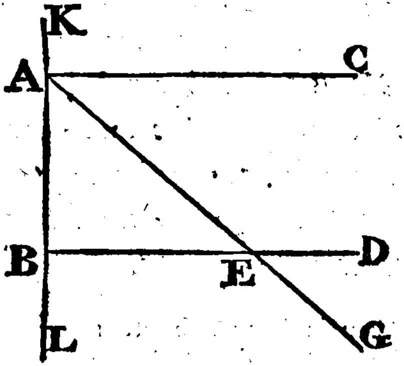
10. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.*

11. *Si in duas rectas AG. BD recta AB incidens interiores & ad easdem partes angulos ABD, BAG duobus rectis minores faciat; productæ duæ illæ rectæ tandem coincident inter se ad eas partes, ubi sunt isti anguli duobus rectis minores.*

Cum in hoc Axiomate mentionem faciat Euclides duarum linearum coincidentiæ, & duorum interiorum angulorum, facili negotio patet illud aliquo modo respectum habere ad Definitionem linearum parallelarum superius traditam: cumque in ista definitione nec tertia linea

nea incidens, nec duo anguli interiores occurrant, fatendum ingenue erit, hujus Axiomatis lucem in primo intuitu non apparere tantam, quanta in præcedentibus ſtatim affulſit; imo quanta etiam in omnibus communibus ſententiis requiritur.

Quod ſi vero in memoriam revocemus ſupra allatos modos generationis parallelarum, putamus inde huic Axiomati multum affundi poſſe claritatis. Sumanus Ex: Gt: ſecundum.



Ibi quippe vidimus lineas parallelas AC: BD ex ſua natura & generationis modo requirere ut duo anguli CAB. DBA ſint recti, hoc eſt iſtius paralleliſmi non aliud eſſe fundamentum quam cum angulus unus ABD

ABD sit rectus; (quod semper supponimus) ut alter BAC etiam sit rectus: adeoque ut linea AB perpendiculariter in lineam AC cadens etiam sit perpendicularis ad alteram BD.

Si jam ex puncto A infra lineam AC ducatur alia quælibet ut AE; ita ut angulus BAE, sit minor recto: illa necessario si producatur magis ac magis debet recedere ab AC: quia alias deberet aut esse parallela ipsi AC, aut iterum in alio puncto cum ipsa concurrere: non prius, quia habet punctum A commune adeoque in illo concidunt; non posterius quia tum duæ rectæ spatium comprehenderent, quod repugnat Axiomi sequenti.

Cum manifestum nunc sit lineam AE magis ac magis recedere ab AC, etiam patet illud non posse fieri nisi illa magis ac magis appropinquet ad alteram parallelam BD; quod tamen in infinitum absque concursu fieri minime possibile est; si enim unius lineæ punctum A ab alterius lineæ puncto E ad quamlibet distantiam remotum esse concipiamus; & a puncto A versus E ducere incipiamus lineam aliquam brevem; illa si producatur, adeoque ab AC magis ac magis recedat,

 ne-

necessario ad punctum E magis ac magis accedet, donec tandem porro producta per illud punctum E transeat.

Si enim impossibile sit ut per E transeat, e duobus unum verum est; aut a puncto A. ad E. non posse duci lineam rectam, quod repugnat postulato primo: aut lineam AE, si quam proxime ad punctum E pervenerit, aliorsum se determinare adeoque se flectere; quod non potest esse nisi ex recta fiat curva: quod tum est contra Hypothesin.

Duæ tamen adhuc discutiendæ restant difficultates, quæ linearum AE. BD necessarium vacillare faciant concursum.

Prima est, quod Hyperbola & recta, Conchois & recta, duæ Parabolæ æquales circa eandem diametrum, simul in infinitum productæ nunquam concurrant.

Quæ tamen difficultas evanescit si consideremus illas lineas esse extra genus linearum, de quibus agit Euclides in hoc Axiomate; expresse enim tantum loquitur de lineis rectis; cum Assymptoti sint (saltem altera) ex lineis mixtis.

Altera difficultas oritur ex Clarissimi Bettini duabus rectis (in Apiar. 3. & Ærario Tom. I. pag. 354.) quæ licet internos

ternos angulos duobus rectis minores efficiant; si producantur tamen nunquam coincidant.

Sed nec hoc nostri Axiomatis evidentiam & veritatem labefactare potest. Cum istæ lineæ non simpliciter seu tanquam a puncto ad punctum, sed cum certa quadam conditione, scilicet adjuncta proportione producantur. Quæ proportionalis linearum productio hic nullum omnino habet locum.

12. *Duæ rectæ spatium non comprehendunt.*

13. *Omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

Quoniam majoris perspicuitatis gratia Mathematicis in more positum est, ut veritates quas demonstrandas suscipiunt, distinctis a se invicem complectantur propositionibus; notandum est hasce propositiones dividi in Problemata & Theoremata,

Problema est propositio in qua aliquid

proponitur efficiendum, & conclusionis formula semper talis est: Quod erat faciendum.

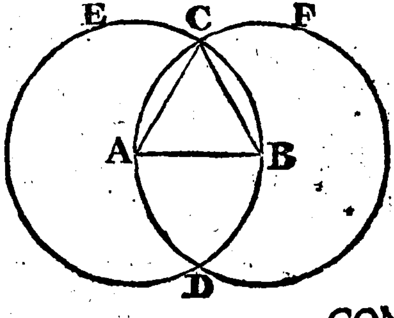
Theorema est propositio in qua proprietas quædam aut veritas de aliqua re jam facta & in figura jam constructa, proponitur demonstranda: & conclusionis formula semper est. Quod erat demonstrandum.

Corollarium est consectarium quod ex facta jam demonstratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma est demonstratio præmissæ alicujus, ut quæsiti demonstratio clarior evadat & brevior.

PROPOSITIO. I.

Probl. I. *Super data recta terminata AB triangulum æqualaterum constituere.*



CON-

CONSTRUCTIO.

I. Centro A radio AB, [a] describe circulum BCE. a Post. 3.

II. Centro B, eodem radio BA, [a] describe circulum ACF.

3. Ex puncto intersectionis C [b] duc rectas CA. CB. b Post. 1.

Dico triangulum ABC esse æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} AB \infty AC. \\ BA \infty BC. \end{array}\right\} c$$ c Def. 15.

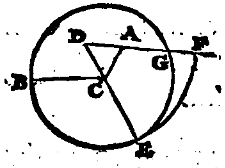
Ergo AC ∞ BC. d d Ax. 1.

Adeoque triangulum ABC est [e] æquilaterum. Quod erat faciendum. e Def. 24.

Pro-

PROPOSITIO. II.

Prob. 2. *Ad datum punctum A datæ rectæ BC æqualem rectam AF ponere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur a C ad A recta [a] CA.

a Post. 1.

2. Super CA [b] fiat triangulum æquilaterum. CDA.

b 1. I.

3. Centro C, radio CB describe [c] circulum.

c Post. 3.

4. Latus DC [d] produc usque ad Circumferentiam in E.

d Post. 2.

5. Centro D radio DE [e] describe arcum circuli EF.

e Post. 3.

6. De-

6. Denique latus DA f pro- ducusque ad istum arcum in F. f Post. 2.

Dico lineam AF esse æqualem datæ BC.

DEMONSTRATIO.

$$S \begin{cases} DF \propto DE. \ g. \\ DA \propto DC. \ h. \end{cases}$$

g Def. 15

h Def. 24.

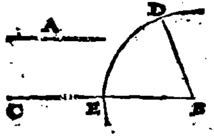
AF ∞ CE. i. — i Ax. 2.

Atqui BC ∞ CE. k. — k Def. 15.

Ergo AF ∞ BC. l. Q. E. F. — l Ax. 1.

Probl. 3. **PROPOSITIO. III.**

Datis duabus rectis inæqualibus A & BC; de majori BC minori A æqualem rectam BE detrahere.



CONSTUCTIO.

1. Ad lineæ CB extremitatem
a 2. 1. B, ſub quolibet angulo [a] pono rectam BD æqualem minori A.
b Poſt. 3. 2. Centro B, radio BD [b] deſcribo arcum circuli, ſecantem rectam CB in E.

Dico lineam BE eſſe æqualem ipſi A.

De-

DEMONSTRATIO.

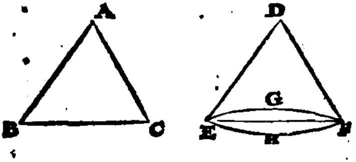
BE ꝏ BD c.	c Quia sunt radii ejusdem circuli.
Atqui A ꝏ BD d.	d Per constructionem.

c Def. 15.

Ergo BE ꝏ A. d. Q. E. F. d Ax. 1.

PROPOSITIO. IV.

Theor. I. *Si in triangulis ABC. DEF, unum latus AB, uni DE: & alterum AC alteri DF ſit æquale; ut & anguli A. D iſtis lateribus contenti ſint æquales: Erit quoque baſis BC æqualis EF, angulus B angulo E: ut & C ipſi F; Et triangulum ABC æquale triangulo DEF.*



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum DEF ſuperimponi triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in in B, & latus ED super BA; quando punctum D præcise cadet in A, quia latera AB & DE dantur æqualia. a

Deinde latus DF cadet super AC, quia anguli BAC. EDF ponuntur æquales. a

Denique punctum F necessario cadet in C, quia latera AC. DF sunt æqualia. a

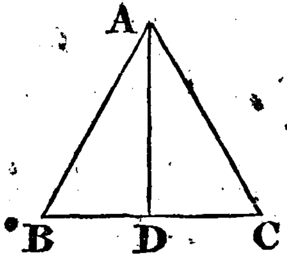
a Ax. 8.

Ergo punctum E idem erit cum B; & F cum C. Ergo linea EF congruet cum AC, adeoque ipsi erit æqualis: & omnes anguli congruent, ut & tota triangula: quare illa sunt æqualia. a

Q. E. D.

PROPOSITIO V.

Theor. 2. *Isoscelis Trianguli ABC qui ad basin sunt anguli ABC. ACB inter se sunt æquales.*



PRÆPARATIO.

Per prop: 9 sequentem (quæ ab hac non dependet) angulum BAC divide bifariam recta linea AD.

D E-

DEMONSTATIO.

In Triangulis ADB. ADC.

Latus AB ∞ AC. per ipsum triangulum.

Latus AD, utrique commune adeoque sibi ipsi æquale.

Angulus BAD ∞ CAD per constructionem.

Ergo angulus ABD ∞ ACD. a Q. E. D.　　a 4. I.

COROLLARIUM I.

Omne triangulum æquilaterum est æquiangulum.

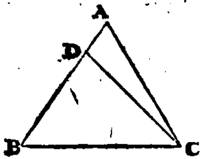
COROLLARIUM II.

Si in triangulo Isoscele vel æquilatero, ABC, linea AD bisecet angulum A, illa etiam oppositum latus BC bifariam dividet; ut & ipsi BC perpendicularis erit.

PRO-

Theor. 3.

PROPOSITIO. VI.



Si trianguli ABC, duo anguli ABC. ACB. inter se æquales fuerint; latera æqualibus angulis opposita AB. AC. etiam inter se erunt æqualia.

DEMONSTRATIO.

Aut est AB $<$ AC.
Aut est AB $>$ AC.
Aut est AB $\propto$ AC.

Ponatur AB $<$ AC.

Abscindatur DB $\propto$ AC, tum ducta DC. erit in $\triangle$ lis DBC. ACB.

Latus DB $\propto$ AC. per construct:
BC $\propto$ BC. seu commune.

a 4. 1. Angulus DBC $\propto$ ACB.

Ergo erit [a] $\triangle$ lum DBC $\propto$ $\triangle$ lo ACB, sc: pars & totum. Quod est absurdum; adeoque non potest esse AB $<$ AC.

Po-

Ponatur deinde AB $>$ AC.

Nec hoc posse esse eodem modo probatur ab AC abſcindendo partem æqualem lateri AB.

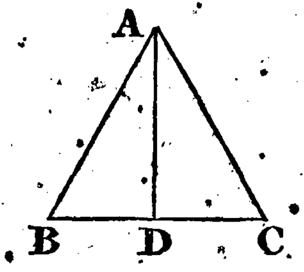
Adeoque cum nequeat esse AB $<$ AC.

Nec AB $>$ AC.

Neceſſario erit AB ∞ AC.

SCHOLIUM.

Non mius forſan quibuſdam arridebit demonſtratio quam inverſo parumper propoſitionum ordine hoc modo proponemus.



PRÆPARATIO.

Angulum *BAC*, ut ante divide bifariam recta *AD*.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADB. ADC.
Latus AD utrique commune sibi ipsi est æquale.
Angulus B ꝏ C, per propositionem.
Angulus BAD ꝏ CAD per constructionem.

Ergo

Ergo per 26 sequentem (quæ ab hac non dependet) Latus *AB* ∞ AC. Q. E. D.

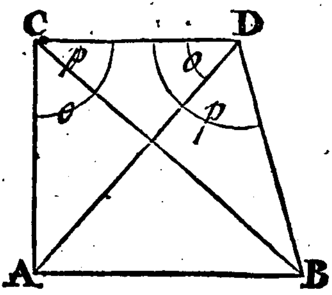
COROLLARIUM.

Omne Triangulum æquiangulum est æquilaterum.

PROPOSITIO. VII.

Theor. 4.

Si a lineæ AB extremitatibus A. B. ad datum aliquod punctum C ductæ fuerint duæ lineæ AC. BC. extra illud punctum C nullum datur aliud punctum, ad quod ab A & B duæ lineæ possint duci, quæ jam ductis lineis AC. BC sint æquales.



De-

DEMONSTRATIO.

Si tale punctum contendat Adversarius dari posse: dabitur vel extra vel intra triangulum ABC: vel in alterutro laterum.

Ponatur extra triangulum in D. Ductâ CD. erit in triangulo ACD

Latus AC ∞ AD. juxta Adversarium.

Ergo angulus ACD ∞ [a] ADC; qui eadem litera O insigniantur. [a] 5. 1.

Deinde in triangulo BCD.
Latus BC ∞ BD. iterum juxta Adv.

Ergo angulus BCD ∞ [a] BDC qui eadem litera P notentur.

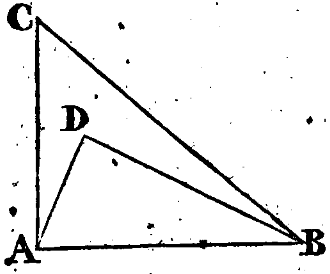
Jam angulus O, a parte sinistra est major angulo P, a dextra vero minor; quod est absurdum.

At-

Atqui eadem demonstratio obtinet in omnibus punctis extra triangulum.

Ergo nullum omnino extra triangulum datur tale punctum.

Ponatur intra triangulum in D.



A { Latus AC ꝏ AD } juxta Adversarium.
Latus BC ꝏ BD.

Ergo AC + CB ꝏ AD + DB, contra sequentem propos. 21. quæ ab hac non dependet.

Cum jam eadem demonstrationis

tionis forma applicari possit omnibus punctis intra triangulum ABC.

Sequitur nullum tale punctum intra illud dari.

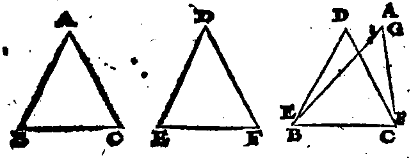
Ponatur in alterutro laterum AC. BC.

Nec ibi illud punctum potest inveniri, quia tum pars foret, æqualis suo toti contra AX. 9.

Ergo universim concludimus extra punctum C nullum omnino aliud dari posse; ad quod duæ lineæ æquales ipsis AC. BC duci queant. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 5. *Si duo triangula ABC. DEF duo latera AB. AC. duobus lateribus DE. DF. æqualia habeant, alterum alteri: ut & basin BC æqualem basi EF. Illa etiam angulum A angulo D æqualem habebunt, sub æqualibus rectis contentum.*



DEMONSTRATIO.

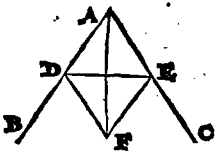
Triangulum ABC superponatur ipsi DEF, ita ut basis BC congruat basi EF, tum pun-

punctum A cadet in D. & latera AB. AC congruent lateribus DE. EF. item angulus BAC congruet angulo EDF. Ergo [a] erunt anguli æquales. [a] Ax. 8.

Quod si vero Adversarius contendat punctum A cadere extra D; tum sequeretur extra punctum D, dari aliud punctum, ad quod ab extremitatibus E. F. lineæ duæ possent duci quæ ipsis ED. FD jam ductis essent æquales: quod est absurdum. [b] [b] 7. I.

PROPOSITIO IX.

Prob. 4. *Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.*



CONSTRUCTIO.

1. Ex lateribus *AB*, *AC* abſcinde
a 3.1. [a] partes æquales *AD*. *AE*.
b 1.1. 2. Super ducta *DE* conſtitue [b] triangulum æquilaterum *DEF*.
3 Duc rectam *AF*.

Dico illam bifariam dividere angulum *BAC*.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis *ADF AEF*.

Latus *AD* ꝏ *AE* ⎫ per conſtructionem:
Latus *DF* ꝏ *EF* ⎭
Latus *AF* ꝏ *AF*, quia utrique commune.

---

c 8.1. Ergo angulus *DAF* ꝏ [c] *EAF*. Q. E. F

CO-

COROLLARIUM.

Hinc patet methodus datum angulum secandi in æquales angulos 4. 8. 16. etc. singulas nimirum partes iterum bifariam dividendo.

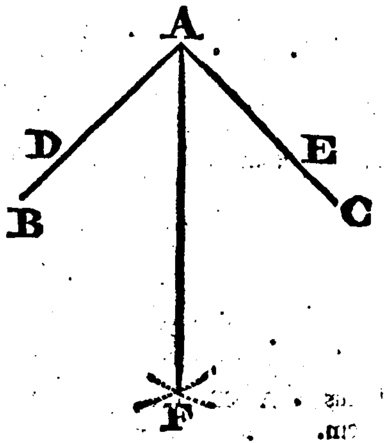
SCHOLIUM.

Potest autem propositionis constructio hoc modò in compendium redigi.

I. *In lateribus* AB. AC. *sume æquales* AD. AE.

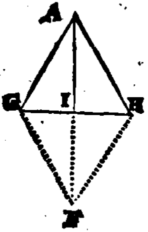
II. *Centris* D *&* E, *quolibetumque radio describe duos arcus se intersecantes in* F.

Quo facto recta AF *angulum* BAC *bisecabit.*



PROPOSITIO X.

Probl. 5. *Datam rectam terminatam GH bifariam secare.*



CONSTRUCTIO.

a 1.1. 1. Super data GH constitue [a] triangulum æquilaterum GAH.

b 9.1. 2. Angulum A divide bifariam [b] recta AF.

Dico illam lineam GH dividere bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AIG. AIH.

Latus GA ꝏ HA. per constructionem.

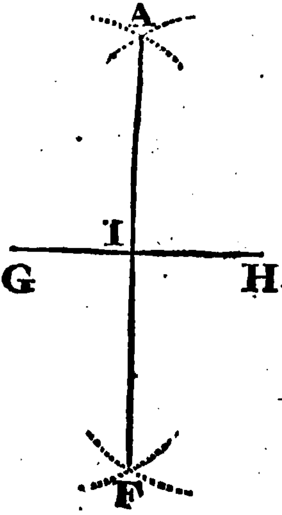
Latus

Latus AI ꝏ AI, seu utrique commune.

Angulus GAI ꝏ HAI. per constructionem.

Ergo [c] Basis GI ꝏ IH: adeoque linea GH secta est bifariam. Q. E. F. c 4.

SCOLIUM.



Hujus operationis etiam tale est compendium.

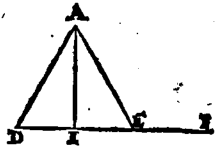
Centris G & H, aquali radio utrinque describantur arcus se intersecantes in A & F.

Tum recta AF, bisecabit rectam GH in I.

Notandum etiam pro sequenti propositione rectam AF esse perpendicularem ipsi GH ex puncto dato I utrimque excitatam.

PROPOSITIO XI.

Pl. 6. *Data recta DF a puncto I in ea dato perpendicularem IA excitare.*



CONSTRUCTIO.

a 3. 1 A puncto I utrinque ſume [a] partes inter ſe æquales ID. IE.

b 1. 2. Super tota DE conſtitue [b] triangulum æquilaterum DAE.

3. Duc rectam AI.

Dico illam eſſe perpendicularem quæſitam.

DEMONSTRATIO.

In triangulis AID. AIE.

Latus AD ∞ AE. } per conſtructionem.
Latus ID ∞ IE.
Latus AI ∞ AI.

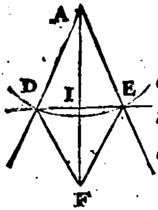
---

a 8. 1. Ergo Angulus AID ∞ [a] AIE. Adeoque AI eſt quæſita [b] perpendicularis.

b Def. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XII.



Ex dato puncto A extra lineam DE, ad ipsam lineam perpendicularem ducere. Probl. 7

CONSTRUCTIO.

1. Centro A tali radio describe [a] circulum ut rectam datam secet in duobus punctis D. E. a Post.

2. Duc [b] rectas *AD. AE.* b Post.

3. Lineam DE [c] divide bifariam in puncto I. c 10. 1

Dico ductam AI esse quæsitam perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AID. AIE.

Latus AD ꝏ AE. quia sunt radii ejusdem circuli.

Latus ID ꝏ IE. per constructionem.

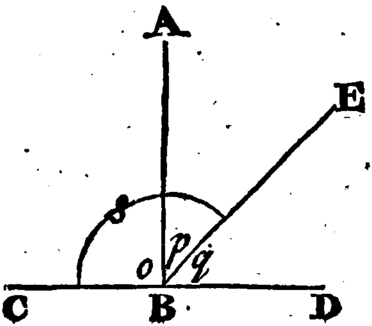
Latus AI ꝏ AI.

Ergo angulus AID ꝏ [d]AIE. Ergo AI est quæsita [e] perpendicularis. Q. E. F. d 8. 1. e Def. 10

PRO-

PROPOSITIO. XIII.

Theor. 6. *Cum recta linea EB supra rectam CD consistens, angulos facit: aut duos [a] rectos aut duobus rectis æquales efficiet.*



DEMONSTRATIO.

Recta EB cum DC aut facit utrimque æquales, adeoque [a] duos rectos; aut non facit.

Def. 10.

Si

Si non facit, ex puncto B excitetur [b] perpendicularis BA: eruntque duo anguli O & P + Q singuli recti adeoque b 11. 1.

$$O + P + Q \propto 2R.$$

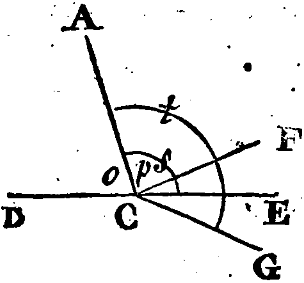
Atqui ang: $S \propto O + P$.

Ergo $S + Q \propto 2$ Rectis.

Quod E. D.

PROPOSITIO. XIV.

Theor. 7. *Si ad alicujus rectæ AC punctum C duæ rectæ DC. CE non ad easdem partes ductæ angulos qui sunt deinceps O & S duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt istæ rectæ, hoc est DCE erit una recta linea.*



DEMONSTRATIO.

Si Adversarius contendat lineam CE cum CD non facere unam lineam rectam, utique aliam assignare nobis debet; illa autem assignabitur vel supra lineam CE vel infra illam.

Sit primo supra CE. ut CF.

Jam anguli O + P ∞ 2 Rectis.

juxta

juxta Adversarium.

Atqui anguli $O + S \propto 2\,R.$ per propositionem.

Ergo [a] $O + P \propto O + S$. Et demto utrinque angulo O remanet [b] $P \propto S$. Pars & totum quod est absurdum [c]. a Ax. 1. b Ax. 2. c Ax. 9.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus lineis quæ possunt duci supra CE. Ergo nulla potest duci linea supra CE, quæ cum CD faciat lineam rectam.

Sit deinde infra CE. ut CG.

Tum anguli $O + T \propto 2$ Rectis. juxta Adversarium.

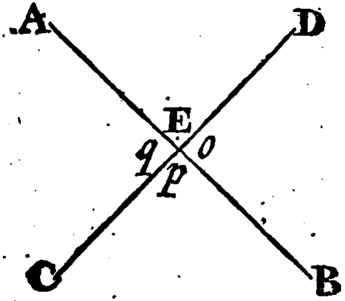
Atqui $O + S \propto 2\,R.$ per propositionem.

Ergo [d] $O + T \propto O + S$. Et ablato utrinque angulo O remanet $T \propto S$. Totum & Pars. quod [e] est absurdum. d Ax. 1. e Ax. 9.

Et cum eadem demonstrationis forma obtineat in omnibus lineis quæ possint duci infra CE: sequitur etiam nullam infra CE posse duci, quæ cum CD facit lineam rectam. Unde concludendum erit ipsam lineam CE cum CD facere rectam DCE. Q. E. D.

PROPOSITIO. XV.

Theor. 8. *Si duæ rectæ AB. CD se invicem secent, angulos ad verticem & oppositos, scilicet E & P æquales inter se facient.*



DEMONSTRATIO.

a 13. 1. Anguli $E + O \infty 2R.$
Anguli $P + O \infty 2R.$ [a]

b Ax. 1. Ergo[b] $E + O \infty P + O.$
ablato utrimque O.

c Ax. 3. E [c] $\infty P.$

Co-

COROLLARIUM. I.

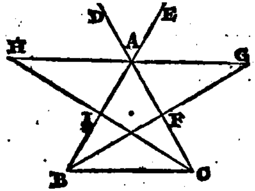
Duæ rectæ ſecantes ſe mutuo ad punctum interſectionis quatuor angulos faciunt quatuor rectis æquales.

COROLLARIUM. II.

Omnes anguli circa idem punctum conſtituti æquales ſunt quatuor rectis.

PROPOSITIO. XVI.

Theor. 9. *Trianguli ABC uno latere BA producto in E, externus angulus EAC utrolibet interno & opposito C vel B major est.*



PRÆPARATIO.

a 10. I. 1. Latus AC bisecetur in F. [a]

b Post. I. & 2. 2. Ducta BF producatur [b] in G, ut BF sit ∞ FG.

3. Ducatur AG.

DEMONSTRATIO.

Jam in triangulis BFC- AFG.

La-

Latus BF ꝏ FG ⎫ Per con-
Latus CF ꝏ AF ⎭ structio-
nem.

Angulus BFC ꝏ AFG. per 15. I.

Ergo ang. FCB ꝏ FAG. per 4. 1.

Atqui totalis EAC externus major FAG.

Ergo idem EAC etiam major FCB. 1. C.

Eodem modo bisecando latus AB procedatur, & probabitur angulum externum DAB majorem esse angulo ABC.

Atqui angulus DAB ꝏ EAC. 15. I.

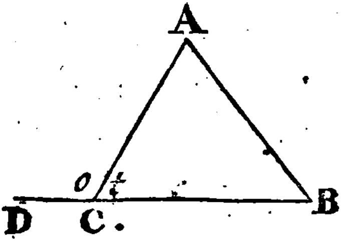
Ergo EAC etiam est major quam ABC. s. B.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Theor. 10. *Trianguli ABC duo anguli B. T. vel alii quilibet, quocunque modo ſimul ſumpti, duobus rectis ſunt minores.*



DEMONSTRATIO.

Producto latere BC in D.
Duo anguli O + T ∞ 2 R. 13. I.
Atqui O < B. 16. I.

Ergo B + T > 2 Re.
Simili modo demonſtratur an-

angulos A + T esse minores seu > duobus Rectis.

COROLLARIUM. I.

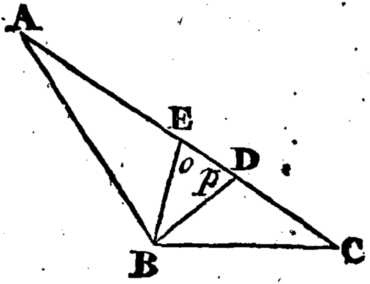
In omni triangulo cujus unus angulus fuerit rectus vel obtusus, reliqui sunt acuti.

COROLLARIUM II.

Omnes anguli trianguli æquilateri; & trianguli Isosceles anguli supra basim sunt acuti.

PROPOSITIO. XVIII.

Theor. 11. *Omnis Trianguli ABC maximo lateri AC opponitur maximus angulus ABC.*



DEMONSTRATIO.

Angulus ABC eſt < C.

A majori latere AC abſcindatur AD ꝏ AB.

a 5. 1. Ergo angulus ABD ꝏ P. [a]

b 16. 1. Atqui P < C. [b]

Ergo ABD < C.

Adeo-

Adeoque totalis ABC erit multo $<$ C.

Angulus ABC eſt $<$ A.

A maximo latere AC abſcindatur CE $\propto$ CB.

Eritque angulus EBC $\propto$ O. [c] c 5. 1.

Atqui O $<$ A. [d] d 16. 1.

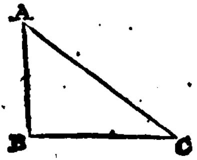
Ergo EBC $<$ A.

Ergo totalis ABC erit multo $<$ A.

Unde jam patet angulum ABC eſſe omnium maximum. Q. E. D.

PROPOSITIO. XIX.

Theor. 12. *In omni triangulo ABC maximo angulo B opponitur latus maximum AC.*



DEMONSTRATIO.

Aut latus AC est ꝏ AB.
Aut AC > AB.
Aut AC < AB.

Si Adversarius ponat AC ꝏ AB, erit [a] angulus B ꝏ C. quod est contra hypothesin.

a 5. 1.

Si

Si vero dicat esse AC $>$ AB. erit [b] angulus B $>$ C: quod iterum est contra hypothesin. b 18. 1.

Ergo sequitur latus AC esse $<$ AB.

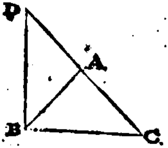
Eodem modo demonstratur AC esse $<$ BC.

Ergo absolute latus AC est maximum. Q. E. D.

PROPOSITIO. XX.

Theor. 13.

Trianguli ABC duo latera scil. AB. AC. aut alio quocunque modo simul sumpta reliquo BC sunt majora.



PRÆPARATIO.

1. Latus AC producatur in D et fit AD ∞ AB.
2. Ducatur DB.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo DAB. latus AD. ∞ AB per construct.

Ergo angulus ABD ∞ D.
Atqui angulus CBD < ABD.
Ergo angulus CBD etiam < D.

Adeo-

Adeoque latus DC. hoc eſt duo latera BA + AC. ſunt [a] majora tertio latere BC. [a] 19. 1.
Q. E. D.

SCHOLIUM.

Propoſitionis hujus veritas immediate fluit ex Archimedæa lineæ Rectæ definitione; Ad oculum enim patet viam per quam linea fracta BAC a B ad C ducta eſt diverſam eſſe, a via lineæ BC, quæ ſtatuitur recta.

Ergo linea recta BC eſt omnium minima, quæ a B ad C poteſt duci.

Adeoque etiam linea recta BC erit > linea fracta BAC.

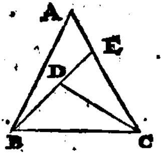
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXI.

Theor. 14.

Si a terminis unius lateris BC intra triangulam jungantur duæ rectæ BD. CD: hæ lateribus trianguli BA. AC minores quidem erunt; majorem vero angulum BDC. continebunt.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Producta BD in E. erit in triangulo BAE.

a 20. I. A | BA + AE < BE.
EC ꝏ EC.

b Ax. 4. BA + AC < BE + EC.

Deinde in Triangulo DEC.

c 20. I. A | DE + EC < DC. [c]
BD ꝏ BD.

BE

BE + EC < BD + DC. [d] d Ax. 4.

Atqui supra BA + AC < BE + EC.

Ergo BA + AC multo < BD + DC.

PARS II.

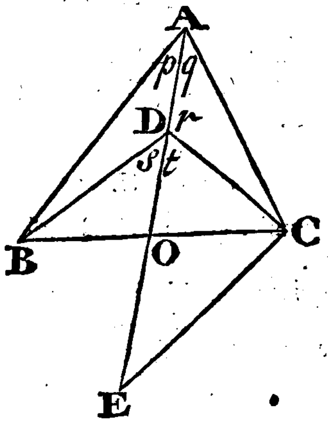
Externus angulus BDC < DEC. interno. e 16. 1.

Atqui angulus DEC < A interno. [f] f 16. 1.

Ergo angulus BDC multo < A.

Q.E.D.

Alia Demonstratio.



PARS I. Duc rectam ADO.
In triang. ADC ang. R $<$ Q.
In triang. ADB ang. D $<$ P.

Ergo per 19. I.
Latus AC $<$ DC. ⎫
Latus BA $<$ BD. ⎭ A

Latera BA $+$ AC $<$ BD $+$ DC.

Quod autem angulus R sit $<$ Q sic patet. Producatur AO in E, ut fiat CE ꝏ CA. Triang.
a 5. I. ACE est Isosceles. Ergo ang. Q ꝏ E *a* Atqui externus R $<$ interno E *b* Ergo R $<$ Q. Similiter
b 16. I. probatur esse D $<$ P.

PARS 2.

c 16. I. A ⎧ Ang. S $<$ P
⎩ Ang. T $<$ Q c

Ergo $S + T < P + Q$.
Hoc BDC $<$ BAC.

Vel aliter hoc modo.

PARS I.

Per Archimedæam rectæ lineæ definitionem linea BOC est omnium brevissima, quæ a B duci possunt ad C. Ergo si a B ad C per aliam viam ducatur linea sive incurvata sive fracta, ut BAC, vel BDC. necessario illa via erit major. Patet autem ad oculum quo punctum fractionis magis a linea BEC recedat, eo viam per quam ista linea procedet esse etiam longiorem, adeoque etiam lineam esse majorem.

Atqui punctum fractionis A magis a linea BOC recedit quam D. Ergo linea BAC erit major linea BDC.

PARS II.

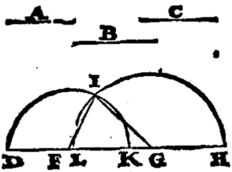
Per proposit 32. 1. (quæ ab hac non dependet.)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Omnes anguli triang. DBC} \propto \\ \text{omnibus ang. trian. ABC.} \\ \text{Atqui ang. DBC} + \text{DCB} > \\ \text{ang. ABC} + \text{ACB.}\end{array}\right\} S$$

Remanebit angulus BDC $<$ BAC.

PROPOSITIO XXII.

Probl. 8. *Ex datis tribus rectis A. B. C. quarum duæ quælibet tertia sunt majores, Triangulum constituere.*



CONSTRUCTIO.

1. In infinita linea DH, lineis datis A. B. C. sume æquales DF. FG. GH.

2. Centro F & radio FD describe Circulum DI, & centro G radio GH circulum HI.

3. Ex puncto intersectionis I, ducantur rectæ IF. IG.

Dico

Dico FIG esse triangulum quæsitum.

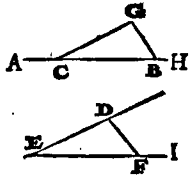
DEMONSTRATIO.

FI ꝏ [a] DF ꝏ A.) Per con- [a] Def.15.
FG ꝏ B.) structio-
GI ꝏ [b] GH ꝏ C.) nem. [b] Def.15.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXIII.

Probl. 9. *Ad datæ rectæ AB punctum C angulo rectilineo DEF æqualem GCB efficere.*



1. In rectis ED. EI sume duo puncta D.·F. illaque junge recta linea DF.

a 22. I. 2. Tum [a] fiat ad punctum C triangulum GCB, habens latera æqualia lateribus trianguli EDF.

Dico angulum GCB esse æqualem ipsi DEF.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulis GCB. DEF.

Latus GC ∞ DE
Latus CB ∞ EF
Latus BG ∞ FD
Per constructionem.

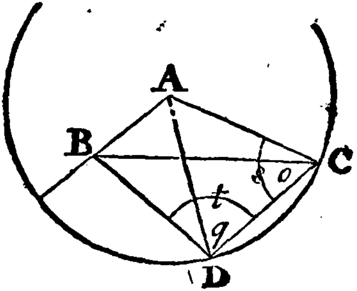
Ergo [b] angulus GCB ∞ DEF. b 8. 1.

Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO. XXIV.

Theor. 15. *Si duo triangula BAC. BAD duo latera BA. AC duobus BA AD æqualia habuerint. alterum alteri unum vero triangulum habeat angulum istis lateribus contentum BAC majorem altero BAD; babebit quoque basin BC majorem basi BD.*



PRÆPARATIO.

1. Centro A per C describe cir-

circulum, is transibit per D, cum AC. AD ponuntur æquales: Et BC cadit supra D.

2. Ducatur recta DC.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo ADC. latus AD ponitur æquale AC. ergo angulus S ∞ Q.

Atqui S < O.

Ergo Q < O.

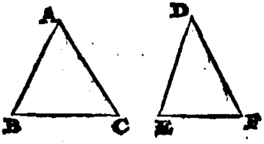
Adeoque T multo < O.

Quare cum in triangulo BCD angulus T sit < O erit latus seu Basis BC major [a] basi BD. a 19. 1.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

Theor. 16. *Si duo triangula ABC. DEF duo latera AB. AC duobus lateribus DE. DF æqualia habuerint alterum alteri; unum vero triangulum habeat basin BC majorem altera EF: habebit quoque angulum A majorem D.*



DEMONSTRATIO.

Si angulus A non sit $<$ D.
Erit vel A ∞ D.
vel A $>$ D.

Si

Si sit A ∞ D, erit basis [a] BC ∞ EF. contra hypothesin. [a] 4. 1.

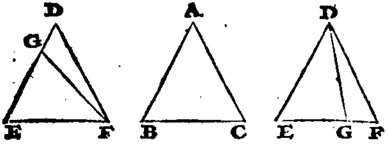
Si vero A > D erit [b] basis BC > EF. iterum contra hyp. [b] 24. 1.

Adeoque sequitur esse angulum A < D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 17. *Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, sive quod adjacet æqualibus angulis, sive quod uni æqualium angulorum subtenditur; Illa & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo.*



DEMONSTRATIO,

In Triangulis ABC. DEF sint anguli B. E. ut & C, F, æquales.

Sitque primo BC ꝏ EF, sc: laterá adjacentia.

Si DE non sit ꝏ ipsi AB; sit DE < AB, & abscindatur EG ꝏ AB, & ducatur GF.

Tum erit in Triangulis GEF, ABC.
Latus GE ꝏ AB per constructionem.
Angulus E ꝏ B } Per propositionem.
Latus EF ꝏ BC }

a 4. I. Ergo [a] angulus GFE ꝏ ACB.
Atqui angulus DFE ꝏ ACB per propositionem.

b Ax. I. Ergo [b] angulus GFE ꝏ DFE, pars & toto,
c Ax. 9. quod est [c] absurdum.

Ergo

Ergo non poteſt eſſe DE $<$ AB,

Et eodem modo probatur DE non poſſe eſſe minus latere AB:

Ergo DE ꝏ AB, adeoque triangula ABC, DEF ſe habent juxta 4. Et omnia reliqua ſunt æqualia.

Sit deinde AB ꝏ DE, ſcilicet latera oppoſita,

Si non ſit EF ꝏ BC, ſit EF $<$ BC, & abſcindatur EG ꝏ BC, ducaturque DG.

Tum erit in triangulis ABC, DEG.

Latus AB ꝏ DE
Angulus B ꝏ E per propoſitionem.
Latus BC ꝏ EG per conſtruct:

Ergo d Angulus ACB ꝏ DGE.

Atqui angulus ACB ꝏ DFE per propoſitionem. d 4. I.

Ergo angulus DGE ꝏ DFE, quod eſt abſurdum, cum DGE ſit externus, qui interno DFE major eſt. e e 16. I.

Ergo non poteſt eſſe EF $<$ BC.

Eodem modo probabitur non poſſe eſſe EF $>$ BC.

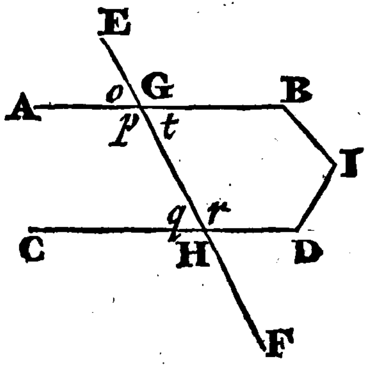
Unde ſequitur eſſe EF ꝏ BC: Adeoque in tringulis ABC, DEF omnia per 4 eſſe æqualia.

Q, E, D,

PROPOSITIO XXVII.

Theor. 18.

Si in duas rectas AB. CD recta EF incidens angulos alternos P. R æquales faciat; rectæ erunt inter se parallelæ.



DEMONSTRATIO.

Si non ſint parallelæ, coin-
dent

cident puta in *I*, & fiet triangulum *GIH*.

Tum erit angulus externus *P* $<$ *R* interno. [a] a 16. 1.

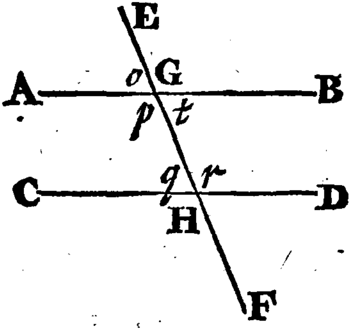
Atqui per propoſ. angulus *P* ∞ *R*.

Quæ duo ſimul vera eſſe abſurdum eſt. Ergo lineæ non concurrent; adeoque ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 19.

Si in duas rectas AB. CD recta EF incidens faciat externum angulum O æqualem interno & ad easdem partes opposito Q: Aut si faciat duos internos & ad easdem partes P. Q. simul æquales duobus rectis: parallelæ erunt inter se rectæ AB. CD.



DE-

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Angulus T ꝏ O.[a] a 15. I.
Atqui Q ꝏ O per propositionem.

Ergo T ꝏ Q.[b] b Ax. 1.
Adeoque lineæ AB. CD. sunt parallelæ.[c] c 27. I.

PARS II.

Anguli O + P ꝏ 2 Rectis.[d] d 13. I.
Atqui Q + P ꝏ 2 Rectis per Prop.

Ergo[e] O + P ꝏ Q + P. demto utrinque P. e Ax. I.

O ꝏ Q.

Ergo per partem primam hujus lineæ AB. CD sunt parallelæ.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

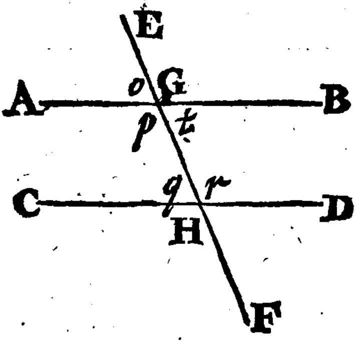
Theor. 20.

Si in rectas parallelas AB. CD recta EF incidat.

1. *Alterni anguli T. Q inter se erunt æquales.*

2. *Externus G erit æqualis interno & ad easdem partes opposito R.*

3. *Duo interni & ad easdem partes T. R. simul erunt æquales duobus rectis.*



De-

DEMONSTRATIO.

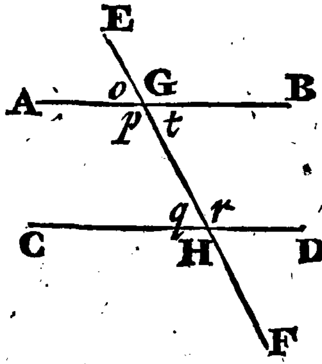
PARS I.

Si angulus T non sit ∞ Q, erit vel major vel minor.

Ponatur $\left.\begin{array}{lcl} T & < & Q. \\ P & & P. \end{array}\right) A$

Erit [a] $T + P < Q. + P.$ a Ax. 4.
Atqui $T + P \infty$ [b] 2 Rectis. b 13. I.

Ergo $Q + P >$ 2 Rectis: adeoque lineæ AB. CD non sunt [c] parallelæ: quod est contra hypothesin. c Ax. II.



Deinde ponatur T > Q.
seu Q < T.
R. R.

Q + R < T + R.
d 13. I. Atqui Q + R ∞ 2 Rectis. d

Ergo T + R > 2 Rectis:
e Ax. 11. adeoque duæ lineæ e AB CD
non

non sunt parallelæ: quod iterum est contra Hypothesin.

Ergo est angulus $T \propto \mathcal{Q}$.

Quod E. D.

PARS II.

$G + T \propto 2$ Rectis.
$\mathcal{R} + \mathcal{Q} \propto 2$ Rectis. } [f] — f 13. I.

S { Ergo $G + T \propto R + \mathcal{Q}$. [g] — g Ax. I.
Atqui $T \propto \mathcal{Q}$. [h] — h per partem I.

Ergo $G \propto R$. [i] — i Ax. 3.

PARS III.

$G + T \propto 2$ Rectis. [k] — k 13. I.
Atqui $G \propto R$. [l] — l Per partem 2.

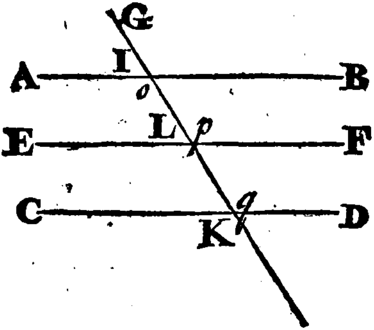
Ergo $\mathcal{R} + T \propto 2$ Rectis.

Q. D. E.

PROPOSITIO. XXX.

Theor. 21.

Si duæ rectæ AB. CD. sint parallelæ ad eandem EF; illæ erunt quoque inter se parallelæ.



DEMONSTRATIO.

Ducatur per tres datas rectas linea GK.

An-

Angulus O ∞ P. [a] propter parallelas AB. EF. a 29. I.

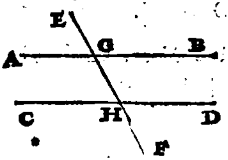
Angulus Q ∞ P. [a] propter parallelas CD. EF.

Ergo ang. O ∞ Q alterni. Adeoque AB. CD sunt [b] inter se parallelæ. b 27. I.

PRO-

PROPOSITIO. XXXI.

Prob. 10. *Per datum punctum G ducere lineam AB, quæ datæ CD sit parallela.*



CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto G ad datam CD duc rectam GH sub quolibet angulo *GHC*.

2. Ad lineæ GH punctum G fac [a] angulum HGB æqualem angulo *GHC*.

a 23. 1.

Dico

Dico BG productam esse ipsi *CD* parallelam.

DEMONSTRATIO.

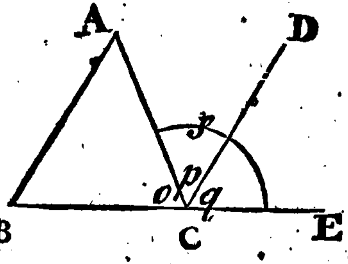
Anguli alterni *GHC HGB* sunt æquales per constructionem. Ergo [b] lineæ *AB. CD.* sunt parallelæ. b 27. 1.

PROPOSITIO XXXII.

Theor. 22. *Trianguli ABC uno latere BC producto in E.*

1. *Externus angulus S duobus internis & oppositis A & B. aequalis est.*

2. *Trianguli tres anguli A. B. O. simul sumpti duobus rectis aequales sunt.*



De-

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ducta recta CD parallela lateri BA, erit.

A { Angulus P ∞ [a] A, alterno; propter incidentem AC. a 29. 1.
Angulus Q ∞ [b] B. interno; propter incidentem BE. b 29. 1.

Ergo anguli P + Q hoc est totalis S ∞ A + B. Q. E. D.

PARS 2.

Duo anguli O + S ∞ 2 Rectis. [c] c 13. 1.
Atqui S ∞ A + B. per partem I.

Ergo tres anguli A + B + O ∞ 2 Rectis.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli unius trianguli sunt æquales tribus angulis cujuscunque alterius trianguli simul sumtis; Et quando duo sunt æquales duobus erit & tertius æqualis tertio.

COROLLARIUM II.

In triangulo Iſoſcele rectangulo anguli ad baſin ſunt ſemirecti. Et quadrati diameter illius angulos biſariam ſecat.

COROLLARIUM III.

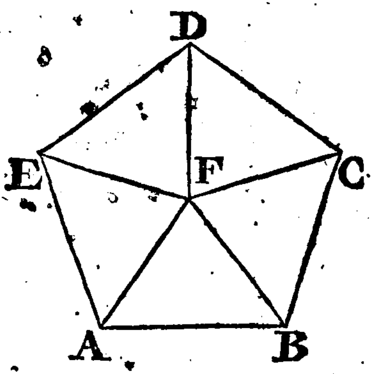
Angulus trianguli æquilateri eſt una tertia duorum rectorum, vel duæ tertiæ unius recti.

SCHOLIUM.

Omnis figura rectilinea dividitur in tot triangula, quot habet latera, demptis duobus, & anguli triangulorum conſtituunt angulos figuræ.

DE-

DEMONSTRATIO.



Intra quodlibet polygonum ex: gr: pentágonum ABCDE, ſumatur aliquod punctum F, ex quo ad ſingulos angulos ducantur rectæ; & obtinebuntur tot triangula quot figura habet latera, adeoque hic quinque triangula.

Cum autem unumquodque triangulum contineat duos angulos rectos (per 32. I.) quinque triangula continebunt 10 angulos rectos; a quibus ſi demantur anguli recti quatuor circa F poſiti (15. I.) qui ad figuram non pertinent, remanebunt pro angulis figuræ 6 anguli recti.

Cum jam duo anguli recti contineantur in uno triangulo, 4 erunt in duobus & *6 in tribus triaugulis.* Un-

Unde jam concludimus pentagonum dividi posse in tria triangula: hoc est in tot triangula, quot figura habet latera demptis duobus.

Quæ demonstratio universalis est pro omnibus polygonis; & Tabellæ sequentis est fundamentum.

Latera	3	4	5	6	7
Trianguli	1	2	3	4	5
Anguli recti	2	4	6	8	10

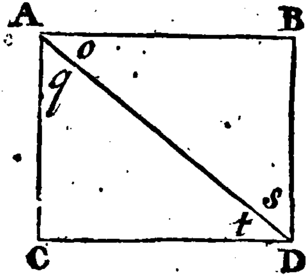
Latera	8	9	10	11	12
Trianguli	6	7	8	9	10
Anguli recti	12	14	16	18	20

Cujus hic est Sensus. Figura Ex: Gr: 6 laterum, dividi potest in 4 triangula; & illius anguli omnes vadent 8 rectos.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Rectæ AC. BD quæ æquales & parallelas AB. CD ad easdem partes conjungunt, illæ & ipsæ æquales sunt & parallelæ. Theor. 23.



DEMONSTRATIO.

Ducta Diametro AD, in Triangulis BAD. ADC.

Latus AB ∞ CD per propositionem.

Angulus a O ∞ T propter a 29. 1. pa-

parallelas AB. CD.
Latus AD ∞ AD.

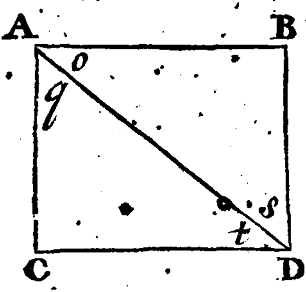
Ergo per 4. omnia sunt æqualia, nim.

Latus AC ∞ BD.
Angulus Q ∞ S, adeoque
b 27. 1. [b] AC & BD parallelæ.

Pro-

PROPOSITIO XXXIV.

Theor. 24.



Parallelogrammi, ABCD opposita latera & anguli æqualia sunt; ipsumque a Diametro secatur bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis BAD. ADC.

Angulus [a] O ꝏ T propter parallelas AB. CD. [a] 29. 1.

Angulus [a] S ꝏ Q propter parallelas AC. BD.

Latus AD ꝏ AD.

Ergo per 26. omnia sunt æqualia; sc:

Latus AB ꝏ CD.

Latus BD ꝏ AC.

Angulus B ꝏ C.

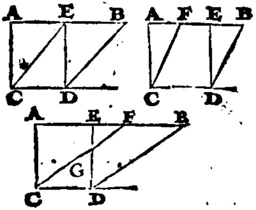
Adeoque per 4. Triangula BAD. ADC inter se sunt æqualia.

P PRO-

PROPOSITIO. XXXV.

Theor. 25.

Parallelogramma AD. FD. super eadem basi CD & inter easdem parallelas AB. CD constituta sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Tres hic occurrunt casus, qui totidem figuris exhibentur.

Ad Figuram I.

Latus AE ∞ CD } 34. I.
Latus EB ∞ CD

Ergo

Ergo AE [a] ∞ EB. a Ax. I.

Confiderentur, jam duo triangula EAC. BED, in quibus

Latus EA ∞ BE.
Angulus A ∞ BED propter parallelas AC. ED.
Latus AC ∞ ED per 34. I.

Ergo Triang. [b] EAC ∞ Triang. BED } Adde. b 4. I.
Triang. ECD ∞ ECD.

Parallelogr. EACD ∞ Parall. BECD.

Ad Figuram. II.

Latus AE ∞ CD. } 34. I.
Latus FB ∞ CD.

Ergo AE ∞ FB. } S.
FE FE.

AF ∞ EB.

Quare jam in Triangulis FAC. BED.

Latus FA ꝏ BE.
Angulus A ꝏ BED. propter parallelas AC. ED.
Latus AC ꝏ ED. per 34. I.

---

c4. I. Ergo Triang. c FAC ꝏ BED.
Trap. EFCD. ꝏ EFCD } A

Parallelog. AD ꝏ Parall. FD.

Ad Figuram III.

Latus AE ꝏ CD.
Latus FB ꝏ CD. } 34. I.

Ergo AE ꝏ FB.
EF. EF. } A.

AF ꝏ EB.

Quare iterum in triangulis FAC. BED.

Latus FA ꝏ BE
Angulus A ꝏ BED. ob parallelas AC. ED.
Latus AC ꝏ ED. per 34. I.

Ergo

Ergo [d] Triang. FAC ∞ Triang. BE𝔇. Triang. FEG ∞ Triang. FEG. } S. d 4. 1.

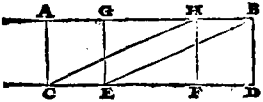
Trapezium EACG ∞ Trapezio BFG𝔇. Triang. GCD GC𝔇 } A.

Parallelogr. A𝔇 ∞ Parallel. E𝔇.
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXXVI.

Theor. 26. *Parallelogramma AE. HD super æqualibus basibus CE. FD, & inter easdem parallelas AB CD constituta, inter se sunt æqualia.*



DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ CH. EB, quæ erunt
a 33. 1. a æquales & parallelæ. Hoc facto erit.

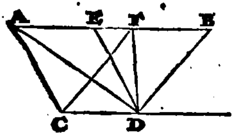
Parallelogr. AE ∞ Parall EH.
Atqui Parall. HD ∞ eidem Parall: EH. } 35. I.

Ergo b Parall. AE ∞ Parall. HD. b Ax. I.
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ACD. FCD super eadem basi CD & inter easdem parallelas AB. CD. constituta, sunt inter se æqualia. Theor. 27.



DEMONSTRATIO.

Ductis DE [a] parallela ipsi CA: ut & DB parallela CF, erit. a 31. I. b 35. I.

Parallelogr. [b] EC ꝏ Parallelogr. BC.

Atqui Parall. EC semissis est Triangulum ACD.
Et Parallelogr. BC semissis est triangulum FCD. } 34. I.

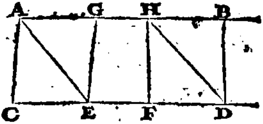
Ergo [c] triang. ACD ꝏ triang. FCD. c Ax. 7.
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Theor. 28.

Triangula ACE. HFD super æqualibus basibus CE. FD. & inter easdem parallelas AB. CD constituta, inter se sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

a 31. I. Ducatur [a] EG parallela ipsi AC & DB ipsi FH.

b 24. I. Tum [b] Parall. CG ∞ Parall. FB.

At-

Atqui dimidium CG est Triang. ACE. Et dimidium FB est Triang. HFD. 34. I.

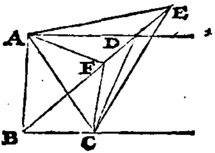
Ergo [c] triang. ACE $\propto$ triang. HFD. c 24. 7.

Q Pro-

PROPOSITIO XXXIX.

Theor. 29.

Si triangula ABC. DBC sint æqualia, & super eadem basi BC & ad easdem partes constituta: illa erunt quoque inter easdem parallelas. Hoc est AD erit parallela BC.



DEMONSTRATIO.

Si Adversarius hoc neget. Sit AE parallela ipsi BC: & producta BD in E, ducatur recta EC.

a 37. I. Tum Triang. a ABC ∞ EBC.

Atqui Triang. ABC ∞ DBC per propositionem.

Er-

Ergo Triang. [b] EBC ∞ DBC. Totum & pars quod est absurdum. b Ax. 1. c Ax. 9.

Et eadem demonstratio obtinet in omnibus lineis quæ possunt duci supra AD.

Quare concludendum est nullam lineam posse duci supra AD, quæ sit ipsi BC parallela.

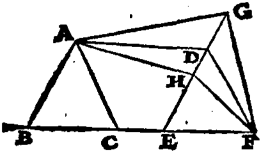
Quod si adversarius contendat lineam AF esse parallelam BC, eadem demonstrationis forma ipsum ad absurdum deducimus; & probabimus nullam lineam infra AD posse duci quæ ipsi BC sit parallela.

Ergo recte hinc concludimus ipsam lineam AD esse parallelam BC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

Theor. 30. *Si triangula ABC. DEF sint æqualia, & super æqualibus basibus BC. EF, & ad easdem partes constituta: Illa erunt quoque inter easdem parallelas AD. BF.*



DEMONSTRATIO.

Si AD juxta Adversarium non sit parallela BF; sit AG supra AD ducta, ipsi BF parallela: & producta ED in G, ducatur GF.

a 38. 1. Tum erit [a] triang. ABC ∞ triang. GEF.

Atqui idem triang. ABC ∞ triang. DEF. per prop.

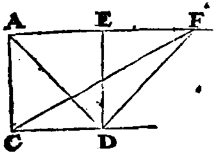
Ergo

Ergo [b] triang. GEF ꝏ DEF. Totum & pars; quod est [c] absurdum. b Ax. 1. c Ax. 9.

Adeoque linea AG non est parallela BF: nec ulla quæ supra AD posset duci.
Et eodem modo demonstratur nec AH nec ullam aliam quæ infra AD possit duci, esse parallelam ipsi BF.
Ergo concludimus iterum ipsam lineam AD esse parallelam BF. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Theor. 31.



Si parallelogrammum AECD communem cum triangulo FCD basin CD habuerit, & in iisdem parallelis AF. CD fuerit: parallelogrammum erit duplum trianguli.

DEMONSTRATIO.

a 37. 1. Ducta AD erit triang. [a] ACD ∞ triang. FCD.

b 34. 1. Atqui [b] parallelogr. AECD eſt duplum triang. ACD.

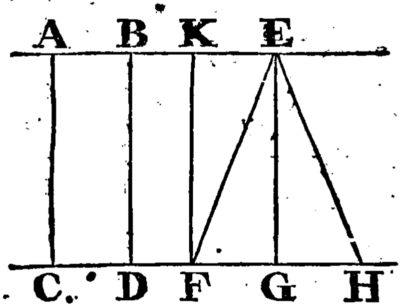
Ergo etiam parall. AECD eſt duplum triang. FCD.

SCHOLIUM.

Imo etiam ſi parallelogrammum ABDC cum triangulo EFG æquales baſes CD. FG. habuerit & in iiſdem fuerit parallelis, [a] parallelog. trianguli duplum erit.

De-

DEMONSTRATIO.



Ducta FK parellela GE, erit.

Parallelog. AD ꝏ Parall. KG. 36. I.

Atqui Parall. KG est duplum Trianguli EFG. per 34. I.

Ergo etiam Parall. AD ejusdem trianguli duplum erit.

Præterea si Trianguli EFH cum Parallelogr. AD inter easdem parallelas existentis, basis FH fuerit dupla baseos CD erit triangulum EFH ꝏ parallegr. AD.

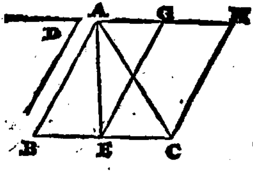
DEMONSTRATIO.

Triang. EFG ꝏ triang. EHG (38.I.) Ergo totum triangulum EFH est duplum trianguli EFG: atqui modo demonstratum est esse parallegr. AD duplum ejusdem trianguli EFG. Ergo erit parall. AD ꝏ triang. EFG.

PRO

PROPOSITIO XLII.

Prob. 11.



Dato triangulo ABC æquale parallelogrammum GC construere, habens angulum æqualem angulo dato D.

CONSTRUCTIO.

a 10. I. 1. Divide [a] basin BC bifariam in E, & duc rectam AE.

b 31. I. 2. Duc lineam AH parallelam BC.

3. Ex E duc rectam EG ut angulus GEC sit æqualis angulo dato D.

4. Age CH parallelam EG.

Dico GC esse parallelogrammum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

a 38. I. Triang. AEB ꝏ triang. AEC.

Ergo triang. ABC est duplum triang. AEC

b 41. I. Atqui Parall. GC [b] est duplum ejusdem triang. AEC.

---

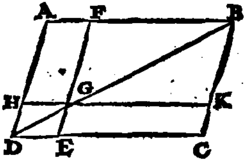
c Ax. 6. Ergo triang. ABC ꝏ Parall. GC. [c]

Cum jam angulus GEC per constructionem sit ꝏ angulo dato D; patet factum esse quòd quæritur.

PRO

PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi AC complementa AG. GC. sunt inter se æqualia. Theor. 32.



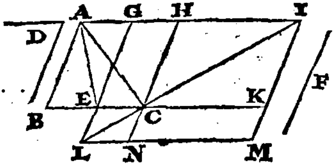
DEMONSTRATIO.

S (Triang. BAD ꝏ Triang. BCD.
Triang. BFG + GHD ꝏ tri. BKG + GED) 34. I.

Remanet complem. AG ꝏ [a] compl. GC. Q. E. D. a Ax. 3.

PROPOSITIO XLIV.

Prob. 12.



Ad datam rectam F dato triangulo ABC æquale parallelogrammum CM applicare habens angulum æqualem angulo dato D.

CONSTRUCTIO.

a 42. 1. 1. Constitue a parallelogrammum CG æquale triangulo ABC, & habens angulum GEC ∞ angulo D.

b 3. 1. 2. Produc b BC in K, ut CK sit ∞ datæ F.

c 31. 1. 3. Age KI parallelam c CH, quæ productæ AH occurrat in I.

4. Ex I per C ducatur IC. quæ productæ GE occurrat in L.

5 Ducatur LM parallela BK, quæ productæ IK occurrat in M.

6. Denique producatur HC in N.

Dico CM esse parallelogrammum quæsitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Triang. ABC ∞ complemento GC. per Constr.

Compl. CM [a] ∞ eidem compl. GC. a 43. 1.

Ergo triang. ABC [b] ∞ compl. CM. b Ax. 1.

Angulum autem CNM esse ∞ angulo dato D sic demonstratur.

Ang. CNM [c] ∞ HCK. propter parallelas CK. NM. c 29. 1.

Ang. HCK ∞ [c] GEC. propter parallelas HC. GE.

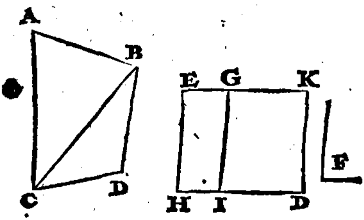
Ang. GEC ∞ D. per constructionem.

Ergo ang. CNM ∞ D. [d] d Ax. 1.

Cum jam denique latus CK factum sit æquale lineæ datæ F, patet parallelogrammum CM quæsito satisfacere.

PROPOSITIO XLV.

Prob. 13. *Dato rectilineo AD æquale parallelogrammum ED constituere habens angulum æqualem angulo dato F.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducta CB dividatur rectilineum in triangula.

a 42. 1. 2. Fiat [a] parallelogrammum EI ∞ triangulo BCD, habens angulum H ∞ dato F.

3. Su-

3. Supra latus GI[b] fiat parallelogrammum GD ∞ triangulo ABC, habens angulum GID ∞ ipsi H. b 44. 1.

Dico quæsito satisfactum esse.

DEMONSTRATIO.

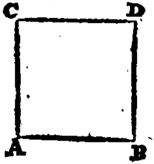
A { Parallelogr. EI ∞ triang. BCD. Parallelogr. GD ∞ triang. ABC. } per const.

Ergo Parall. ED ∞ Rectilineo AD.

Q. E. F.

PROPOSITIO. XLVI.

Prob. 14. *Super data recta AB quadratum ABDC describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ab extremitatibus A & B erige duas perpendiculares
a 11. 1. a AC. BD. quæ sint æquales ipsi AB.

2. Ducatur recta CD.

Dico ABCD esse quadratum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

a Ax. 1. Latus AC a ∞ BD, quia utrimtrumque est ∞ eidem AB.

Latus AC est parallelum
b BD, propter angulos rectos. b 28. 1.
A. B.

Ergo c AB & CD sunt parallelæ & æquales, adeoque omnia latera æqualia eidem *AB*, inter se sunt æqualia & parallela. c 33. 1.

Pro angulis.

In parallelogrammo AD anguli A. *B*. sunt recti. Ergo d etiam oppositi D. C sunt recti. Ergo *ABDC* est quadratum. d 34. 1.

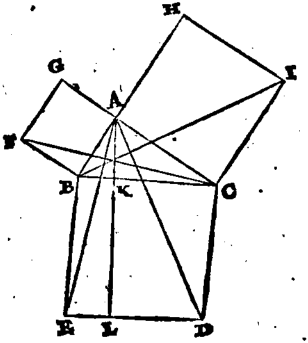
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XLVII.

Theor. 33.

In omni triangulo rectangulo BAC quadratum lateris BC, quod recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum BA. AC. quadratis.



DEMONSTRATIO.

Ex A ducta AL parallela lateri BE, lateris BC quadratum BD dividit

dividit in duo parallelogramma *B*L. KD:

Si jam demonſtratum ſit Parallelogr. *KD* eſſe ∞ quadrato AI, ut & parallelogr. *BL* eſſe ∞ quadrato *AF*, peracta res erit.

Pro Primo.

Ductis AD. BI ang. BCD ∞ ACI. quia uterque rectus.
A ang. ACB. ∞ ACB.

Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo in triangulis ACD. BCI.

Latus AC ∞ CI. } quia ſunt latera eorundem quadratorum.
Latus CD ∞ BC.
Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo [a] Triang. ACD triang. BCI. a 4. I.

[c] Atqui parallelogr. KD eſt duplum triang. ACD. } Quia ſunt in iiſdem baſibus & parallelis. c 41. I.
[c] Et parallelegr. AI duplum triang. BCI.

 Ergo

b Ax. 6. 1. Ergo [b] parall. *KD* ∞ parall. seu quadrato AI.

Pro Secundo.

Ductis AE. CF. Ang. CBE ∞ ABF. quia uterque rectus.
A Ang. ABC. ABC.

Ang. ABE. ∞ CBF.

Quare in triangulis ABE. CBF.

Latus AB ∞ BF. | Utpote latera eorundem quadratorum.
Latus BE ∞ CB. |
Ang. ABE ∞ CBF.

---

d 4. 1. Ergo Triang. ABE [d] ∞ Triang. CBF.

e 41. 1. e Atqui parallelogr. BL est duplum triang. ABE. | Quia sunt in iisdem basibus & parallelis.
e Et parallelogr. AF duplum triang. CBF. |

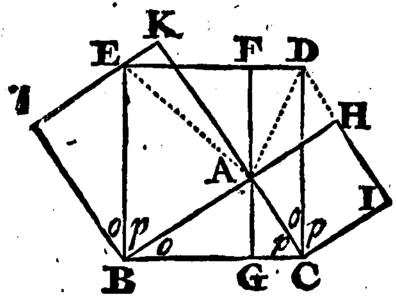
Ergo

Ergo parall. BL ꝏ parall. seu quadrato AF. f Ax. 6.
Atqui antea parall *KD* ꝏ quadrato AI.
A

Ergo Quadratum B*D* ꝏ duobus quadratis. AF. AI.

Q. E. D.

Succinctior autem & clarior est Clarissimi Sturmii demonstratio, quam in sua Mathesi enucleata, pag. 30. hoc modo proponit.



Factis faciendis, quæ apposita Figura monstrat.

▭ FDCG duplum est △li ACD.
Atqui □ AHIC etiam est duplum △li ACD. } 41. I.

Ergo ▭ FDCG ∞ □ AHIC.

Eodem modò.

▭ FEBG duplum est △li AEB.
Atqui □ ABLK etiam est duplun △li ACD. } 41. I.

Ergo

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ergo } \square\, FEBG \propto \square\, ABLK. \\ \text{Supra est } \square\, FDCG \propto \square\, AHIC.\end{array}\right\}\text{Adde.}$$

Eritque $\square\, EDCB \propto \square\, ABLK + \square\, AHIC$. Q. E. D.

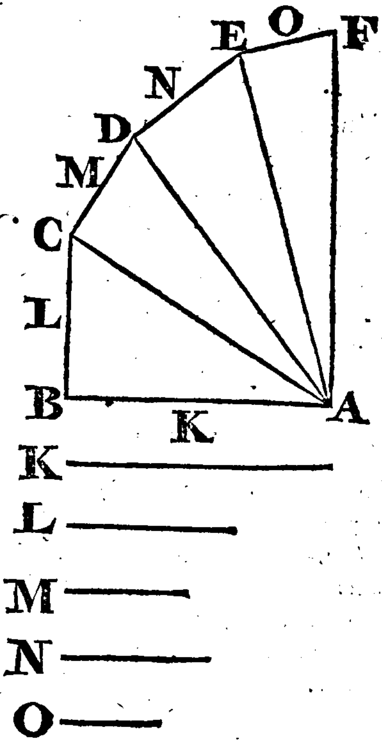
Nam quod latus BE occurrat lateri LK & latus BD continuato lateri IH ſic patet, ſiquidem omnes anguli O, ut & P manifeſto æquales ſunt, quia ubique O + P conſtituunt unum rectum.

Adeoque △lum ABC revolutum circa centrum B congruet cum triangulo BLE; revolutum autem circa centrum C, congruet cum triangulo CID.

SCHOLIUM. I.

Pulcherrimum hoc Pythagoræ inventum inſigne per totam Matheſin eſt Theorema, & non pauca utiliſſima ſuppeditat Problemata, quorum cum alia apud Clavium & alios Autores abundanti ſatis copia videri poſſint, nos tria tantum afferemus.

PROBLEMA I.



Datis quodlibet lineis K. L. M. N. O. invenire Quadratum quod omnium linearum quadratis simul ſumtis ſit æquale.

Conſtructio & Demonſtratio.

1. Duas lineas K & L, junge in angu-

gulo recto ABC, erit ductâ rectâ AC: □ AC ∞ □tis *K*, & L.

2. *F*actâ CD ∞ M perpendiculari ad CA, erit □ AD ∞ □tis. *K*. L. M.

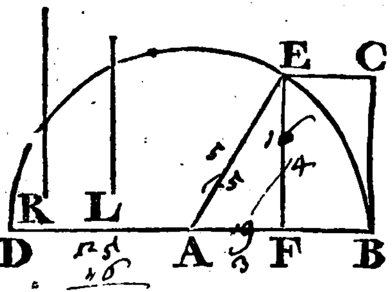
3. Ad AD fiat perpendicularis *DE* ∞ N, eritque □ *AE* ∞ □tis *K*. L. M. N.

4. Ipsi *AE* fiat perpendicularis *EF* ∞ O, eritque □ *AF* ∞ □tis. *K*. L. M. N. O.

Quæ omnia sequuntur ex hac prop. 47. cum quatuor ista triangula ABC. ACD. *ADE*. *AEF*. per constructionem sint rectangula.

Pro-

PROBLEMA. II.



Datis duabus lineis inæqualibus *K*. L. invenire quadratum, quo a ſe invicem quadrata ab illis facta differunt.

CONSTRUCTIO.

1. Fac rectam DB duplam datæ majoris *K*.

2. Super illa deſcribe Semicirculum DEB.

3. Fiat ipſi DB perpendicularis BC ∞ datæ L.

4. Ducatur CE ad Semicirculum, parallela BD.

5. Ex

5. Ex puncto E demittatur perpendicularis EF.

Tum dico □ AF esse differentiam □torum *K*. & L.

DEMONSTRATIO.

Ducta AE erit triangulum AEF per constructionem rectangulum; adeoque per 47. I.

□ AE ∞ □ EF + □ *AF*

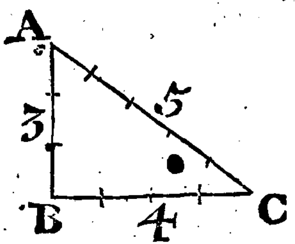
Atqui □ AE ∞ □ K. } Per con-
Et □ EF ∞ □ L. } struct.

Ergo □ K superat □ L per □ AF; adeoque □ AF est differentia □torum, K & L.

PROBLEMA. III.

Cognitis trianguli rectanguli *ABC* duobus lateribus, invenire tertium.

PRAXIS.

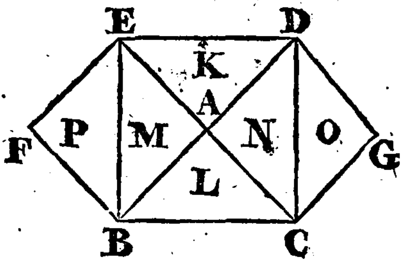


Sint cognita duo latera *AB* 3. *BC* 4. Quia triangulum est rectangulum: duo quadrata *AB* & *BC*: seu 9 & 16 addantur in unam summam: &

& obtinebitur 25: pro duobus □tis *AB*. *BC*. hoc eſt pro □to *AC*: cujus radix 5 dabit latus quæſitum *AC*.

Similiter cognita ſint latera *AC*. 5 & *BC* 4: tum a □to *AC* 25 ſublato □to *BC*, 16, reſtabit pro □to *AB* 9. cujus radix exhibebit latus quæſitum *AB*.

SCHOLIUM II.



Si triangulum rectangulum ſit ſimul Iſoſceles, facillime propoſitionis veritas demonſtrabitur hunc in modum.

PRÆPARATIO.

1. Super lateribus AB. AC. fiant □ta AF. AG.
2. Ducantur rectæ CD. DE. EB.

Dico BCDE eſſe □tum a BC, & ∞ □tis AF. AG.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Per 32. I. illuſque Coroll. 2. tres anguli li ad B sc. ABC. ABE. EBF. ut & tres ad C scil. ACB. ACD. DCG : præterea duo ad E sc: AEB. FEB, ut & ad D duo ADC. GDC; sunt semirecti: unde jam facile deducitur angulos AED. ADE etiam esse semirectos : adeoque quatuor angulos quadrilateri BCDE esse rectos : quare latera opposita sunt parallela : sc. BC. ED & EB. DC.

Atqui BC ∞ CD (6.1.) quia triang. BCD est rectangulum in C & habet duos angulos supra Basin BD æquales : unde etiam BE ∞ ED.

Ergo quatuor latera BC. CD. DE. EB sunt æqualia : adeoque BCDE □tum lateris *BC*.

PARS II.

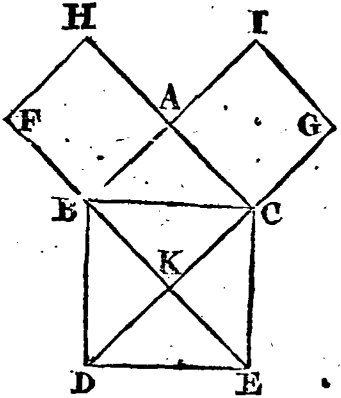
Sex triangula *K*. L. M. N. O. P. habent suas bases inter se æquales, (quia sunt latera □ti) & duos angulos supra basin, quia omnes sunt semirecti.

Ergo per 26.1. triangula omnia inter se sunt æqualia.

Adeoque 4 triangula *K*. M. L. N ∞ iis 4 triangulis. P. M. N. O.

Hoc est □tum. BCDE ∞ □tis AF. AG. Q. E. *D*.

Cui demonstrationi aliam sic breviter adjungimus.



Descriptis quadratis *AF*. *AG*. *BE*, producantur latera *FB*. *GC*. quæ necessario debere cadere in *E* & *D* facile probari potest; ut *BE* *CD* sint Diametri, quæ ipsum quadratum & singulos illius angulos bifariam secant.

Unde jam nullo negotio deducitur lineas *BK*. *CK*. *DK*. *EK* esse inter se & lateribus *AB*. *AC*. æqua-

æquales, adeoque trianguli *DBC* cum □to *CI* inter easdem paralle. las *IB*. *GD* existentis, basis *DC*, dupla est Parallelogrammi baseos *CG*: ergo per Scholium pro. 41. I. Triang *DBC* ∞ □to *AG*.

Deinde triangulum *DEC* ∞ triang. *DBC*. 34. I.
Et Triang. *DEC* ∞ □to *AG*.
Et □tum *AG* ∞ □to *AF*.

Ergo Triang. *DEC* ∞ □to *AF*.

Quare sequitur duo Triangula *DBC*. *DEC* simul sumta, hoc est □tum *BCDE* esse ∞le quadratis duobus *AF*. *AG* simul sumtis.

Cæterum ex hac eadem demonstrationis forma, sequens haud inelegans deducimus

Theorema. I.

In Triangulo Isoscele rectangulo *ABC*, quadratum Hypotenusæ *BC* quadruplum est trianguli ejusdem propositi *ABC*.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex ſuperiori demonſtratione patet ſingulos □ti *BE* angulos biſectos eſſe, & lineas *B*K. *C*K. *D*K *EK* lateribus *AB*. *AC*, æquales: Unde jam ſequitur quatuor triangula *BKC*. *C*K*E*. *EKD*. *DKB*. & inter ſe & triangulo *BAC* eſſe æquiangula, & æquilatera: adeoque æqualia.

Cum autem quatuor iſta triangula conſtituant □tum *BCDE*, patet illud □tum quadruplum eſſe Trianguli *ABC*. Q. E. D.

Quæ demonſtratio præcedentis Theorematis, cum mihi occaſionem præberet inquirendi, quomodo □tum hypotenuſæ trianguli rectanguli inæqualium laterum ſe haberet ad ipſum Triangulum, ſequens ſeſe ſtatim prodebat.

Theorema II.

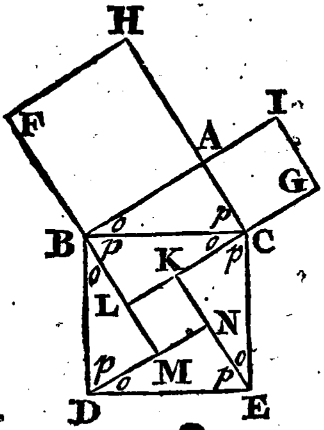
In quolibetcunque Triangulo

Re-

Rectangulo inæqualium laterum, quadratum Hypotenuſæ triangulum propoſitum quater ſumtum ſuperat □to quod ſit a differentia reliquorum laterum: ſeu quod idem eſt; □tum Hypotenuſæ eſt ꝏle triangulo propoſito quater ſumpto una cum □ſo differentiæ reliquorum laterum.

Demonſtrationem vide pagina ſequente.

DEMONSTRATIO.



Super trianguli rectanguli *ABC* lateribus construantur □ta *AF*. *AG*: *BE*.

Deinde producantur latera *FB* *GC*: tum ex angulis *E* & *D* ducantur EK parallela *FB*, & *DN* parallela *GC*: istæ lineæ ita se intersecabunt, ut constituant quatuor triangula *BLC*. *CKE*. *END* *DMB*,

DMB, & in illorum medio quadratum *KLMN*.

Quibus constructis vel leviter in præcedentibus exercitatus facile omnes angulos *O*, ut & omnes *P* inter se æqles esse perspiciet.

Unde sequitur per 26. I. quinque ista Triangula esse inter se æqualia; & habere latera æqualia lateribus: sc. *BM*. *DN*. *EK*. *CL*: ut etiam *AC*. *CK*. *EN*. *DM*. *BL*.

Quare si auferatur *BL* a *BM*: *DM* à *DN*: *EN* ab *EK*: & *CK* a *CL*, remanebunt *KL*. *LM*. *MN*. *NK* inter se æqles, quæ sunt differentiæ laterum *AB*. *AC*.

Quia autem istæ æquales lineæ ad angulos rectos sunt junctæ, ut facile ex 26. I. patet, sequitur quadrilaterum K*LMN* esse quadratum differentiæ laterum *AB*. *AC*.

Cum ergo quatuor triangula *BMD*. *DNE*. *EKC*. *CLB*. cum

□to KLMN conſtituant totum $BCDE$; quod fit ab hypotenuſa BC: patebit abunde propoſiti noſtri Theorematis veritas.

Vix autem poſſum quin hic afferam plus quam elegantem Clariſſimi Chriſtophori Sturmii demonſtrationem præſentis prop. 47, quam ex hac figura, alio ac diverſo a nobis ex fundamento, conſtructâ, nobis ſuppeditat, in calculo Alegebraico propoſitum: quæ tamen ab iis, qui vel a limine Analyſin ſpecioſam ſalutaverunt, intelligi poteſt.

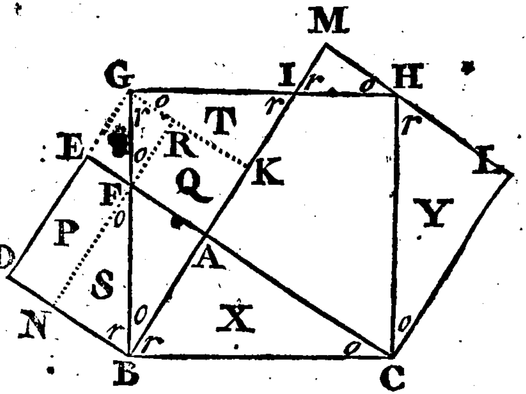
Illa autem ita ſe habet. Trianguli Rectanguli ABC, latus BC ſeu hypotenuſa dicatur a: AC vocetur b. AB c. Area Trianguli ABC erit $\frac{1}{2}$ bc. adeoque quatuor triangula facient $2\,bc$: Deinde differentia laterum AB. AC erit $c-b$, ejuſque □tum $cc-2bc+bb$: quod priori areæ quatuor triangulorum additum facit $cc+bb$,

quæ

quæ ſumma eſt ∞lis □to *aa* facto ab hypotenuſa.

Cum autem iſta ſumma exhibeat duo □ta laterum *AB*. *AC*. ſequitur etiam duo illa □ta eſſe ∞lia □to *BC*.

Q. E. D.



Cæterum illustris hujus propositionis aliam a præcedente generalem demonstrationem hoc modo damus.

Triangulum rectangulum datum sit ABC; laterum AB. AC. quadrata sint AD. AL: & lateris BC quadratum BH: Jam patet ad oculum quadratum BH a reliquis quadratis AD, AL, abscindere triangulum AFB & trapezium AIHC. Si jam, producta DE

DE in G, & ducta NR per F parallela BM & GK parallela EA, demonstratur esse triangulum X ꝏ Y.

S ꝏ T.

Parallelogr. P ꝏ Q.

Triangulum GFR ꝏ IHM.

Certi esse poterimus de propositionis veritate.

DEMONSTRATIO.

Generaliter notandum facile posse ex præcedentibus demonstrari omnes angulos O ut & omnes R esse inter se æquales.

Primum X ꝏ Y.

Duo triangula X & Y habent duos angulos O & R ut & latera BC. CH æqualia: Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt æqualia.

Se-

Secundum S ∞ T.

Duo triangula S & T, habent duos angulos O & R, & ut & latera NF. GK æqualia : Ergo (26. I.) ipſa ttiangula ſunt æqualia. Et latus BF ∞ GI. quibus ab æqualibus BG, GH ablatis, remanet FG ∞ IH.

Tertium P ∞ Q.

Quia ſunt complementa parallelogrammi DK. (43. I.

Quartum Triang. GFR ∞ IHM.

Duo triangula GFR & IHM, habent duos angulos O & R. ut & latera FG. IH æqualia. Ergo (26. I.) ipſa triangula ſunt inter ſe æqualia.

Ex quibus patet lateris BC quadratum BH in ſe comprehendere duorum reliquorum laterum AB. AC quadrata AD. AI. Ergo quadratum BH etiam

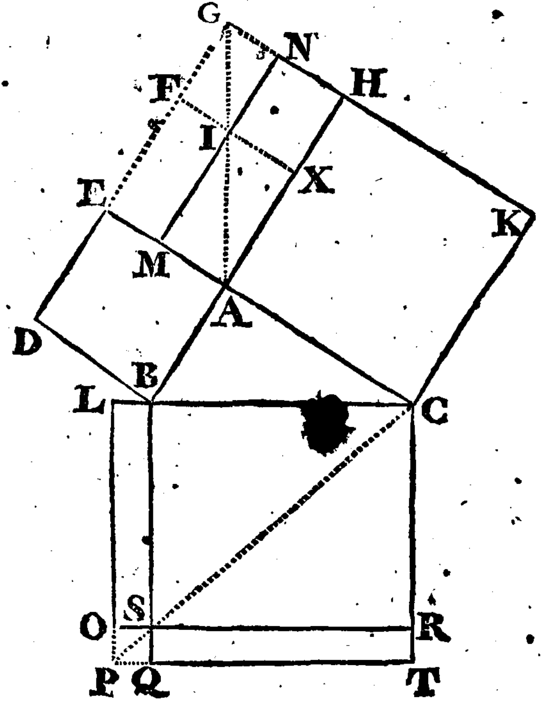
per

per Axioma 13. duobus quadratis AD. AI. æquale est.

Q. D. E.

Quod autem BG concurrat cum DE in puncto G, & CH cum ML in H; supra demonstratum est.

Alia DEMONSTRATIO.



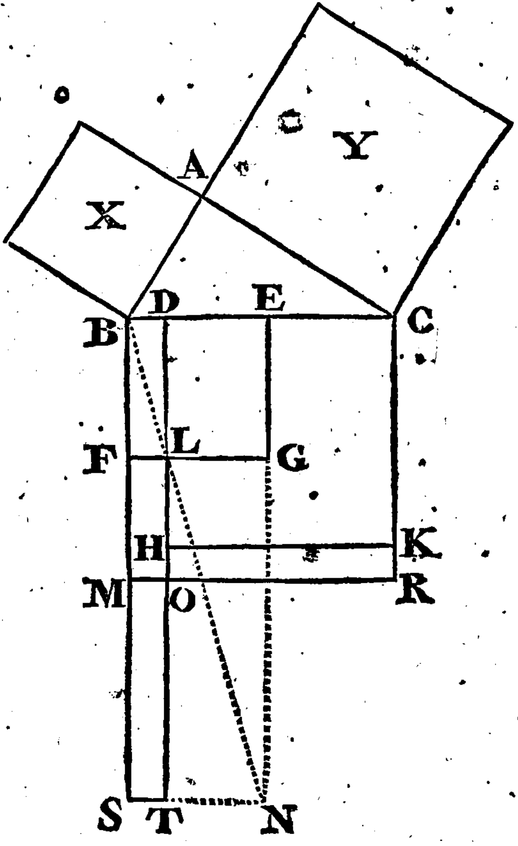
Tri-

Trianguli rectanguli ABC, laterum quadrata sint AD. AK. BT. demonstrandum est hoc tertium BT. esse ∞ le duobus reliquis.

Fiat AX ∞ AB, erit super AX factum quadratum AF ∞ AD. Producatur KH in G ut sit HG ∞ XF Ducatur AG. & per I ducatur MIN parallela AH & tandem agatur EG. Eritque HE parallelogrammum, cujus complementa EI. IH. sunt æqualia: si utrimque addatur commune parallelogrammum MX. erit quadratum AF hoc est AD ∞ paralleg. MH:

Ergo totum parallelogr. MK esse æquale duobus quadratis AD. AK.

Deinde sumatur CL ∞ CM, & CR ∞ CK. & perfecto parallel. LR (quod erit ∞ ipsi MK) producantur LO & TQ ut sibi occurrant in P, tum ducatur Diagonalis CS, quæ productâ cadet in P. (ut mox demonstrabitur.) Hisce factis in parallelogr. LT duo complementa LS. ST erunt (43. I.) inter se æqualia: quibus si addatur commune parallelogr. BR, erit parallelogr. LR (hoc est duo Quadrata AD. AK) ∞ quadrato BT.



Ul-

Ultima Demonstratio.

Intra lateris BC quadratum BR, sit □ CH ∞ lateris AC □to Y: Quo a □to BR sublato remanebunt duo parallelogramma BO. OK. seu facto parallelogr. OS ∞ OK, remanebit totum parallelogrammum BT, Quod si demonstratur esse ∞ □to X, peracta res erit.

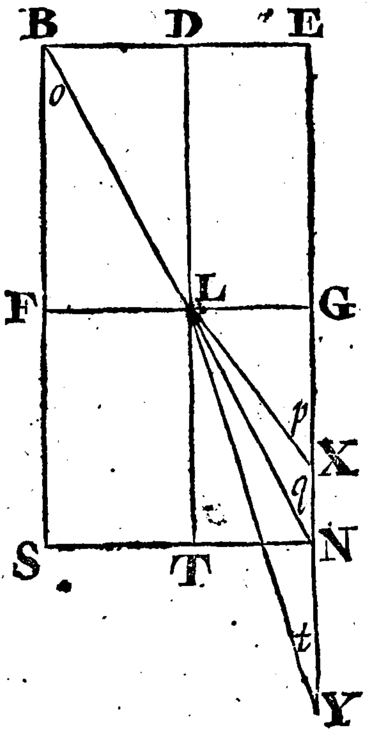
Quare sumta BE ∞ BA, construatur □tum BG ∞ □to X. Tum productis lateribus EG. ST, ut concurrant in N; ex B per L ducatur BLN; quæ etiam cadet in idem punctum N.

Tum in parallelogrammo BN complementa EL. LS erunt æqualia & si ab utraque parte addas commune BL. erit parallelogr. BT (hoc est BO + OK) ∞ □to BG seu X.

Unde jam patet duo □ta X & Y esse æqualia □to BR.

Q. D. E.

Quod autem Diameter BL producta cadat in punctum N, ubi latera EG, ST producta concurrunt, sic probatur.



Si

Si tnon cadat in N, tum juxta adversarium cadat.

Vel supra N in X, ut BX sit linea recta.

Vel infra N in Y, ut BY sit recta.

In X supra N.

Angulus O ∞ Q.
Angulus O ∞ P. 29. I.

Ergo P ∞ Q externus interno contra 16. I.

Quæ demonstratio obtinet in omnibus punctis supra N sitis.

In Y infra N.

Angulus O ∞ Q.
Angulus O ∞ T. 22. I.

Ergo Q ∞ T. iterum externus interno contra 16. I.

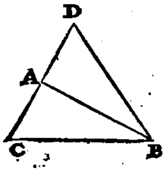
Eademque demonstratio locum habet in omnibus punctis infra N positis.

Ergo cum linea BL producta non possit cadere supra nec etiam infra N necessario cadet in ipsum punctum N.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

Theor. 34.



Si quadratum ab uno Trianguli latere CB descriptum sit æquale duobus reliquorum laterum CA. AB quadratis: angulus CAB, quem reliqua ista latera continent, rectus erit.

DEMONSTRATIO.

a 11. 1. Ex A ipsi AB (a) excitetur perpendicularis AD ꝏ AC. & ducatur recta DB.

Tum in Triangulo DAB erit.

b 47. 1. Quadr. DA (hoc est AC) + quadr. AB (b) ꝏ quadr. DB.

Atqui quadr. AC + quadr. AB etiam est ꝏ quadr. CB per Prop.

---

c Ax. 1. Ergo (c) quadr. DB ꝏ quadr. CB.

Adeoque latus DB ꝏ lateri CB.

Quare in Triangulis ADB, ACB.

Latus AD ꝏ AC per constructionem.

Latus DB ꝏ CB.

Latus AB commune.

---

d 8. 1. Ergo (d) etiam omnes anguli sunt; æquales adeoque

Ang. DAB ꝏ CAB.

Atqui DAB est rectus.

Ergo CAB etiam rectus erit. Q. D. E.

FINIS LIBRI PRIMI.

Eu-

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

IN primo libro instituta triangulorum tum quoad angulos tum quoad latera varia comparatione, & parallelogrammum non una & inter se & cum triangulis collatione, in hoc libro secundo aggreditur Euclides linearum ad libinum sectarum parallelogramma Rectangula & Quadrata; docendo quomodo se habeant Parallelogramma rectangula quæ fiunt a partibus alicujus lineæ tum inter se tum relata ad Quadrata totius lineæ: sicut ex ipsis propositionibus porro manifestum evadet.

Cum autem hujus libri propositiones; licet numero non adeo multæ, tales sint, ut sua difficultate tyronum progressui haud exiguam sæpe injiciant moram, nos oleum & operam non perdidisse existimabimus, si illarum demonstrationes ita ordinemus, ut quilibet illas attento perlegens studio, illisque primum librum bene perceptum rite applicans, maximam difficultatem penitus disparere comperiat.

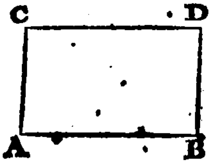
Cæterum ne occurrentes ignotæ voces demonstrationum abrumpant cursum, hic ut & in primo libro factum est, Definitiones præmittuntur terminorum adhibendorum tollentes dubiam significationem.

De-

DEFINITIONES.

I.

Parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur sub duabus rectis CA: AB, rectum angulum A comprehendentibus.

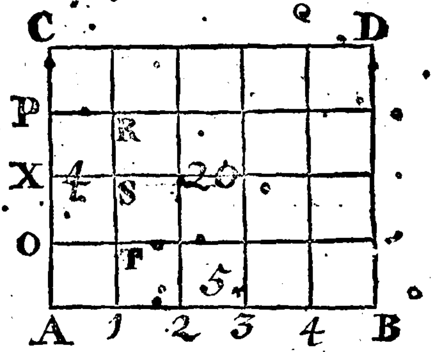


Antea vidimus generationem alicujus superficiei. quæ in memoriam revocata parallelogrammi rectanguli formationem intellectu reddet faciliorem.

Rectæ lineæ AB perpendiculariter insistat linea CA, quæ concipiatur ferri supra lineam AB, ut ipsi semper maneat perpendicularis; cum ista linea CA pervenerit ad punctum B: tum extremum punctum C descriptam relinquet lineam CD æqualem ipsi AB; & cum linea BD sit quasi eadem cum linea AC ex puncto

A delata in punctum B, erit linea BD etiam æqualis ipsi AB.

Unde patet ad inveniendam totam quantitatem seu aream alicujus parallelogrammi requiri tantum notam longitudinem duorum laterum angulum rectum continentium.



Quod ut adhuc clarius evadat, sicut & arctissimam inter linearum in se invicem ductum & numerorum multiplicationem esse affinitatem, ponamus lineam CA divisam esse in quatuor partes æquales CP. PX. XO. OA. similiter lineam AB, AB in quinque partes, quæ prioribus æquales ſint. Si jam linea CA ſuper AB mota pervenerit ad locum 1 Q punctum C. deſcriptum exhibebit lineam CQ. punctum P, lineam PR: X, lineam XS. O, lineam OT; adeoque unico iſto motu facta erunt quatuor iſta minora quadrata CR. PS. XT. O 1, quot nim. linea CA partes habet: ſi enim ex pluribus conſtaret partibus, etiam plura conſtituta eſſent quadrata.

Facile autem intelligimus illud idem eſſe ac ſi numerus 4 ducatur ſeu multiplicetur per 1 ſeu unitatem.

Similiter ſi linea Q 1 (quæ eadem jam concipienda eſt cum AC) ſecundo motu pervenerit ad punctum 2, eodem modo quatuor alia quadrata efficientur quæ prioribus addita ſimul 8 dabunt: id quod iterum idem eſt, ac ſi numerus 4 bis multiplicetur per 1 ſeu ſemel per 2.

Non aliter ſi linea AC perget moveri; tertius motus quatuor alia prioribus adjiciet quadrata; quatuor alia quartus; donec tandem quintus ultima quatuor adjungendo quadrata totum parallelogrammum rectangulum perficiat & compleat: quæ omnia quadrata ſibi invicem addita, 20 exhibebunt; quod rurſus idem eſt ac ſi numerus 4 quinquies per unitatem ſeu ſemel per 5 multiplicatus eſſent; quæ operatio ſimiliter eundem producit numerum 20.

Cæterum notandum eſt in ſequentibus ad multiplicandum lineam AB per lineam CD, ſeu ad ducendam lineam AB in lineam CD: vel tandem ad deſignandum rectangulum comprehenſum ſub lateribus AB, CD me ſemper ſcripturum ▭ AB. CD.

Unde jam exiſtimo manifeſtam ſatis eſſe rationem ob quam ad inveniendam alicujus ſeu omnium parallelogrammorum rectangulorum aream ſolummodo duorum laterum rectum angulum comprehendentium requiratur notitia.

Hinc porro apparet, quomodo cognita area parallelogrammi rectanguli, & alterutro laterum alterum inveniri poſſit latus; dividendo ſcilicet datam aream per latus cognitum: id quod in parallelogrammo ABCD clare patet, quod 20 quadrata continet; qui numerus ſi dividatur per 4 ſeu cognitum latus CA. acquiremus 5 pro latere AB. & viciſſim ſi 20 dividatur per 5 ſeu latus notum AB, invenietur 4 pro altero latere AC.

No-

NOTA.

Primo. Parallelogrammum dicitur rectangulum quod habet unum angulum rectum. Nam si unus est rectus, [a] erunt & reliqui recti. a 29 & 34. I.

Secundo. Parallelogrammum est vel oblongum vel quadratum.

Oblongium est quod latera contigua habet inæqualia; sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus; illud autem nos in sequentibus semper exprimemus hoc signo ▭; adeoque ex: gr: ▭ AC, semper significabit parallelogrammum rectangulum AC.

Quadratum est, quod sub duabus rectis æqualibus continetur: illud etiam exprimemus tali signo □ ut □ CD, semper denotet Quadratum CD.

Tertio. In sequentibus nomine rectanguli Euclides semper intelligit parallelogrammum rectangulum.

Quarto. Geometræ omne parallelogrammum exprimunt, duas tantum nominando literas per diametrum oppositas: ut ad designandum parallelogrammum appositum adhibent literas AD. vel BC.

II. Omnis

II.

Omnis parallelogrammi spatii, unum quodlibet eorum quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocatur.

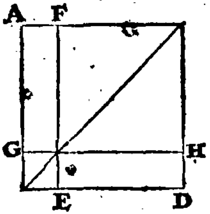
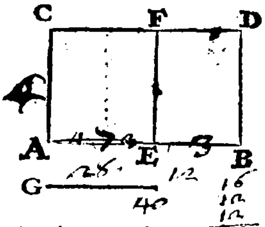


Figura FGEH, composita ex duobus complementis FG. EH &, quod circa diametrum est parallelogrammo GE, dicitur Gnomon seu norma; ad imitationem illius instrumenti quo fabri utuntur, ad examinandum, utrum ex. gr: duo parietes, vel duo asseres ad angulum rectum conjuncti sint nec ne.

PROPOSITIO. I.



Si fuerint duæ rectæ G & AB, quarum altera secta sit in quotcunque partes AE. EB altera vero insecta; erit rectangulum sub illis duabus G & AB comprehensum æquale rectangulis, quæ sub insecta G, & sub singulis segmentis AE. EB continentur. Theor. 1.

DEMONSTRATIO.

Ex punctis A & B erige duas perpendiculares AC, BD æquales datæ G: & juncta CD, ex E duc rectam EF parallelam AC vel BD. Tum lineæ CA, FE inter (a) se æquales erunt ꝏles datæ G. a 34. I.

Jam ▭ AF continetur sub CA, hoc est G & segmento AE.

Et ▭ ED continetur sub FE hoc G est & segmento ED.

Duo autem ▭la AF, ED simul sunt (b) ꝏlia toti ▭lo AD quod continetur sub data & tota AB. b Ax. 16.

Ergo patet veritas propositionis.

Sub calculi formula breviter sic demonstratur

$$\left.\begin{matrix} AB & ꝏ & AE & + & EB \\ G & & G & & G \end{matrix}\right\} M$$

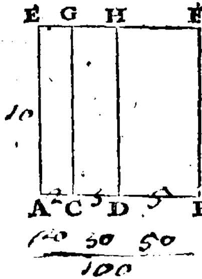
(c) ▭ G, AB ꝏ ▭ G, AE + ▭ G, EB. c Ax. 6.

Q. D. E.

Sit AB. 10,		Vel in Numeris.
AE. 7.		$\left.\begin{matrix} 10 & ꝏ & 7 & + & 3 \\ 4 & & 4 & & 4 \end{matrix}\right\} M$
EC, 3.		
G. 4:		40 ꝏ 28 12. ꝏ 40.
		Z Pro-

PROPOSITIO. II.

Theor. 2. *Si recta AB secta sit utcunque in C & D tria rectangula sub tota AB, & singulis segmentis AC. CD. DB comprehensa æqualia sunt quadrato quod fit a tota AB.*



DEMONSTRATIO.

Super AB fiat quadratum BE, ducantur CG. DH parallelæ AE: a 34. 1. quæ sunt æquales a AE. hoc est AB.

□ EC fit ab EA hoc est AB & parte AC.

□ GD fit ab GC hoc est AB & parte CD. HB

□ HB fit ex HD hoc est AB & parte DB.

Cum autem tria □la EC. GD. HB simul sumta constituant □tum EB, patet illa etiam ipsi esse æqualia.[b] b Ax. 13.

Sub calculo.

$$\left.\begin{matrix} AB \propto AC + CD + DB. \\ AB \quad\; AB \quad\; AB \quad\; AB. \end{matrix}\right\} M$$

$\square\, AB \propto \square\, AB.\, AC + \square\, AB.\, CD. + \square\, AB.\, DB.$

Vel in numeris.

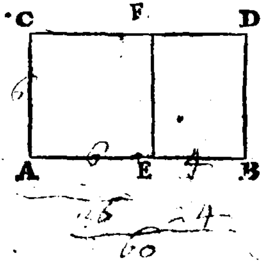
Sit AB 10. AC 2. CD 3. Ergo DB 5.

$$\left.\begin{matrix} 10 \propto 2 + 3 + 5. \\ 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \end{matrix}\right\} M$$

$100 \propto 20 + 30 + 50 \propto 100.$

PROPOSITIO III.

Theor. 3. *Sit recta AB secta utcunque in E, rectangulum sub tota AB & partium alterutra AE comprehensium, æquale est ejusdem partis AE quadrato; una cum rectangulo sub partibus AE. EB comprehenso.*



DEMONSTRATIO.

Ex A & B erige perpendiculares AC. BD æquales segmento a 34. I. AE: tum juncta CD ducatur EF parallela AC, quæ ipsi AC etiam a erit æqualis

CE

A { □ CE continetur ſub CA hoc eſt AE & ſegmento AE, adeoque CE eſt quadratum factum ab AE.
□ FB continetur ſub FE hoc AE & ſegmento EB.

□ CE cum ſeu + □ FB eſt æquale □ CB, comprehenſo ſub CA hoc eſt ſegmento AE & tota linea AB. Q. E. D.

Sub calculo.

$$\left.\begin{matrix} AB \infty AE + EB \\ AE \quad AE \quad AE \end{matrix}\right\} M$$

□ AE. *AB*. ∞ □ AE + □ AE. *EB*.

Vel in numeris.

Sit AB. 10. AE. 6. Ergo EB. 4.

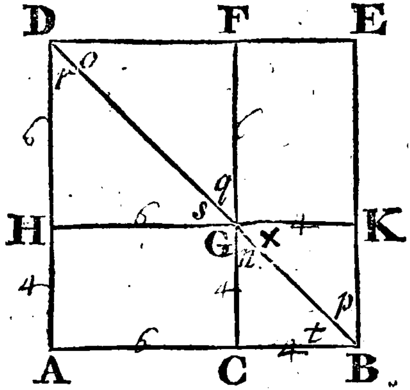
$$\left.\begin{matrix} 10 \infty 6 + 4 \\ 6 \quad 6 \quad 6 \end{matrix}\right\} M$$

---

60 ∞ 36 + 24 ∞ 60.

PROPOSITIO. IV.

Theor. 4. *Si recta linea AB utcunque secta sit in C. Quadratum totius AB erit æquale quadratis segmentorum AC, CB, una cum bis sumto rectangulo sub segmentis AC. CB comprehenso.*



3 5
1 5
24
24
100

DEMONSTRATIO.

a 46. 1. Super AB fiat [a] □ BD, & ducta diametro BD sumatur *B*K ∞ *B*C. tum

tum ducantur b CF. KH paralle- b 31. I.
læ lateribus *BE. BA.*

Jam in triangulo DE*B.*
Angulus O ∞ P. quia uterque
semirectus. c c 2 Cor. 32. I.
Atqui ang. Q ∞ P. d d 29. I.

Ergo O ∞ Q. adeoque DF ∞ FG e 6. I.
Eodem modo probatur quod sit
Ang. R ∞ S. ac proinde latus
DH ∞ GH.
Atqui in parallelogrammo GD,
latera opposita DF. HG ut & DH,
FG sunt æqualia f f 34. I.
Ergo omnia illius latera sunt
inter se æqualia.
Atqui illorum unum HG ∞
AC. g g 34. I.

Ergo omnia sunt æqualia segmento AC. Adeoque cum omnes anguli sint recti, parallelogrammum DFGH est quadratum factum ab uno segmento AC.

Eodem modo facile demonstraſtratur parallelogrammum CK eſſe quadratum alterius ſegmenti C*B*.

Deinde ▭ FK continetur ſub FG hoc eſt AC & ſub G*K* hoc eſt C*B*.

Denique ▭ AG continetur ſub uno ſegmento AC & ſub CG hoc eſt C*B*.

Quæ duo ▭ la ſi ad duo reliquo □ta addantur exhibebunt totum □ quod ſit ab AB; adeoque ipſi æqualia erunt. Q. E. D.

Per calculum hoc modo demonſtratur.

AB ꝏ AC + CB
AB ꝏ AC + CB M.

□ AC + ▭ AC. CB.
+ ▭ AC. CB + □ CB.

□ AB ꝏ □ AC + 2 ▭ AC. CB +
□ CB.

Seu in numeris.

AB ꝏ 10.	AB 10
AC ꝏ 6.	AB 10
Ergo CB ꝏ 4.	100
	4 CB

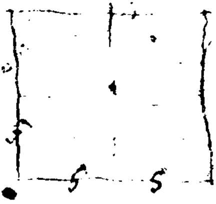
AC 6	4 CB	6 AC
AC 6.	4 CB	4 CB
36	16	24
		2
		48
		36
		16
		100

COROLLARIUM I.

Parallelogramma circa diametrum quadrati sunt quadrata.

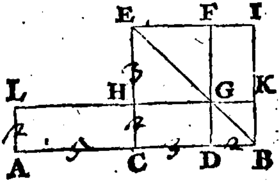
COROLLARIUM II.

Si recta linea bifariam secetur quadratum totius lineæ quadruplum est quadrati a dimidia facti.



PROPOSITIO V.

Theor. 5. *Si recta linea AB secetur in æqualia in C, & non æqualia in D: rectangulum AG sub inæqualibus segmentis AD. DB comprehensum, una cum quadrato HF ab intermedia sectione CD, æquale est quadrato CI, quod a dimidia CB describitur.*



16
9
25

PRÆPARATIO.

a 46. 1. 1. Super dimidia CB fiat [a] quadratum CI, ducaturque diameter.

b 31. 1. 2. Ex D ducatur DF lateri BI [b] parallela.

3. Sumta BK ꝏ BD, ducatur KL [b] parallela AB, ut & AL parallela BK.

De-

DEMONSTRATIO.

A (□ CG ∞ [c] □ GI. quia sunt complementa. [c] 43. I.
□ DK □ DK.

□ CK ∞ DI.

Atqui □ CK ∞ [d] □ AH. quia sunt in iisdem parallelis & æqualibus basibus. [d] 36. I.

Ergo □ AH ∞ □ DI.) A.
□ CG □ CG.)

A (□ AG ∞ Gnomoni GHBFG.
□ HF □ HF, quod fit a CD. 4. II.

□ AG + □ HF. ∞ □ CI. a dimidia CB. facto.

In numeris.

Sit tota AB 10. Ergo dimidia AC, CB 5. AD 8. Ergo DB 2. Et CD. 3.

CB 5) M. CB 5)	M (AD 8 (DB 2
□ CB 25	□ AD. DB. 16.

Tum.

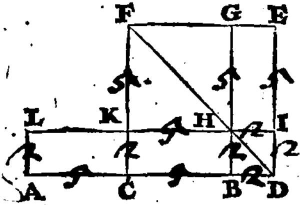
CD 3.) M.
CD 3.)

□ CD 9.) A
□ AD. DB 16.)

□ ADB. + □ CD 25. ut ante.

PROPOSITIO VI.

Theor. 6. *Si recta AB ſit bifariam ſecta in C, eique recta quædam BD adjiciatur; Erit rectangulum ſub tota compoſita AD & adjecta BD contentum una cum quadrato dimidiæ CB, æquale quadrato ipſius CD compoſitæ ex dimidia & adjecta.*



PRÆPARATIO.

1. Super CD fiat □ CE.

2. Ducta Diametro FD, ex B agatur BG parallela DE.

3. Sumpta DI ∞ DB, ducatur IL parallela DA, ut & AL parallela DI.

De-

DEMONSTRATIO.

▭ AK ∞ [a] ▭ CH. quia in iisdem parallels. a 36. 1.

Atqui ▭ HE ∞ [b] ▭ CH, quia sunt complementa. b 43. 1.

Ergo ▭ AK ∞ [c] ▭ HE.
▭ CI ▭ CI. } A. c Ax. 1.

A { ▭ AI ∞ [d] Gnomoni GHKDG.
□ KG □ KG factum a dimidia CB. d Ax. 2.

▭ AI + □ KG ∞ □ CE quod fit a CD

In numeris.

Sit linea AB 10. BD 2. Ergo tota AD. 12. Dimidia AB. seu AC. seu CB 5. Ergo CD 7.

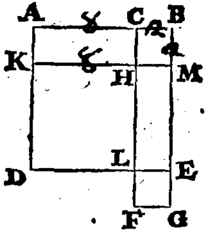
AD 12.
BD 2. } M.

▭ AD. DB 24
□ CB. 25 } A.

▭ AD. DB + □ CB 49 ∞ 49 □ CD.

PROPOSITIO VII.

Theor. 7. *Si recta AB utcunque secetur in C, erunt quadrata totius AB & utriusvis segmenti CB, æqualia bis sumto rectangulo contento sub tota AB & segmento dicto CB, una cum quadrato alterius segmenti AC.*



20
20
64
104

PRÆPARATIO.

a 46. 1. 1. Super [a] AB fiat □ AE.

2. Sume BM ꝏ BC, & ducantur CL

b 31. 1. MK [b] parallelæ lateribus BE. BA. Eritque LE ꝏ [c] CB.

c 34. 1.

3. Super LE fiat □ EG.

De-

DEMONSTRATIO.

Duo □ta AE. EF ∞ [d] duobus ▭lis AM. MF cum □to KL. [d] Ax. 13.

Atqui ▭ AM continetur sub AB & BM hoc est BC.

Et ▭ MF continetur sub MG (quæ facile probatur esse æqualis AB, cum sit ME ∞ AC & EG ∞ CB) & GF hoc est BC

Ut & □ KL sit a KH hoc est AC altero segmento.

Ergo patet veritas propositionis.

In numeris.

Sit	AB 10.	□ AB 100	A.
	AC 8.	□ CB 4	
Ergo CB 2.		□ AB + □ CB 104.	

AB 10 M.
BC 2

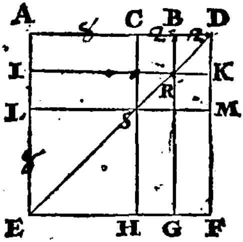
▭ AB BC 20
2

2 ▭ AB. BC. 40 A.
□ AC 64

2 ▭ AB BC + □ AC 104.
ut ante.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 8. *Si recta linea AB secetur utcunque in C; eique adjiciatus BD ∞ BC; Rectangulum quater comprehensium, sub data AB & alterutro segmento CB, una cum quadrato alterius segmenti AC, erit æquale quadrato AF quod fit a composita AD.*



PRÆPARATIO.

1. Super tota AD [a] fiat quadratum AF.

a 46. 1. 2. Sumtis DK, KM æqualibus ipsi BC, ducantur KI, ML parallelæ DA; ut & BG, CH parallelæ AE.

3. Ducatur Diameter ED.

De-

DEMONSTRATIO.

Facile patet quatuor ▭la IC. IS. GS GM esse inter se [a] æqualia, & sub æqualibus lineis contenta. a 36. & 43. 1.

Et circa R constituta sunt quatuor □ta quorum latera omnia sunt ipsi BC æqualia. [b] Ergo si addantur b 3 Cor. 4. hujus.

▭la IC, IS, GS, GM. | A.
□ta CR | SR | RD | MR. |

Erunt ▭la AR. LR. GS + RD. GK. omnia inter se æqualia, & contenta vel sub lineis AB. BC, vel sub lineis quæ illis æquales sunt.

Quibus si addatur □ LH factum ab LS hoc est altero segmento AC. Tota ista summa seu quinque istæ figuræ exæquabunt totum quadratum AF factum a composita AD. Q. D. E.

In numeris.

Sit AB 10. AC 8. Ergo CB 2.

AC 10 } M. AD 12 } M
CB 2 } AD 12 }

▭ AC. CB 20 } M □ AD 144
4 } ut ante.

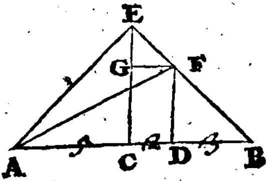
4 ▭ AC CB 80 } A.
□ AC 64 }

144.

Bb PRO-

PROPOSITIO IX.

Theor. 9. *Si recta linea AB secetur in æqualia in C, & non æqualia in D; quadrata inæqualium segmentorum AD. DB. dupla sunt quadratorum AC. GD. quæ a dimidia AC & ab intermedia CD fiunt.*



49
9
58

25
4
29

PRÆPARATIO.

I. Ex C erigatur perpendicularis CE ∞ AC vel CB, & jungantur AE EB.

2. Ex D ducatur DF parallela CE.

3. Ex F agatur FG parallela AB: ut & denique FA.

De-

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE eſt rectangulum & Iſoſceles, ergo anguli A & E ſunt ſemirecti; ut & in triangulo ECB anguli E & B ſunt ſemirecti; adeoque totus angulus EAB eſt rectus. a 32. I.

Deinde in triangulo EGF, G (∞ [b] ECB) eſt rectus: ang. E ſemirectus: ergo F etiam ſemirectus: adeoque EG ∞ GF. c b 29. I.

c 6. I.

Denique in triangulo FDB angulus D (∞ ECB) rectus eſt. Angulus B ſemirectus: ergo & F ſemirectus; adeoque latus FD ∞ DB.

Hiſce prædemonſtratis.

I. In Triangulo rectangulo ACE.

d □AE ∞ □AC + □CE. ſeu quia AC ∞ CE. d 47. I.

□AE duplum □ti AC.

2. In Triangulo rectangulo *EGF*.

$\square EF \propto \square EG + \square GF$. seu quia $EG \propto GF$.

$\square EF$ duplum $\square$ti *GF* hoc est *CD*.

Ergo duo $\square$ta *AE*. *EF* sunt dupla $\square$torum *AC*. *CD*.

3. Atqui in triangulo rectangulo *AEF*.

d $\square AE + \square EF \propto \square AF$.

Ergo $\square$ *AF* etiam duplum $\square$torum AC. CD.

4. Atqui denique in triangulo rectangulo *ADF*.

d $\square AF \propto \square AD + \square DF$ hoc $\square$ DB.

Ergo duo $\square$ta AD. DB sunt dupla $\square$torum AC. CD.

Q. E. D.

In numeris.

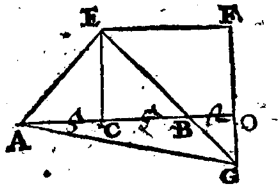
Sit AB 10. Ergo AC. CB. 5.
AD 7: Ergo DB 3.
Et CD 2.

□ AD 49 ⎫ A.	□ AC 25 ⎫ A.
□ DB 9 ⎭	□ CD 4 ⎭
□ta AD. DB 58.	□ta AC. CD. 29. ⎫ M.
	2. ⎭
	bis □ta AC. CD 58.

PROPOSITIO X.

Theor. 10.

Si recta AB secta sit bifariam in C, eique adjiciatur BO; Quadrata totius compositæ AO & adjectæ BO erunt dupla quadratorum ACCO, quæ a dimidio AC fiunt, & a CB composita ex dimidia & adjecta.



PRÆPARATIO.

1. Ex C erigatur perpendicularis CE ꝏ CA vel CB, junganturque AE. EB.

2. Ex E ducatur EF ꝏ CO & parallela AO.

3. Ex F ducatur per O recta

FG

FG quæ productæ EB occurrat in G.

4. Denique agatur AG.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE est rectangulum & Isosceles, ergo anguli A & E sunt a semirecti; ut & in triangulo ECB anguli E & B semirecti sunt: a 32. 1.

Deinde in triangnlo EFG angulus F (∞ opposito O) est rectus: & angulus FEG semirectus, (quia angulus BEC est semirectus;) adeoque alter FGE etiam est semirectus: Ergo latus GF ∞ FE ∞ CO.

Denique in triangulo rectangulo BOG angulus ad G semirectus est: ergo etiam B semirectus; adeoque latus BO ∞ OG.

His-

Hisce præmissis.

1. In triangulo rectangulo ACE.

b 47. 1. □ AE ∞ [b]□ AC + □ CE. seu quia AC ∞ CE.

□ AE est duplum □ti AC.

2. In Triangulo rectangulo *EFG*.

□ [b]EG ∞ □ *EF* + □ FG, seu quia *EF* (∞ CO) ∞ *FG*.

□ *EG* duplum □ti *EF* hoc CO.

Ergo duo □ta AE. *E*G sunt dupla □torum AC. CO.

3. Atqui in triangulo rectangulo *AEG*.

□ta *AE*. *EG* ∞ [b]□ AG.

Ergo □ AG est duplum □torum AC. CO.

4. Atqui denique in triangulo rectangulo AOG

□ AG ∞ □ AO + □ OG.

Ergo duo □ta AO. OG (hoc est OB) sunt dupla □torum AC. CO. Q. D. *E*.

Vel

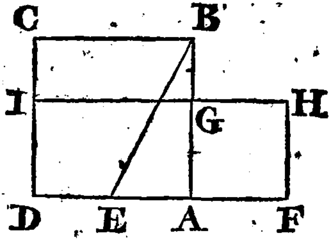
Vel in numeris.

Sit AB ꝏ 10. Ergo AC, CB. 5.
Sit BO ꝏ 2. Ergo AO ꝏ 12.
Et CO ꝏ 7.

□ AO 144 } A.	□ AC 25 } M.
□ OG 4	□ CO 49
□ta OA. OG 148	□ta AC. CO 74 } A. 2
	Bis □ta AC. CO 148

PROPOSITIO. XI.

Probl. I. *Datam rectam AB ita secare in G, ut rectangulum comprehensum sub tota linea AB & uno segmentorum BG sit æquale alterius segmenti AG quadrato.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur AD perpendicularis & æqualis ipsi AB.
2. Divisa AD bifariam in E, junge EB
3. Sumatur EF □ EB.
4. Fac AG ∞ AF. Et dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

Supra data AB compleatur □ AC, ut & supra AG □ AH & Recta HG producatur in I.

□

▭ DF. FH (hoc est FA) + □ EA
∞ [a] □ EF. (hoc est □ EB. a 6. 2.

Atqui □ EB ∞ □ AB. seu □ AC b 47. 1.
+ □ EA.

Ergo ▭ DF. FH + □ EA ∞ □ EA
+ □ AC.

Et ablato utrimque □to EA.

▭ DF. FH [c] ∞ □ AC \ S. c Ax. 3.
▭ DG   ▭ DG /

□ AG ∞ ▭ CG.

Atqui ▭ AH fit a segmento AG & ▭ CG continetur CB hoc est AB & altero segmento BG.

Ergo patet factum esse quod quærebatur.

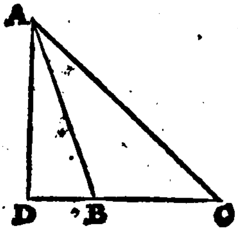
SCHOLIUM.

In numeris hæc propositio nullo solvi potest modo, cum radicis quadratæ extractio, quæ hic requiritur non semper rationales numeros admittat.

PROPOSITIO XII.

Theor. 11.

In triangulo obtusangulo ABC quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, superat reliquorum laterum AB. BC quadrata, bis sumpto rectangulo, quod continetur sub latere CB, & sub ipsa BD in directum ei addita usque ad perpendicularem ab altero acuto angulo A cadentem.



De

DEMONSTRATIO.

$\square AC \propto$ [a] $\square AD + \square DC$. [a] 47. I.

Atqui $\square DC$ [b] $\propto \square DB + \square BC + 2 \,\Box\, DBC$. [b] 4. II.

Ergo hiſce in locum $\square DC$ poſitis.

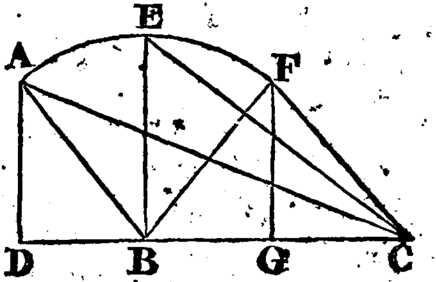
$\square AC \propto \square AD + \square DB + \square BC + 2 \,\Box\, DBC$.

Atqui rurſus Duo $\square$ta AD. DB [a] $\propto \square AB$.

Ergo hoc in illorum locum repoſito.

$\square AC \propto \square AB + \square BC + 2 \,\Box\, DBC$.

SCHOLIUM. I.



Hoc modo paulo aliter eadem propo-ſitio demonſtrari poteſt.

Ex B erigatur perpendicularis BE ∞ BA, & ducatur EC.

Hoc facto duo triangula ABC. EBC. habent duo latera AB. BC æqualia ipſis EB. BC: at vero angulum ABC < angulo EBC: Ergo per 24. I. baſis AC erit < EC. Adeoque □ AC < □to EC hoc eſt □tis EB ſ. AB & BC.

Unde patet nihil aliud requiri, quam ut inveniatur differentia □torum AC. EC.

$\square AC \propto \square AD + \square DC.$

Atqui $\square DC \propto \square DB + \square BC + 2 \sqsubset DBC.$

Ergo.

$\square AC \propto \square AD + \square DB + \square BC + 2 \sqsubset DBC.$

Atqui $\sqsubset$ta AD. DB. ꝏ $\square$to AB f. EB.

Ergo.

$\square AC \propto \square EB + \square BC + 2 \sqsubset DBC$

$\square EC \propto \square EB + \square BC.$

Quæ si a se invicem subtrahantur, erit $2 \sqsubset DBC$ differentia $\square$torum AC. EC seu excessus quo $\square$ AC superat $\square$ EC, hoc est $\sqsubset$ta EB BC. seu AB. BC.

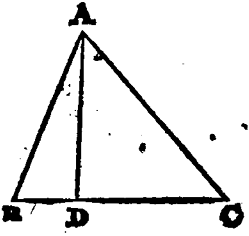
SCHOLIUM II.

Ex hac propositione deducitur generalis Regula Geometrarum, qua ex tribus trianguli obtusanguli lateribus cognitis inveniunt basin productam vel illius segmentum BD. quæ imperat, ut a $\square$to AC demta summa $\square$torum AB. BC, reliquum dividatur per duplum baseos BC; quæ operatio exhibebit quæsitam DB.

PROPOSITIO XIII.

Theor. 12.

In acutangulo triangulo ABC quadratum lateris AB, quod acuto angulo C opponitur, superatur a quadratis reliquorum laterum AC. BC, bis sumto rectangulo sub latere CB & sub assumpta interius linea CD usque ad occursum perpendicularis ab altero angulo acuto A cadentis.



De-

DEMONSTRATIO.

□ *B*C + □ DC ꝏ [a] 2 ▭ *B*C. CD + □ *B*D. [a] 7. 11.
□ AD   □ AD } A.

□ *B*C + □ AD + □ DC ꝏ □ AD + □ D*B* + 2 ▭ *B*CD.

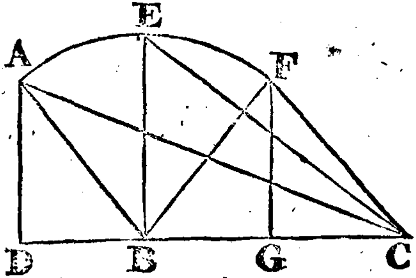
Atqui duo □ta AD. DC ꝏ □ AC.
Et duo □ta AD. D*B* ꝏ □ AB. } 47. I.

*E*rgo his in illorum locum ſubſtitutis.

□ *BC* + □ AC ꝏ □ *AB* + 2 ▭ *BC. CD.*

Q. *E*. D.

Alia demonſtratio.



Triangulum acutangulum ſit, *FBC*, demonſtrandum eſt duo □ta *FB. BC*, ſuperare □ *FC* per duplum ▭ *CBG*.

Ex B erigatur perpendicularis *BE* ∞ *BF*, & ducatur *EC*, tum duo triangula *EBC. FBC*, habebunt duo latera *EB. BC*, ∞ lateribus *FB. BC* & angulum *EBC* $<$ *FBC*: quare per 24. I. latus EC erit $<$ FC. Adeoque EC hoc eſt duo □ta EB. ſeu FB. BC erunt $<$ □ FC.

Unde

Unde si □ FC subtrahatur a □ EC, obtinebitur differentia seu excessus, quo □ta FB. BC superaut □ FC, adeoque demonstrata erit propositio.

□ EC ꝏ □ EB f. □ FB + □ BC.
Atqui
□ BC ꝏ □ BG + 2 ▭ BGC + □ GC.

Ergo facta substitutione
□ EC ꝏ □ FB + □ BG + 2 ▭ BGC + □ GC
□ FC ꝏ □ FB + □ BG + □ BC.

□ EC − □ FC ꝏ 2 □ BG. f. 2 ▭ BG. BG + 2 ▭ GC. BG
Seu
2 ▭ BC. BG.

Hoc est duplum ▭ sub basi BC & segmento *B*G; pro differentia qua □ EC, hoc est duo □ta EB. f. FB + *B*C excedunt □ FC.

SCHOLIUM I.

Simili operatione quoque innotescet, differentia □torum AC & FC: quorum primum oppo-

 ni-

nitur angulo obtuſo ABC. alterum vero acuto FBC.

$$\left.\begin{array}{l} \square AC \propto \square AB + \square BC + 2 \sqsubset \\ \quad DB.BC. \quad 12.\,II. \\ \square CF \propto \square FB \text{ ſeu } \square AB + \square \\ \quad BC\; 2 \sqsubset BG.BC. \quad 13.\,II. \end{array}\right\} S$$

$$\square AC - \square CF \propto 2 \sqsubset DB.BC + 2 \sqsubset BG.BC.$$

$$\text{ſeu } 2 \sqsubset DG.BC.$$

Ex quo calculo ſequitur hoc Theorema.

Si triangulum obtuſangulum ABC cum acutangulo F*B*C latera AB. BC lateribus FB. BC æqualia habeat; quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti AC, ſuperabit quadratum lateris acuto angulo oppoſiti FC, per duplum rectangulum quod ſit a baſi BC, & DG inter duas perpendiculares AD. FG intercepta.

Scho-

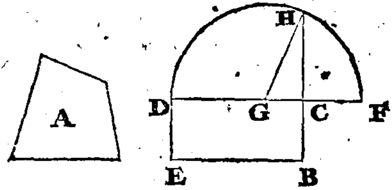
SCHOLIUM II.

Hinc iterum fluit Geometrarum regula ad inveniendum baſeos ſegmentum CD, ex tribus trianguli acutanguli lateribus cognitis: quod invenitur ſi a ſumma □torum AC. CB. (circa angulum ſegmento adjacentem) ſubtrahatur □ AC, & reliquum per duplam baſin BC dividatur.

PROPOSITIO XIV.

Prob. 2.

Dato rectilineo A æquale quadratum constituere.



CONSTRUCTIO.

a 45. 1. 1. Constituatur □ BD ∞ rectilineo A: quod si habeat latera æqualia. obtinemus quadratum quæsitum. Si vero non tum.

2. Producatur latus DC in F, ut CF sit ∞ CB.

3. Linea DF bisecta in G, centro G radio GD vel GF describe semicirculum DHF.

4. Latus BC producatur ad semicirculum in H.

Dico □ CH esse ∞ rectilineo A.

De-

DEMONSTRATIO.

▭ DC. CB (seu CF) + □ GC [b] ∞ □ GF. s. □ GH. b 5. II.

Atqui □ GH [c] ∞ □ GC + □ CH. c 47. I.

Ergo his in illius locum substitutis.

▭ DC. CB + □ GC ∞ □ GC + □ CH.

Si auferatur utrimque □ GC.

▭ DCB ∞ □ CH.

Atqui ▭ DCB ∞ rectilineo A per constr.

Ergo □ CH etiam est ∞ eidem rectilineo A.

Q. E. D.

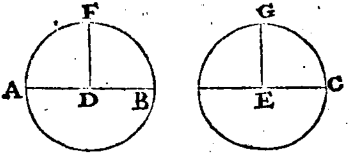
Elementorum Libi Secundi Finis.

Eu-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

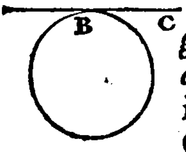
DEFINITIONES.

I.



Æquales circuli sunt, quorum diametri AB. BC. *sunt æquales: vel quorum, quæ ex centris* D. & E. *rectæ lineæ* DF. EG. *sunt æquales.*

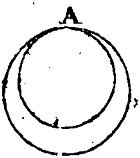
II.



Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat puta in B. *si producatur* in C. *circulum non secat.*

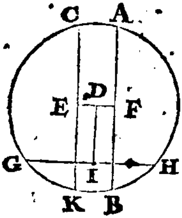
III.

III.



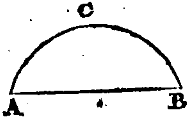
Circuli se mutuo tangere dicuntur qui sese mutuo tangentes ut in A. *sese mutuo non secant.*

IV.



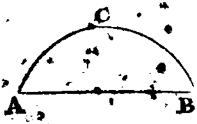
In circulo æqualiter distare à centro rectæ dicuntur, cum perpendiculares D E. DF. *à centro* D. *ad ipsas* AB. CK. *ductæ æquales sunt ; longius autem abesse dicitur* GH. *in quam major perpendicularis* DI. *cadit.*

V.



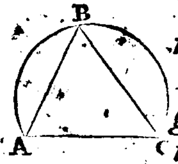
Segmentum circuli, est figura quæ sub recta A B. *&* *circuli peripheria* ACB. *comprehenditur.*

VI.



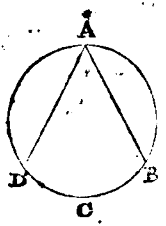
Segmenti autem angulus est C A B. *qui sub recta linea* A B. *& circuli peripheria* C A. *comprehenditur.*

VII.



In segmento autem angulus est puta A B C. *cum in segmenti circumferentia sumptum fuerit punctum quodpiam* B. *& ab eo in terminos rectæ* A C. *segmentum terminantes, lineæ rectæ ut* B A. B C. *fuerunt ductæ.*

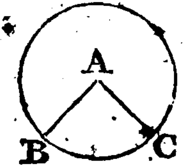
VIII.



Cum vero comprehendentes angulum D A B. *rectæ* A D. A B. *aliquam assumunt peripheriam ut* B C D. *illi angulus dicitur insistere.*

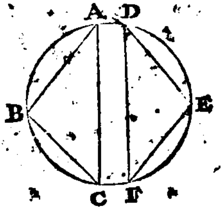
IX.

IX.



Sector circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum A *angulus* BAC. *fuerit conſtitutus: comprehenſa nimirum figura & à rectis* AB. AC. *angulum* BAC. *continentibus, & à peripheria* BC. *ab illis aſſumpta.*

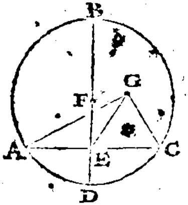
X.



Similia circuli ſegmenta ſunt ABC. DEF. *quæ angulos* BAC. EDF. *capiunt æquales, aut in quibus anguli* CBA. FED. *inter ſe ſunt æquales.*

PROPOSITIO I.

Probl. I.



Dati circuli ABC centrum F reperire.

CONSTRUCTIO.

a 10. I. 1. Ducta quælibet AC, a dividatur bifariam in E.

b 11. I. 2. Ex E erigatur utrinque b perpendicularis BD usque peripheriam.

3. Illa bifariam dividatur in F.

Dico punctum F esse centrum circuli.

DEMONSTRATIO.

Centrum aut est in BD, aut extra illam.

Si sit in BD, necessario est in puncto, quod illam dividit bifariam; quia Circuli radii sunt æquales; adeoque centrum est in F.

Si juxta Adversarium sit extra BD, ponatur illud ex: gr: in G: tum ductis AG.

AG. EG. CG in triangulis GEA. GEC.

Latus GA ∞ c GC. quia ponuntur radii. c Def. 15. I.
Latus EA ∞ EC per constructionem.
Latus GE commune.

Ergo d omnes anguli sunt æquales d 8. I.
adeoque Ang. GEA ∞ GEC.

Ergo e GEA est rectus.
Atqui BEA est rectus per constructionem. e Def. 10. I.

Ergo ang. GEA ∞ BEA. totum & pars, quod est absurdum.

Et eadem demonstratio obtinet in omnibus punctis quæ possunt assignari extra lineam BD: unde concludendum est illud extra BD non reperiri.

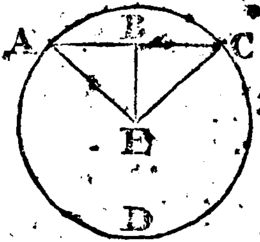
Ergo in BD & quidem ejus puncto F illud erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Si linea recta in Circulo aliam lineam rectam bifariam & ad angulos rectos secat; in illa secante erit centrum.

PROPOSITIO II.

Theor. I. *Si in peripheria Circuli ADC duo quælibet puncta A. C. sumantur, recta AC, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.*



DEMONSTRATIO.

Ex invento Centro E. ductis radiis EA. EC, ad rectam AC ducatur EB:
Tum in Triangulo. EAC.
Latus EA ∞ EC quia radii.

Ergo ang. A ∞ C. 5.I.

Atqui

Atqui externus EBA [a] < interno C. a 16. I.

Ergo EBA etiam < A.

Adeoque in triangulo EBA latus EA oppositum angulo maximo erit [b] < latere EB. b 19. I.

Atqui latus EA pertingit tantum ad peripheriam.

Ergo latus EB cadit intra circulum.

Et eadem demonstratio applicari potest ad omnia puncta lineæ AC.

Ergo tota linea AC cadit intra Circulum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Linea recta Circulum tantum in uno puncto tangit.

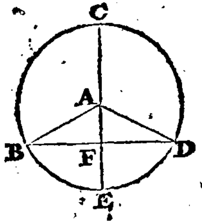
PRO-

PROPOSITIO III.

Theor. 2.

PARS I.

Si in circulo recta quædam CE per centrum A ducta, aliam BD non per centrum ductam, bifariam in F secet; etiam illam ad angulos rectos secabit.



PARS II.

Et si ad angulos rectos eam secet; bifariam quoque secabit.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis radiis AB. AD, in triangulis AFB. AFD.

Latus

Latus AB ∞ AD quia radii.
Latus FB ∞ FD per propositionem.
Latus AF commune.

Ergo omnes anguli sunt inter se æquales, per 8. I. adeoque Ang. AFB ∞ AFD. qui propterea sunt [a] recti. a Def. 10. I.

Pars 2. In iisdem triangulis AFB. AFD.

Ang. ABF ∞ ADF. qui triang. BAD est Isosceles.
Ang. AFB ∞ AFD per propositionem.
Latus AF commune.

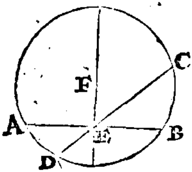
Ergo latus BF [b] ∞ FD. b 26. I.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

In omni triangulo æquilatero seu Isoscele linea recta basin bifariam secans, ad eandem perpendicularis est & contra.

Theor. 3. PROPOSITIO. IV.



Si in circulo duæ recta AB. DC non ambæ per centrum ductæ, se invicem secent: illæ sese non secabant bifariam.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet casus.

Casus I. Aut una tantum transit per centrum, ut ex: gr: FE, patet illam ab altera CB non secari bifariam: quia illa per hypothesin non transit per centrum.

Casus 2. Aut neutra transit per centrum.

Si jam Adversarius contendat duas lineas AB. DC se mutuo secare bifariam in E, ex centro F, ducatur recta FE.

Tum FE secat AB bifariam. Ergo a

a 3. III. ang. FEB est rectus.

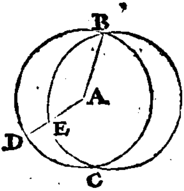
Eadem FE secat DC bifariam. Ergo a ang. FEC est rectus.

Ergo erit ang FEB ∞ FEC. Totum & pars: quod est absurdum.

PRO-

PROPOSITIO V.

Theor. 4.



Si duo circuli BDCB. BEC, sese mutuo secent non habebunt idem centrum.

DEMONSTRATIO.

Si quis ponat A esse commune utriusque centrum, ducatur AB ab illo centro A ad punctum intersectionis B. ut & AD.

Linea AB ∞ AD; quia radii circuli BDC.

AB ∞ AE. quia radii circuli BEC.

Ergo AD [a] ∞ AE. Quod est absurdum. [a] Ax. I.

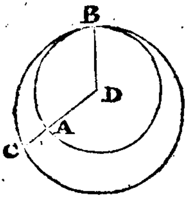
At eadem demonstratio obtinet in omnibus punctis, quæ intra commune utriusque circuli spatium sunt posita.

Ergo universim patet veritas propositionis. Q. D. E.

Theor. 5.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli BA. BC se mutuo interius tangant in B: non erit illorum idem centrum.



DEMONSTRATIO.

Si contendat aliquis punctum ex: gr: D esse commune illorum centrum; ductis D*B*. DC erit.

D*B* ∞ DC. quia sunt radii circuli *BC*.
D*B* ∞ DA, quia sunt radii circuli *B*A.

Ergo

Ergo DC [a] ꝏ DA. Totum & pars: quod eſt abſurdum. [a] Ax. 1.

Adeoque cum eadem demonſtratio omnibus punctis utrique circulo communibus poſſit applicari, non habebunt iſti circuli unum & idem centrum.

Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

Theor. 7.

Si in circulo quovis extra centrum F accipiatur punctum G, ex quo quædam rectæ GA GC. GD. GE. GN. in circulum cadant.

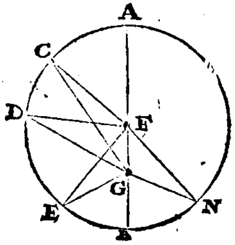
Tum

1. *Maxima erit GA, quæ per centrum F transit.*

2. *Minima erit reliqua diametri pars GB.*

3. *Aliarum vero major est GC, quæ maximæ GA propter.*

4. *Neque plures quam duæ ab illo puncto G ad circumferentiam duci possunt æquales.*



De-

DEMONSTRATIO.

Pars 1. Ductâ FC. in triangulo GFC
Duo latera GF. FC < [a] GC. a 20. I.
Atqui GF. FC ∞ GA. quia FC ∞ FA.

Ergo GA < GC.

Pars 2. Ducta GE. In Triangulo FGE
Duo latera FG. GE [a] < FE. hoc est FB.
S
FG FG

GE [b] < GB. b Ax. 4.

Pars 3. Ducta GD, in triangulis CFG. DFG.
Latus CF ∞ DF.
Latus FG utrique commune.
Sed Ang. CFG < DFG.

Ergo basis CG [c] < DG. c 24. I.

Pars 4. Patet ex praecedentibus; nam si tres possent aequales GD. GE. GN duci; tum forent duae GD. GE ad eandem partem inter se aequales.
Quod repugnat parti 3.

PRO-

Theor. 7.

PROPOSITIO VIII.

Si a puncto A extra circulum accepto ad circulum ducantur quædam rectæ AH. AG. AF.

1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt maxima erit AH, quæ per centrum L transit.*

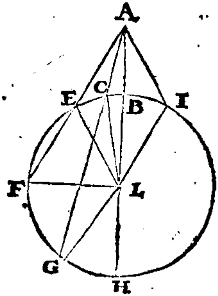
2. *Aliarum major est ea, AG, quæ maximæ AH propior.*

3. *Extra circulum minima est AB, quæ producta per centrum transit.*

4. *Quæ minimæ propior AC remotiore AE minor erit.*

5. Non

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto A in peripheriam duci possunt æquales sive intra circulum sive extra.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta recta LG. in triangulo ALG.

Duo latera [a] AL. LG < AG. [a] 20. I.

Atqui AL. LG ꝏ AH. quia LG ꝏ LH.

Ergo AH < AG.

Pars 2. Ducta linea LF, in triangulis ALG. ALF.

Latus AL utrique commune.

Latus LG ∞ LF. quia sunt radii.

Atqui ang. ALG < ALF.

---

b 24. I. Ergo basis AG b < basi AF.

Pars 3. Ducta LC. in triangulo ACL.

Duo latera AC. CL. b < AL.

CL. ∞ BL. S

---

c Ax. 4. Remanet AC < c AB.

Pars 4. Ducta LE, in triangulis AEL ACL.

Duo latera exteriora

d 21. I. AE. EL d < AC. CL. S

LE ∞ LC.

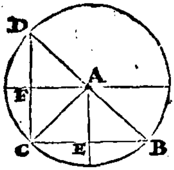
Remanet AE < AC.

Pars 5. Patet ex præcedentibus; nam ducta AI ∞ AE. quæ intra AI ducitur erit illâ minor: quæ extra. illâ major: adeoque ex A non possunt duci plures quam duæ quæ sint æquales. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theor. 8.



Si ab aliquo intra Circulum puncto A plures quam duæ rectæ æquales AB. AC. AD ad peripheriam duci possint: Illud punctum erit centrum.

DEMONSTRATIO.

Ductas rectas DC CB. divide bifariam in F & E per rectas FA. EA.

Tum in triangulis AFD. AFC.
Latus AF utrique commune.
Latus AD ꝏ AC. per propositionem.
Latus FD ꝏ FC. per constructionem.

Ergo Ang. AFD [a] ꝏ AFC, & uterque [b] rectus: adeoque in perpendiculari FA erit centrum. [c]

Deinde eodem modo per triangula AEC. AEB demonstratur centrum etiam esse in perpendiculari EA.

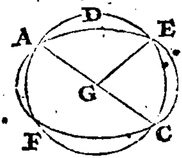
Ergo necessario erit in puncto intersectionis A. quia duæ lineæ FA. EA præter illud nullum habent commune.

Q. E. D.

a 8. I.
b Def. 10. I.
c Coroll. 1. III.

PROPOSITIO X.

Theor. 9.



Duo circuli ADE. AFC se mutuo non secant in pluribus quam duobus punctis.

DEMONSTRATIO.

Juxta Adversarii opinionem ponantur se invicem secare in tribus punctis A. E. C. Tum ex invento circuli ADE centro G. ducantur rectæ. GA. GE. GC: quæ sunt æquales: quia sunt radij circuli ADE.

Atqui tres istæ æquales GA. GE GC etiam pertingunt ad peripheriam alterius circuli AFC: ergo punctum G illius quoque a erit centrum.

a 9. II.

Adeoque duo circuli se invicem secantes haberent idem centrum. b quod est absurdum.

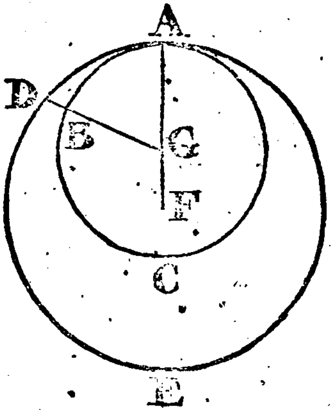
b 5. III.

Pro-

PROPOSITIO XI.

Theor. 10.

Si duo circuli se interius tangant in A, recta FG illorum centra F. G. conjungens, si producatur, transibit per contactum A.



DEMONSTRATIO.

Si juxta Adversarium non cadat in A, cadat aliorsum in D.

Tum

S { Recta FGD ∞ FGA quia sunt radii majoris circuli.
FG FG

GD ∞ GA.

Atqui GB ∞ GA. quia sunt radii minoris circuli.

Ergo GD ∞ GB. Totum & pars. quod est absurdum.

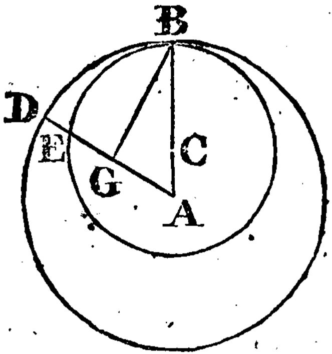
Atqui eadem demonstratio habet locum quandiu inter puncta D & B manet aliquod interstitum; seu quandiu illa puncta non coincidunt hoc est quandiu linea GD non transit per contactum.

Ergo FG producta cadit in contactum A.

Q. E. D.

Scho-

SCHOLIUM.



Poteſt hæc propoſitio ſic converti.

Si duo circuli ſe mutuo interius tangant, & a puncto contactus B, ad centrum unius circuli ducatur Recta, tum in illa aut illius producta quoque erit centrum alterius circuli.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet caſus: Aut enim ducta eſt BA ex contactu ad ad centrum majoris circuli: Aut ducta est BC ex contactu ad centrum minoris circuli C.

CASUS I.

Si centrum minoris circuli non sit in linea BA, sit extra illam *in* puncto G. ducantur lineæ BG & AD per G.

A. { GE ∞ GB. quia sunt radii minoris circuli.
AG AG. juxta Adv. }

AE ∞ AG + GB.

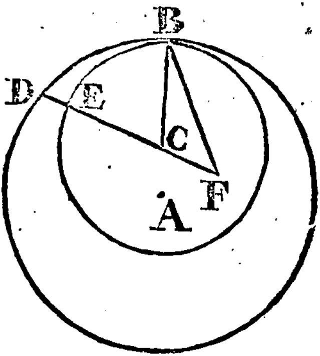
Atqui AG + GB < AB. s. AD. 20.1.

Ergo AE < AD. pars major toto.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus punctis assignatis extra lineam BA. Ergo centrum minoris circuli reperitur in linea BA.

Ca-

CASUS II.



Sit centrum majoris Circuli extra rectam BC, aut illius productam, in puncto F. Ducantur BF & DF per C.

Eritque

A | CE ꝏ CB. quia radii minoris circuli.
A | CF CF.

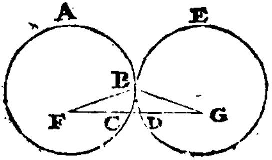
FE ꝏ FC + CB,
Atqui FC + CB < FB s. FD.

Ergo FE < FD. pars toto.
Q. E. A.

Theor. 11.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli ſe invicem exterius contingant in B. Recta quæ illorum centra conjungit; per contactum tranſibit.



DEMONSTRATIO.

Si Adverſarius hoc neget; ſint ſi fieri poteſt centra ita conſtituta, ut recta FG. illa conjungens non tranſeat per punctum contactus B, ſed circulos ſecet in C & D. Tum ductis FB. GB, in triangulo FBG.

La-

Latera FB. *B*G [a] < FG. a 20. I.
Atqui F*B*. *B*G ∞ partibus FC. GD.

Ergo FC. GD < tota FG. quod est absurdum.

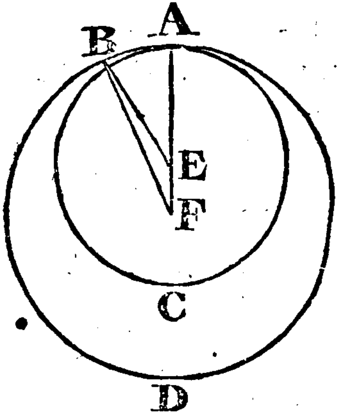
Eadem demonstratio vim habebit quandiu puncta C & D non coincidunt : quod solummodo fit in puncto contactus *B*. Ergo linea centra conjungens per illud transire debet.

Q. E. D.

Theor. 12.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno; sive intus, sive extra tangat.



DEMONSTRATIO.

Casus I. Circulus ABC tangat (juxta Adversarium) in duobus punctis A & B:

a 11. 11. Tum recta FE, tendet a ad puncta contactus A & B; ducatur FB.

FE + EB ∞ FA, quia sunt radii ejusdem circuli.

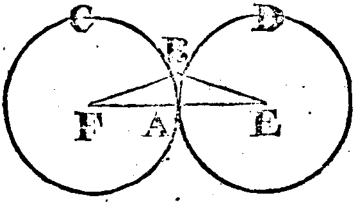
At-

Atqui FB ∞ FA propter eandem rationem.

Ergo FE + EB ∞ FB. Quod est absurdum.[b] b 20. I.

Casus II. Circulus ABC (si non in uno) in duobus punctis tangat circulum ABD. sc. in A & B, Recta FE quæ centra conjungit transit per [c] contactum A: c 12. II.

Atqui (juxta adversium, qui etiam contactum in B ponit) illa etiam transit per B, ut linea FBE sit linea recta.



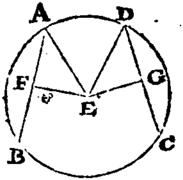
Ergo hinc sequeretur duas rectas FBE, FAE comprehendere spatium. Quod est absurdum. d Ax. 12.

PROPOSITIO. XIV.

Theor. 13.

1. *Æquales rectæ AB. DC in circulo æqualiter a centro distant.*

2. *Et æqualiter a centro distantes inter se æquales sunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ex centro E ductæ perpendiculares EF. EG, lineas [a] A*B*. DC bisecabunt; & quia totæ sunt æquales erunt & semisses AF. *D*G æquales: ducantur radii EA. ED.

a 3. III.

In triangulis rectangulis *AFE DGE*.

ista

□ta *AF.FE* ∞ □ *AE*.
□ta *DG.GE* ∞ □ *DE*. } 47. I.

Atqui □ *AE* ∞ □ *DE*. quia fiunt a radiis.

Ergo □ta *AF.FE.* ∞ □tis DG GE
S. □ *AF* ∞ □ *DG*.

Remanet □ FE ∞ □ GE.

Ergo linea *FE* ∞ GE adeoque distantiæ æquales.

PARS II.

Supra erant
□ta *AF FE* ∞ □tis DG GE } S
□ *FE* ∞ □ GE. }

□ *AF* ∞ □ DG.

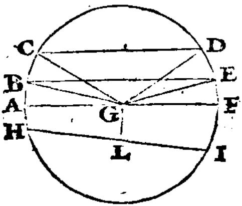
Ergo ipsa *AF* ∞ DG. & ipsarum dupla.
AB [b] ∞ DC. Q. D. E.

b Ax. 6.

Pro-

PROPOSITIO XV.

Theor. 14.



1. *In circulo ABCD rectarum inscriptarum maxima est Diameter AF.*

2. *Reliquarum vero ea BE major quæ centro propior.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis GB. GE. in triangulo BGE.

a 20. I. Duo latera a BG. GE < BE.
Atqui BG. GE ꝏ AF. Diametro.

Ergo AF < BE.
Pars II. Ductis GC. GD : in triangulis BGE. CGD.

Latus BG ꝏ CG } Quia sunt
Latus GE ꝏ GD } radii.
At ang. BGE < CGD.

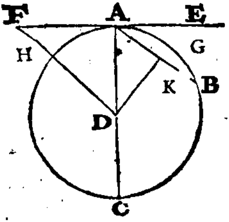
---

b 24. I. Ergo basis BE b < CD.

Q. D. E.

Pro-

PROPOSITIO XVI. Theor. 15.



Si per[a] extremitatem diametri A ducatur perpendicularis FE.

1. Illa cadet extra circulum.

2. Neque inter ipsam & circulum alia recta ad contactum A duci potest, quæ circulum non secet.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex centro D ad quodlibet punctum F ducta DF, erit in triangulo DAF.

Angulus A < F. quia angulus A rectus.

Ergo Latus (a) DF < latere DA. a 19. I.

Atqui DH ∞ DA. quia sunt radii.

Ergo DF < DH. Adeoque quia punctum H est in circumferentia erit F extra.

Idem ratiocinium omnibus punctis lineæ FAE potest applicari: adeoque tota FE (excepto puncto A) erit extra circulum.

Pars 2. Ponat adversarius rectam AB posse duci inter AE. & circulum absque circuli sectione. Ex centro D ad AB ducatur perpendicularis DK. Eritque in triangulo DKA.

Ang. DKA $<$ DAK.

b 19. I. Ergo latus DA b $<$ DK.

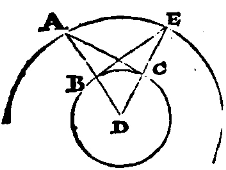
Atqui DA pertingit ad peripheriam. Ergo cadit DK. intra Circulum; adeoque linea AK illum secat.

COROLLARIUM.

Hinc rursus paret rectam lineam Circulum tantum in uno puncto tangere: nam demonstratum est totam rectam FE cadere extra circulum excepto unico puncto A; adeoque in illo sese tantum contingunt.

PRO-

PROPOSITIO XVII. Probl. 2.



** A dato puncto A rectam lineam AC ducere quæ circulum datum BCD tangat.*

CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto A ad centrum ducatur recta AD.

2. Centro D radio DA describatur circuli arcus AE.

3. Ex puncto B erigatur perpendicularis BE.

4. Juncta ED, ducatur AC.

Dico lineam AC tangere circulum:

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADC. EDB.

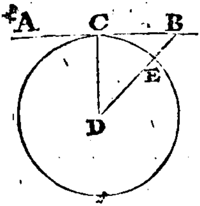
Latus AD ∞ ED } Quia sunt radii eorumdem circulorum.
Latus DC ∞ DB }
Angulus D communis.

Ergo [a] Ang. ACD ∞ EBD. a 4. I.
Atqui Ang. EBD est rectus per const.

Ergo etiam ACD est rectus: adeoque linea AC [b] tangit circulum. b 16. III.

Thĕor. 16.

PROPOSITIO XVIII.



Si recta linea AB tangat circulum, quæ ex centro D ad contactum C ducitur DC; illa tangenti AB perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Si neget Adversarius; Sit alia quædam DB perpendicularis ad tangentem: tum in triangulo DCB,

Angulus DBC < DCB. juxta Adversarium.

a 19. I.

Ergo latus DC < DB. [a]
Atqui DC ∞ DE.

---

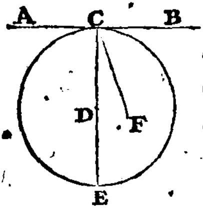
b Ax. 9.

Ergo DE < DB. Pars major toto: quod est [b] absurdum. Et eadem demonstratio habet locum in omnibus punctis lineæ CB.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theor. 17.



Si recta linea AB tangat circulum, & ex contactu C ducatur perpendicularis CE in illa erit centrum.

DEMONSTRATIO.

Si hoc ab Adversario negetur; alibi centrum assignare debet: Sit hoc in F: tum ducta FC erit

Ang. ECB rectus. per proposit.

Atqui FCB [a] etiam rectus juxta positionem Adversarii. a 18. III.

Ergo ECB ∞ FCB. Totum & pars: quod est absurdum.

Eadem autem demonstratio locum habet ubicunque ab adversario centrum ponatur extra lineam CE.

Ergo in linea CE reperitur centrum.

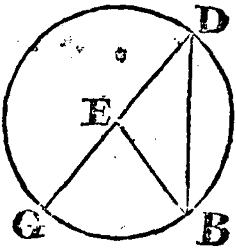
Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

Theor. 18.

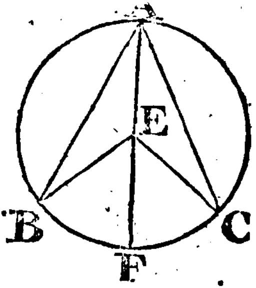
Angulus ad Centrum GEB duplus eſt anguli GDB ad peripheriam, cum idem arcus GB eſt baſis angulorum.

DEMONSTRATIO.



Caſus I. In triangulo Iſoſcele
Angulus GEB ∞ ang. D + B. 16. I.
Atqui D ∞ B. 5. I.
Ergo GEB. duplus anguli D.

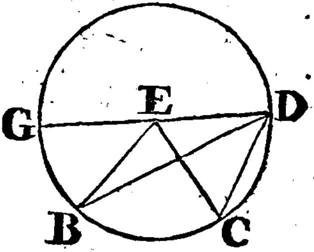
Ca-



Casus 2. Ducta AF per centrum E,

A { Ang. BEF duplus ang. BAF. } per casum. I.
Ang. CEF duplus ang. CAF.

Totus BEC duplus totius BAC.



Casus 3. Totus Ang. GEC est duplus totius GDC.
Partialis GEB est duplus partialis GDB. } S

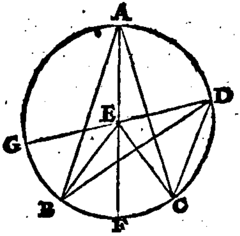
Remanet BEC duplus BDC, Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Theor. 19.

In circulo, qui eidem arcui BC insistunt anguli BAC. BDC, seu qui sunt in eodem segmento, sunt inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

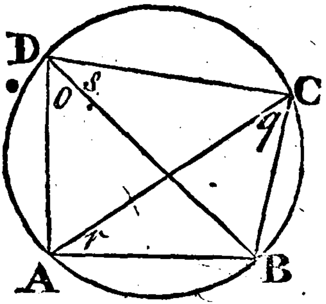
Angulus BEC est duplus BAC
Atqui id. BEC est duplus BDC } 20. III.

Ergo BAC [a] ∞ BDC.

a Ax. 7.

Pro

PROPOSITIO. XXII. Theor. 20.



Quadrilateri circulo inscripti ABCD anguli oppositi D.B. positi duobus rectis sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Ductis diagonalibus AC. BD.

A { Ang. O ꝏ Q. [a] quia insistunt arcui AB. — a 21. III.
Ang. S ꝏ R. [a] quia insistunt arcui CB.

Totus angulus ADC ꝏ Q + R. } A.
Angulus ABC ꝏ ABC.

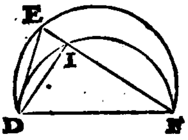
Duo anguli ADC. ABC ꝏ tribus Q + R + ABC.

Atqui hi tres sunt ꝏ 2 Rectis.
Ergo & duo ADC + ABC ꝏ 2. Rectis. Q. E. D.

Theor. 21.

PROPOSITIO. XXIII.

Si super eadem recta DF constituta sint duo segmenta circulorum inæqualia; illa non sunt similia.



DEMONSTRATIO.

Si contendat Adversarius illa esse similia; ducantur rectæ FE. ED. DI.

a Def. 10. III.

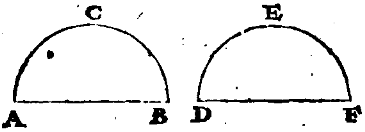
Ang. DEF ꝏ DIF juxta a Adversarium
Atqui DEF > DIF. per 16. I.

Quæ duo sunt contradictoria.

Pro-

PROPOSITIO XXIV. Theor. 22.

Segmenta similia ACB. DEF, super æqualibus rectis AB. DF constituta, inter se sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Superponatur AB ipsi DF, aut congruent aut non.

Si non: tum peripheria ACD.

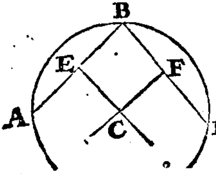
Vel cadet tota intra vel extra peripheriam DEF: contra præcedentem.

Vel intersecabit peripheriam DEF: tunc circulus circulum secabit in pluribus quam duobus punctis: contra 10. hujus.

Ergo congruent: adeoque sunt a æqualia. Q. E. D. a Ax. 8.

Probl. 3.

PROPOSITIO XXV.



Circuli datum arcum ABD perficere.

CONSTRUCTIO.

1. Tria puncta ad libitum sumpta A. B. D. jungantur rectis AB. BD.

2. Dividantur bifariam per perpendiculares EC. FC.

Dico in illarum intersectionis puncto C esse arcus dati centrum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Centrum est in perpendiculari EC.

Ut & in perpendiculari [a] FC.

a Cor. 1. III.

Ergo est in puncto intersectionis; quia illud tantum habent commune, & circuli unicum tantum est centrum.

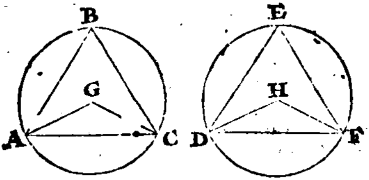
Adeoque ex centro C arcus perfici poterit. Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 23.

Si in circulis æqualibus anguli sive ad centra. G. H, sive ad peripheriam B. E. sint æquales: tunc etiam arcus AC. DF, quibus insistunt, erunt æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC. DF. in triangulis AGC. DHF.

Latus AG ∞ DH} Quia sunt radii cir-
Latus GC ∞ HF} culorum æqualium.
Augulus G ∞ H. per propositionem.

Ergo Basis AC a ∞ DF. a 4. I.

Fiant jam anguli B. E. ad peripheriam ductis AB. BC. DE. EF.

Quia autem angulorum ad centra G.H æqualium semisses ad peripheriam B.E. etiam sunt æquales; segmenta ABC DEF erunt b similia: adeoque quia super æqualibus rectis sunt constituta, erunt æqualia: Quæ si a totis circulis æqualibus auferantur remanebunt arcus AC. DF inter se æquales.

b Def.10. III.

Pars 2. Hæc eodem fere ratiocinio demonstratur.

Sed notandum in parte prima figuras debere considerari sine angulis ad peripheriam; qui in demonstratione demum construi debent.

Sic etiam in parte secunda spectari debent absque angulis ad centra, quos demonstratio demum requirit.

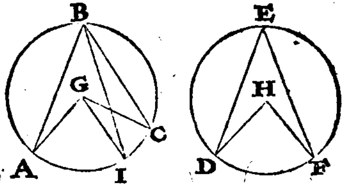
Adeoque utriusque partis demonstratione ambo anguli & ad centra & ad peripheriam exiguntur: cum per illos demonstretur æqualitas rectarum; per hos vero similitudo segmentorum; quæ utraque necessaria sunt.

Pro-

PROPOSITIO XXVII.

T cor. 24.

Si in æqualibus circulis arcus AI. DF. sint æquales, anguli illis insistentes sive ad centra G. H. sive ad peripherias. B. E. sunt inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Si non sit angulus G ꝏ H.

Erit G > H.

Vel G < H.

Sit G > H. fiatque

Angulus AGC ꝏ H.

Ergo [a] Arcus AC ꝏ DF.

Atqui Arcus AI ꝏ DF per proposit. a 26. III.

Ergo Arcus AC ꝏ AI. Totum & pars: quod est absurdum. Ergo angulus G non est minor H.

Eodem modo probatur angulum G non esse majorem angulo H.

Ergo sequitur G esse æqualem A.

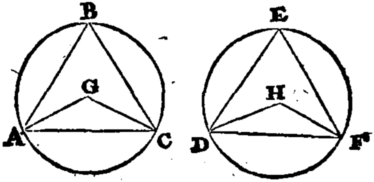
Pars 2. Hæc facile eadem formula demonstratur.

Pro-

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 25.

Si in circulis æqualibus ductæ sint æquales rectæ AC. DF : erunt etiam, quos auferunt, arcus AC. DF inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis GA. GC : HD. HF, in triangulis AGC. DAF.

Latus AG ∞ DH. } Quia radii æqua-
Latus GC ∞ HF. } lium circulorum.
Basis AC ∞ DF. per propositionem.

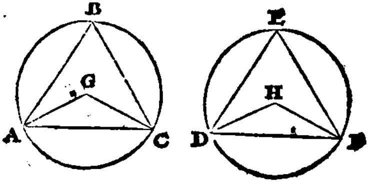
Ergo Ang. AGC a ∞ DHF.
Adeoque arcus AC b ∞ DF.
Q. E. D.

a 8. I.
b 26. III.

Ca-

PROPOSITIO XXIX. Theor. 26.

Si in æqualibus circulis arcus AC. DF sint æquales; erunt & subtendentes rectæ AC. DF inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis GA. GC. HD. HF. erunt in triangulis AGC. DHF.

Latus GA ∞ HD | Quia sunt radii æ-
Latus GC ∞ HF | qualium circulorum.

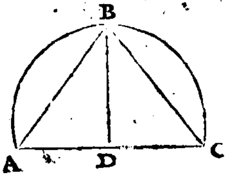
Angulus C ∞ [a] H. quia arcus AC ponitur æqualis DF. a 27. III.

Ergo basis AC [b] ∞ DF. b 4. I.

Q. D. E.

PROPOSITIO XXX.

Probl. 4.



Datum circuli arcum ABC bifariam secare.

CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta AC, dati arcus extremitates conjungens.

2. Illa per perpendicularem DB, bisecetur.

Dico Arcum bisectum esse in B.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AB, CB. erunt in triangulis BDA. BDC.

Latus BD utrique commune.

Latus AD ∞ DC } Per con-
Angulus BDA ∞ BDC } struct.

---

a 4. 1. Ergo Basis BA ∞ a BC.

b 28. 1. Adeoque Arcus BA ∞ b BC.

Ergo Arcus ABC divisus est bifariam.

Q. E. D.

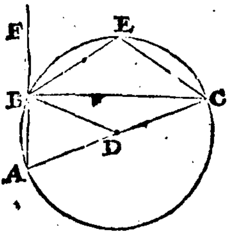
PRO-

PROPOSITIO XXXI. Theor. 27.

1. *Angulus ABC in semicirculo rectus est.*

2. *In segmento majori angulus BAC recto minor.*

3. *In segmento vero minori angulus BEC recto major.*



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta DB, erunt duo triangula DAB. DBC. Isoscelia, adeoque anguli supra bases a æquales. a 5. I.

Ergo ang. DBA ∞ DAB.
Et ang. DBC ∞ DCB. A..

Totus Ang. ABC ∞ duobus BAC + BCA.

Atqui in triang. ABC omnes tres anguli sunt ∞ b 2 Rectis.

Ergo ab una parte angulus ABC est rectus, & ab altera duo reliqui BAC. BCA etiam æquales uni recto.

Pars 2. Per partem I duo anguli BAC BCA simul constituunt unum rectum: ergo solus BAC est minor recto.

Pars 3. In quadrilatero ABEC.

Duo anguli A + E ∞ c 2 Rectis.

c 22. III.

Atqui ang. A > uno recto per partem I.

Ergo ang. E < uno recto.

SCHOLIUM I.

Si trianguli rectanguli hypotenusa dividatur bifariam, erit punctum bisectionis centrum circuli per tria puncta angularia transeuntis: adeoque examen normæ.

SCHOLIUM II.

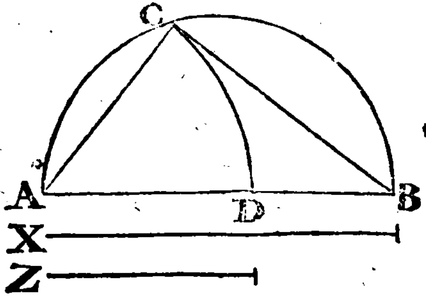
Ex hac propositione deducitur sequens

PROBLEMA.

Minus quadratum Z a majore X subtrahere, seu exhibere differentiam quadratorum X & Z.

Con-

CONSTRUCTIO.



1- Super AB ꝏ X fiat Semicirculus ACB.

2. In Diametro AB ſumatur AD ꝏ Z.

3. Centro A radio AD deſcribe arcum DC. erit recta AC etiam ꝏ Z.

Dico ducta CB illius □ CB eſſe quæſitam differentiam quadratorum AB. AC.

DEMONSTRATIO.

Per propoſ. 31. III. angulus ACB eſt rectus, ergo in triangulo rectangulo ACB eſt

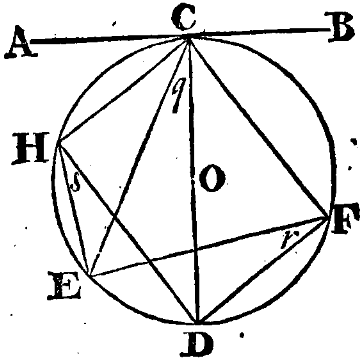
S { □ AB ꝏ □ AC + □ CB per 47. I.
  { □ AC   □ AC,

□ AB − □ AC ꝏ □ CB.

Theor. 28.

PROPOSITIO XXXII.

Si recta linea AB circulum tangat in C, & a contactu ducatur alia circulum secans: erit angulus a tangente & secante factus æqualis angulo qui fit in alterno segmento.



DEMONSTRATIO.

Casus hic obtinent omnino duo:

Aut enim linea circulum secans ad tangentem est perpendicularis & transit per centrum O, ut CD.

Aut non transit: ut CE.

Ca-

CASUS I.

Demonstrari debet angulum ACD ꝏ CFD.

Ang. ACD est rectus: per hypoth.

Ut & a CFD est rectus: quia est in Semicirculo. a 31. III.

Ergo ang. ACD ꝏ CFD.

CASUS II.

Ab una parte probari debet esse ang. ACE ꝏ CFE.

S { Ang. ACD ꝏ CFD. per casum I.
Ang. Q ꝏ b R. quia in eodem segmento. b 21. III.

Remanet ang. ACE ꝏ CFE.

Ab altera parte probari debet ang. BCE ꝏ CHE.

A { Ang. BCD ꝏ CHD per casum I.
Ang. Q ꝏ S. quia sunt eodem segmento.

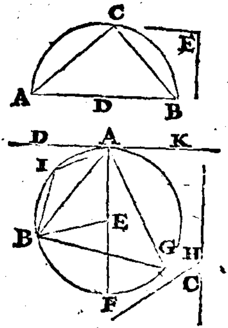
Totus ang. BCE ꝏ Toti CHE.

Q. E. D.

Pro-

Probl. 5. PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta AB segmentum circuli construere, quod capiat angulum dato angulo æqualem.



Est autem angulus datus vel rectus ut E, vel non rectus ut H. C.

CASUS I.

Constructio & Demonstratio.

a 31. III. Data AB bifariam divisa in D. Centro D radio DA fiat semicirculus ACB. hic capit a angulum rectum ACB, adeoque dato recto E æqualem.

Ca-

CASUS II.

CONSTRUCTIO.

1. Ad datæ BA punctum A ducatur DK, ut angulus DAB sit æquales b angulo dato C. b 31. I.

2. Ex A duc perpendicularem AF.

3. Fiat angulus ABE æqualis angulo BAE.

4. Centro E, radio EA vel EB (quæ per 6. I. sunt æquales) describe circulum BIAG.

Dico segmentum AGB capere angulum dato acuto C æqualem.

Ut & segmentum AIB capere angulum data obtuso H æqualem.

Pars 1. Ang DAB ꝏ c AGB, in alterno segmento. c 32. III.

Et Ang. DAB ꝏ C per construct.

Ergo Ang. AGB ꝏ C,

Pars 2. In quadrilatero AIBG.

Duo anguli I + G d ꝏ 2 Rectis. d 22. III.

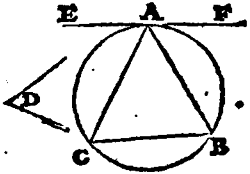
Et duo anguli H + C ꝏ 2 Rectis.

S { Ergo I + G ꝏ H + C.
Atqui G ꝏ e C. per partem I. e 32. III.

Ergo I ꝏ H. Q. D. E.

Probl. 6. PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo ABC segmentum CBA auferre, capiens angulum B, dato angulo D æqualem.



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta tangens Circulum in A.

2. Ad A fiat angulus EAC æqualis angulo dato D.

Di-

Dico ſegmentum ABC capere angulum æqualem D.

DEMONSTRATIO.

Ang. EAC ∞ [a] ABC in alterno ſegmento. a 31. III.

Atqui EAC ∞ D per conſtructionem.

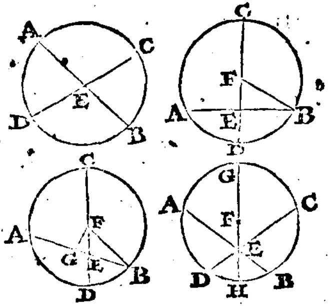
Ergo ABC ∞ D.

Q.E.D.

PROPOSITIO XXXV.

Theor. 29.

Si in circulo duæ rectæ AB. CD se mutuo in E secuerint: Rectangulum comprehensum sub segmentis unius AE. EB: æquale est ei quod sub segmentis alterius CE. ED. comprehenditur rectangulo.



Quatuor diversi hic occurrere possunt casus.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

Si rectæ AB. CD se mutuo secent in Centro: tum ▭ AEB erit ∞ ▭ CED: quia quatuor illorum latera sint radii, adeoque inter se æqualia.

Ca-

CASUS II.

Si una C*D* per centrum F ducta alteram AB non per centrum transeuntem secet bifariam adeoque à perpendiculariter in E: ducatur FB. a 3. III.

DEMONSTRATIO.

▭ CE*D* + □ FE [b] ∝ □ F*D* seu □ FB. b 3. III.
Atqui □ FE + □ EB ∝ □ FB.

Ergo iliis in hujus locum positis

▭ CE*D* + □ FE ∝ □ FE + □ EB.
Adeoque dempto utrinque eodem □ FE.

▭ CE*D* ∝ □ EB hoc est ▭ *AEB*.

CASUS III.

Si recta C*D* per centrum F ducta altera non per centrum non dividit bifariam in E.

DEMONSTRATIO.

Ducta FG perpendiculari ad AB, ut & FB tum erit.

□CED + □FE ∞ ∞ □FD hoc est □FB.
□FG + □GE 47. I. □FG + □GB 47

Sublato utimque □ FG. erit

□CED + □GE ∞ □GBl
Sublato □GE □AEB + □GE. 5. II.

□CED ∞ □ AEB. Q. D. E.

CASUS IV.

Si neutra transeat per centrum & se mutuo secent utcunque.

DEMONSTRATIO.

Ducatur GH. transiens per *centrum* F & per intersectionis punctum E. Tum.

□ AEB ∞ □ GEH per ca-
Et □ CED ∞ eidem □ GEH sum 3.

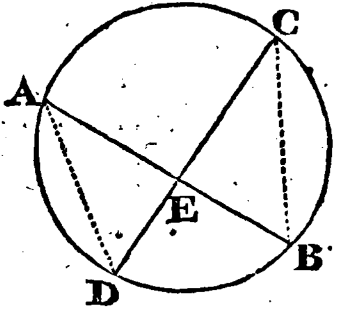
Ergo □ AEB ∞ □ CED.
Q. E. D.

N O T A.

In casu 3. Illa quæ sibi invicem subscribuntur inter se sunt æqualia & inferiora locô superiorum legi debent, ac si in una eadem linea essent substituta; id quod etiam in plerisque aliis demonstrationibus observandum.

Scho-

SCHOLIUM.



Suppositis Libri V. Definitione I. & prop. 4 & 16. (quæ cum hac propositione nihil habent commune) hæc unica demonstratio facillime omnibus casibus inservire potest.

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. CB, erit in triangulis AED. CEB.

Angulus A ꝏ C }
Ang. D ꝏ B } 21. III.

Ang. AED ꝏ CEB. 15. I.

Ergo erit per 4. VI.

AE — ED ⊐ CED I EB.

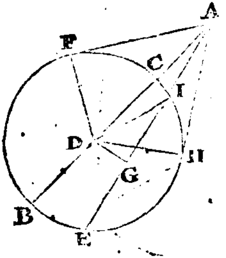
Et per nostrum Theor. I. Lib. V. vel 16. VI.

▭AE. ED ꝏ ▭CE. ED. Q. D. E.

Pro-

PROPOSITIO XXXVI.

Theor. 30.



Si a puncto A extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens AF, altera secans AB. Erit rectangulum BAC, sub tota secante BA & illius parte AC inter punctum A & circulum interjecta comprehensum, æquale quadrato tangentis AE.

Duo hic notandi sunt casus.

CASUS I.

Aut secans AB transit per centrum D.

DEMONSTRATIO.

Ducta DF, erit

S ▭ BAC + □DC a ꝏ □DA.
ꝏ □DF + □FA. 47.1.

Atqui □DC ꝏ □DF. Quia sunt a radiis.

▭ BAC ꝏ □ FA.

CASUS II.

Aut secans AE non transit per centrum.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex centro D ducta perpendiculari DG ut & DI : erit

□EAI + □GI ∞ □GA } A.
□DG □DG

□EAI + □DG + □GI ∞ □DG + □GA.
47.1. □DI seu □DF □DA. 47.1.
Hoc est □FD + □FA. 47.1.

□EAI + □DF ∞ □DF + □FA.
Sublato utrinque □DF.

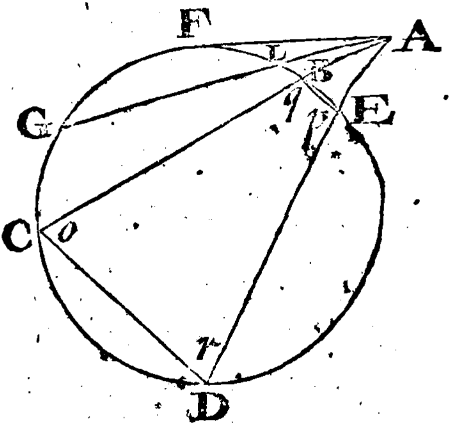
□EAI ∞ □FA.

Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

Si a puncto quovis extra circulum ſumpto, plures rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis ſecantibus & partibus exterioribus, inter ſe ſunt æqualia.

SCHOLIUM I.



Suppositis iisdem quæ in Scholiô præcedenti, hanc damus Corollarii primi demonstrationem.

Demonstrandum est ⊏ CAB esse æquale ⊏ DAE.

DEMONSTRATIO.

Ductis CD & BE, erunt triangula CAD. EAB inter se similia.

Nam anguli O + P ꝏ 2 Rectis 22, III.
Et angnli AEB + P ꝏ 2 Rectis 13, I.

Ergo O + P ꝏ AEB + P,

Et Sublato communi angulo P,
O ꝏ AEB.

Deinde ang, A utrinque est communis,
Ergo R ꝏ ABE, 32, I.

Quare in triangulis CAD EAB erit per 4, VI.
CA — AD = EA | AB,
Et per 16, VI. ⊏

$\sqsubset$ CA AB ∞ $\sqsubset$ DA'AE, Q. E. D.

SCHOLIUM II.

Si jam ex puncto A supra lineam AC ducatur ALG, eodem modo ductis GD LE probatur esse $\sqsubset$ GAL ∞ $\sqsubset$ DAE; notandumque est puncta peripheriæ G.L. concavæ & convexæ propius ad se invicem accedere, quam puncta C & B; quæ punctorum distantia adhuc magis imminuitur si ex A supra lineam AG ducatur alia Circulum secans: donec tandem ducatur recta AF, quæ Circulum tangit in unico puncto F, in quo puncta peripheriæ concavæ & convexæ coincidunt, adeoque cum antea designatæ essent duæ lineæ AB AC seu AL AG. inter se inæquales; jam ex A ducitur soluminodo unica linea AF. quæ ergo in superiori proportione bis sumenda est sc: semel pro linea GA, & semel pro LA. quo facto proportio sic stabit FA — AD = EA 1 AF.

Ergo per 16. VI.

$\square$ Tangentis AF ∞ $\sqsubset$ DA. AE.

Quæ æqualitas ipsius Propositionis 36 genuinum exhibet sensum, ut hinc pateat quam arcto nexu hæ veritates inter se cohæreant, quamque naturali una ex alia deducatur consequentiâ.

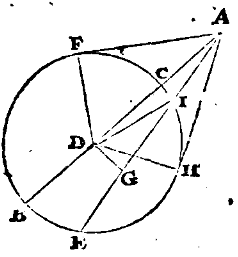
COROLLARIUM II.

Duæ rectæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangunt, inter se sunt æquales.

COROLLARIUM III.

Ab eodem puncto extra circulum sumto, duci tantum possunt duæ rectæ, quæ circulum tangunt.

PROPOSITIO XXXVII. Theor. 31.



Si a puncto A extra circulum posito ducta sint duæ rectæ AB. AF, ita ut rectangulum BAC sit æquale quadrato alterius AF. tum linea AF circulum tanget in F.

DEMONSTRATIO.

Ducta linea tangente AH, ut & lineis DF. DH.

▭ BAC a ꝏ □ AH, a 36. III.

Atqui ▭ BAC ꝏ □ AF. per proposit.

Ergo □ AH ꝏ AF. Ergo AH ꝏ AF.

Quare in Triangulis AFD. AHD.

Latus AF ꝏ AH.

Latus FD ꝏ HD.

Latus DA commune.

Ergo Ang. AFD ꝏ AHD. b b 8. I.

Atqui c AHD est rectus. c 18. III.

Ergo ergo AFD rectus est adeoque d AF tangens. Q. E. D. d 16. III.

FINIS LIBRI TERTII.

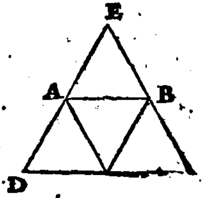
EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

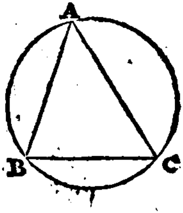
DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea, in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli, singula latera ejus cui inscribitur tangunt.*



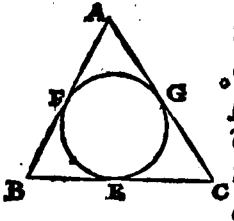
2. *Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.*

3. *Fi-*



3. *Figura autem rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.*

4. *Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria, singulos tangit ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.*

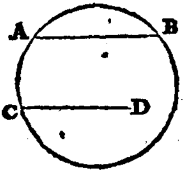


5. *Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.*

6. *Si-*

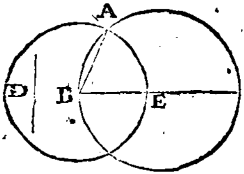
6. Similiter & circulus in figura inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ in qua inscribitur.

7. Recta in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.



Sic A B. dicitur in circulo accommodata non vero C D.

PROPOSITIO. I. Probl. 1.



In dato circulo ABC accommodare rectam BA æqualem datæ rectæ D: quæ Circuli diametro BC non sit major.

CONSTRUCTIO.

1. In dato circulo duc Diametrum BC; cui si data recta D sit æqualis, petito satisfactum erit. Si vero minor.

2. Abscinde [a] BE ∞ D: & centro B radio BE describe arcum circuli EA. a 3. 1.

Dico rectam BA esse æqualem D & coaptatam in Circulo.

DEMONSTRATIO.

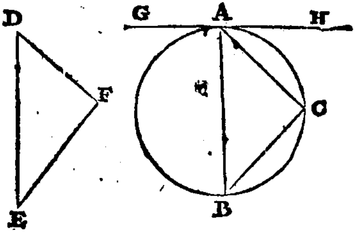
Linea D ∞ BE per constructionem.
EA ∞ BE quia radii.

Ergo linea D [b] ∞ BA, quæ est coaptata in circulo quia [c] utraque extremitas terminatur in peripheria. b Ax. 1. c Def. 7. IV.

Probl. 2.

PROPOSITIO II.

In dato circulo ABC triangulum ABC describere, quod dato triangulo DEF sit æquiangulum.



CONSTRUCTIO.

a 17. III. 1. Ad [a] ductæ tangentis GH punctum A [b] constituatur angu-
b 23. I. lus GAB. æqualis angulo F.

2. Ad idem punctum A ab altera parte fiat HAC æqualis angulo E.

. Jungatur recta BC.

Dico

Dico triangulum ABC ipsi DEF esse æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ACB. DEF.

A { Ang. C (c) ꝏ | GAB ꝏ F per construct:
Ang. B (c) ꝏ | HAC ꝏ E per construct. c 32. III.

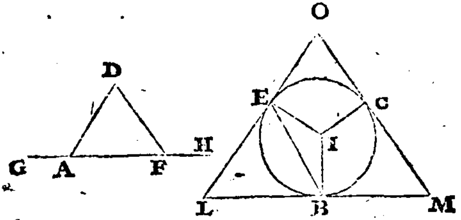
Duo anguli C + B ꝏ duobus F + E.

Ergo etiam tertius [d] A ꝏ tertio D. d 2 Cor. 32. I.

PROPOSITIO III.

Probl. 3.

Circa datum circulum BCE triangulum LMO describere æquiangulum dato triangulo AFD.



CONSTRUCTIO.

1. Trianguli DAF latus AF producatur in G & H.

a 23. I. 2. In circulo ducto radio IB, a fiat angulus BIE. æqualis trianguli externo angulo DAG.

3. Fiat angulus BIC æqualis externo DFH.

b 16. & 17. III. 4. Ad tria puncta B. C. E. ducantur tres b tangentes OL. OE. LM.

Dico ex illarum concursu oriri triangulum OLM. dato DAF æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

Ex Scholio prop. 32. I. quadrilaterum BIEL dividi potest in duo triangula, cum au-

autem unum triangulum contineat duos angulos rectos, duo continebunt quatuor; adeoque quatuor anguli in quadrilatero dicto erunt æquales quatuor rectis: a quibus si demantur duo [c] recti LEI. LBI. remanebunt. c 16. III.

Anguli BIE + L ∞ 2 Rectis.
Atqui DAG + DAF ∞ 2 Rectis.

Ergo BIE + L ∞ DAG + DAF } S
Atqui BIE ∞ DAG per const.

Remanet L ∞ DAF.

Eodem modo demonstratur quod sit angulus M ∞ DFA, ergo tertius O erit ∞ [d] tertio D. d 2 Cor. 32. I.

NOTA.

Quod autem tangentes EL & BL in puncto L concurrere debeant sic patet. Ducta BE.

Duo anguli toti LBI. LEI. ∞ 2 R.
Ergo ang. partiales LEB. LBE > 2 R.

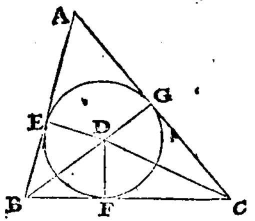
---

[e] Ergo rectæ EL. BL concurrent. e Ax. 11.

Probl. 4.

PROPOSITIO IV.

Dato triangulo ABC circulum inſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos B. C. a divide bifariam per rectas BD. CD.

a 9. 1.

2. Ex puncto concurſus D duc perpendiculares DE. DF. DG.

3. Centro D, radio DE. deſcribe circulum.

Dico illum tangere omnia latera trianguli in punctis D. E. F. adeoque ipſi inſcriptum eſſe.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulis DGC. DFC.
Ang. G ∞ F. per conſtr.
Ang. DCG ∞ DCF. quia totus C biſectus eſt.
Latus DC commune.

Ergo latus DG [b] ∞ DF. b 26. I.

Eodem modo demonſtratur eſſe DF ∞ DE.

Adeoque tres lineæ DE. DF. DG ſunt inter ſe æquales.

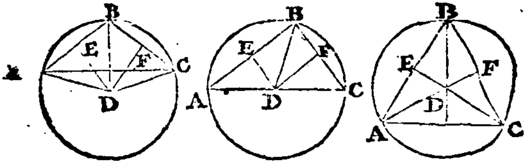
Ergo circulus centro D ductus tranſit per puncta E. F. G. & tangit [c] omnia latera; quia anguli ad E. F. G. ſunt recti; adeoque [d] triangulo inſcriptus eſt. c 16. III. d Def. 6.

PRO-

PROPOSITIO V.

Probl. 5.

Circa datum triangulum ABC circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Quælibetcunque duo *latera* AB.
a 10. I. BC a divide bifariam in E. & F.
2. Ex E & F erige b perpendiculares
b 11. I. ED. FD.
3. Ex puncto concursus, describe *radio* DA circulum.

Dico illum quoque transire per puncta B, C. adeoque triangulo circumscriptum esse.

DEMONSTRATIO.

Ductis DA DB DC. In triangulis DEA, DEB.

La-

Latus DE, commune.
Latus EA ∞ EB } Per con-
Angulus DEA ∞ DEB } struct.

Ergo [c] basis DA ∞ DB. c 4. I.

Eodem modo demonstratur esse DB ∞ DC, adeoque tres lineæ DA, DB, DC sunt inter se æquales.

Ergo Circulus centro D, radio DA descriptus, transit per omnia trianguli puncta angularia; adeoque ipsi est circumscriptus. [d] d Def. 4. IV.

Eadem constructionis formula obtinet in omnibus trianguli speciebus; cum hac solummodo differentia, quod in Rectangulo centrum cadat in punctum medium hypotenusæ.

In Acutangulo centrum cadat intra triangulum.

In obtusangulo vero extra.

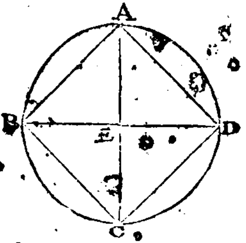
SCHOLIUM.

Ex hac propositione deducitur Methodus describendi circulum, per tria puncta non in linea recta disposita, transeuntem.

Probl. 6.

PROPOSITIO VI.

Dato Circulo quadratum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ Diametri AC BD in centro C se ad angulos rectos intersecantes.

2. Jungantur rectæ AB, BC. CD. DA.

Dico ABCD esse quadratum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

In triangulis AEB. AED.

Latus

Latus AE utrique commune.
Latus EB ∞ ED quia radii.
Angulus AEB ∞ AED. quia uterque rectus.

Ergo basis AB [a] ∞ AD. a 4. I.

Eodem modo probatur AD ∞ DC: DC ∞ CB. CB ∞ BA.

Adeoque quatuor illa latera inter se erunt æqualia.

Pro angulis.

Quatuor anguli A. B. C. D. istis lateribus contenti sunt in Semicirculo. ergo recti. [b] b 31. III.

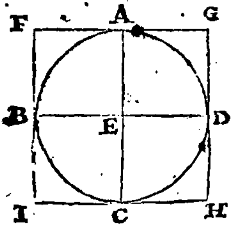
Adeoque ABCD est quadratum circulo inscriptum.

Q. E. F.

PROPOSITIO VII.

Probl. 7.

Circa datum Circulum quadratum describere.



CONSTRUCTIO.

1. *D*ucantur duæ diametri AC. *BD* ſe mutuo ad angulos rectos in E ſecantes.

2. Per illarum extremitates ducantur tangentes FG. GH. HI. IF.

*D*ico illas coeuntes conſtituere Quadratum quæſitum FGHI.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

In quadrilaterò AEBF.

4 Anguli A. E. B. F. ∞ [a] 4 Rectis } S a 32. I. & Scholium.
Atqui 3 Ang. A. E. B ∞ 3 Rectis }

Remanet ang. F ∞ 1 Recto.

Simuli ratiocinio probatur angulos G. H. I esse rectos.

Pro lateribus.

In parallelogrammis F*D*. I*D*. latera FG. *I*H sunt æqualia *D*iametro B*D*. adeoque & inter se.

*I*n parallelogrammis *I*A. HA. latera F*I*. GH sunt [b] æqualia *D*iametro AC. b 34. 1.

Atqui *D*iametri AC. B*D* sunt inter se æquales.

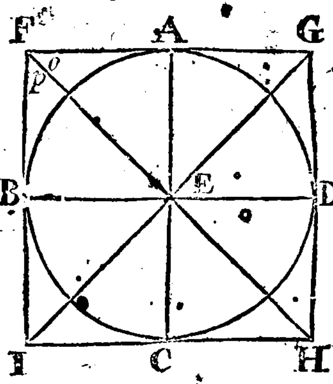
Ergo 4 latera FG. GH. H*I*. *I*F sunt inter se æqualia.

Adeoque FGH*I* est quadratum quæsitum. Q. *F*. E.

PROPOSITIO VIII.

Probl. 8.

In dato quadrato Circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diagouàles FH. GI ſe interſecantes in E.

2. Ex E demittatur ad latus FI perpendicularis EB.

3. Centro E radio EB, deſcribatur Circulus.

Dico illum tangere latera in punctis A, B. C. D. adeoque quadrato inſcriptum eſſe.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex E ductis perpendiculatibus EA. ED. EC.

In triangulis FAE. FBE. erunt,

Angulus A ꝏ B per constr. quia recti.
Angulus [a] O ꝏ P. quia semirecti. a 2 Cor. 32. I.
Latus FE utrique commune.

Ergo Latus EA ꝏ EB. [b] b 26. I.

Sic etiam probatur EB ꝏ EC: & EC ꝏ ED: ut & ED ꝏ EA.

Ergo circulus centro E, radio EB descriptus transibit per puncta A. D. C: & quia anguli ad illa puncta sunt recti, tanget omnia latera; adeoque circulus quadrato erit inscriptus.

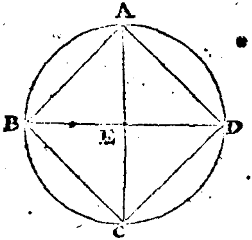
Q. E. D.

PRO-

Probl. 9.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur diametri AC. *BD* secantes sese in puncto E.

2. Centro E, radio EB, describatur Circulus.

Dico illum transire per omnia quadrati puncta angularia; adeoque illi esse circumscriptum.

De-

DEMONSTRATIO.

*D*iametri *AC. BD*, quatuor angulos A. B. C. *D*. [a] bifariam ſecant, Ergo in triangulo EBA. a 2 Coro. 32. 1.

Angulus EBA ∞ EAB.

Ergo latus EA [b] ∞ EB. b 6. 1.

Sic etiam probatur EB ∞ EC: & EC ∞ E*D*: & *ED* ∞ A.

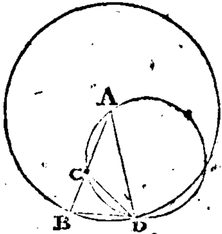
Adeoque quatuor lineæ EA. *EB. EC. ED.* ſunt inter ſe æquales.

Ergo circulus centro *E* radio *EB* deſcriptus tranſit per omnia quadrati puncta angularia A. B. C. *D*. adeoque illi circumſcriptus eſt.

Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Probl. 10.



Triangulum Isosceles ABD construere, cujus singuli ad basin anguli B. & D dupli sint reliqui ad verticem A.

CONSTRUCTIO.

1. Quamlibetcunque lineam AB ita
a 11. II. divide a in C, ut ▭ ABC sit □ AC.
2. Centro A radio AB describe circulum.
3. Ex B in isto circulo accommoda
b 1. IV. b rectam BD ꝏ AC.
4. Duc rectam AD.

Dico ABD esse triangulum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta CD, circa triangulum ACD describatur circulus ACD.

▭ ABC ꝏ □ AC hoc est □ BD per constr.

---

c 37. III. Ergo BD tangit circulum c: quem BA, secat.

c 32. III. A { Vnde ang. BDC c ꝏ A in alterno seg.
Ang. CDA CDA.

A

Totalis ang. ADB (∞ ABD) ∞ A + CDA.

Atqui etiam BCD [d] ∞ A + CDA. d 32. 1.

Ergo

In triangulo BCD ang. BCD ∞ CBD.

Adeoque latus BD [e] ∞ CD. e 6. 1.

Atqui latus BD ∞ AC.

Ergo

In triangulo ACD latus CD ∞ CA.

Adeoque angulus A ∞ CDA.

Ergo angulus BCD (qui duobus A & CDA est æqualis probatus) est duplus anguli A.

Ergo etiam BDC, qui angulo ABD demonstratus est æqualis, duplus erit anguli A.

Adeoque & ADB, qui angulo [f] ABD est æqualis, ejusdem anguli A duplus erit. Q. E. F.

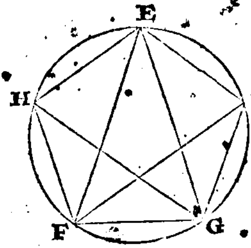
COROLLARIUM.

In triangulo Isoscele hoc modo constructo, angulus ad basin valet duas partes quintas seu $\frac{2}{5}$ duorum vel $\frac{4}{5}$ unius Recti: quare angulus A valebit $\frac{1}{5}$ duorum vel $\frac{2}{5}$ unius Recti.

PROPOSITIO XI.

Theor. 11.

Dato circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Cuilibetcunque triangulo Isosceli juxta præcedentem propositionem constituto, æquiangulum ᵃ inscribatur EFG in circulo dato.

a 2 IV.

2. Illius supra basin anguli EFG. EGF bisecentur per rectas FI. GH.

3. Puncta E. H. F. G. I. jungantur totidem rectis.

Dico factum esse quod petitur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Quinque anguli EFI. IFG. EGH. HGF. FEG sunt inter se æquales per constructionem.

Ergo [a] arcus quibus insistunt sunt æquales. [a] 26. III.

Ergo illis [b] subtensæ rectæ, quæ sunt Pentagoni latera, sunt æquales. [b] 29. III.

Pro angulis.

Arcus HFGI ∞ Arcui FGIE. per partem I.

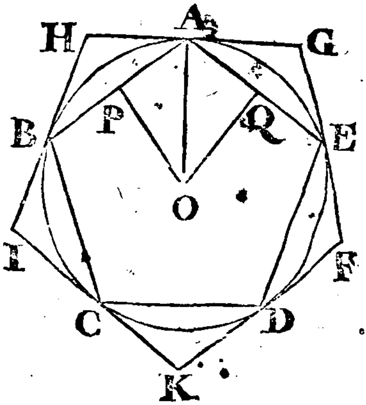
Ergo Angulus E [c] ∞ Angulo H. quia æqualibus arcubus insistunt. [c] 27. III.

Simili modo de duobus aliis angulis &c. Q. E. F.

PROPOSITIO *XII.*

Theor. 12.

Circa datum circulum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Inscribatur Pentagonum regulare per præced: ABCDE.

2. Ad puncta A. B. C. D. E. ducantur totidem tangentes, quæ concurrent in punctis F. G. H. I. C.

Dico factum quod quæritur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Ex centro O ductis perpendicularibus OP. OQ, ut & radio OA in triangulis OAP. OAQ

Latus OP [a] ∞ OQ. quia æquales AB. AE æquidistant a centro. a 14. III.

Latus PA [b] ∞ QA. quia æquales AB. AC bisectæ sunt. b 3. III.

Latus OA utrique communes.

Ergo ang. [c] OAP ∞ OAQ. Qui si auferantur ab æqualibus Rectis angulis OAH OAG: remanebit angulus HAB ∞ GAE. c 8. I.

Deinde Triangula BHA. EGA. sunt Isosceles, quia ex puncto H ductæ sunt ductæ tangentes HA. AB: ut ex puncto G duæ GA. GE: quæ sunt [d] æquales: d 2 Corol. 36. III.

Quare illa triangula habent bases AB. AE æquales, & angulos ad basin HBA. HAB. æquales GAE. GEA. non solum alterum alteri, sed promiscue omnes quatuor inter se æquales. Adeoque [e] quatuor latera BH. HA. AG. GE. sunt inter se æqualia. e 5 & 16. I.

Si-

Simili modo demonſtcatur omnes decem lineolas eſſe inter ſe æquales.

Si jam una ſit æqualis uni etiam duæ erunt duabus æquales.

Adeoque quinque latera, quæ ex duabus lineolis conſtant, erunt æqualia.

Pro angulis.

Ex demonſtratis patet triangula AHB
f 8. 1. AGE habere omnia latera æqualia.
Adeoque angulum H f ∞ G. Et eodem modo de reliquis.

COROLLARIUM.

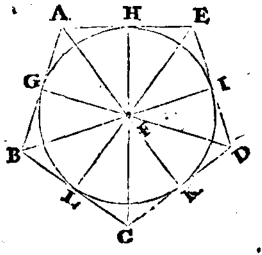
Si in circulo quælibetcunque figura regularis fuerit inſcripta; lineæ tangentes circulum in punctis illius angularibus, ſuo concurſu ſemper conſtituent figuram ſimilem circulo circumſcriptam.

Pro-

PROPOSITIO XIII.

Prob. 13.

Dato Pentagono regulari circulum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Quoslibet duos angulos A & E divide bifariam per rectas AF. EF.

2. Ex illarum puncto concursus F, ducantur ad omnia latera perpendiculares.

3. Ex F tanquam centro pro radio assumta una ex istis perpendicularibus describatur circulus.

Dico illum Péntagono fore insciptum.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AGF. AHF.

Angulus GAF ∞ HAF } Per con-
Angulus AGF ∞ AHF } struct.
Latus AF utrique commune.

---

a 26. I. Ergo a latus GF ∞ HF.

Eodem modo probatur HF ∞ IF. IF ∞ KF. KF ∞ LF & denique LF ∞ GF.

Adeoque omnes istæ perpendiculares erunt inter se æquales.

Quare circulus radio FH descriptus transibit quoque per puncta I. K. L. G. b 16. III. in quibus ista latera b tanget; quia anguli ad ista puncta sunt recti.

Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

In quolibet polygono regulari

ti omnes lineæ biſecantes angulos in uno eodemque puncto conveniunt.

COROLLARIUM II.

In omni Polygono laterum imparem habente numerum linea aliquem ex angulis biſecans oppoſitum etiam biſecabit latus.

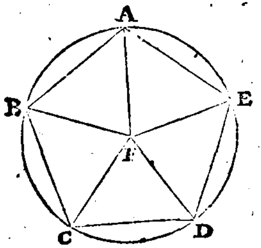
SCHOLIUM.

Eadem methodo in quacunque figura regulari circulus deſcribi poteſt.

Probl. 14.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum Pentagonum regulare circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos *A* & B divide bifariam per rectas *AF*. *BF*, quæ[a] concurrent in *F*.

a Ax. 11.

2. Centro *F*, radio *AF*, vel *BF* describe circulum.

Dico illum transiturum per reliqua puncta angularia.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulo *FAB*.

Ang. *FAB* ∞ *FBA*. quia illorum dupli ſunt æquales.

Ergo latus *FA* ∞ *FB*.

Eodem modo biſecto angulo C demonſtrabitur *FB* ∞ *FC*. & ſic per orbem omnes lineæ biſecantes angulos erunt æquales.

Ergo circulus tranſibit per omnia puncta angularia, adeoque pentagono circumſcriptus erit.

Q. *F. E*.

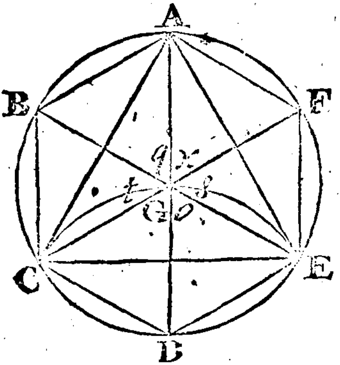
SCHOLIUM.

Eadem conſtructionis forma circa quamlibet figuram regularem circulum deſcribere licet.

Probl. 15.

PROPOSITIO XV.

In dato circulo Hexagonum regulare describere.



CONSTRUCTIO.

1. Centro quolibet puncto D, radio circuli DG, describe arcum CGE.

2. Ex punctis C. D. E. per centrum G describe tres diametros CF. DA. EB.

3. Duc sex rectas AB. BC. CD. DE. EF. FA.

Dico ABCDEF esse hexagonum quæsitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Lineæ DC. DE singulæ sunt æq. Radio DG.

Lineæ GC. GE. GD singuli sunt Radii.

Ergo quinque lineæ GC. GD. GE. DC. DE sunt æquales.

Adeoque Triangula GCD. GDE sunt æquilatera.

Ergo duo anguli G & O singuli sunt a una tertia pars duorum rectorum. a 3 Cor. 32. I.

Atqui tres anguli G. O. S. simul b valent duos rectos, seu tres tertias duorum rectorum. b 13. I.

Ergo tertius S. etiam est una tertia duorum rectorum.

Adeoque tres G. O, S. sunt inter se æquales.

Atqui illis æquales sunt tres c oppositi X. Q. T. c 15. I.

Ergo sex anguli ad Centrum sunt æquales.

Ergo d sex arcus, quibus insistunt, sunt æquales. d 26. III.

Adeo-

e 29. III. Adeoque [e] sex subtensæ, quæ constituunt latera figuræ, inter se sunt æquales.

Pro angulis.

Hos esse æquales facile patet, quia
f 21. III. [f] singuli insistunt æqualibus arcubus, sc. quatuor sextis partibus totius peripheriæ: Ergo sunt inter se æquales.

COROLLARIUM.

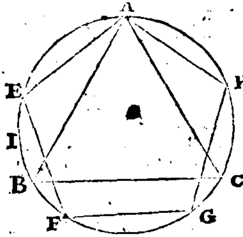
Hexagoni latus æquale est radio.

SCHOLIUM.

Ductis tribus rectis AC. AE. CE. circuso inscriptum erit triangulum æquilaterum.

PRO-

PROPOSITIO XVI. Probl. 16.



In dato Circulo Quindecagonum regulare describere.

CONSTRUCTIO.

1. Circulo (a) inſcribe pentagonum regulare AEFGH. a 11. IV.

2, Itidem (b) triangulum regulare ABC. b Schol. 15. IV.

Dico rectam BF, fore latus quindecagoni quæſiti.

DEMONSTRATIO.

Pentagonum dividit totam peripheriam in quinque partes æquales; quare quælibet continet unam quintam ſeu tres decimas quintas totius peripheriæ: adeoque duæ AE. EF, ſex decimas quintas continebunt.

Triangulum vero dividit totam peripheriam in tres partes æquales; quarum quælibet ut AB continet unam tertiam, ſeu quinque decimas quintas totius peripheriæ. Tum

Arcus AEF ſex decimæ quintæ.
Arcus AEB quinque decimæ quintæ. S.

Arcus BF una decima quinta.

Ergo ſit ducatur recta BF, eique æquales quatuordecim in circulo coaptentur, deſcriptum erit quindecagonum, æquilaterum, cum omnes arcus ſint æquales.

FINIS LIBRI QUARTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum metitur majorem.*

CUm totum sit sua parte majus, patet partem contineri in suo *toto*. Hoc autem duplici modo *fit*.

Vel continetur ita ut aliquoties sumta, præcise reddat suum totum seu ipsi æqualis sit; quemadmodum numerus quatuor seu 4, est minor toto 12, adeoque in illo continetur, & quidem ita, ut aliquot vicibus, scilicet tribus sumtus, accurate æqualis sit toti 12. Et inde hæc pars Mathematicis dicitur Aliquota, quæ suum totum absque residuo dividit, id quod idem est ac metiri: & hanc Partis speciem Euclides solummodo respexit, altera, quæ sequitur, neglecta.

Vel pars ita continetur in suo toto, ut aliquoties sumta totum vel excedat vel ab illo

illo deficiat, adeoque non accurate ipsi æqualis sit. Quemadmodum numerus 4, cum minor sit toto 14, in illo continebitur; sed quia ter sumtus toto minor est ac quater toto major, hæc pars non potest dici Aliquota, ut altera pars notata: quia tamen aliquam exhibet quantitatem totius quantitatis, vocatur pars Aliquanta.

Cæterum cum Euclides adhibuerit Magnitudinis vocabulum, suspicari licet illum meminisse solunquantitatis continuæ, quæ vulgo magnitudinis nomine Mathematicis venit; minime tamen excludenda est quantitas discreta & in numeris posita, quæ suas etiam habet partes: quibus illa omnia, quæ de rationibus & proportionibus toto hoc libro demonstrat, æque facile imo pro captu nostro facilius accommodari possunt.

Quare & nos cum multis aliis omnes hujus libri propositiones, neglectis lineis demonstrabimus in numeris; tum quia illis magis sumus assueti & de illis sæpius quam de lineis cogitavimus; tum etiam quia illa quæ de numeris probantur, si cui libet, ipsis lineis applicari possunt.

2. *Multiplex autem est major quantitas quam metitur minor.*

Quemadmodum pars suum totum dividit seu metitur absque residuo vel cum residuo; ita reciproce etiam totum a sua parte dividitur vel sine vel cum residuo. Prius illud totum idem est quod multiplex, cujus in hac definitione fit mentio, non intellecto altero. quod cum residuo divitur, quodque adeo multiplex dici non meretur.

3. *Ratio est duarum quantitatum ejusdem generis, mutua quædam secundum communem mensuram habitudo.*

Cum propie loquendo una eademque res ad se ipsam non possit comparari secundum quantitatem, quia se ipsa non est major nec minor, patet plures requiri inter quas legitima instituatur comparatio; quæ etiam tantum possunt esse duæ. Illæ autem necessario requiritur ut sint res homogeneæ; ut quantitates ejusdem generis; quales sunt linea cum linea com-

comparata; superficies cum superficie; corpus cum corpore: nullo ergo modo linea comparari potest cum superficie vel cum corpore, nec superficies cum corpore quia non sunt ejusdem generis.

Porro ulteriorem hujus homogeneitatis explicationem tradit Euclides in definitione 5.

Hæc autem intelligenda est in quantitatibus secundum magnitudinem, seu partium æqualium numerum, adeo ut una res altera sit vel major vel minor; hoc est ut una res plures vel pauciores similes seu æquales contineat partes quam altera.

Ex quibus patet rationem nihil aliud esse quam modum seu formulam continendi, qua una quantitas aliam quantitatem continet, vel in illa continetur; quæ capacitas cum per nullam aliam operationem quam per divisionem innotescat, liquet rationem seu comparationem duarum quantitatum non clarius quam per fractionis formam posse exprimi.

Exempli gratia; ponantur duo numeri 16 & 4. qui saltem aliquam inter se habent rationem, quia numerus 16 major est numero 4, adeoque numerum 4 in ſe continet. Ut jam ulterius iſta ratio examinetur videndum eſt quoties 16 continet 4, quod per diviſionem innoteſcit; quia autem facta diviſione acquiritur 4 pro quotiente pronuntiamus rationem 16 ad 4, eſſe quadruplam. hoc eſt 16 eſſe quadruplum numeri 4: vel 16 ſe habere ad 4 ut 4 ad 1: Id quod etiam commode hoc modo exprimitur per fractionem $\frac{16}{4}$ quæ innuit 16 per 4 eſſe dividendum vel jam ſupponit diviſum.

Si jam ſumantur duo alii numeri ex. gr. 8 & 2, & eorum rationem examinando comperiatur numerum 8 minorem 2 etiam quater in ſe continere, quia per diviſionem idem quotiens 4 obtinetur; quæ per modum fractionis expoſita ſic ſtabit $\frac{8}{2}$.

Inde patebit rationem quæ intercedit inter 16 & 4, eſſe eandem, vel ſimilem vel æqualem rationi quæ eſt inter 8 & 2: quia nimirum 16 toties continet 4, quoties 8 continet 2.

Porro hinc fit manifeſtum æquimultiplicem eſſe nihil aliud ſignificare quam habere eandem rationem: ut ſi dicatur 16 eſſe æquemultiplicem numeri 4, ac

8 eſt

8 est numeri 2, idem est ac si dicatur numerum 16 ad 4 habere eandem rationem, quam habet 8 ad numerum 2; cum utriusque sc. & æquemultiplicitas & ejusdem rationis idem quotiens 4 per ejusdem divisionis acquiritur operationem: quare ejusdem rationis notationem hoc modo exprimere licet $\frac{16}{4}$ ꝏ $\frac{8}{2}$.

Quæ fractiones, ut iterum in aliam rationum formam reducantur, dicimus 16 esse ad 4 quemadmodum 8 est ad 4; vel secundum nostram qua utimur scriptionis methodum 16 — 4 ⩦ 8 | 2.

Duorum autem cujuslibet rationis terminorum ille qui ad alterum refertur Antecedens dicitur; ad quem vero fit relatio Consequens rationis dicitur. Ut in ratione 16 ad 4 terminus Antecedens est numerus 16; consequens vero 4: quemadmodum ab altera parte, in ratione 4 ad 16, numerus 4 Antecedentis, 16 vero consequentis acquirit nomen.

Rationes autem non uno dividuntur modo: nos duas afferemus præcipuas.

I. Ratio dividitur in rationalem & irrationalem.

Rationalis est quæ veris numeris potest exprimi ut 6 ad 3: quæ est eadem

dem cum 2 ad 1. quæ dicitur dupla.

Irrationalis vero est quæ veris numeris exprimi nequit, ut in quadrato ratio lateris ad Diagonalem; quæ, licet aliquo modo exprimatur per numeros qui Surdi dicuntur, scilicet ut 1 ad $\sqrt{2}$, cum tamen $\sqrt{2}$ non sit verus numerus, sed tantum imaginarii cujusdam numeri nota veris tamen numeris explicabilis non est.

II. Ratio dividitur in rationem æqualitatis vel inæqualitatis.

Ratio æqualitatis, est quando duo ad se comparata sunt æqualia: ut 4 ad 4: & 2 ad 2.

Inæqualitatis est, cum termini inter se comparati inæquales sint, ut 4 ad 3 & 2 ad 6.

Hæc autem iterum est.

Majoris inæqualitatis, cum terminus antecedens major est consequente, ut 4 ad 3. & 6 ad 2.

Minoris inæqualitatis, cum antecedens est minor suo consequente, ut 2 ad 6. & 4 ad 12.

Proportio est rationum similitudo.

Quem-

Quemadmodum in omni ratione requiruntur duo termini seu duæ quantitates, ita in omni proportione requiruntur duæ rationes, cum una eademque ratio ad se ipsam proprie comparari nequeat.

Cum ergo duarum rationum una ita sit constituta, ut illius terminus antecedens suum consequentem toties contineat, vel in illo contineatur sive absolute & sine residuo sive cum annexa fractione, quoties alterius antecedens suum consequentem continet vel in illo continetur, vel sine vel cum fractione quæ præcedenti æqualis est, duæ istæ rationes constituent Proportionem.

Ex: Gr: quia numerorum 12 & 4, Antecedens 12 suum consequentem 4 toties (scilicet ter) continet quoties numerorum 9 & 3, antecedens 9 suum consequentem 3., videlicet etiam ter, duæ istæ rationes 12 ad 4 & 9 ad 3 erunt inter se similes seu æquales seu potius eædem scilicet triplæ; & hæc similitudo apud Mathematicoa vocatur Proportio.

Est autem proportio triplex, Arithmetica, Geometrica, & Musica.

I. Proportio Arithmetica est æqualitas excessuum vel differentiarum inter tres, quatuor vel plures numeros; in qua notandum est quemlibet numerum posse recipi pro differentia.

Ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. In quibus unitas est differentia.

Vel 1. 3. 5. 7. 9. 11. Qui binario se invicem excedunt.

Vel 1. 4. 7. 10. 13. 16. Qui ternario. Et sic in infinitum.

II. Proportio Geometrica est rationum similitudo inter tres, quatuor vel plures quantitates, seu numeros. Potest autem & hic quilibet numerus pro *denominatore* rationis assumi excepta *unitate*.

Ut 1. 2. 4. 8. 16. Qui sunt in ratione dupla adeoque 2 est rationis denominator.

Vel 1. 3. 9. 27. 81. Qui cum sint in ratione tripla numerum 3 pro denominatore habent.

Proportio Musica est qua tres quantitates ita ordinatæ sunt, ut eadem sit ratio primæ ad tertiam, quæ differentiæ inter primam & secundam ad differentiam inter secundam & tertiam. In qua proportione sunt tres numeri 6. 8. 12. cum eadem sit ratio primi numeri 6 ad tertium 12, quæ eſt numeri 2 (exceſſus primi) ad numerum 4. (exceſſum ſecundum.)

5. Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe mutuo ſuperare.

Hic ultèrius explicatur quænam ſint quantitates ejuſdem generis, inrer quas intercedit ratio, ut ſupra definit 3. vidimus; nim. quarum illa quæ antea erat minor, per multiplicationem ſic poteſt augeri, ut majorem ſuperet.

Unde patet inter illa, in quibus talis multiplicatio nullum habet locum, etiam nullam omnino dari rationem. Sic linea in infinitum multiplicata & ſibi ipſi addita, nunquam fiet major aliqua ſuperficie: cum linea tali multiplicatione non degenerabit in ſuperficiem; adeoque inter lineam & ſuperficiem nulla intercedit ratio: quemadmodum etiam nulla reperitur inter lineam & corpus, nec inter ſuperficiem & corpus; cum qualibetcunque multiplicatione nec linea, nec ſuperficies relicta ſua ſpecie in corpus mutatabitur, adeoque nec ipso majus evadere possit.

Cum autem inter latus quadrati ejusque diagonalem multiplicatio obtineat, certo concludimus illa rationem inter se habere: latus enim ita multiplicari & sibi ipsi addi potest ut diagonalem superet; cum per 20. I pateat duo latera triangulæ majora esse tertio latere quod est ipsa diagonalis: Hæc autem ratio, ut supra notavimus, est irrationalis, cum veris numeris illam exprimere non detur.

Præterea rectilinea & curvilinea inter se rationem habere possunt; cum inter illa sit æqualitas & inæqualitas. Lunulæ crescentis quadraturam Hippocrates Chius, & Parabolæ Archimedes invenerunt. Anguli rectilinei cum curvilineo æqualitatem exhibuit Proclus.

6. In eadem ratione quantitates dicuntur esse prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum prima suam secundam toties præse vel cum tali fractione continet vel in illa continetur, quoties

præ-

præcise vel cum quasi fractione tertia suam quartam continet vel in illa continetur.

Cum proportionalitatis indicium ab Euclide datum non ex ipsis propositis numeris sed qualicunque eorum multiplicatione sit deductum; nos illud nimis longe petitam aliquam proportionalium proprietatem suppeditare putamus; quare illo omisso aliud exhibemus indicium ex ipsis numeris propositis derivatum, & immediate ex rationis natura, antea explicata deductum.

Supra quippe vidimus rationem nihil aliud esse quam certam quandam formulam seu modum continendi, quo una quantitas aliam continet, vel ab alià continetur: quemadmodum positis duobus numeris 16 & 4. modus ille quo 16 numerum 4 continet potest exprimi per nomen quadrupli quia 16 ipsum 4 quatuor vicibus continet.

Si jam ex duobus aliis numeris 8 & 2, unus 8 alterum 2 etiam contineat eodem modo qui quadruplus dicitur, patet utrinque modum continendi esse æquatem vel potius eundem; cum autem, ut ſupra notatum eſt, ratio & modus continendi ſit unum & idem, facile concludimus, rationem etiam utrinque eſſe eandem: adeoque quatuor quantitates 16 & 4 ut & 8 & 2, binas ac binas ſumptas eſſe in eadem ratione.

Eodem modo cum numerus 20 numerum 8 non abſolute aliquot vicibus abſque fractione contineat, ſed modo continendi qui dicitur duplus cum dimidio; ſi ex numeris 10 & 4, primus 10 ſecundum 4 eodem modo duplo cum dimidio continet; utrimque modus continendi, ſeu quod jam pro eodem ſumimus, ratio erit eadem adeoque quatuor quantitates 20. 8 ut & 10. 4. binæ ac binæ acceptæ, in eadem erunt ratione.

7. Eandem autem rationem habentes quantitates, vocantur proportionales.

Quæ proportionales in duplici conſtituta ſunt genere.

Aut enim ſunt continue proportionales.

Aut non continue, quæ ſimpliciter tantum proportionales dicuntur.

Con-

Continue proportionales dicuntur illæ quantitates quæ ſunt in Progreſſione geometrica, inter quas a termino ad terminum eadem continuatur ratio, eundem terminum bis repetendo, ut ſemel primæ rationis ſit conſequens, antecedens vero ſecundæ.

Ex. gr. ex progreſſione gemetricá, cujus dominator eſt 2, ſcilicet 1. 2. 4. 8. 16. eligantur quatuor termini 1. 2. 4. 8. illi erunt continue proportionales; quia; eadem ratio ſcilicet dupla a termino ad terminum continuo procedit: primus enim 1 ſe habet ad ſecundum 2, ſicut idem ſecundus 2 ad tertium 4. deinde ſecundus 2 ſe habet ad tertium 4. quemadmodum idem tertius 4 ſe habet ad quartum 8.

Non continue proportionales dicuntur quantitates. quando eadem ratio quæ eſt inter primum & ſecundum non continuatur inter ſecundum & tertium, ſed ibi interrupta demum inter tertium & quartum invenitur, ut in hiſce numeris 12. 6. 8. 4. Ratio quæ eſt inter 12 & 6 non continuatur 6 & 8, ſed ibi interrupta tranſit ad duos reliquos terminos 8 & 4, cum 8 numerum 4 toties contineat quoties 12 continet 6. Hæ autem quan-

quantitates; ut supra notavimus, generali nomine dicuntur Proportionales.

8. *Cum vero prima quantitas secundam pluribus vel paucioribus vicibus contineat, quam tertia continet quartam, tunc prima ad secundam dicitur habere majorem vel minorem rationem quam tertia ad quartam.*

Ponantur quatuor numeri 8. 2. 6. 3. ex quibus primus 8 secundum numerum 2 pluribus vicibus (scilicet quatuor) contineat quam tertius 6 quartum 3. (qui illum bis continet), ratio quam 8 habet ad 2 erit major ratione 6 ad 3. Ex rationis enim natura supra vidimus rationem 8 ad 2 exprimi posse per fractionem $\frac{8}{2}$ (cujus valor est 4), ut & rationem 6 & 2, per fractionem $\frac{6}{3}$ (quæ tantum 2 valet) Cum autem fractio prima secunda major sit, patet etiam immediate ex rationis natura primam rationem secunda esse majorem.

Deinde ex quatuor numeris 12. 6. 8 2. primus numerus 12 secundum 6 paucioribus

bus vicibus contineat (ſc. bis) quam tertius 8 quartum 2 (utpote quater): erit fractio $\frac{12}{6}$ minor fractione $\frac{8}{2}$ quippe prima valet tantum 2 ſecunda vero 4. Cum autem fractio & ratio unum idemque ſonent, etiam primam rationem ſecunda minorem eſſe patebit.

9. Proportio vero in tribus ad minimum terminus conſiſtit.

Quælibet ratio duos requirit terminos: unum antecedentem & unum conſequentem: Proportio vero duas ad minimum exigit rationes: adeoque quatuor poſtulat terminos: qui expreſſe etiam requiruntur ſi proportio non ſit continua: ſi vero proportio conſtituatur continua, tres termini ſufficiunt, & tum medium bis ſumendo idem eſt ac ſi quatuor eſſent poſiti. Quemadmodum in numeris 2. 4. 8. vel 16. 8. 4. vel aliis tribus quibuslibet, ratio primi ad ſecundum eſt prima; ratio vero ejuſdem ſecundi ad tertium eſt altera, quæ duæ unam conſtituunt proportionem.

10. *Cum tres quantitates proportionales fuerint, prima ad tertiam dicitur duplicatam habere rationem eam quam eadem prima habet ad secundam.*

At vero cum quatuor quantitates fuerint continue proportionales; prima ad quârtam dicitur triplicatam habere eam rationem, quam eadem prima habet ad secundam.

Et sic porro uno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

Quidam putant rationem duplam & rationem duplicatam, unam & eandem rem significare, quæ duo tamen accurate a se invicem sunt distinguenda.

Ratio enim dupla intercedit inter duas quantitates seu numeros, quorum unus alterum præcise bis continet: quemadmodum numeri 8 ad 4. vel 6 a 3. sunt in ratione dupla: cujus correlarum ratio sub dupla est in rationibus 4 ad 8 vel 3 a 6.

Duplicata vero ratio etiam invenitur in

in numeris, *ubi rationis duplæ ne minimum* apparet vestigium. Exemplo gratia in hisce tribus numeris continue proportionalibus 3. 9. 27. ratio quam primus 3 ad tertium 27 est duplicata rationis quam idem numerus primus 3 habet ad secundum 9; licet nulla inter illos inveniatur dupla; unde patet rationem duplam & duplicatam significare res toto cœlo diversas.

Dicitur autem ista ratio duplicata, quia ratio quæ est inter primum numerum & secundum, inter secundum & tertium adhuc semel quasi repetitur. Notandum autem est hanc rationis repetitionem non aliter concipiendam esse quam per formam Multiplicationis; ita ut positis rationis terminus 3 ad 9, ad repetendam adhuc semel eandem rationem illius termini per se ipsos debere multiplicari, scilicet 3 per 3 & 9 per 9. ut obtineatur ratio terminorum 9 ad 81, quæ ratio erit duplicata rationis 3 ad 9.

Adeoque primus terminus 3 se habebit ad tertium 27 ut 9 ad 81. Illos quippe numeros esse proporaíonales evidenter ex rationis & proportianalium natura antea tradita fit manifestum, cum nim. primus

3 in ſecundo 27 tot vicibus (ſcilicet novies) continetur, quot vicibus tertius 9 continetur in quarto 81.

Si jam porro ponantur quatuor continue proportionales 2. 4. 8. 16. ratio quæ eſt inter ptimum 2 & ſecundum 4, prima vice repetitur inter ſecundum 4 & tertium 8; & deinde ſecunda vice inter tertium 8 & quartum 16. Quæ repetitio cum per multiplicationem fiat, ut rationis 2 ad 4 inveniatur triplicata, termini 2 & 4 primo debent per ſe ipſos multiplicari; cujus multiplicationis productis 4 & 16 adhuc ſemel per eoſdem terminos 2 & 4 multiplicatis obtinebuntur termini 8 & 64, conſtituentes quæſitam rationem triplicatam. Terminos enim 2, 16. 8. 64. eſſe inter ſe proportionales ex natura rationis facile probari poteſt.

Cæterum ex his omnibus notandum venit, rationem duplicatam nihil aliud eſſe quam rationem quadratorum, quæ a propoſitæ rationis terminis fiunt. Rationem autem triplicatam alicujus rationis unam eandemque eſſe cum ratione cuborum, qui a terminis fiunt.

11. *Homologæ quantitates (in quatuor proportionalibus) dicuntur*

tur esse antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Sint quatuor proportionales 2. 4. 3. 6. quantitas prima 2 & tertia 3 sunt utriusque rtionis antecedentes, adeoque homologæ seu ejusdem naturæ rem significantes: duæ vero reliquæ sc. secunda 4 & quarta 6, quia utriusque rationes sunt consequentes, similiter sunt homologæ.

De modis argumentandi.

Cum Mathematici ex quatuor proportionalibus non unam tantum sed plures eliciant conclusianes, quas modos seu formulas argumentandi vocant; Euclides illos ad sex revocat, qui totidem sequentibus proponuntur definitionibus, & in hoc libro 5 totidem fere propositionibus demonstrantur.

12. *Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.*

Sint quatuor quantitates proportionales

ad ita ad

ut $12 — 6 = 8 \mid 4.$

In quibus 12 & 8 ſint antecedentes; reliqui vero 6 & 4 conſequentes; alternando erit

$$12 — 8 = 6 \mid 4:$$

Hoc eſt Antecedens 12 eſt ad antecedentem 8, ſicut conſequens 6 ad conſequentem 4. Id quod demonſtratur prop. 16.

13. *Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis inſtar antecedentis ad antecedentem velut conſequentem.*

Si ponantur quatuor proportionales

$$12 — 6 = 8 \mid 4.$$

Ratione inverſa ſit erit.

$$6 — 12 = 4 \mid 8.$$

Seu ordine retrogrado priorem proportionem legendo

$$4 — 8 = 6 \mid 12.$$

14. *Compoſitio rationis eſt ſumptis antecedentis cum conſequente*

quente velut unius ad ipsum, consequentem.

Sint iterum quatuor proportionales
$12 - 6 = 8 \mid 4.$

Per compositionem rationis dicimus.
$\frac{12 + 6}{\text{seu } 18} - 6 = \frac{8 + 4}{\text{seu } 12} \mid 4.$

Hoc est prima quantitas una cum secunda sese habet ad ipsam secundam sicut tertia cum quarta ad ipsam quartam. Hujus demonstrationem vide prop. 18.

15. *Divisio rationis est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.*

Sint quatuor proportionales,
$18 - 6 = 12 \mid 4.$

Per divisionem rationis proportio sic stabit.
$\frac{18 \div 6}{\text{seu } 12} - 6 = \frac{12 \div 4}{\text{seu } 8} \mid 4.$

Hoc est primus terminus minus seu dempto secundo se habet ad ipsum secuncundum, quemadmodum tertius minus ſeu dempto quarto ad ipſum quartum. Hic argumentandi modus demonſtratur prop. 17.

15. *Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ſuperat ipſum conſequens.*

Propoſiti ſint quatuor proportionales.

$$18 - 6 \asymp 12 \mid 4.$$

Per converſionem rationis hanc habemus proportionem.

$$18 - \frac{18 \div 6}{\text{ſeu } 12} \asymp 12 \mid \frac{12 \div 4.}{\text{ſeu } 8}$$

Hoc eſt primus ſe habet ad ipſum primum minus ſeu dempto ſecundo, quemadmodum tertius ſe habet ad ipſum tertium minus ſeu dempto quarto. Hæc demonſtratur in Coroll. prop. 17.

17. *Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur in eadem ratio-*

tione; cum ut in primis quantitatibus prima ad ultimam, sic & in secundis prima ad ultimam se habeat.

Sint tres quantitates. 12. 6. 4.
Et adhuc tres aliæ. 6. 3. 2.

Per rationem quæ est ex æqualitate concludimus

12 — 4 ∺ 6 | 3.

Hoc est prima superiorum se habet ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam tertiam.

Quia autem hæc conclusio duobus modis ex istis sex quantitetibus elicitur, duplex etiam se aperit ex æqualitate ratio; sc. Ordinata & Perturbata.

18. *Ordinata proportio est, cum fuerit (positis scilicet sex quantitatibus) ut prima superiorum ad suam secundam, ita prima inferiorum ad suam secundam; deinde ut secunda superiorum ad suam ultimam, ita secunda inferiorum ad suam ultimam: & con-*

eluditur quod prima superiorum se habeat ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 4.
Et tres aliæ 6. 3. 2.

In quibus 12 — 6 ∺ 6 | 3.
Deinde 6 — 4 ∺ 3 | 2.

Proportio ex æquo ordinata sic stabit.
12 — 4 ∺ 6 | 2.

Hujus modi demonstrationem vide prop. 22.

Cæterum hæc proportio dicitur Ordinata, quia & in superioribus & in inferioribut eundem servat ordinem.

19. *Perturbata autem proportio est, cum positis tribus quantitatibus & aliis tribus; ut in superioribus prima se habeat ad suam secundam, sic in inferioribus secunda ad suam ultimam: & in superioribus secunda ad suam ultimam, ita in inferioribus prima ad suam secundam: & concluditur*

tur: quod prima superiorum se ita habeat ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam ultimam.

Sint tres quantitates	12. 6. 3.
Et aliæ totidem	16. 8. 4.

In quibus 12 — 6 = 8 | 4.
Et 6 — 3 = 16. | 8.

Proportio ex æquo perturbata sic erit
12 — 3 = 16 | 4.

Hujus demonstrationem vide pro. 23.

Perturbata dicitur hæc proportio, quod in superioribus & inferioribus non idem servetur ordo, sed ille quasi perturbetur.

LEMMA I.

Multiplicatio nihil est aliud quam multiplex additio: sicut etiam divisio nihil aliud quam multiplex & compendiosa subtractio.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Sit numerus 6 multiplicandus

per numerum 4, nihil aliud imperatum eſt quam, ut numerus 6 toties ſumatur, ſeu repetatur ſeu ſibi ipſi addatur, quoties unitas continetur in 4, ſc. quater: adeoque idem facimus ſive numerum 6 multiplicemus per 4, ſive eundem quater ponam & illos quatuor numeros 4 in unam ſummam colligam, cum utrobique obtineatur 24.

Pars 2. Si numerus 24 proponantur dividendus per numerum 4, idem eſt ac ſi examinandum eſſet, quoties numerus 4 a 24 poſſit ſubtrahi id quod in diviſione unica ſubductione fit diviſore prius per quotientem multiplicato cum ſubtractiones tot fieri poſſint, quot unitates diviſionis contineat quotiens. Quare nulla eſt differentia ſive 24 dividatur per 4 ſive 4 a 24 ſubtrahatur quoties fieri poteſt cum utrobique idem obtineatur quotiens 6.

Notandum autem in multiplicatione non ſemper opus eſſe ut multiplicatio revera fiat, & numeri inter ſe commiſceantur, ut productum unico numero exprimatur; cum eadem multiplicatio alia etiam forma deſignari poſſit, nimirum multiplicatores juxta ſe invicem ſcribendo do interposito signo ·x·

Ex. gr: sit 8 multiplicandus per 4 facta multiplicatione obtinetur productum 32, quod etiam hoc modo exprimi potest 8 ·x· 4. quod in pronuntiatione valet 8 multiplicata per 4.

Quæ exprimendi forma hoc habet commodum quod jam pateat ad oculum per quam operationem & ex quibus numeris illud productum sit ortum, quod in altero producto 32 non tam clare distingui potest. cum illud etiam ex multis aliis additionibus & multiplicationibus generari potuisset.

Præterea si productam 8 ·x· 4 dividendum sit per 4, omisso numero 4 scribendum erit 8. vel scribendum est 4, si dividi debeat per 8.

Similiter in divisione non opus est ut semper vera fiat divisio; cum quotiens quæsitus etiam alia forma possit exprimi, si nim. numero dividendo subscribatur divisor inter utrumque ducta lineola.

Ex. gr. oporteat dividere numerum 32 per 8, facta reali divisione obtinetur quotiens 4, qui etiam designari posset per formamam fractionis $\frac{32}{4}$, qui quotiens in elocutione idem valet 32 partes quartæ, seu 32 divisa per 4.

LEMMA II.

Si duo æquales numeri per eundem numerum multiplicentur, producta erunt inter se æqualia. Si uero per eundem numerum dividantur, quotientes erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Per Lemna 1 multiplicatio est multiplex & compendiosa additio: adeoque unus numerus multiplicandus toties sibi additur, quoties alter (qui priori ponitur æqualis) sibi ipsi additur: quia multiplicator utrimque ponitur idem: unde patet idem fieri ac si æqualibus æqualia addantur; quando nimirum summæ (quæ producto æquivalent) inter se sunt [a] æquales:

[a] Ax. 2.

2. Pars. Per idem Lemna 1 divisio est multiplex ac compendiosa subtractio: ergo ab uno numero dividendo toties subtrahitur divisor quoties ab altero dividendo (qui per hypothesin priori æqualis est)

eſt) ſubtrahitur idem diviſor : quare in iſta diviſione utrinque idem fit, ac ſi ab æqualibus æqualia demantur; quare reſidua (quæ quotientibus æquivalent) inter ſe ſunt æqualia. b Ax. 3.

LEMMA III.

Si duo inæquales numeri per eundem numerum multiplicentur producta erunt inter ſe inæqualia. Si vero per eundem diviſorem dividantur, quotientes erunt inæquales.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Cum per Lemma 1 multiplicatio ſit compendioſa Additio: ſi duo numeri inæquales per eundem numerum multiplicentur, idem eſt ac numerus major toties ſibi addatur quoties minor minori. At vero ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, [a] tota ſunt inæqualia per Ax. 4. a Ax. 4. Ergo etiam, ſi numero majori major toties adjiciatur quoties minori additur minori, prior ſumma, quæ hic producto æquivalet, erit major altera.

2. Pars

2 Pars. Quia divisio nihil aliud est quam compendiosa subtractio, si duo numeri inæquales per eundem numerum dividantur, nihil aliud fit quam quod idem numerus ab una parte a majori subtrahitur, ab altera vero a minori.

Patet autem eundem numerum pluries subtrahi a majori posse quam a minori; cum major eundem numerum pluries contineat quam minor: & cum plures istæ subtractionis vices constituant majorem quotientem, sequitur ex divisione majoris numeri per alium quemlibet acquiri majorem quotientem, quam ex minoris numeri per eundem divisione.

LEMMA IV.

Si idem numerus vel duo numeri æquales per numeros inæquales multiplicentur, producta erunt inæqualia, & quidem productum majoris multiplicatoris erit majus producto minoris multiplicatoris.

Ut & si dividantur per numeros inæquales, quotientes erunt inæquales. Major quidem ille ubi di-

divisor est minor; at vero minor, ubi divisor est major.

DEMONSTRATIO.

Hæc ex superioribus nullo negotio deduci potest.

Quatuor hisce Lemmatibus præmissis, & qualicunque Arithmeticarum in fractionibus operationum notitia præsupposita, quædam subjungimus Theoremata, quæ tanquam generale omnium fere totius libri quinti propositionum demonstrandarum fundamentum præstruimus.

THEOREMA I.

Si quatuor quantitates sint proportionales, productum quod oritur ex multiplicatione extremarum est æquale producto multiplicationis mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales.

8 — 4 = 6 | 3.

Ratio 8 ad 4 eadem est cum fractione

$\frac{8}{4}$ & ratio 6 ad 3 exprimitur per fractionem $\frac{6}{3}$: quia autem rationes sunt eadem seu æquales; erunt quoque fractiones inter se inter se æquales.

Adeoque $\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}$.

———— utrinque multipl. per 4.

$8 \propto \frac{4 \cdot x \cdot 6.}{3.}$ Per Lemma 2.

Et ———— utrimque multipl. per 3.

$8 \cdot x \cdot 3 \propto 4 \cdot x \cdot 6$ per Lem. 2.

Hoc est productum extremorum 8 & 3 per se invicem multiplicatorum est æquale producto mediorum etiam multiplicatorum. Q. E. D.

THEOREMA II.

Si duo producta sint inter se æqualia, unus multiplicator primi producti se habet ad unum multiplicatorem secundi producti, quemadmodum reciproce alter multiplicator ejusdem secundi producti se habet ad alterum multiplicatorem primi producti.

De-

DEMONSTRATIO.

Sint duo producta inter se æqualia.

8 ·x· 3 ꝏ 4 ·x· 6. per Lemma 2.

———————— utrimque divid. per 3.

8 ꝏ $4 \cdot x \cdot \frac{6}{3}$. per Lemma 2.

———————— utrinque divid. per 4.

$\frac{8}{4}$ ꝏ $\frac{6}{3}$ per Lemma 2.

Quæ fractiones si revocentur ad rationes. erit

8 — 4 ∺ 6 | 3.

Quod juxta tenorem Theorematis E. D.

COROLLARIUM I.

Eodem modo posset demonstrari esse.

8 — 6 ∺ 4 | 3.
Vel 3 — 4 ∺ 6 | 8.
Vel 3 — 6 ∺ 4 | 3.

Quæ proportiones involvunt tum Alternationem, tum inversam etiam rationem.

COROLLARIUM II.

Hinc evidenter patet, si quælibetcunque quatuor quantitates eo ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum fuerit æquale, certissime inde concludi posse, istas quatuor quantitates eo ordine proportionales esse.

SCHOLIUM.

Si quilibet datus numerus ex. gr. 24. resolvatur in duos per quorum multiplicationem potuerit generari (quod hic quater potest fieri vel per 1 in 24. vel per 2 in 12. vel per 3 in 8. vel per 4 in 6.) facile probatur esse.

	1	—	2	::	12	|	24.
Vel	2	—	3	::	8	|	12.
Vel	3	—	4	::	6	|	8.
Vel	1	—	3	::	8	|	24.
Vel	1	—	4	::	6	|	24.
Vel	2	—	4	::	6	|	12.

Et sic de quolibet alio numero dato.

Theore-

THEOREMA *III.*

Si ex quatuor quantitatibus prima ad secundam majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam: productum quod fit per multiplicationem extremarum majus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hisce quantitatibus

$8 - 3 < 4 \mid 2.$

Erit secundum ante dicta.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}.$$

utrimque multipl: per 3.

$$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2}$$ per Lemma 3.

utrinque multipl. per 2.

$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4$. per Lemna 3.

Hoc est productum extremorum 8 & 2 majus producto mediorum 3 & 4.

Q. E. D.

THEOREMA IV.

Si duo producta ſint inæqualia, prima quantitas multiplicans majoris producti ad primam quantitatem multiplicantem minoris producti majorem habebit rationem, quam reciproce ſecunda quantitas ejuſdem minoris producti ad ſecundam quantitatem majoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex propoſitis hiſce productis

$$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4.$$

———————— utrinque divid. per 2.

$$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2.} \quad \text{per Lemna 3.}$$

———————— utrimque div. per 3.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}$$

Hoc eſt redigendo haſce fractiones ad rationes

$8 - 3 < 4 | 2.$ Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile posset demonstrari esse

	8	——	4	<	3	|	2.
Vel	2	——	3	<	4	|	8.
Vel	2	——	4	<	3	|	2.

COROLLARIUM II.

Hinc sequitur, si quælibetcunque quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum sit majus, firmiter concludendum esse, primam ad secundam habere majorem rationem, quam tertia habet ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 24 & 16 resolvantur in suos multiplicationes

sc: 24	& 16.
in	in
1. 24.	1. 16.
2. 12.	2. 8.
3. 8.	4. 4.
4. 6.	

ex hoc Theoremate patet esse

Vel 1 —— 1 < 16 | 24.
Vel 1 —— 2 < 8 | 24.
Vel 1 —— 4 < 4 | 24.

Deinde

Vel 2 —— 1 < 16 | 12.
Vel 2 —— 2 < 8 | 12.
Vel 2 —— 4 < 4 | 12.

Postea.

Vel 3 —— 1 < 16 | 8.
Vel 3 —— 2 < 8 | 8.
Vel 3 —— 4 < 4 | 8.

Denique

Vel 4 —— 1 < 16 | 6.
Vel 4 —— 2 < 8 | 6.
Vel 4 —— 4 < 4 | 8.

Præter alias 36 majoritatis proportiones, quæ ex hisce rinmeris elici possunt.

Theo-

THEOREMA 5.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad secundam minorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; productum quod fit per multiplicationem extremarum minus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hisce quantitatibus

$4 - 2 > 8 \mid 3.$

Erit $\frac{4}{2} > \frac{8}{3}$

———— utrinque multipl. per 3.

$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8.$ Per Lemma 3.

———— utrinque multipl. per 2.

$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2.$ per Lemma 3.

Hoc est productum extremarum 4 & 3 est minus producto mediarum 2, 8.

THEOREMA 6.

Si duo producta sint inæqualia, prima quantitas multiplicans minoris producti ad primam quantitatem multiplicantem majoris producti minorem habebit rationem, quam reciproce secunda quantitas ejusdem majoris producti ad secundam quantitatem minoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex duobus hisce productis.

$$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2.$$

———————— utrinque divid. per 2.

$$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8. \quad \text{Per Lemma 3.}$$

———————— utrinque div. per per 3.

$$\frac{4}{2} > \frac{8}{3} \quad \text{per Lemma 3.}$$

Hoc est redigendo ad rationes

4 — 2 > 8 I 3.

Co-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile posset demonstrari. quod sit

$$4 - 8 > 2 - 3.$$
$$\text{Vel } 3 - 8 > 2 - 4.$$
$$\text{Vel } 3 - 2 > 8 - 4.$$

COROLLARIUM. II.

Hinc patet, si quælibetcunque quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum sit minus producto mediarum, certissime concludi, primam ad secundam habere minorem rationem, quam tertia ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 16 & 24 resolvantur in suos multiplicatores:

sc: 16. in	24.
1. 16.	1. 24.
2. 8.	2. 12.
4. 4.	3. 8.
	4. 6.

Ex hoc Theoremate patet esse

	1	—	1	>	24 | 16.	
Vel	1	—	2	>	12 | 16.	
Vel	1	—	3	>	8 | 16.	
Vel	1	—	4	>	6 | 16.	

Præterea.

Vel	2	—	1	>	24 | 8.
Vel	2	—	2	>	12 | 8.
Vel	2	—	3	>	8 | 8.
Vel	2	—	4	>	6 | 8.

Denique

Vel	4	—	1	>	24 | 4.
Vel	4	—	2	>	12 | 4.
Vel	4	—	3	>	8 | 4.
Vel	4	—	4	>	6 | 4.

Præter alias 36 minoritatis proportiones, quæ ex hisce numeris deduci possunt.

Jam sequuntur ipsæ Libri quinti Propositiones.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si sunt quotcunque magnitudines seu quantitates proportionales A. B. C. D. E. F. quemadmodum se habuerit una antecedentium ad suam consequentem, ita omnes antecedentes G simul se habebunt ad omnes consequentes etiam simul sumptas H.

DEMONSTRATIO.

Sint in eadem inter se ratione

$$\left.\begin{array}{l} A\ 3 — 1\ B \\ C\ 6 — 2\ D \\ E\ 9 — 3\ F \end{array}\right\} A$$
$$\overline{G\ 18 — 6\ H.}$$

Demonstrandum est esse summam ad summam ut quælibet antecedens ad suam consequentem.

Hoc est 18 — 6 = 3 | 1.
Deinde 18 — 6 = 6 | 2.
Denique 18 — 6 = 9 | 3.

Quia in qualibet proportione productum extremorum facta multiplicatione est æquale producto mediorum, quatuor illarum termini sunt [a] proportionales.

[a] 2 Coroll. Theor. 2.

PROPOSITIO II. & XXIV.

Si prima A ad ſecundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habuerit autem & quinta E ad ſecundam B eandem rationem quam ſexta F ad quartam D; Etiam G, compoſita prima cum quinta ad ſecundam B, eandem habebit rationem quam H tertia cum ſexta ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C		D	
Sit	4	—	2	=	6	ǀ	3.	A.
	E 10				F 15.			
	G 14				H 21			

Si inſtituatur multiplicatio, producta erunt æqualia, ergo (a) iſtæ quantitates ſunt proportionales.

a Theor. 2.

Aliter

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}\\[6pt] \frac{10}{2} \propto \frac{15}{3}\end{array}\right\} \text{A.}$$

b Ax. 2.

$\frac{14}{2}$ b $\propto \frac{21}{3}$ vel in proportione.

$14 \text{ —— } 2 = 21.\ ǀ\ 3.$ Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO III.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; & prima A & tertia C per eundem quemlibet numerum G multiplicentur: productum primum E se habebit ad secundam B, quemadmodum productum secundum F ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccccccc} A & & B & & C & & D \\ 4 & \text{—} & 2 & = & 6 & | & 3 \end{array} \Big\} M.$$

$$\begin{array}{ccc} G\ 2 & & G\ 2 \\ \hline E\ 8 & & F\ 12 \end{array}$$

Demonstrandum est

$$\begin{array}{ccccccc} E & & B & & F & & D \\ 8 & \text{—} & 2 & = & 12 & | & 3. \end{array}$$

Id quod (a) exinde patet, quod producta extremorum & mediorum sunt æqualia. a Theor. 2.

Aliter

$$\frac{4}{2} \infty \frac{6}{3}$$

———utrimque multipl, per 2.

$$\frac{8}{2} \infty \frac{12}{3}$$ Lemna 2.

Hoc est in proportione

$$8 \text{ —— } 2 = 12 \ | \ 3.$$

Pro-

PROPOSITIO. IV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; prima vero A & tertia C. per quemlibet eundem numerum G multiplicentur; ut & secunda B & tertia D per alium numerum K. quatuor ista producta inter se proportionalia erunt.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales

A		B		C		D
4	—	2	=	6	l	3.
G 2		K 3		G 2		K 3
E 8		L 6		F 12		M. 9

Demonstrandum est quatuor producta E. L. F. M. esse proportionalia seu

8 — 6 = 12 l 9.

Quod ex Theor. 2 sequitur, quia facta multiplicatione producta extremorum & mediorum inter se sunt æqualia.

Aliter

$$\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}$$

——————— multipl. per 2.

$$\frac{8}{2} \propto \frac{12}{3} \quad \text{Lemma 2.}$$

——————— divide per 3,

$$\frac{8}{6} \propto \frac{12}{9} \quad \text{per idem Lemma 2.}$$

Hoc est in proportione

8 — 6 = 12 l 9.

Pro-

PROPOSITIO V. XIX.

Si totum A ad totum B eandem habuerit rationem, quam ablata pars C ad partem ablatam D: etiam pars reliqua E ad partem reliquam F, eandem habebit rationem, quam totum A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

A	8	4	B	S
C	6	3	D	

Erit	E	F	A	B.
	2 —	1 =	8 |	4.

Quia producta sunt æqualia. per Theor. 2.

PROPOSITIO VI.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, habuerit autem & quinta E ad secundam B eandem rationem quam sexta F ad quartam D. Si quinta E subtrahatur a prima A, & sexta F ac tertia C,

Vel residuum primum G erit æquale secundæ B & residuum secundum H æquale quartæ D.

Vel residuum primum G se habebit ad secundam B sicut residuum secundum H ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A		B		C		D
12	—	2	=	18	1	3. S
E 10				F 15.		
G 2				H 3.		

CA-

CASUS II.

A	B	C	D	
12 —	2 =	18 |	3.	S
E 4		F 6		
Erit G	B	H	D.	
8 —	2 =	12	3.	

Per Theor. 2

Alter.

CASUS I.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{10}{2} \;\infty\; \frac{15}{3} \end{array}\right\} S$$

$$\frac{2}{2} \;\infty\; \frac{3}{3} \quad \text{per Axioma 3.}$$

Erit in proportione, quæ ex rationis æqualitatis

2 — 2 = 3 | 3.

CASUS II.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{12}{2} \;\infty\; \frac{18}{3} \\ \frac{4}{2} \;\infty\; \frac{6}{3} \end{array}\right\} S.$$

$$\frac{8}{2} \;\infty\; \frac{12}{3}$$

Hoc est in proportione

8 — 2 = 12 | 3.

PROPOSITIO VII.

1. *Æquales A & A ad eandem C eandem habent rationem.*

2. *Et eadem C ad æquales A & A eandem habet rationem.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A		C		A		C.
12	—	4	=	12	|	4.

PARS II.

C		A		C		A.
4	—	12	=	4	|	12.

Quia utrobique producta sunt æqualia. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO VIII.

1. *Inæqualium quantitatum A. B. major A ad eandem C majorem rationem habet, quam minor B.*

2. *Et eadem C ad minorem B majorem habet rationem quam ad majorem A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{matrix} A & & B \\ 16 & < & 8 \end{matrix} \text{ ex hypoth.}$$

utrinque divide per 5. C.

$$\frac{16}{5} < \frac{8}{5}. \quad \text{per Lemma 3.}$$

Hoc est in proportione

$$16 - 5 < 8 \mid 5.$$

PARS II.

$$\left.\begin{matrix} 5 & \infty & 5 \\ 8 & > & 16 \end{matrix}\right\rangle \text{D.}$$

$$\frac{5}{8} > \frac{5}{16} \quad \text{per Lemma 4.}$$

Hoc est in proportione.

$$5 - 8 < 5 \mid 16.$$

PROPOSITIO IX.

1. *Si A & B ad eandem C habeant eandem rationem, illæ æquales inter se erunt.*

2. *Et si eadem C ad A & B habeat eandem rationem, illæ itidem æquales erunt.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{array}{cccc} A & C & B & C \\ 15 & - \; 4 = & 15 \mid & 4. \end{array}$$

$$\text{Ergo } \frac{15}{4} \propto \frac{15}{4}.$$

———————— multipl. per 4.

$$15 \propto 15.$$

PARS II.

$$\begin{array}{cccc} C & H & C & B \\ 4 & -\!-\; 15 = & 4 \mid & 15. \end{array}$$

$$\text{Ergo } \frac{4}{15} \propto \frac{4}{15}$$

———————— mult. per 15.

$15 \cdot \times \cdot 4 \propto 15 \cdot \times \cdot 4$. per Lem. 2.

———————— div. per 4.

$15 \propto 15$. per idem Lemma 2.

Pro-

PROPOSITIO X.

1. *Si A ad C majorem rationem habet quam B ad eandem C, erit A major quam C.*

2. *At si eadem C ad B majorem rationem habuerit quam ad A, erit B minor quam A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{array}{cccc} A & C & B & C \\ 16 & — 4 & < 8 \mid & 4. \end{array}$$

Ergo $\frac{16}{4} < \frac{8}{4}.$

———————— mult. per 4.

$16 < 8.$ per Lemma 3.

PARS II.

$$\begin{array}{cccc} C & B & C & A. \\ 4 & — 8 & < 4 \mid & 16. \end{array}$$

$$\frac{4}{8} < \frac{4}{16}$$

———————— Multipl. per 8.

$4 < \frac{4 \cdot x \cdot 8}{16}$ per Lemma.

Mul-

———————— Multipl. per 16.

4 .x. 16 < 4 .x. 8. Lem. 3.

———————— div. per 4.

16 < 8.

Alio modo.

A C B C

16 —— 4 < 8 | 4.

Ergo 4 .x. 16 < 4 .x. 8. The. 3.

———————— div. per 4.

16 < 8. Lemma 3.

PARS II.

C B C A.

4 — 8 < 4 | 16.

Ergo 4 .x. 16 < .x. 8. Theor. 4.

———————— div: per 4.

16 < 8. Lemma 3.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Rationes, quæ eidem rationi sunt eædem, vel similes vel æquales, inter se sunt eædem vel similes vel æquales.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } 8 \text{ --- } 4 = 6 \mid 3. \\ \text{Et } 10 \text{ --- } 5 = 6 \mid 3. \\ \hline \text{Erit } 8 \text{ --- } 4 = 10 \mid 5. \end{array}$$

Quia nimir. producta sunt æqualia. per Theor. 2. Vel sic.

$$\begin{array}{l} \frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}. \\ \frac{10}{5} \propto \frac{6}{3}. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Ergo } \frac{8}{4} \propto \frac{10}{5} \text{ Ax. I.}$$

Hoc est in proportione.

$$8 \text{ --- } 4 = 10 \mid 5.$$

PROPOSITIO *XII.*

Hæc est eadem cum prima, quæ videri potest.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ratio sit æqualis secundæ rationi; secunda vero sit major tertiâ: similiter etiam prima tertia major erit.

DEMONSTRATIO.

Sit 16 — 8 = 12 | 6.
At vero 12 — 6 $<$ 4 | 3.

Ergo 16 — 8 $<$ 4 | 3.

Quia productum extremorum est majus producto mediorum. per 2 Coroll. Theor: 4.

Vel hoc modo.

$$\frac{16}{8} \propto \frac{12}{6}$$

$$\text{Atqui } \frac{12}{6} < \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ergo } \frac{16}{8} < \frac{4}{3}$$

Et in proportione

16 — 8 $<$ 4 | 3.

Pro-

PROPOSITIO XIV.

Si quatuor proportionalium A. B. C. D. prima A fuerit major tertia C, erit & secunda major quarta D.

Si A æqualis C erit B æqualis D.

Si A minor C, erit B minor D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A B C D
12 — 8 ∺ 6 | 4.
Ergo 12 · x · 4 ꝏ 8 · x · 6. } Div.
12 < 6
―――――――――――
4 > 8. per Lemma 4.

CASUS II.

A B C D.
12 — 4 ∺ 12 | 4.
Ergo 12 · x · 4 ꝏ 12 · x · 4. } D.
12 ꝏ 12
―――――――――――
4 ꝏ 12. Per Lemma 2.

CASUS III.

A B C D.
4 — 6 ∺ 8 | 12.
Ergo 4 · x · 12 ꝏ 6 · x · 8. } D.
4 > 8
―――――――――――
12 < 6. Lemma 4.

PROPOSITIO XV.

Si duæ quantitates A & B æqualibus vicibus sumantur seu per eundem numerum multiplicentur, summæ seu producta habebunt inter se eandem rationem quam habent positæ quantitates A & B.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 4 & 12 \\ 2 & 2 \end{array} \text{M.}$$

Erit 8 —— 24 = 4 l. 12.

Quia producta sunt æqualia. Theor: 2.

SCHOLIUM.

Si eædem quantitates A & B per eundem numerum dividantur, quotientes ipsis quantitatibus proportionales erunt.

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 4 & 12 \\ 2 & 2 \end{array} \text{D.}$$

2 —— 6 = 14 l 12. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint, illæ etiam viciſſim proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D
16 — 8 :: 4 | 2.

Erit etiam viciſſim, ſeu permutando.

16 — 4 :: 8 | 2.

Quia facta multiplicatione producta ſunt æqualia, per Theor: 2.

SCHOLIUM.

Commode hic demonſtratur ratio inverſa. Sint Proportionales.

A B C D.
16 — 8 :: 4 | 2.

Erit per Theor. I.

16 .x. 2 ∞ 8 .x. 4.

Ergo per Theor: 2.

2 — 4 :: 8 | 16. Q. E. D.

PROPOSITIO *XVII.*

Si compositæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque divisæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C. D.

16 — 12 = 8 l 6.

Erit quoque dividendo.

$$\frac{16 \div 12}{\text{seu } 4} — 12 = \frac{8 \div 6}{\text{seu } 2} \; l \; 6.$$

Id quod multiplicatione probatur per Theor. 2.

Vel alio modo per prop: 6 hujus

$$\left.\begin{array}{l} 16 — 12 = 8 \; l \; 6. \\ 12 \qquad\quad\;\; 6 \end{array}\right\} S$$

$$\overline{4 — 12 = 2 \; l \; 6.} \quad \text{Q.D.E.}$$

SCHOLIUM.

Cum ratio conversa commode hic inseri possit, sint proportionales.

16 — 12 = 8 l 6.

Erit convertendo

$$16 — \frac{16 \div 12}{\text{f. } 4} = 8 \; l \; \frac{8 \div 6}{\text{f. } 2.}$$

Quia nim: producta sunt æqualia. per Theor: 2.

Pro-

PROPOSITIO XVIII.

Si divisæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

4 — 12 ∺ 2 | 6.

Erit componendo.

$\frac{4 + 12}{\text{ſ. } 16}$ — 12 ∺ $\frac{2 + 6}{\text{ſ. } 8}$ | 6.

Per Theor: 2. cum producta ſint æqualia.

Aliter per prop. 2. hujus.

4 — 12 ∺ 2 | 6 } A.
12 6

16 — 12 ∺ 8 | 6.

PROPOSITIO XIX.

Vide propoſ. 5. quæ cum hac eſt eadem.

PROPOSITIO XX.

Hac demonſtrabitur poſt pr. 22.

Pro-

PROPOSITIO *XXI.*

Et hæc post propos. 23.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint quotcunque quantitates. A. B. C. & aliæ numero æquales D. E. F. fuerit autem ordinate ut A ad B. sic D ad E: & ut B. ad C ita E ad F: illæ ex æqualitate ordinatâ in eadem ratione erunt; hoc est A ad C. ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitatos

A	B	C.
16	8	4.
D	E	F.
12	6	3.

Ita ut sit

A B D E.
16—8 = 12 | 6.

Et

B C E F.
8 4 = 6 | 3.

Erit

Erit ex æqualitate ordinata.

A C D F.
16 — 4 = 12 | 3.

Per multiplicationem extremorum & mediorum juxta Theor: 2.

Alio modo

16 — 8 = 12 | 6 8 — 4 = 6 | 3.
vicissim 16. V. vicissim 16. V.
16 — 12 = 8 | 6 8 — 6 = 4 | 3.

Atqui etiam
4 — 3 = 8 | 6.

Ergo 11. V.
16 — 12 = 4 | 3.

Et vicissim 16. V.
A C D F.
16 — 4 = 12 | 3.

Hisce sic demonstratis dicit propositio 20.

Si prima A fuerit < tertia C, etiam quartam D fore < sexta F.

Si A sit ∞ C. fore D ∞ F.

Si A sit > C. fore D > F.

Quæ omnia ex prop: 14 patent si ultima proportio permutetur ut sit
16 — 12 = 4 | 3.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates A. B. C, & aliæ tres D. E. F, fuerit autem perturbate ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita D ad E: illæ ex æqualitate perturbata in eadem ratione erunt sc. A erit ad C ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates A B C.
16 8 2.
D E F.
24 6 3.

Ita ut sit
16 — 8 = 6 | 3.
Et
8 — 2 = 24 | 6.
Erit ex æquo
16 — 2 = 24 | 3.

Quia multiplicando acquiruntur producta æqualia. Ergo per Theor. 2. illæ quantitates proportionales.

Alio

Alio modo

16 — 8 = 6 | 3.	8 — 2 = 24 | 6.
Ergo Theor. I.	Theor. I.
3 · x · 16 ꝏ 8 · x · 6.	8 · x · 6 ꝏ 2 · x · 24

Ergo per Ax. I.

3 · x · 16 ꝏ 2 · x · 24.

Adeoque per Theor. 2.

A C D F.
16 — 2 = 24 | 3.

Quibus positis dicit propositio 21.

Si sit prima A < tertia C, etiam quartam D fore majorem sexta F.

Si A sit ꝏ C, fore D ꝏ F.

Si A sit > C. fore D > F.

Quæ omnia rursus ex 14 V. patent, si ultima proportio permutetur, ut sit

16 — 24 = 2 | 3.

PROPOSITIO XXIV.

Hæc est eadem cum prop. 21 quæ videri potest.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint: maxima A simul cum minima D. reliquis duabus B. C. simul sumptis majores erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D

$12 - 4 = 9 \mid 3.$

Permutando. 16. V.

$12 - 9 = 4 \mid 3.$ dividendo 17. V. | $12 < 4$ ex hyp, Ergo $9 < 3$. 14. V.

$3 - 9 = 1 \mid 3.$

Atqui $9 < 3.$

Ergo $3 < 1.$ A. Duæ ultimæ.

$9 + 3 \infty 9 + 3.$ C. D.

$12 + 3 < 4 + 9.$

Hoc est A & B simul $<$ B & C.

Q. E. D.

Reliquæ sequentes novem propositiones non sunt Euclidis; possunt tamen, eadem, qua præcedentes Euclidis, facilitate demonstrari.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit invertendo quarta D ad tertiam C majorem rationem quam secunda B ad primam A.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit $8 \div 4 < 5 \mid 3$.

Erit per Theor. 3.

$3 \cdot x \cdot 8 < 5 \; x \cdot 4$.

Ergo per Theor. 4.

$3 \div 5 < 4 \mid 8$.

Q.E.D.

PROPOSITIO XXVII.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem, quam tertia C ad quartam D, habebit quoque vicissim prima A ad tertiam C, majorem rationem quam secunda B ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit 8 — 4 < 5 1 3.

Erit 8 ·x· 3 < 5 ·x· 4. Th:3.

Ergo per Theor: 4.

8 — 5 < 4 1 3.

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D. habebit quoque composita prima cum secunda ad ipsam secundam B majorem rationem quam composita tertia cum quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & B & & C & & D. \\ \text{Sit} & 8 & - & 4 & < & 5 & | & 3. \end{array}$$

Erit quoque

$$\underset{\text{seu } 12}{8+4} - 4 < \underset{\text{seu } 8}{5+3} \,|\, 3.$$

Quia productum extremorum est majus producto mediorum. per Theor: 4.

Aliter.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{8}{4} < \frac{5}{3}. \\ \frac{4}{4} \propto \frac{3}{3} \end{array}\right\} A.$$

$$\frac{12}{4} < \frac{8}{3.} \quad \text{Ax. 4.}$$

Hæc est, $12 - 4 < 8 \,|\, 3.$

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit dividendo prima minus seu demta secunda, ad ipsam secundam B majorem rationem, quam tertia minus seu dempta quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{lccccccc} & A & & B & & C & & D. \\ \text{Sit} & 12 & — & 4 & < & 8 & | & 3. \end{array}$$

Erit quoque

$$\frac{12 \div 4}{\text{seu } 8} — 4 < \frac{8 \div 3}{\text{seu } 5.} | 3.$$

Per Theor. 4. Quia productum extremorum est majus producto mediorum. Vel etiam hoc modo.

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{12}{4} & < & \frac{8}{3} \\ \frac{4}{4} & \propto & \frac{3.}{3.} \end{array}\right\} S$$

$$\frac{8}{4} < \frac{5}{3.} \text{ per Ax: } 5$$

Hoc est $8 — 4 < 5 | 3.$ Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXX.

Si prima A ad ſecundam B majorem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habebit per rationis converſionem, prima ad ipſam primam minus ſeu dempta ſecunda majorem rationem quam tertia ad ipſam tertiam minus quarta.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
12 — 4 < 8 | 3.

Demonſtrandum eſt quod ſit

$$12 — \underbrace{12 \div 4}_{\text{ſeu } 8} > 8 | \underbrace{8 \div 3}_{\text{ſeu } 5}.$$

Id quod patet ex multiplicationem: quia nim. productum extremorum eſt minus producto mediorum. per Theorema 6.

PROPOSITIO *XXXI.*

Si fuerint tres quantitates A. B.C. & aliæ tres D.E.F. sitque major ratio primæ priorum A ad secundam B, quam primæ posteriorum D ad suam secundam E: ut & major ratio secundæ priorum B ad suam tertiam C, quam secundæ posteriorum E ad suam tertiam F: Erit quoque ex æqualitate ordinata major ratio primæ priorum A ad suam tertiam C, quam primæ posteriorum D, ad suam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	4
D	E.	F.
9	5	3.

Sit $16 - 8 < 9 \mid 5.$
Et $8 - 4 < 5 \mid 3.$

Erit ex æquo.

$16 - 4 < 9 \mid 3.$

Id

Id quod patet ex multiplicatione, cum productum extremorum sit majus producto mediorum, per Theor: 4.

Aliter.

$$16 - 8 < 9 \mid 5.$$

vicissim. 27. V.

$$16 - 9 < 8 \mid 5.$$

Et

$$8 - 4 < 5 \mid 3.$$

vicissim. 27. V.

$$8 - 5 < 4 \mid 3.$$

Ergo.

$$16 - 9 < 4 \mid 3.$$

Vicissim.

$$16 - 4 < 9 \mid 3.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXXII.

Si sint tres quantitates A. B. C. & aliæ tres D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad suam secundam B quam secundæ posteriorum E ad suam tertiam F: ut & ratio secundæ priorum B ad suam tertiam C major quam primæ posteriorum D ad suam secundam E Erit quoque ex æqualitate perturbata major ratio primæ priorum A ad suam tertiam C, quam primæ posteriorum D ad suam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	5
D	E	F.
9	6	4

Sit 16 — 8 < 6 | 4.
Ut & 8 — 5 < 9 | 6.

Erit ex æquo.

16 — 5 < 9 | 4.

Per

Per Theor: 4. Quia ſcilicet productum extremorum eſt majus producto mediorum.

Alio modo.

$$16 - 8 < 6 \mathbin{l} 4.$$

Ergo $16 \cdot x \cdot 4 < 8 \cdot x \cdot 6.$

Et

$$8 - 5 < 9 \mathbin{l} 6.$$

$$8 \cdot x \cdot 6 < 5 \cdot x \cdot 9.$$

Ergo.

$$16 \cdot x \cdot 4 < 5 \cdot x \cdot 9.$$

Adeoque $16 - 5 < 9 \mathbin{l} 4.$
per Theor: 4.

PROPOSITIO XXXIII.

Si fuerit major ratio totius A ad totum B, quam ablati C ad ablatum D, erit & reliqui E ad reliquum F major ratio quam totius A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

Sint in majori ratione tota

	A.	B.	
	12	6	S
quam partes	4	3	D

Erit 8 — 3 ⋜ 12 16.

Per Theor: 4. quia productum extremorum est majus producto mediorum.

Pro-

PROPOSITIO XXXIV.

Si sunt quotcunque quantitates, A. B. C. & aliæ æquales numero D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad primam posteriorum D, quam secundæ B ad secundam E: ut & secundæ B ad secundam E major, quam tertiæ C ad tertiam F, & sic deinceps.

1. *Habebunt omnes priores, simul A. B. C. ad omnes posteriores simul D. E. F. majorem rationem, quam omnes priores B. C. relicta prima A, ad omnes posteriores E. F. relicta quoque prima D.*

2. *Minorem autem quam prima priorum A ad primam posteriorum F.*

3. *Ma-*

3. *Majorem denique quam ultima priorum C ad ultimam posteriorum F.*

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates

	Priores	Posteriores.
	A 12	D 6
	B 8	E 5
	C 4	F 3.
Summæ	24.	14.

PARS I. B + C E + F.

24 — 14 < 12 | 8.

PARS II. A D.

24 — 14 > 12 | 6.

PARS III. C F.

24 — 14 < 4 3.

Partis 1 & 3 demonstratio pendet ex Theoremate 4. quia producta extremorum sunt majora productis mediorum.

Pars vero 2 demonstratur per The. 6, quia productum extremorum est minus producto mediorum.

FINIS LIBRI QUINTI.

Eu-

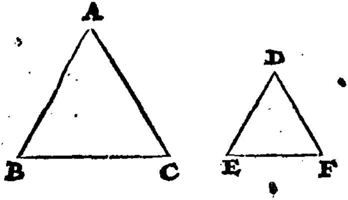
EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales sunt, proportionalia.*



AD constituendam figurarum rectilinearum similitudinem requiruntur duæ conditiones.

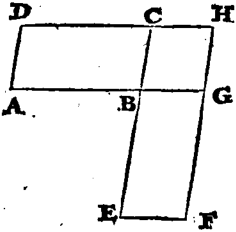
1. Ut singuli singulis inter se sint æquales anguli A & D: B. & E: C & F.

2. Ut latera circum istos æquales angulos sint proportionalia, scil.

Circa A. D BA ÷ AC ∷ FD I DF.
Circa B. E CB — BA ∷ FE I ED.
Circa C. F BC ÷ CA ∷ EF I FD.

Ergo ſi una ex hiſce conditionibus deficiat, figuræ nullo modo erunt ſimiles: quemadmodum quadratum & altera parte longior figura, licet habeant omnes angulos æquales, utpote rectos, quia vero latera non habent proportionalia, ſimilia dicenda non ſunt.

2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.



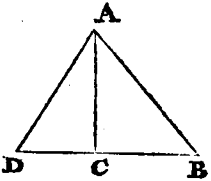
Quemadmodum in parallelogrammis AC. BF. & ductis diagonalibus in triangugulis ABC. BEF. si sit AB in prima figura ad BG secundæ, sicut reciproce EB secundæ ad BC primæ, illæ dicuntur reciprocæ.

3. *Recta AB dicitur secta esse secundum extremam & mediam rationem, cum fuerit ut tota AB ad majus segmentum AC. ita idem majus segmentum AC ad minus segmentum CB.*

In propositione 11. Libri II. Euclides docuit secare lineam ita ut ▭ sub tota linea AB & minori segmento CB comprehensum sit æquale □ majoris segmenti AC: quod unum & idem esse cum hac Definitione videri potest ex prop: 30. VI Unde patet 11. II. hic inter Definitiones reponi.

Cæterum ob multiplicem illius usum Geometris hæc proportio divina dicitur.

4. *Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis AD, ab illius vertice ad ipsam basin vel illius productam demissa.*



Cum mensura cujusque rei debeat esse certa determinata, non vero vaga & incerta, & distantia puncti alicujus verticalis a linea opposita per certam, & sibi semper æqualem ac minimam mensurari debet lineam. Sic distantia puncti verticalis A a linea seu basi DB, non mensuranda est juxta lineas oblique ductas AD, AB, quia illæ quasi infinitæ duci possunt, nec inter se æquales sunt; sed solummodo per lineam perpendiculariter ductam AC, quæ est certa, unica & minima: quæ hoc in casu semper quæritur. Et hæc perpendicularis AC. dicitur altitudo trianguli ADB, sumpta DB pro basi: quemadmodum sumpta AD pro basi:

basi, perpendicularis ex B ad AD ducta altitudinem exhibebit: ut & sumtâ AB pro basi faciet perpendicularis ex D ad AB demissa.

Quia vero per punctum A duci potest linea parallela ipsi DB, illa altitudo dicitur esse in iisdem parallelis; unde si duo triangula sint in eadem altitudine idem est ac si dicantur esse in iisdem parallelis. ut loquitur Euclides Lib. I.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Supra notavimus rationem nihil aliud revera esse quam modum continendi quo una quantitas aliam quantitatem continet vel ab alia continetur; quique non clarius, quam per fractionem exprimatur.

Si ergo datæ sint duæ rationes 2 ad 3, & 4 ad 5, illæ ad fractiones redactæ sic stabunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, quæ si inter se multiplicentur, obtinebitur $\frac{8}{15}$ seu ratio 8 ad 15, pro quæsita ratione quæ ex duabus datis compoſita eſt. Sic ratio quæ ex dupla & tripla, ſeu ex duabus rationibus 2 ad 1 & 3 ad 1, hoc eſt ex duabus fractionibus $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ compoſita eſt, habebitur $\frac{6}{1}$ ſeu ratio 6 ad 1 ſeu ſextupla. Et ſic porro de aliis.

Notandum autem eſt rationum ab Euclide ſic dictas quantitates Geometris vulgo dici Denominatores, quæ in fractionum conſideratione quotientum nomine venire ſolent.

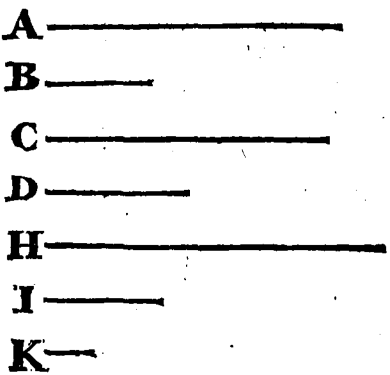
Sed minime omittendum putamus rationem $\frac{8}{15}$ ſeu 8 ad 5 (quæ ex rationibus $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ſeu 2 ad 3 & 4 ad 5 componitur) etiam hoc modo poſſe inveniri.

Fiat 2 —— 3 = quilibet numerus 6 | 9.
Tum 4 —— 5 = 9 | $\frac{45}{4}$.

Dico rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ ſeu utrinque per eundem numerum 4 multiplicando 24 ad 45 eſſe eandum cum ratione 8 ad 15. Si enim fractio $\frac{24}{45}$ per 3 reducatur ad minimam, obtinebitur $\frac{8}{15}$ ut requiritur; unde

patet

patet rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ esse compositam ex duabus rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5.



Quæ omnia lineis hac ratione applicari possunt. Datæ sint duæ rationes A ad B. & C ad D, rationem ex istis duabus compositam hoc modo inveniemus.

Fiat A —— B = H l I.
Ut & CD —— D = I l K.

Ratio H ad K exhibebit rationem compositam quæsitam.

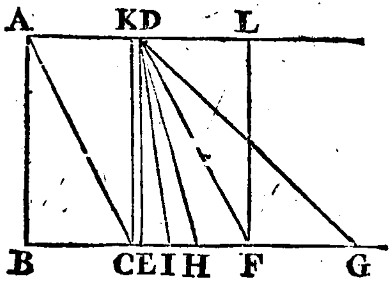
Pro H assumere licet quamlibetcunque lineam.

Pro-

PROPOSITIO I.

Theor. 1.

Triangula ABC. DEF. & parallelogramma BK EL, in eadem altitudine sive inter easdem parallelas constituta, sunt inter se ut bases BC EF. hoc est si bases sint æquales figuræ erunt æquales: si bases inæquales figuræ erunt inæquales & quidem juxta rationem basium.



DEMONSTRATIO.

I. Sit basis BC ∞ EF. Tum triangula ABC. DEF, inter easdem parallelas & super basibus æqualibus constituta inter se sunt a æqualia. 2. Po-

a 38. 1.

2. Ponatur EG dupla ipsius EF, seu BC. Tum erunt duo DEF. DFG [a] æqualia: adeoque totum DEG duplum ipsius DEF hoc est ABC: quia nim. basis EG est dupla ipsius BC.

3. Ponatur EH dimidia baseos EF seu BC. adeoque $\frac{1}{4}$ EG. Erunt duo triangula DEH. DHF [a] æqualia: ergo DEH erit semissis ipsius DEH, hoc est ABC: & quarta pars ipsius DEG.

4. Ponatur EI ∞ $\frac{1}{2}$ EH. seu $\frac{1}{4}$ EF. seu $\frac{1}{8}$ EG. similiter erit triangulum [a] DEI ∞ DIH. adeoque DEI erit ∞ $\frac{1}{2}$ DEH. seu $\frac{1}{4}$ DEF hoc est ABC. seu $\frac{1}{8}$ DEG.

Et sic porro in infinitum.

Ergo absolute triangula se habent ut illorum bases.

Similiter etiam parallelogramma, cum dupla [b] sunt triangulorum.

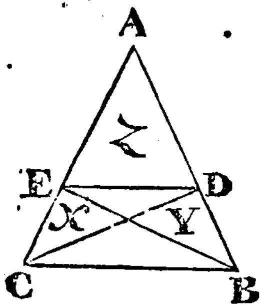
b 39. 1.

Theor. 2.

PROPOSITIO II.

1. Si in triangulo uni lateri CB parallela ducatur ED, hæc proportionaliter ſecabit latera AC AB. (hoc eſt ut ſit AE — EC = AD | DB.

2. Et ſi recta ED ſecuerit latera AC. AB proportionaliter, erit illa reliquo lateri CB parallela.



DEMONSTRATIO.

1 Pars. Ducantur rectæ CD. BE. eruntque triangula X & Y in iiſdem perallelis DE. CB & eadem baſi ED, ergo inter ſe [a] æqualia. Triang.

a 37. 1.

Tri. Z — Tri. X [b] ≍ baſ: AE / baſ: EC. b 1. VI.
ſeu Y

Atqui etiam

Tr: Z — Tr: Y [b] ≍ baſ: AD / baſ: DB.

Ergo [c] AE — EC ≍ AD / DB. c 11. V.

2 Pars. Eſt ex hypotheſi.

AE — EC ≍ AD / DB.

Atqui

AE — EC ≍ Z / . X .
Et AD — DB ≍ Z / . Y . } 1. VI.

Ergo *hiſce rationibus ſubſtitutis.*

Erit Z — X ≍ Z / . Y .

Adeoque [d] triang. X ∞ Y & quia d 14. V.
ſunt in eadem baſi ED, erunt inter [e] pa- e 39. I.
rallelas ED. CB.

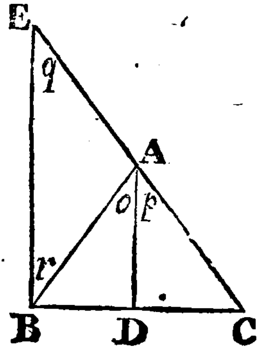
Q. *E. D.*

Theor. 3.

PROPOSITIO III.

1. *Si in triangulo ABC, recta AD angulum A bifariam secans, etiam secet basin BC, habebunt basis segmenta BD. DC eandem rationem, quam reliqua latera BA. AC.*

2. *Et si basis segmenta* BD. *DC eandem habeant rationem quam reliqua latera* BA. *AC, recta* AD. *basin secans, etiam angulum oppositum A secabit bifariam.*



De-

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex B ducatur BE parallela DA, & producatur CA, uſque ad occurſum perpendicularis in E: eruntque propter parallelas EB. DA. a 31. I.

Ang. O ꝏ R. quia ſunt alterni.
Ang. P ꝏ Q. externus interno } 29. I.

Atqui O ꝏ P ex hypotheſi.
Ergo R ꝏ Q. Et latus EA [b] ꝏ BA. b 6. I.
Quare [c] erit EA — AC ∷ BD / DC c 2. VI.
BA

PARS II.

Eſt BA — AC ∷ BD / DC. ex h. d 2. VI.
Atqui [d] EA — AC ∷ BD / DC.

Ergo 11. V.
BA — AC ∷ EA / AC. e 14. V. f 5. I.

Adeoque [e] BA ꝏ AE & ang. R [f] ꝏ Q.
Atqui ang. R ꝏ O
Ut & Q ꝏ P } 29. I.

Ergo O ꝏ P.

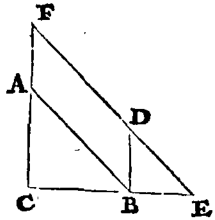
Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Theor. 4.

Triangula sibi mutuo æquiangula, sunt similia; hoc est [a] etiam latera circa æquales angulos habent proportionalia.

a Def. 1. VI.



DEMONSTRATIO.

Bases CB, BE colloca in directum: quia jam angulus ACB ∞ DBE, ex hypothesi, erunt [b] CA & BD parallelæ, ut & AB DE. quia ang. ABC etiam ponitur ∞ E.

b 28. I.

Pro-

Producantur CA & ED in F, eritque AFDB parallelogrammum, adeoque FA [c] ꝏ DB & FD ꝏ AB. [c] 34. I.

Quia in triangulo FCE latus AB est parallelum FE erit [d] [d] 2. VI.

AC — AF ⩵ CB / BE.
DB

Et permutando. 16. V.
AC — CB ⩵ DB / BE.

Deinde

Quia in triangulo EFC latus DB est parallelum FC.

Erit FD [d] — DE ⩵ CB / BE.
AB

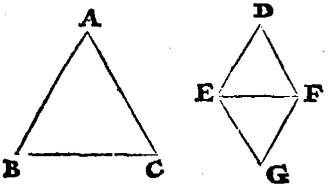
Et viciſſim. 16. V.
AB — BC ⩵ DE / EB.

Pro-

Theor. 5.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula ABC. DEF, latera circa omnes angulos habeant proportionalia, erunt æquiangula, eosdem angulos A & D, B & E, F & C habebunt æquales, quibus homologa latera subtenduntur.



DEMONSTRATIO.

a 23. 1.

Ad punctum E fiat [a] angulus FEG ∞ B. ut & ad punctum F angulus EFG ∞ C. eritque tertius G æqualis tertio A.

Quare in triangulis similibus ABC. GEF.

AB

$$AB — BC \asymp GE \,/\, EF.$$

Atqui etiam per propositionem.

$$AB — BC \asymp DE \,/\, EF.$$

Ergo [b] $GE — EF \asymp DE \,/\, EF$. b 11. V.
Adeoque [c] $GE \propto DE$. c 14. V.

Eodem modo ab altera parte etiam probatur esse.

$$GF \propto DF.$$

Adeoque triangula DEF. GEF habent omnia latera æqualia, singula singulis. ergo per 8. I.

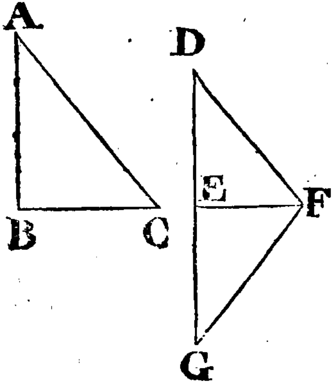
Ang. $\mathcal{D}EF \propto GEF \propto B$.
Ang. $\mathcal{D}FE \propto GFE \propto C$.
Ang. $\mathcal{D} \propto G \propto A$.

Q. E. D.

Theor. 6.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula ABC. DEF, habeant unum angulum B, æqualem uni E, & latera circa eum proportionalia, (hoc est AB ad BC ut DE. ad EF) erunt triangula sibi mutuo æquiangula.



De-

DEMONSTRATIO.

Ad puncta E, & F fiant anguli FEG. EFG æquales angulis B. (hoc est DEF) & C. eritque tertius G æqualis tertio [a] A: Et triangula ABC. GEF similia, [b], adeoque a 32. I. b 4. VI.

$$AB - BC \simeq GE \,/\, EF.$$

Atqui etiam per propositionem.

$$AB - BC \simeq DE \,/\, EF.$$

Ergo [c] $GE - EF \simeq DE / EF$. c 11. V.

Adeoque [d] $GE \infty DE$. d 14. V.

Ergo duo triangula DEF. GEF se habent juxta quartam I. adeoque

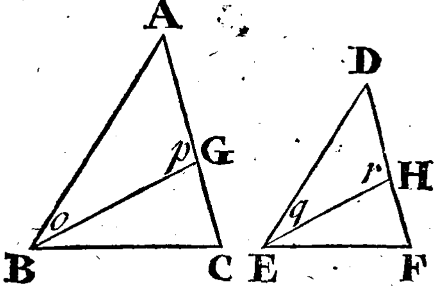
Ang. DEF ∞ GEF ∞ B.

Ang. DFE ∞ GFE ∞ C.

Ang. D ∞ G ∞ A.

Q. E. D.

Alia Demonſtratio.



Datur hic angulus A ꝏ D. & latera circa eos proportionalia: & tum.

Eſt vel angulus B < E.
Vel B > E.
Vel B ꝏ E.

Ponatur I. Angulus B < E.

Ducatur BG, ut fiat angulus O ꝏ DEF eritque P ꝏ R.

Ergo BA — AG ∺ ED / DF. 4. VI.
Atqui BA — AC ∺ ED / DF per pro.

Ergo AG ꝏ AC. per 11 & 14. V. pars & totum.

Eodem modo ducta EH. demonſtratur angulum B non eſſe poſſe minorem angulo E. Ergo B ꝏ E & per 32. I. C ꝏ F. Q. E. D.

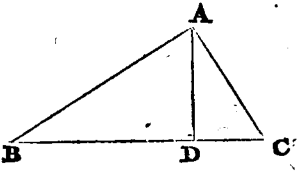
Pro-

PROPOSITIO VII. Theor. 7.

Vix ullius est usus.

PROPOSITIO *VIII.* Theor. 8.

In triangulo rectangulo ABC, perpendicularis AD ab angulo recto in basin ducta, secat triangulum in duo triangula ADB. ADC quæ erunt & toti & inter se similia.



DEMONSTRATIO.

Pars I. In Triangulis BAC. ADB.
Ang. B est communis.
Ang. BAC ∞ ADB quia uterque rectus
b Ergo C ∞ BAD.

a 4. VI. Adeoque a triang. BAC ADB. similia.
Deinde in triangulis BAC. ADC.
Ang. C est communis.
Ang. BAC ∞ ADC quia uterque rect.

---

b 32. I. [b] Ergo B ∞ CAD.
Adeoque [a] triang. BAC. ADC similia.

II. Pars. Triangulum ADB est simile ipsi BAC.
Triangulum ADC est simile eidem BAC.

Ergo Triangula ADB. ADC inter se sunt similia per 21. VI. quæ hac non dependet.

COROLLARIUM I.

Perpendicularis ab angulo recto in basin ducta, est media proportionalis inter duo basis segmenta.

DEMONSTRATIO.

Duo triangula BDA. ADC, sunt æquiangula.

a 4. VI. Ergo [a] BD — DA ∺ DA / DC.
Adeoque DA est media proportionalis inter BD. DC.

CO-

COROLLARIUM. II.

Utrumlibet laterum angulum rectum comprehendentium est medium proportionale inter totam basin & illud segmentum basis quod sumpto lateri adjacet.

DEMONSTRATIO.

In triangulis similibus ABC. ADC.
a BC — CA ∺ AC / CD.
Et in triangulis similibus ACB. ADB
a CB — BA ∺ AB / BD.

SCHOLIUM.

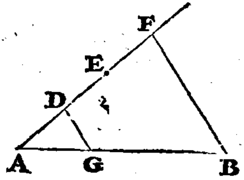
In deducendis triangulorum proportionibus bene notandum est, ordine procedendum esse ab angulis æqualibus circa æquales angulos ad æquales angulos.

PRO-

Probl. I.

PROPOSITIO IX.

A data recta AB imperatam partem abscindere.



CONSTRUCTIO.

Sit auferenda pars tertia.

1. Rectæ AB sub quolibet angulo adjunge rectam AF, inque illa sume circino tres partes æquales AD. DE. EF.

2. Ductæ FB ex D ducatur parallela DG.

Dico AG esse quæsitam ter-

tertiam partem rectæ AB.

DEMONSTRATIO.

In triangulo FAB lateri FB parallela eſt DG.

ergo [a] FD — DA = *BG* / GA. a 2. VI.

Et componendo 18. V.

FA — DA = *BA* / GA

Atqui FA eſt tripla ipſius DA.

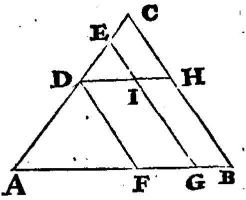
Ergo BA etiam eſt tripla ipſius GA.

Adeoque AG eſt tertia pars lineæ AB.

Probl. 2.

PROPOSITIO X.

Datam rectam AB similiter secare ac data alia recta AC secta fuerit in D & E.



CONSTRUCTIO.

1. Jungantur datæ lineæ ad A.

2. Ductâ CB ex punctis D & E ducantur duæ rectæ DF. EG parallelæ ipsi CB.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

In triangulo AEG lineæ EG. DF sunt parallelæ, [a] quia eidem lineæ CB ductæ sunt parallelæ.

[a] 30. I.

Ergo

Ergo b AF —— FG $\simeq$ AD / DE. b 2. VI.

Deinde ex D ducta DH parallela AB' erit DI ∞ FG c & IH ∞ GB. c 34. I.

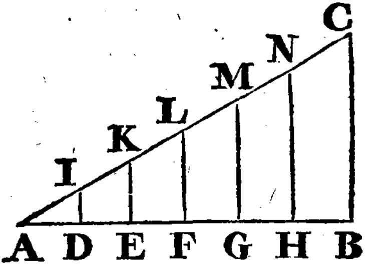
Eritque in triangulo DHC.
DI. s. FG — IH. s. GB $\simeq$ DE / EC.
Adeoque partes AF FG, GB, sunt proportionales partibus AD, DE, EC.

Q. E. D.

SCHOLIUM.

Hinc facile patet ratio dividendi lineam datam in quotcunque libet partes æquales: sumendo scilicet in linea datæ adjuncta, tot partes æquales in quot linea data dividenda sit: & extremitates lineæ utriusque recta conjungendo; si tum a divisionibus intermediis ducantur rectæ parallelæ lineæ jam ductæ; illæ quæsitam facient divisionem. Ex. Gr: sit linea *AB* dividenda in sex partes æquales.

CONSTRUCTIO.



1. Ipsi AB junge sub quolibet angulo rectam AC.

2. In linea AC sume ses partes æquales AI. IK. KL. LM. MN. NC.

3. Duc rectam CB, illique parallelas NA. MG. LF. KE. ID.

Dico lineam AB sectam esse in sex partes æquales AD. DE. EF. FG. GH. HB.

DEMONSTRATIO.

Per propositionem 10. linea AB secta est similiter ac AC.

Atqui linea AC secta est in sex partes æquales.

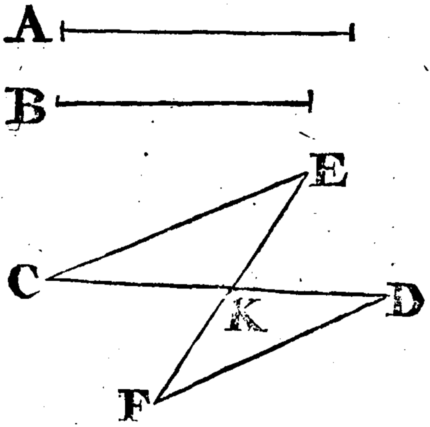
Ergo etiam AB in sex æquales partes secta erit.

SCHOLIUM II.

Haud inconcinne linea data CD poterit dividi in ratione datarum linearum A. B.

Con-

CONSTRUCTIO.



1. Ex C ſub quolibet angulo ducatur recta CE ꝏ datæ A.

2. Et ex D recta DF, parallela ipſi CE, & ꝏ datæ B.

3. Jungatur EF.

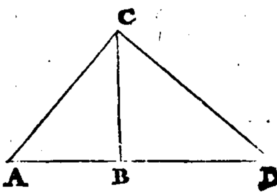
Dico rectam CE in K ſectam eſſe in ratione A ad B.

DEMONSTRATIO.

In tri. CKE. DKF	Ergo erit per 4. VI.
Ang. C ꝏ D	CE. ſ. A —— CK = DF ſ. C / DK.
E ꝏ F 29, I.	& permutando
K ꝏ K	A —— C = CK / KD.

Probl. 3.

PROPOSITIO. XI.



Datis duabus rectis AB. BC tertiam proportionalem invenire.

CONSRUCTIO.

1. Datas rectas conjunge in angulo recto ABC.

2. Ad ductæ rectæ AC punctum C excita perpendicularem CD.

3. Lineam AB produc usque ad occursum istius perpendicularis in D.

Dico BD esse quæsitam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACB est rectangulum per construct. & CB perpendicularis ex angulo recto ad basin ducta: quæ [a] est media proportionalis inter AB & BD. Adeoque BD erit tertia quæsita.

a 1 Cor: 8. VI.

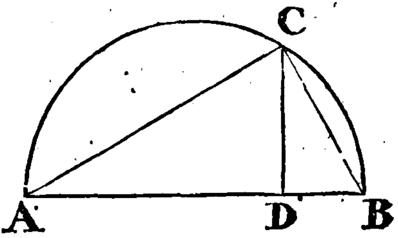
Q. F. E.

Scho-

SCHOLIUM.

Si AB ſit major quam BC haud inconcinna erit talis

CONSTRUCTIO.



1. Super AB deſcribe Semicirculum ACB.

2. In illo accommodetur ſecunda data BC.

3. Ex C demitte perpendicularem CD.

Dico DB eſſe tertiam proportionalem quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ducta AC erit ACB triangulum rectangulum (31. III.)

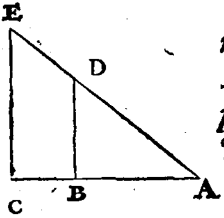
Ergò erit AB — BC = BC / BD. per 2 Cor. 8. VI.

Adeoque BD eſt tertia quæſita.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Probl. 4.



Datis tribus rectis AB. BC. AD quartam proportionalem DE invenire.

CONSTRUCTIO.

1. Datarum duas quaslibetcunque AB, BC colloca in directum.

2. Tertiam AD conjunge ad punctum A, & duc rectam DB.

3. Ex C duc CE parallelam BD, quæ productæ AD occurrat in E.

Dico DE esse quæsitam quartam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

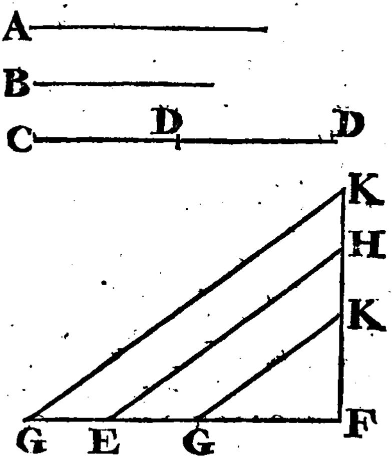
In triangulo ACE lateri CE ducta est parallela BD.

a 2. VI. Ergo a AB — BC = AD / DE. Adeoque erit DE quarta proportionalis.

Q. E. F.

Alia

Alia Constructio.



Datæ sint tres lineæ A. B. CD, quæ est vel $<$ vel $>$ A.

1. Lineæ EF ꝏ A junge FH ꝏ B sub quolibet angulo, ducaturque EH.

2. In linea FE sume FG ꝏ tertiæ CD. & ex puncto G ducatur GK parallela ipsi EH.

Dico lineam FK esse quartam quæsitam scil. FK supra H, si tertia CD sit major prima A: At vero FK infra H si sit CD $>$ A.

DEMONSTRATIO.

Facile ex constructione patet triangula EFH. GFK esse similia: quare erit per 4. VI,

EF —— FH = GF / FK.

Hoc est

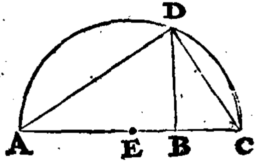
A —— B = CD / ad quartam FK.

Q. D. E.

Probl. 5.

PROPOSITIO XIIII.

Datis duabus rectis AB. BC mediam proportionalem BD invenire.



CONSTRUCTIO.

1. Datas lineas AB. BC colloca in directum.
2. Super tota AC deſcribe Semicirculum.
3. Ex B excita perpendicularem BD uſque ad Semicirculum.

Dico illam eſſe mediam quæſitam.

De-

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. DC. erit ADC triangulum rectangulum quia [a] angulus ADC est rectus. Et linea DB est perpendicularis ex angulo recto ad basin ducta, quæ [b] est media proportionalis inter AB. BC.

a 31. III.

b 1 Coroll. 8. VI.

Q. F. E.

SCHOLIUM.

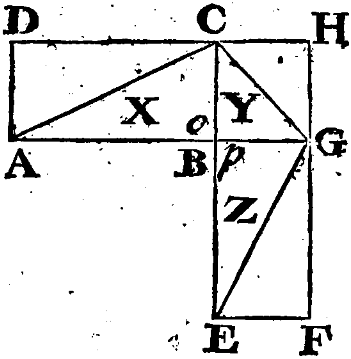
Quævis recta a circumferentia ad diametrum perpendiculariter ducta, est media proportionalis inter segmenta diametri.

PROPOSITIO XIV.

Theor. 9.

1. *Parallelogramma æqualia X. Z. quæ unum angulum O uni P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habent reciproce proportionalia. (hoc est AB ad BG ut EB ad BC.*

2. *Et si latera habent reciproca, parallelogramma sunt æqualia.*



De-

DEMONSTRATIO:

1 Pars. Par. [a] X — Par. Y = Z / Par. Y. [a] 7. V.
Atqui X — Y = AB / BG.
Et Z — Y = EB / BC. } 1. VI.

Ergo ſubſtitutis iſtis rationibus.
AB — BG = EB / BC.

2 Pars. AB — BG = EB / BC.
Atqui AB — BG = X / Y.
Et EB — BC = Z / Y. } 1. VI.

Ergo iſtis rationibus ſubſtitutis.

X — Y = Z / Y.

Adeoque [b] Par: X ∞ Par: Z. [b] 14. V.

PROPOSITIO XV.

Theor. 10.

1. *Æqualia triangula X. Z, quæ unum angulum O uni angulo P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habebunt reciproce proportionalia.* (*hoc est AB ad BG, ut EB ad BC.*

Vide fig. præcedentem.

2. *Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC. CG. GE. hæc est omnino eadem cum præcedente; quoniam [a] triangula sunt semisses parallelogrammorum, & triangula cum parallelogrammis eadem habent latera quæ demonstrationem ingrediuntur.

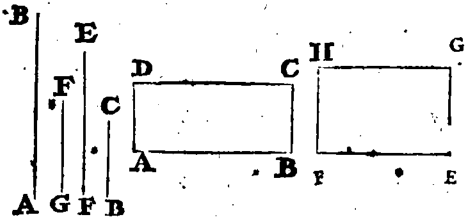
[a] 34. I.

Pro-

PROPOSITIO XVI. Theor. II.

1. Si quatuor rectæ A. G. F. B proportionales fuerint, rectangulnm sub extremis A & B. erit æquale rectangulo sub mediis.

2. Et si rectangulum sub extremis, sit æquale rectangulo sub mediis, illa quatuor rectæ proportionales erunt.



DEMONSTRATIO.

1 Pars. Fiat ▭ AC sub extremis & FG sub mediis: illa habent angulum A ∞. F, & latera reciprica, nimir: AB —— HF = reciproce FE / BC. Ergo illa a ▭la sunt æqualia. a 14. VI.

2 Pars. ▭la AC. FG habent angulum A ∞ F. & sunt æqualia: b Ergo habent latera reciproce proportionalia. b 14. VI.

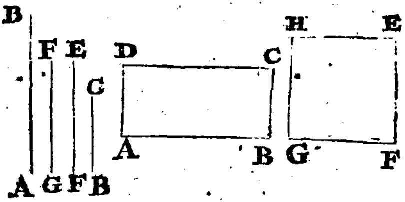
PRO-

PROPOSITIO XVII.

Theor. 12.

1. Si tres lineæ A. F. B. proportionales fuerint, rectangulum sub extremis A & B erit æquale quadrato mediæ F.

2. Et si rectangulum sub extremis sit æquale quadrato mediæ, tres illæ rectæ proportionales erunt.



DEMONSTRATIO.

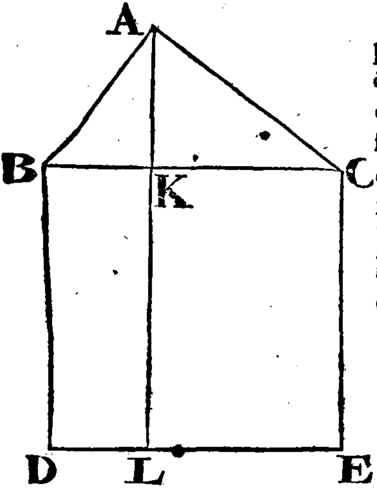
1 Pars. Fiat sub extremis ▭ AC, & a media □ GE. Quæ quia habent angulum A ∞ G & latera reciproca scilicet AB — GF ≐ FE. hoc est GF / BC. [a] erunt inter se æqualia.

a 14. VI.

2 Pars. ▭la AC. GE sunt æqualia & habent angulum A ∞ G. Ergo [a] habent latera reciproca.

Pro-

SCHOLIUM.



Ex hac proposit: & præcedente 8 facillime demonstratur Pr. 47. I. hoc modo,

PRÆPARATIO.

Super BC constituatur □ BE, & ex A ducatur AL parallela BD vel CE.

DEMONSTRATIO.

Lineæ BC. AC. CK sunt proportionales. per 8. VI.

Ergo ▭ BC. CK ꝏ □ AC.
▭ EK.

Deinde Lineæ BC. AB. BK. sunt proportionales.

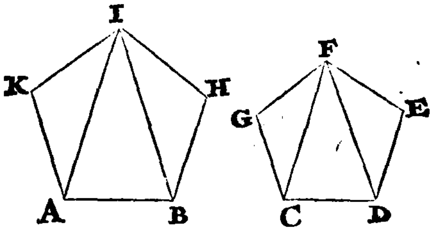
Ergo ▭ BC BK ꝏ □ AB
▭ LB
17. VI. A.

Supra ▭ EK ꝏ □ AC

▭la EK + LB ꝏ □ AB + □ AC.
□ EB

PROPOSITIO XVIII.

Probl. 6. *Super data recta AB describere polygonum ABHIK, quod dato polygono CDEFG sit simile similiterque positum.*



CONSTRUCTIO.

1. Datum Polygonum rectis FC. FD divide in triangula.

a 32. I. 2. Super AB factis angulis a BAI, ABI æqualibus angulis DCF. CDF. erit b tertius æqualis tertio. adeoque c triangulum IAB simile triangulo FCD.

b 32. I.
c 4. VI.

3. Eodem modo super lateribus IA: IB, fiant triangula IKA. IHA. æquiangula, adeoque & similia triangulis FGC. FED.

Dico ABHIK esse polygonum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

Facile patet per constructionem angulos

los unius polygoni esse æquales angulis alterius, nim.

K ꝏ G.

Tres ad I ꝏ ad F tribus.

H ꝏ E

Duo ad B ꝏ ad D duobus.

Duo ad A ꝏ ad C duobus.

Ergo omnes anguli sunt æquales, adeoque duo polygona sunt æquiangula, & similiter posita.

Pro lateribus.

In triangulis similibus IKA. FGC: ut & IAB. FCD.

Erit KA — AI = GC / CF.
Et BA — AI = DC / CF. } 4. VI.

Erit per 11. & 16. V.

KA — AB = GC / CD.

Deinde in triangulis similibus IAB. FCD: ut & IHB. FED.

Erit AB — BI = CD / DF.
Et HB — BI = ED / DF. } 4. VI.

Ergo per 11 & 16. V:

AB — BH = CD / DE.

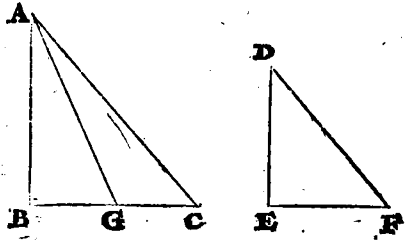
Et eodem modo demonstratur latera circa reliquos angulos esse proportionalia: Ergo polygona sunt similia.

Q. E. D.

Theor. 13

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula ABC. DEF inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum BC. EF.



DEMONSTRATIO.

Sit BC ≺ EF.

Ipsis BC. EF, fiat [a] tertia propor-
a 11. VI. tionalis BG. eritque

b 10. Def. V. BC — BG [b] in duplic. rat. BC / EF.

c 1 VI. Atqui BC — BG [c] = tr: ABC / tr: ABG

---

d 11. V. Ergo Triang: ABC [d] — Triang: ABG in dupl: rat: BC / EF.

Atqui triang. ABG ∽ triang. DEF. ut mox patebit.

Ergo

Ergo triang. ABC —— triang. DEF, in dupl: rat: BC / CF.

Quod autem sit triangulum ABG ꝏ DEF, hoc modo videre licet.

In triangulis similibus ABC. DEF.

AB —— BC = DE / EF. 4. VI.

Et permutando.

AB —— DE = BC / EF. 16. V.

Atqui per constructionem.

BC —— EF = EF / BG.

Ergo AB —— DE = EF / BG. 11. V.

Adeoque triangula ABG. DEF habent angulum B ꝏ E, & latera circa illum reciproce proportionalia: Ergo sunt [e] æqualia. e 15. VI.

Sit deinde BC ꝏ EF.

In triangulis similibus ABC. DEF.

AB —— BC = DE. EF.

Atqui BC ꝏ EF per propositionem.

Ergo [f] AB ꝏ DE. f 14. V.

Adeoque triangula ABC. DEF inter se sunt æqualia.

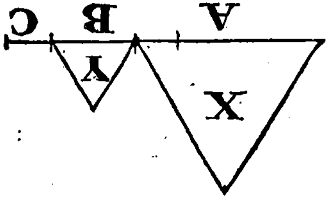
Atqui □ta BC & EF etiam sunt æqualia.

Ergo triang. ABC —— triang. DEF = □ BC / □ EF.

Atqui ratio □torum BC. EF. eſt eadem cum ratione duplicata ipſorum laterum BC. EF, ut ſupra dictum eſt ad 10. Def. V:

Ergo triang. ABC — triang. DEF in dupl: rat: BC / EF.

COROLLARIUM.



Si tres lineæ A. B. C. fuerint proportionales, erit triangulum X ſupra primam ut triangulum Y priori ſimile ſupra ſecundam, ut prima linea A ad tertiam C.

DEMONSTRATIO.

Tres lineæ A. B. C. ſunt proportionales.
a 10. Def. V. Ergo A — C [a] in dupliicata ratione A / B.
b 19. VI. Atqui X — Y [b] etiam in dupl: rat: A / B.

c 11. V. Ergo X — Y [c] = A / C. Q. D. E.

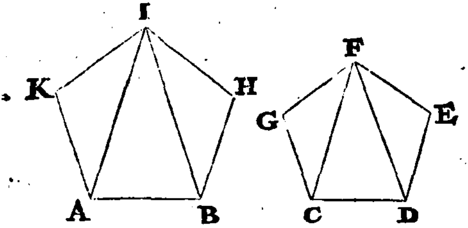
PRO-

PROPOSITIO XX.

Theor. 14.

1. Polygona similia ABHIK. CDEFG dividuntur in triangula, quæ sunt numero æqualia, similia & totis homologa.

2. Polygona inter se sunt in ratione duplicata laterum homologorum AB. CD.



DEMONSTRATIO.

1 Pars: Ductis rectis IA. BA. ut & FC. FD. polygona erunt divisa in triangula.

Quod autem illa triangula sint numero æqualia, patet ex Scholio prop. 32. I. quia nim. polygona æque multa habent latera.

Quod sint similia sic probatur.

In

In triangulis IKA FGC.

Ang. K ∞ G. & latera circa illos proportionalia.

a 6. VI. b 4. VI. Ergo triangulum a IKA. est æquiangulum & simile FGC. b

---

Eodem modo in triangulis IHB FED.

Ang. H ∞ E, & latera circa illos proportionalia.

Ergo triangulum IHB est æquiangulum & simile FED.

Deinde ang. KAB ∞ GCD.
KAI ∞ GCF. S

IAB ∞ FCD.
Simili modo IBA ∞ FDC.
Ergo tertius AIB ∞ CFD.

Ergo triangulum IAB est æquiangulum & simile FCD.

Quod sint totis homologa, hoc est quod ita sit quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens in altero. Ut totum polygonum ad totum polygonum, patebit ex parte secunda.

2 Pars. Triangula IAB, FCD probata sunt similia.

c 4. VI. Ergo c IA —— FC = AB / CD.
Ut & IB —— FD = AB / CD.

Tum.

Tum.

Triangula d IKA. FGC. sunt in duplicata ratione laterum IA. FC. d 19. VI.

hoc est AB. CD.

Et triangula IAB. FED d in duplicata ratione laterum IB. FD.

hoc est AB. CD.

Ut & triangula IAB. FCD in duplicate ratione laterum AB. CD.

Ergo e omnia triangula unius polygoni ad omnia triangula alterius polygoni sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB. CD. e 12. VI.

Atqui omnia triangula istorum polygonorum constituunt tota Polygona.

Ergo ipsa polygona sunt in duplicata ratione laterum homologorum. AB. CD.

Cum autem etiam singula triangula unius polygoni ad singula triangula alterius polygoni habent rationem duplicatam eorundem laterum AB. CD; patet ista triangula totis polygonis esse homologa.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

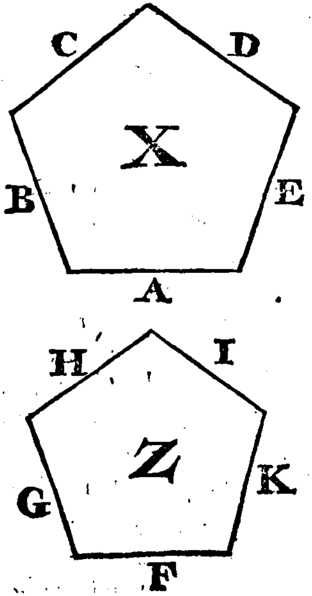
Si fuerint tres rectæ proportionales, polygonum super prima descriptum se habebit ad simile polygonum super secunda;

vel polygonum ſuper ſecunda ſe habebit ad polygonum ſuper tertia, ut prima proportionalis ad tertiam.

DEMONSTRATIO.

Hæc eſt fere eadem cum demonſtratione corollarii prop: præcedentis.

SCHOLIUM.



Com-

Commode hic demonstratur haud inelegans Theorema.

Similium polygonorum X & Z, circuitus ABCDE : FGHIK, cum lateribus homologis A & F, sunt in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l}
A \text{—} F \sqsupset A/F. \\
B \text{—} G \sqsupset A/F. \\
C \text{—} H \sqsupset B/G. \\
\quad \text{hoc est } \overline{A/F}. \\
D \text{—} I \sqsupset C/H. \\
\quad \text{hoc est } \overline{A/F}. \\
E \text{—} K \sqsupset D/I. \\
\quad \text{hoc est } \overline{A/F}.
\end{array}\right\} \text{Def. 1. VI.}$$

Ergo per 12. V, additis omnibus terminis primis, ut & omnibus secundis

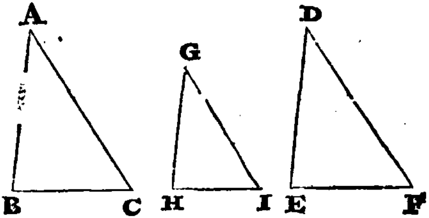
$$\underbrace{A+B+C+D+E}_{\text{hoc est circuitus X}} \text{---} \underbrace{F+G+H+I+K}_{\text{ad circuitum Z.}} \sqsupset A/F.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Theor. 15

Figuræ ABC. GHI, quæ eidem figuræ DEF sunt similes, illæ & inter se similes erunt.



DEMONSTRATIO.

Angulus A ∞ D ∞ G.
B ∞ E ∞ H.
C ∞ F ∞ I.

Ergo figuræ ABC. GHI. sunt æquiangulæ; & habent latera circa æquales proportionalia, quia illa habent proportionalia lateribus figuræ DEF. Ergo [a] sunt similes.

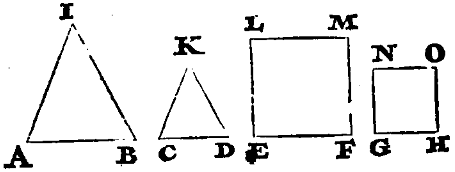
a 1 Def. VI.

Pro-

PROPOSITIO XXII. Theor. 16

1. *Si quatuor rectæ AB. CD. EF. GH. proportionales fuerint, figuræ similes ABI. CDK & LF. NH proportionales erunt.*

2. *Et si a rectis lineæ figuræ similes descriptæ sint; istæ rectæ proportionales erunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Datæ sunt AB —— CD = EF | GH.

Tr. ABI (a) —— Tr. CDK in duplic. rat. AB / CD. a 19. VI.

hoc est EF / GH.

Atqui □ LF b —— □ NH etiam in d. r. EF / GH. b 20. VI.

Ergo.

Tr. ABI (c) —— Tr. CDK = □ LF , □ NH. c 11. V.

PARS II.

AB —— CD in subdup. rat. Tr. ABI , Tr. CDK.

hoc est □ LF / □ NH.

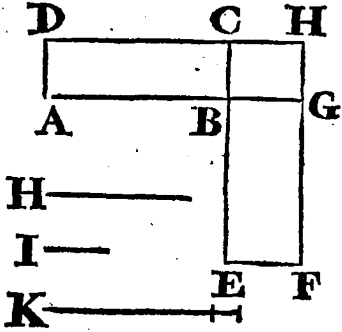
Atqui EF —— GH etiam in subd. r □ LF / □ NH

Ergo.

AB —— CD = EF , GH.

Theor. 17

PROPOSITIO. XXIII.



Æquiangula parallelogramma AB. BF. inter se habent rationem, compositam ex rationibus laterum AB ad BG & CB ad BE.

DEMONSTRATIO.

Fiat AB — BG = H quælibet / I.
Et CB — BE = I / K.

Erit ratio H ad K compoſita ex rationibus AB ad BG & CB ad BE. vide dicta ad 5 Def. VI.

Demonſtrandum ergo eſt eſſe parallelogr. AC — BF = H / K.

Quod ſic probo.

AC — BH = (a) AB / BG.	BH — BF (a) = CB / BE.
H — I = (b) AB / BG.	I — K (b) = CB / BE.
Ergo AC — BH (c) = H / I.	BH — BF = I / K.

Ergo per 11. V.

AC — H = BF / K.

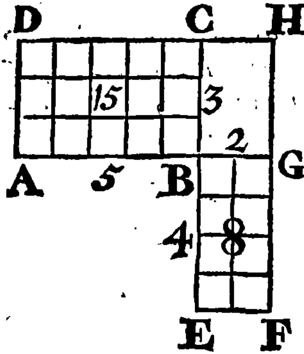
Et permutando 16. V.

AC — BF = H / K. Q. E. D.

a 1. VI.
b per conſtr.
c 11. V.

PRO-

SCHOLIUM.



Majori cum facilitate & cum apparatu minori eadem propositio demonstrabitur in numeris, si parallelogramma AC. BF ponantur rectangula.

Sit ▭li AC latus AB ꝏ 5.
BC ꝏ 3.
[e] Erit Area ꝏ 15.
Deinde ▭li BF latus BG ꝏ 2.
Latus BE ꝏ 4.
[e] Erit Area ꝏ 8.

e 1 Def. II.

Ergo ▭ AC — ▭ BF ⩦ area 15 / ar. 16

Atqui ratio composita ex rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4. etiam dat [d] $\frac{15}{8}$ seu rationem 15 ad 8.

d 5. Def. VI.

Ergo ratio ▭ AC — ▭ BF est composita ex dictis rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4.

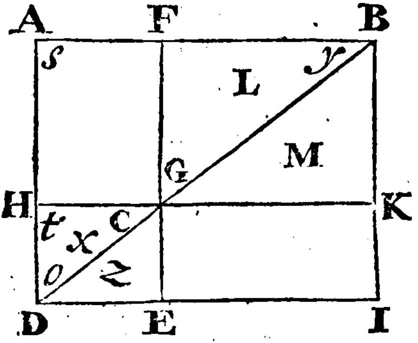
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXIV.

Theor. 18

In omni parallelogrammo AI, parallelogramma FK. HE, quæ circa diametrum ſunt, & toti AC & inter ſe ſunt ſimilia.



DEMONSTRATIO.

In triangulis DAB & X.

Angulus O eſt communis.

a 29. I. S a ∞ T.

b 32. I. Ergo Y b ∞ C.

Adeoque triangula DAB & X ſunt æquiangula & ſimilia.

Eodem

Eodem modo probatur triangula DIB & Z esse similia.

Ergo AD — DB = HD / DG.
Et DB — DI = DG / DE. } 4. VI.

Eritque ex æquo 22. V.

AD — DI = HD / DE.

Similiter etiam probatur reliqua latera esse proportionalia: Ergo Parallelogramma AI. HE, sunt similia.

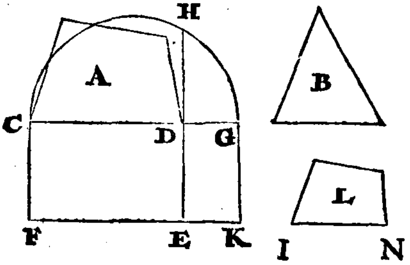
Eodem modo etiam demonstratur AI. & *FK* esse similia.

Ergo HE & *FK* [c] sunt inter se similia. c 21. VI.

Q. E. D.

Probl. 7. ## PROPOSITIO XXV.

Constituere rectilineum L, quod sit simile similiterque positum dato rectilineo A, & æquale alteri dato B.



CONSTRUCTIO.

1. Ad dati rectilinei A latus
a 45. I. CD, fiat ▭ CE ∞ [a] ipsi A.
b 44. I. 2. Super DE fiat ▭ *DK* ∞ B.
3. Inter CD & DG quæratur
c 13. VI. [c] media proportionalis DH.
4. Super DH seu ipsi æquali
IN, describatur rectilineum L
si-

[d] simile ipsi A. d 18. IV.

Dico L esse rectilineum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Per constructionem sunt proportionales CD. IN. DG.

Ergo [e] CD — DG = A / L. e Cor. 19. VI.
Atqui [f] CD — DG = ▭ CE / ▭ DK. f 1. VI.

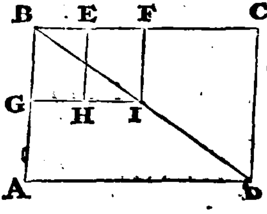
Ergo [g] A — L = ▭ CE / ▭ DK. g 11. V.

Atqui A ∞ ▭ CE.
Ergo L ∞ ▭ *DK* ∞ B.

Cum autem L per constructionem sit simile A, patet L esse rectineum quæsitum.

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 19



Parallelogramma similia AC. GF, habentia communem angulum B, circa eandem diametrum BD consistunt.

DEMONSTRATIO.

Si adversarius neget diametrum BD transire per I, transeat per aliud punctum H: tum ducta HE parallela BA.

a 24. VI Erit BA [a] — AD = BG / GH.

b per propos. Atqui BA [b] — AD = BG / GI.

---

c 7. Vel 11. V. Ergo [c] GH ∞ GI. Pars & totum, quod est absurdum.

Ergo diameter non transit per H. Eadem autem demonstratio locum habet in omnibus punctis lineæ GI, quandiu sc: inter H & I manet aliquod intervallum: Ergo universim concludendum est diametrum transire per punctum angulare I, adeoque duo parallelogramma AC. GF, circa eandem diametrum consistere.

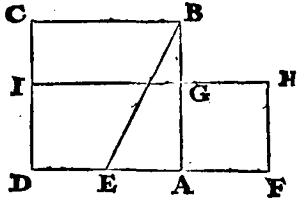
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXVII. XXVIII. XXIX.

Hæ prolixæ, tyronibus difficiles, & nullius fere usus sunt.

PROPOSITIO XXX. Prob. 10.



Propositam rectam AB extrema ac media ratione secare in G.

CONSTRUCTIO.

Divide [a] AB in G, ut ▭ sub tota AB & minori segmento BG sit ꝏ □ majoris segmenti AG. a 11. II.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

▭ AB. BG ꝏ □ AG. AG.

Ergo 17. VI.

Latera sunt reciproce proportionalia. h.e.

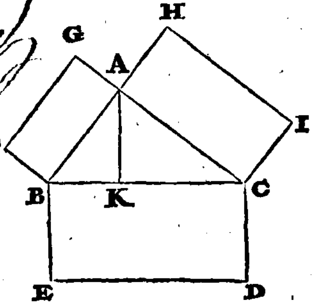
AB — AG ∷ AG / BG.

Adeoque [b] linea A in media & extrema ratione secta est. b 3 Def. VI.

Theor. 20

PROPOSITIO XXXI.

Si a lateribus trianguli rectanguli BAC, figuræ similes quæcunque describantur, erit illa quæ angulo recto A opponitur æqualis duabus reliquis simul sumptis.



DEMONSTRATIO.

Figuræ super AB. AC. BC. ponuntur similes; ergo a habent inter se rationem duplicatam laterum homologorum AB. AC. BC, hoc est inter se sunt ut □ta AB. AC. BD.

a 20. VI.

Atqui □ta ita sunt inter se ut sit
□ BC b ꝏ □tis AB. AC.

b 47. I.

Ergo figura super BC ꝏ figuris super AB. AC.

Scho-

SCHOLIUM. I.

Quod in prop. 47. I. demonſtratum eſt de ſolis quadratis hic univerſim applicatur quibuslibet polygonis ſimilibus.

SCHOLIUM II.

Poteſt hæc propoſitio generaliter, ut etiam involvat prop. 47. I. hoc modo demonſtrari.

Sunt proportionales per 2 Cor. 8. VI.
BC. AC. CK Ut & BC. BA. BK.

Ergo per Coroll. 20. VI.
Fig. ab BC — Fig. ab AC ≐ BC / CK.
Fig. ab BC — Fig. ab BA ≐ BC / BK.

Et invertendo.
CK — BC ≐ Fig. ab AC / fig. ab BC.
BK — BC ≐ Fig. ab BA / fig. ab BC.

Erit per 2. V.
BK + KC — BC ≐ Fig. ab AB + Fig. ab AC. / Fig. ab BC.
Atqui BK + KC ∞ BC.
Ergo Fig. ab AB & AC ∞ Fig. ab BC.

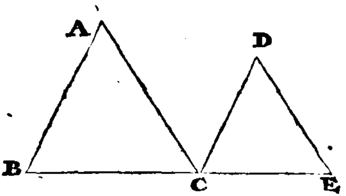
Quare ſi iſtæ ſiguræ ſunt quadrata, erit prop. 47. I.

Si vero aliæ figuræ ſimiles erit 31. VI.

Theor. 21

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula ABC. DCE ad angulum C conjuncta, duo latera AB. AC habeant parallela lateribus DC. DE. & latera circa angulos A. D. proportionalia; tum reliqua illorum latera BC. CE, unam facient lineam rectam.



DEMONSTRATIO.

a 29. I. Angulus A. ꝏ [a] ACD, propter parallelas AB. DC.

Angulus D ꝏ [a] ACD, propter parallelas AC. DE.

Ergo ang. A ꝏ D.

Cum autem latera circa angulos A & D sint proportionalia, erit

rit triang. [b] ABC æquiangulum triang. DCE. b 6. VI.

Adeoque ang. ABC ∞ DCE
Ang. A ∞ ACD. A.

Ang. A & ABC ∞ toti ACE
ACB ACB A.

Tres ang. A. ABC. ACB ∞ duobus ACB. ACE.
[c] Atqui tres A. ABC. ACB ∞ 2 Rectis. c 32. I.

Ergo etiam duo ACB. ACE ∞ 2 Rectis.

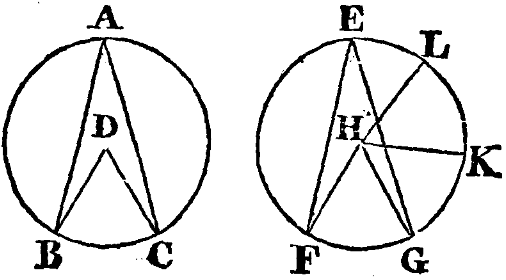
Adeoque BC. CE sibi invicem [d] jacebunt in directum. d 14. I.

Theor. 22

PROPOSITIO XXXIII.

1. *In æqualibus circulis anguli sive ad peripheriam A & E, sive ad centra D & H, sunt in eadem ratione cum arcubus quibus insistunt BC. FG.*

2. *Et Sectores BDC. FGH, eandem cum arcubus habent rationem.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Si anguli D & H ad centra sint æquales; erunt arcus BC, & FG etiam (26. III.) inter se æquales.

Fiat

Fiat jam angulus GHK ∞ FHG adeoque FH*K* duplus FHG hoc eſt BDC.

Tum arcus GK erit ∞ FG (per eandem 26. III) & totus FGK duplus ipſius FG hoc BC.

Eodem modo ſi fiat arcus *KHL* ∞ *GHK* ſ. *FHG*. ∞ *BDC* adeoque *FHL* triplus *BDC*, etiam probabitur arcum *FGKL* eſſe triplum arcus *BC*.

Ergo hinc univerſim concludimus ſi anguli D.&H. ſint æquales, eſſe arcus BC. FG æquales: Si anguli D & *H* ſint inæquales, etiam arcus eſſe inæquales, & hoc juxta quam libet multiplicationem. ut nim. ſi *H* ſit duplus D etiam arius F*K* ſit duplus BC: ſi angulus *H* ſit triplus D. & arcum FGKL & ipſius BC ſit triplus: & ſic in infinitum: id quod idem eſt ac angulos cum arcubus eſſe in eadem ratione.

Et quia anguli A. E. ſunt ſemiſses angulorum *D. H.* etiam illi cum arcubus eandem habebunt rationem.

PARS 2.

Hæc ex prima parte facile deducitur. Sectorum DBC. *HFG*: anguli G & *H* sunt æquales: ergo arcus BC. FG: & latera DB. DC. æqualia *HF.HG*: ergo si superponantur congruent: Ergo Sectores DBC. *HFG* erunt æquales.

Similiter si angulus *GH*K sit ∞ *FHG*: sectores congruent, adeoque Sector *GHK* ∞ sectori *FHG* hoc *BDC*: Ergo sector *FH*K duplus erit sectoris *FHG* s. *BDC*.

Eodem modo si sit angulus *FHL* triplus *D*, erit arius *FG*K*L* triplus *BC*: adeoque Sector *FHL*KG triplus sectoris *BDC*: & sic in infinitum. Q.E.D.

FINIS.