
LIBERTAS
LIBERTAS
NON ALIO
SYDERE

SEX PRIORA EUCLIDIS ELEMENTA,

Quibus accesserunt Undecimum, & Duodecimum

A HIEMYNIANO RONDELLO

In Bononiensi Archigymnasio Hydrometriæ Professore in gratiam studiosæ Juventutis iterum exposita,

ET

Illustrissimis, atque Excelsis

BONONIÆ SENATUS PATRIBUS

Scientiarum omnium Mœcenatibus humilimè Dicata.

Labente Anno gratiæ MDCCXIX.

Bononiæ, Typis Longi. *Superiorum permissu.*

191. di S. Pietro

Illuſtriſsimis, atque Excelſis
BONONIÆ SENATUS PATRIBUS,

Hiemynianus Rondellus F.

CUm multis ante Annis Euclidis Elementa expoſuiſſem, eaque edenda curarem: quibus ſtudioſam Juventutem publicè erudire (quod mihi munus ſumma Veſtra, atque immortali beneficentia demandatum fuerat) & ad Mathematicarum diſciplinarum Scientiam dirigere poſſem: non dubitavi eadem Vobis inſcribere ILLUSTRISSIMI, atque EXCELSI PATRES; viſum eſt enim non aliis eum Librum conſecrandum eſſe, præterquam iis, quorum ſuffragiis factum erat, ut eo Libro ad erudiendos optimos adoleſcentes uti poſſem. Id vero feci non minus audacter, quam feliciter; nam illud, quidquid erat opuſculi, libenter adeò, atque humaniter excepiſtis, ut jam me puderet tantæ virtuti tam puſillum opus conſecraſſe: ac cum multis aliis, propeque innumerabilibus argumentis ſummam Veſtram in bonas Artes, ac Studia omnia propenſionem, liberalitatemque oſtenderitis; quippequi, & eos, qui ſtudia diligenter excolunt, mirum in modum diligitis, & Præceptores publicos ex omni genere multos alitis, nec ullam occaſionem præterire ſinitis, quin Scientias, atque Artes omnes promoveatis, augeatis, amplificetis, quo nomine univerſa Vobis Civitas tantum debet, quantum vix credi poteſt, eamdem iſtam propenſionem Veſtram mihi peculiari etiam benignitate ſignificaviſtis, qua Libellum illum meum, qui qualiſcumque eſſet, commodo certè ſtudioſæ Juventuti futurus erat, libentiſsimè accepiſtis. Ea re igitur factum eſt, ut cum illa priora exemplaria, propter illorum in Scholis penè omnibus uſum, rariſsima facta ſint; ego autem vel ipſa docendi conſuetudine cognoverim, quantum commodi afferat ſtudioſis Juuentutibus Librum publicè editum in manu habere; eadem Euclidis

dis Elementa, si non meliori, certè breviori, & clariori modo rursus exponere, eaque vobis ILLVSTRISSIMI, atque EXCELSI PATRES dicare, atque majorem in modum commendare statuerim. Ego quidem quantulum illud sit, quod vobis offero, planè intelligo; sed simul etiam & humanitatem, & clementiam, & benignitatem vestram non intelligo solum, sed cum expertus sim semper, nunc ita experior, ut cum maximè. Facile igitur confido fore, ut libellum hunc meum, quem Vobis offero, ea humanitate accipiatis, quæ Dignitatem Vestram, & Sapientiam decet. Id ut ne frustra confidam, Vestrum erit facere. Ego interim enixe, ea quantum possum, ut id faciatis etiam, atque etiam rogo. Valete & Patriæ, cujus Parentes estis, & bonis Artibus, quarum estis cultores, & Vobis ipsis.

Bononiæ Die 12. Decembris 1719.

Vi-

Vidit D. Sebaſtianus Giribaldi Cleric. Regul. Sancti Pauli in Eccl. Metrop. Bononiæ Pœnetentiarius pro Eminentiſſimo, & Reverendiſſimo Domino, D. Jacobo Cardinali Boncompagno Archiepiſcopo, & S. R. I. P.

Die 28. *Junij* 1719.

IMPRIMATUR

Fr. Joannes Dominicus Liboni Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiæ.

AD LECTOREM.

QUod Navigantibus evenire ſolet, ut alii quidem, qui minoribns Navigijs utuntur, vix a Portu diſcedere, & Littus legere audeant, alii vero, quibus Vela majora ſunt, non modo Portui valedicere, ſed & Oceanum, & Maria omnia traiicere non dubitent, novaſque Terras, & Regiones perluſtrare ſtudeant, atque deſcribere; idem quoque accidit Mathematicis. Horum enim alii, quibus non ita excellens, ad novas res, atque abditas eruendas, Ingenium a Natura datum eſt, Mathematicarum diſciplinarum principia attingunt, ulterius progredi pertimeſcunt; alii vero pauci, *Quos Æquus amavit Jupiter*, quibuſque ſingularis quædam eſt intelligendi vis, non modo principia aſſequi, ſed amplius in interiores Geometriæ partes pervadere, novaſque ſemper res, & in profundo demerſas in lucem proferre nituntur: quorum exempla habemus plurima apud veteres, multa etiam apud recentiores;

illi

illi enim & concoidem, & cyssoidem, & spiralem, & quadratricem, aliasque curuas lineas summa quadam ingenii vi penetrarunt, descripseruntque: hi vero illis multa addiderunt: cycloidem, catenarias, velarias, aliasque plurimas, quas calculis quibusdam, & supputationibus comprehenderunt. Atque horum ego quidem operam, studiumque mecum ipse considerans, statui postremum hoc genus hominum, qui nova inveniunt, maxime utile esse Reipublicæ; sed illud tamen primum non minus: immo etiam fortasse magis; neque enim fieri potest, ut reconditiorem Geometriam penetret, nisi is, qui elementa prius, quasi limen quoddam ingressus sit; quare qui hæc explanant, viam aliis muniunt ad majora. Ego igitur, cum mihi non tantum ingenii esset, ut novi quidpiam molirer, esset vero tantum voluntatis, ut ne otiosus esse vellem; feci, ut Elementa Euclidis, quam potui diligentissimè exponerem, eaque Typis mandarem, ut eos, qui majori ingenio præditi ad altiora aspirant, qua possem ope adiuvarem. Idem in Sphæricis, Conicisque faciam aliquando, si hæc, quæ nunc edo, grata esse cognovero. Verum de his alias: nunc de Euclidis Elementis pauca dicam. Ac primum illud etiam atque etiam tibi persuadeas velim, nihil iis in universa Geometria magis esse necessarium, quod etiam ipsum Elementi nomen nos docet; idcirco enim *Elementa* appellata sunt, quod sine iis in Mathematicis disciplinis consistere nihil potest. Neque tamen dissimulo *Algebram* lineis parum uti, calculo, & literis conficere pene omnia. Verum si illam ad Geometriam traducamus, quid tandem efficere poterit sine Elementis Euclideis? Nam est Algebra Scientia quædam cujusdam universalis calculi, qui non ad hoc potius, quam ad illud quantitatis genus spectat, sed omnia æque complectitur; nititur enim principijs abstractis, quæ non extensionis

pro-

propria ſunt, non numeri, ſed quantitatis; hinc fit, ut ſi ad certum, & peculiare quoddam quantitatis genus traducenda ſit, oporteat etiam peculiarem ejuſdem generis naturam, atque intimas proprietates cognoſcere. Nam quid quæſo per Algebraicos calculos præſtare umquam in Arithmetica poteris? Niſi Arithmeticæ ipſius præcepta ante cognoveris? Niſi additionem, detractionem, multiplicationem, diviſionem, radicum quadrarum, cubarum &c. extractionem teneas? Numquid res aliter ſe habet in Geometria? Nihil minus. Quid enim aliud efficit Algebra, ſi ad Geometriam transferatur, niſi tantum præcipit, ad hoc, vel illud problema ſolvendum, has, vel illas lineas, aut ſuperficies, hæc vel illa ſolida addenda eſſe, demenda, multiplicanda, dividenda, illorum radices quadras, cubicas extrahendas? Hæc vero, quæ fieri præcipit, quomodo fiant, non docet; quod niſi Euclides, & lineam lineæ, & ſuperficiem ſuperficiei demere, & unam ſuperficiem pluribus æqualem facere, unum triangulum duobus, unum rectangulum duobus quadratis, pentagonis &c., quæ præcipit Algebra, exequi nullo modo poſſemus. Quid dicam de linearum, & ſuperficierum per lineas multiplicatione? Quid de diviſione? Quid tandem de radicum extractione? Quæ certe ſine abſtruſiſſima proportionum, quam Euclides tradidit, ſcientia fieri omnino non poſſunt; adeo ut nobiliſſima, atque magnificentiſſima ſcientia, *Algebra*, ſi Euclidis Elementa tollas, nulla ſit. Dixi particularitèr de Algebra, neque enim dubito, quin ſi illos, qui ad Algebram aſpirant, ad Euclidis Studium commoverim, reliquos quoque facile excitem. Verum erunt nonnulli, qui breviorem in hiſce Elementis exponendis methodum deſiderent. Ego vero, cum multæ, ac variæ ſint Elementorum tradendorum viæ, hanc potiùs Euclidis ſecutus ſum, quam aliorum, tum quia illi, qui

bre-

breviorem tenent, non ita omnia ad unguem demonstrant, ut Euclides facit; iuvat vero eos, qui primum in Geometriam ingrediuntur, statim absolutissimis, perfectissimisque ex omni parte demonstrationibus assuefieri: tum etiam quia ex multis viis, quas ad aliquid obtinendum tenere possumus, eam præstare semper putavi, qua id, quod volumus, melius assequimur. Quod si in hisce Elementis id unicè ageremus, ut veritates quasdam demonstraremus, non dubitarem eam viam omnibus anteferre, quæ esset, quam fieri potest, brevissima. Verum quia non hoc tantum agimus, sed illud etiam volumus, ut veritates, quas demonstramus, in animis Adolescentulorum, qui ad hæc Studia se conferunt, penitus insideant, ac firmiter adhæreant, simulque illorum ingenium illustrent, acuant, excitent, non breviorem Methodum tenendam esse existimavi, qua ut facile res discuntur, ita facile excidunt; sed eam potius, qua a facilioribus ad difficiliora paullatim deducti Adolescentes ita acuantur, ut vix quidquam esse amplius possit adeo difficile in Geometria, ut ipsos deterreat. Neque tamen hæc Elementa ita exposui, ut mediocri ingenio Adolescentes assequi facile non possint: assequerentur fortasse brevius, & facilius, si alia methodo usus essem; cum Euclidea usus sim, assequentur, ut spero, fructuosius. Tu interim his utere, & si opinionem nostram minus probas, voluntatem tamen ne improbes. Vale.

DE

DE MATHEMATICÆ OBIECTO.

DE Matheſeos principiis tantummodò in gratiam ſtudioſæ Iuventutis verba facturus, ut talis Doctrinæ ideam, quantum fieri poteſt, in aperto ponam, conſentaneum duco breviſſimè circa Matheſis obiectum præfari, antequam ad talium principiorum expoſitionem accedam, quia in hoc tractatu dumtaxat tyronum utilitati (ut Profeſſorij muneris ratio poſtulat) conſulere animus eſt.

Illa Doctrina, ſive Ars, quæ Mathematica appellatur, definiri ſolet *Scientia entis quatenus quantum eſt*: Illa enim entia, quæ a Mathematica conſiderantur, ſemper accipiuntur, *ut Quanta*, *ſeu ut æſtimabilia*. Quia verò entia per ſolam *Quantitatem Quanta* ſunt, ideo reſtat ut videamus quid *Quantitatis* nomine intelligendum ſit.

QUANTITAS univerſaliter accepta deſignatur illa Mentis conceptione, ſecundum quam de rebus quærere ſolemus per comparationis Aduerbium *Quam*: Uti evenit dum quærimus *Quam* ens ſit longum? *Quam* amplum? *Quam* grande? *Quam* grave? *Quam* diu? *Quam* magnum? *Quam* multum, ſeu *Quam* multa &c. Illa enim entia, de quibus licet has interogationes facere abſolutè *Quanta* ſunt, vel ſaltem, ut *Quanta* conſiderantur.

Quia verò circa entia quantitativa in ſe, vel ut talia conſiderata verſatur Mathematica, ut talium entium menſuram obtineat, ideo ens *ut Quantum* ponitur Mathematicæ obiectum, de quo a Matheſi demonſtrata ad ſolam *Entis Quanti* menſuram ordinantur.

Illa quantitas, per quam *Ens quantum* conſtituitur, univerſalitèr accepta partitur in Quantitatem Continvam, atque Diſcretam. Continva quantitas dicitur illa, de qua ſolum quæritur Quanta, ſeu quam Multa ſit, ſola menſura, ſeu magnitudine inſpecta.

Quantitas verò *discreta* appellatur illa, de qua quæri solet *Quot*, seu *quammulta*; & in hac quantitate sola multitudo inspicitur.

Continva quantitas subdividitur in *Permanentem*, atque *Successivam*. Permanens quantitas dicitur illa, cuius omnes partes, quæ in quantitate designari possunt, permanent. Successiva, sive fluens quantitas appellatur illa, cujus partes sunt in continvo fluxu positæ, uti evenit in tempore, atque Motu.

Inter quantitates continvas illæ, quæ sunt localiter extensæ, ut plurimum MAGNITUDINES vocantur, & hæ sunt LINEA, SUPERFICIES, & CORPUS, siuè SOLIDUM, de quibus est principaliter intelligendum id, quod permulti dicunt, videlicet essentiam Quantitatis in partium extra partes positione consistere. In hac quantitate illa, quæ signantur, indivisibilia PUNCTA nominantur; indivisibilia vero Temporis INSTANTIA vocantur.

Discreta, siue discontinvata quantitas illa nominatur, cujus partes communi termino copulatæ non sunt, at distinctæ, atque separatæ, & de his quæri solet quot sunt, partes discretam quantitatem componentes. Hæc quantitas vocatur NUMERUS, seu MULTITUDO.

NUMERUS dicitur quantum discretum, quia componentes partes intelliguntur tamquam totidem res diversæ separatæ, atque distinctæ, Dum autem dicimus decem, vel centum homines, non unam rem nobis repræsentamus, sed tot, quot indicat numerus denarius, vel centenarius. Exadverso in quanto continvato partes componentes, ut unum intelliguntur, siquidem in acervo lapidum quamvis singuli lapides sint ad invicem separati, dum consideratur sola acervi moles, tunc quantum non est discretum, at continuum, quia solam quærimus magnitudinem, non autem NUMERUM partium componentium.

Quod in continva quantitate præstant puncta indivisibilia, in discreta faciunt unitates; nam quemadmodum puncta ponuntur continvatæ quantitatis principia, ita unitates considerandæ sunt veluti principia omnium numerorum.

Reliquæ omnes quantitatis species juxtà Valesium ad magnitudinem, vel Numerum reduci possunt, uti sunt Locus, Pondus, vis Motrix, & similes, quæ omnes considerantur a

Ma-

Mathesi non per per se, sed ut mensurabiles, vel numerabiles.

His positis concludendum videtur materiale Matheseos obiectum esse Magnitudinem, & Numerum, formale vero (ut loquuntur Scholæ) existere solam Mensurabilitatem, sub qua unica ratione Mathesis quantitatem contemplatur.

Inquirenti postea cur quantitatis Doctrina Nomine Mathesis appelletur, respondeo, hanc Doctrinam, vel Artem a Veteribus tali nomine fuisse insignitam, vel quia pænes antiquos solum erat Matheseos studium, vel quia Mathemata ante alias scientias ediscebantur.

Quod attinet ad Mathematum species aliæ *Puræ*, aliæ *Mixtæ* dicuntur. *Puræ* Mathematicæ vocantur illæ, quæ quantitatem abstractam considerant; *Mixtæ* verò appellantur, quæ Quantitatem in subiecto aliquo constitutam contemplantur. Inter puras Mathematicas connumerantur *Geometria*, atque Arithmetica, licet Arithmetica reputetur purior ipsa Geometria, quia Arithmeticæ obiectum est magis abstractum, quam illud Geometriæ: qua de re Arithmetica principia, atque Theoremata habet magis universalia, quam sint illa quæ ad Geometriam pertinent.

Mixtæ Mathematicæ iuxta diversitatem illorum subiectorum, in quibus quantitas reperitur in varias species distribuuntur, siquidem illa Mathesis, quæ motum in Corporibus Coelestibus positum examinat, Astronomia vocatur, quæ Orbis nostri, siuè Terræ quantitatem, & situm scrutatur, dicitur Geographia.

Statica appellatur illa, quæ agit de Ponderibus.

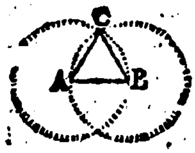
Mecanica motum, atque moventes vires inquirit: & ut paucis multa comprehendam, omnes illæ artes, quæ quantitatem in subiecto positam considerant, Mixtæ Mathematicæ nominantur, atque varijs nominibus appellantur, iuxta diversitatem illorum subiectorum, in quibus quantitas reperitur.

De Demonstrationibus Mathematicis.

DOcente Aristotele *Demonstratio* est ille Syllogismus, qui proprias affectiones de subiecto per proprias causas docet: verum hæc non recipitur tanquam vniuersalis *Demonstrationis* definitio, cum omni definito non conveniat: siquidem est & alia *Demonstrationis* species, quam satis innuit idem Aristoteles, dum inquit ad Demonstrationem sufficere argumentum ab effectis deductum.

Quod ad Mathematicas demonstrationes attinet, dico tales demonstrationes, quæ scientificæ appellantur ad duas tantum classes esse reducendas, quarum prima continet omnes demonstrationes, quas *Ostensivas* vocant; circa quas est observandum, aliquas solum demonstrare quod res sint, alias vero quod sint, & quare sint.

Exemplum illarum demonstrationum, quæ tantumodo demonstrant quod res sint, habemus in prima propositione Euclidis, in qua demonstrat efformationem Trianguli æquilateri ABC, ex hoc solum quod duo latera AC, & BC sint tertio lateri AB æqualia: ex quo postea infert dicta latera esse inter se æqualia: Hæc quidem demonstratio libenter ab omnibus inter ostensivas recipitur, licet tantum demonstret quod res sit, non autem quare sit: & sanè æqualitas illa, quam habent duæ lineæ AC, & BC cum tertia AB non est causa talis æqualitatis, at solum indicium, ex quo colligitur illa æqualitas: duæ enim quantitates AC, BC non sunt æquales per hoc solum quod æquationem habeant cum tertia quantitate AB, ut omnes concedunt.



Alterius demonstrationis *Ostensiuæ* specimen habemus, dum omnes eiusdem circuli radij demonstrantur æquales, posita circuli definitione, videlicet *quod sit figura plana unica curua linea contenta, quæ a medio comprehensi spatij in omnibus suis partibus æqualiter distat*. Si enim talis est circuli essentia, tamquam a vera, & propria causa sequitur, omnes eiusdem circuli radios esse æquales: hæcque dicitur *Demonstratio ostensiua* desumpta a causa proxima, & immediata, quia radiorum circuli æqualitas tanquam veram causam agnoscit definitionem circuli.

Altera demonstrationis species est illa, quæ per deductionem ad absurdum, siuè ad impossibile procedit. In hac demonstratione ostenditur, rem esse talem qualem dicimus, per hoc solum, quod aliter esse non possit.

Hæc pariter demonstratio duplex est, quarum una simplici utitur impossibilitate, altera vero ingeminata impossibilitate consistit.

Exemplum huius demonstrationis simplicis habetur, dum probamus rectam lineam AB tantumodo in unico puncto C posse bifariam dividi, & dicimus. Si recta AB in duobus punctis C, & D foret bifariam divisa, sequeretur, quod tam CB, quam DB æquales essent medietati ipsius AB: quare, & inter se æquales essent CD, BD. Cum autem hoc sit impossibile, quia CB est totum, & DB pars; ex hoc inferri potest, datam rectam AB non esse bifariam divisam in duobus punctis C, & D.

Fundamentum huius demonstrationis pendet ex hoc, quod veritas non possit veritati contrariari, neque unam veritatem posse alteram destruere. At si verum foret quod AB posset dividi bifariam non solum in puncto C, verum etiam in puncto D, in hoc casu una veritas foret contraria alteri veritati, nempe quod totum semper sit maius sua parte, quæ veritas destrueretur, quoties una recta linea in duobus punctis bifariam dividi posset.

Altera species demonstrationis ab impossibilitate geminata utitur demonstratione ad absurdum, ut aliquam ostendat veritatem, uti eveniret si ad probandam æqualitatem inter A, & B prius demonstretur esse impossibile A maius esse quam B, postmodum verò eadem impossibilitate probetur quod A nequeat esse minus quam B: ex qua geminata impossibilitate demonstrata infertur æqualitas inter A, & B.

Tali demonstratione utitur Euclides in Libro 12. Elementorum, atque frequentissima est apud Archimedem. Tota vis huius demonstrationis in hoc consistere videtur, quod si A (ob illa quæ sequerentur absurda) nequit esse maius, nec minus quam B, necessaria illatione sequitur quod A debeat adæquare B.

Huiusmodi demonstrationem tamquam nimis fastidiosam rigorosè condemnant Sturmius in sua Mathesi enucleata in Præfatione ad Lectores Art. 7., atque Renaldinus in Arte Analytica: minus rigorosè verò Franciscus Vieta talem demonstrationem culpat, dum dicit, hunc demonstrandi usum citra limitationem non esse admittendum: libenter enim concedit præfatus Author, quod ad invicem comparando ea, quæ ex natura sua æqualitatem non respuunt, si alterum altero neque maius, neque minus esse posse demonstretur, rectissime inferri posse talium rerum æqualitatem: non sic vero quando ad inuicem forent comparata illa quanta, quorum natura æqualitatem recusat: in quo casu, licet fuerit demonstratum unum neque maius, neque minus alio existere, non inde licet inferre illa, quæ comparantur, esse æqualia, cum hanc æqualitatem habere nequeant, ut supponitur.

EUCLIDIS ELEMENTUM PRIMUM.

Def. I.

PUNCTUM illud dicitur, cujus nulla pars est.

AD integram hujus definitionis intelligentiam scire oportet, ab Euclide nomine PUNCTI intelligi id, quod in quantitate continva nullas habet partes: si enim in continva quantitate concipiamus aliquid, quod sit quacumque parte spoliatum, illud erit PUNCTUM, siuè SIGNUM ab Euclide definitum. Quia verò punctum definitur in ordine ad partium negationem necessarium duxi animadvertere continvam quantitatem, quam Mathematici MAGNITUDINEM appellant, in triplici ordine dispositas habere suas partes componentes, nempe secundum longitudinem, secundum latitudinem, atque crassitiem; neque enim in magnitudine alia dari potest partium componentium ordinatio. Cum igitur inter magnitudines aliquæ suas partes habeant dumtaxat in longum ordinatas: aliæ vero in longum, & latum, & aliæ in longum, latum, atque profundum, (uti clarius ex infra dicendis constabit) dum in magnitudine aliquid designamus, quod nullam ex dictis habeat partium ordinationem, hoc est quod non sit neque in longum, neque in latum, neque incrassum extensum, hoc erit PUNCTUM ab Euclide hoc in loco definitum, quod licet locum, & situm habeat in quantitate continva nullam tamen obtinet magnitudinem.

A B C
· · ·

Mos est apud Mathematicos huiusmodi Puncta sola mente co cepta acutissimi acus extremitate in Magnitudine signare, atque Alphabeticis Litteris, vel alio signo indicare dicendo Punctum A, Punctum B &c.

Def. II.

LINEA vocatur illa, quæ solam longitudinem obtinet.

SI magnitudinem aliquam mente concipiamus solumodo in longum extensam, hæc erit LINEA ab Euclide definita. Mathematici ferè omnes ad indicandam veram lineæ intelligentiam assumunt motum puncti superius descripti, dicendo scilicet, quod dum punctum e loco in locum mouetur, cum sit quacumque magnitudine spoliatum, vestigium talis imaginarij erit sola longitudine præditum. Si enim

punctum A intelligatur fluere ex loco A in B, hujus fluxus vestigium AB erit LINEA; cum sit quædam magnitudo sola longitudine AB prædita; nam per superiorem definitionem punctum fluens nullam obtinet dimensionem.

SCHOLIUM.

PErmulti Mathematicarum disciplinarum professores lineam ex punctis numero infinitis tantumodo secundum longitudinem ordinatis compositam volant, dum alij lineam solam existere distantiam inter duo puncta repertam asseverant. Quia verò in data Lineæ definitione consideratur sola extensio secundum longitudinem, non autem infinitorum punctorum ordinatio in longum facta, ideo ne infinito punctorum numero, quod vix adæquatè Præceptorum mentibus repræsentari potest, Tyrones confundamus, melius puto lineam concipere tanquam solam longitudinem, penitus negligendo componentia talis longitudinis, quam dictam lineam ex infinitis punctis compositam nobis repræsentare. Aliud enim est in linea prius concepta innumerabilia puncta signare, aliud lineam ex infinitis punctis componere. Et ut paucis multa comprehendam, dum magnitudinem in longum tantum exteusam nobis repræsentamus integram LINEÆ ideam efformamus definitioni superius datæ conformem.

Def. III.

Def. III.

TERMINI lineæ dicuntur puncta.

HÆc definitio non eſt ita intelligenda, vt credatur quamlibet lineam eſſe à punctis terminatam; nam linea indefinita, circularis &c. non habent puncta terminantia, ſeu claudentia, at eſt dicendum, quod illæ lineæ, quæ extrema obtinent, in talibus extremitatibus habeant puncta: uti cernere licet in linea AB, quæ tanquam ſua extrema habet duo puncta A, & B.

Def. IV.

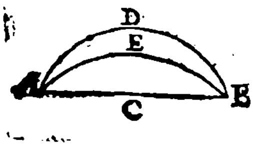
RECTA linea dicitur illa, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

APud Mathematicos omnes lineæ ſunt vel ſimplices, vel mixtæ. Simplices ſunt omnes lineæ rectæ, & circulares: Mixtæ dicuntur reliquæ lineæ curvæ, utpotæ ex rectis, & circularibus compoſitæ.

In hoc loco Euclides dat definitionem ſolius lineæ rectæ dicendo, eam eſſe, quæ æqualiter extenditur inter ſua puncta, hoc eſt nullum punctum inter extrema puncta ſignatum ab alijs, neque ſurſum, neque deorſum, neque ad dextram, neque ad ſiniſtram deflectit, ſed omnia puncta

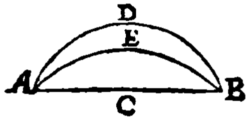
ſimul accepta totam occupant longitudinem ſitam inter lineæ extrema uti ſunt puncta A, & B: nam ſi omnia puncta deſignabilia in linea AB occupant diſtantiam cadentem inter terminos A, & B, ut inquit Proclus, talia puncta erunt ex æquo diſpoſita.

Archimedes lineam rectam definivit dicendo, eam eſſe minimam earum linearum, quæ eoſdem ter-



minos habent: ut patet in linea ACB, quæ ſi erit minima omnium illarum linearum, quæ duci poſſunt ab A ad B, dicetur linea recta, non ſic verò lineæ ADB, AEB,

quæ



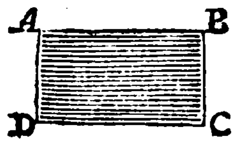
quæ cum non ſint minimæ, nec erunt dicendæ lineæ rectæ.

Inſuper quemadmodum Mathematici per imaginarium puncti fluxum quaſcumque lineas efformant, ita concipiendo punctum fluere a termino ad terminum per ſpatium omnium breviſſimum, talis fluxus ſignabit lineam rectam, qualis eſt linea ACB.

Def. V.

SUPERFICIES dicitur illa, quæ longitudinem atque latitudinem tantum habet.

QVemadmodum ſola extenſio in longum lineam efformat, ita duæ extenſiones in longum, & in latum ſuperficiem componunt. Si enim magnitudo ABCD fuerit tantum ſecundum longitudinem AB, atque ſecundum latitudinem AD extenſa, talis magnitudo erit ſuperficies ſuperius definita, a qua excluditur tertia extenſio hec eſt craſſities, ſiue profunditas, cum ſola longitudine, atque latitudine conſtituatur.



Nonnulli Authores ſuperficiem dicunt corporis terminum. Alij verò magnitudinem duobus tantum conſtantem intervallis.

Pariter ſicuti dependenter a fluxu puncti lineæ ideam efformamus, ita mediante fluxu lineæ ſuperficiem nobis poſſumus repræſentare. Si enim concipiamus lineam AB fluere in DC, hujus fluxus veſtigium erit ſuperficies ABCD.

Def. VI.

EXTREMA ſuperficiei ſunt lineæ.

IN tertia definitione puncta fuerunt poſita linearum extrema, ſiuè termini; in hac verò definitione lineæ ponuntur extrema, ſiuè termini ſuperficierum, non qui-

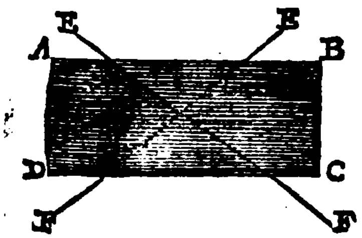
quidem omnium, ſed illarum tantum, quæ terminos habent, ſiquidem ſuperſicies indefinita, atque Sphærica nullos habent terminos.

Def. VII.

PLANA ſuperficies vocatur illa, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HÆc planæ ſuperficiei definitio ſimilitudinem quam maximam habet cum definitione lineæ rectæ ſuperius datæ, ſolumque hoc intercedit diſcrimen, videlicet quod recta linea ſua puncta, ſuperficies verò ſuas lineas interiacet, hoc eſt harum linearum nulla debet ſupra, vel infra aliam reperiri.

Verum quia hoc haud ſatis eſt ad claram ideam ſuperficiei planæ efformandam, alij dicunt lineas in ſuperficie ex æquo interiacere, dum recta linea omnibus ſuperficiei partibus poteſt accomodari. Si enim quibuſcumque partibus ſuperficiei ABCD accommodetur recta linea EF, hæc dicenda erit ſuperficies plana: talis autem accommodatio, ſiuè adaptatio in hoc conſiſtit, quod omnia puncta lineæ rectæ tangant puncta ſuperficiei.



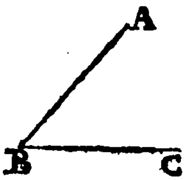
Demum attenta ſuperficiei generatione a motu lineæ facta, ſi recta AB in tranſverſum moveatur ſupra duas rectas AD, BC, feraturque in DC, hujus motus veſtigium dicendum erit ſuperficies plana ABCD, cui adæquatè conveniunt propoſitæ definitiones.

Hanc planam ſuperficiem Mathematici communiter appellant PLANUM.

Def. VIII.

ANGULUS PLANUS dicitur duarum linearum in plano ſe ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio.

IN hac definitione Euclides ſolius Anguli plani eſſentiam exponit dicendo, inclinationem duarum linearum in eodem plano exiſtentium, atque ad unum punctum concurrentium exiſtere angulum planum. Si enim duæ lineæ AB, CB in eodem exiſtant plano, neque ſint in rectū conſtitutæ, at ad invicem inclinatæ concurrant in B, efformatus erit angulus planus ABC, cujus quantitas eſt inclinatio unius lineæ ad alteram: Magnitudo enim angulorum nō a linearum angulum efformantium longitudine, ſed a ſola inclinatione talium linearum dependet. Quantitas anguli ABC a ſola inclinatione linearum AB, CB conſtituitur. Duæ autem lineæ dicuntur non in directum jacere, quando earum altera poſt concurſum producta cum altera non coincidit, ſed ſecat; vel recedit; uti contingit in duobus circulis ſeſe tangentibus, atque in recta circulum tangente, quæ angulos efformat, licet circuli circumferentiam non ſecet.



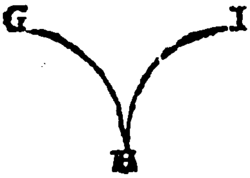
Vltra angulum planum paulo ante deſcriptum, ſunt etiam alij anguli, qui ſolidi, atque ſphærici dicuntur. De ſolidis angulis agit Euclides in Stereometria: de Sphæricis tractat Theodoſius in ſuis Sphæricis Elementis.

Def. IX.

RECTILINEUS Angulus dicitur ille, qui efformatur a lineis rectis.

QVilibet angulus planus efformatur a duabus lineis rectis, vel ab una recta, & alia curva, vel a duabus curvis. Angulus factus a rectis lineis, appellatur angulus

recti.

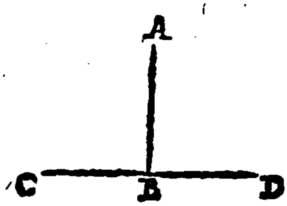


rectilineus, ut angulus ABC: ille vero qui efformatur ab una recta, & ab alia curva, vocatur angulus mixtilineus, ut angulus DEF: demum angulus comprehensus a duabus lineis curvis, vocatur angulus curvilineus, ut angulus GHI.

Def. X.

Dum recta linea super rectam consistens lineam eos, qui deinceps sunt angulos, æquales facit, uterque æqualium angulorum rectus dicitur, atque recta consistens linea Perpendicularis illi, cui insistit, appellatur.

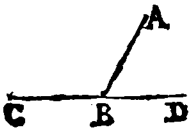
CUm apud Geometras frequentissimus sit usus anguli recti, atque lineæ perpendicularis, ideo in hac definitione Euclides exponit quisnam sit ille angulus, qui dicitur rectus, & quænam recta linea, quæ alteri lineæ, perpendicularis vocatur.



Si recta linea AB consistat supra rectam CD, faciatque angulos deinceps ABC, ABD inter se æquales, quilibet horum æqualium angulorum rectus dicitur, atque recta AB, quæ rectos angulos efficit, vocatur perpendicularis ipsi CD.

Def. XI.

OBTUSUS Angulus ille dicitur, qui angulo recto major est.



SI angulus ABC major sit angulo recto superius definito, dicendus est angulus obtusus.

Def.

Def. XII.

ACUTUS Angulus ille vocatur, qui recto minor est.

VT Angulus A B D.

Def. XIII.

TERMINUS dicitur id, quod quantitatis extremum est.

QVia tres tantumodo sunt Magnitudinum dimensiones, nempe longitudo, latitudo, atque crassities, ideo tres solum termini a Mathematicis assignantur, & sunt Puncta, Lineæ, & Superficies. Puncta terminant lineas, lineæ terminant superficies, atque superficies terminant corpora; neque enim alius potest esse terminus, cum quantitas terminata semper superet suum terminum una dimensione: linea enim punctum superat dimensione longitudinis; superficies lineam excedit latitudinis dimensione: atque solidum, siue corpus superficiem superat dimensione crassitiei.

Def. XIV.

FIGURA dicitur illa, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

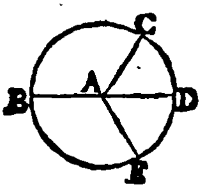
IN hac definitione est obseruandum ad constituendam figuram haud sat esse magnitudinem habere terminatam, nam linea quamvis terminata non dicitur figura, quia figura ab omni parte debet esse undequaque inter proprios terminos clausa, qui termini nequeunt esse puncta, sed lineæ in figuris superficialibus, vel superficies in figuris solidis, siue trinam dimensionem habentibus.

Def.

Def. XV.

CIRCULUS vocatur illa figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria, sivè circumpherentia appellatur; ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ sunt æquales.

In hac definitione Euclides indicat essentiam illius figuræ planæ, quæ CIRCULUS dicitur, ostendendo ad circuli constitutionem requiri, quod sit figura plana unica linea comprehensa, uti est figura BCE ab unica linea curua BCDE terminata, intra quam figuram datur punctum A, a quo omnes rectæ lineæ AB, AD, AC &c. ad comprehendentem lineam BDE ductæ sunt æquales.



Linea curva comprehendens Circulum a Græcis Peripheria, & à Latinis Circumpherentia nuncupatur.

Def. XVI.

CENTRUM circuli dicitur illud punctum, ut punctum A, a quo omnes rectæ lineæ AB, AD &c. ad peripheriam BDE ductæ, sunt æquales.

Def. XVII.

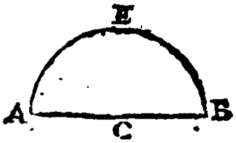
Diameter circuli appellatur quæcumque recta linea per circuli centrum ducta, & utrimque a circumpherentia terminata, quæ bifariam circulum dividit.

Talis est recta BAC.

Def.

Def. XVIII.

SEMICIRCULUS vocatur figura ſub diametro,& dimidia circumpherentia comprehenſa.



TAlis eſt figura AEB comprehenſa diametro ACB, atque dimidia circumpherentia AEB.

Def. XIX.

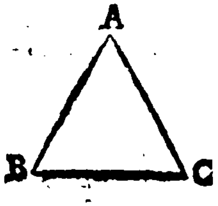
RECTILINEÆ figuræ appellantur illę, quæ a rectis lineis comprehenduntur.

OMnes illæ figuræ, quæ a rectis lineis comprehenduntur, rectilineæ figuræ appellantur. Si a curvis lineis terminentur, dicuntur figuræ curvilineæ: ſi vero inter alicujus figuræ terminos ſint & rectæ, curvæque lineæ, tunc figura nuncupatur mixtilinea.

Def. XX.

TRILATERÆ figuræ dicuntur, quæ a tribus lateribus, ſive lineis continentur.

CUm figura BAC comprehendatur a tribus lateribus BA, AC, CB, hæc dicenda eſt figura trilatera, ſiue, uti eſt comunis loquendi uſus, Triangulum.



In Triangulo duo latera AB, AC dicuntur latera comprehendentia, ſive efformantia angulum BAC; latus vero BC dicitur ſubtenſum angulo BAC, atque angulus BAC dicitur comprehenſus a lateribus AB, AC, atque ſubtendens latus BC.

Def.

Def. XXI.

QUADRILATERÆ appellantur figuræ, quæ ſub quatuor tantum lineis continentur.

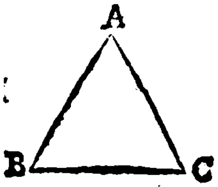
Def. XXII.

MULTILATERÆ figuræ nuncupantur, quæ ſub pluribus quam quatuor lineis comprehenduntur.

MUltilateræ figuræ rectilineæ generali nomine POLIGONA nuncupantur.

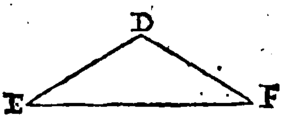
Def. XXIII.

Æquilaterum Triangulum illud dicitur, quod tria latera habet æqualia.



SI in triangulo BAC æqualia ſint tria latera BA, AC, CB, hoc dicendum erit triangulum æquilaterum, ſiue æquicrure.

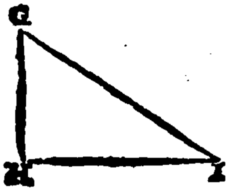
Def. XXIV.



ISOSCELES triangulum dicitur, quod duo tantum obtinet latera æqualia.

SI in triangulo EDF duo tantum reperiantur æqualia latera DE, DF, hoc triangulum vocatur Iſoſceles.

Def. XXV.



Scalenum triangulum illud appellatur, quod tria latera habet inæqualia.

SI triangulum HGI tria latera HG, GI, IH, inæqualia habeat, ſub nomine trianguli Scaleni indicatur.

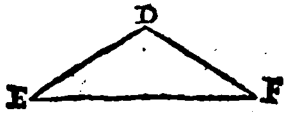
Def. XXVI.

ORTOGONIUM, ſive RECTANGULUM triangulum appellatur, quod habet unum angulum rectum.

SI triangulum GHI habet angulum H rectum, a Latinis dicitur triangulum rectangulum, a Græcis vocatur triangulum Ortogonium.

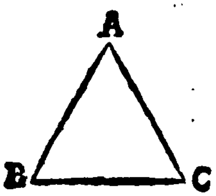
Def. XXVII.

AMBLYGONIUM, ſive obtuſangulum triangulum dicitur, quod unum obtuſum angulum habet.



TAle eſt triangulum EDF, quod habet angulum obtuſum D.

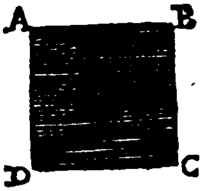
Def. XXVIII.



OXYGONIUM, ſive acutangulum triangulum appellatur, quod tres angulos habet acutos.

HUiuſmodi eſt triangulum BAC, cum habeat tres angulos A, B, C, acutos.

Def.



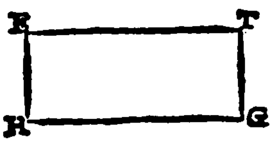
Def. XXXI.

QUADRATUM dicitur illa figura quadrilatera, cujus quatuor latera sunt æqualia, & quatuor quoque anguli æquales.

SI quadrilatera figura ABCD quatuor habeat latera æqualia AB, BC, CD, DA, quatuorque angulos A, B, C, D, æquales, seu rectos, dicetur Quadratum.

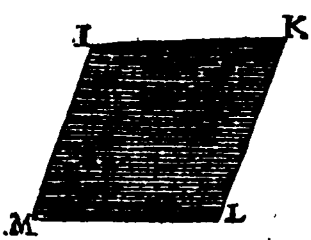
Def. XXX.

Altera parte longior, seu Quadrilongum vocatur illa figura quadrilatera, quę quatuor obtinet angulos æquales, non autem quatuor latera æqualia.



HOc cernere licet in figura ETGH, in qua omnes anguli E, T, G, H, sunt æquales, atque recti, ut in quadrato, latera vero non omnia, at sola opposita ET, HG, siue EH, TG æqualia.

Def. XXXI.

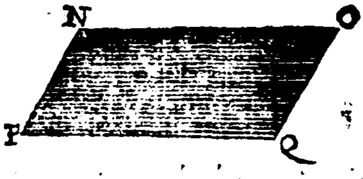


RHOMBUS dicitur figura quadrilatera, quæ æquilatera quidem est, sed non rectangula.

SI quadrilatera figura IKLM quatuor latera IK, KL, LM, MI habuerit æqualia, angulos vero I, K, L, M non rectos, dicetur Rhombus.

Def. XXXII.

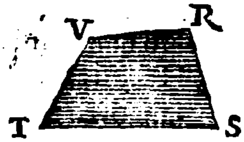
RHOMBOIDES nuncupatur illa figura quadrilatera, quæ opposita latera, & angulos habet æquales, cum neque æquilatera, neque æquiangula sit.



SI in figura quadrilatera NOQP non tantum latera opposita NO, PQ: NP, OQ, verum etiam oppositi anguli O, & P; N, & Q æquales erunt, hæc Rhomboides nominabitur.

Def. XXXIII.

TRAPEZIA vocantur reliquæ omnes figuræ quadrilateræ.



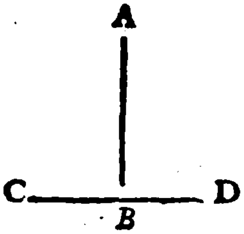
SI figura quadrilatera RSTV non sit Quadratum, nec Quadrilongum, nec Rhombus, nec Rhomboides, Trapezium appellabitur, in quo neque latera, neque anguli oppositi sunt æquales.

Def. XXXIV.

DISTANTIA unius puncti ab alio dicitur longitudo lineæ rectæ ab uno ad aliud punctum ductæ.

DIstantia puncti A a puncto B est longitudo rectæ lineæ AB.

Def.



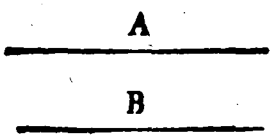
Def. XXXV.

DISTANTIA unius puncti ab aliqua recta linea vocatur perpendicularis a puncto ad rectam lineam ducta.

DIſtantia puncti A a recta CD eſt perpendicularis AB.

Def. XXXVI.

ÆQVALES dicuntur illæ Magnitudines, quarum differentia eſt nihil, vel quantitas inaſſignabilis.



SI differentia inter magnitudines A, & B ſit nihil, vel ſi ſit aliqua quantitas inaſſignabilis, magnitudines A, & B vocantur æquales.

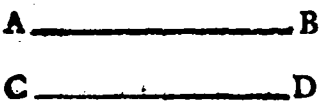
Def. XXXVII.

INÆQVALES appellantur illæ Magnitudines, quarum differentia eſt aliqua quantitas aſſignabilis.

SI inter quantitates A, & B ſit aliqua aſſignabilis differentia; dictæ quantitates dicendæ ſunt inæquales.

Def. XXXVIII.

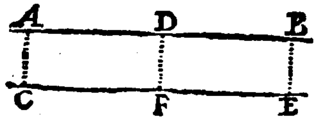
CONGRUENTES dicuntur magnitudines, quando facta talium magnitudinum ſuperimpoſitione, partes unius magnitudinis partibus alterius adaptantur.



SI recta AB ſuper impoſita rectæ CD habeat omnia ſua puncta adaptata punctis rectæ CD, hoc eſt quodlibet ipſius AB habeat aliud correſpondens punctum in recta CD, tunc dictæ magnitudines dicuntur congruentes.

Def. XXXIX.

PARALLELÆ rectæ lineæ appellantur, quæ in eodem exiſtentes plano, ſi ex utraque parte indefinitè producantur, ſemper ad invicem eamdem diſtantiam ſervant.



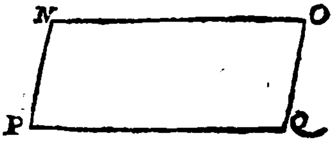
AD hoc ut duæ rectæ lineæ parallelæ, ſive non concurrentes dicantur, duæ requiruntur conditiones, quarum una eſt quod ſint in eodem plano conſtitutæ, altera quod quomodocumque productę eamdem diſtantiam ad invicem ſervent. Si enim duæ rectæ lineæ AB, CE fuerint in eodem plano ſignatæ, eamdemque in omnibus partibus habuerint diſtantiam, hoc eſt diſtantiæ AC, DF, BE &c. ſint æquales, tunc duæ rectæ lineæ AB, CD, dicendæ erunt Parallelæ, ſeu non concurrentes.

Def. XXXX.

PARALLELOGRAMMUM dicitur illa figura plana quadrilatera, in qua bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia.

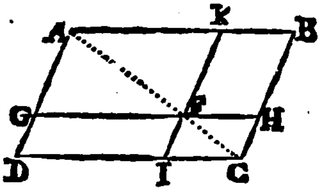
IN figura quadrilatera NOPQ, ſi latera oppoſita NO, PQ, nec non etiam NP, OQ, fuerint parallela, hæc vocabitur Parallelogrammum.

In



Parallelogramma illa, quæ habent angulos rectos, uti sunt Quadratum, & Quadrilongum, dicuntur RECTANGULA; reliqua vero, quæ angulos habent obliquos, ut Rhombus, & Rhomboides, vocantur Parallelogramma non rectangula.

Def. XXXXI.



SI in Parallelogrammo DB ducta sit diameter AC, atque per punctum F in diametro AC signatum, ductæ sint rectæ GFH, KFI parallelæ lateribus Parallelogrammi, hoc est GFH parallela DC, & KFI parallella BC, totum Parallelogrammum erit divisum in quatuor Parallelogramma, quorum duo, nempe DF, FB vocantur COMPLEMENTA, duo vero alia GK, IH, dicuntur Consistentia circa diametrum AC.

PETITIONES, ſeu POSTULATA.

Petitio I.

A quovis dato puncto ad quodvis datum punctum rectam lineam ducere.

HÆc prima petitio poſtulat, ut ſemper concedatur a quovis puncto ad quodvis pnnctum lineam rectam ducere: ſi enim data ſint puncta A, & B, etiam permitti debet poſſe duci rectam AB.

Petitio II.

Rectam lineam terminatam ſemper ulterius in rectum producere.

Petitio III.

Quocumque dato centro, & intervallo Circulum deſcribere.

Petitio IV.

Quodcumque punctum in magnitudine ſignare.

Petitio V.

Unam Magnitudinem alteri ſuper imponere.

Petitio VI.

Quacumque magnitudine data aliam ſumere magnitudinem data magnitudine majorem, vel minorem.

AXIO-

Axiomata, quæ communes Notiones, Pronunciata, atque Dignitates vocantur.

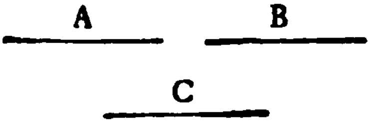
AXiomata sunt quædam veritates adeo manifestæ, ut probatione non indigeant, quemadmodum ex infra ponendis Axiomatis constabit.

Axioma I.

Illæ quantitates, quæ eidem quantitati sunt æquales, inter se sunt æquales; & vicissim illæ quantitates, quibus eadem quantitas est æqualis, sunt æquales inter se.

Quod uno æqualium majus est, aut minus, majus quoque est, aut minus altero æqualium.

Si unum æqualium majus est, aut minus alio aliqua quantitate, alterum quoque æqualium illo alio majus, vel minus erit eadem quantitate.



SI A æquat C, atque B æquat eamdem C; A æqualis erit ipsi B. Pariter si C adæquet A, & B; A, & B æquales erunt.

Denuo suppositis æqualibus A, & B, si C major est, aut minor A, major quoque, vel minor erit quam B.

Demum æqualibus existentibus A, & B illum excessum, quem habet C ad A, habebit etiam ad B.

SCHOLIUM.

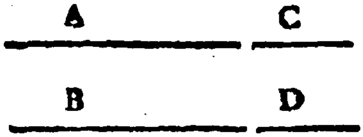
AD perfectam intelligentiam huius axiomatis necessarium putavi animadvertere Euclidem, aliosque Geometras æqualitatem

tatem

tatem identitati æquiparare, atque æqualitatem tamquam identitatem recipere; qua in re ſat erit unum proponere exemplum, nam dum Euclides ex tribus datis rectis lineis triangulum efformare vult, illud ex lineis, quæ ſint æquales lineis datis, atque hoc componit triangulum taliter efformatum recipit tamquam ex iiſdem lineis datis compoſitum, cum lineæ triangulum componentes ſint datis lineis æquales. Quo ſtante facile erit poſiti axiomatis veritatem dignoſcere; nam ſi A adæquat C: inde ſequitur A eſſe idem ac C: quod etiam valet de ipſo B: ſi igitur A, & B ſunt idem ac C; A erit idem ac B quo ad quantitatem, quæ ſola in hac doctrina conſideratur.

Axioma II.

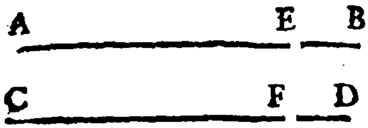
Si quantitatibus æqualibus adjiciantur æquales quantitates, illa tota, quæ reſultant, erunt æqualia.



SI æqualibus quantitatibus A, & B additæ ſint æquales quantitates C, D; totum compoſitum ex A, & C adæquabit totum factum ex B, & D.

Axioma III.

Si ab æqualibus quantitatibus æquales quantitates ablatæ ſint, quæ remanent quantitates erunt æquales.



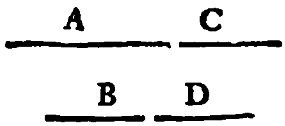
SI ab æqualibus quantitatibus AB, CD, detractæ ſint æquales quantitates EB, FD, reſidua AE, CF erunt æqualia.

Axioma IV.

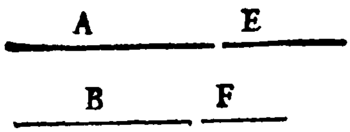
Si quantitatibus inæqualibus additæ ſint æquales quantitates, tota reſultantia erunt inæqualia.

Si

Si inæqualibus inæqualia adjecta sint, majori majus, & minori minus, tota, quæ resultant, erunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.



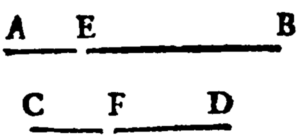
DUm inæqualibus quantitatibus A, & B adiunguntur æquales quantitates C, & D; tota resultantia ex A, & C, & ex B, & D. erunt inæqualia.



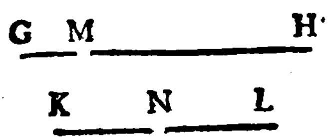
Pariter si inæqualibus quantitatibus A, & B additæ sint inæquales quantitates E, & F, cum hac lege, quod majori A adiungatur major E, atque minori B addatur minor F; totum, quod resultat ex A, & E majus erit toto resultante ex B, & F.

Axioma V.

Si ab inæqualibus quantitatibus ablatæ sint æquales quantitates, residua erunt inæqualia. Si ab inæqualibus quantitatibus inæquales quantitates ablatæ sint, cum hac conditione quod ex majore auferatur minus, & ex minore majus, residua pariter erunt inæqualia.



Si a quantitatibus inæqualibus AB, CD detractæ sint æquales quantitates AE, CF; residuum EB majus erit residuo FD.

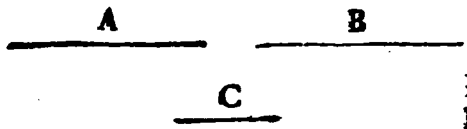


Pariter si ab inæqualibus quantitatibus GH, KL ablatæ sint inæquales quantitates GM, KN, cum hac lege ut GM ablatum ex majore GH minus sit

ſit KN ablato ex minore KL: reſiduum MH majus erit reſiduo NL.

Axioma VI.

Illæ quantitates, quæ ejuſdem quantitatis duplæ ſunt, inter ſe ſunt æquales. Id, quod unius æqualium duplum eſt, & alterius æqualium duplum erit. Quando unum æqualium alicujus duplum eſt, etiam cœtera æqualia ejuſdem dupla erunt.



SI tam A quam B ſint ipſius C dupla; A,& B erunt inter ſe æqualia. Poſitis æqualibus A, & B, ſi C ſit duplum ipſius A, idem C erit etiam duplum ipſius B. Pariter ſuppoſita æqualitate inter A, & B, ſi A duplum ſit ipſius C, etiam cætera alia ipſi A æqualia ut B, ejuſdem C dupla erunt.

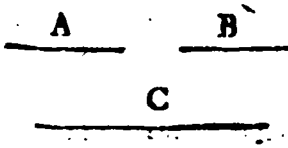
SCHOLIUM.

QVod de ſola duplicitate ab Euclide dictum fuit, valet etiam de triplicitate, quadruplicitate, ſubduplicitate, ſubtriplicitate &c. Nam ſi A, & B ſint tripla, vel ſubtripla ipſius C; æqualia erunt A, & B.

Axioma VII.

Illæ quantitates, quæ ejuſdem ſunt dimidiæ, inter ſe ſunt æquales; & viciſſim ſi una æqualium quantitatum ſit unius dupla, etiam aliæ ejuſdem duplæ erunt.

Si



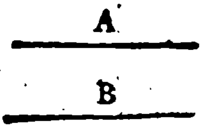
SI A, & B æqualia ſint, atque A dimidium ipſius C; etiam B dimidium erit ipſius C.

Quod de dimidia parte dictum eſt, valet etiam de quacumque alia parte.

Axioma VIII.

Quantitates, quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æquales, & viciſſim quantitates congruentiæ capaces, ſi æquales ſint, erunt etiam congruentes.

PEr def. 38. Mathematici nomine congruentiæ intelligunt talem duarum quantitatum adaptationem, ſecundum quam neutra illarum quantitatum alteram excedit: quo ſtante facile erit comprehendere congruentes quantitates eſſe æquales, cum congruentium quantitatum differentia nulla ſit.



Pariter ſi quantitates congruentiæ capaces, uti ſunt omnes lineæ rectæ, ſuperficies planæ, & ſimiles, anguli plani &c. ſint æquales, erunt etiam congruentes, ſi enim recta linea A ſit rectæ lineæ B æqualis, etiam A congruet cum B.

Axioma IX.

Omne totum majus eſt ſua parte.

SI a toto pars auferatur, aliquid remanet, ſecus totum fuiſſet ablatum: quare totum majus erit ſua parte.

Axioma X.

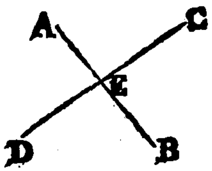
Duæ rectæ lineæ nequeunt habere idem ſegmentum commune.

VEritas hujus axiomatis clarè percipitur, ſi intelligamus naturam lineæ rectæ, quæ in hoc conſiſtit, videlicet quod pro-

producta semper recto itinere procedat; unde sequitur nec fieri, nec concipi posse, unam lineæ rectæ partem quantitativam, quæ nomine segmenti intelligitur, duabus rectis lineis communem existere, quod est idem ac dicere, duas rectas lineas nullatenus commune segmentum habere posse.

Axioma XI.

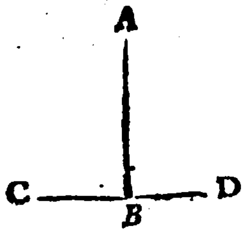
Duæ rectæ lineæ in uno puncto concurrentes, si ambæ producantur, necessario in eodem puncto se mutuo intersecabunt.



SI duæ rectæ lineæ AE, CE concurrant in E productæ versus B, & D, se mutuo intersecabunt in puncto E, cum hoc solum punctum sit commune utrique rectæ lineæ AB, CD.

Axioma XII.

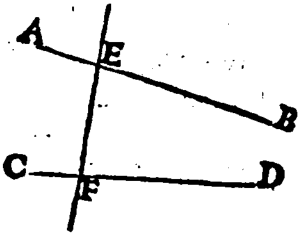
Omnes anguli recti sunt inter se æquales.



VEritas huius axiomatis apertè dignoscitur ex definitione 10., in qua dicitur angulum rectum efformari a perpendiculari. Vt ex. g. si recta AB perpendiculariter insistat rectæ CD, anguli ABC ABD erunt anguli recti: cum ergo immutabilis sit constitutio lineæ perpendicularis, quia dependet ab æqualitate angulorum ABC, ABD; inde sequitur etiam immutabilem esse illam inclinationem, per quam efformantur anguli recti: quare omnes anguli recti erunt inter se æquales.

Axioma

Axioma XIII.

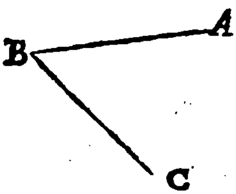


Si in duas rectas lineas AB, CD in eodem plano existentes incidat recta EF, quæ faciat duos internos, & ad easdem partes angulos BEF, DFE duobus rectis angulis minores; duæ rectæ AB, CD indefinitè productæ debent concurrere ad partes B, & D, ad quas sunt duo anguli duobus rectis minores.

PRæsens axioma, quod est *XI.* Euclidis, a quamplurimis Scriptoribus, & merito quidem ab axiomatum numero excluditur, & inter propositiones demonstrandas reponitur. Nos autem dicenda circa hanc veritatem ad prop. 29. remittimus, quo in loco dumtaxat hujus axiomatis veritas primitus locum habet.

Axioma XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

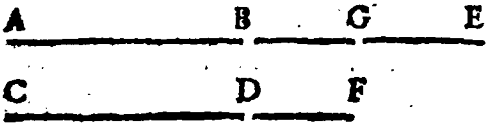


SI duæ rectæ lineæ AB, CB concurrant in B efformantes angulum ABC, propter essentiam lineæ rectæ ad partes A, & C semper debent ad invicem recedere; quare ad partes A,& C numquam poterunt concurrere; uti necessarium foret ad hoc ut spatium comprehenderent, sive clauderent.

Axioma XV.

Si æqualibus quantitatibus AB, CD inæquales quantitates addantur BE, DF, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis.

Po-



POsitis æqualibus quantitatibus AB, CD, si illis adiungantur inæquales quantitates BE, DF, atque BE excedat DF magnitudine GE; excessus totius AE supra totum CF erit GE, (*cum per Axio.* 1.) AG adæquet CF.

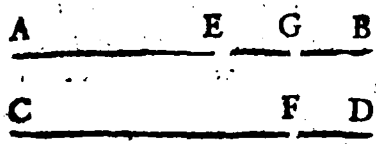
Axioma XVI.

Si quantitatibus inæqualibus, BE, DF æquales addantur quantitates AB, CD; excessus totius AE supra totam CF adæquabit excessum BE supra DF.

SIt GE excessus BE supra DF. Cum igitur AG adæquet CF, erit GE excessus AE supra CF, idem ac excessus BE supra DF.

Axioma XVII.

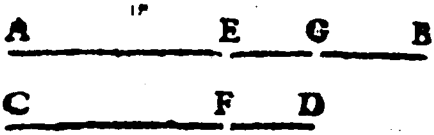
Si ab æqualibus quantitatibus AB, CD, auferantur inæquales quantitates EB, FD, sitque EG excessus ablati EB supra ablatum FD, excessus residui CF supra residuum AE adæquabit EG excessum ablatorum EB, FD.



CUm ab æqualibus AB, CD, ablata sint æqualia GB, FD (per Axio. 3.) erit AG æqualis ipsi CF: quare excessus residui CF supra residuum AE erit EG excessus ablatorum EB, FD.

Axioma XVIII.

Si ab inæqualibus quantitatibus AB, CD auferantur æquales quantitates AE, CF, exceſſus reſidui EB ſupra reſiduum FD, adæquabit exceſſum totius AB ſupra totum CD.



Sit GB exceſſus AB ſupra CD: hoc poſito erit AG æqualis ipſi CD, atque EG (*per axio.* 3.) æqualis ipſi FD: quare GB erit exceſſus reſidui EB ſupra reſiduum FD.

Axioma XIX.

Totum adæquat omnes ſuas partes ſimul ſumptas.

Quantitas totius AB componitur ex quantitatibus omnium partium AC, CD, DB: quare evidens eſt totum AB adæquare omnes ſuas partes componentes AC, CD, DB.

Axioma XX.

Si totum AB ſit totius CD duplum, atque ablatum AE duplum ablati CF; erit reſiduum EB duplum reſidui FD.

Quia ablatum AE ſupponitur duplum ablati CF: pariter quia AB ponitur duplum CD, erit CF dimidium AE, & FD dimidium EB: quare reſiduum EB erit duplum reſidui FD.

Axioma XXI.

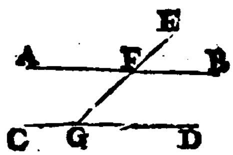
Si fuerint tres quantitates, quarum prima superet secundam, atque secunda superet tertiam, etiam prima tertiam superabit.

Axioma XXII.

Illæ quantitates, quæ inæquales esse non possunt, sunt æquales, si sint ex eodem genere.

Axioma XXIII.

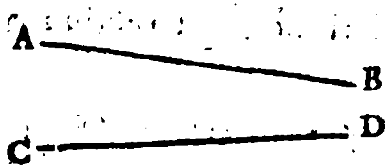
Quando recta linea unam parallelarum secat, producta secabit & alteram.



Si recta linea EF secet parallelam AB in F, producta secabit etiam alteram parallelam in G.

Axioma XXIV.

Duæ rectæ lineæ non parallelæ in eodem plano existentes productæ ad unam partem concurrunt.



Si duæ rectæ AB, CD in eodem plano constitutæ non sint parallelæ, productæ ad partes B,D, vel A,C debent concurrere.

Axioma XXV.

Recta linea in unico tantum puncto bifariam dividi potest.

Quid

Quid sit Definitio, quid Postulatum &c.

UT Tyrones facilius percipiant discrimen, quod cadit inter Mathematicorum Definitiones, Postulata, Axiomata, Propositiones, Problemata, Corollaria, Lemmata, & Scholia, necessarium duxi circa horum terminorum significationem aliquid addere antequam ad propositionum demonstrationes veniam.

Definitionis nomine nil aliud intelligitur quam illud determinatum rei esse, quod mens nostra rebus tribuit; uti evenit, dum rectam lineam concipimus, cujus omnia puncta sunt ex æquo disposita; vel dum concipimus angulum planum rectilineum esse duarum rectarum linearum in eodem plano existentium, atque ad punctum concurrentium inclinationem, vel Quadratum esse figuram quadrilateram, in qua quatuor latera, & quatuor anguli sunt æquales. Hujusmodi definitiones aliud non videntur esse, quam simplices nostræ Mentis apprehensiones, quibus res tali determinato modo nobis repræsentamus.

Postulatum dicitur illud, quod aliquid possibile exposcit uti evenit dum a puncto ad punctum rectam lineam duci postulamus.

Axioma est illud, quod per se notam, atque indemonstrabilem veritatem proponit, ut dum dicimus: quæ æqualia sunt uni tertio, sunt æqualia inter se.

Propositio generaliter accepta illa est, quæ aliquid proponit, uti est illa, quæ dicit in triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis.

Theorema est illa propositio, in qua aliquid demonstrandum proponitur; uti evenit dum dicimus in isocele triangulo ad basim angulos existere inter se æquales.

Problema est illa propositio, in qua aliquid faciendum proponitur; uti contingit, dum angulum rectilineum bifariam dividendum proponimus.

Postulatum convenit cum Problemate in hoc quod utrumque aliquid fieri exposcat: differt verò, quia Postulati operatio, ut admittatur legitimè facta, non indiget demonstratione, operatio verò a Problemate proposita demonstrationem requirit, ut legitimè facta concedatur.

Pariter Axioma , atque Theorema hoc diſcrimen habent, quod ſcilicet Axioma aliquid proponit, quod libenter ſine demonſtratione verum conceditur, ex adverſo autem poſitum a Theoremate non eſt ulla ratione concedendum tamquam verum, niſi fuerit demonſtratum. Nullus enim demonſtrationem requirit, dum dicimus, æqualia uni tertio eſſe æqualia inter ſe; quam quidem demonſtrationem exoptamus, dum dicitur, in triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis. Inſuper Poſtulatum eſt veluti principium operationis; axioma vero demonſtrationis.

Corollarium eſt veritas, quæ infertur ab aliqua demonſtratione: poſita namque demonſtratione quod in triangulo iſoſcele æquales ſint anguli ſupra baſim, ſi denuo inferatur quod in triangulo æquilatero tres anguli ſint æquales, quia triangulum æqualium laterum quaquauerſum eſt iſoſceles, hoc corollarium erit.

Lemma eſt propoſitio nullatenus ſpectans ad illam, quam pertractamus doctrinam, ſolumque accepta ad demonſtrandum id, quod opus eſt demonſtrare in aliqua doctrina.

Scholium eſt ſola adnotatio facta circa aliquam propoſitionem.

Signorum explicatio.

def. ————	Definitio.
Poſt., Pet. ————	Poſtulatum, Petitio.
Axio. ————	Axioma.
$=$ ————	Æqualitas.
$+$ ————	Plus.
$-$ ————	Minus.
AB X CD ————	Rectangulum a rectis lineis AB, CD factum.
q. EF ————	Quadratum a recta linea EF factum.
q. e. d. ————	Quod erat demonſtrandum.
q. e. f. ————	Quod erat faciendum.

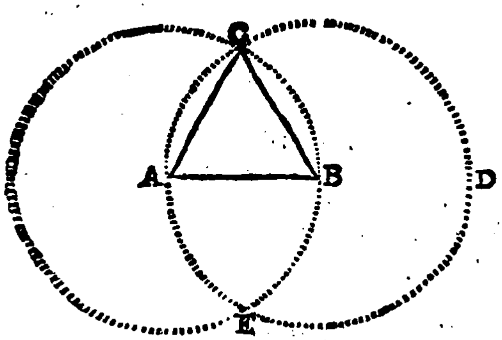
Propoſ.

Propos. I. Probl. I.

Super data recta linea AB terminata triangulum æquilaterum constituere.

Constructio.

CEntro A, & intervallo AB (*per. pet.* 3.) describatur circulus CBE. Pariter centro B, & interuallo BA (*per pet.* 3.) notetur alius circulus CAE, qui priorem circulum necessariò intersecabit, quia punctum A spectans ad circulum CAE est intra circulum CBE, punctumque D, quod spectat ad eumdem circulum CAE, est extra circulum CBE, cum (*per Axio.* 9.) major sit recta AD quam AB. Sit igitur talium circulorum intersecatio punctum C. A punctis A, & B ad punctum C (*per pet.* 1.) ducantur rectæ lineæ AC, BC: hoc facto supra datam rectam AB erit efformatum triangulum ACB, quod



Dico esse æquilaterum.

Demonstratio.

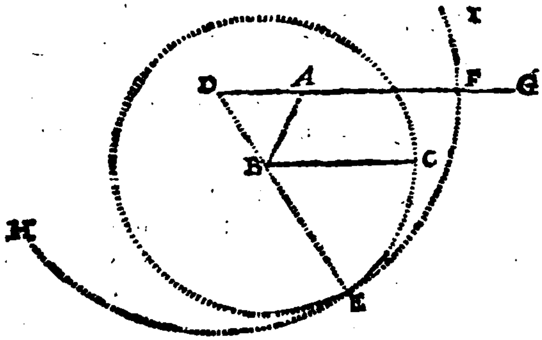
AB = AC (*per def.* 15.) BA = BC (*per eamdem def.*) ergo (*per Axio.* 1.) AC = BC: quare triangulum ABC erit æquilaterum. q.e.d.

Propos. II. Prob. II.

Ad punctum datum A datæ rectæ lineæ BC æqualem rectam lineam ponere.

HOc problema duas habet partes, unam scilicet, quando datum punctum A est extra lineam datam BC; alteram vero dum punctum A in recta BC reperitur.

Constructio primæ partis.



AB una extremitatum rectæ BC, ut a puncto B tamquam centro, & intervallo BC (*per pet.* 3.) describatur circulus CE.

A centro B ad A (*per pet.* 1.) ducatur recta BA.

Super recta BA (*per prop.* 1.) signetur triangulum æquilaterum BDA.

Latus BD producatur usque ad circumpherentiam in E, latusque DA indefinitè producatur versus G.

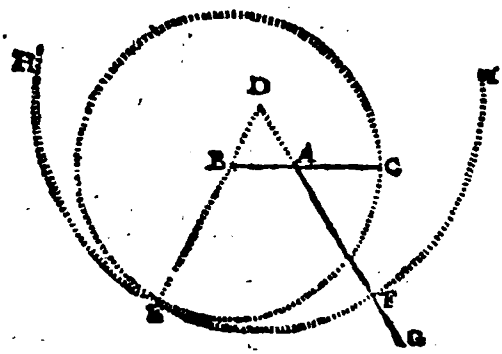
Demum centro D, & distantia DE (*post.* 3.) notetur circulus HEF, qui lineam AG secet in F.

Dico AF = BC.

Demonstratio.

DE = DF (*per def.* 15.) DB = DA (per constructionem): ergo (*per axio.* 3.) AF = BE; sed eidem BE = BC (*per def.* 15.) ergo (*per axio.* 1.) AF = BC. q. e. d.

Constructio secundæ partis.



CEntro B, uti prius, distantia BC (*per pet.* 3.) describatur circulus CE.

Super BA (*per prop.* 1.) fiat triangulũ æquilaterum BDA, & DB producatur usque ad circumferentiam CE. DA producatur indefinitè versus G. De-

Demum centro D, & intervallo DE signetur circulus EF, qui rectam DG secet in F.

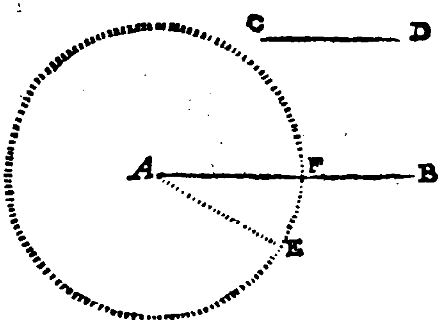
Dico AF = BC.

Demonstratio hujus partis eadem est, quæ prioris, hoc est DE = DF (*per def. circuli*) DB = DA (*per constructionem*) ergo AF = BE (*per axio. 3.*) atqui etiam BC = BE (*per def. circuli.*) ergo (*per axio. 1.*) BC = AF. q. e. f.

Propos. III. Probl. III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus AB, CD, de maiore linea AB aufere partem æqualem minori lineę CD.

Constructio.



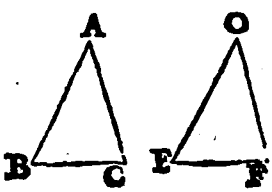
AD punctum A (*per prop. 2.*) ponatur recta AE = CD Centro A, & distantia AE (*per post. 3.*) signetur circulus EF, qui secet AB in F.

Dico AF = CD.

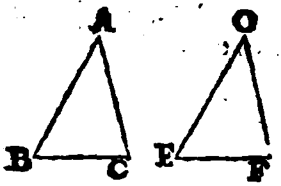
Demonstratio.

CD = AE (*per constructionem*); AF = AE (*per def. 15.*): ergo (*per axio. 1.*) AF = CD. q. e. f.

Propos. IV. Theor. I.



Si duo triangula BAC, OEF habeant duo latera singula singulis ęqualia, nempe latus BA = OE, & latus AC = OF, habeantque angulos BAC, EOF ab ęqualibus lateribus contentos ęquales.



Dico primo Basim BC = basi EF.

Dico secundo Triangulum BAC = triangulo EOF.

Dico tertio reliquos angulos, sub quibus æqualia latera subtenduntur esse æquales: hoc est angulum ABC = angulo OEF; & angulum ACB = angulo OFE.

Demonstratio primæ partis.

Per hypothesim AB = OE; quare si AB ipsi OE super imponatur taliter, ut duo puncta A, & O congruant (*per axio.* 8.) etiam punctum B congruet cum puncto E, totaque AB congruet cum tota OE. Servata hac congruentia si angulus BAC fuerit superpositus æquali angulo EOF, latus AC congruet cum latere OF, atque propter suppositam talium laterum æqualitatem punctum C cadet in F: Quo stante extrema basium BC, EF erunt congruentia: quare & tota basis BC congruet basi EF, secus duæ rectæ lineæ spatium clauderent, quod est contra axio. 14. Cum igitur duæ triangulorum bases BC, EF, sint conguentes (*per axiom.* 8.) erunt æquales. q. e. d.

Demonstratio secundæ partis.

Cum in prima parte fuerit demõstratum, omnia latera trianguli ABC congruere lateribus trianguli OEF; inde sequitur totum triangulum ABC congruere toti triangulo OEF: quare (*per axio.* 8.) dicta triangula erunt æqualia q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

In prima parte hujus prop. demonstratum est non solum latera AB, BC congruere lateribus OE, EF, verum etiam latus AC congruere lateri OF: inde sequitur non tantum angulum ABC congruere angulo OEF, verum etiam angulum ACB congruere angu-

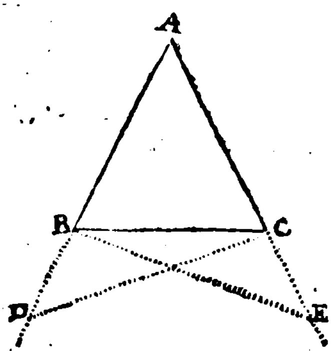
angulo OFE: sed (*per axio.* 8.) illa, quæ congruunt, sunt æqualia: ergo angulus ABC = angulo OEF, & angulus ACB = angulo OFE. q.e.3.d.

SCHOLIUM.

PErmulti Authores hanc Euclidis demonstrationem condemnant, utpote non Geometricam, cum utatur superimpositione, quæ apud istos Authores potius Mecanicum, quam Geometricum sapit. Verum si rem istam æquo animo perpendamus clarè apparebit, hanc non physicam, at mentalem rectarum linearum superimpositionem existere: qua de re talis superpositio non erit verè mecanica, cum tantumodo oculis mentis, non autem corporis ostendat talium triangulorum proprietates a primis principijs deductas. Ulterius liceat addere, quod illi Scriptores, qui datam Euclidis demonstrationem nolunt admittere tamquam Geometricam, meliorem usque adhuc non excogitarunt: quam ob rem ne Geometrica hæc Elementa hac propositione summopere necessaria destituantur, consonum erit superius propositam demonstrationem tamquam geometricam recipere, quousque melior sit adinuenta.

Propos. V. Theor. II.

In triangulo Isoscele ABC, in quo duo latera æqualia sint AB, AC.

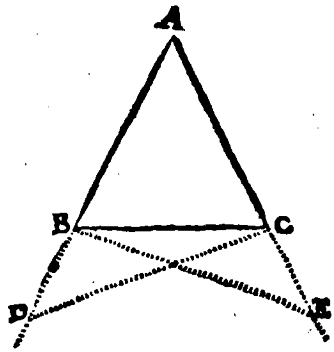


DIco primo angulos supra basim ABC, ACB esse æquales. Dico secundo, productis æqualibus lateribus AB, AC in D, & E angulos pariter infra basim CBD, BCE esse æquales.

Constructio.

In latere AB producto signetur quodcumque punctum, ut D; ex alio latere AC producto (*per. prop.* 3.) auferatur CE = BD, ducanturturque duæ rectæ BE, & CD.

Demonstratio secundæ partis.

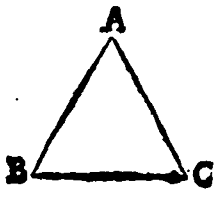


Cum per hypotesim sit AB = AC, atque (*per constructionem*) sit BD = CE, (*per axio. 2.*) erit AD = AE, quare in triangulis ABE, ACD erunt duo latera duobus lateribus singula singulis æqualia, angulusque A utrique triangulo communis: unde (*per prop. 4.*) basis BE = basi CD: angulus ABE = ang. ACD, atque angulus AEB = angulo ADC.

Pariter in triangulis CBD, BCE [*ex demonstratis, & per constructionem*] sunt duo latera BD, DC singula singulis æqualia duobus lateribus CE, EB, angulusque BDC [*ex demonstratis*] = angulo CEB: quamobrem (*per prop. 4.*) angulus CBE = angulo BCD, & angulus CBD = angulo BCE: cum autem dicti anguli CBD, BCE sint infra basim, demonstrata erit secunda pars hujus propositionis, nempe quod in triangulo isoscele æqualibus productis lateribus, qui infra basim sunt anguli, sint æquales.

Demonstratio primæ partis.

In triangulis ABE, ACD ex demonstratis angulus ABE = angulo ACD. Insuper in triangulis CBD, BCE ex demonstratis ang. BCD = ang. CBE: igitur si ab angulo ABE auferatur angulus CBE, & ab angulo ACD tollatur angulus BCD (*per axio. 3.*) remanebit ang. ABC = ACB. q. e. 2. d.



Corollarium.

Ex hac prop. colligitur in triangulo æquilatero ABC, omnes angulos esse æquales; nam triangulum æqualium laterum est quaqua versum isosceles; quare & anguli ad basim (*per hanc prop.*) erunt æquales:

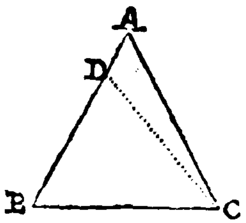
les: si enim accipiantur æqualia latera AB, AC [*per antecedentem prop.*] ang. B = ang. C: denuo si æqualia latera sint BA, BC erit angulus C = ang. A, & ideo tres anguli A, B, C æquales.

Propos. VI. Theor. III.

In triangulo ABC si duo anguli B, & C sint æquales:

Dico latera AB, AC æqualibus angulis subtensa esse æqualia.

Constructio, & demonstratio.



IN triangulo ABC posita æqualitate duorum angulorum B, & C, si talibus angulis subtensa latera nempe AB, AC nõ sunt æqualia, unum erit altero majus. Ponamus AB majus AC: ex AB (*per prop. 3.*) auferatur BD = AC, ducaturque CD.

Hoc facto in triangulis ACB, DBC erunt duo latera AC, CB, singula singulis æqualia duobus lateribus DB, BC, nec nõ etiam anguli ACB, DBC ab æqualibus lateribus comprehensi (*per ipothesim*) æquales: quare (*per prop. 4.*) triang. ACB = triang. DBC: ergo pars æqualis toto contra axio. 9. quapropter latus AB nequit esse majus latere AC: idem inconveniens sequetur si AB dicatur minus quam AC: quare (*per axio. 22.*) AB = AC. q.e.d.

Corollarium.

EX hac prop. fit manifestum in illis triangulis, in quibus tres anguli sunt æquales, tria pariter latera esse æqualia; quia in triangulo æqualium angulorum duo quomodocumque assumantur anguli, semper sunt æquales; unde & dictis angulis subtensa latera erunt æqualia, atque triangulum æquilaterum.

Propos.

Propos. VII. Theor. 4.

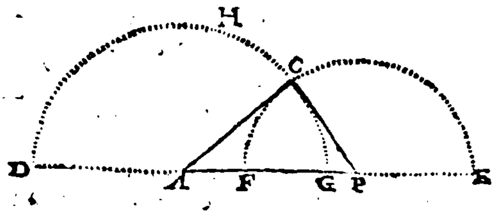
Super eadem recta linea AB ad punctum C ductis duabus rectis lineis AC, BC:

Dico ad eamdem partem, atque in eodem plano, in quo est punctum C super eadem recta linea AB a terminis, A, & B ad aliud punctum non posse duci duas alias lineas seorsim prioribus AC, BC æquales, eosdemque habentes terminos A, & B.

Constructio.

Centro A intervallo AC (*per pet.* 3.) describatur semicirculus DCG: pariter centro *B* atquè distantia BC notetur alius semicirculus ECF.

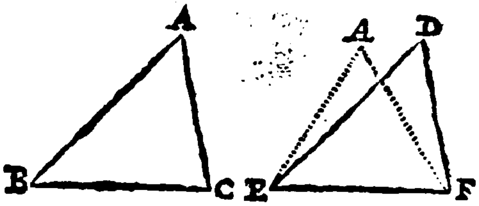
Demonstratio.



Si ad partem puncti C, & in illo plano, in quo reperitur idem punctum C foret assignabile aliud punctum, ad quod duci possent duæ rectæ lineæ, quarum illa, quæ duceretur a termino *A* esset æqualis ipsi AC, altera vero ducta a termino *B* adæquaret *B*C, tale punctum ad partem puncti C signandum esset vel extra, vel intra semicirculos DCG, FCE, vel in circumferentijs talium semiculorum. Si ponatur extra semicirculos DCG, FCE illa recta, quæ a termino A ad punctum extra semicirculos positum ducta erit, semper major erit ipsa AC; aliaque a puncto *B* ducta major quam *B*C: si verò punctum fuerit signatum intra semicirculos una tantũ linea fortasse æqualis erit ipsi AC, vel *B*C, sed non ambæ æquales erunt: hoc idem dicendum si punctũ signatum sit in una semicirculorum circumferenferentijs, ut in H, in quo casu AH erit quidem æqualis ipsi AC, sed BH non adæquabit BC, uti necessarium foret, ad hoc ut ad punctum H ductæ essent duæ rectæ AH, BH prioribus AC, BC singulæ singulis æquales. q. e. d.

Propos. VIII. Theor. V.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC singula singulis DE, DF, æqualia, habeantque basim BC = basi EF.



Dico angulos BAC, EDF ab æqualibus lateribus contentos esse æquales.

Constructio, & demonstratio.

Quia bases BC, EF supponuntur æquales facta talium basium superimpositione (*per axio.* 8.) erunt congruentes, duoque extrema B, C congruent cum extremis E, F: servata hac basium congruentia triangulum BAC superponatur triangulo EDF. Hoc facto punctum A vel erit in D, vel extra; si sit in D etiam latera AB, AC erunt lateribus DE, DF congruentia; quare angulus BAC congruet angulo EDF, & consequenter erit æqualis (*per axio.* 8.) Si postea punctum A cadat extra punctum D, contra prop. præcedentem ab extremitatibus E, & F ad aliud punctum extra D duci possunt duæ rectæ EA, FA prioribus ED, FD æquales. q. e. d.

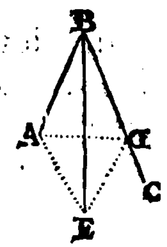
Corollarium.

Ex hac propos. sequitur in illis triangulis, in quibus omnia latera unius trianguli sunt singula singulis lateribus alterius trianguli æqualia, non solum omnes talium triangulorum angulos ab æqualibus lateribus comprehensos esse æquales, verum etiam totum triangulum esse toti triangulo æquale, quia, ut demonmonstratum est, anguli congruunt angulis, & triangulum triangulo.

Propos. IX. Probl. IV.

Datum angulum rectilineum ABC, bifariam dividere.

Constructio.



In uno ex lateribus BA, vel BC comprehendentibus datum angulum ABC utcumque signetur punctum A: ex latere BC (*per prop.3.*) abscindatur BD æqualis ipsi BA: ducatur AD: supra AD (*per prop.1.*) constituatur triangulum AED æquilaterum: ducatur BE.

Dico rectam BE datum angulum ABC bifariam dividere.

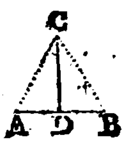
Demonstratio.

Per constructionem *BA* = BD, atque AE = DE: quare in triangulis ABE, DBE erunt duo latera AB, BE singula singulis æqualia duobus lateribus DB, BE: (nam BE est latus commune utrique triangulo) basisque AE = basi DE: quare (*per prop. 8.*) angulus ABE = ang. DBE: unde datus angulus ABC erit bifariam divisus. q. e. f.

Propos. X. Probl. V.

Datam rectam lineam AB bifariam dividere.

Constructio.



Super data AB (*per prop. 1.*) constituatur triangulum æquilaterum ACB.

Angulus ACB (*per prop. 9.*) bifariam dividatur a recta CD.

Dico datam rectam lineam AB bifariam esse divisam in D.

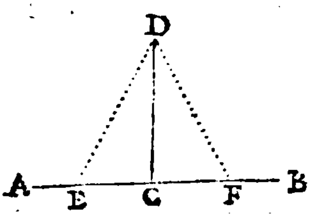
Demon-

Demonstratio.

Per constructionem AC = BC; quamobrem in duobus triangulis ACD, BCD duo latera AC, CD singula singulis æqualia erunt duobus Lateribus BC, CD: pariter cum duo anguli ACD, BCD ab æqualibus lateribus contenti sint æquales per constructionem: sequitur (*per prop.* 4.) basim AD = basi DB: quare data AB erit bifariam divisa in D. q. e. f.

Propos. XI. Probl. VI.

Datæ rectæ AB a puncto C in ea dato perpendicularem ducere.



Constructio.

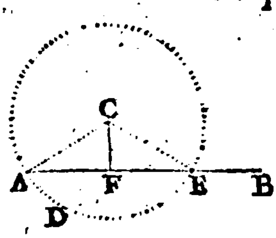
In data recta AB signetur punctum E quod non sit C: (*per prop.* 3.) fiat EC = CF. Super EF (*per prop.* 1.) constituatur triangulum æquilaterum EDF. A puncto C ad D ducatur recta CD.

Dico CD perpendicularem esse ipsi AB.

Demonstratio.

Per constructionem EC = CF, atque ED = FD: ergo in triangulis DCE, DCF duo latera EC, CD singula singulis erunt æqualia lateribus FC, CD: basisque ED = basi FD: quare (*per prop.* 8.) angulus DCE = ang. DCF: igitur (*per def.* 10.) recta DC erit perpendicularis ipsi AB. q. e. f.

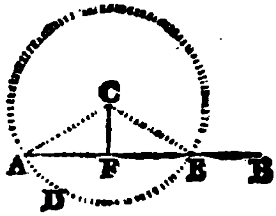
Propos. XII. Probl. VII.



Super data recta AB a puncto C extra datam rectam constituto, ipsi AB perpendicularem ducere.

Con-

Constructio.



CEntro C. tanto intervallo describatur circulus AE ut secet rectam *AB* in A, & E. Recta AE (*per prop.* 10.) bifariam dividatur in F.

A puncto C ducantur rectæ CA, CF, CE.

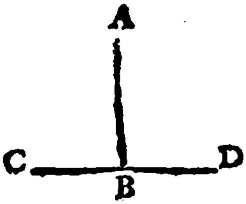
Dico CF ipsi *AB* esse perpendicularem.

Demonstratio.

Recta CA ═ CE (*per def. Circuli*) AF ═ FE (*per constructionem*) ergo in triangulis CFA, CFE duo latera CF, FA singula singulis æqualia erunt duobus lateribus CF, FE: basisque CA ═ basi CE, quare (*per prop.* 8.) ang. CFA ═ ang. CFE: igitur (*per def.* 10.) dicti anguli erunt recti; & recta CF ipsi *AB* perpendicularis. q. e. f.

Propos. XIII. Theor. VI.

Fig. 1.

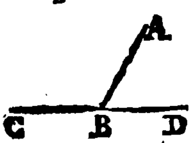


Si Recta AB cadat supra rectam CD.

Dico duos, quos deinceps facit angulos A*B*C, A*B*D, esse rectos, vel duobus rectis æquales.

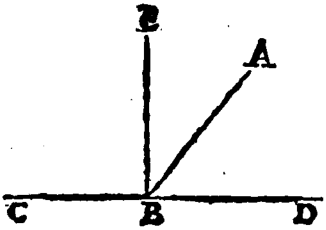
Constructio, & Demonstratio.

Fig. 2.



Dum recta A*B* super recta CD consistit hoc dupliciter potest contingere, primo scilicet, quando A*B* est ipsi CD perpendicularis, ut (*Fig.* 1.); secundo dum A*B* est ipsi CD inclinata, ut (*Fig.* 2.). Quando A*B* est ipsi CD perpendicularis (*Fig.* 1.) tunc (*per def.* 10.) duo deinceps anguli *ABC*, *ABD* sunt recti: quare (*per axio.* 12.) duobus rectis angulis æquales.

Si



Si vero AB(*Fig.2.*)non sit ipsi CD perpendicularis, neque duo anguli ABC, ABD erunt recti,at unus obtusus,alter vero acutus; quos pariter

Dico duobus rectis æquales.

A puncto B (*per prop.* 11.) ducatur BE ipsi CD perpendicularis. (*Fig.3.*)

Demonstratio.

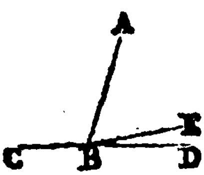
Duo anguli DBA, ABE, cum sint partes anguli recti DBE, (*per axio.* 19.) erunt æquales uni recto; addito angulo recto CBE (*per axio.* 2.) erunt tres anguli DBA, ABE, EBC duobus rectis angulis æquales; sed duo anguli ABE, EBC (*per axio.* 19.) æquant angulum obtusum ABC: ergo obtusus angulus ABC cum acuto ABD erunt duobus rectis angulis æquales q. e. d.

Propos. XIV. Theor. VII.

Si ad B punctum rectæ AB in eodem plano e diversis partibus ductæ sint duæ rectæ lineæ CB, DB, quæ duos deinceps angulos ABC, ABD efficiant duobus rectis angulis æquales.

Dico rectas CB, BD in directum jacere.

Constructio, & Demonstratio.



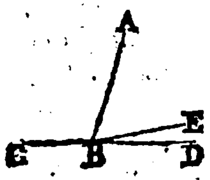
SI linea CB non est in directum constituta cum BD, linea CB in rectum producta necessario cadere debet supra, vel infra BD. Ponamus igitur quod cadat supra, quodque CBE sit una recta linea.

Hoc supposito anguli $\left.\begin{matrix}\text{ABC}\\ \text{ABE}\end{matrix}\right\}$ (*per prop.* 13.) sunt duobus rectis æquales.

Anguli $\left.\begin{matrix}\text{ABC}\\ \text{ABD}\end{matrix}\right\}$ (*per hypotesim*) sunt æquales duobus rectis.

D Quare

Ergo (*per axio. 1.*) ang. $\left.\begin{matrix}ABC\\ABE\end{matrix}\right\} =$ ang. $\left.\begin{matrix}ABC\\ABD\end{matrix}\right\}$ & dempto communi angulo ABC (*per axio. 3.*) erit ang. ABD = ang. ABE, quod fieri nequit, quia pars adæquaret totum contra veritatem axio. 9. quapropter CBE non erit una linea recta: quod demonstratum est de linea BE, valet etiam de quacumque alia linea; excepta BD, igitur BD cum BC efformabunt lineam rectam. q. e. d.



SCHOLIUM.

Etiam huic propositioni (quemadmodum, & in prop. 7.) factum fuit) placuit adiungere hæc verba in eodem plano, *cum euidens sit quod si duo puncta C, & D non fuerint in eodem plano, in quo reperitur & ipsa recta AB, amplius non verificatur hæc propositio; nam si punctum D. acceptum fuerit extra illud planum, in quo sunt recta AB, & punctum C, manifestum est duos angulos ABC, ABD posse existere duobus rectis æquales, quamvis recta BD non sit in rectum cum CB (ut constat ex lib. 11. elem.) Ut ergo verificetur hæc propositio necessarium est quod duo puncta C, & D reperiantur in illo plano, in quo est recta AB.*

Propos. XV. Theor. VIII.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secent in E Dico angulos ad verticem AEC, BED, vel ang. AED, BEC esse æquales.

Demonstratio.

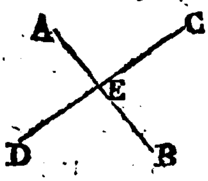
Anguli $\left.\begin{matrix}AEC\\AED\end{matrix}\right\}$ (*per prop. 13.*) = sunt duobus rectis.

Anguli $\left.\begin{matrix}AED\\DEB\end{matrix}\right\}$ (*per prop. 13.*) = sunt duobus rectis: ergo

Anguli $\left.\begin{matrix}AEC\\AED\end{matrix}\right\}$ (*per axio. 1.* = *Ang.* $\left.\begin{matrix}AED\\DEB\end{matrix}\right\}$

Dem-

Dempto communi angulo AED remanebit angulus AEC $=$ angulo BED. q. e. d.



Corollarium primum.

EX hac prop. manifestè colligitur quatuor angnlos ad punctū E cōstitutos adæquare summam quatuor rectorum; quia tam duo ang. $\begin{matrix}AEC\\AED\end{matrix}$ quam duo ang. $\begin{matrix}DEB\\BEC\end{matrix}$ (*per prop.* 13.) sunt duobus rectis æquales.

Corollarium Secundum.

OMnes anguli in uno plano circa idem punctum constituti, sunt quatuor rectis angulis æquales, cum omnes dicti anguli sint partes quatuor rectorum, juxta generalem regulam, videlicet quodcumque spatium in aliquo plano circa unum punctum quatuor rectis angulis æquivalere.

Corollarium Tertium.

SI duo anguli æquales AED, CEB ad verticem uniantur in puncto E, taliter ut unius anguli latus, nempe DE, sit in rectum cum EC latere alterius anguli

Dico etiam alia latera AE, EB esse in directum posita.

Cum enim per suppositionem ang. AED $=$ sit ang. CEB, addito communi ang. AEC; erunt

ang. $\left.\begin{matrix}AED\\AEC\end{matrix}\right\} =$ ang. $\left.\begin{matrix}CEB\\AEC\end{matrix}\right\}$: sed (*per prop.* 13.)

ang. $\left.\begin{matrix}AED\\AEC\end{matrix}\right\} =$ sunt duobus rectis: ergo etiam

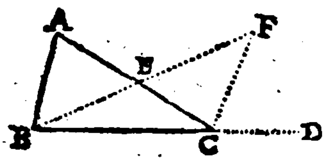
ang. $\left.\begin{matrix}CEB\\AEC\end{matrix}\right\} =$ erunt duobus rectis: quare (*per prop.* 14.) rectæ lineæ AE, EB erunt in rectum constitutæ.

Propos. XVI. Theor. IX.

Si trianguli ABC unum latus, ut BC, producatur in D.

Dico angulum externum ACD majorem esse utrolibet angulo interno, & opposito ABC, BAC.

Constructio primæ partis.



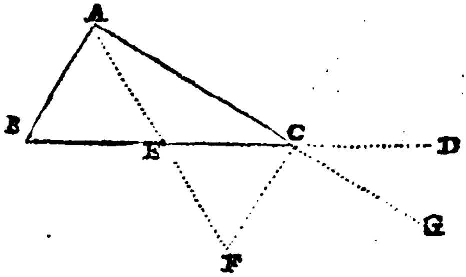
Recta AC (*per prop.* 10.) bifariam dividatur in E.

Ducatur recta *B*E, ex qua indefinitè producta (*per prop.* 3.) auferatur EF = *B*E: jungatur FC.

Demonstratio.

In triangulis AE*B*; CEF (*per constructionem*) sunt duo latera AE, E*B* singula singulis = lateribus CE, EF: pariter in dictis triangulis (*per prop.* 15.) angulus *AEB* = ang. CEF: ergo (*per prop.* 4.) ang. *EAB* = ang. *E*C*F*: sed externus ang. *A*CD (*per axio.* 9.) major est angulo *ACF*: ergo (*per axio.* 1.) idem angulus externus *A*CD major erit angulo interno, & opposito C*AB*. q. e. 1. d.

Constructio secundæ partis.



Latus *B*C (*per prop.* 10.) bifariam dividatur in E; ducatur A E, ex qua producta (*per prop.* 3.] auferatur E F = AE. Signetur FC: atque AC producatur in G.

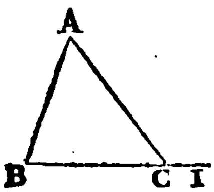
De-

Demonstratio.

PEr constructionem BE = EC atque AE = EF; quare in triang. AEB, FCE erunt duo latera AE, EB singula singulis æqualia lateribus FE, EC, angulique AEB, FEC ab æqualibus lateribus comprehensi æquales (*per prop.* 15.): ergo (*per prop.* 4.) angulus ABC = ang. FCB: sed ang. GCB [*per axio.* 9.] major est angulo FCB: ergo idem angulus GCB erit etiam major angulo ABC: quia vero [*per prop.* 15.] angulus GCB = est ang. ACD, etiam angulus ACD [*per axio.* 1.] major erit angulo interno, & opposito ABC. q. e. d.

Propos. XVII. Theor. X.

In triangulo ABC.
Dico duos angulos omnifariam sumptos existere duobus rectis minores.



Constructio.

Producatur latus BC in I.

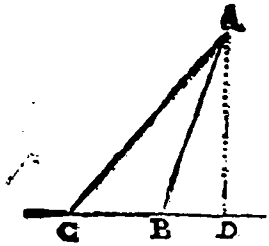
Demonstratio.

Angulus externus ACI [*per prop.* 16.] major est interno, & opposito angulo BAC; addito communi angulo ACB [*per axio.* 4.] erunt ang. $\left.\begin{matrix}ACI\\ACB\end{matrix}\right\}$ majores angulis $\left.\begin{matrix}BAC\\ACB\end{matrix}\right\}$ sed anguli $\left.\begin{matrix}ACI\\ACB\end{matrix}\right\}$ [*per prop.* 13.] sunt æquales duobus rectis: ergo duo anguli $\left.\begin{matrix}BAC\\ACB\end{matrix}\right\}$ duobus rectis minores erunt. q. e. d.

Corollarium primum.

EX hac propositione constat in rectangulis, atque obtusangulis triangulis duos angulos esse acutos.

Corollarium secundum.



PAriter ex hac propos. sequitur quod dum recta *AB* cadens supra rectam CD angulos facit inæquales, unum scilicet obtusum ut ABC, alterum vero acutum, ut *ABD*, perpendicularis ducta a puncto A supra CD, uti est AD, cadit ad partes anguli acuti: nam si caderet ad partes anguli obtusi ut *AC*: in hoc casu in triangulo *ABC* duo angli *ABC*, *ACB* duobus rectis majores forent, quia ang. *ABC* est obtusus, *ACB* esset rectus.

Corollarium tertium.

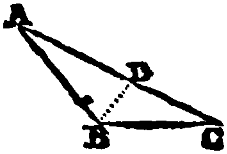
IN triangulo æquilatero omnes anguli sunt acuti: sunt enim omnes æquales [*per corollar. prop.* 5.] quare si unus esset rectus, vel obtusus, etiam alii forent recti, vel obtusi.

Corollarium quartum.

IN triangulo isoscele anguli ad basim sunt semper acuti; nam si essent recti, vel obtusi, in triangulo darentur duo anguli non minores duobus rectis, quod est contra supra positam propositianem.

Propos. XVIII. Theor. XI.

In dato triangulo ABC
Dico quod sub majore latere AC stat major angulus ABC, & sub minore latere AB stat minor angulus ACB.



Constructio.

EX latere *AC*, quod supponitur majus latere *AB* (*per prop.* 3.] auferatur *AD* = *AB*. notetur BD. De-

Demonstratio.

Per constructionem AD = AB: quare BAD erit triangulum isosceles; unde [*per propos.*5.] ang. ABD = ADB; sed angulus ADB [*per prop.*16.] est major angulo C: ergo (*per axio.*1.) & angulus ABD major erit angulo C: atqui angulus ABC (*per axio.*9.) major angulo ABD: ergo (*per axio.*21.) ang. ABC multo major ang. C: igitur sub majore latere AC stat major ang. ABC, & sub minore latere AB stat minor angulus ACB. q. e. d.

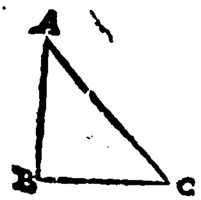
Corollarium.

EX hac prop. colligitur in triangulo Scaleno, omnes angulos esse inæquales, quia trianguli scaleni latera sunt inæqualia.

Propos. XIX. Theor. XII.

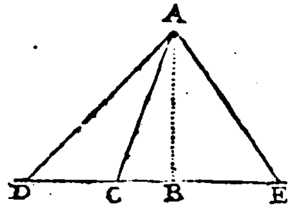
In triangulo ABC
Dico quod sub majore angulo B reperitur majus latus AC, & sub minore ang. C stat minus latus AB.

Demonstratio.



SI dicamus latus AC = AB [*per prop.* 5.] sequitur ang. B = ang. C contra suppositum.

Si dicamus latus AC minus AB [*per prop.* 18.] asserendum est angulum C majorem ang. B. contra suppositum, cum supponatur ang. B major ang. C: cum igitur latus AC nequeat esse minus, nec æquale lateri AB [*per axio.* 23.] erit majus. q. e. d.

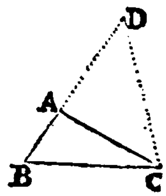


Corollarium.

SI a puncto A ad rectam DE ductæ sint, & perpendicularis AB, & inclinatæ AD, AC, AE. Dico perpendicularem AB existere omnium minimam, quia sola perpendicularis *AB* [*per def.* 10.] angulos rectos efformat cum DE. Si ergo in triangulo *ABC* (idem intelligendum de reliquis) angulus *ABC* est rectus, & angulus *ACB* acutus, seu recto minor: ex hac propositione sequitur latus *AB* minus esse latere *AC*: quare AB omnium minima.

Propos. XX. Theor. XIII.

In triangulo BAC.
Dico duo latera quomodocumque accepta, uti sunt BA; AC, majora esse tertio latere BC.



VEritas hujus propositionis in triangulo æqualium laterum est satis manifesta, cum ex tribus lateribus æqualibus duo tertium excedant.

Pariter in triangulo isoscele apertè constat unum æqualium cum base alterum æqualium superare.

Quamobrem tota dubietas reducitur ad duo latera æqualia in triangulo isoscele, an sint base majora, & an in triangulo scaleno duo minora latera *BA*, *AC* superent maximum latus BC.

Constructio.

PRoducatur BA versus D, fiatque (*per prop.* 3.) *AD* = *AC*: ducaturque DC.

Demonstratio.

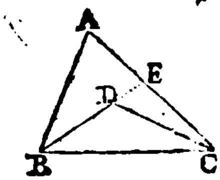
Triangulum DAC (*per constructionem*) est isosceles: quare (*per prop.* 5.) ang. ADC = ang. ACD: sed ang. BCD (*per axio.*

axio. 9.) major ang. ACD: ergo. BCD (*per axio. 1.*) major ang. ADC. Cum igitur in triangulo BDC ang. BCD ſit major ang. CDB (*per prop. 19.*) latus BD erit majus latere BC: ſed latus BD (*per axio. 2.*) adæquat duo latera BA, AC: ergo latera BA, AC majora erunt latere BC. q. e. d.

Propoſ. XXI. Theor. XIV.

In triangulo BAC ſi a terminis lateris BC intra triangulum ad punctum D ductæ fuerint duæ rectæ lineæ BD, CD.

Dico has lineas minores eſſe reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC, angulum vero BDC majorem eſſe ang. BAC.



Conſtructio.

PRoducatur BD, uſque ad AC in E.

Demonſtratio.

In Triangulo BAE (*por prop. 20.*) latera $\left.\begin{matrix}BA\\AE\end{matrix}\right\}$ maiora ſunt BE, quare addito communi latere EC

erunt latera $\left.\begin{matrix}BA\\AE\\EC\end{matrix}\right)$ hoc eſt $\left.\begin{matrix}BA\\AC\end{matrix}\right\}$ majora $\left.\begin{matrix}BE\\EC\end{matrix}\right\}$

Pariter in triang. CED (*per prop. 20.*) latera $\left.\begin{matrix}CE\\ED\end{matrix}\right\}$ majora ſunt latere CD quare addito communi latere DB;

erunt latera $\left.\begin{matrix}CE\\ED\\DB\end{matrix}\right)$ hoc eſt $\left.\begin{matrix}BE\\EC\end{matrix}\right\}$ majora $\left.\begin{matrix}CD\\DB\end{matrix}\right\}$ ergo (*per axio. 11.*)

latera $\left.\begin{matrix}BA\\AC\end{matrix}\right\}$ majora lateribus $\left.\begin{matrix}CD\\DB\end{matrix}\right\}$ q. e. p. d.

Quod

Quod postea angulus BDC, sit major ang. BAC ita demonstratur.

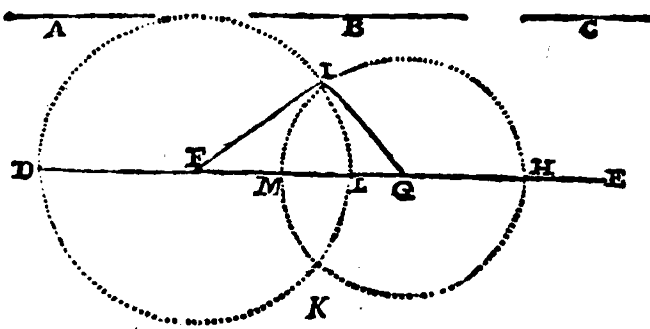
Angulus BDC (*per prop.* 16.) major ang. DEC.

Angulus DEC (*per eamdem* 16.) major ang. EAB: ergo (*per axio.* 21.) angulus BDC major ang. BAC. q. e. 2. d.

Propos. XXII. *Probl.* VIII.

Ex tribus datis rectis lineis A, B, C, quarum duæ omnifariam sumptæ reliqua sint majores, triangulum componere.

Constructio.



A recta DE indefinitè producta (*per prop.* 3.) abscindantur DF = A: FG = B: GH = C.

Centro F intervallo FD (*per post.* 3.) notetur circulus DIK: pariter centro G intervallo GH describatur alius circulus HIK, qui priorem circulum DIK secabit in punctis I, & K, ut patet ex sequenti demonstratione.

Per constructionem facta est DF = A: FG = B: GH = C: duæ autem rectæ A, & C supponuntur majores quam B: quare DF, & GH majores erunt quam FG: quo stante si ex FG ablata fuerit FL = FD, residuum GH majus erit residuo LG: quia verò (*per def. circuli*) est GH = GM; inde sequitur GM majorem esse quam GL: quare punctum M spectans ad circulum IHK erit intra circulum DIK; punctum vero H spectans ad circulum IHK, quia à centro F magis distat, quam FL; erit extra

cir-

circulum DIK: quare dicti circuli se se intersecabunt in punctis I, & K.

Posita demonstratione quod duo circuli, ut supra descripti se intersecent in punctis I, & K a duobus centris F, & G ad punctum intersecationis I rectæ ducantur FI, GI.

Dico triangulum FIG esse efformatum a tribus datis lineis A, *B*, C.

Demonstratio.

Per constructionem A == DF: (*per def. circuli*) DF == FI: ergo (*per axio. 1.*) A == FI.

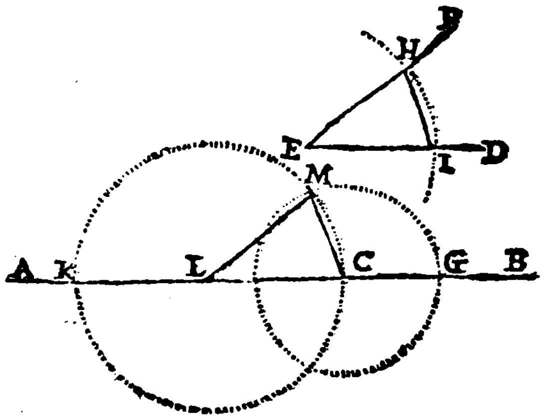
Pariter per constructiouem C == GH: (*per def. circuli*) GH == GI: ergo (*per axio. 1.*) C == GI.

Cum autem & FG facta sit æqualis ipsi *B*; triangulum FIG erit ex tribus datis rectis lineis A, *B*, C efformatum. q. e. f.

Propos. XXIII. Probl. IX.

Ad rectam AB, atque ad punctum in ea datum L efformare angulum rectilineum æqualem dato angulo rectilineo DEF.

Constructio.



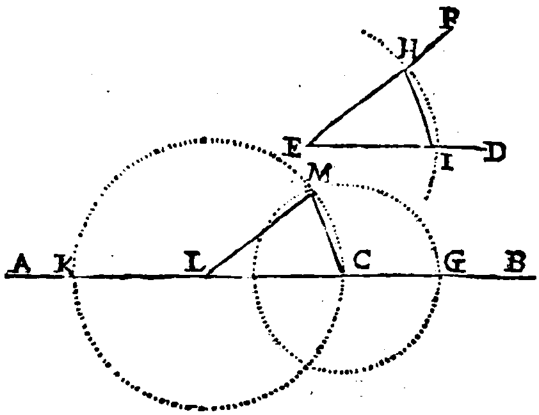
Centro E quocumque intervallo notetur circulus HI, atque recta HI. Ex LA (*per pro. 3.*) abscindatur LK == EH; pariterque ex LB auferatur LC == EI: demumque ponatur CG == IH.

Centro L intervallo LK describatur

tur circulus CMK, item centro C intervallo CG ſignetur circulus GM, qui priorem circulum (*per prop.* 22.) ſecabit in M. ductis rectis LM, CM.

Dico angulum CLM ad datam rectam AB, & datum punctum L conſtitutum, æqualem eſſe dato angulo DEF.

Demonſtratio.



Per conſtructionem EH = LK: ſed (*per def. circuli.*) LK = LM: unde (*per axio.* 1.) LM = EH.

Pariter (*per conſtructionem*) LC = EI, atque CG = IH: ſed (*per def. circuli.*) CG = CM: igitur CM = IH.

Quibus poſitis in triangulo IEH erunt duo latera IE, EH ſingula ſingulis æqualia lateribus CL, LM; baſiſque IH = baſi CM: quare (*per prop.* 8. *hujus*) ang. IEH = ang. CLM. q. e f.

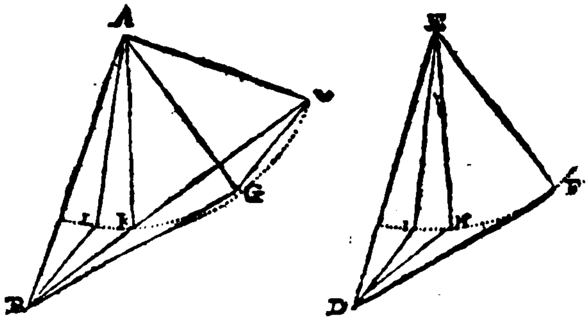
Propoſ. XXIV. Theor. XV.

Si duo triangula BAC; DEF habeant duo latera BA, AC ſingula ſingulis æqualia lateribus DE, EF; angulus vero BAC major ſit angulo DEF.

Dico baſim BC majorem eſſe baſi DF.

Con-

Constructio.



Cum angulus *BAC* supponatur major angulo DEF, si ad punctum A & ad rectam A*B* (*per prop.* 23.) constituatur angulus *BAG* ═ ang. DEF; linea AG debet cadere intra lineas *AB*, *AC*. Hac linea A G producta donec sit æqualis rectæ EF, vel AC, terminus G potest esse infra basim *BC*, in ipsa basi *BC*, atque supra eamdem basim *BC*, & hoc propter datorum triangulorum diversitatem.

Primo. Data triangula cum supra notatis conditionibus sint ABC, DEF in hoc casu punctum G cadit infra basim BC.

Secundo. Si data triangula fuerint BAC, DEH, punctum K quod æquivalet ipsi G erit in basi BC.

Tertio. Si proposita triangula sint BAC, DEI, in hoc casu punctum L, quod æquivalet puncto G, erit supra basim BC.

Quando punctum G, ut in primo casu, cadit infra basim BC ducantur duæ rectæ GB, GC.

Quando verò cadit supra basim in L, ut in tertio casu, noteṫur recta BL.

Demonstratio primæ partis.

In triangulis BAG, DEF [*per constructionem*, & *suppositionem*] latera BA, AG singula singulis æqualia sunt lateribus DE, EF, & angulus BAG ═ DEF: quare (*per prop.* 4.) basis BG ═ basi DF. Triangulum GAC (*per constructionem*) habet duo latera æqualia AC, AG: ergo [*per prop.* 5.) angulus AGC ═ ACG: sed angulus ACG [*per axio.* 9.] major angulo GCB: quare (*per axio.* 1. & angulus AGC major angulo GCB: Pariter cum angulus BGC (*per axio.* 9.] major sit angulo

AGC,

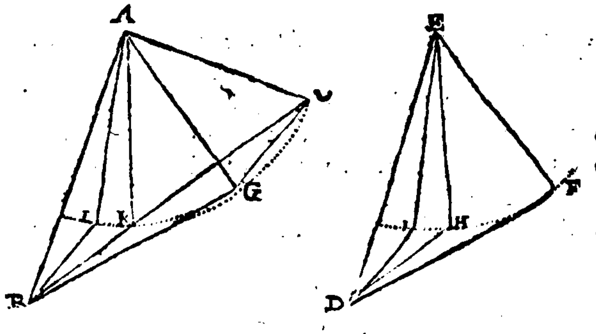
AGC; inde sequitur (*per axio.* 21.) angulum BGC, majorem esse angulo GCB: Quo stante in triangulo BGC (*per prop.* 19.) latus BC majus erit latere BG; sed BG superius demonstrata est æqualis ipsi DF: ergo BC major DF. q. e. p. d.

Demonstratio secundæ partis.

IN triangulis BAK, DEH (*per suppositionem, & per constructionem*) sunt duo latera BA, AK singula singulis lateribus DE, EH æqualia, atque angulus BAK = ang. DEH: quare (*per prop.* 4.) BK = DH; at BC (*per axio.* 9.) major BK: ergo & BC major DH. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

IN triangulis BAL, DEI (*per suppositum, & per constructionem*) latera BA, AL sunt singula singulis æqualia lateribus DE, EI, nec non etiam angulus BAL = ang. DEI: ergo (*per prop.* 4.) basis BL = basi DI. Quia vero (*per prop.* 21.) BC major est quam BL: erit, & basis BC major base DI: quo stante in omni casu erit verum asserere in illis Triangulis, in quibus sunt duo latera singula singulis æqualia, & angulus ab æqualibus lateribus comprehensus angulo major; sub majore angulo existere majorem basim, & sub minore angulo esse minorem basim. q. e. d.

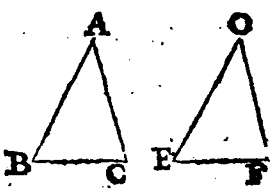


Propos.

Propos. XXV. Theor. XVI.

Si duo triangula ABC, OEF habeant duo latera BA, AC singula singulis æqualia duobus lateribus EO, OF, basisque BC major sit base EF.

Dico angulum A oppositum majori basi BC, majorem esse angulo O sub minore base EF constituto.



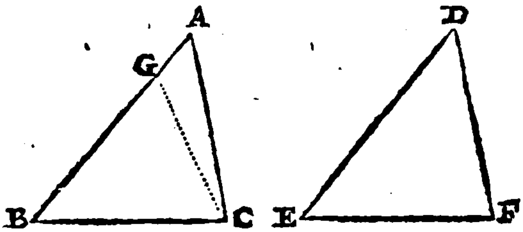
Angulus A nequit adæquare angulum O, quia (*per prop.* 4.) basis BC adæquaret EF contra suppositum. Pariter idem angulus A non potest esse minor angulo O: quia (*per prop.* 24.) basis BC minor foret base EF; quod pariter est contra suppositum: ergo angulus A major erit angulo O. q. e. d.

Propos. XXVI. Theor. XVII.

Si duo triangula ABC, DEF duos angulos ABC, ACB duobus angulis DEF, DFE singulos singulis æquales habuerint, unumque latus uni lateri æquale; siuè quod æqualibus angulis adjacet, siuè quod uni æqualium angulorum subtenditur.

Dico reliqua latera quæ æqualibus angulis subtenduntur, reliquis lateribus singula singulis esse æqualia, reliquumque angulum A reliquo angulo D æqualem.

Constru-

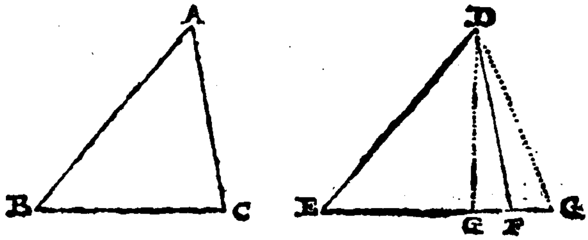


Constructio, & demonstratio illius partis, in qua latera æqualia supponuntur illa, quæ æqualibus adiacent angulis, uti sunt BC, & EF.

SI latus *BA* non est æquale lateri ED, sit majus, si hoc fieri potest. Posito igitur quod *BA* sit majus ED (*per prop.* 3.) ex *BA* auferatur *BG* æquale ipsi ED: hoc stante duo triangula *B*GC, EDF habebunt duo latera G*B*, *B*C singula singulis æqualia duobus lateribus DE, EF, atque angulum *B* (*per suppositionem*) angulo E æqualem: quare (*per prop.* 4.) angulus *B*CG erit æqualis angulo EFD: sed eidem ang. EFD (*ex hypotesi*) est æqualis angulus *B*CA: ergo (*per axio.* 1.) angulus *B*CG = ang. *B*CA: quod est impossibile cum unus sit pars alterius. Idem demonstrabitur si dicatur *BA* minus, quam ED, quare *B*A = ED, & CA = FD.

Demonstrata laterum æqualitate, facile erit ostendere æqualitatem inter reliquos angulos A, & D, quia duo triangula *B*AC, EDF habebunt latera *B*A, AC singula singulis æqualia lateribus ED, DF, & basim *B*C (*per suppositum*) æqualem basi EF: quare (*per prop.* 8.) angulus A = ang. D. q. e. d.

Con-



Constructio, & demonstratio alterius partis, in qua latera, quæ supponuntur æqualia, subtenduntur angulis æqualibus, uti sunt BA, & ED.

IN triangulis BAC, EDF, eisdem manentibus quoad angulorum æqualitatem, si latera BA, ED æqualibus angulis C, & F subtensa supponantur æqualia, etiam in hoc casu.

Dico latera BC, CA fore æqualia singula singulis lateribus EF, FD.

Demonstratio.

SI latus EF potest esse majus latere BC, ex majore latere EF (*per prop.* 3.) auferatur EG ipsi BC æquale: hoc facto ducatur DG. In duobus triangulis ABC, DEG (*per suppositionem, & per constructionem*) duo latera AB, BC erunt singula singulis æqualia lateribus DE, EG, & angulus B = ang. E, quare (*per prop.* 4.) angulus BCA = ang. EGD: sed angulo BCA supponitur æqualis angulus EFD: ergo (*per axio.* 1.] angulus EGD = ang. EFD, quod cum sit contra prop. 16. non erit EF majus BC. Eodem modo demonstrabitur quod BC nequeat esse majus EF: ergo erit æquale. q. e. d.

Corollarium.

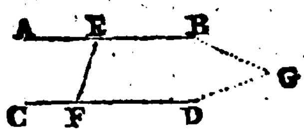
SEquitur ex hac prop. posita triangula BAC, EDF esse æqualia, cum habeant latera BA, AC singula singulis æqualia lateribus ED, DF, angulumque A = ang. D, uti demonstratum fuit in secunda parte propositionis quartæ.

Propos. XXVII. Theor. XVIII.

Si recta EF incidat in rectas AB, CD in eodem plano existentes, faciatque angulos alternos AEF, DFE æquales.

Dico rectas AB, CD esse parallelas.

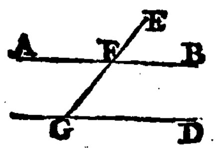
Constructio, & demonstratio.



SI rectæ AB, CD, non sunt parallelæ (*per axio.* 24.) debent concurrere: concurrant igitur in G, constituantque triangulum EGF, in quo (*per suppositum*) angulus externus FEA æqualis erit interno, & opposito EFG: quod esse non potest (*per prop.*16.): ergo duæ rectæ *AB*, CD erunt parallelæ. q. e. d.

Propos. XXVIII. Theor. XIX.

Si recta EG incidat in rectas AB, GD in eodem plano existentes, faciatque angulum externum EFB æqualem interno, & opposito ad easdem partes FGD, vel duos internos, & ad easdem partes BFG, FGD duobus rectis æquales.



Dico AB, GD esse parallelas.

Demonstratio primæ partis.

ANgulus externus EFB (*per hypothesim*) = ang. FGD. Angulus EFB (*per prop.*15.) = ang. GFA: ergo (*per axio.*1.) angu-

angulus AFG = ang. FGD; qui cum sint alterni (*per prop. 27.*) AB, & GD erunt parallelæ. q. est 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

Per suppositionem duo anguli BFG, FGD = duobus rectis. Sed (*per prop. 13.*) etiam duo anguli BFG, AFG = sunt duobus rectis.

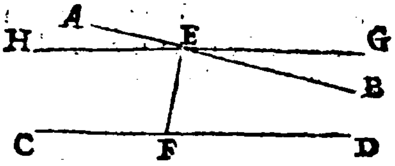
Ablato communi angulo BFG (*per axio. 3.*) erit angulus FGD = ang. AFG: cum autem isti anguli sint alterni (*per prop. 27.*) rectæ AB, GD erunt parallelæ. q. e. 2. d.

SCHOLIUM.

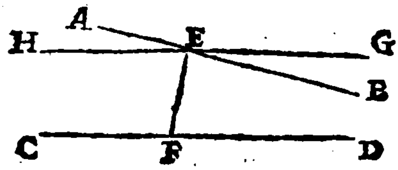
Axioma superius sub numero 13. propositum, & ab Euclide numero 11. indicatum primitus assumitur ad sequentem propos. demonstrandam. Quia vero id Mathematici, & jure merito, a numero axiomatum excludunt, cum ejus veritas non sit satis per se nota: hac unica de causa necessarium duxi talis axiomatis demonstrationem hic apponere, ut ea, quæ a tali principio dependent, scientificè colligantur.

Axio. XIII.

Si in duas rectas lineas AB, CD in eodem plano existentes incidat recta EF, quæ faciat duos internos, & ad easdem partes angulos BEF, EFD duobus rectis angulis minores.



Dico rectas AB, CD productas tandem debere concurrere ad partes B, & D, ubi sunt anguli duobus rectis minores.



Constructio.

AD punctum E, & ad lineam EF (*per prop.* 23.) constituatur angulus FEG = ang. EFC.

Demonstratio.

ANgulus FEG (*per constructionem*) est = angulo EFC quare addito communi angulo EFD.

erunt (*per axio.* 2.) anguli $\left.\begin{array}{c}\text{EFC}\\\text{EFD}\end{array}\right\}$ = ang. $\left.\begin{array}{c}\text{FEG}\\\text{EFD}\end{array}\right\}$

sed (*per prop.* 13.) anguli $\left.\begin{array}{c}\text{EFC}\\\text{EFD}\end{array}\right\}$ = duobus rectis: ergo

& anguli $\left.\begin{array}{c}\text{FEG}\\\text{EFD}\end{array}\right\}$ = duobus rectis:

quare (*per prop.* 28.) duæ rectæ FD, EG erunt parallelæ. Rursus quia (*per hypothesim*) anguli $\left.\begin{array}{c}\text{EFD}\\\text{FEB}\end{array}\right\}$ minores sunt duobus rectis, sequitur angulos $\begin{array}{c}\text{FEG}\\\text{EFD}\end{array}$ majores esse ang. $\begin{array}{c}\text{EFD}\\\text{FEB}\end{array}$ ablato communi angulo *EFD* (*per axio.* 5.) erit angulus *FEG* major angulo FEB: quare recta *EB* intra *EG*, & FD cadet, secabitque rectam EG: quia vero *EG* demonstrata est parallela ipsi CD: sequitur (*per axio.* 13.) quod EB debeat etiam secare alteram parallelarum CD: sed recta nequit rectam secare nisi cum illa concurrat: ergo EB producta concurret cum CD. q. e. d.

Pro-

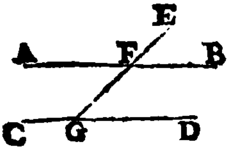
Propos. XXIX. Theor. 20.

Si recta EFG incidat in parallelas AB, CD.

Dico primo. Angulos alternos AFG, FGD æquales efficere.

Dico secundo. Angulum externum EFB interno, & opposito, & ad easdem partes FGD æqualem esse.

Dico tertio. Internos, & ad easdem partes angulos BFG, FGD existere duobus rectis æquales.



Demonstratio primæ partis.

SI dicatur ex alternis angulis AFG, FGD minorem esse angulum FGD, addito communi angulo GFB

erunt duo ang. $\left.\begin{matrix}FGD\\GFB\end{matrix}\right\}$ minores duobus ang. $\left\}\begin{matrix}AFG\\GFB\end{matrix}\right.$

sed (*per prop.* 13.) ang. $\left.\begin{matrix}AFG\\GFB\end{matrix}\right\}$ = sunt duobus rectis: ergo

anguli $\left.\begin{matrix}FGD\\GFB\end{matrix}\right\}$ erunt duobus rectis minores:

quare (*per axio* 13.) rectæ AB, CD, necessario debent concurrere ad partes BD, contra suppositum, nam AB, CD suppositæ sunt parrallelæ. q. e. i. d.

Demonstratio secundæ partis.

EXternus angulus EFB (*per prop.* 15.) = ang. AFG; sed angulus AFG (*per primam partem*) = ang. al terno FGD: ergo

angu-

Angulus externus EFB [*per axio.* 1.] = interno, & opposito FGD. q.e.2.d.

Demonstratio tertiæ partis.

ANgulus AFG (*per primam partem*) = alterno FGD; quare addito communi angulo GFB,

erunt anguli $\left.\begin{matrix}AFG\\GFB\end{matrix}\right)$ = ang. $\left.\begin{matrix}FGD\\GFB\end{matrix}\right)$ sed (*per prop.* 13.)

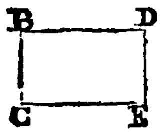
anguli $\left.\begin{matrix}AFG\\GFB\end{matrix}\right)$ = duobus rectis: quare, &

anguli $\left.\begin{matrix}FGD\\GFB\end{matrix}\right)$ duobus rectis æquales erunt. q. e. 3. d.

Corollarium primum.

Si in Parallelogrammo BE unus angulus sit rectus, ut ang. B,

Dico omnes angulos esse rectos.



CUm recta BC (*per hypotesim*) cadat in parallelas BD, CE, duo ang. B, & C [*per hanc prop.*) erunt æquales duobus rectis: sed ang. B supponitur rectus: ergo & ang. C rectus erit: eodem modo demonstrabitur cæteros angulos D, & E esse rectos. q. e. d.

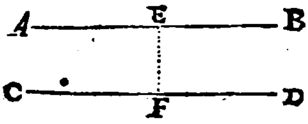
Corollarium secundum.

Si recta EF uni parallelarum, nempe AB fuerit perpendicularis,

Dico etiam alteri parallelarum CD perpendicularem esse.

CUm [*per hyp.*] EF sit ipsi AB perpendicularis, (*per def.* 10.) Angulus FEB rectus erit: sed (*per* 3. *partem hujus prop.*

duo



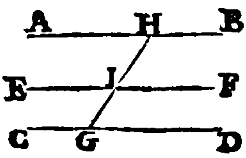
duo ang. $\left.\begin{matrix}FEB\\EFD\end{matrix}\right) =$ ſunt duobus re-ctis: ergo ang. EFD erit rectus; quare (*per def.* 10.) recta EF ipſi CD perpendicularis erit. q. e. d.

Propoſ. XXX. Theor. XXI.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes cum recta EF, ſint eidem EF parallelæ.

Dico AB, & CD eſſe inter ſe parallelas.

Conſtructio.



Ducatur recta HG, quæ incidat in rectas AB, CD: cum autem ſupponatur, etiam EF eſſe in eodem plano cum rectis AB, CD; eadem recta HG incidet in EF in I.

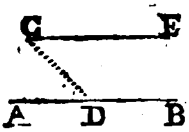
Demonſtratio.

Duæ rectæ AB, EF (*per hyp.*) ſunt parallelæ: ergo (*per prop.* 29.) angulus AHI = ang. alterno HIF. Pariter (*per ſuppoſ.*) parallelæ ſunt EF, CD quare (*per eandem* 29.) externus ang. HIF = interno, & oppoſito IGD: quare (*per axio.* 1.) ang. AHI = ang. IGD: cum autem iſti anguli ſint alterni (*per prop.* 27.) rectæ AB, CD erunt parallelæ. q. e. d.

Propos. XXXI. Probl. X.

Datæ rectæ AB, a dato puncto C parallelam lineam ducere.

Constructio.



A Dato puncto C utcumque ducatur recta CD, quæ cum data AB angulos faciat CDB, CDA. Ad punctum datum C (*per prop.* 23.) constituatur angulus DCE = ang. CDA. Dico rectam CE parallelam AB.

Demonstratio.

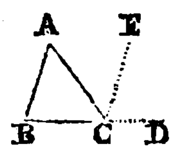
Anguli CDA, DCE [*per constructionem*] facti sunt æquales: sed sunt anguli alterni: ergo (*per prop.* 27.) rectæ CE, AB erunt parallelæ. q. e. f.

Propos. XXXII. Theor. XXII.

In triangulo ABC producto latere BC in D,

Dico primo. Angulum externum ACD æqualem esse duobus angulis internis, & oppositis, A, & B.

Dico Secundo. Trianguli ABC, tres internos angulos A, B, & C æquales esse duobus rectis.



Constructio.

A puncto C ipsi BA (*per prop.* 31.) parallela ducatur CE.

De-

Demonstratio primæ partis.

ANguli $\left.\begin{matrix}ACE\\ ECD\end{matrix}\right)$ (*per axio.19.*) = augulo externo ACD.

Angulus ACE (*per prop.29.*) = alterno *BAC*.
Angulus ECD (*per prop. 29.*) = interno, & opposito A B C: quare
Angulus externus ACD = duobus internis, & oppositis A, & B, q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

ANgulus externus ACD (*ex demonst. in prima parte.*) = angulis A, & B,

addito communi ang. ACB, erunt ang. $\left.\begin{matrix}ACD\\ ACB\end{matrix}\right)$ = ang. $\left.\begin{matrix}A\\ B\\ ACB\end{matrix}\right\}$ sed

Anguli $\left.\begin{matrix}ACD\\ ACB\end{matrix}\right\}$ (*per prop. 13.*) = duobus rectis: ergo etiam

Anguli $\left.\begin{matrix}A\\ B\\ ACB\end{matrix}\right\}$ = erunt duobus rectis. q. e. 2. d.

Corollarium primum.

EX hac propos. fit manifestum, tres angulos cuiuscumque trianguli. esse æquales tribus angulis alterius cujusuis trianguli, cum in omni triang. tres anguli sint duobus rectis æquales.

Corollarium secundum.

SI unius trianguli duo anguli æquales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam tertius angulus in uno triangulo, erit æqualis tertio angulo in alio triangulo.

Corollarium tertium.

IN triangulo isoscele rectangulo anguli ad basim sunt semirecti, quia sunt æquales, inter se, & ambo æquivalent uni

recto

recto. In triangulo isoscele obtusangulo, ad basim anguli, semirecto sunt minores, & in isoscele acutangulo sunt majores semirecto.

Corollarium quartum.

IN triangulo æquilatero quilibet angulus adæquat duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum, quia duobus angulis rectis in tres partes æquales divisis, quælibet tertia pars duas tertias partes unius anguli recti continet.

Corollarium quintum.

IN triangulo, quando unus angulus duos alios adæquat, ille angulus est rectus.

Corollarium sextum.

CUm duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum summæ sunt æquales.

SCHOLIUM.

SUperius propositum Theorema, quod per totam ferè Mathesim usus propè immensos habet, testante Eudemo a Pytagora propositum fuit. Ex veritate huius Theorematis non solum dignoscimus, quot rectis æquivaleant triangulorum anguli, verum etiam cuiuslibet figuræ rectilineæ, quot scilicet rectis angulis sint æquales rectilinearum figurarum anguli, tam interni, quàm externi; uti videre licet apud Autores hanc rem pertractantes.

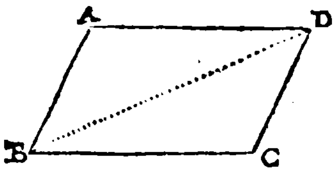
Propos. XXXIII. Theor. XXIII.

Si duæ rectæ AB, DC ad easdem partes coniungant rectas lineas AD, BC æquales, & parallelas.

Dico

Dico AB, DC, quæ coniungentes dicuntur, quoque esse æquales, & parallelas.

Constructio.



A Puncto B ad punctum D, ducatur recta BD.

Demonstratio primæ partis.

REctæ AD, BC (*per hyp.*) sunt parallelæ: quare [*per prop. 29.*] Anguli alterni ADB, DBC sunt æquales: Pariter cum AD sit æqualis BC, in duobus triangulis ADB, DBC erunt duo latera AD, DB, singula singulis æqualia lateribus CB, DB, atque ang. ADB = angulo DBC: quare [*per prop. 4.*] AB = DC. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

TRiangula ADB, DBC, (*per primam partem*) habent conditiones propos. 4: ergo (*per eamdem 4.*) ang. ABD = ang. BDC: quia vero isti anguli sunt alterni (*per prop. 27.*]: parallelæ erunt coniungentes AB, DC. q. e. 2. d.

Propos. XXXIV. Theor. XXIV.

In parallelogrammo AC

Dico primo. Latera opposita AD, BC, atque AB, DC esse æqualia.

Dico secundo. Angulos oppositos A, C, atque B, D esse æquales.

Dico tertio. Diametrum DB bifariam diuidere parallelogrammum AC.

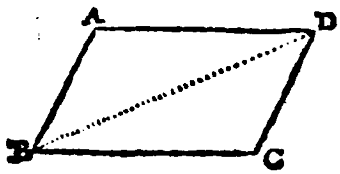
Con-

Constructio.

A Puncto B ad D, ducatur recta BD.

Demonstratio primæ partis.

QVia rectæ AB, DC (*per def.* 40.) sunt parallelæ: [*per prop.* 29.] erit ang. ABD = alterno BDC. Pariter quia [*per eandem def.* 40.] parallelæ sunt AD, BC (*per prop.* 29.) angulus ADB = angulo alterno DBC: quo stante duo triangula ADB, CDB habebunt duos angul. $\left.\begin{matrix}\text{ADB}\\ \text{ABD}\end{matrix}\right\}$ singulos singulis æquales duobus ang. $\left.\begin{matrix}\text{DBC}\\ \text{BDC}\end{matrix}\right\}$, latusque BD commune utrique triangulo: quare (*per prop.* 25.) latera opposita AD = BC, atque AB = DC. q. e. 1. d.



Demonstratio secundæ partis.

IN duobus triangulis BAD, BCD [*per prop.* 26.] ang. A = ang. C.

Pariter [*uti demonstratum est in* 1. *parte.*] cum ang. $\left.\begin{matrix}\text{ABD}\\ \text{DBC}\end{matrix}\right\}$ = sint singuli singulis angulis $\left.\begin{matrix}\text{ADB}\\ \text{BDC}\end{matrix}\right\}$: erit totus angulus ADC = toti angulo ABC: quare anguli oppositi sunt æquales. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

TRiangula DAB, BCD (*per demonstrata in prima, & secunda parte.*] habent omnia latera, & angulos singulos singulis æquales: quare (*per prop.* 4.] triangulum BAD = triang. BCD; ergo Parallelogrammum AC a diametro BD erit bifariam divisum. q. e. 3. d.

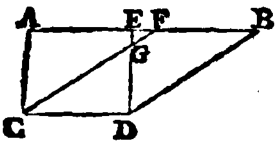
Pro-

Propos. XXXV. Theor. XXV.

Parallelogramma AD, CB super eadem basi CD, atque inter parallelas AB, CD constituta. Dico esse æqualia.

Demonstratio.

Per prop. 34. $\left.\begin{array}{l} AE = CD \\ FB = CD \end{array}\right\}$ unde (*per axio.* 1.) AE = FB; addita communi quantitate EF; erit AF = EB. Pariter



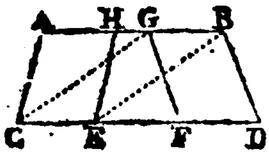
Per prop. 34. AC = ED. Rursus
Per propos. 29. ang. BED = ang. FAC; ergo
Per prop. 4. triang. FAC = trian. BED; ablata communi parte, hoc est triangulo EGF
Per axio 3. Trapezium AEGC = trapezio FGDB. addito communi triangulo GCD, erit
Per axio. 2. Parallelogrammum AD = Parallelog. CB. q. e. d.

Propos. XXXVI. Theor XXVI.

Si duo Parallelogramma EA, FB super æqualibus basibus, CE, FD, & inter easdem parallelas AB, CD fuerint constituta.

Dico parallelogrammum EA = parallelogrammo FB.

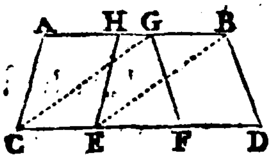
Constructio.



Ducantur duæ rectæ CG, EB.

Demonstratio.

In parallelog: DG (*per prop.* 34.) GB = FD. basis



basis FD (*per hyp.*) = basi CE: ergo GB = CE (*per axio.1.*)

Cum autem [*per hyp.*] GB sit parallela CE:

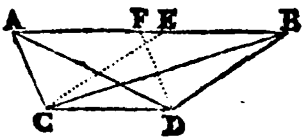
Figura quadrilatera GBEC [*per def.* 40.] erit parallelogrammum, sed [*per prop.* 34.] tam parallelog. EA, quam parallelog. DG = sunt parallelog. CB: ergo (*per axio.* 1.) parallelog. EA = parallelog. DG. q. e. d.

Propos. XXXVII. *Theor.* XXVII.

Si triangula CAD, CBD super eadem basi CD, & inter parallelas AB, CD fuerint constituta.

Dico triang. CAD = triang. CBD.

Constructio.



A Puncto C [*per. prop.* 31.] ducatur CE parallela DB: pariter a puncto D notetur DF parallela ipsi AC.

Demonstratio.

QVia CD [*per hyp.*] est parallela AB, atque DF [*per constructionem*] est parallela AC; quadrilaterum ACDF [*per def.* 40.] erit parallelog. eadem ratione parallelog. erit quadrilaterum CEBD.

Quare [*per prop.* 35.] parallelog. DA = parallelog. DE.

Quia vero triangula CAD, CBD [*per prop.* 34.] sunt medietates parallelogrammorum æqualium DA, DE (*per axio.* 7.) dicta triangula CAD, CBD erunt æqualia q. e. d.

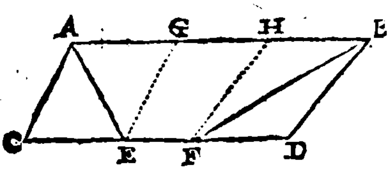
Prop.

Propos. XXXVIII. Theor. XXVIII.

Si triangula CAE, DBF super æqualibus basibus CE, FD, & inter easdem parallelas AB, CD constituta fuerint.

Dico triangulum CAE = triang. DBF.

Constructio.



A Punctis, E, & F [*per prop.* 31.] ducantur EG, FH, quarum EG sit parallela AC, & FH parallela DB.

Demonstratio.

Cum AB, CD supponantur parallelæ, erit AG parallela CE, & HB, parallela FD. Pariter EG [*per constructionem*] facta est parallela CA, & FH parallela DB: quare [*per def.* 40.) CG, DH erunt parallelogramma, quæ [*per prop.* 36.] sunt æqualia.

Sed triangula CAE, DBF [*per prop.* 34.] sunt medietates æqualium parallelogrammorum CG, DH: ergo dicta triangula [*per axio.* 7.] erunt æqualia. q. e. d.

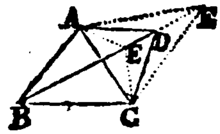
Propos. XIL. Theor. XXIX.

Si æqualia triangula BAC, BDC super eadem basi BC, atque ad easdem partes constituta fuerint.

Dico rectam per A, & D ductam, ipsi BC esse parallelam.

Con-

Constructio, & Demonstratio.



SI AD, & BC non sunt parallelæ, ex puncto A [*per prop.31.*] ducatur recta parallela BC, quæ supra, vel infra AD cadat. Primo cadat supra in E.

Quo facto producatur BD, donec concurrat cum AE in E; debent enim concurrere, quia duo ang. BAE, ABE sunt duobus rectis minores; pariter ducatur CE.

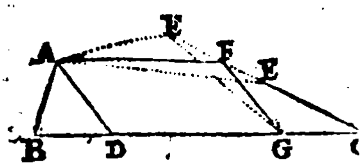
His positis [*per. prop.* 37.] triang. BAC = triang. BEC; sed
Triang. BAC (*per hyp.*] = triang. BDC: ergo
Triang. BEC [*per axio.* 1.] = triang. BDC: quod fieri nequit, cum totum sit semper sua parte majus: quare AE non est EC parallela: idem demonstrabitur si dicatur rectam per A ipsi BC ductam parallelam cadere infra AD in E, in quo casu pars adæquaret suum totum. Cum igitur ex A neque supra, neque infra AD possit duci parallela ipsi BC, sola AD erit ipsi BC, parallela. q. e. d.

Propos. XL. Theor. XXX.

Si duo triangula BAD, GFC super æqualibus basibus BD, GC ad eamdem partem sint æqualia.

Dico rectam AF ipsi BC esse parallelam.

Constructio, & Demonstratio.



SI AF non est ipsi BC parallela (*per prop.* 31.) ducatur AE parallela FC, quæ, vt in præcedente demonstratione, supra, vel infra AF cadere debet. Si cadat supra in E producatur CF usque quo concurrat cum AE in E; debet enim concurrere, quia si concipiamus lineam rectam ductam ab A ad C, clarè apparebit, duas rectas AE, CE discedere a duobus angulis minoribus duobus rectis:

quare: (*per axio.* 13.) CF debet concurrere cum AE: ducatur recta *EG*.

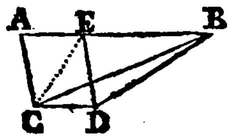
His positis [*per prop.* 38.] triang. BAD = triang. GEC: sed Triang. BAD = triang. GFC [*per hyp.*]: ergo Triang. GEC = triang. GFC (*per axio.* 1.): quod est impossibile [*per axio.* 9.] quare AE nequit esse parallela BC: hujusmodi inconueniens demonstrabitur de quacumque alia linea, excepta sola AF; ergo AF erit ipsi BC parallela: q. e. d.

Propos. XLI. Theor. XXXI.

Si parallelogrammum AD, atque triangulum CBD super eadem basi CD, & inter easdem parallelas AB, CD fuerint constituta.

Dico parallelogrammum AD esse duplum trianguli CBD.

Constructio.



A Puncto C ad E ducatur recta CE.

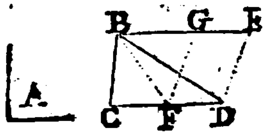
Demonstratio.

Triang. CAE (*per prop.* 34.) = triang. CED: ergo
Parallelog. DA duplum trianguli CED: sed
Triang. CED (*per prop.* 37.) = triang. CBD: quare
Parallelog. DA (*per axio.* 6.) duplum trianguli CBD: q. e. d.

Propos. XLII. Probl. XI.

Dato triangulo CBD, & angulo rectilineo A. In dato angulo A constituere parallelog. DG æquale dato triangulo *CBD*.

Constructio.



Quodvis latus dati trianguli, ut CD (*per prop.* 10.) bifariam dividatur in F.

Ad punctum F, & ad rectam FD (*per prop.* 23.) constituatur angulus DFG = ang. dato A.

A puncto B [*per prop.* 31.] ducatur BE parallela CD:
Per punctum D notetur DE parallela FG.

Dico Parallelog. DG = esse triang. CBD, & habere ang. DFG = dato angulo A.
Ducatur recta *BF*.

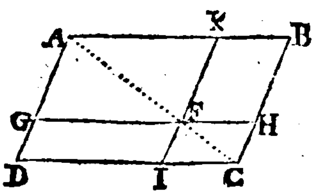
Demonstratio.

Triangulum CBF (*per prop.* 38.) = triang. *F*BD: unde Triang. CBD duplum triang. *F*BD: sed Parallelog. DG (*per prop.* 41.) est duplum trianguli *F*BD: ergo Parallelog. DG [*per axio.* 1.] = triang. C*BD*.
Pariter cum angulus *DF*G [*per constructionem*] sit = dato ang. A factum est q. e. f.

Propos. XLIII. Theor. XXXII.

In Parallelogrammo DB
Dico complementum DF = complemento FB.

Constructio.



Pro efformandis complementis, atque consistentibus circa diametrum parallelogrammi, constructio habetur in definit. 41. quæ constructio hoc in loco ex integro supponitur.

Demonstratio.

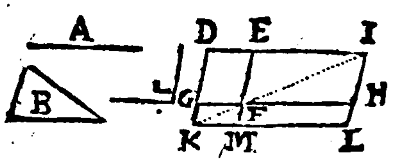
$$\left.\begin{array}{l}\text{TRiang. } ADC = \text{triang. } ABC\\ \text{Triang. } AGF = \text{triang. } AKF\\ \text{Triang. } FIC = \text{triang. } FHC\end{array}\right\}\text{[\textit{per prop.} 34.] ergo}$$

Si a triang. ADC auferantur triang. $\left.\begin{array}{l}AGF\\ FIC\end{array}\right\}$ (*per axio.* 3) & pariter si a triang. ABC auferãtur triang. $\left.\begin{array}{l}AKF\\ FHC\end{array}\right\}$ erit complementum *DF* = complemento *FB*. q. e. d.

Propos. XLIV. Probl. XII.

Triangulo B, angulo rectilineo C, & recta A datis; efformare parallelogrammum æquale triang. B in angulo rectilineo C, atque in recta A.

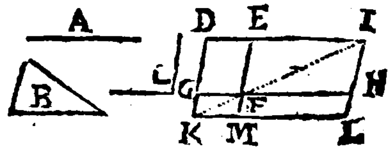
Constructio.



TRiangulo dato B (*per prop.* 42.) in angulo C constituatur æquale parallelog. GE, sitque ang. GFE = ang. dato C.

Producatur GF, fiatque [*per prop.* 3.) *FH* = A.
per H ducatur HI parallela EF, producaturque DE quousque concurrat cum HI in I.
Notetur I*F*, quæ producatur donec occurrat ipsi DG in K.
Per K notetur KL parallela GH.
Producantur IH, E*F* quousque occurrant ipsi KL in punctis M, & L.

*D*ico parallelogrammum MH æquale esse triang. B, habere angulum M*F*H æqualem ang. dato C, atque latus *F*H æquale datæ rectæ A.



Demonstratio.

PArallelogrammum MH [*per prop.43.*] = parallelog. GE; sed parallelogrammum GE (*per constuctionem*) = triangulo dato B : quare

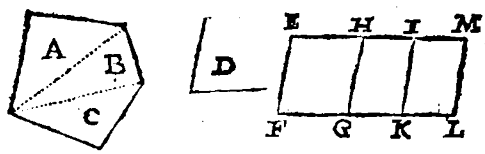
Parallelogrammum MH [*per axio.1.*) = triangulo dato B.

Ulterius in parallelogrammo MH angulus MFH = angulo dato C, quia[*per prop.15.*]est æqualis ang. GFE, qui (*per constructionem*] factus est æqualis angulo C, demumque latus FH[*per constructionem*] æquale dato lateri A : unde parallelog. MH erit æquale triangulo B, habebit angulum MFH æqualem angulo C, atque latus FH æquale lateri A. q. e. f.

Propos. XLV. Probl. XIII.

Dato rectilineo ABC, angulo rectilineo D, atque recta EF Parallelogrammum constituere æquale rectilineo dato ABC, quod habeat angulum æqualem angulo dato D, habeatque latus æquale rectæ lineæ EF.

Constructio.



DAtum rectilineum resoluatur in triangula numero minora quantum fieri potest, ducendo ab uno angulo ad reliquos toti-

totidem lineas rectas. Hæc triangula in hoc casu tria sunt, videlicet A, B, C. Hoc facto triang. A [*per propos.* 44.] in angulo D, & in latere EF efformetur æquale parallelog. FH, sitque angulus EFG = angulo D. Pariter [*per prop.* 44.] triangulo B in angulo D, & in latere EF, seu HG efformetur aliud æquale parallelogrammum GI, in quo angulus HGK sit dato angulo D æqualis. Eadem regula ad rectam IK in angulo D efformetur parallelog. KM æquale triangulo C, & angulus IKL æqualis sit dato angulo D.

Dico figuram FM esse parallelog. æquale rectilineo ABC, in quo latus EF est lateri dato æquale, atque angulus EFL æqualis dato angulo D.

Demonstratio.

Anguli EFG, HGK ambo (*per constr.*) facti sunt æquales ang. dato D: quare (*per axio.* 1.) dicti anguli erunt inter se æquales. Addito communi angulo FGH, erunt angul.

$\left.\begin{matrix}EFG\\FGH\end{matrix}\right\} = ang.\left.\begin{matrix}FGH\\HGK\end{matrix}\right\}$

At (*per prop.* 29.) duo ang. priores sunt duobus rectis æquales: ergo etiam duo posteriores duobus rectis æquales erunt:

si ergo duo ang. $\left.\begin{matrix}FGH\\HGK\end{matrix}\right\} =$ sunt duobus rectis (*per prop.* 14.)

FG, & GK erunt in rectum constitutæ: eodem modo demonstrabitur KL, in rectum esse cum FK, ideoque FL existere lineam rectam; quod pariter de linea EM intelligendum venit.

Cum autem (*per constructionem*) EH sit ipsi FG parallela, etiam EM, & FL erunt parallelæ.

Pariter cum (*per prop.* 30.) EF, ML sint parallelæ, figura FM erit parallelogrammum, in quo angulus EFG (*per constructionem*) est = ang D, latusque EF data recta.

Quia vero omnes partes parallelogrammi FM numero, & magnitudine æquant partes dati rectilinei A, B, C.

Parralielog. FM æquale erit rectilineo dato ABC. q. e. f.

Propos. XLVI. Prob. XIV.

Datæ rectæ lineæ AB quadratum describere;

Constructio.

A Duobus punctis A, & B ipsi AB, (*per prop.* 11.) ducantur duæ perpendiculares AD, BC, & [*per prop.* 3.) fiant ipsi AB æquales: ducatur DC.
Dico AC esse quadratum super data AB descriptum.

Demonstratio.

DVo ang. DAB, CBA (*per constructionem*) sunt duobus rectis æquales, quare [*per prop.* 28.) AD, BC erunt parallelæ:
Cum autem AD, BC ambæ factæ sint æquales ipsi AB erit (*per axio.* 1.) AD = BC: quare (*per prop.* 33.) coniungentes AB, DC erunt, & ipsæ æquales, & parallelæ: ideoque AC (*per def.* 40.) erit parallelogrammum, in quo recta AD (*per constructionem*) æqualis est AB: quare (*per prop.* 34.) etiam æqualia erunt reliqua latera BC, CD. Rursus cum duo anguli DAB, ABC (*per construct.*) sint recti, etiam oppositi C, & D (*per prop.* 34.) recti erunt: quamobrem figura quadrilatera AC (*per def.* 29.) erit quadratum datæ rectæ AB. q. e. f.

SCHOLIUM.

AB æqualibus rectis lineis descripta quadrata sunt æqualia, & vicissim si quadrata fuerint æqualia, etiam lineæ, à quibus describuntur, æquales erunt. Hæc veritas satis patet, quia si quadrata ab æqualibus lineis descripta, sibi superponantur, congruent: cum habeant latera, & angulos æquales, utpotè rectos; e contra, si quadrata sint æqualia debent congruere: ergo, & latera erunt congruentia; ideoque æqualia.

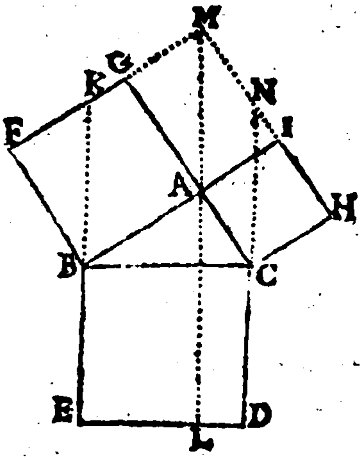
Propos.

Propos. XLVII. Theor. XXXIII.

In triangulo rectangulo BAC cum angulo recto A,

Dico quadratum lateris BC subtensi angulo recto A adæquare duo quadrata laterum AB, AC comprehendentium angulum rectum A.

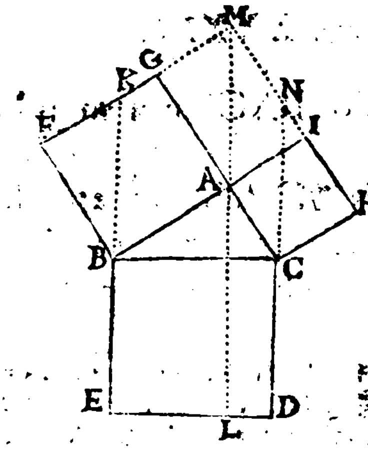
Constructio.



Lateris BC (*per prop. 46.*) describatur quadratum BD. Pariter laterum AB; AC notentur quadrata AF, AH.
A puncto A (*per prop. 31.*) ducatur AL parallela CD, vel BE, quæ versus M indefinitè producatur.
EB producatur usque ad K, & DC usque ad N.
Pariter FG producatur usque-que concurrat cum AM in M: sic etiam continvetur HI donec, & ipsa concurrat cum AM in M.

Demonstratio.

In triangulo BAC duo anguli $\left.\begin{matrix}BAC\\ABC\end{matrix}\right\}$ singuli singulis sunt equales duobus angulis $\left.\begin{matrix}BFK\\FBK\end{matrix}\right\}$ in triangulo BFK, quia anguli $\left.\begin{matrix}BAC\\BFK\end{matrix}\right\}$ (*per suppositum, & per constructionem*) sunt recti, pariter cum recti sint anguli $\left.\begin{matrix}CBK\\ABF\end{matrix}\right\}$ dempto communi ang. ABK qui restant ang. $\left.\begin{matrix}ABC\\FBK\end{matrix}\right\}$ (*per axio. 3.*) erunt æquales.



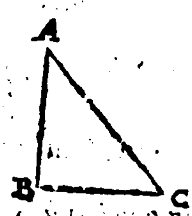
Ulterius in triang. BAC est latus BA = lateri BF (*per def. quadrati*) in triangulo BFK; quare (*per prop. 26.*) BC = BK: sed (*per def. quad.*) BC = BE: ergo (*per axio. 1.*) BK = BE.

His stantibus, quia KE (*per constructionem*) est parallela ML (*per prop. 36.*) erit Parallelogrammum BL = parallelog. BM: sed parallelog. BM (*per prop. 35.*) est = parallelog. seu quadrato AF: ergo parallelog. BL (*per axio. 1.*) erit = quadrato AF.

Eodẽ prorsus modo demõstrabitur parallelog. LC. = quadr. AH. Cum autem duo parallelogramma $\left.\begin{matrix}BL\\LC\end{matrix}\right\}$ adæquẽt quadratũ *BD* quia sunt omnes dicti quad. partes, etiam quad. *BD* æquale erit duobus quad. $\left.\begin{matrix}AF\\AH\end{matrix}\right\}$ q. e. d.

SCHOLIUM.

Hujus Theor ... ad Pytagoricum dicitur ab inventore Pytagor ... ,... uens est usus in tota Mathesi cum non tantum lo... in ... atis, verùm etiam in cæteris figuris similibus, ... monstra ... ur in prop. 30. lib. 6. Ab hoc Theoremate velut fonte ... er..., roblemata, ac corollaria deducuntur a Geometris, quorum unum tantum placet hic addere.



Corollarium.

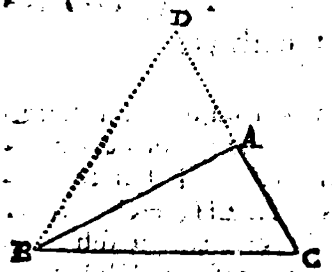
IN triangulo isoscele rectangulo ABC quadratum lateris AC duplum est quadrati lateris A*B*, vel BC: quia (*per demonstrata in hac prop.*) quad. ... AC = quad. $\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\}$ & propter æqualitatem late-

laterum $\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\}$ etiam talium laterum quad. sunt æqualia ; unde ſequitur quad. AC ſolius quad. AB eſſe duplum . q. e. d.

Propoſ. III. Theor. XXXIV.

In triangulo BAC ſi quad. lateris BC ſit = quadratis laterum BA, AC.

Dico angulum BAC eſſe rectum, & conſequenter triang. BAC rectangulum.



Conſtructio,

A Puncto A ſupra BA (*per prop.* 11.) erigatur perpendicularis AD, quæ ſit ipſi AC æqualis, ducaturque BD.

Demonſtratio.

IN triangulo rectangulo BAD (*per prop.* 47.) = quad. BD quad. $\begin{matrix}BA\\AD\end{matrix}$ ſed

Quad. AD (*per conſtructionem.*) = quad. AC: ergo

Quad. BD = q. $\left.\begin{matrix}BA\\AC\end{matrix}\right\}$ ſed (*per hypoteſim*)

Quad. BC = quad. $\left.\begin{matrix}BA\\AC\end{matrix}\right\}$: quare [*per axio.* 1.]

Quad. BD = quad. BC.

Quo ſtante in triangulo BAC erunt latera $\left.\begin{matrix}BA\\AC\end{matrix}\right\}$ ſingula ſingulis æqualia lateribus $\left.\begin{matrix}BA\\AD\end{matrix}\right\}$ in triang. BAD: pariterque baſis BC = baſi BD: unde (*per prop.* 8.) angul. BAC = angul. BAD; ſed ang. BAD [*per conſtructionem*] rectus eſt: ergo etiam ang. BAC rectus erit. q. e. d.

Elementi primi finis.

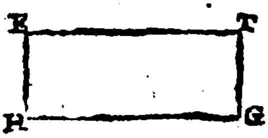
LIB.

LIBER II. EUCLIDIS ELEMENTUM SECUNDUM.

Definitio I.

Parallelogrammum rectangulum EG, dicitur contineri ſub duabus rectis lineis EH, HG rectum angulum comprehendentibus.

AD clariorem intelligentiam hujus defin. ſcire oportet, capacitatem, ſiuè aream cujuſcumque parallelogrammi rectanguli dici contentam ſub duabus rectis lineis EH, HG: vel ſub HG, GT vel GT, TE: vel denique ſub TE, EH, quæ unum angulum rectum EHG comprehendant: quælibet enim duæ lineæ ſic acceptæ oſtendunt totam magnitudinem parallelogrammi rectanguli EG: nam EH exprimit latitudinem, HG vero longitudinem. Quo ſtante duabus datis lineis æqualibus, vel inæqualibus, uti ſunt EH, HG rectum angulum EHG efformantibus, ex ſola talium linearum magnitudine intelligitur quantitas parallelogrammi rectanguli EG; cum una ex dictis lineis EH oſtendat latitudinem, altera vero HG longitudinem demonſtret. Et ſanè ſi concipiamus rectam EH perpendiculariter moueri per totam HG, tali motu producetur area parallelogrammi rectanguli EG: idem prorſus eveniet, ſi HG perpendiculariter moueatur ſuper HE: unde ſequitur hujuſmodi figuræ quantitatem haberi per ductum, ſive multiplicationem duarum rectarum angulum rectum comprehendentium, uti ſunt EH, HG.



SCHO-

SCHOLIUM.

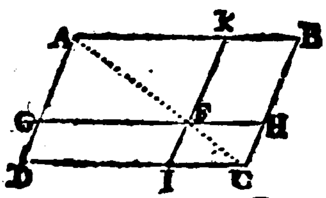
Quando rectæ lineæ parallelogrammum rectangulum comprehendentes ſunt æquales, reſultat quadratum, quando inæquales oblongum parallelogrammum continent.

Quodcumque parallelogrammum rectangulum ſiuè ſit quadratum, ſiue oblongum nomine RECTANGULI appellatur.

Signum, quod rectangulum indicat, eſt ×, ut in principio primi elementi dictum fuit.

Def. II.

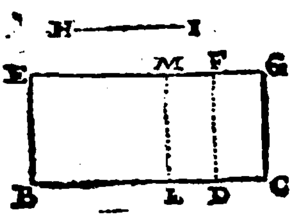
In parallelogrammo AC, ſpatium illud, quod continetur ab uno eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, videlicet GK, vel IH, & duobus complementis DF, & FB, GNOMON appellatur.



Propoſ. I. Theor. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ BC, & HI, quarum una, nempe BC ſit in quaſcumque partes diviſa, ut in D, & L;

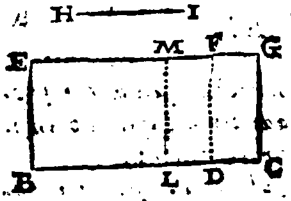
Dico rectangula facta ab integra HI, & a ſegmentis BL, LD, DC eſſe æqualia rectangulo comprehenſo a duabus datis BC, HI.



Conſtructio.

Supra BC ad punctum B. (*per 11. pri.*) conſtituatur perpendicularis BE æqualis HI. Per E notetur EG (*per 31. pri.*) parallela BC. Ulterius a punctis C, D, & L ſignentur

rectæ



rectæ CG, DF, LM, parallelæ BE, quæ producantur donec occurrant ipsi EG in punctis G, F, M.

Demonstratio.

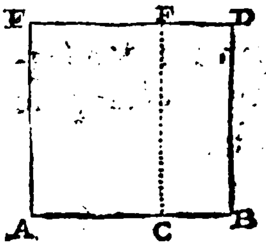
IN figura quadrilatera BG (*per constructionem*) latera opposita sunt parallela, & anguli recti: quare BG erit rectangulum a datis rectis BC, & BE, seu HI efformatum, cujus partes sunt rectangula BM, LF, DG (*per axio. 19.*) æque sunt æquales rectangulo BG. Cum autem (*per 34. pri.*) æquales sint rectæ BE, LM, DF, atque BE sit facta æqualis HI: sequitur BE, LM, DF adæquare HI: quare

$$\left.\begin{array}{l} EB \times BL \\ ML \times LD \\ FD \times DC \end{array}\right\}$$ facta sunt ab integra HI, & a segmentis BL, LD, DC: sed hæc rectangula (*per axio. 19.*) æqualia sunt HI × BC: ergo rectangula comprehensa a data HI, & a segmentis alterius datæ BC æqualia sunt rectangulo sub datis HI, BC contento. q. e. d.

Propos. II. Theor. II.

Si fuerit recta AB secta in quascunque partes AC, CB,

Dico rectangula a tota AB, & a quolibet segmento AC, & CB descripta, æqualia esse quadrato totius AB.



Constructio.

SUper data AB (*per 46. pri.*) constituatur quadratum AD; ex puncto C notetur CF parallela AE, vel BD.

Demonstratio.

AF, & CD sunt duo rectangula (*per axio. 19.*) = q. AD: sed

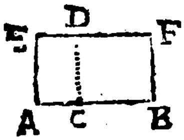
$$\left.\begin{array}{l} AF \text{ est } BA \times AC \\ CD \text{ est } BA \times CB \end{array}\right\} \text{ergo}$$

$$\left.\begin{array}{l} BA \times AC \\ BA \times CB \end{array}\right\} = \text{q. AD. q. e. d.}$$

Propos. III. Theor. III.

Si recta AB in duas partes AC, CB utcumque secta sit.

Dico rectangulum, sub tota AB, & partium alterutra BC comprehensum, adæquare rectangulum partium AC, CB una cum quadrato prædictæ partis BC.



Constructio.

Super CB (*per 46. pri.*) constituatur quadratum CF. Ex A ducatur AE parallela CD, quæ occurrat ipsi FD in E.

Demonstratio.

Per constructionem CF est quad. quare *BC* = *BF*: atqui [*per pri. hujus.*]

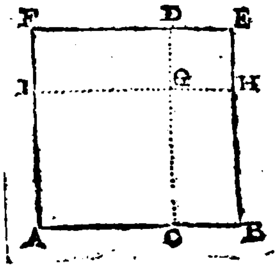
$BC \times BA = \left\{ \begin{array}{l} FC \times CA \\ BC \times BC \end{array} \right\}$: & $BC \times BC$ est quad. ergo

$BC \times BA + q.\ BC = BC \times BA$. q. e. d.

Propos. IV. Theor. IV.

Si recta AB utcumque in C secta fuerit,

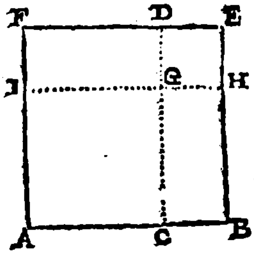
Dico quad. totius AB æquale quad. segmentorum AC, CB, atque rectangulo bis sub segmentis AC, CB contento.



Constructio.

Super tota *AB* [*per 46. pri.*] constituatur quad. AE; ex puncto C ducatur CD parallela AF, vel *BE*: fiat CG = CA: per G, ducatur IH parallela *AB*, vel FE.

De-



Demonstratio.

QVia (*per constructionem*) CG = CA fig. AG erit quad. segmenti AC. Pariter quia *BA* = CD, ablatis æqualibus CG, CA; remanebit DG = C*B*: sed C*B* (*per 34.pri.*) æquat GH: ergo DG = GH: quare fig. GE erit quad. segmenti C*B*. Demum figuræ ID, CH sunt rectangula segmentorum AC, C*B*: his stantibus

$$\text{Quad. AE } (\textit{per 2. hujus}) = \begin{cases} BA \times AC \\ BA \times CB \end{cases} : \text{sed } [\textit{per 3. hujus.}]$$

$$\left.\begin{array}{l} BA \times AC = AC \times CB + \text{q. } AC \\ BA \times CB = AC \times CB + \text{q. } CB \end{array}\right) : \text{quare}$$

$$\text{quad. AE} = \left.\begin{array}{l} AC \times CB \text{ bis} \\ \text{q. } AC \\ \text{q. } CB \end{array}\right) \text{q. e. d.}$$

Corollarium.

EX hac prop. constat quod si in Quadrato AE efformatum sit quad. unius segmenti AC, nempe AG: productis lateribus CG, IG; rectangulum ex GD, GH efformatum est quad. alterius segmenti C*B*: quia latera GD, GH sunt æqualia.

Propos. V. Theor. V.

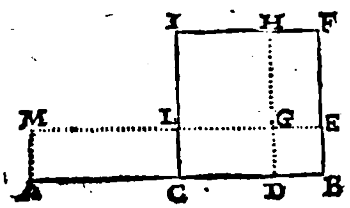
Si recta AB fuerit secta in partes æquales in C, & in partes inæquales in D.

Dico rectangulum sub partibus inæqualibus AD, DB contentum, una cum quadrato intermediæ partis CD, æquale esse quadrato dimidiæ CB.

Constructio.

SVper dimidia CB [*per 46. pri.*] constituatur q. CF: supra *B*D. fiat. q. DE. ex A ad A*B* [*per 11. pri.*] erigatur perpenpendicularis AM; producaturque EG donec concurrat cum AM in M: ulterius ex puncto D signetur DH parallela CI, vel BF.

Demonstratio.



QVia [*per constructionem*] CF, & DE sunt quadrata, (*per corol. 4. hujus*) LH erit quadratum intermediæ CD: Pariter quia (*per essentiam quadrati*) GD = DB, rectangulum AG erit comprehensum ab inæqualibus partibus AD, DB.

His stantibus, cum CF, & DE sint quadrata erit CB = BF, atque DB = BE: quare CB × BE = FB × BD: sed (*per 36. pri.*) CB × BE = AC × CL: ergo (*per axio. 1.*)
FB × BD = AC × CL
addito communi CD × DG erit
FB × BD + CD × DG = AC × CL + CD × DG
denuo addito communi q. LH, quod est q. rectæ CD erit
FB × BD + CD × DG + q. CD = AC × CL + CD × DG + q. CD, sed
FB × BD + CD × DG + q: CD (*per axio. 19.*) = q. CB: ergo
AC × CL + CD × DG: siuè AD × DG + q. CD = q. *CB*. q. e. d.

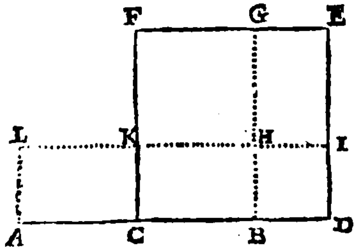
Propos. VI. Theor. VI.

Si recta AB sit secta bifariam in C, & illi in rectum adiecta sit BD.

Dico rectangulum contentum sub composita ex AB, BD, hoc est AD, & sub adiecta BD, una cum quadrato dimidiæ CB: æquale esse quadrato compositæ ex dimidia CB, & adiecta BD, seu quadrato CD.

Con-

Constructio.



Super CD [*per 46. pri.*] constituatur q. CE: pariter supra *BD* efformetur q. BI. Ex A ad AD ducatur perpendicularis AL. Producatur IH quousque concurrat cum AL in L. Pariter producatur BH usque ad G.

Demonstratio.

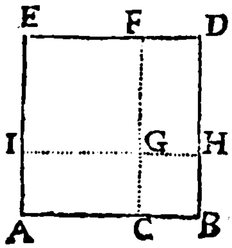
Cum [*per constructionem*) BI sit quadratum ipsius BD [*per corol. 4. bujus.*)
*K*G erit quad. ipsius C*B*: his stantibus
$CD \times DI = ED \times DB$.
Dempto communi, hoc est q. BI; erit
$CB \times BH = EI \times IH$: sed (*per 36. pri.*)
$CB \times BH = AC \times CK$: quare
$EI \times IH = AC \times CK$.
Addito communi $CD \times DI$; erit
$AC \times CK + CD \times DI$, hoc est $AD \times DI = EI \times IH + CD \times DI$
Denuo addito communi q. rectæ C*B* hoc est q. KG: erit
$AD \times DI +$ q. $CB = EI \times IH + CD \times DI +$ q. CB: sed
$EI \times IH + CD \times DI +$ q. CB, hoc est q. KG = q. CD, idest q. CE.
quare etiam
$AD \times DI +$ q. $CB =$ q. CD: hoc est CE: q. e. d.

Propos. VII. Theor. VII.

Si recta AB utcumque secta fuerit in C.

Dico quadrata totius AB, atque unius segmenti CB, æqualia esse rectangulo bis sub A*B*, & C*B* contento, una cum quadrato alterius segmenti AC.

Con-



Constructio.

SUper AB fiat quad. AD: pariter supra CB constituatur quadratum CH, producanturque CG, HG, in F, & I.

Demonstratio.

Ex demonstratis in 4. hujus.

$$\text{q. AB, hoc est AD} = \left(\begin{array}{l} \text{AC} \times \text{CB bis} \\ \text{q. AC} \\ \text{q. CB} \end{array} \right.$$

Addito communi q. CB, hoc est CH: erunt

$$\left. \begin{array}{l} \text{q. AB} \\ \text{q. CB} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{AC} \times \text{CB bis} \\ \text{q. AC} \\ \text{q. CB bis} \end{array} \right)$$

Sed per tertiam hujus.

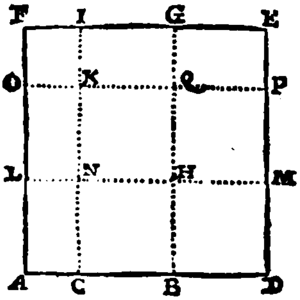
$$\left. \begin{array}{l} \text{AC} \times \text{CB bis} \\ \text{q. CB bis} \end{array} \right\} = \text{AB} \times \text{BC bis: ergo}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{q. AB} \\ \text{q. CB} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{AB} \times \text{BC bis} \\ \text{q. AC} \end{array} \right\} \text{q. e. d.}$$

Propos. VIII. Theor. VIII.

Si recta AB utcumque secta sit in C. Dico rectangulum quater sub AB, & uno segmentorum CB una cum quadrato alterius segmenti AC, æquale esse quadrato ex composita AB, & BC descripto.

Constructio.



DAtæ rectæ AB in rectum addatur BD = BC. Super AD constituatur quad. AE. Ex punctis C, & B notentur rectæ CI, BG parallelæ AF, vel DE. Super BD fiat quad. BM, producatur MH usq; ad L supra FI fiat quad. IO, pariter producatur OK usque ad P.

Demonstratio.

QUia (*per constructionem*] BM, & OI sunt quadrata (*per collor. 4. hujus*) quad. etiam erunt LG, CP, & NQ: quia vero BD facta est ipsi BC æqualis; q. BD = q. BC, atque AB × BC = AB × BD,

Pariter quia AC = FI; quad. IO erit quad. ipsius AC. his manentibus [*per 7. hujus.*]

AB × BC bis) = quad. AB) sed] *per constructionem.*]
q. AC) quad. BC)
BC = BD: ergo

AB × BC = AB × BD; atque q. BC = q. BD: quo stāte erit
AB × BD bis) = q. AB
q. AC) q. BD

Additis duobus AB × BD; erunt.
AB × BD quater } = q. AB
q. AC q. BD
AB × BD bis:

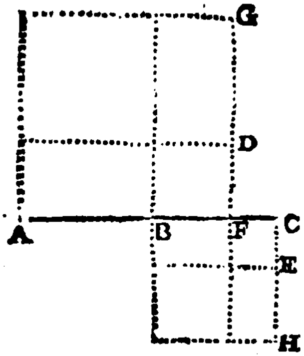
Sed [*per 4. hujus.*]
q. AB }
q. BD } = q. AD: ergo etiam
AB × BD bis }
AB × BC quater) = q. AD. q. e. d.
q. AC)

Pro-

Propos. IX. Theor. IX.

Si recta AC sit bifariam divisa in B, & non bifariam in F.

Dico quadrata inæqualium partium AF, FC simul accepta esse dupla quadratorum dimidiæ AB, & intermediæ sectionis BF.



Constructio.

Super AF [*per 46. pri.*] efformetur quad. AG. Supra FC constituatur quad. EH: pariter supra BF quad. BD, & supra FC quad. FE.

Demonstratio.

Per 4. bujus) q. AF hoc est AG $= \left\{ \begin{array}{l} AB \times BF \text{ bis} \\ \text{q. } AB \\ \text{q. } BF \end{array} \right.$

Addito communi quad. FC, hoc est FE erunt.

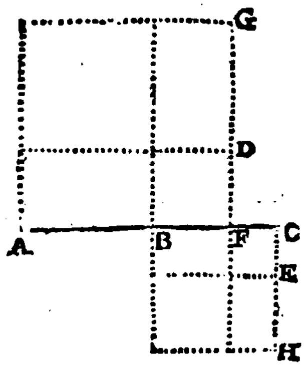
$$\left. \begin{array}{l} \text{q. } AF \\ \text{q. } FC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} AB \times BF \text{ bis} \\ \text{q. } AB \\ \text{q. } BF \\ \text{q. } FC \end{array} \right.$$

Sed (*per hyp.*)

$AB \times BF = CB \times BF$: ergo

$$\left. \begin{array}{l} \text{q. } AF \\ \text{q. } FC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} CB \times BF \text{ bis} \\ \text{q. } AB \\ \text{q. } BF \\ \text{q. } FC \end{array} \right. ; \text{ sed (per 7. bujus.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} CB \times BF \text{ bis} \\ \text{q. } FC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{q. } BC \\ \text{q. } BF \end{array} \right\} \text{seu} \left\{ \begin{array}{l} \text{q. } AB \\ \text{q. } BF \end{array} \right\} \text{ quare}$$



Si hæc illis ſubſtituantur; erunt

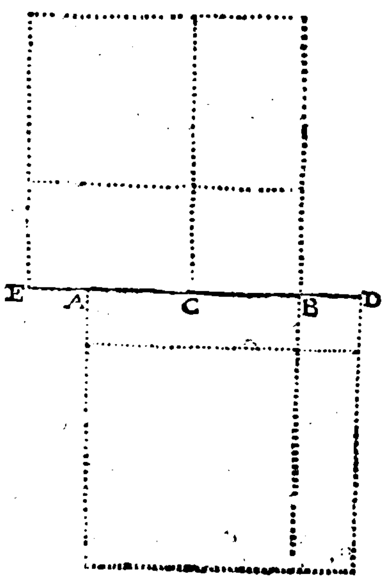
$$\left.\begin{array}{l}q.AF\\ q.FC\end{array}\right) = \left.\begin{array}{l}q.AB\ \text{bis}\\ q.BF\ \text{bis}\end{array}\right) \text{: quare}$$

$$\left.\begin{array}{l}q.AF\\ q.FC\end{array}\right) \text{dupla} \left.\begin{array}{l}q.AB\\ q.BF\end{array}\right) \text{q.e.d.}$$

Propoſ. X. Theor. X.

Si recta AB ſit bifariam ſecta in C, eique in rectum adiecta ſit BD.

Dico duo quadrata rectarum AD, & BD dupla eſſe quadratorum, rectarum AC, & CD.



Conſtructio.

PRoducatur *BA* verſus E, ſitque AE = *BD*.

Demonſtratio.

QVia [*per hyp.*] A*B* eſt bifariam diviſa in C, atque EA = *BD* [*per axio.2.*] EC = CD. [*per*

[*per 9. hujus.*] $\left.\begin{matrix} q.EB \\ q.BD \end{matrix}\right\}$ dupla $\begin{matrix} q.EC \\ q.CB \end{matrix}$: sed

$$[\textit{per construc.}] \begin{matrix} q.EB = q.AD \\ q.AC = q.CB \\ q.EC = q.CD \end{matrix} \Bigg) \text{ :quare}$$

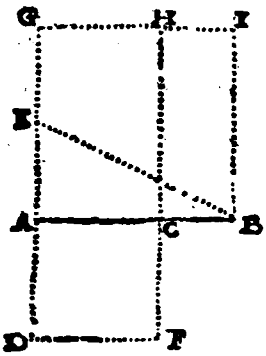
Facta mutatione horum æqualium quadratorum, nempe q. EB in q. AD : q. EC in q. CD: & q. CB in q. AC erunt

$$\left.\begin{matrix} q.AD \\ q.BD \end{matrix} \text{ dupla}\right\} \left.\begin{matrix} q.CD \\ q.AC \end{matrix}\right\} \text{ q.e.d.}$$

Propos. XI. Probl. I.

Datam rectam AB ita secare in C, ut rectangulum sub tota AB, & parte BC contentum, sit æquale quadrato alterius partis AC.

Constructio.



Super data AB [*per 46. pri.*] describatur q. AI, cujus latus AG, bifariam dividatur in E. Notetur EB. Et producta EA versus D fiat ED = EB. Ex AB majore quam AD abscindatur AC = AD,

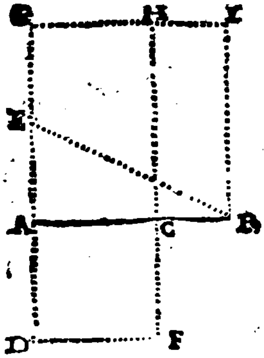
Dico AB × BC = q. AC.

Per C notetur CH parallela AG, vel BI, & ex D ducatur DF parallela AB, quæ occurrat ipsi HC in F.

Demonstratio.

Quia [*per def. quad.*] IB = BA rectangulum CI erit contentum sub data BA, & parte BC. Pariter quia [*per construct.*] AC = AD rectangulum AF erit quad. alterius partis AC:

Modo est demonstrandum rectangulum CI = q. AF
Recta AG [*per hyp.*] est bifariam divisa in E, & illi in rectum



addita AD: quare [*per 6. hujus.*
GD × DA + q. AE = q. ED: hoc est
q. EB; sed [*per 47. pri.*

$$q.EB = \left.\begin{matrix} q.EA \\ q.AB \end{matrix}\right\}: \text{ergo}$$

$$GD \times DA + q.EA = \begin{matrix} q.EA \\ q.AB \end{matrix}$$

Dempto communi q. EA: erit
GD × DA = q. AB: sed
GD × DA est Parallelogramum GF, &
q. AB; est AI: ergo
Communi parte ablata, nempe AH: erit rectangulo. CI hoc est
AB × BC = rectangulum AF, quod ex dictis est q. AC: quare data
recta AB est in C divisa, quemadmodum erat dividenda.

SCHOLIUM.

Hoc problema numeris accomodari nequit, quia (uti demonstratum est a P. Clauio ad prop. 14. lib. 9.) numerus non potest taliter in duos dividi, ut productus ex toto, & una parte adaequet quadratum alterius partis.

Propos. XII. Theor. XI.

In triangulo obtusangulo BCA, cum angulo obtuso C.

Dico quadratum lateris BA subtensi angulo obtuso C excedere quadrata laterum BC, CA comprehendentium angulum obtusum C, rectangulo bis contento sub BC, CD. Est vero CD pars lineae BC productae usque ad perpendicularem AD.

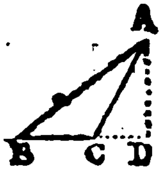
De-

Demonstratio.

QVia *BD* est vtcumque divisa in C [*per 4. hujus*] erunt

$$\left.\begin{array}{l} q.\ \mathit{BC} \\ q.\ \mathrm{CD} \\ \mathit{BC} \times \mathrm{CD}\ \text{bis} \end{array}\right\} = q.\mathit{BD}.\ \text{addito communi } q.\ \mathit{AD}\text{, erunt}$$

$$\left.\begin{array}{l} q.\ \mathit{BC} \\ q.\ \mathrm{CD} \\ \mathit{BC} \times \mathit{CD}\ \text{bis} \\ q.\ \mathit{AD} \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} q.\mathit{BD} \\ q.\mathit{AD} \end{array}\right\}\ [\text{sed } \textit{per 47. pri.}]$$



$$\left.\begin{array}{l} q.\ \mathit{CD} \\ q.\ \mathit{AD} \end{array}\right\} = q.\ \mathrm{C}\mathit{A}\text{: pariter } \left.\begin{array}{l} q.\ \mathit{BD} \\ q.\ \mathit{AD} \end{array}\right\} = q.\ \mathit{BA}\text{: ergo}$$

$$\left.\begin{array}{l} q.\ \mathit{BC} \\ q.\ \mathit{CA} \\ \mathit{BC} \times \mathit{CD}\ \text{bis} \end{array}\right\} = q.\ \mathit{BA}\text{: quare}$$

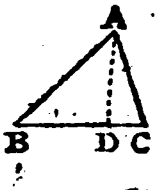
$$q.\ \mathit{BA}\ \text{superabit} \left.\begin{array}{l} q.\mathit{BC} \\ q.\mathit{CA} \end{array}\right\} \mathit{BC} \times \mathit{CD}\ \text{bis. q. e. d.}$$

Propos. XIII. Theor. XII.

In quocumque triangulo BAC.

Dico quadratum lateris B A subtensi angulo acuto C defficere a quadratis laterum BC, C A comprehendentium angulum acutum C, rectangulo bis contento sub alterutro laterum comprehẽdentium angulum acutum C, in quod cadit perpendicularis AD ex opposito angulo A demissa, nempe B C; atque portione ejusdem lateris intercepta inter perpendicularem AD, & angulum acutum C, nempe DC.

Demonstratio.



QVia recta BC est utcumque divisa in D, [*per 7. huius.*]

$$\left.\begin{array}{l} q.\ BC \\ q.\ CD \end{array}\right) = \begin{array}{l} BC \times CD \text{ bis} \\ q.\ BD \end{array}$$

Addito communi q. *AD*, erunt

$$\left.\begin{array}{l} q.\ BC \\ q.\ CD \\ q.\ AD \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} BC \times CD \text{ bis} \\ q.\ BD \\ q.\ AD \end{array}\right\} \text{ sed [\textit{per 47. pri.}}$$

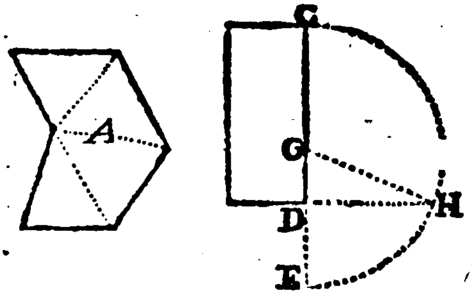
$$\left.\begin{array}{l} q.\ CD \\ q.\ AD \end{array}\right) = q.\ AC\ ;\ \& \left.\begin{array}{l} q.\ BD \\ q.\ AD \end{array}\right) = q.\ BA\text{: ergo}$$

$$\left.\begin{array}{l} q.\ BC \\ q.\ AC \end{array}\right) = \left.\begin{array}{l} q.\ BA \\ BC \times CD \text{ bis} \end{array}\right)\text{: quare}$$

$$q.\ BA \text{ minus erit} \left.\begin{array}{l} q.\ BC \\ q.\ AC \end{array}\right) BC \times CD \text{ bis. q. e. d.}$$

Propos. XIV. Probl. II.

Dato rectilineo A æquale quadratum constituere.



Constructio.

REctilineo *A* (*per* 45. *pri*, in angulo recto cōstituatur æquale parallellogrammum FC. Producatur CD, fiatque DE = DF. Recta CE [*per* 10. *pri.*] bifariam diuidatur in G. Centro G intervallo GE, vel GC notetur semicirculus CHE: producatur FD usque ad circumpherentiam in H: notetur GH.

Dico quad. DH = dato rectilineo A.

De-

Demonstratio.

CUm recta CE [*per constructionem*] sit bifariam divisa in G, & non bifariam in D. [*per 5. hujus.*]
CD × DE + q. GD = q. GE, seu GH : sed [*per 47. pri.*]
q. GH = q. DH + q. DG : ergo
CD × DE + q. GD = q. DH + q. GD,
Dempto communi quad. GD ; erit
CD × DE, hoc est parallelogrammum FC = q. DH :
Sed (*per constructionem.*)
Parallelogrammum FC = dato rectilineo *A* : ergo
rectilineum A = q. DH. q. e. f.

Elemendi Secundi Finis.

LIBER III.
EUCLIDIS
ELEMENTUM TERTIUM.

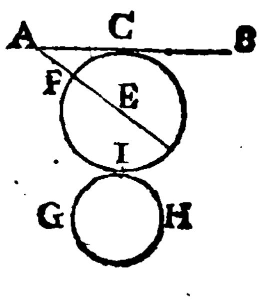
DEFINITIONES.

Def. I.

ÆQUALES CIRCULI dicuntur illi, quorum diametri, vel rectæ lineæ à centris ad circumferentias ductæ, sunt æquales.

Def. II.

TANGERE circulum dicitur recta linea, quando circulum tangit, & si producatur, non secat.



SI recta AC tangat circulum in C, atque producta in B circulum non secet, appellatur TANGENS, ad differentiam rectæ AE, quæ cum circulum secet, dicitur SECANS. Punctum C dicitur punctum CONTACTUS, atque angulus a recta CB, & periferia comprenensus vocatur ANGULUS CONTACTUS.

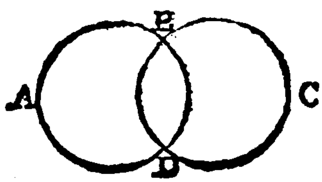
Def.

Def. III.

TANGENTES circuli dicuntur illi, qui ſe invicem tangunt, non autem ſecant.

Tales ſunt Circuli CFI, GIH, qui ſe tangunt in puncto I, quod dicitur CONTACTUS circulorum.

Def. IV.

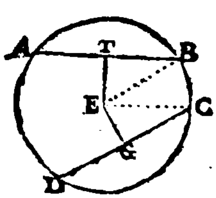


SECANTES circuli dicuntur illi, qui ſe mutuo ſecant.

Tales ſunt circuli ABD, BCD, qui ſe mutuo ſecant in punctis *B*, & D.

Def. V.

Rectæ Lineæ in circulo ductæ dicuntur ÆQUALITER a centro diſtare, cum perpendiculares a centro ad illas rectas ductæ, ſunt æquales. LONGIUS autem a centro diſtare dicitur illa recta, in quam major perpendicularis cadit.



Si in circulo ABCD, cujus centrum E, ductæ fuerint duæ rectæ AB, C*D*, atque perpendiculares ET, EG in illas a centro E cadentes, ſint æquales; rectæ A*B*, CD dicuntur æqualiter diſtare a centro E: nam dictæ perpendiculares ſunt menſura diſtantiarum a centro circuli.

Ex adverſo ſi perpendicularis ET major ſit quam EG; recta *B*A magis a centro E diſtare dicitur quam recta CD.

Def.

Def. VI.

SEGMENTUM circuli dicitur illa figura, quæ a recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.

QVia figura ABC comprehenditur a recta AC, atque a circumferentia ABC, SEGMENTUM circuli vocatur; rectaque AC CORDA, sive SUBTENSA nominatur.

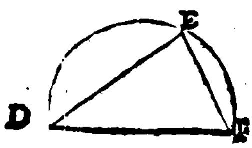
Def. VII.

SEGMENTI angulus dicitur, qui a corda, & circuli circumferentia comprehenditur.

ANGULUS enim mixtilineus comprehensus a recta, siue corda AC, & circumferentia ABC, appellatur angulus SEGMENTI.

Def. VIII.

In SEGMENTO autem vocatur angulus, qui a rectis lineis a puncto in periferia signato ad cordæ extremitates ductis comprehenditur.

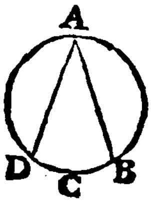


SI in circumferentia segmenti DEF, acceptum fuerit punctum E, a quo ad terminos cordæ, siuè rectæ DF ductæ sint rectæ ED, EF: ex his rectis lineis comprehensus angulus rectilineus DEF, dicitur angulus IN SEGMENTO.

Def.

Def. IX.

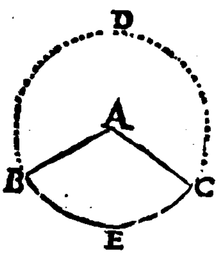
Angulus a duabus rectis lineis ab uno circumferentiæ puncto in circulo ductis comprehensus INSISTERE dicitur illi periferiæ parti, quam assumunt rectæ lineæ angulum comprehendentes.



SI in circumferentia circuli DAB accipiatur punctum A, a quo ductæ sint rectæ AD, *AB* comprehendentes angulum *DAB*, & assumentes circumferentiam DC*B*: angulus DAB dicitur insistere circumferentiæ DCB tanquam basi ipsius anguli *DAB*.

Def. X.

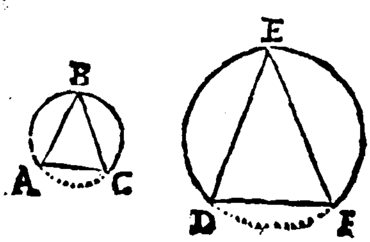
SECTOR circuli vocatur figura terminata a duabus rectis lineis in circuli centro angulum efformantibus, & a periferia ab illis lineis assumpta.



TAlis est figura *BA*C terminata a rectis AB, AC, & ab arcu *B*EC. Sector etiam dicitur figura BDCA ab ijsdem rectis *A*B, *A*C, & a periferia BDC terminata, cum hoc solum discrimine, quod ille dicitur minor sector, hic verò major.

Def. XI.

SIMILIA circulorum SEGMENTA vocantur, illa, in quibus anguli sunt æquales,



SI circulorum segmenta A*B*C, DEF angulos capiant æquales B, E; talia segmenta SIMILIA appellantur.

Pro-

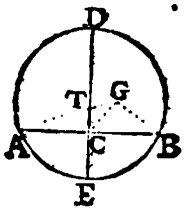
Propos. I. Probl. I.

Dati circuli ADBE centrum invenire.

Constructio, & Demonstratio.

IN dato circulo utcumque ducatur recta *AB*, quæ (*per* 10. *pri.*) bifariam dividatur in C. *A* puncto C (*per* 11. *pri.*) erigatur perpendicularis C*D* a circuli periferia terminata in D, & E.

Dico in recta DE esse dati circuli centrum.



Si hoc centrum extra rectam DE esse potest, ponatur in G, notenturque rectæ *GA*, GC, *GB*.

Hoc supposito, quia in triangulis GC*A*, GCB (*per constructionem*) latera GC, C*A* sunt singula singulis æqualia lateribus *GC*, *CB*, atque basis *GA* (*per hyp.*) æqualis basi *GB*: erit (*per* 8.*pri.*) ang.*GCA* = ang. *GCB*: quare (*per def.* 10.*pri.*) dicti anguli erunt recti. Cum autem (*per constructionem*) & angulus *ACD* sit rectus; sequitur (*per axio.* 1.) ang. *A*CD = ang. *ACG*; partem toti: quod repugnat: ergo punctum *G* nequit esse dati circuli centrum. Idem de quocumque alio puncto extra rectam DE accepto dici potest; quare in recta DE erit centrum quæsitum.

Hoc demonstrato, si recta DE bifariam fuerit divisa in T, hoc punctum erit centrum quæsitum, quia (*per def. circuli.*) omnes rectæ a centro ad periferiam ductæ, sunt æquales. q. e. f.

Corollarium.

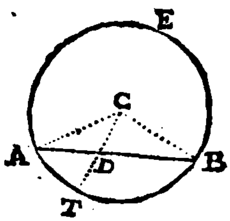
SI ex duabus rectis lineis in circulo signatis una alteram secet bifariam, & ad angulos rectos; in secante erit circuli centrum.

Pro-

Propos. II. Theor. I.

SI in periferia circuli ABE duo quęlibet puncta A, & B fuerint accepta,

Dico, rectam AB talia puncta coniungentem, intra circulum cadere.



Constructio.

DAti circuli AEB (*per 1. hujus.*) inveniatur centrum C. In recta AB accipiatur quodvis punctum D, ducanturque rectæ CA, CB, CDT.

Demonstratio.

REctæ CA, CB (*per def. circuli.*) sunt æquales: ergo (*per 5. pri.*) ang. CAB = ang. CBA: sed ang. CDB [*per 16. pri.*] major ang. CAB: quare (*per axio. 1.*) idem ang. CDB maior ang. CBA: quare [*per 19. pri.*] latus CB majus latere CD: quia vero hæc duo latera discedunt a centro C, majusque latus CB habet suum terminum B in circuli circumferentia; punctum D, quod est terminus minoris lateris CD, erit intra circumferentiam: hæc demonstratio quibuscumque punctis intermediis rectæ AB applicari potest: unde recta coniungens puncta A, B, intra circulum cadit. q. e. d.

Propos. III. Theor II.

In circulo ACBD, si recta AB transiens per centrum T, bifariam secet rectam CD non per centrum transeuntem in E.

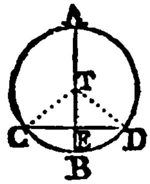
Dico primo. AB secare ad angulos rectos CD.

Dico secundo. Si AB secat ad angulos rectos

CD

CD, secare etiam bifariam in E.

Constructio.



EX centro T ducantur duæ rectæ TC, TD.

Demonstratio primæ partis.

TRiangula CET, DET, [*per hyp.*] habent latera CE, ET singula singulis æqualia lateribus DE, ET, basisque CT [*per def. circuli.*] est æqualis basi DT: quare [*per 8. pri.*] ang. CET = ang. DET: unde dicti ang. æquales [*per def. 10. pri.*] erunt recti. q: e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

(PEr def. circuli.) TC = TD: quare (*per 5. pri.*) ang. TCE = TDE: ergo in triangulis TEC, TED erunt anguli TEC, TCE singuli singulis æquales angulis TED, TDE, latusque TC = lateri TD: igitur (*per 26. pri.*) CE = ED: q. e. 2. d.

Corollarium.

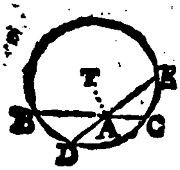
EX hac propositione colligi potest, quod si in triangulo isosceele ab angulo basi oposito ad ipsam basim perpendicularis ducta fuerit, hæc basim bifariam secabit; & si bifariam secet erit perpendicularis.

Propos. IV. Theor. III.

Si in circulo BDCE duæ rectæ BC, DE non per centrum transeuntes se mutuo secent in A. Dico has rectas ambas non se mutuo bifariam secare.

Con-

Constructio,



DAti circuli BDCE [*per* 1. *hujus.*] inveniatur centrum T, a quo ad A recta ducatur TA.

Demonstratio.

SI BC est bifariam secta in A (*per* 3. *hujus.*) ang. TAC rectus erit. Pariter si DE & ipsa est in duas æquales partes divisa in A (*per eamdem* 3.) ang. TAE erit rectus: quare [*per axio.* 12. ang. TAC = ang. TAE; quod fieri nequit, cum semper totum sit sua parte majus: ergo rectæ BC, DE non se mutuo bifariam secant in A. q. e. d.

Propos. V. Theor. IV.

Si duo circuli ADE, ABC se mutuo secent.

Dico eos non habere idem centrum.

Constructio.

VNius circuli, nempe ADE [*per* 1. *hujus.*) inveniatur centrum T.

In circumferentia ADE accipiatur punctum E, quod sit intra circulum ABC: notentur à centro T duæ rectæ TA, TEC.

Demonstratio.

CUm punctum T [*per constructionem*] sit centrum circuli ADE (*per def. circuli*.) erit TA = TE.

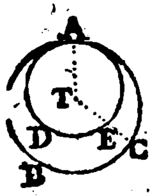
Pariter, si idem punctum foret centrum alterius circuli ABC [*per eamdem def.*] esset TA = TC: quare [*per axio.* 1.] TE = TC, quod esse nequit, quia pars semper est minor suo toto: ergo punctum T nequit esse centrum commune circulis se se secantibus. q. e. d.

Propos. VI. Theor. V.

Si duo circuli ABC, ADE se interius tangant in A.

Dico eos non habere idem centrum.

Constructio,



Circuli ADE, vel ABC (*per* 1. *hujus*.) inveniatur centrum T, a quo ad contactum A notetur recta TA: pariter ex T notetur recta TEC, quæ utramque circumferentiam secet in E, & C.

Demonstratio.

Quia (*per construc.*) punctum T est centrum circuli ADE; erit TA = TE. Pariter si punctum T est centrum circuli ABC; erit TA = TC: quare (*per axio.* 1.) TE = TC, quod repugnat, cum TE sit pars, & TC totum: ergo T nequit esse centrum commune circulis sese intus tangentibus. q. e. d.

Propos. VII. Theor. VI.

Si in circulo BCDT, cujus centrum G accipiatur punctum A, quod non sit centrum, & ab illo puncto ad circumferentiam ducantur quæcumque rectæ lineæ AB, AC, AD, AE, AT. &c.

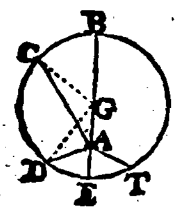
Dico primo. Harum linearum maximam esse AB transeuntem per centrum G.

Dico secundo. AE residuum diametri BA, esse minimam.

Dico tertio. Ex aliis quibuscumque rectis AC, AD, AD, rectam AC, quæ est vicinior maximæ AB, esse majorem AD, quæ ab eadẽ AB est remotior.

Dico quarto. Duas tantum ex A ad diversas partes duci posse rectas AD, AT inter se æquales.

Constructio.



EX centro G ad circumferentiam ducantur rectæ GC, GD.

Demonstratio primæ partis.

IN triangulo AGC (*per 20. pri.*) latera AG, GC simul sumpta sunt majora latere AC: sed (*per axio. 2.*) AG, GC simul sumpta adæquant AB: ergo AB major quam AC. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

IN triangulo GAD (*per 20. pri.*) latera GA, AD majora latere GD: sed (*per def. circuli.*) GD = GE: ergo GA, AD majora quam GE; & ablata cõmuni quantitate GA [*per axio. 3.*] residuum AD majus residuo AE. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

DUo triangula AGC, AGD habent latera AG, GC singula singulis æqualia lateribus AG, GD angulus vero AGC (*per axio. 9.*) major est ang. AGD: quare (*per 24. pri.*) basis AC major base AD. q. e. 3. d.

Demonstratio quartæ partis.

PEr demonstrata in tertia parte ex puncto A in semicirculo BCDE nulla recta duci potest æqualis ipsi GD (idem valet in semicirculo BTE, in quo alia recta ipsi AT æqualis duci nequit) quamobrem si AD est æqualis AT nulla alia ipsi AT æqualis erit. q. e. 4. d.

Propos. VIII. Theor. VII.

Si extra circulum EDBH acceptum fuerit punctum A, a quo in cavam dati circuli periferiam cadant quæcumque rectæ lineæ AB, AC, AD, AL, in convexam vero cadant AI, AF, AE, AH.

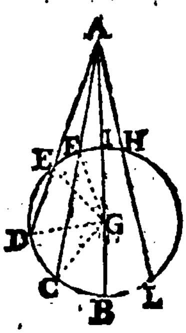
1. Dico rectarum intra circulum in cavam periferiam cadentium maximam esse AB per centrum G transeuntem.

2. Dico rectam AC maximæ AB viciniorem, majorem esse quam *A*D à maxima *AB* remotiorem.

3. Dico rectarum extra circulum in convexam periferiam cadentium minimam esse *AI*, quæ producta per centrum G transit.

4. Dico rectam *AF* minimæ AI viciniorem esse minorem quam *AE* a minima *AI* remotiorē.

5. Dico ex puncto *A*, sive in cavam intra circulum, sive in convexam extra circulum, duas tantum rectas æquales ad diversas partes maximæ, vel minimæ duci posse.



Constructio.

A Centro G ducantur rectæ GC, GD, GE, GF.

Demonstratio primæ partis.

IN triangulo *A*GC (*per 20. pri.*) latera AG, GC sunt majora latere AC; sed (*per axio.*

axio. 2.] AG, GC æquant AG, GB, hoc est AB: ergo AB major quam AC. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

IN triangulis AGC, AGD latera AG, GC singula singulis æqualia sunt lateribus AG, GD, angulus vero AGC major ang. AGD: quare (*per 24. pri.*] basis AC, maximæ vicinior, major base AD remotiore. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

IN triangulo AFG [*per 20. pri.*] latera AF, FG majora latere AG: ablatis æqualibus GF, GI [*per axio. 5.*) erit residuum AI minus residuo AF. q. e 3. d.

Demonstratio quartæ partis.

QVia intra triangulum AEG ab extremitatibus lateris AG ad punctum F ductæ sunt duæ rectæ AF, GF: (*per 21. pri.*) AF, FG erunt minores rectis AE, EG: ablatis æqualibus GF, GE; erit AF minor AE. q. e. 4. d.

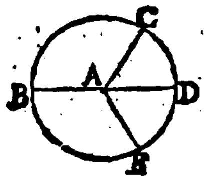
Demonstratio quintæ partis.

IUxta demonstrata in secunda parte, omnes rectæ a puncto A intra, vel extra circulum ad partem semicirculi IDB [idem intelligendum de semicirculo IHB) omnes rectæ AC, AD, AF &c. sunt inæquales: quare si ipsi AC ex alia parte sit æqualis AL, hæc sola dari poterit æqualis AC, cum reliquæ omnes majores sint, vel minores, quam AL: quare AC ad aliam partem solam habere poterit æqualem AL, & AF; AH. q. e. 5. d.

Propos. IX. Theor. VIII.

Si a puncto A intra circulum BCDE accepto in circumferentiam cadant plures, quam duæ rectæ lineæ *AC*, *AD*, *AE*, æquales.

Dico punctum *A* esse centrum circuli CDE.

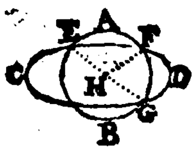


Demonstratio.

SI punctum A non est centrum dati circuli CDE, a puncto A exrra centrum accepto dari poterunt tres rectæ AC, AD, AE æquales: quod cum sit contrarium demonstratis in 4. parte prop. 7. hujus, erit A centrum circuli BCDE. q. e. d.

Propos. X. Theor. IX.

Circuli *AB*, *CD* in duobus tantum punctis se mutuò secant.



Constructio.

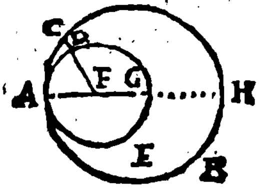
SUpposito quod circuli AB, CD se intersecent in tribus punctis, E, F, G (*per 1. hujus*) invento centro circuli AB, quod sit H, notentur rectæ HE, HF, HG.

Demonstratio.

QVia punctun H (*per constructionem*) est centrum circuli *AB* (*per def. circuli.*) rectæ HE, HF, HG æquales erunt: cum autem istæ tres rectæ æquales cadant in circumferentiam alterius circuli CD (*per 9. hujus*) punctum *A* esset centrum commune circulis se mutuo secantibus *AB*, *CD*; quod cum sit contra 5. hujus; sequitur circulum non posse alium circulum secare in pluribus punctis quam duobus. q. e. d.

Propos. XI. Theor. X.

Si duo circuli *ACB*, *ADE* se intus contingant in *A*,
Dico rectam per talium circulorum centra F, & G ductam transire per contactum *A*.

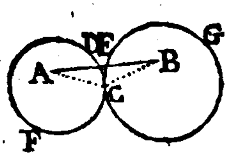


Constructio, & Demonstratio.

SI recta per centra G, & F ducta, atque producta versus F non cadit in contactum *A*, si fieri potest, cadat extra, secetque ambas circumferentias in D, & C. Hoc supposito quia punctum F non est centrum circuli *A*CB (*per 2. partem 7. hujus.*) erit FC minor quam F*A*; sed (*per def. circuli.*) FD = F*A*: quare FC minor quam FD, totum scilicet sua parte minus, quod (*per axio. 9.*) est impossibile: ergo GF producta versus F nequit cadere extra punctum A, & ideo transibit per punctum contactus *A*. q. e. d.

Propos. XII. Theor. XI.

Si duo circuli ECG, DCF se exterius tangant in C,
Dico rectam horum circulorum centra A, & B coniungentem transire per contactum C.



Constructio, & Demonstratio.

SI recta A*B* non transit per contactum C, secabit utramque circumferentiam in punctis D, & E. A centris circulorum A, & B ad contactum C notentur rectæ AC, *B*C.

His stantibus, quia punctũ A (*per hip.*) est centrũ circuli FCD, erit AC = AD; pariterque in circulo CEG, erit BC = BE: quare

 tota

tota AB superabit rectas AC, & BC: ergo in triangulo ACB latus AB majus erit lateribus AC, BC, (*contra demonstrata in 20. pri.*); unde AB transibit per contactum C. q. e. d.

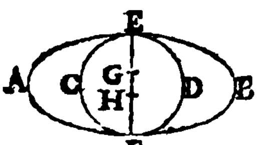
Propos. XIII. Theor. XII.

Si Circulus AB tangat circulum CD.

Dico eum non tangere in pluribus punctis; quam uno, siuè intus, siuè extra tangat.

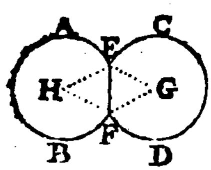
Constructio, & Demonstratio.

Fig. I.



SI circuli AB, CD, (*Fig.* 1.) intus se tangerent in duobus punctis E, & F, quia (*per 6. hujus.*) circuli se intus tangentes non habent idem centrum, sit H centrum circuli AB, & G centrum circuli CD: hoc posito recta HG coniungens circulorum centra (*per 11. hujus*) si producatur, transibit per puncta contactus E, & F: eritque EF recta linea. Cum verò punctum G supponatur centrum circuli CD, & H cētrum circuli AB; erit GE = GF, & HE = HF: quare recta EF erit bifariam divisa in punctis G, & H; quod (*per axio.* 25.) est impossibile: unde circulus CD nequit intus tangere circulum AB in pluribus punctis quam uno. q. e. d.

Fig. II.



Si postea dicti circuli AB, CD [*Fig.* 2.] se extra tangant in tota circumferentia EF (*per* 11. *hujus.*] lineæ centra H, & G coniungentes, atque per contactus E, & F transeuntes erunt lineæ rectæ spatium claudentes; quod cum sit impossibile (*per axio.* 14.) verum erit dicere circulum AB exterius non tangere circulum CD in pluribus punctis, quam uno. q. e. d.

SCO-

SCHOLIUM.

Ex praecedentibus propositionibus satis constat quemcumque circulorum contactum esse in puncto, siuè intus, siuè extra se tangant.

Propos. XIV. Theor. XIII.

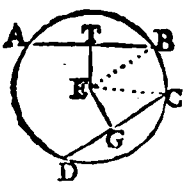
Si in circclo ABCD æquales rectæ lineæ AB, DC constitutæ sint.

1. Dico illas æqualiter distare a centro E.

Si æqualiter a centro E distent,

2. Dico esse æquales.

Constructio.



A Centro E ad rectas AB, DC [*per* 12. *pri.*] perpendiculares ducantur ET, EG: pariter ab eodem centro E notentur rectæ EB, EC.

Demonstratio primæ partis.

Quia rectæ ET, EG [*per constructionem*] veniunt a centro E, suntque ipsis AB, CD perpendiculares (*per* 2. *hujus*.) easdem bifariam diuident in T, & in G: cum autem [*per suppositum.*] AB sit = DC, & erit med ietas TB = medietati GC.

In triangulis rectangulis ETB, EGC (*per* 47. *pri.*)

$$\left.\begin{matrix} q.ET \\ q.TB \end{matrix}\right\} = q.EB, \& \left.\begin{matrix} q.EG \\ q.GC \end{matrix}\right\} = q.EC;$$

(*per essentiam circuli.*)

q. EB = q. EC: quare

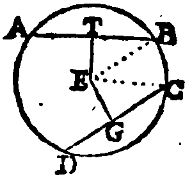
$$\left.\begin{matrix} q.ET \\ q.TB \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} q.EG \\ q.GC \end{matrix}\right\} \text{Ablatis æqualib. quadratis} \left.\begin{matrix} TB \\ GC \end{matrix}\right\}$$

remanebit q. ET = q. EG,

ideoque recta ET = rectæ EG: igitur.

(per

(*per def. 4. hujus.*]
rectæ AB, DC a centro E æqualiter distabunt. q. e. d.



Demonstratio secundæ partis.

Iisdem manentibus, si distantia ET = sit distantiæ EG,

q. ET = q. EG

Ablatis his æqualibus quadratis

q. ET) & a q. EG)
q. TB) q. GC) remanebit q. TB = q. GC

unde, & recta TB = rectæ GC: sed
rectæ TB, GC sunt medietates rectarum AB, DC: ergo
AB = DC. q. e. d.

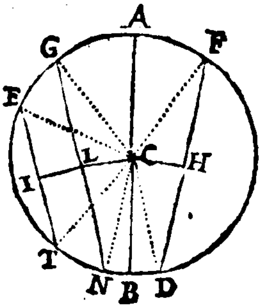
Propos. XV. Theor. XIV.

In circulo AEB, cujus centrum C si ducantur rectæ lineæ.

1. Dico maximam illarum, esse diametrum AB.

2. Dico aliarum illam, quæ est proprior centro C, esse remotiore majorem.

Constructio.



PEr centrum C ducatur diameter ACB: pariter signentur rectæ FD, ET illa vicinior, & hæc remotior a centro C: ulterius notentur a centro C duæ rectæ CH, CI perpendiculares rectis FD, ET, quarum perpendicularium CI major erit CH, quia recta ET supponitur magis a centro C distare quam FD. Ex CI [*per 3. pri.*] auferatur CL = CH: per L ducatur GLN paral-

parallela ET; addanturque rectæ CF, CG. CE, CT, CN, CD.

Demonstratio primæ partis.

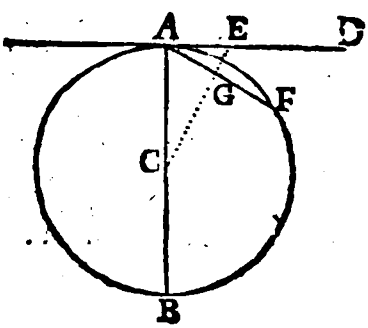
IN triangulo FCD [*per* 20. *pri.*] latera FC, CD majora sunt latere FD: cum autem FC, & CD (*per def. circuli.*) adæquent AB; erit AB major quam FD. Eodem modo demonstrabitur AB major quacumque alia linea extra centrum C in circulo ducta: quare diameter AB erit maxima omnium linearum, quæ in circulo ducuntur. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

QVia (*per constructionem*) perpendicularis CH = perpendiculari CL; (*per* 14. *hujus.* (erit FD = GN. Pariter quia triangula GCN, ECT [*per def. circuli.*] habent latera GC, CN singula singulis æqualia lateribus EC, CT; angulum vero GCN majorem angulo ECT: (*per* 24. *pr.*) erit GN major quam ET: quia vero (*per constructionem*) perpendicularis CH = CL (*per* 14. *hujus*) est GN = FD: ergo FD propior centro C remotiore ET major erit. q. e. 2. d.

Propos. XVI. Theor. XV.

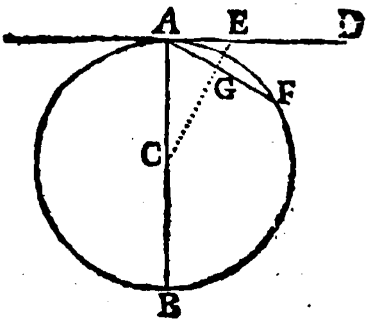
Si ab extremitate diametri AB eidem diametro perpendicularis ducatur AD.



1. Dico AD totam cadere extra circulum AFB.

2. Dico intra rectam AD, & circumferentiam AF aliam rectam lineam non cadere.

3. Dico angulum semi-



micirculi BAF majorem esse quocumque angulo acuto rectilineo: contactus vero angulum DAF quocumque angulo acuto rectilineo esse minorem.

Constructio, & Demonstratio primæ partis.

IN recta AD accepto quovis puncto E notetur recta CE, eritque efformatum triangulum CAE, in quo, cum (*per hyp.*) angulus CAE sit rectus, angulus CEA (*per 17. pri.*) erit acutus: quare (*per 18. pri.*) latus CE majus latere CA; sed CA terminum habet in circumferentia circuli: ergo terminus rectæ CE erit extra circulum: hoc idem demonstrari poterit de quovis alio puncto lineæ AD: unde erit verum dicere, rectam AD totam esse extra circulum. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

SI intra rectam AD, & circuli peripheriam AF alia recta duci potest, quæ perveniat ad punctũ A absque eo quod circulum secet, sit hæc recta AF, quæ cum diametro AB constituet angulum acutum CAF. Ex puncto C ad AF perpendicularis ducatur CG, quæ [*per corol. 17. pri.*] cadet ad partes anguli acuti CAG: quo stante triangulum CGA habebit angulum CGA rectum, angulum vero CAG acutum: quare [*per 18. pri.*] latus CA majus latere CG: sed CA habet suum terminum A in circumferentia AF: ergo CG habebit suum terminum G intra circumferentiam AFB: ideoque recta AF non cadet inter circumferentiam AF, & rectam AD quare intra rectam AD, & circumferentiam AFB ad punctum A alia recta non potest duci, quæ circulum non secet. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

CUm per demonstrata in secunda parte intra rectam AB, & rectam AD omnes, quæ cadunt rectæ, circulum secent, una ex his rectis sit AF: hoc posito angulus semicirculi comprehensus a diametro *AB*; & a circumferentia *AFB* erit totum, ejusque pars erit angulus rectilineus C*AF*: quare angulus semicirculi major erit quocumque angulo acuto rectilineo.

Pariter cum angulus contactus comprehensus a recta *AD*, & circumferentia *AF*, sit pars anguli rectilinei *DAF*: sequitur, angulum contactus semper existere minorem quocumque angulo acuto rectilineo. q. e. 3. d.

Corollarium primum.

EX prima parte hujus theorematis colligitur, rectam lineam in solo puncto circulum tangere.

Corollarium secundum.

PAriter fit manifestum, rectam lineam extremitati diametri cujusuis circuli perpendicularem, esse circuli tangentem, & angulum a tangente AD, & circuli periferia comprehensum esse angulum CONTACTUS, de quo plura scripserunt Christophorus, Clavius, Peletarius, Tacquet, aliique in hoc loco, quamvis hæc ad geometrica elementa vix reduci possint, nam Geometria utitur solis angulis efformatis a lineis rectis, vel a circulorum arcubus, cum isti ab illis mensurentur, ut ex sphæricis elementis fit manifestum; quod sanè non verificatur de angulis contactus, vel de illis angulis, qui juxta methodum syntheticam a curvis lineis in eodem plano existētibus efformantur.

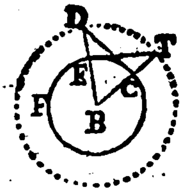
Propos. XVII. Prob. II.

A puncto D extra circulum dato rectam lineam ducere, quæ datum circulum CEF

tangat

tangat:

Constructio.



Centrum dati circuli [*per* 1. *bujus*.] inventum sit B. A puncto B ad *D* notetur recta BD, quæ circulum datum CEF secabit in E. Centro B intervallo BD describatur circulus DT, & ex E (*per* 11. *pri.*) perpendicularis signetur ET. ducatur BT, quæ secet circulum CEF in C: notentur DC.

Dico DC tangere datum circulum CEF.

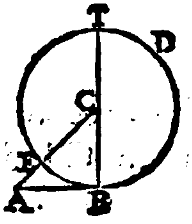
Demonstratio.

In triangulis BCD, BET latera EB, BT [*per def. circuli.*) sunt singula singulis æqualia lateribus CB, B*D*, & angulus B communis utrique triangulo, quare [*per* 4. *pri.*] ang. BET = ang. BCD; sed ang. BET [*per constructionem*] est rectus: quare & ang. BCD rectus erit: ergo [*per corol.* 2.16. *bujus*) DC erit tangens circuli CEF. q. e. f.

Propos. XVIII. Theor. XVI.

Si recta AB tangat circulum BDT in B. Dico rectam BT per contactum B, & centrum C ductam, tangenti AB esse perpendicularem.

Constructio, & Demonstratio.



Si non concedatur CB tangenti AB esse perpendicularem, ex centro C [*per* 12. *pri.*) ducatur CEA perpendicularis tangenti AB.

His manentibus (*per constructionem*.] angulus CAB erit rectus, & angulus CBA (*per* 17. *pri.*)

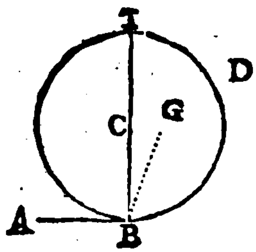
pri.) acutus: quare (*per* 18. *pri.*) latus CB majus latere CA, at CB (*per def. circuli.*) = CE: ergo CE majus CA; quod cum sit contra [*axio.* 9.]; CA non erit ipsi AB perpendicularis: idem absurdum demonstrabitur de quacumque alia linea ex C ad AB ducta, sola CB excepta; unde CB erit tangenti AB perpendicularis. q. e. d.

Propos. XIX. Theor. XVII.

Si recta AB circulum BDT tangat in B, & a puncto contactus excitata sit BT perpendicularis tangenti AB.

Dico in BT esse centrum Circuli BDT.

Constructio, & Demonstratio.



SI propositi circuli BDT centrum non concedatur in recta BT, erit extra constituendum, ut in G: a puncto G ad B ducatur recta GB, quæ (*per* 18. *hujs.*) erit tangenti AB perpendicularis: quare ang. GBA erit rectus; sed (*per hyp.*) est etiam rectus ang. TBA: ergo (*per axio.* 12.) ang. GBA = ang. TBA; pars æqualis toto, quod fieri nequit: unde in BT erit centrum circuli BDT. q. e. d.

Propos. XX. Theor. XVIII.

Si in circulo DAB, cujus centrum C super eadem basi AB ad centrum constitutus sit angulus ACB, & ad periferiam ADB.

Dico angulum ad centrum ACB duplum esse anguli ad periferiam ADB.

In hac theoromate hæc contingere possunt.

1. Quod latera AD, DB comprehendentia angulum ad circumferentiam intra se includant latera efformantia angulum ad centrum, ut in fig. 1.

2. Quod unum latus anguli ad periferiam, ut AD transeat per circuli centrum C, coincidatque cum latere AC, quod pertinet ad angulum ad centrum, ut in fig. 2.

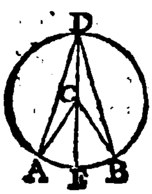
3. Quod unum ex lateribus constituentibus angulum D ad circumferentiam secet unum ex lateribus pertinentibus ad angulum ad centrum, ut in fig. 3.

Constructio.

PEr puncta D, & C recta ducatur DCE.

Demonstratio primæ partis.

Fig. 1.



TRiangulum ACD Fig. 1. [*per def. circuli.*] habet latus CA = CD: quare [*per 5. pri.*] ang. CDA = ang. CAD; sed angulus externus ACE (*per 32. pri.*) est æqualis ang. CDA CAD }: ergo angulus ACE duplus ang. CDA. Eadem prorsus ratione in triangulo BCD demonstrabitur ang. BCE duplus ang. CDB: quo stante angulus ad centrum ACB (*per axio. 2.*) duplus erit anguli ad periferiam ADB. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

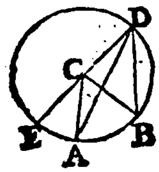
Fig. 2.

IN triangulo BCD (*Fig. 2.*) latera CB, CD (*per def. circuli*) sunt æqualia; unde [*per 5. pri.*) ang. CBD = ang. CDB, sed ang. ad centrum ACB (*per 32. pri.*) æqualis angulis CDB CBD }: ergo angulus ad centrum ACB duplus anguli ad peripheriam ADB. q. e. 2. d.

De-

Demonstratio tertiæ partis.

Fig. 3.



NOn ſolum ang. ad centrum ECB [*Fig. 3.*] per demonſtrata in ſecunda parte, eſt duplus anguli ad circumferentiam EDB, verum etiam angulus ECA duplus eſt anguli EDA: quare totus ang. ECB duplus totius ang. EDB, & ablatus ECA duplus ablati EDA: quamobrem [*per axio.* 20.] reſiduum ACB duplum reſidui ADB. q.e.3.d.

Propoſ. XXI. Theor. XIX.

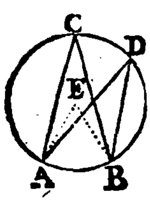
Si in eodem circuli ſegmento ACDB ſint quicumque anguli nempe ACB, ADB &c. Dico tales angulos eſſe æquales.

In hac propoſitione tria pariter contingere poſſunt.

1. Quod anguli ſint in ſegmento ſemicirculo majore.
2. Quod ſint in ſemicircu o.
3. Quod ſint in ſegmento ſemicirculo minore.

Conſtructio.

Quando anguli ſunt in ſegmento ſemicirculo majore.

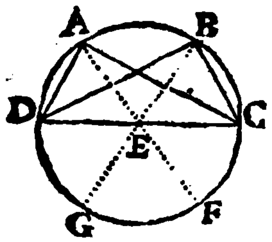


EX E circuli centro ducantur rectæ EA, EB.

Demonſtratio.

ANgulus ad centrum AEB [*per* 20. *hujus*] duplus ang. ACB, & ang. ADB: quare (*per axio.* 7. anguli C, & D, & ſi qui fuerint alij in ſegmento ACDB, erunt æquales. q. e. 1. d.

Constructio
Quado anguli sunt in semicirculo.

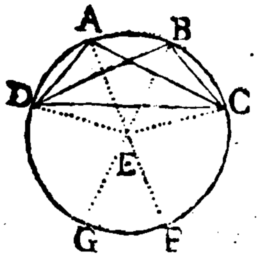


SI in semicirculo DABC, cujus centrum E, sint anguli DAC, DBC ex punctis A, & B per centrum E ducantur due rectæ AEF, BEG.

Demonstratio.

ANgulus *DEF* [*per 2.part.20.hujus.*) duplus est anguli DAF, & angulus FEC duplus anguli FAC: quare angulus DAC erit medietas trium angulorum DEG, GEF, FEC: Pariter ab eandem rationem angulus CEG duplus anguli CBG, angulus GED duplus anguli GBD: ergo angulus CBD erit medietas trium angulorum DEG, GEF, FEC: quare [*per axio.* 7.] ang. DAC = ang. DBC, q. e. 2. d.

Constructio
Pro angulis in minore segmento existentibus.



SI anguli DAC, DBC sint in segmento semicirculo minore, ex punctis A, & B per centrum E notentur rectæ AEF, BEG, atque ex centro E ducantur rectæ EC, ED.

Demonstratio.

ANgulus DAF [*per demonstrata in 2. parte 20. hujus.*) est medietas anguli DEF, & angulus FAC est medietas anguli FEC: quare totus angulus DAC erit medietas trium angulorum DEG, GEF, *FEC*: pariter ob eamdem rationem angulus DBG est medietas anguli DEG, atque angulus GBC medietas anguli GEC: ergo totus angulus DBG, & ipse erit medietas trium angulorum DEG, GEF, FEC: quamobrem (*per axio. 7.*) angulus DAC = angulo DBC. q. e. 3. d.

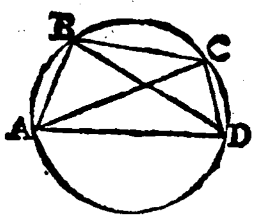
Pro-

Propos. XXII. Theor. XX.

Si in circulo ABCD inscriptum sit quadrilaterum ABCD.

Dico hujus quadrilateri oppositos angulos B, & D (idem valet de angulis A, & C), esse æquales duobus rectis.

Constructio.



AB angulis B, & C, ad oppositos D, & A ducantur rectæ BD, CA.

Demonstratio.

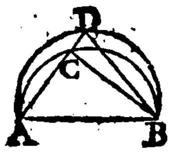
ANgulus ABD [*per 21. hujus.*] æqualis angulo ACD: pariter [*per eamdem prop. 21.*] ang. DAC = ang. DBC: ergo totus angulus ABC = duobus ang. $\left.\begin{matrix} ACD \\ CAD \end{matrix}\right\}$: addito communi ang. ADC, erunt ang. $\left.\begin{matrix} ABC \\ ADC \end{matrix}\right\}$ = tribus ang. $\left.\begin{matrix} ACD \\ DAC \\ ADC \end{matrix}\right\}$; sed isti tres anguli (*per 32. pri.*) sunt duobus rectis æquales: ergo, & duo anguli oppositi in quadrilatero $\left.\begin{matrix} ABC \\ ADC \end{matrix}\right\}$ duobus rectis æquales erunt. q. e. d.

Propos. XXIII. Theor. XXI.

Si super eadem recta linea AB ad easdem partes constituta sint duo circulorum segmenta ACB, ADB inæqualia.

Dico non esse similia.

Constructio.



SI super recta *AB* ad easdem partes constitui possunt duo circulorum segmenta inter se similia, & inæqualia, sint segmentum *ACB*, & segmentum *ADB*. Ducatur recta *ACD*, quæ utramque segmentorum circumferentiam secet in C, & D, addanturque rectæ CB, D*B*.

Demonstratio.

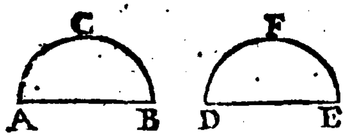
SI segmenta *ACB*, *ADB* sunt similia [*per def.* 10. *huius.*] ang. *ACB* æqualis ang. *ADB*, quod [*per* 16. *pri.*] fieri nequit: quamobrem segmenta *ACB*, *ADB* non erunt similia, & inæqualia. q. e. d.

Propos. XXIV. Theor. XXII.

Super æqualibus rectis lineis AB, DE si similia fuerint constituta circulorum segmenta ACB, DFE.

Dico esse æqualia.

Demonstratio.



CUm rectæ *AB*, DE supponantur æquales, si *AB* fuerit superposita ipsi DE (*per* 2. *partem axio.* 8.) congruet; manente hac congruentia, si segmentum *ACB* fuerit superpositum segmento DFE, vel cadit extra, vel intra, vel erit partim intra, & partim extra segmentum DFE: sed neque intra, neque extra cadere potest, quia super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ad easdem partes constituerentur. (*contra demonstrata in prop.* 23. *huius*) neque pro parte extra, & pro parte intra cadere potest, quia illi circuli, quorum hæc sunt segmenta, in pluribus punctis

quam

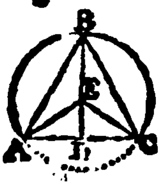
quam duobus se secarent, [*contra* 10. *hujus.*] : quare data segmenta erunt congruentia, ideoque [*per axio.* 8.] æqualia. q.e.d.

Propos. XXV. *Probl.* III.

Dato circuli segmento ABC, illum circulum, cujus est segmentum complere.

Constructio.

Fig. 1.



Dati segmenti corda, seu recta *AC* [*per* 10. *pri.*] bifariam diuidatur in D: ex D [*per* 11. *pri.*) notetur perpendicularis DB: ab *A* ad B. ducatur *AB*.

*A*d punctum *A*, & ad rectam *AB* (*per* 23. *pri.*) constituatur angulus B*AE* = ang. *ABE*, secetque *AE* rectam BD in E; debet enim secare, quia in triangulo rectangulo *ADB* [*Fig.* 1.] angulus *EBA* (*per* 17. *pri.*] est acutus; cum autem illi factus sit æqualis ang. *BAE*, sequitur angulos $\frac{ABE}{BAE}$ esse duobus rectis minores, quare [*per axio.* 13.] *AE* secabit BD.

Dico punctum E esse centrum illius circuli, cujus segmentum est *AbC*. *A*ddatur EC.

Demonstratio.

IN triangulo AEB (*per constructionem*] ang. B A E = ang. ABE: ergo [*per* 6. *pri.*] AE = EB: Rursus in triangulis ADE, CDE duo latera AD, DE singula singulis æqualia duobus lateribus CD, DE, atque anguli ADE, CDE æquales, quia recti; sequitur (*per* 4. *pri.*) AE = CE: ergo (*per axio.* 1.) rectæ EB, EA, EC sunt æquales: quare *per* 9. *hujus.*] punctum E erit centrum dati segmenti ABC: si ergo contro E interuallo EA, vel EC describatur circulus ABC, hic erit circulus dati segmenti ABC. q.e.f.

Fig. 2.

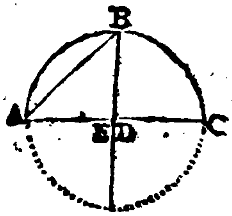
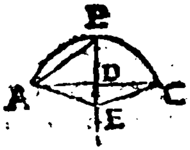


Fig. 3.



SCHOLIUM.

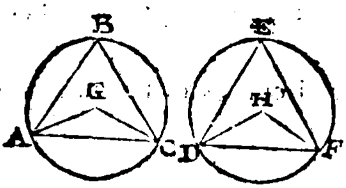
Quando angulus DBA (Fig. 1.) minor est DAB, circuli centrum E est intra segmentum, quia segmentum majus semicirculo.

Si angulus DBA (Fig. 2.) sit aequalis angulo DAB, centrum est in recta AC, quia segmentum est semicirculus.

Demum si angulus DBA major sit angulo DAB (Fig. 3.) circuli describendi centrum E, erit extra segmentum: quia segmentum minus est semicirculo.

Propos. XXVI. Theor. XXIII.

Si in circulis aequalibus ABC, DEF, quorum centra G, & H sint ad centra aequales anguli AGC, DHF, & ad periferias sit ang. B = ang. FE. Dico tales angulos insistere aequalibus periferiis AC, DF.



Demonstratio.

Anguli B, & E ad periferias (*per hyp.*) sunt aequales: quare (*per def. 10. hujus.*) segmenta ABC, DEF erunt similia.

Rursus (*per hyp.*) non solum latera GA, GC = lateribus HD, HF, verum etiam ang. G = ang. H: ergo [*per 4. pri.*] AC = DF.

His stantibus circulorum segmenta ABC, DEF erunt super aequales rectas AC, DF constituta: quare (*per 24. hujus.*) dicta segmenta ABC, DEF erunt aequalia: quia vero (*per hyp.*) aequales sunt circuli ABC, DEF, si a circulis auferatur dicta segmenta (*per axio. 3.*) erit segmentum AC = segmento DF, & consequenter periferia AC = periferiae DF. q. e. d.

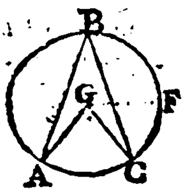
Pro-

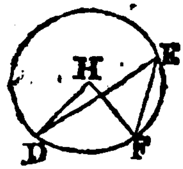
Propos. XXVII. Theor. XXIV.

Si in circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, anguli ad centra AGC, DHF, vel ad periferias ABC, DEF insistant æqualibus periferiis *AC*, *DF*.

Dico ang. G = ang. H, & ang. *B* = ang. E.

Constructio, & Demonstratio.





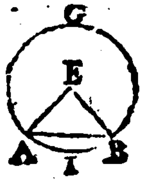
SI angulus DHF non est æqualis ang. AGC sit major: ad punctum G, & ad rectam AG [*per* 23. *pri.*] constituatur angulus AGF = ang. DHF: quare (*per* 26. *hujus.*) periferia DF = periferiæ ACF: sed periferia AC supponitur æqualis periferiæ DF: ergo periferia AC = peripheriæ ACF: pars æqualis toti: quod repugnat: quare ang. DHF = ang. AGC: q. e d. Eodem modo demonstrabitur æqualitas angulorum ad peripherias E, & B, supposita æqualitate circumferentiarum DF, AC, quibus insistunt; quia demonstrata æqualitate angulorum ad centra, sequitur æqualitas angulorum ad circumferentias, cum illi [*per* 20. *hujus.*] sint istorum dupli. q. e. d.

Propos. XXVIII. Theor. XXV.

Si in circulis æqualibus *AGB*, C*HD* sit recta *AB* = rectæ *CD*.

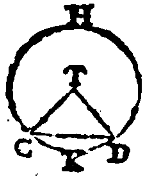
Dico majorem periferiam *AGB* = maiori peripheriæ C*HD*, minoremque *AIB* = minori *CKD*.

Constructio.



EX centris E, T, rectæ ducantur EA, EB, TC, TD.

Demonstratio.

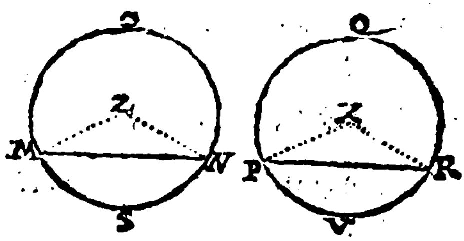


CIrculi AGBI, CHDK (*per hyp.*) sunt æquales: ergo (*per def. 1. hujus.*) rectæ EA, EB = rectis TC, TD: cum autem, & basis AB supponatur æqualis basi CD; (*per 8. pri.*) ang. E = ang. T: quare (*per 26. hujus*) peripheria AIB = peripheriæ CKD; his ab æqualibus circulis ablatis, erit etiam periferia AGB = peripheriæ CHD. q. e. d.

Propos. XXIX. Theor. XXVI.

Si in circulis æqualibus MON, PQR sint æquales arcus MSN, PVR.

Dico arcuum æqualium subtensas MN, PR esse æquales.



Constructio.

EX centris Z, & X notentur rectæ ZM, ZN, XP, XR.

De-

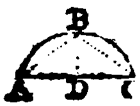
Demonstratio.

OB suppositam æqualitatem circulorum MON, PQR (*per def. pri. hujus.*) rectæ ZM, ZN singulæ singulis erunt æquales rectis XP, XR. Pariter angulus Z (*per 27. hujus.*) = ang. X: quare in triangulis MZN, PXR (*per 4. pri.*) MN = PR. q. e. d.

Propos. XXX. *Prob.* IV.

Datam circuli circumferentiam *ABC* bifariam diuedere.

Constructio.



DUcatur corda dati arcus, quæ sit AC, quæ (*per* 10. *pri.*) bifariam diuidatur in D: ex D ipsi AC perpendicularis excitetur DB.

Dico datum arcum ABC esse bifariam divisum in B.

Constructio.

Ducantur duæ rectæ BA, BC.

Demonstratio.

DVo triangula ADB, CDB habent latera AD, DB singula singulis æqualia lateribus CD, DB, & angulos ADB, CDB æquales, quia rectos: ergo (*per 4. pri.*) basis AB = basi CD: quare (*per 28. hujus.*) arcus AB = arcui BC. q. e f.

Propos. XXXI. *Theor.* XXVII.

In circulo *ABDE*.

1. Dico in semicirculo angulum *ADE* esse rectum.

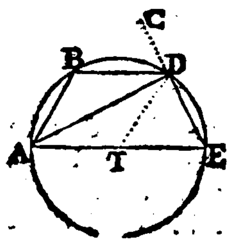
2. Di-

2. Dico in majore segmento DEA angulum *DEA* esse acutum.

3. In minore segmento ABD angulum ABD esse obtusum.

4. Dico Majoris segmenti angulum ADE esse recto majorem, minoris vero segmenti angulum *ADB* recto minorem existere.

Constructio.



Dati circuli ABDE (*per 1. hujus.*) inveniatur centrum T. Per centrum ducatur recta ATE. In semicirculo ABDE constituatur angulus ADE. Pariter in minore segmento ABD ponatur angulus ABD. Notetur DT, producaturque ED in C.

Demonstratio primæ partis.

Recta TD (*per def. circuli.*) æqualis TE: quare (*per 5. pri.*) angulus TDE = ang. TED; eadem ratione ang. TD*A* = ang. T*A*D: ergo totus ang. *A*DE = ang. $\left.\begin{matrix}\text{TED}\\ \text{T}A\text{D}\end{matrix}\right\}$; sed (*per 32. pri.*) angulus externus *A*DC = ang. $\left.\begin{matrix}\text{TED}\\ \text{T}A\text{D}\end{matrix}\right\}$: igitur [*per axio. 1.*] ang. *A*DC = ang. *ADE*: quare (*per 10. def. 1.*) ang. *ADE* erit rectus, q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

In triangulo *AED* angulus *ADE* [*per demonstrata in prima parte*) est rectus: igitur *per 17. pri.* angulus *AED* in majore segmento constitutus, erit acutus q. e. 2. d.

De-

Demonstratio tertiæ partis.

IN quadrilateto ABDE in circulo descripto (*per 22. huius.*) anguli oppositi B, & E sunt æquales duobus rectis; sed angulus E in secunda parte demonstratus est acutus: ergo angulus B in segmento minore erit obtusus. q. e. 3. d.

Demonstratio quartæ partis.

MAjoris segmenti angulus comprehensus a corda *AD*, & a circumferentia DE est totum respectivè ad angulum rectilineum ADE: sed angulus rectilineus *ADE* (*per primam partem hujus propositionis.*) est rectus: ergo *ADE* majoris segmenti angulus erit major recto.

Quia vero minoris segmenti angulus comprehensus a corda *AD*, & a periferia *BD* est pars anguli recti *ADC*: erit *ADB* minoris segmenti angulus, minor recto. q. e. 4. d.

Corollarium.

EX hac proposirione fit manifestum, quod in triangulo, dum unus angulus est reliquis duobus angulis æqualis, ille est angulus rectus.

Propos. XXXII. Theor. XXVIII.

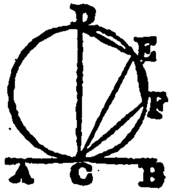
Si recta AB circulum tangat in C, & CE ex contactu ducta circulum secet.

Dico angulos ACE. BCE a tangente, atque secante efformatos æquales esse illis angulis, qui in alternis circuli segmentis CFE, CDE consistunt.

In hac propositione potest contingere, quod secans transeat per circuli centrum, vel extra.

Con-

Constructio.



QVando secans ex puncto contactus C ducta transit per circuli centrum, ut CD; ad punctum E ducantur duæ rectæ DE, CE.

Demonstratio hujus partis.

SI (*ut supponitur*) CD per centrum transit; sequitur (*per 31. hujus*) angulum CED esse rectum: sed (*per 18. hujus*) recti sunt, & anguli DCB, DCA: ergo anguli facti a tangente ACB, & a secante CD æquales erunt angulis factis in alternis circuli segmentis, cum omnes sint recti: quare ang. DCA = ang. DEC constituto in alterno segmento DEC. q. e. i. d.

Constructio.

QVando secans CE transit extra centrum in circumferentia segmenti CFE accipiatur punctum F, ad quod ducantur rectæ EF, CF.

Demonstratio hujus partis.

IN triangulo CED angulus E (*per 31. hujus.*) est rectus: quare (*per 32. pri.*) ejusdem trianguli CED reliqui anguli
$\left.\begin{array}{l}\text{EDC}\\ \text{ECD}\end{array}\right)$ erunt æquales uni recto: cum autem (*per 18. hujus.*) rectus etiam sit angulus DCB: erunt
ang. $\left.\begin{array}{l}\text{EDC}\\ \text{ECD}\end{array}\right)$ = ang. DCB: ablato communi ang. DCE; erit ang. EDC, in alterno segmento constitutus, æqualis angulo BCE a tangente BC, & a secante CE efformatus.

Pariter cum in quadrilatero DEFC in circulo descripto [*per 22. hujus.*] anguli oppositi D, & F sint duobus rectis æquales, pariterque anguli ECB, ECA (*per 13. pri.*) sint, & ipsi æquales duobus rectis: erunt ang. $\left.\begin{array}{l}\text{D}\\ \text{F}\end{array}\right\}$ = ang. $\left.\begin{array}{l}\text{ECB}\\ \text{ECA}\end{array}\right\}$

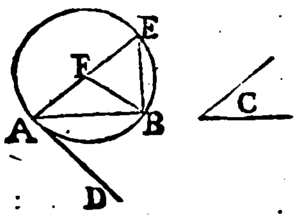
Sed

Sed (*per demonstratu in prima parte.*)
ang. D = ang. ECB: hoc ablato
erit angulus ECA comprehensus a tangente AC, & a secante CE æqualis angulo F in alterno segmento constituto. q. e. d.

Propos. XXXIII. *Probl. V.*

Super data Recta linea AB circuli segmentum describere, quod capiat angulum æqualem dato angulo C.

Constructio.



AD punctum A, & ad rectam AB [*per 23. pri.*] constituatur angulus DAB = ang. dato C. Ex A (*per. 11. pri.*) ducatur AE ipsi AD perpendicularis, quæ cum AB efformabit ang. EAB.

Ad punctum B, & ad rectam AB efformetur angulus ABF = ang. BAE, producaturque BF quousque secet AE in F.

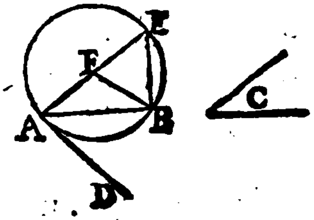
Demum centro F intervallo FA, vel FB; sunt enim (*per 6. pri.*) latera æqualia notetur segmentum circuli AEB.

Dico hoc esse illud segmentum, quod capit angulum æqualem dato angulo C D, ducatur BE.

Demonstratio.

Angulus BAD (*per constructionem*) æqualis angulo dato C: sed ang. BAD (*per 32. hujus*) æqualis ang. E: quare angulus E = ang. C; cum autem angulus E sit in segmento AEB; hoc erit illud segmentum, quod capit angulum æqualem dato angulo C. q. e. f.

Propos. XXXIV. *Probl.* VI.



Ex dato circulo ABE abscindere segmentum, quod capiat angulum æqualem dato angulo C.

Constructio.

Vtcumque [*per* 17. *hujus*.] ducatur recta DA, quæ datum circulum ABE tangat in *A*: ad punctum contactus A, & ad tangentem *DA* [*per* 23. *pri.*] constituatur angulus *DAB* æqualis dato angulo C.

Dico segmentum *AEB* esse illud, quod capit angulum æqualem dato angulo C.

Per centrum F, & contactum *A* notetur *AFE*; addaturque *BE*.

Demonstratio.

Angulus datus C (*per constructionem.*) æqualis angulo *DAB*: pariter (*per* 32. *hujus*) angulus E in segmento *AEB* positus, æqualis angulo *DAB*: ergo angulus *E* = dato ang. *C*: quare segmentum circuli *AEB* capit angulum æqualem angulo dato C. q. e. f.

Propos. XXXV. *Theor.* XXIX.

Si in circulo duæ rectæ AB, CD se utcumque secent in E.

Dico CE x ED = AE x EB.

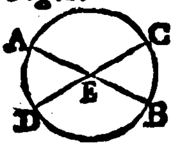
Circa hanc linearum sectionem hæc contingere possunt.

1. Quod ambæ lineæ per centrum transeant.
2. Quod una tantum transeat per centrum, aliamque non per centrum transeuntem bipbariam secet.
3. Quod per centrum transiens aliam non per centrum transeuntem

untem non biphariam dividat.

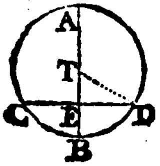
4 Quod neutra illarum linearum per centrum ducatur.

Fig. 1.



Quoad primam hujus propositionis partem hoc per se patet; quia æqualium segmentorum rectangula $AE \times EB$, $DE \times EC$ (*Fig.* 1.) sunt æqualia quadrata, ob æqualitatem linearum AE, DE &c.

Fig. 2.



2. Si recta AB (*Fig.* 2.) transiens per centrum T secet CD extra centrum ductam biphariam in E.

Dico $AE \times EB = CE \times ED$.

Constructio.

Ducatur TD.

Demonstratio.

AB est biphariam divisa in T, & non biphariam in E: quare (*per* 5. 2.)

$AE \times EB$ + quad. ET = quad TB, seu TD:

(Sed [*per* 47. *pri.*]

quad. TD = quad. ED + quad. ET: ergo

$AE \times EB$ + quad. ET = quad. ED + quad. ET.

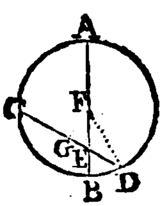
Dempto communi quad. ET remanebit

$AE \times EB$ = quad. ED.

Quia verò CD est biphariam divisa in E.

quad. ED erit CE $\times$ ED: unde sequitur

$AE \times EB = CE \times ED$. q. e. 2. d.



3. Si recta AB transiens per centrum F secet rectam CD extra centrum ductam non bifariam in E.

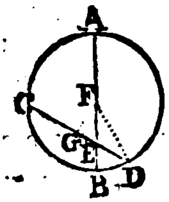
Dico $AE \times EB = CE \times ED$.

Constructio.

A Centro F rectæ CD [*per* 12. *pri.*] perpendicularis ducatur FG, addaturque FD.

De-

Demonstratio.



RECta AB est bifariam divisa in F, & non bifariam in E:

quare (per 5. secundi.)

$AE \times EB +$ quad. $FE =$ quad. FB, hoc est q. FD.

Sed (per 47. primi.)

q. $FE =$ q. $FG +$ q. GE, atq; q. $FD =$ q. $FG +$ q. GD: ergo

$AE \times EB +$ q. $FG +$ q. $GE =$ q. $FG +$ q. GD.

Dempto communi q. FG: erit

$AE \times EB +$ q. GE $=$ q. GD.

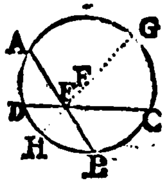
Pariter quia recta CD (per 3. hujus.) est bifariam divisa in G, & non biphariam in E.

(per 5. secundi.) erit

$CE \times ED +$ q. $GE =$ q. GD: ergo

$AE \times EB +$ q. $GE = CE \times ED +$ q. GE.

Ablato communi q. GE: erit



$AE \times EB = CE \times ED$: hoc est rectangulum partium AE, EB æquale rectangulo facto a partibus CE, ED. q. e. 3. d.

4. Tandem si neutra rectarum AB, DC per centrum transeat, se autem secent in E.

Dico $AE \times EB = DE \times EC$.

Constructio.

PEr circuli centrum F, & per intersecationis punctum E notetur recta GH.

Demonstratio.

PEr demonstrata in tertia parte hujus theorematis $AE \times EB = GE \times EH$: atque $DE \times EC = GE \times EH$.

Quare

$AE \times EB = DE \times EC$; hoc est rectangulum a segmentis AE, EB factum æquale rectangulo a segmentis DE, EC comprehenso. q. e. 4. d.

Propos.

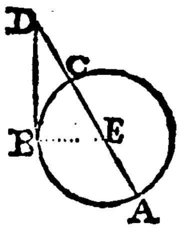
Propos. XXXVI. *Theor.* XXX.

Si extra circulum accipiatur punctum D, a quo ducatur recta DA, quæ circulum secet atque recta BD, quæ circulum tangat.

Dico $AD \times DC = q. DB$.

Primo. Secans *DA* potest transire per circuli centrum.
Secundo. Potest transire extra centrum *E*.

Constructio, quando secans DA transit per centrum E.

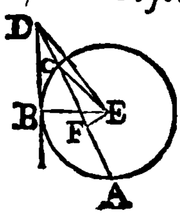


A centro E ad contactum B ducatur recta EB.

Demonstratio.

Recta CA est bifariam divisa in E, & illi in rectum addita CD,
Quare (*per 6. secundi.*)
$AD \times DC + q. EC$, hoc est $q. EB = q. ED$.
Sed (*per 47. pri.*)
$q. ED = q. EB + q. DB$: ergo
$AD \times DC + q. EB = q. EB + q. DB$.
Dempto communi q. EB erit
$AD \times DC = q. DB$.
Quare rectangulum factum a secante DA, & DC est æquale quadrato tangentis DB. q. e. p. d.

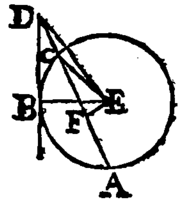
Si secans DA extra centrum E sit ducta.



Constructio.

Recta CA (*per 10. pri.*) bifariam dividatur in F: ex centro E ad F recta signetur EF. Pariter notentur rectæ EB, EC, ED.

Demonstratio.



QVia a puncto contactus B per centrum E ducta est BE (*per 18. hujus,*) angulus EBD est rectus. Pariter quia CA est bifariam divisa in F (*per 3. hujus.*) angulus EFD rectus est.

His manentibus recta CA [*per constructionem*] est bifariam divisa in F & illi in rectum addita CD: Quare (*per 6. secundi.*]

$$AD \times DC + q.FC = q.FD.$$

Addito communi q. FE, erit

$$AD \times DC + \left.\begin{matrix} q.FC \\ q.FE \end{matrix}\right\} = q.FD + q.FE:$$

Sed (*per 47. pri.*)

$$\left.\begin{matrix} q.FC \\ q.FE \end{matrix}\right\} = q.EC, \text{ seu } EB: \ \& \begin{matrix} q.FD \\ q.FE \end{matrix} = q.ED: \text{ quare}$$

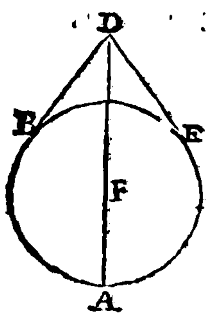
$$AD \times DC + q.EB = q.ED: \text{ sed}$$

(*per 47. pri.*)

$$q.ED = \left.\begin{matrix} q.EB \\ q.DB \end{matrix}\right\} \text{ ergo } AD \times DC + q.EB = \left.\begin{matrix} q.EB \\ q.DB \end{matrix}\right\}$$

Dempto communi q. EB: erit

$AD \times DC = q.DB.$ q. e. d.



Corollarium.

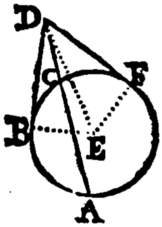
SI ab eodem puncto D duæ rectæ DB, DE circulum tangant: dico illas esse æquales: quia tam quadratum DB, quam quadratum DE [*per hanc prop.*) æquant $AD \times DC$: quare quad. $DB =$ quad. DE; ideoque $DB = DE$.

Pro-

Propos. XXXVII. Theor. XXXI.

Extra circulum accepto puncto D, ab eoque ducta sit secans DA, & incidens DB; si rectangulum DA, DC æquale sit qnadrato DB.

Dico DB circulum tangere.



Constructio,

A Puncto *D* (*per* 17. *bujus.*) ducatur *DF* tangens circulum in F.

Ex centro E notentur rectæ EB, ED, *EF*.

Demonstratio.

CUm a puncto D extra circulum accepto ducta sit secans DA, & tangens DF.

(*per* 36. *bujus.*] erit

AD X DC = quad. DF.

Sed (*per hyp.*)

AD x DC = quad. DB: ergo

[*per axio.* 1.)

quad DB = quad. DF: quare DF = DB.

Quo stante in triangulis DF*E*, DB*E* erunt duo latera DF, FE singula singulis æqualia lateribus DB, BE, basisque D*E* communis utrique triangulo: quare (*per* 8. *pri.*] ang. D F E = ang. *DBE*: sed angulus D*FE* [*per* 18. *bujus.*] est rectus: ergo, & angulus DB*E* rectus erit: igitur [*per corol. prop.* 16. *bujus.*] incidens DB erit tangens circuli ABF. q. e. d.

Elementi Tertij Finis.

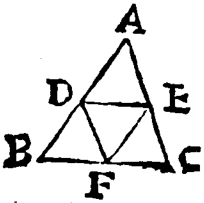
LIBER IV.

EUCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIONES.

Def. I.

Figura rectilinea DEF in figura rectilinea ABC INSCRIBI dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli D, E, F, singula latera AB, BC, CA ejus, in qua inscribitur, tangunt.



Si omnes tres anguli figuræ DEF tangant tria latera figuræ ABC, tunc figura DEF dicitur INSCRIPTA figuræ ABC.

Def. II.

Figura ABC circa figuram DEF DESCRIBI dicitur, cum singula latera figuræ ABC tangunt angulos D, E, F, illius figuræ, circa quam describitur.

Def. III.

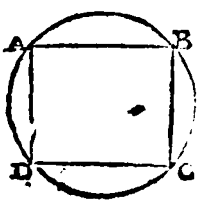


Figura rectilinea ABCD dicitur in circulo ABCD INSCRIPTA, quan-

quando omnes anguli figuræ inſcriptæ tangunt circumferentiam circuli ABCD.

Def. IV.

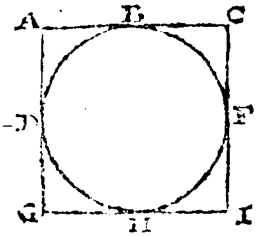
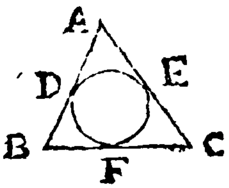


Figura rectilinea ACIG circa circulum BFHD deſcribi dicitur, cum ſingula latera figuræ circumſcriptæ AC, CI, IG, GA tangunt circumferentiam illius circuli BFHD, cui circumſcribitur.

Def. V.

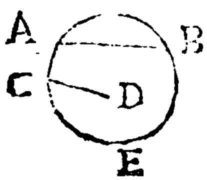


Circulus DEF in figura rectilinea *ABC* inſcribi dicitur, cum circuli periferia DEF tangit omnia latera figuræ *ABC*, cui inſcribitur.

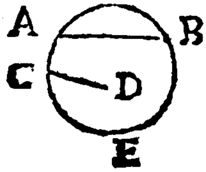
Def. VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, cum circuli periferia tangit omnes angulos illius figuræ, cui circumſcribitur.

Def. VII.



ACCOMODARI, ſeu COAPTARI dicitur in circulo recta linea *AB*, cum ejus extrema, *A*, & *B* fuerint in circuli periferia.

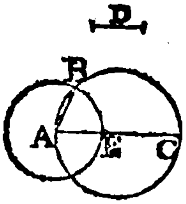


Quia extrema, seu termini rectæ AB sunt in periferia circuli ABE, recta AB dicitur in circulo ABE accomodata non sic recta CD, cum punctum, seu extremum D non sit in periferia ABC.

Propos. I. Probl. I.

In dato circulo *ABC* accomodare rectam æqualem datæ rectæ D, quæ dati circuli diametro non sit major.

Constructio.



DAti circuli ABC ducatur diameter AC: si data recta CD fuerit æqualis diametro AC, factum est, quod quæritur.

Si data D minor sit diametro AC (*per 3. pri.*) auferatur AE = D. Centro A, & distantia AE notetur circulus BE; ducatur AB.

Dico rectam AB esse in circulo accomodatam, & æqualem ipsi D.

Demonstratio.

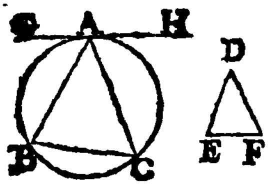
REcta *AE* [*per constructionem*] æqualis ipsi D: *AB* [*per def. circ.*] æqualis ipsi *AE*: ergo (*per axio. 2.*) *AB* = *D*. q. e. f.

Propos. II. Probl. II.

In circulo *ABC* describere triangulum dato triangulo DEF æquiangulum.

DAti circuli BAC [*per 17. tertii.*] ducatur tangens GH, quæ circulum tangat in A. Ad punctum A, & ad rectam GA

(*per*



[*per* 23. *pri.*] constituatur angulus GAB æqualis angulo F; pariter ad idem punctũ A, & ad rectã AH ponatur angulus HAC æqualis angulo *E*, cadetq; recta AC intra rectas AH, & AB, quia duo anguli *E*, & F (*per* 17. *pri.*) sunt duobus rectis minores; duo vero anguli GAB, HAB [*per* 13. *pri.*) duobus rectis æquales: quare angulus HAC minor angulo HAB; ideoque AC cadet intra AH, & AB. Ducatur BC.

*D*ico triangulum ABC esse æquiangulum triangulo D*EF*.

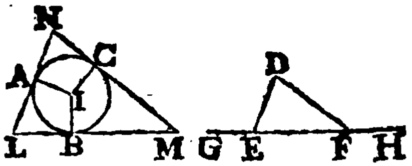
Demonstratio.

ANgulus GA*B* (*per constructionem.*) æqualis ang. F.
Ang. C [*per* 32. *tertij.*] æqualis ang. GA*B*: ergo
Ang. C = ang. F.
Pariter angulus HAC (*per construct.*) = ang. *E*.
Ang. HAC [*per* 32. *tertij.*] = ang. *B*: ergo
Ang. B = ang. *E*.
Quare (*per* 32. *pri.*)
Ang. BAC = ang. D:
Ideoque in circulo BAC descriptum est triangulum BAC æquiangulum dato triangulo D*EF*. q. e. f.

Propos. III. Probl. III.

Circa datum circulum *AB*C describere triangulum dato triangulo DEF æquiangulum.

Constructio.



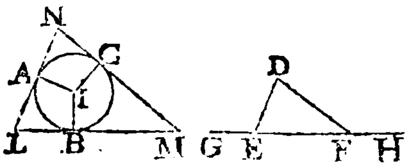
DAti trianguli *EDF* unum latus, ut *EF*, producatur in G, & H.

*E*x I centro dati circuli utcumque recta ducatur IA.

Ad punctum I, & ad rectam AI (*per* 23. *pri.*) constituatur angulus AI*B* = ang. *DEG*. Pariter ad idem punctum I, & ad eamdem rectam AI, ponatur angulus *A*IC, = ang. DFH.

 ctis

In hac constructione recta IC semper cadit extra rectas *AI*, *BI*. & hoc quia duo anguli AIB, AIC (utpote æquales) duobus angulis DEG, DFH sunt quatuor rectis minores: cum autem anguli circa punctum I [*per corol. 1. prop. 15. pri.*] sint quatuor rectis æquales; erit IC extra *AI*, BI.



Per tria puncta *A*, C, *B* (*per 11. pri.*) rectis *AI*, CI, BI ducantur perpendiculares LN, LM, MN, quæ [*per corol. 2. prop. 16. tertii.*] erunt tangentes circuli *ACB*.

Quia vero talium tangentium duæ, uti sunt AN, CN (idem valet de reliquis) efficiunt cum eadem recta duos angulos duobus rectis minores (nam si conceperis rectam ab A ad C ductam, duo anguli CAN, ACN erunt minores duobus rectis); debent concurrere in aliquo puncto N, (*per axio. 13.*) & simili ratione debent tres dictæ tangentes concurrere etiam in punctis L, & M; erit igitur efformatum triangulum NLM circa datum circulum ACB, quod

Dico dato triangulo EDF æquiangulum.

Demonstratio.

IN quadrilatero AIBL (*per corol. 5. prop. 32. pri.*) quatuor anguli sunt quatuor rectis æquales; & quia duo anguli IAL, IBL [*per constructio.*] sunt recti, ideoque duobus rectis æquales: sequitur duos angulos AIB, ALB existere duobus rectis æquales.

Cum autem [*per 13. pri.*] & duo anguli DEG, DEF sint duobus rectis æquales: erunt

$$\text{ang.} \left.\begin{matrix} AIB \\ ALB \end{matrix}\right\} = \text{ang.} \left\{\begin{matrix} DEG \\ DEF \end{matrix}\right.$$

Sed *per constructionem*,)

ang. AIB = ang. DEG: ergo ang. ALB = ang. DEF.

Ob eandem rationem ang. N demonstrabitur æqualis ang. DFE:

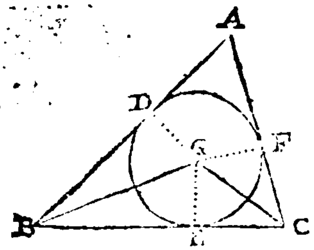
Unde [*per 32. pri.*]

ang. M = ang. *D*: ergo triangulum NLM circa datum circulum ACB descriptum, erit æquiangulum dato triangulo *DEF*. q. e. f.

Pro-

Propos. IV. Probl. IV.

In dato triangulo ABC circulum describere.



Constructio.

EX tribus angulis dati trianguli, duo, uti sunt anguli B, & C (*per 9. pri.*) bifariam dividantur rectis BG, CG concurrentibus in G.

Dico circulum descriptum centro G, distantia GD, esse descriptum in triangulo ABC.

Ex G ad tria latera trianguli ABC (*per 12. pri.*) perpendiculares ducantur GD, GE, GF.

Demonstratio.

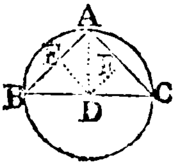
IN triangulis BGE, BGD (*per construct.*) duo anguli GBE, GEB sunt singuli singulis æquales angulis GBD, GDB: & latus GB commune: quare (*per 26. pri.*) GE = GD.

Ob eamdem rationem in triangulis GEC, GFC, recta GE = GF: ergo tres rectæ GD, GE, GF erunt æquales.

Ideoque centro G distantia GD, descriptus circulus, transibit per F, & E: eruntque GD, GF radii ejusdem circuli, quibus cum sint perpdndicularia latera trianguli AB, BC, CA: erunt [*per 16. tertij.*] hæc latera circulum tangentia; quare erit dictus circulus descriptus in triangulo ABC. q. e. f.

Propos. V. Probl. V.

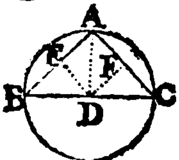
Circa datum triangulum BAC circulum describere.



Constructio.

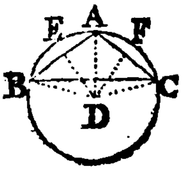
SI datum triangulum sit rectangulum, vel obtusangulum, ut in Fig. I. & II. [*per 10. pri.*] latera AB, AC comprehendentia angulum

Fig. I.



rectū, vel obtusum A bifariam dividantur in pū-ctis E, & F: A punctis E, & F [*per 11. pri.*] lateribus AB, AC signentur perpendiculares ED, FD, quæ concurrant in D: debent enim concurrere, quia si intelligatur recta EF, anguli, DEF, DFE sunt duobus rectis minores.

Fig. II.



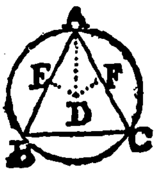
Dico punctum *D* esse centrum circuli describendi circa datum triangulum ABC.

In Figura I. ducatur recta DA.

In Figura II. & III. ducantur rectæ DB, DA, DC.

Demonstratio.

Fig. III.



In triangulis DEB, DEA (*per constructionem.*) latera DE, EB singula singulis æqualia sunt lateribus DE, EA: & anguli a dictis lateribus comprehensi DEB, DEA æquales, quia recti: quare (*per 4. pri.*) DB = DA.

Eodem modo demonstrabitur CD = DA: ideoque rectæ DB, DA, DC æquales: igitur si centro D intervallo DB circulus describatur, transibit per puncta B, A, C: unde erit descriptus circa datum triangulum BAC. q. e. f.

SCHOLIUM.

1. *Quando datum triangulum BAC (Fig. I.) est rectangulum, centrum circuli describendi circa datum triangulum, est in uno ex lateribus trianguli; quia (per 31. tertij) anguli in semicirculo sunt recti.*

2. *Quando triangulum est obtusangulum [Fig. II.] centrum D est extra triangulum, quia angulus obtusus est in segmento semicirculo minore.*

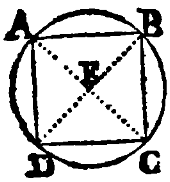
3. *Quando triangulum est acutangulum (Fig. III.) centrum D est intra triangulum, quia anguli acuti semper sunt in segmento semicirculo majore.*

Propos.

Propos. VI. Probl. VI.

In dato circulo ABCD quadratum describere.

Constructio.



DUcantur duæ diametri AC, DB secantes se ad angulos rectos in centro E: iungantur rectæ AB, BC, CD, DA.

Dico ABCD esse quadratum in dato circulo inscriptum.

Demonstratio.

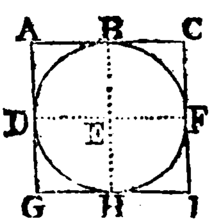
TRiangula AEB, BEC, CED, DEA (*per def. circuli.*) habent duo latera duobus lateribus æqualia, angulosque AEB, BEC &c. æquales, quia rectos: ergo (*per 4. pri.*) bases AB, BC, CD, DA erunt æquales.

Rursus quia anguli DAB, ABC, BCD, CDA sunt in semicirculo [*per 31. tertij.*] sunt recti, ideoque æquales: quare [*per def. 31. pri.*] figura ABCD erit quadratum dato circulo inscriptum. q. e. f.

Propos. VII. Probl. VII.

Circa datum circulum BFHD quadratum describere.

Constructio.



IN dato circulo *BFHD* ducantur duæ diametri se secantes ad rectos angulos BH, DI: ab extremitatibus harum diametrorum ducantur tangentes AC, CI, IG, GA, quæ concurrent in punctis A, C, I, G.

Dico figuram AI a dictis tangentibus comprehensam esse quadratum circa datum datum circulum BFHD descriptum. De-

Demonstratio.

ANguli CFE, ADE [*per constructionem.*] sunt recti: ergo [*per* 28.*pri.* rectæ AG, CI erunt parallelæ.

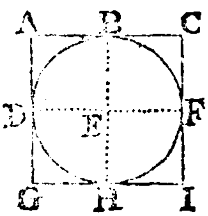
Ob eandem rationem non solum AC parallela GI, verum etiam BH parallela AG, & CI, atque DF parallela rectis AC, & GI: quare (*per def.* 40.*pri.*) figura AI erit parallelogrammum, in quo (*per* 34.*pri.*) AC = GI, atque AG = CI: ulterius AC = DF, & AG = BH. Cum autem DF adæquet BH, erit & AC = AG. Quare in parallelogrammo AI omnia latera erunt æqualia.

Ulterius cum in parallelogrammo AE (*per constructionem*) angulus BE*D* sit rectus, etiam angulus A rectus erit: ergo in parallelogrammo AI [*per corol. prop.* 29. *pri.*] anguli erunt recti: quare AI erit quadratum circa datum circulum BFHD descriptum. q. e. f.

Propos. VIII. Probl. VIII.

In quadrato ACIG circulum describere.

Constructio.



DAti quadrati omnia latera AC, CI, IG, GA, ut in antecedenti figura, (*per* 10. *pri.*) bifariam dividantur punctis B, *D*, H, F; ducanturque rectæ BH, DF se intersecantes in puncto E. Centro E intervallo EB, signetur circulus B*D*HF.

Dico hunc esse circulum in dato quadrato inscriptum.

Demonstratio.

CUm dati quadrati latera AC, GI sint æqualia, & parallela, etiam eorum medietates AB, GH erunt æquales, & parallelæ: quare (*per* 33.*pri.*) AG = BH. Eadem ratione, quia

bH

$BH = CI$: $AC = DF$, atque $DF = GI$: talium rectarum æqualium medietates æquales erunt.

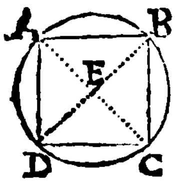
Cum igitur *AB* sit parallela, & æqualis ipsi *DE* (*per* 33.*pri.*) *AE* erit parallelogrammum: ob eamdem rationem parallelogramma erunt CE, IE, GE: quare (*per* 34.*pri.*) $BE = AD$, atque $DE = AB$; sed $AD = AB$: ergo $DE = EB$.

Eodem modo demonstrabitur $EB = EF$, atque $FF = EH$: igitur centro E, atque distantia unius æqualium rectarum, ut *EB* descriptus circulus transibit per puncta D, H, F: unde erit inscriptus dato quadrato AI. q. e f.

Propos. IX. Probl. IX.

Circa datum quadratum ABCD circulum describere.

Constructio.



Dati quadrati ABCD ducantur duæ diametri AC, BD se secantes in E.

Dico circulum ex centro E, & distantia EA signatum esse dato quadrato ABCD circumscriptum.

Demonstratio.

In triangulo BAD (*per hyp.*) $BA = AD$, & angulus *BAD* rectus: quare (*per* 5.*pri.*) anguli ABD, ADB erunt semirecti. Hoc idem demonstrabitur de reliquis angulis ad puncta B, C, D, constitutis, videlicet quod sint omnes semirecti.

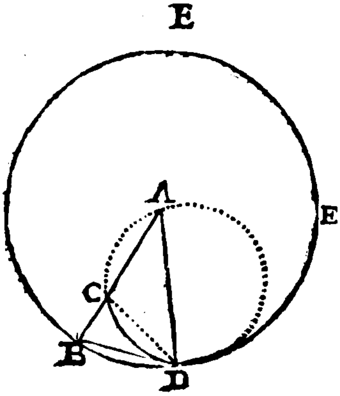
Quo stante, cum in triangulo AEB, duo anguli EAB, EBA (*per demonstrata*) sint æquales, quia semirecti: sequitur (*per* 6.*pri.*) $EA = EB$. Hoc idem demonstrabitur de rectis B, EC &c.: quare rectæ *EA*, *EB*, *EC*, *ED* erunt æquales.

Si ergo centro *E* intervallo *EA* fuerit descriptus circulus, per puncta *B*, *C*, *D* transibit; unde erit circa datum quadratum descriptus. q. e. f.

Propos.

Propos. X. Prob. X.

Isosceles triangulum efformare, cujus quilibet angulorum ad basim sit reliqui anguli duplus.



Constructio,

Accipiatur quævis recta AB, quæ (*per* 11. *secundi*) taliter dividatur in C, ut $AB \times BC =$ q. CA. Centro A, & distantia *AB* notetur circulus *BDE*. In hoc circulo (*per* 1. *hujus.* accomodetur recta *BD* $=$ *CA*: Ducatur AD.

Dico triangulum *DAB* illud esse, quod quæritur.

Ducatur *CD*. Circa triangulum *ACD* [*per* 5. *hujus.*] describatur circulus *ACD*.

Demonstratio.

Recta AB [*per constructionem*] est taliter divisa in C, ut $AB \times BC =$ q. CA. *BD* facta est æqualis CA: quare $AB \times BC =$ q. *BD*.

Cum autem punctum *B* sit extra circulum *ACD*, & recta B*A* sit secans circulum, & BD sit incidens in periphæriam.

(*per* 37. *tertij.*)

recta *BD* in *D* tanget circulum *ACD*.

ergo (*per* 32. *tertij.*)

angulus *BDC* $=$ ang. *A*.

addito communi angulo C*DA*, erit

angulus *B*DC $+$ ang. C*DA* $=$ ang. *A* $+$ ang. C*DA*.

hoc est ang. *BDA* $=$ ang. *A* $+$ ang. C*DA*:

sed (*per* 32. *pri.*)

ang. *BCD* $=$ $\left.\begin{matrix}\text{ang. } A \\ \text{ang. CDA}\end{matrix}\right\}$: quare

Angulus *BCD* $=$ *BDA*.

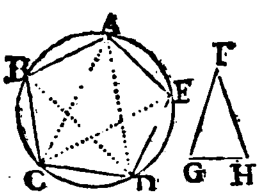
quia

quia vero [*per hyp.*]
angulus *BDA* = ang. *DBA*: erit
angulus *BCD* = ang. *DBA*.
unde [*per 6. pri.*]
latus CD = *DB*.
cum autem DB (*per construct.*) sit æquale CA, erit
latus *CD* = CA.
igitur (*per 5. pri.*)
angulus CDA æqualis ang. A.
Cum igitur angulus *B* D A demonstratus sit
æqualis ang. CDA + ang. A: erit
angulus *B*DA duplus solius anguli A
Demum, quia (*per hyp.*)
angulus *DBA* = ang. *BDA*: erit &
angulus D*BA* duplus anguli *A*: ergo
isosceles triangulum *BA*D habet utrumque angulorum ad
basim duplum reliqui. q. e: f.

Propos. XI. Probl. XI.

In dato circulo ABCDE pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

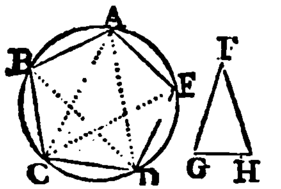
Constructio.



PEr antecedens problema efformetur triangulum isosceles FGH, cujus uterque angulorum ad basim G, & H sit duplus reliqui anguli F.
In dato circulo [*per 2. hujus.*] inscribatur triangulum *ACD* æquiangulum triangulo FGH.
*A*nguli *A*CD, *A*DC (*per 9. pri.*) bifariam dividantur rectis CE, *DB*.
*D*ucantur rectæ *AB*, *B*C, CD, DE, *EA*,
Dico pentagonum *ABCDE* esse æquilaterum, & æquiangulum.

De-

Demonstratio.



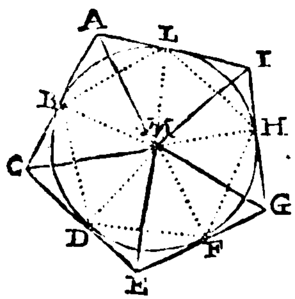
QVia (*per constructionem*) quilibet angulorum *ACD*, *ADC* est duplus anguli *CAD*, suntque dicti anguli a rectis *CE DB* bifariam divisi: quare anguli *CDB*, *BDA*, *DCE*, *ECA* singuli æquales angulo *CAD*: ergo (*per 26. terii.*) arcus, quibus insistunt æquales; ideoque [*per 29. tertij*. rectæ *CB*, *BA*, *AE*, *ED DC* æquales.

Ulterius cum demonstrati sint æquales quinque arcus *CB*, *BA* &c. ex his tres quomodocum];accepti,erunt tribus æquales.His manentibus quia anguli *BAE*, *AED* &c. insistunt tribusarcubus (*per 27.tertii.*)dicti anguli æquales erunt:ergo figura rectilinea, *ABCDE*, cum habeat quinque latera æqualia, & quinque angulos æquales, erit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum dato circulo inscriptum. q. e. f.

Propos. XII. Prob. XII.

Circa datum circulum BLHFD describere pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.

Constructio.



IN dato circulo *BLHFD* [*per 11. hujus*] describatur,pentagonum æquilaterum, & æquiangulum *BLH FD*. Ex punctis *B*, *L*, *H*, *F*, D ad centrum M ducantur rectæ *BM*, *LM*, *HM*, *FM*, DM, ad quas notentur perpendiculares *CA*, *AI*, *IG*, *GE*, *EC*, quæ concurrent in punctis C, *A*, *I*, *G*, *E*; quia anguli *CDB*, *CBD* sunt duobus rectis minores.

Dico pentagonum *ACEGI* circa datum circulum *BDFHL* de-

descriptum esse æquilaterum, & æquiangulum.
Ducantur rectæ *AM*, CM &c.

Demonstratio.

IN triangulo rectangulo *EDM* (*per 47. pri.*)

$\left.\begin{matrix} q.\,ED \\ q.\,DM \end{matrix}\right\} = q.\,EM.$

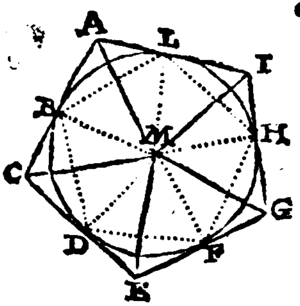
Pariter in triangulo rectangulo EFM (*per eamdem 47.*)

$\left.\begin{matrix} quad.\,EF \\ quad.\,FM \end{matrix}\right\} = quad.\,EM$: quare

(*per axio. 1.*)

$\left.\begin{matrix} quad.\,ED \\ quad.\,DM \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} quad.\,EF \\ quad.\,FM \end{matrix}\right)$

demptis æqualibus $\left.\begin{matrix} quad.\,DM \\ quad.\,FM \end{matrix}\right\}$: erit



quad. ED = quad. EF: quare ED = EF. hoc demonstrato.

In triangulis DME, FME latera DM, ME singula singulis æqualia lateribus FM, ME, basisque ED = basi EF: ergo

[*per 8. pri.*]

angulus DME = ang. FME, atque angulus DEM = ang. FEM: igitur angulus DMF duplus ang. EMF.

Eodem modo demonstrabitur ang. FMH [*idem valet de reliquis*] duplus ang. FMG.

quia vero (*per 27. tertii.*)

angulus DMF = ang. FMH, horum medietates, hoc est angulus EMF, & ang. GMF, erunt æquales.

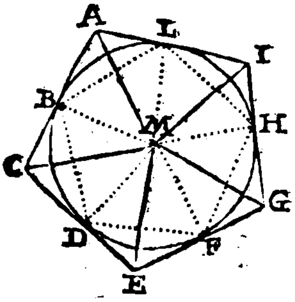
Hoc demonstrato

In triangulis EMF, GMF, anguli FEM, FME singuli singulis æquales erunt angulis FGM, FME, latusque FM commune: quare

(*per 26. pri.*)

EF = FG: ideoque EG dupla EF.

Eodem modo demonstrabitur



EC dupla ED, & CA dupla CB &c.

Cum autem superius fuerit demonstratum

EF = ED, erit & EG = EC.

Consimili modo demonstrabitur EC = CA; CA = AI &c.

Quamobrem pentagonum ACEGI circulo circumscriptum, erit æquilaterum.

Quod postea sit, & æquiangulum, ita demonstratur.

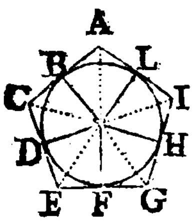
Anguli MEF, MGF superius non solum sunt demonstrati æquales, verum etiam medietates angulorum DEF, FGH: quare

Angulus DEF = ang. FGH: quod cum de reliquis angulis HIL, LAB, BCD etiam demonstrari possit; pentagonum erit etiam æquiangulum. q. e. f.

Propos. XIII. Probl. XIII.

In dato pentagono ACEGI æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

Constructio.



DAti pentagoni, duo, propinqui anguli, videlicet IAC, ACE (*per 9. pri.*) bifariam dividantur rectis lineis AO, CO concurrentibus in O, quod punctum O dico esse intra datum pentagonum: nam si ductæ sint rectæ OE, OG, OI demonstrabitur eas esse æquales, quia (*per hyp.*) in triangulis ACO, ECO latera AC, CO singula singulis æqualia lateribus EC, CO, & anguli ACO, ECO (*per constructionem*) æquales: quare [*per 4. pri.*] basis AO = basi EO, & ang. CAO = ang. CEO.

(*per*

Cum (*per hyp.*)
angulus CAI = ang.CEG, & ang. CAO medietas ang. CAI; erit æqualis ang.CEO medietas ang. CEG: quare etiam ang.CEG erit bifariam divisus a recta EO.

Hoc modo poterit demonstrari dati pentagoni reliquos angulos EGI, GIA esse bifariam divisos a rectis GO, IO.

His demonstratis

In triangulis ACO, ECO latera AC, CO singula singulis æqualia lateribus EC, CO, & angulus ACO = ang. ECO: ergo (*per 4. pri.*) basis AO = basi EO. Eadem demonstratione adhibita, erunt rectæ AO, CO, EO, GO, IO æquales: quare punctum O erit intra pentagonum.

Hoc probato a puncto O ad singula pentagoni latera ducantur perpendiculares OB, OD, OF, OH, OL.

Demonstratio.

IN triangulis ABO, ALO duo anguli BAO, OBA singuli singulis æquales sunt angulis LAO, OLA, latusque AO commune: quare (*per 26. pri.*) BO = LO.

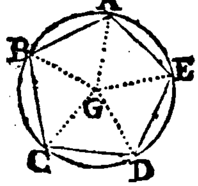
Quod dictum est de perpendicularibus BO, LO, etiam de reliquis OH, OF, OD intelligendum. Cum igitur istæ perpendiculares sint æquales, si centro O intervallo OB fuerit descriptus circulus transibit per puncta B, D, F, H, L;

Vlterius quia [*per constructionem*] rectæ OB, OD &c. sunt pentagoni lateribus perpendiculares, dicta latera (*per corol. 16. tertij.*) tangent circulum: unde circulus BDFHL, erit dato pentagono inscriptus. q. e. f.

Propos. XIV. Probl. XIV.

Circa datum pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum, circulum describere.

Constructio.



Duo propinqui anguli *BAE*, *ABC* (*per 9. pri.*) bifariam dividantur rectis *AG*, *BG*, quæ (*per demonstrata in prop. 13. hujus.*] intra pentagonum cōcurrunt in G: ducantur rectæ *GE*, *GD*, *GC*.

Demonstratio.

Dati pentagoni omnes anguli (*per constructionem*, & *per demonstrata in antecedente prop.*]sunt bifariam divisi a rectis GA, GB, GC, GD, GE. Cum autem (*per suppositum*) datum pentagonum ABCDE sit æquiangulum; talium angulorum medietates erunt æquales: quare.

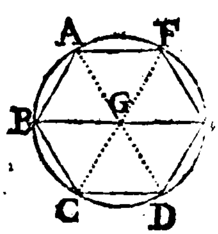
In triangulo AGB (idem de reliquis triangulis intelligendum) angulus GAB = ang. G B A: ergo (*per 6. pri.*) GA = GB.

Si igitur omnes rectæ a puncto G ad pentagoni angulos ductæ sunt æquales, circulus centro G, atque distantia G A descriptus, transibit per puncta A, B, C, D, E: ideoque erit dato pentagono circumsciptus. q. e. f.

Propos. XV. Probl. XV.

In dato circulo A E C exagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Constructio.



Dati circuli (*per 2. tertij.*] inveniatur centrum G. ducatur diameter B G E. In circulo (*per 1. hujus.*) accomodentur rectæ BA, BC singulæ æquales semidiametro BG. Notentur rectæ ACD, CGF; addantur quæ rectæ CD, DF, FF: FA.

Dico figuram ABCDFF esset exagonum æquilaterum, & æquiangulum dato circulo inscriptum. *De-*

Demonstratio.

DUo triangula BAG, BCG (*per constructionem*) sunt æquilatera, ideoque (*per corol. prop. 5. pri.*) æquiangula. Cum autem [*per 32. pri.*] in triangulo tres anguli sint duobus rectis æquales; angulus BGA erit tertia pars duorum rectorum: hoc idem dicendum de angulo BGC: quare angulus BGA, = ang. BGC, atque simul æquabunt duas tertias partes duorum rectorum.

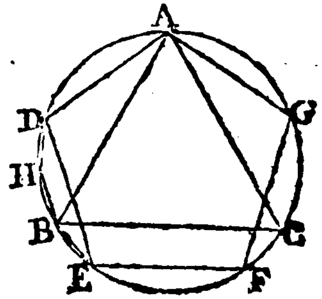
Insuper quia (*per 13. pri.*) anguli CGA, CGD sunt æquales duobus rectis, & angulus CGD tertia pars duorum rectorum: consequenter tres anguli BGA, BGC, CGD inter se æquales.

Cum autem (*per 15. pri.*) dictis angulis æquales sint anguli DGE, EGF, FGA; sex anguli ad centrum G constituti, erunt æquales: quo stante in triangulis BGA, BGC &c. (*per 4. pri.*) bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt: ergo Hexagonum erit æquilaterum.

Insuper cum æquilatera sint triangula AGB, BGC &c. (*per corol. 5. pri.*) talium triangulorum anguli erunt æquales: ex quo sequitur, angulum ABC (idem valet de reliquis) adæquare angulum BCD, cum ambo ex æqualibus angulis componantur: quare Hexagonum dato circulo inscriptum, erit æquilaterum, & æquiangulum. q. e. f.

Corollarium.

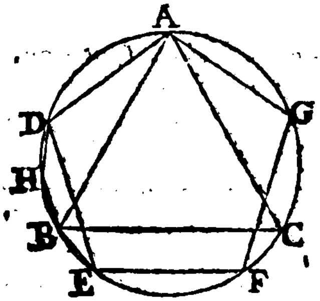
HInc manifestum est Hexagoni latus æquale circuli semidiametro; quia BA Hexagoni latus [*per demonstrata*] æquat BG.



Propos. XVI. Probl. XVI.

In dato circulo ABC describere quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum.

Constructio.



IN dato circulo [*per 2. huius.*] describatur triangulum æquilaterum ABC. Rursus in eodem circulo (*per 11. hujus.*) describatur pentagonum ADEFG æquilaterum, & æquiangulum, cujus unus angulus sit ad punctum A constitutus. Arcus DB (*per 11. tertij.*) bifariam dividatur in H.

Dico rectam DH esse latus quintidecagoni in dato circulo describendi.

Demonstratio.

QVia triangulum ABC (*per constructionem*) est æquilaterum (*per corol. 5. pri.*) erit æquiangulum: quare (*per 28. tertij.*] arcus AB, BC, GA æquales erunt.

Ob eamdem causam (*per constructionem*) ADEFG est pentagonum æquilaterum ergo(*per 28. tertij*] quinque arcus AD, DE, EF, FG, GA æquales erunt.

His stantibus qualium partium quindecim est tota circumferentia ABC, talium partium quinque erit arcus AB, & tres erit arcus *AD*: quare istarum partium duas continebit arcus DB: cum autem arcus DB [*per constructionem*) sit bifariam divisus in H, erit arcus DH pars decimaquinta totius circumferentiæ *ABC*, unde recta DH erit corda, siuè subtensa decimæquintæ partis integri circuli *ABC*: si igitur in dato circulo (*per 1. hujus.*) accomodentur rectæ ipsi DH æquales, in circulo erit efformatum quintidecagonum æquilaterum, cujus omnes anguli cum insistant tresdecim ex dictis arcubus æqualibus [*per 27. tertij.*) erunt inter se æquales: quamobrem in dato circulo descriptum erit quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. q. e. f.

Elementi Quarti Finis.

LIBER

LIBER V.
EUCLIDIS
ELEMENTUM QUINTUM.

DEFINITIONES.

Definitio I.

PARS dicitur magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor metitur majorem.

SI AB sit magnitudo magnitudinis AC, atque minor quam AC, & ipsam AC metiatur, tunc PARS vocatur.

Quia verò minor magnitudo potest majorem adæquatè, & inadæquatè metiri, ideo pars divitur in ALIQUOTAM, & ALIQUANTAM. Pars ALIQUOTA dicitur illa, quæ aliquoties sumpta adæquatè metitur suum totum: talis est linea trium palmorum, quæ ter sumpta adæquatè metitur lineam novem palmorum.

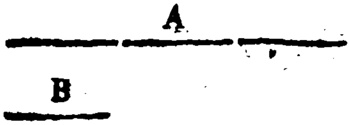
Pars ALIQUANTA dicitur illa, quæ inadæquatè metitur suum totum, talis est linea 4. palmorum respectivè ad lineam 10. palmorum: nam linea 4. palmorum bis accepta deficit, ter verò excedit lineam 10. palmorum.

SCHOLIUM.

Superius data Euclidis definitio videtur intelligenda de sola parte ALIQUOTA, quia hæc aliquoties accepta metitur suum totum, non sic verò pars ALIQUANTA, quæ aliquoties sumpta vel excedit, vel deficit a suo toto. Addo insuper, partem ALIQUANTAM ab Euclide in 7. Elem. lib., non partem, sed partes *appellari, & rectè, quia linea 4. palmorum relativè ad lineam 6. palmorum non partem, sed duas tertias partes continet.*

Def. II.

MULTIPLEX dicitur major minoris, quando minor metitur majorem.



Si B aliquoties sumpta metiatur A, tunc A vocatur multiplex ipsius B.

Def. III.

RATIO appellatur duarum magnitudinum ejusdem generis mutua secundum quantitatem habitudo.

Quotiescumque duæ magnitudines ejusdem generis, uti sunt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, vel duo solida ad invicem comparantur secundum quantitatem quatenus scilicet una quantitas sit major, minor, vel æqualis alteri; talis comparatio, seu respectus dicitur RATIO, & a nonnullis PROPORTIO.

Nota. Illa quantitas, quæ ad aliam comparatur vocatur ANTECEDENS, illa verò alia, ad quam comparatur, dicitur CONSEQUENS.

Si magnitudo A comparetur ad B; tunc A dicitur antecedens, & B consequens: Si postea B referatur ad A, erit B antecedens, & A consequens.

SCHOLIUM.

De rationum divisione.

RATIO superius definita universaliter accepta partitur in rationem rationalem, seu exponibilem, & irrationalem, seu ineffabilem.

Primo. Ratio rationalis illa dicitur, quæ numeris exprimi potest: talis est illa ratio, quæ cadit inter magnitudines A, & B, dummodo exprimi possit numeris 20. & 10.; qui numeri indicant, rationem A ad B esse duplam. Se-

Secundo. Ratio irrationalis illa vocatur, quæ numeris exhiberi nequit: talis est illa ratio, quæ cadit inter diametrum quadrati, & latus ejusdem quadrati, uti ab Euclide in prop. 117, lib. 10. fuit demonstratom.

Alij vero Scriptores rationalem rationem exponunt, dicendo, eam esse, quæ cadit inter quantitates commensurabiles, nempè illas, inter quas datur communis pars aliquota: propterea numerus ad numerum rationalem semper habebit rationem, quia saltem unitas semper est communis mensura omnium numerorum; uti patet in his numeris 7, & 5, quorum uterque ab unitate mensuratur.

Irrationalem postea rationem exponunt, dicendo, illam reperiri inter quantitates, quarum nulla pars communis aliquota reperitur, uti evenit in diametro, & latere quadrati, cum hæ duæ quantitates nullam habeant communem partem aliquotam, quæ tam diametrum, quam latus quadrati valeat mensurare; quemadmodum ab Euclide in prop. 117. lib. 10. fuit demonstratum.

Nota. Numerus ad numerum semper habet rationem rationalem, ideoque Authores, ut ostendant inter magnitudines cadere rationem rationalem, communiter dicunt habere rationem cadentem inter numerum, & numerum.

Tertio. Rationalis ratio denuo subdividitur in rationem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis ratio vocatur illa, quæ inter æquales magnitudines reperitur; uti est illa, quæ inter 4, & 4; 10, & 10. reperitur.

Inæqualitatis ratio appellatur illa, quæ inter inæquales magnitudines reperitur, uti est illa, quæ habetur, dum numerus 20. ad 10, vel ad 7. comparatur.

Quarto. Hæc inæqualitatis ratio iterum subdividitur in rationem majoris, atque minoris inæqualitatis. Majoris inæqualitatis ratio dicitur, dum major magnitudo ad minorem refertur: ex adverso illa ratio, quæ habetur, dum minor quantitas ad majorem refertur, minoris inæqualitatis ratio nuncupatur.

Quinto. Utraque harum rationum in quinque species partiri solet, quæ his nominibus appellantur.

Ratio Multiplex
Superparticularis.
Superpartiens.
Multiplex superparticularis.

Mul-

Multiplex Superpartiens.

Tria priora genera dicuntur ſimplicia; duo vero poſteriora compoſita appellantur.

Sexto. Ratio MULTIPLEX habetur, dum major quantitas ad minorem comparata, eam pluries continet, uti evenit, dum numerus 4. ad 2. comparatur.

Quo ad multiplicium ſpecies, quando major quantitas ad minorem comparata, eam bis comprehendit, dicitur DUPLA: ſi ter TRIPLA; ſi centies CENTUPLA, ut in ſequenti Tabula.

Ratio	4 —	2	*Dupla.*
Ratio	6 —	2	*Tripla.*
Ratio	8 —	2	*Quadrupla.*
Ratio	10 —	2	*Sextupla &c.*

Septimo. SUPERPARTICULARIS ratio dicitur, quādo major quantitas minorem ſemel continet, & id quod remanet, eſt pars aliquota minoris; uti cernere licet, dum numerus 6. ad numerum 4. refertur; ſiquidem 6. ſemel continet 4., atque reſiduum 2. eſt pars aliquota numeri minoris 4.

Octavo. Quantum ad ſpecies rationum ſuperparticularium eſt obſervandum, quod quando major quantitas minorem ſemel continet, & inſuper reſiduum eſt medietas minoris, dicitur ratio SESQUIALTERA: Si vero contineat ſemel, & reſiduum ſit tertia pars minoris, appellatur ratio SESQUITERTIA; quod de reliquis venit intelligendum, ut patet ex appoſita tabula.

Ratio	3 —	2.	*Seſquialtera.*
Ratio	8 —	6.	*Seſquitertia.*
Ratio	10 —	8.	*Seſquiquarta.*
Ratio	12 —	10.	*Seſquiquinta. &c.*

Nono. Ratio SUPERPARTIENS dicitur, quando major quantitas relata ad minorem, eam ſemel continet, & id quod reſtat collectim ſumptum eſt pars Aliquanta minoris. Hoc clarè conſtat, dum numerus quinarius ad ternarium refertur; ſiquidem numerus quinarius ſemel continet ternarium, quique reſtat binarius, eſt pars Aliquanta numeri ternarij.

Sub hoc rationis genere innumeræ continentur ſpecies, nam quæ remanet pars aliquanta poteſt eſſe duæ tertiæ partes minoris: pari-

riter potest esse tres quartæ partes ejusdem minoris; quatuor quintæ; tres quintæ &c.

Si major quantitas semel contineat minorem, atque residuum sit duæ tertiæ partes minoris quātitatis, tunc dicitur SUPERBIPARTIENS TERTIA. Si residuū sit tres quartæ partes minoris, appellatur SUPERTRIPARTIENS QUARTAS, ut in sequēti Tabula.

Ratio 5 — 3. Superbipartiens tertias.
Ratio 7 — 4. Supertripartiens quartas.
Ratio 9 — 5. Superquadripartiens quintas.
Ratio 9 — 7. Superbipartiens septimas.

Hæc de simplicium rationum generibus.

De Compositis.

Decimo. Ratio MULTIPLEX SUPERPARTICULARIS vocatur, dum major quantitas pluries minorem continet, insuperque partem aliquotam minoris. Si enim A bis contineat B, & insuper partem aliquotam ipsius B, hujusmodi ratio dicenda erit MULTIPLEX SUPERPARTICULARIS, ut in hac tabula.

Ratio 10 — 4. Dupla sesquialtera.
Ratio 13 — 3. Quadrupla sesquitertia.
Ratio 26 — 8 Tripla sesquiquarta.
Ratio 11 — 5 Dupla sesquiquinta.

Undecimo. Ratio MULTIPLEX SUPERPARTIENS dicitur, quando major quantitas pluries continet minorem, & insuper partem aliquantam minoris: Si enim major quantitas A pluries contineat minorem B, & residuum sit pars aliquāta ipsius B; talis ratio dicēda erit MULTIPLEX SUPERPARTIENS, ut in his exemplis.

Ratio 8 — 3. Dupla superbipartiens tertias.
Ratio 11 — 4. Dupla supertripartiens quartas.
Ratio 19 — 5. Tripla superquadripartiens quintas.
Ratio 19 — 7. Dupla superquintupartiens septimas.

Hæc de rationibus majoris inæqualitatis.

Duodecimo. Sub illo rationum genere, quod minoris inæqualita-

tis.

tis dicitur, dum scilicet minor quantitas ad majorem refertur, tot rationum species continentur, quot sub ratione majoris inæqualitatis, ut paulo ante explicavimus. Istæ minoris inequalitatis rationes sola particula SUB indicantur; ut in his exemplis.

Ratio 4 — 6. *Sub sesquialtera.*
Ratio 5 — 7. *Sub superbipartiens quintas.*
Ratio 8 — 18. *Sub dupla sesquiquarta.*
Ratio 5 — 18. *Sub tripla supertripartiens quintas.*

Defin. IV.

PROPORTIO dicitur rationum similitudo.

QUando quantitates ad invicem comparatæ similes obtinent rationes, uti sunt rationes, cadentes inter 12., & 4.: & inter 9., & 3. talis rationum similitudo, siuè uniformitas PROPORTIO appellatur. *A* Græcis dicitur *ANALOGIA*, & a quam plurimis Latinis *PROPORTIONALITAS* vocatur.

De varijs Proportionum speciebus.

SCriptores tres assignant Proportionum species, quæ sunt
Proportio GEOMETRICA.
Proportio ARITHMETICA.
Proportio ARMONICA, siuè MUSICA.

Proportio GEOMETRICA dicitur, dum quantitates ad alias comparatæ eamdem habent rationem; si enim quantitates *A*, & B comparatæ ad C, & D uniformes habeant rationes: in tali casu hæc erit dicenda proportio GEOMETRICA: Si *A* bis contineat C, pariterque B bis contineat D; talis rationum similitudo componit proportionem GEOMETRICAM.

Hæc GEOMETRICA proportio partitur in CONTINVAM, & DISCRETAM

CONTINVA vocatur illa, in qua intermediæ quantitates taliter accipiuntur, ut sint antecedentia, & consequentia rationum, ut in hoc exemplo.

Pro-

Proportio Geometrica continua.

A	B	C	D	E
2 —	6 —	18 —	54 —	162 &c.

In hac enim proportione numerus B (*idem valet de reliquis.*) non ſolum eſt conſequens reſpectiuè ad A, verum etiam antecedens relatiuè ad C; qua de cauſa hæc proportio dicitur continuata.

DISCRETA proportio Geometrica appellatur, dum intermediæ quantitates, ſeu termini ſemel tantum accipiuntur, ita ut fiat veluti rationum ſeparatio: ut in hoc exemplo.

Poportio Geometrica diſcreta.

A	B	C	D
2 —	6 —	20 —	60

In hac proportione B tantummodo eſt conſequens ipſius A, non autem eſt antecedens ipſius C, uti evenit in proportione continua.

Arithmetica proportio dicitur, quando tres, vel plures numeri eamdem obtinent differentiam, uti ſunt iſti numeri.

4 — 7 — 10 — 13 — 16 &c.

Pariter hæc proportio ARITHMETICA in CONTINVAM, atque DISCRETAM partitur.

CONTINVA dicitur, in qua inter medios terminos eadem eſt differentia, ut in ſuperiore exemplo in quo inter 4., & 7., & inter 7., & 10. tres mediant unitates.

DISCRETA proportio Arithmetica vocatur, quãdo inter terminos intermedios eadem non eſt differentia, ut in hoc exemplo.

A.	B.	C.	D.
2 —	4. —	20 —	22

In hac enim proportione illa differentia, quæ eſt inter 2., & 4. non eſt illa, quæ inter 4., & 20. reperitur, ideoq; DISCRETA proportio dicitur.

Pro-

Proportio Arithmetica continua.

2 — 4 — 6 — 8 — 10 — 12 &c.

Proportio Arithmetica discreta.

2 — 4: 20 — 22: 25 — 27 &c.

HARMONICA, siuè MUSICA Proportio dicitur, quando tribus datis quantitatibus, prima ad tertiam eamdem habet rationem quam differentia inter primam, & secundam, ad differentiam inter secundam, & tertiam.

Si enim propositi sint isti tres numeri A. 3 — B. 4 — C. 6, quia eadem est ratio primi A ad tertium C, ac differentiæ inter A, & B ad differentiam inter B, & C, hi numeri dicendi erunt in proportione HARMONICA, siuè MUSICA.

Talis autem proportio HARMONICA, atque MUSICA appellatur, quia Musicæ consonantiæ hac proportione exprimuntur: datis enim his numeris harmonicè proportionalibus

6 — 8 — 12 — 24

Ratio 8. ad 6. Sesquitertia. DIATESSERON, siuè quartam constituit,

Ratio 12. ad 8. sesquialtera côtinet consantiam DIAPENTEN, siuè quintam.

Ratio 12. ad 6. dupla indicat consonantiam DIAPASON, siuè octauam.

Ratio 24. ad 8. tripla ostendit consonantiam DIAPASON, & DIAPENTEN, hoc est duodecimam.

Ratio 24. ad 6. quadrupla exhibet consonantiam DISDIAPASON, siuè decimamquintam.

Hæc de Proportionum diuisione.

Def. V.

Illæ magnitudines inter se rationem habere dicuntur, quæ multiplicatæ possunt sese inuicem superare.

Eucli-

EUclides (*in Def.* 3.) duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem habitudinem RATIONEM vocavit; in hac vero (*Def.* 5.) exponit quid requiratur ad hoc, ut duæ quantitates ejusdem generis rationem habere dicantur, dum inquit, illas tantummodo quantitates dici inter se rationem habere, quarum utravis multiplicata ita augeri possit, ut alteram superet.

Illæ etenim quantitates, quarum una quomodocumque multiplicata nequit alteram superare, & e contra, nullam habere possunt rationem: ex quo colligitur, lineam finitam ad infinitam nullam posse dici habere rationem, quia finita linea quomodocumque multiplicata nequit infinitam lineam superare.

Def. VI.

Prima magnitudo ad secundam, & tertia ad quartam eamdem rationem habere dicuntur, cum primæ, & tertiæ æqualiter multiplicia a secundæ, & quartæ pariter multiplicibus (secundum quamcumque multiplicationem) utrumque ab vtroque, vel æqualia sunt, vel una excedunt, vel una deficiunt, si prout inter se respondent, ita sumpta fuerint.

SEnsus hujus definitionis est, quod positis quatuor magnitudinibus A. B. C. D.

sumptisque primæ A, & tertiæ C pariter multiplicibus, secundum quamcumque multiplicationem: pariterque acceptis aliis æquemultiplicibus secundæ B, & quartæ D, juxta quamcumque multiplicationem, si inter hæc pariter multiplicia talis ordo semper inveniatur videlicet, quod

Quando multiplex primæ A superat multiplicem secundæ B, etiam multiplex tertiæ C superet multiplicem quartæ D.

Quando multiplex primæ A minor est multiplice secundæ B, etiam multiplex tertiæ C minor sit multiplice quartæ D.

Quan-

Quando multiplex primæ A æquat multiplicem ſecundæ B, etiam multiplex tertiæ C æquet multiplicem quartæ D.

Quibuſcumq; acceptis pariter multiplicibus; tunc quatuor propoſitæ magnitudines A. B. C. D. dicendæ erunt in eadem ratione, hoc eſt quod

Ratio primæ A ad ſecundam B ſimilis ſit rationi tertiæ C ad quartam D.

Poſitis quatuor numeris ſumptiſque pariter multiplicibus primi A, & tertii C, ſecundi B, & quarti D, ſecundum quamlibet multiplicationem; ſi, ut in hac tabula, quando multiplex primi A ſuperat multiplicem ſecundi B, etiam multiplex tertii C ſuperet multiplicem quarti D.

A.	B.	C.	D.
6	4	3	2
24:	28:	12:	14.
18:	8:	9:	4.
36:	36:	18:	18.

Quando multiplex primi A minor eſt multiplice ſecundi B, etiam multiplex tertii C minor ſit multiplice quarti D.

Quando multiplex primi A æqualis multiplici ſecundi B, etiam multiplex tertii C æqualis multiplici quarti D.

Hoc ſervato ordine inter hæc pariter multiplicia in quacumque multiplicatione: quatuor numeri 6 — 4 — 3 — 2 dicentur habere eamdem rationem, hoc eſt

Ratio 6 ad 4 eadem ſiuè ſimilis rationi 3 ad 2.

SCHOLIUM.

Nonnulli ex modernis Scriptoribus contendunt, hanc Euclidis definitionem potius inter propoſitiones demonſtrandas, quam inter definitiones eſſe reponendam; quorum ratio potiſſima eſt, quia nimis obſcura eſt illa neceſſaria connexio, quæ cadit inter ordinem pariter multiplicium ſuperius ab Euclide propoſitum, & illam rationum ſimilitudinem, quam habent illæ quantitates, quarum ſunt æque multiplicia. Et ſanè, ſi veritatem fateri volumus, etiam ſup-

supposito, quod in quacumque multiplicatione, quando multiplex primæ magnitudinis superat multiplicem secundæ, etiam multiplex tertiæ superet multiplicem quartæ: quando æquale, æquale, & quando minor, minor, ut in Euclidiana definitione; non apparet sufficiens ratio ad dicendum illas magnitudines eamdem habere rationem, licet talium magnitudinum æquemultiplicia servent ordinem superioritatis, inferioritatis, & æqualitatis ab Euclide præscriptum: quamobrem dicti Authores volunt hanc veritatem esse demonstrandam, non autem sine demonstratione tanquam definitionem admittendam.

Quamobrem illi Scriptores, qui Euclidianam definitionem recipere nolunt, sequentem proponunt, dicendo

Datis quatuor magnitudinibus A.B.C.D. si quemadmodum prima A continet, vel continetur in secunda B; ita tertia C contineat, vel contineatur in quarta D; datæ magnitudines dicendæ erunt in eadem ratione.

Ad ostendendum postea, quando nam una magnitudo toties, seu ita contineat, vel contineatur in alia, quoties alia aliam continet, vel in alia continetur, ad ALIQUOTAS PARTES SIMILES recurrunt, illas scilicet, quæ æqualiter sua tota mensurant, uti evenit in partibus 2. & 5. respectivè ad tota 8., & 20., cum 2. æqualiter mensuret 8., ac 5. mensurat 20. quod idem est ac dicere.

Quando prima magnitudo æqualiter continet secundam, ac tertia contineat quartam insuperque eamdem partem aliquotam, vel easdem partes aliquantas, illæ magnitudines dicendæ sunt proportionales, hoc est eamdem rationem habentes: uti cernere licet in his numeris 12.5.24.10. primus enim numerus 12. bis continet secundum 5., & insuper duas partes quintas ipsius secundi: pariter tertius numerus 24. bis continet quartum numerum 10., & insuper duas quintas partes ipsius numeri 10: quare secundum hanc definitionem ratio 12. ad 5. eadem erit ac ratio 24. ad 10.

Hac in re satis dubia, an scilicet in definiendis magnitudinibus eamdem rationem habentibus accipiendus sit ordo æquemultiplicium, uti docet Euclides, vel recurrendum sit ad partes aliquotas similes, uti volunt aliqui Modernorum, placet addere sequentia.

Quia Euclides voluit definire magnitudines eamdem rationem, tam rationalem, quam irrationalem habentes, coactus fuit recurrere ad illum pariter multiplicium ordinem, quem supra explicavimus,

mus, quia nil notius habuit, quo exponeret magnitudines eamdem rationem, tàm rationalem, quam irrationalem habentes.

Moderni Scriptores, qui eamdem magnitudinum rationem in aliquotarum partium similitudinẽ refundunt, solas magnitudines eamdem rationalem rationem habentes comprehendunt, non autem irrationalem, quia irrationalis ratio nullam admittit partem aliquotam, vel aliquantam, secus non esset ratio irrationalis.

His stantibus videtur dicendum Euclidianam proportionalium magnitudinum definitionem, tam rationales, quam irrationales rationes comprehendere; Modernorum verò definitionem ad solas rationes rationales sẽ extendere, non autem ad irrationales.

Neque sat est opponere contra Euclidis definitionem dicendo omnino delitescere connexionem cadentem inter multiplicium ordinem, & identitatis rationem; quia satis manifestum est haud necessarium esse rationem reddere, cur scilicet res uno, vel alio modo definiantur, & in apertum ponere connexionem cadentem inter definitionem, & rem definitam; cum satis sit quod nunquam res definita de aliqua re affirmetur, nisi prius fuerit demonstratum definitionem eidem rei convenire: qui definitionum rationes inquirunt, eas cum propositionibus confundunt.

Euclides in 10. defin. lib. primi Elementorum, angulum rectum illum dicit, qui fit a recta linea super rectam cadente, dum angulos deinceps æquales facit. De hac definitione rationem quærere, cur scilicet Euclides taliter angulum rectum definiverit, ridiculum foret, quia definitio omnem rationem excludit, secus non esset definitio. Quod de anguli recti definitione dictum est, de hac sexta definitione venit intelligendum.

Addo insuper asserentes definitionem Euclidis tamquam illegitimam, aliamque proponentes, ut propositiones demonstrent, aliqua ponere axiomata, circa quæ maior est difficultas, quam circa definitionem ab Euclide propositam, ut sedulo considerantibus clarè apparebit.

Cum igitur per datam Euclidis definitionem secluso quocumque axiomate, haud satis tuto, omnes huius Elementi Propositiones demonstrentur, satius duxi Euclidianam definitionem recipere, quam propositiones demonstrandas tamquam axiomata affirmare.

Defin.

Def. VII.

Illæ magnitudines, quæ eamdem habent rationem, PROPORTIONALES vocentur.

Signa quatuor magnitudinum proportionalitatem indicantia, hæc sunt

A : B : : C : D

Quibus signis semper indicabitur rationem A ad B esse illam, quam obtinet C ad D ; quod est idem ac dicere.

uti A ad B, ita C ad D.

Def. VIII.

Prima magnitudo ad secundam dicitur habere majorem rationem, quam tertia ad quartam, cum suppositis pariter multiplicibus primæ, & tertiæ, atque secundæ, & quartæ, in aliqua multiplicatione multiplex, primæ excedit multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non ex cedit multiplicem quartæ.

A.	B.	C.	D.
10.	4.	6.	3.
30:	28:	18:	21.

Positis quatuor numeris, quia contingere potest, quod sumptis pariter multiplicibus A, & C, atque B, & D, dum multiplex primi A superat multiplicem secundi B, multiplex tertii C non superet multiplicem quarti D : dicendum erit A ad B majorem habere rationem, quam C ad D.

Def. IX.

PROPORTIO in tribus terminis paucissimis consistere dicitur.

QVia ad habendam proportionem duæ saltem requiruntur rationes, & quælibet ratio duos habet terminos, nempè Antecedens, & Consequens; inde sequitur proportionem in tribus tantum paucissimis terminis posse consistere, quia idem terminus potest esse consequens unius rationis, & antecedens alterius: uti cernere licet in hac proportione reperta in numeris 2. 4. 8., in qua medius terminus 4. est consequens rationis 2. ad 4, & antecedens alterius rationis 4. ad 8.

Def. X.

Si tres magnitudines A. B. C. fuerint proportionales, prima A ad tertiam C dicitur habere rationem DUPLICATAM ejus, quam habet ad secundam B.

SI quatuor magnitudines D. E. F. G. fuerint proportionales, prima D ad quartam G dicitur habere triplicatam rationem ejus, quam prima D habet ad secundam E.

Hocque deinceps seruandum uno amplius, quam diu proportio extiterit.

Def. XI.

HOMOLOGÆ, siue similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem cum antecedentibus, & consequentes cum consequentibus.

SI fuerint quatuor magnitudines proportionales A. B. C. D. antecedentes A, & C, dicuntur HOMOLOGA; quemadmodum

modum etiam consequentia B, & D HOMOLOGA appellantur.

Def. XII.

ALTERNA ratio dicitur comparatio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

NOta. In hac, & in sequentibus definitionibus Euclides ostendit sex arguendi modos, quibus uti possumus in magnitudinibus proportionalibus: qui sequentibus nominibus appellantur.

1. Alterna ratio, seu permutata ratio.
2. Inversa ratio, seù è contrario.
3. Compositio rationis, seù coniuncta ratio.
4. Divisio rationis, seù disiuncta ratio.
5. Conversio rationis, sive euersa ratio.
6. Ex æqualitate, seù æqua ratio, quæ etiam ex æquo dicitur.

Def. XIII.

INVBRSA RATIO dicitur sumptio consequentis ceu antecedentis ad antecedentem, velut ad consequentem.

Def. XIV.

COMPOSITIO RATIONIS appellatur sumptio antecedentis cum consequente, ut una magnitudo ad ipsum consequens.

HÆc compositio rationis duplex est, quarum una dicitur compositio rationis CONVERSA, dum scilicet antece-

 dens

dens, & consequens, ut unum, comparantur ad antecedens: altera vero dicitur Compositio rationis CONTRARIA, quæ evenit, dum antecedens refertur ad antecedens, & ad consequens, ut unum.

Def. XV.

DIVISIO rationis vocatur, dum excessus, quo antecedens superat consequentem, refertur ad ipsum consequentem.

ETiam in divisione rationis datur divisio rationis CONVERSA, & divisio rationis CONTRARIA. CONVERSA habetur, dum consequens comparatur ad excessum, quo consequens superat antecedens. Divisio rationis CONTRARIA evenit, dum antecedens confertur cum excessu, quo consequens superat antecedens.

Def. XVI.

CONVERSIO rationis appellatur, dum antecedens comparatur ad excessum, quo antecedens superat ipsum consequentem.

EXemplum harum argumentationum habemus in hac tabula suppositis quatuor magnitudinibus proportionalibus.

	A.	B.	C.	D.
	6.	4.	3.	2
Alterna ratio —	6:	3:	4:	2
Inversa ratio —	4.	6.	2.	3
Compositio rationis —	10.	4.	5.	2

Com-

Compositio rationis Conversa —	10:	6:	5:	3
Compositio rationis contraria —	6:	10:	3:	5
Divisio rationis —	2.	4.	1.	2
Divisio rationis Conversa —	4.	2.	2.	1
Divisio rationis contraria —	2.	1.	4.	2
Conversio rationis —	6.	2.	3.	1

Nota. In prima, atque secunda specie divisionis rationis, antecedens debet superare consequens: In tertia vero specie, hoc est in divisione rationis contraria, consequens debet superare antecedens.

Def. XVII.

Ex æqualitate ratio dicitur, si plures duabus sint quantitates A, B, C, & aliæ ipsis numero æquales D. E. F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, inferturque, ut in primis quantitatibus A ad C, ita in secundis quantitatibus D ad F.

SCHOLIUM.

Quoniam duobus modis, licet ex æqualitate arguere, nempè ex æqualitate ORDINATA, & PERTURBATA, Euclides in sequentibus definitionibus quid sit ordinata, & quid perturbata ratio exponit.

Def. XVIII.

ORDINATA proportio dicitur, cum fuerit quemadmodũ antecedens ad consequens ex una parte, ita antecedens ad consequens ex alia, & ut consequens ad aliud, ita consequens ad aliud.

A. B. E. C. D. F. SI ratio A ad B sit illa quæ C ad D; pariterque ratio B ad E eadem sit ac ratio D ad F, tunc Magnitudines numero pares A. B. E. C. D. F. dicendæ sunt in ratione ordinata; & dum infertur rationem A ad E esse rationem C ad F, dicitur argumentum ex æqualitate, siue ex æquo in ratione ordinata, demonstraturque ab Euclide ad Prop. 22. hujus Elementi.

Def. XIX.

PERTURBATA ratio appellatur, cum positis tribus magnitudinibus G. H. L., aliisque numero æqualibus M. I. K., uti G ad H, ita I ad K, & uti H ad L, ita M ad I.

G. H. L. M. I. K. HOc supposito, dum infertur, rationem G ad L esse illam, quam habet M ad K, dicitur argumentum ex æqualitate, siuè ex æquo in ratione perturbata; quod legitimum esse ad Propos. 23. hujus Elementi demonstrat Euclides.

Axioma Unicum.

DAtis quibuscumque tribus magnitudinibus, quarta datur proportionalis.

Prop.

Propos. I. Theor. I.

Si quotcumque magnitudines A. B. C. sint quotcumque magnitudinum numero æqualium D. E. F. singulæ singularum æque multiplices.

Dico quam multiplex est A ipsius D, tam tiplices esse omnes A. B. C. omnium D. E. F.

Demonstratio.

A. B. C.
D. E. F.

CUm magnitudines A. B. C. (*per hyp.*) sint æque multiplices magnitudinum D. E. F. [*per def. 2. bujus*] quoties D mensurat A, toties E mensurabit B, & F mensurabit C: supponamus D bis sumptam mensurare A; E bis acceptam mensurare B, & F, C: & ideo quoties D mensurat A, toties D. E. F mensuabunt A. B. C. ergo (*per def. 2 bujus*) quam multiplex est A ipsius D, tam multiplices erunt omnes A. B. C. omnium D. E. F. q. e. d.

SCHOLIUM.

H*Æc veritas in omni ratione, etiam irrationali demonstrabitur in Propos. 12. bujus Libri.*

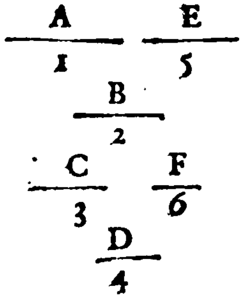
Propos. II. Theor. II.

Si prima magnitudo A fuerit tam multiplex secundæ B, quam multiplex est tertia C, quartæ D: pariterque si quinta E æquemultiplex fuerit secundæ B, ac sexta F quartæ D.

Dico compositam ex prima A, & quinta E tam esse multiplicem secundæ B, quam multiplex est composita ex tertia C, & sexta F, quartæ D.

De-

Demonstratio.



CUM [*per hyp.*] A ſit tam multiplex B, quam C ipſius D: erunt in A tot partes æquales ipſi B, quot ſunt in C æquales ipſi D. Pariter quia (*per ſuppoſitum*) E eſt æquemultiplex ipſius B, ac F ipſius D; quot partes ſunt in E æquales ipſi B, tot erunt in F æquales ipſi D. Hoc ſtante ſi partibus numero æqualibus ipſarum A, & C addantur partes numero æquales ipſarum E, & F; tot partes erunt in A, & E æquales ipſi B, quot ſunt in C, & F æquales ipſi D: quare prima A cum quinta E tam multiplices erunt ſecundæ B, quam multiplices ſunt tertia C cum ſexta F, quartæ D. q. e. d.

SCHOLIUM.

HÆc propoſitio univerſaliter de quacumque ratione demonſtrabitur in Propoſ. 24. hujus Libri.

Propoſ. III. Theor. III.

Si prima magnitudo A ſit tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt tertia C quartæ D. Pariter ſi E eſt æquemultiplex primæ A, quam F tertiæ C.

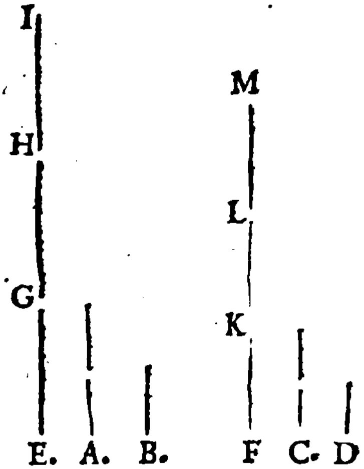
Dico quod ex æquo E eſt tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt F quartæ D.

Conſtructio.

MAgnitudo E dividatur in partes EG, GH, HI æquales ipſi A, pariterque F reſolvatur in partes FK, KL, LM æquales ipſi C.

De-

Demonstratio.



QVia (*per suppositum.*) E est tam multiplex ipsius A, quam F ipsius C; erunt in E tot partes æquales ipsi A, quot sunt in F æquales ipsi C. Quia verò A supponitur tam multiplex B, quam C ipsius D, erit & EG = ipsi A tam multiplex B, quam multiplex FK = C ipsius D. Idem intelligendum de reliquis partibus GH, HI respectivè ad B, & de partibus KL, LM in ordine ad D.

His manentibus erit prima EG tam multiplex secundæ B, quam multiplex est tertia FK, quartæ D: pariter quinta GH erit tam multiplex secundæ B, quam multiplex est sexta KL quartæ D: ergo (*per 2. hujus*) EH composita ex prima, & quinta; erit tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL composita ex tertia, & sexta quartæ D. Denuo quia prima EH est tam multiplex secundæ B [*ex demonstratis*), quam multiplex est tertia FL quartæ D: quinta pariter HI tam multiplex secundæ B, quam multiplex est sexta LM quartæ D: erit [*per 2. hujus.*] EI composita ex prima, & quinta tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FM composita ex tertia, & sexta, quartæ D: unde ex æquo tam multiplex est E ipsius B, quam multiplex est F ipsius D. q.e.d.

SCHOLIUM.

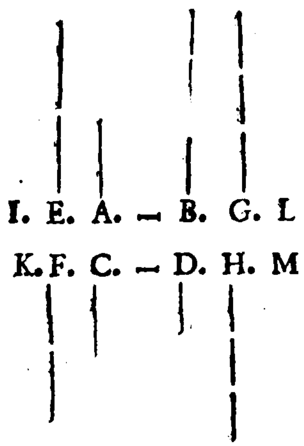
HOc *Theorema in Prop. 22. hujus Libri de quacumque ratione demonstrabitur.*

Pro-

Propos. IV. Theor. IV.

Si A ad B eamdem habuerit rationem, quam habet C ad D, ſintque antecedentium A, & C æqualiter multiplicia E, & F; & conſequentium B, & D alia pariter multiplicia G, & H ſecundum quamcumque multiplicationem.

Dico E ad G eamdem habere rationem, quam habet F ad H.



Conſtructio.

Magnitudinum E, & F accipiantur pariter multiplicia I, & *K*, atque magnitudinum G, & H aliæ æque multiplicia L, & M ſecundum quamcumque multiplicationem.

Demonſtratio.

Quoniam [*per conſtructionem.*] E eſt tam multiplex ipſius A, quam F ipſius C: itemque I tam multiplex ipſius E, quam *K* ipſius F: ex æquo [*per 3. hujus.*] erit I tam multiplex ipſius A, quam K ipſius C. Eadem ratione demonſtrabitur L tam multiplex ipſius B, quam M ipſius D.

Quia verò (*per ſuppoſitum*) A : B : : C : D
ſequitur (*per 6. def. hujus.*) quod
Quando I ſuperat L, etiam *K* ſuperat M,
Quando I = L, etiam K = M,
Quando I minor L, etiam *K* minor M.
Inſuper quia (*per conſtructionem.*
I eſt tam multiplex E, quam K multiplex F, &
L eſt tam multiplex G, quam M multiplex H.
erit [*per 6. def. hujus.*]
E : G : : F : H. q. e. d.

Corol-

Corollarium.

EX modo dictis demonstratur inversa ratio explicata in Def. 12, hujus libri, videlicet.

Si A : B :: C : D. dico invertendo
B : A :: D : C.

Demonstratio.

CUm E, & F (*per hyp.*) sint æquemultiplicia primæ A, & tertiæ C, atque G, & H æquemultiplicia secundæ B, & quartæ D.

(*per def. 6. hujus*) [

Quando E major est quam G, etiam F major quam H,
Quando E = G, etiam F = H,
Quando E minor G, etiam F minor H:

Quare è contrario.

Quando G major est quam E, etiam H major, quam F,
Quando G = E, etiam H = F,
Quando G minor E, etiam H minor F.

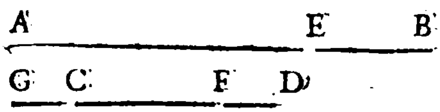
Ergo (*per def. 6. hujus.*) invertendo
B : A :: D : C. q. e. d.

Propos. V. Theor. V.

Si magnitudo AB fuerit tam multiplex magnitudinis CD, quam multiplex est ablata AE ablatæ CF.

Dico reliquam EB tam esse multiplicem reliquæ FD, quam multiplex est tota AB totius CD.

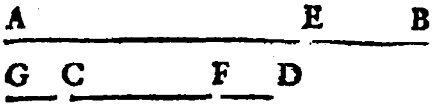
Constructio.



QVam multiplex est AE ipsius CF, sit EB ipsius GC.

Demon-

Demonſtratio.



Cum (*per conſtructionem.*) AE ſit tam multiplex ipſius CF, quam EB ipſius GC.

(*per pri. hujus.*) erit

AB tam multiplex ipſius GF, quam multiplex eſt AE ipſius CF,

Sed (*per hyp.*)

AB eſt tam multiplex ipſius CD, quam AE ipſius CF:

Igitur AB tam multiplex ipſius GF, quam ipſius CD.

ergo (*per axio. 6.*) GF = CD

communi parte CF ablata, erit

GC = FD: quare

EB erit tam multiplex ipſius FD quam ipſius GC:

Sed (*per hyp.*)

EB eſt tam multiplex GC, quam AE multiplex ipſius CF, hoc eſt, ut tota AB, totius CD: ergo

reliqua EB erit tam multiplex reliquæ FD, quam tota AB totius CD. q. e. d.

SCHOLIUM.

Hoc Theorema de quacumque ratione demonſtrabitur ad Prop. 19. hujus Libri.

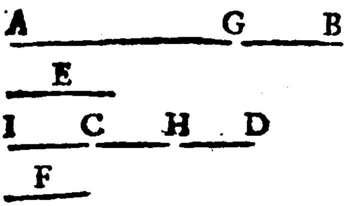
Propoſ. VI. Theor. VI.

Si magnitudines AB, CD ſint magnitudinum E, F ſingulæ ſingularum æquemultiplices, ſintque detractæ AG, CH earumdem E, F pariter multiplices.

Dico reſidua GB, HD eſſe vel æqualia ipſarum E, & F, vel æqualiter multiplicia.

Con-

Constructio.



Primæ partis, quãdo residuũ GB = E.
Ponatur IC = F.

Demonstratio primæ partis.

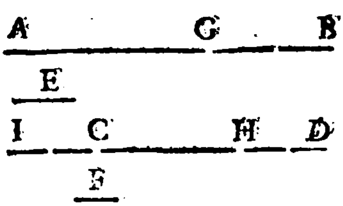
Quia [*per hyp. & per constructionem.*] Prima magnitudo AG est tam multiplex secundæ E, quam multiplex est tertia CH quartæ F: pariter quinta GB est æqualis secundæ E, sextaque IC æqualis quartæ F.

(*per 2. hujus.*) erit
AB composita ex prima, & quinta, tam multiplex secundæ E, quam multiplex est IH composita ex tertia, & sexta quartæ F.
Sed (*per hyp.*)
CD est tam multiplex ipsius F, quam AB ipsius E: ergo IH, & CD æque multiplices ipsius F: quare
[*per axio. 6.*)
IH = CD.
ablata communi parte CH, erit
IC = HD.
Cum autem IC (*per constructionem.*) sit æqualis ipsi F erit, & HD æqualis ipsi F. q. e. i. d.

Constructio secundæ partis,
in qua residuum GB est multiplex ipsius E.

Ponatur IC tam multiplex ipsius F, quam multiplex est GB ipsius E.

Demonstratio secundæ partis.



Quemadmodum in prima parte dictum est (*per 2. hujus.*) erit AB tam multiplex ipsius E, quam multiplex IH ipsius F.
Sed (*per hyp.*)
Quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplex CD ipsius F.
ergo IH, & CD, erunt æquemultiplices ipsius F.

IH

ergo (*per axio. 6.*

IH = CD. Dempta communi parte CH; erit.

IC = HD

Sed (*per constructionem.*)

GB est tam multiplex ipsius E, quam IC ipsius F: ergo

GB tam multiplex ipsius E, quam HD, ipsius F. q. e. 2. d.

SCHOLIUM.

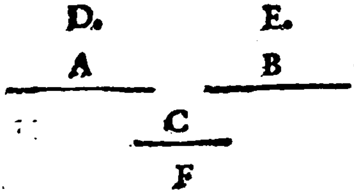
IN omni rationum genere hoc demonstrabitur ad Propos. 24. hujus Libri.

Propos. VII. Theor. VII.

Si sint æquales magnitudines A, & B, & alia quæcumque C.

Dico A, & B eamdem habere rationem ad C: atque vicissim C eamdem habere rationem ad A, & B.

Constructio,



ÆQualium magnitudinum A, & B ponantur æquemultiplicia D, & E; pariterque accipiatur F quomodocumque multiplex ipsius C.

Demonstratio.

QVoniam (*per hyp.*) A = B, atque (*per constructionem.*) D, & E sunt ipsorum A, & B æquemultiplicia; etiam D = E: quotiescumque igitur D superat F, etiam E superabit F.

Quando D = F, etiam E = F,

Quando D minor F, etiam E minor F.

Si

Si ergo statuatur A prima magnitudo; C secunda; B tertia, & C quarta, erit verum dicere.

Quando D multiplex primæ A superat F multiplicem secundæ C; etiam E multiplex tertiæ B superat F multiplicem quartæ C. &c. Unde (*per 6. def. hujus.*)

A : C :: B : C.

Quare æquales magnitudines A, & B eamdem rationem habebunt ad C. q. e. 1. d.

Quod postea vicissim magnitudo C eamdem rationem habeat ad magnitudines æquales A, & B, ita demonstratur.

Cum [*per demonstrata in prima parte.*] æqualia sint pariter multiplicia *D*, & *E*: sequitur quod quando F major est quam D, est etiam F major quam E: quando F = D, etiam F = E, & quando F minor D, etiam F minor E.

Ponatur C prima magnitudo, A secunda, C tertia, & *B* quarta. Hoc supposito, quia pariter multiplicia primæ, & tertiæ comparata ad æquemultiplicia secundæ, & quartæ, servant ordinem præscriptum in def. 6. hujus Libri: erit

C: A:: C: B.

Quare magnitudo C ad æquales A, & B comparata eamdem habet rationem. q. e. 2. d.

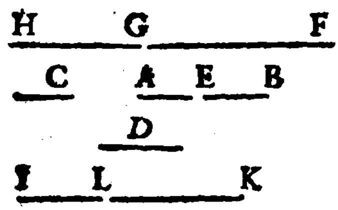
Propos. VIII. Theor. VIII.

Si sint inæquales magnitudines AB major, & C minor; aliaque magnitudo D.

1. Dico majorem magnitudinem AB ad D majorem habere rationem, quam minor magnitudo C habeat ad eamdem D.

2. Dico e converso D ad majorem AB, minorem habere rationem, quam ad minorem C.

Constructio.



EX majore magnitudine AB auferatur AE = C.

Sumantur ipsarum AE, EB æqualiter multiplicia HG, GF, cum hac lege, videlicet quod GF multiplex ipsius EB major sit quam D: HG verò multiplex ipsius AE non sit minor *D*, at sit æqualis, vel major.

Ulterius accipiatur IK multiplex ipsius D proximè major quam HG: noteturque LK = D.

Demonstratio.

QVia [*per constructionem*] FG, GH sunt pariter multiplicia ipsarum AE, EB; [*per 1. hujus.*] erit HF tam multiplex ipsius AB, quam multiplex est HG ipsius AE, seu ipsius C.

Cum autem IK (*per constructionem.*) sit multiplex ipsius D proximè major, quam HG, si ex IK auferatur LK = D, non erit IL major quam HG, aliter IK multiplex ipsius D non foret proximè major quam HG, at HG semper æqualis, vel major quam IL; & hoc quia (*per constructionem*) non solum IK facta est multiplex ipsius D proximè major HG, verum etiam quia HG posita est non minor quam D.

His manentibus, quia FG (*per constructionem*) facta est major quam *D*, & LK = D: erit FG major LK. Rursus, quia (*ex demonstratis.*) HG nequit esse minor IL; tota FH major erit quam IK.

Cum igitur FH sit tam multiplex primæ AB, quam multiplex est HG tertiæ C: IK verò æquemultiplex D secundæ, & *D* quartæ, in hujusmodi æquemultiplicibus contingere poterit, quod scilicet,

FH multiplex primæ AB major sit quam IK multiplice secundæ D: HG verò multiplex tertiæ C, non sit major IK multiplice quartæ *D*.

Quare (*per def. 8. hujus.*)

major erit ratio primæ AB ad secundam D, quam tertiæ C, ad quartam D. q. e. p. d.

Quo

Quo ad alteram partem hujus prop., videlicet, quod e contrario magnitudo D ad majorem AB minorem habeat rationem, quam ad minorem C, ita demonstratur.

Accipiatur D tanquam prima magnitudo, C secunda, D tertia, & AB quarta.

(*per superius demonstrata.*)

IK multiplex primæ D major quam HG multiplex secundæ C
IK multiplex tertiæ D minor quam FH multiplex quartæ AB:

quare (*per def.* 8. *hujus.*)

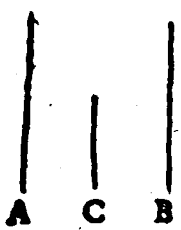
Major erit ratio primæ D ad secundam C, quam tertiæ *D.* ad quartam AB. q. e. 2. d.

Propos. IX. Theor. IX.

Si magnitudines A, & B eamdem rationem habeant ad C.

Dico A = B: & vicissim.

Dico quod si C eamdem habeat rationem ad A, & B. A = B.



Demonstratio primæ partis.

SI A non æquat B, erit major, vel minor quam B. Ponatur A major quam B.

Si A major quam B [*per* 8. *hujus.*] major erit ratio A ad C, quam B ad C, contra suppositum.

Si A minor quam B (*per* 8. *hujus.*) minor erit ratio A ad C, quam B ad C. Pariter contra suppositum: ergo A = B.

Demonstratio secundæ partis.

SI A ponatur major quam B [*per secundam partem* 8. *hujus.*] C ad A majorem, habebit minorem rationem, quam C ad B minorem: quod cum sit contra suppositum: erit A = B. q.e.2.d.

 Prop.

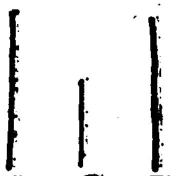
Propoſ. X. Theor. X.

Si A ad C majorem habeat rationem, quam B ad eamdem C.

Dico A majorem eſſe, quam B. Viciſſim

Si C ad B majorem rationem habeat quam C ad A.

Dico B minorem eſſe quam A.



A C B

Demonſtratio primæ partis.

SI A non eſt major quam B erit vel æqualis, vel minor; ſi æqualis, [*per 7. bujus.*] ratio A ad C erit eadem ac ratio B ad C: contra ſuppoſitum,

Si A minor quam B [*per 8. bujus.*) A ad C minorem habebit rationem, quam B ad eamdem C: quod eſt pariter contra ſuppoſitum: Quare A major erit quam B. q. e. 1. d.

Demonſtratio ſecundæ partis.

SI B non eſt minor quam A, erit æqualis, vel major. Si æqualis (*per 7. bujus.*) C ad B eamdem habebit rationem quam C ad A: contra ſuppoſitum.

Si major (*per 2. partem 8. bujus.*) C minorem rationem haberet ad B quam ad A, quod pariter eſt ſuppoſito contrarium, quare B = A. q. e. 2. d.

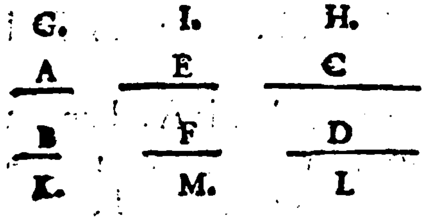
Propoſ. XI. Theor. XI.

Si ratio A ad B ſit eadem ac ratio E ad F: pariterque ratio C ad D eadem ſit ac ratio E ad F.

Dico rationem A ad B eſſe eamdē, ac C ad D.

Con-

Constructio.



ANtecedentium A. E. C. accipiantur æquemultiplicia G. I. H. Pariter assumantur consequentium B. F. D. pariter multiplicia K. M. L. secundum quamcumque multiplicationem.

Demonstratio.

QVIA (*per hyp.*) A : B : : E : F, sintque G, & I antecedentium A, & E æquemultiplicia, item K, & M pariter multiplicia consequentium B, & F. (*per def. 6. hujus.*)

Quando G major K, etiam I major M.
Quando G = K, etiam I = M.
Quando G minor K, etiam I minor M.

Eodem prorsus modo demonstrabitur, quod

Quando I major M, etiam H major L,
Quando I = M, etiam H = L
Quando I minor M, etiam H minor L: ergo

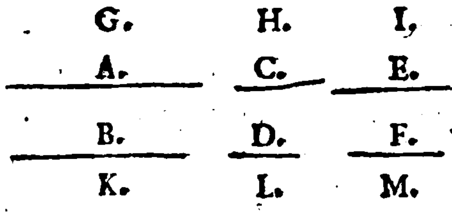
Quando G major K, etiam H major L.
Quando G = *K*, etiam H = L
Quando G minor K, etiam H minor L.

Hoc demonstrato, si A sit prima magnitudo, B secunda, C tertia, & D quarta, æquemultiplicia primæ, & tertiæ comparata ad æque multiplicia secundæ; & quartæ servant ordinem præscriptum in def. 6. hujus libri: quare
A: B:: C: D. q. e. d.

Propos. XII. Theor. XII.

Si ratio A ad B sit ratio C ad D, & ratio C ad D sit ratio E ad F.

Dico rationem unius antecedentis A ad unum consequens B, esse rationem omnium antecedentium A.C.E. ad omnia conseq. B. D. F.



Constructio.

Antecedentium A. C. E. ponantur æquemultiplicia G. H. I. consequentium pariter B. D. F. ponatur pariter multiplicia K. L. M.

Demonstratio.

Quia (*per hyp.*) A : B : : C : D. sumptaq; sunt æquemultiplicia primæ A, & tertiæ C., quæ sunt G, & H; uti pariter facta sunt æqualiter multiplicia secundæ B, & quartæ D, hoc est K, & L.

(*per def. 6. hujus.*)
Quando G major K, etiam H major L.
Quando G = K, etiam H = L.
Quando G minor K, etiam H minor L.

Denuo quia [*per hyp.*] C : D : : E : F. idem poterit demonstrari de æquemultiplicibus primæ, & tertiæ; atque secundæ, & quartæ, quæ sunt H. I., & L. M. nempe quod

Quando H major L, etiam I major M.
Quando H = L, etiam I = M.
Quando H minor L, etiam I minor M.
Quare ex hoc sequitur,

Quan-

Quando G majus K, etiam G. H. I. majora esse K. L. M.
Quando G = K, etiam G. H. I. = K. L. M.
Quando G minus K, etiam G. H. I. minora K. L. M.

Quia vero (*per constructionem*) G. H. I. sunt pariter multiplicia antecedentium A. C. E: (*per 1. hujus*) quam multiplex est G ipsius A, tam multiplices erunt G. H. I. ipsorum A. C. E.

Eadem ratione K erit tam multiplex ipsius B, quam multiplices sunt K. L. M. ipsorum B. D. F.

Hoc stante, si A ponatur prima magnitudo, B secunda, A. C. E. tertia, & B. D. F. quarta: sequitur,

Primæ A, & tertiæ A. C. E. æquemultiplicia esse G, & G. H. I.

Item secundæ B, & quartæ B. D. F. pariter multiplicia erunt K, & K. L. M.

Cum autem [*per demonstrata.*] hæc multiplicia servent ordinem propositum in def. 6. hujus libri (*per eamdem def.*)

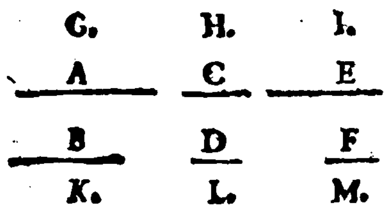
Quemadmodum antecedens A ad consequens B, ita omnia antecedentia A. C. E. ad omnia consequentia B. D. F. q. e. d.

Propos. XIII. Theor. XIII.

Si A prima magnitudo ad secundam B eamdem habuerit rationem, quam tertia C, ad quartam D: pariterque, si ratio tertiæ C ad quartam D major sit quam ratio quintæ E ad sextam F.

Dico majorem esse rationem primæ A ad secundam B, quam quintæ E ad sextam F.

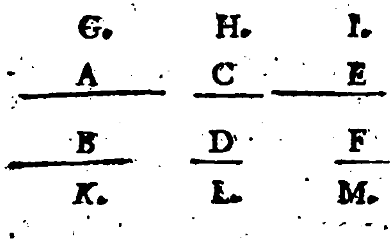
Constructio.



Antecedentium A. C. E. accipiantur æquemultiplicia G. H. I. Consequentium pariter B. D. F. sumantur pariter multiplicia K. L. M.

 De-

Demonstratio.



Quia (*per hyp.*) A: B :: C: D.: sequitur [*per def.* 6. *huius.*]

Quando G major *K.* etiam H major L.
Quando G = *K*, etiam H = L.
Quando G minor *K*, etiam H minor L.

Rursus, quia [*per suppositum*] ratio C ad D major ratione E ad F (*per def.* 8. *hujus.*) poterit evenire, quod

Quando H superat L, I non superat M: ergo
Quando G superat K cõtingere potest quod I nõ superet M.

Quare (*per def.* 8. *hujus.*)
Major erit ratio primæ A ad secundam B, quam quintæ E ad sextam F. q. e. d.

Propos. XIV. Theor. XIV.

Si prima magnitndo A ad secundam B eamdem habuerit rationem, quam tertia C, ad quartam D.

1. Dico quando prima A major est tertia C, etiam secunda B major erit quarta D,

2. Si prima A æquat tertiam C, etiam secunda B æquabit quartam D.

3. Si prima A minor est tertia C, etiam secunda B minor erit quarta D.

Demonstratio primæ partis.

SI A sit major quam C, [*per* 8. *hujus.*] major erit ratio A ad B, quam C ad eamdem B.

sed

sed [*per hyp.*)

A : B :: C : D : ergo ratio C ad D major quam C ad B.

Quare (*per 2. partem 8. hujus.*)

Secunda B major quam D. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

Si A = C (*per 7. hujus.*] ratio A ad B æqualis erit rationi C ad B.

Sed (*per hyp.*)

Ratio A ad B eadem, ac ratio C ad D : ergo C : B :: C : D.

Quare (*per 9. hujus.*)

B secunda æqualis quartæ D. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

Si A minor sit quam C (*per 8. hujus.*)

Major erit ratio C ad B, quam A ad B.

Sed (*per hyp.*)

Ratio A ad B eadem est ac C ad D: ergo

Ratio C ad B major, quam ratio C ad D.

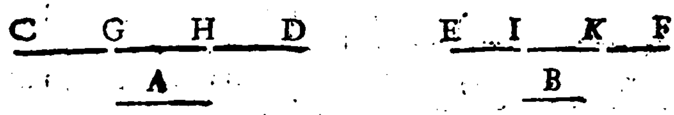
Quare (*per 10. hujus.*)

B secunda minor, quam quarta D. q. e. 3. d.

Propos. XV. Theor. XV.

Si partium A, & B sint pariter multiplicia CD, EF.

Dico A ad B, uti CD ad EF.



Constructio.

CD multiplex ipsius A resoluatur in partes CG, GH, HD æquales ipsi A.

Pari-

Pariter EF multiplex ipsius B dividatur in partas EI, IK, KF æquales ipsi B.

Demonstratio.

CUm (*per hyp.*) CD sit tam multiplex ipsius A, quam EF ipsius B; erunt in CD tot partes æquales ipsi A, quot sunt in EF æquales ipsi B. Si igitur in CD sunt tres partes æquales A, tres etiam erunt in EF æquales B.

quare { CG: EI :: A: B.
GH: IK :: A: B.
HD: KF :: A: B.

Ergo (*per 11. hujus.*)
CG: EI :: GH: IK.
GH: IK :: HD: KF.
Igitur [*per 12. hujus.*

Omnia antecedentia CG, GH, HD ad omnia consequentia EI, IK, KF, uti CG ad EI: sed

Quemadmodum CG ad EI, ita A ad B: ergo

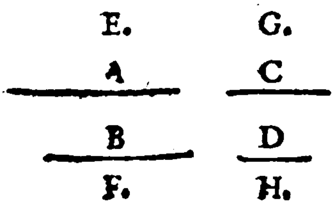
Multiplex CD ad multiplicem EF est ut pars A ad partem B. q. e. d.

Propos. XVI. Theor. XVI.

Si fuerit A: B :: C: D.

Dico vicissim, siuè alternando A: C :: B: D.

Constructio.



ACcipiantur non solum magnitudinum A, & B æquemultiplicia E, & F, verum etiam magnitudinum C, & D, sintque G, & H.

De-

Demonstratio.

QVia E, & F (*per constructionem*) sunt pariter multiplicia A, & B (*per 15. hujus.*) A : B :: E : F.

Ob eamdem rationem C : D :: G : H :

Cum autem [*per hyp.*] A : B :: C : D.

(*per 11. hujus.*)

E : F :: G : H.

Quare [*per 4. hujus.*]

Quando E superat G, etiam F superat H.
Quando E = G, etiam F = H.
Quando E minor G, etiam F minor H.

Statuatur A prima, C secunda, B tertia, D quarta: primæ A, & tertiæ B (*per constructionem*) æquemultiplicia sunt E, & F. Secundæ C, & quartæ D æquemultiplicia sunt G, & H.

De istis pariter multiplicibus demonstratus est ordo superioritatis, æqualitatis, minoritatis præscriptus in def. 6. hujus Libri: quare (*per def. 6. hujus.*)

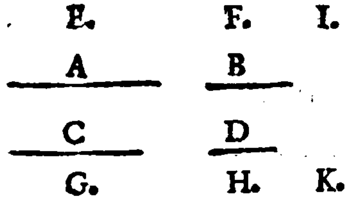
A : C :: B : D. q. e. d.

In hoc Theoremate demonstrata est ALTERNA ratio superius in def. 12. hujus libri proposita.

Propos. XVII. Theor. XVII.

Si compositæ magnitudines A + B ad B eamdem habeant rationem, quam C + D ad D.
Dico dividendo A : B :: C : D.

Constructio.



SUmantur tam magnitudinum A, & B, quam C. & D. pariter multiplicia E. F. G. H. pariter magnitudinum B, & D alia accipiantur æquemultiplicia I, & K secundum quamcumque multiplicationem.

Demonstratio.

QVia E, & F (*per constructionem*) sunt pariter multiplicia A, & B; atque G, & H æquemultiplicia C, & D.

(*per 1. bujus.*)

Quam multiplex est E + F ipsius A + B, tam multiplex est E ipsius A.

Ob eamdem Propositionem, quam multiplex G + H ipsius C + D, tam multiplex G ipsius C. Sed

)*per constructionem.*)

Quam multiplex E ipsius A, tam multiplex G ipsius C.

Ergo (*per 11. bujus.*)

Quam multiplex E + F ipsius A + B, tam multiplex G + H ipsius C + D.

His stantibus, quia prima F est tam multiplex secundæ B, quam tertia H quartæ D: item quinta I tam multiplex secundæ B, quam sexta K, quartæ D.

(*per 2. bujus:*) erit

F + I tam multiplex B, quam multiplex H + K ipsius D.

Quia vero [*per hyp.*]

A + B ad B, uti C + D ad D, sumptaque sunt pariter multiplicia primæ, & tertiæ E + F, & G + H, atque secundæ, & quartæ F + I, & H + K:

Sequitur (*per def. 6. bujus.*)

Quando E + F major F + I, etiam G + H major H + K.
Quando E + F = F + I, etiam G + H = H + K.
Quando E + F minor F + I, etiam G + H minor H + K.

Dem-

Demptis communibus F, & H,

Quando E minor I, etiam G minor K,
Quando E = I, etiam G = K.
Quando E major I, etiam G major K.

Cum autem [*per constructionem*] primæ A, & tertiæ C sumptæ sint æquemultiplicia E, & G, pariterque secundæ B, & quartæ D æquemultiplicia I, & K, cumque de istis æquemultiplicibus fuerit ostensum, quod

Quando E superat I, etiam G superat K
Quando E = I, etiam G = K.
Quando E minor I, etiam G minor K.

Sequitur (*per def. 6. hujus.*)
A : B : : C : D.
Si ergo A + B ad B, ita C + D ad D, erit dividendo
A : B : : C : D. q. e. d.

SCHOLIUM.

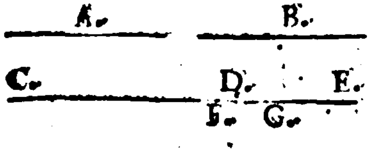
Hoc Theoremate demonstratur illud argumentum, quod Euclides def. 15. hujus, divisionem rationis appellavit.

Propos. XVIII. Theor. XVIII.

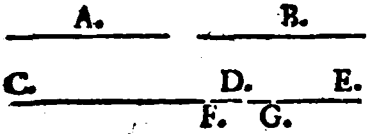
Si in divisis magnitudinibus ratio A ad B sit illa C ad D.

Dico per compositionem rationis A + B ad B, sicuti C + D ad D.

Constructio, & Demonstratio.



Si ratio A + B ad B non est ratio CD + DE ad DE: fiat A + B : B : : CD + DE : ad quartum, quod majus, vel minus erit



erit quam DE. Sit hac quartum GE, minus quam DE.

Quia (*per constructionem.*)

A + B: B : : CD + DE: GE: erit dividendo [*per 17. hujus.*]

A : B : : CG : GE.

Sed [*per hyp.*]

A: B : : CD: DE,

Quare [*per 11. hujus.*]

CD : DE : : CG : CE.

Cum autem CD minor sit quam CG, etiam [*per 14. hujus.*] DE minor quam GE; quod fieri nequit, quia DE est totum, & GE pars. Eadem ratione demonstrabitur non posse GE majorem esse quam DE: quare A + B ad B nequit habere eamdem rationem, quam habeat CD + DE ad aliam magnitudinem minorem, vel majorem ipsa DE: ergo

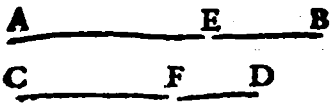
A + B : B : : CD + DE: DE. q. e. d.

Propos. XIX. Theor. XIX.

Si totum AB fuerit ad totum CD, quemadmodum ablatum AE ad ablatum CF.

Dico reliquum EB ad reliquum FD esse, ut totum AB ad totum CD.

Demonstratio.



Quia (*per hyp.*) AB: CD: : AE: CF,

permutando (*per 16. hujus*) erit

AB: AE : : CD : CF:

dividendo [*per 17. hujus.*] erit

BE: EA : : DF: FC.

denuo permutando: erit

BE: DF: : EA : FC.

Sed (*per hyp.*)

EA: FC: : AB: CD.

ergo [*per 11. hujus.*]

BE: DF: : AB: CD. q. e. d.

Propos.

Propof. XX. Theor. XX.

Si fuerint tres magnitudines A. B. C. & aliæ ipſis numero æquales D. E. F; ſintque ut prima A. ad ſecundam B. ex una parte, ita prima D. ad ſecundam E ex alia parte: pariterque, ut ſecunda B ad tertiam C, ita ſecunda E ad tertiam F.

1. Dico ſi prima A major fuerit tertia C, & prima D. major tertia F.

2. Si prima A = tertiæ C, & prima D = tertiæ F.

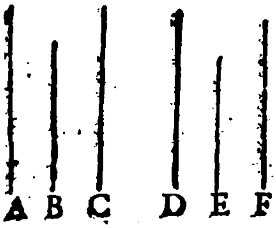
3. Si prima A minor tertia C, & prima D minor tertia F.

Demonſtratio primæ partis.

Cum (*per hyp.*) A ſit major quam C,
(*per* 8. *bujus.*)
Major erit ratio A ad B, quam C ad B.
Sed (*per hyp.*)
A : B : : D : E : ergo
(*per* 13. *bujus.*)
Major ratio D ad E, quam C ad B.
Sed in vertendo (*per corol.* 4. *bujus.*)
C : B : : F : E.
ergo [*per* 13. *bujus.*]
Major ratio D, ad E, quam F ad E:
Quare (*per* 10. *bujus.*)
D major quam F. q. e. 1. d.

De-

Demonstratio secundæ partis.



SI A = C (*per 7. hujus.*) erit A:B :: C:B.
Sed (*per hyp.*)
A : B :: D : E, & invertendo
C : B :: F : E. quare (*per 11. hujus.*)
D : E :: F : E. quare (*per 9. hujus.*)
D = F. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

SI A minor sit quam C : [*per 8. hujus.*]
Minor erit ratio A ad B, quam C ad B,
Sed (*per hyp.*)
A : B :: D : E. & invertendo
C : B :: F : E.
Quare (*per 13. hujus.*)
Minor erit ratio D ad E, quam F ad E,
Ergo [*per 10. hujus.*]
D minor quam F. q. e. 3. d.

Propos. XXI. Theor. XXI.

Si fuerint tres magnitudines A. B. C. ex una parte, & aliæ tres D. E. F. ex alia parte, quæ binæ in eadem ratione perturbata sumptæ sint: hoc est, ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E.

1. Dico si prima A sit major tertia C, etiam primam D majorem esse tertia F.

2. Dico si A = C, etiam D = F.

3. Dico si A minor C, etiam D minorem F.

De-

Demonstratio primæ partis.

SI A major est C (*per* 8. *hujus.*)
Major ratio A ad B, quam C ad *B.*
Sed (*per hyp.*)
A: B:: E: F, & invertendo.
C: B:: E: D.
Ergo (*per* 13. *hujus.*]
Major ratio E ad *F*, quam E ad B.
Quare [*per* 10. *hujus.*]
D. major quam *F.* q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

SI A = C (*per* 7. *hujus.*) A: B:: C: B.
Sed (*per hyp.*]
A: B:: E: F., & invertendo C: B:: E: D.
Ergo [*per* 11. *hujus.*]
E: F:: E: D.
Quare [*per* 9. *hujus.*)
D = F. q. e. 2. d.

Demonstratio tertiæ partis.

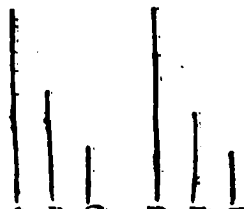
SI A minor quam C (*per* 8. *hujus.*)
Minor ratio A ad *B*, quam C ad *B.*
Sed (*per hyp.*)
A: *B*:: E: F, atq; invertendo C: *B*:: E: D,
Ergo [*per* 13. *hujus.*]
Minor ratio E ad F, quam E ad D,
Unde (*per* 8. *hujus.*]
D. minor quam F. q. e. 3. d.

Propos. XXII. Theor. XXII.

Si fuerint quotcumque magnitudines A.B.C, & aliæ ipsis numero æquales D.E,F. quæ binæ in eadem ratione ordinata sumantur.

Dico ex æqualitate A : C : : D : F.

Constructio.



A. B. C. D. E. F.

G. I. L. H. K. M.

Magnitudinum A, & D sint pariter multiplicia G, & H.

Magnitudinum B, & E sint æqualiter multiplicia I, & K.

Magnitudinum C, & F sint æquemultiplicia L, & M.

Demonstratio.

Quia [*per hyp.*] A : B : : D : E, sumptaque sint (*per constructionem*) antecedentium G, & H pariter multiplicia; atque I, & K æquemultiplicia consequentium

erit (*per 4. hujus.*)

G : I : : H : K.

Pariter quia [*per hyp.*] B : C : : E : F, sintque accepta antecedentium I, & K pariter multiplicia, & L, & M pariter consequentium multiplicia.

Erit (*per 4. hujus.*)

I : L : : K : M.

Sunt ergo tres magnitudines G.I.L, & aliæ ipsis numero æquales H.K.M, quæ binæ, & binæ in eadem ordinata ratione sumptæ sunt.

Quare [*per 20. hujus.*]

Quando G superat L, etiam H superat M.
Quando G = L, etiam H = M.
Quando G minor L, etiam H minor M.

Cum

Cum autem G, & H sint æquemultiplicia antecedentium A, & D: L, & M verò æquemultiplicia consequentium C, & F.

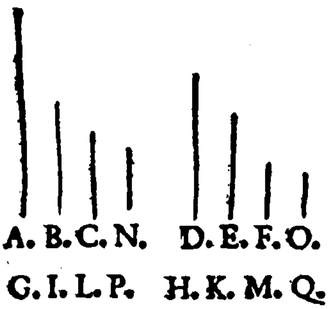
Erit (*per def. 6. hujus.*)

A : C : : D : F. q. e. d.

Si vero ex una parte fuerint magnitudines plures tribus A. B. C. N, & ex altera numero pares D. E. F. O, quæ in eadem ratione sumptæ sint,

Dico A : N : : D : O.

Constructio.



Magnitudinum N, & O accipiantur pariter multiplicia P, & Q.

Demonstratio.

Ex superius demonstratis in tribus magnitudinibus A. B. C: D. E. F.

A : C : : D : F.

Quare in tribus magnitudinibus A. C. N, & alijs numero æqualibus D. F. O. (*per hanc prop.*) A : N : : D : O.

Si ergo plures tribus sint magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales: erit A ad N, uti D ad O. q. e. d.

Propos. XXIII. Theor. XXIII.

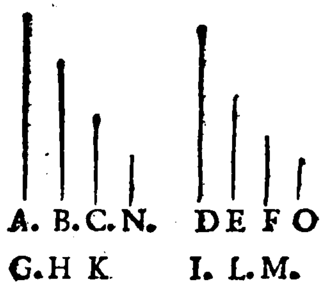
Si fuerint quotcumque magnitudines A. B. C., aliæque numero æquales D. E. F., quæ binæ, & binæ sint in eadem ratione perturbata, videlicet ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E.

Dico ex æqualitate A : C : : D : F.

Conſtructio.

Magnitudinum A.B,& D ſumantur æquemultiplicia G.H.I. Magnitudinum vero C. E, & F. æqualiter multiplicia ſint K. L. M.

Demonſtratio,



Quia (*per conſtructionem*) G, & H ſunt pariter multiplicia A, & *B*, pariterque L, & M æquemultiplicia E, & F. (*per* 15. *hujus.*) erit Ut A ad *B*, ita G ad H, & ut E ad F, ita L ad M.

Sed (*per hyp.*)

A : *B* : : E : F,

Ergo (*per* 11. *hujus.*)

G : H : : L : M.

Ulterius quia [*per hyp.*] *B* : C : : D : E; atque (*per conſtructionem.*] antecedentium *B*, & D poſita ſunt æqualiter multiplicia H, & I: pariterque conſequentium C, & E facta ſunt pariter multiplicia K : & L (*per* 4. *hujus.*)

H : *K* : : I : L.

His demonſtratis, ex una parte erunt tres magnitudines G. H. K, & aliæ numero æquales I. L. M ex alia, quæ binæ, & binæ in eadem ſunt ratione perturbata; videlicet,

G : H : : L : M : : atque H : K : : I : L.

Sequitur [*per* 21. *hujus.*]

Quando G ſuperat K, etiam I ſuperat M.
Quando G = K, etiam I = M.
Quando G minor K, etiam I minor M.

Cum autem [*per conſtructionem.*) primæ A, & tertiæ D pariter multiplicia ſint G, & I: ſecundæ vero C, & quartæ F æque multiplicia ſint K, & M.

Ex æquo ſequitur (*per def.* 6. *hujus.*)

A : C : : D : F. q. e d.

Si

Si poſtea ſint ex una parte quatuor magnitudines A. B. C. N. ex alia vero numero pares D. E. F. O, ut in præcedente propoſitione demonſtrabitur.

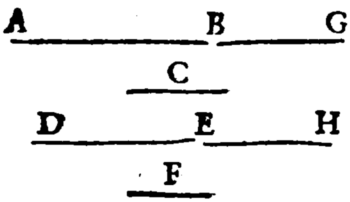
Ex æquo A : N : : D : O.

Propoſ. XXIV. Theor. XXIV.

Si prima magnitudo AB ad ſecundam C ſe habuerit, ut tertia DE ad quartam F: & quinta BG ad ſecundam C eam rationem habeat, quam ſexta EH ad quartam F.

Dico primam AB compoſitam cum quinta BG, eamdem habere rationem ad ſecundam C, ac habeat tertia DE compoſita cum ſexta EH ad quartam F.

Demonſtratio.



Cum (*per hyp.*) BG : C : : EH : F. erit

Convertendo (*per corol. 4. hujus.*)

C : BG : : F : EH.

Quoniam igitur (*per hyp.*)

AB : C : : DE : F.

Ex æqualitate [*per 22. hujus.*] erit

AB : BG : : DE : EH.

Componendo (*per 18. hujus.*) erit

AG : BG : : DH : EH.

Cum autem (*per hyp.*) BG : C : : EH : F.

Ex æquo (*per 22. hujus.*)

AG : C : : DH : F.

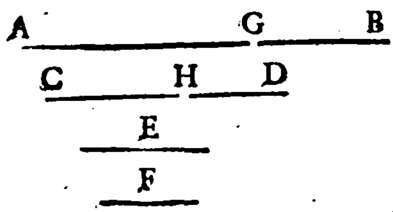
Quare AG compoſita ex prima AB, & quinta BG, erit ad ſecundam C, uti DH compoſita ex tertia DE, & ſexta EH ad quartam F. q. e. d.

Propos. XXV. Theor. XXV.

Si $AB : CD :: E : F$.

Dico maximam AB, cum minima F majores esse reliquis duabus CD, & E.

Constructio.



Ex maxima AB auferatur $AG = E$: pariter ex CD, dematur $CH = F$.

Demonstratio.

Quia [*per constructionem.*] $AG = E$, & $CH = F$; erit

$$AG : CH :: E : F,$$

Sed [*per hyp.*]

$$E : F :: AB : CD.$$

Ergo [*per* 11. *hujus.*]

$$AG : CH :: AB : CD.$$

Cum igitur sit totum AB ad totum CD, ut ablatum AG, ad ablatum CH: (*per* 19. *hujus.*) erit

Residuum GB ad residuum HD, ut totum AB ad totum CD.

Hoc est $AB : CD :: GB : HD$.

Quia vero AB prima supponitur omnium maxima, major erit quam CD secunda; quare (*per* 14. *hujus.*) & tertia GB major quarta HD.

Cum autem (*per hyp.*] sit $AG = E$ si, æquales addantur CH, & F: erit

$$AG + F = CH + E.$$

Denuo si ipsi $AG + F$ addatur major GB, ipsique $CH + E$ addatur minor HD; erit

$$AG + F + GB \text{ major } CH + E + HD.$$

Quare AB composita ex AG, & $GB + F$, major erit quam CD composita ex CH, & $HD + E$: ideoque maxima AB cum minima F superabit intermedias CD, & E. q. e. d.

No-

Nota. Quando quantitates proportionales forent æquales: Nulla esset in eis maxima, aut minima.

SCHOLIUM.

HÆc est ultima propos. Lib. V. Elementorum Euclidis. Campanus, & alij sequentes propositiones adiunxerunt, quibus sepissimè utuntur Scriptores, uti videre licet apud Archimedem, Apollonium, & alios magni nominis Scriptores, easque, ut Euclidis, recipiunt; quare, ut mos est nostris temporibus, oportunum duxi hujusmodi propositiones quidem Elementares, in hoc loco demonstrare.

Propos. XXVI. *Theor.* XXVI.

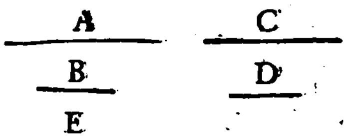
Si A prima ad B secundam majorem habuerit rationem, quam C tertia ad D quartam.

Dico convertendo B ad A minorem habere rationem, quam D ad C.

Constructio.

Ponatur E ad B, ut C ad D,

Demonstratio.



QVia (*per hyp.*) ratio A ad B maior, quam ratio C ad D: ratio autem C ad D (*per constructionem.*) eadem ac E ad B:

Quare

Ratio A ad B, major ratione E ad B:

Ergo (*per* 10. *bujus.*)

A major quam E.

Unde [*per* 8. *bujus.*)

Minor ratio B ad A, quam B ad E:

Sed invertendo [*per corol.* 4. *bujus.*)

B : E : : D : C : ergo

Ratio *B* ad A minor, quam D ad C. q. e. d.

Propos. XXVII. Theor. XXVII.

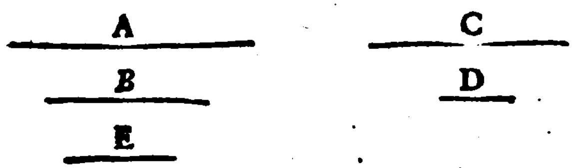
Si A prima ad *B* secundam majorem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D.

Dico vicissim, siue alternando, primam A ad tertiam C majorem habere rationem quam secunda *B* ad quartam D.

Constructio.

Ponatur E ad *B*, ut C ad D.

Demonstratio.



QVia ratio A ad *B* [*per hyp.*] major est ratione C ad D, ratio vero C ad D (*per constructionem*) æqualis rationi E ad *B*,
Erit [*per* 13. *hujus.*)
Ratio A ad *B* major ratione E ad *B*,
Quare [*per* 10. *hujus.*)
A major, quam E.
Cum igitur A sit major quam E
(*per* 8. *hujus.*)
Major ratio A ad C, quam E ad eamdem C.
Sed (*per* 16. *hujus.*) alternando
E : C : : *B* : D.
Ergo alternando.
Major ratio A ad C, quam *B* ad D. q. e. d.

Propos.

Propoſ. XXVIII. Theor. XXVIII.

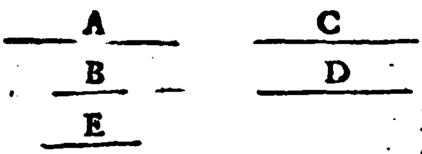
Si prima magnitudo A ad ſecundam B majorem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D.

Dico componendo majorem rationem habere A + B ad B, quam C + D ad D.

Conſtructio.

Ponatur uti C ad D, ita E ad B.

Demonſtratio.



QVia (*per hyp.*) major ratio A ad B, quam C ad D;

Ratio autem C ad D [*per conſtructionem.*] æqualis rationi E ad B:

[*per* 13. *hujus.*] erit

Major ratio A ad B, quam E ad B: ergo

(*per* 10. *hujus.*)

A major quam E.

Hoc ſtante A + B major quam E + B, quare

(*per* 8. *hujus*))

Major ratio A + B ad B, quam E + B ad B:

Sed [*per* 18. *hujus.*] componendo,

E + B ad *B*, ita C + D ad D:

Ergo pariter componendo,

Major ratio *A* + *B* ad *B*, quam C + D ad D. q. e. d.

Propoſ.

Propos. XXIX. *Theor.* XXIX.

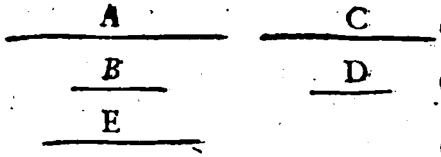
Si composita ex A prima, & B, secunda ad B secundam, majorem habuerit rationem, quam composita ex C tertia, & ex D quarta, ad D quartam.

Dico dividendo A ad B majorem habere rationem, quam C ad D.

Constructio.

Ponatur ut C + D, ad D, ita E + *B* ad *B*.

Demonstratio.



QVia [*per hyp.*) major est ratio A + *B*, ad *B*, quam C + D ad D;

Ratio autem C + D ad D (*per constructionem.*) eadem ac E + *B*, ad *B*:

Erit [*per* 10. *hujus.*]

Major ratio A + *B* ad *B*, quam E + *B* ad *B*: ergo *A* + *B* major quam *EB*: Dempta communi *B*; erit

A major quam E.

Igitur dividendo

Major ratio *A* ad *B*, quam E ad *B*.

Cum autem dividendo (*per* 17. *hujus.*) sit

E : *B* : : C : D : sequitur

Rationem A ad *B* majorem esse ratione C ad D. q. e. d.

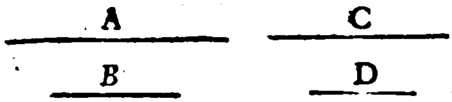
Propos. XXX. *Theor.* XXX.

Si composita A + B ad B majorem habuerit rationem, quam composita C + D ad D.

Dico

Dico per converſionem rationis B ad A minorem habere rationem quam D ad C.

Demonſtratio.



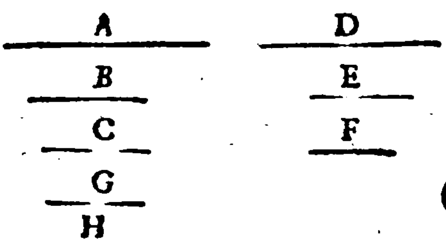
CUm (*per hyp.*) major ſit ratio A + *B* ad *B*, quam C + D ad D: Dividendo (*per 29. hujus*) erit
Major ratio A ad *B*, quam C ad D.
Convertendo [*per 26. hujus.*] erit
Minor ratio *B* ad A, quam D ad C.
Igitur componendo [*per 28. hujus.*]
Minor ratio A + *B* ad A, quam C + D ad C. q. e. d.

Propoſ. XXXI. *Theor.* XXXI.

Si fuerint tres magnitudines A. B. C. ex una parte, aliæque tres D. E. F. ex alia parte, ſitque major ratio primæ A ad ſecundam B, quam primæ D ad ſecundam E: pariterque major ſit ratio ſecundæ B, ad tertiam C, quam ſecundæ E, ad tertiam F.

Dico ex æquo majorem eſſe rationem primæ A ad tertiam C, quam primæ D ad tertiam F.

Conſtructio.

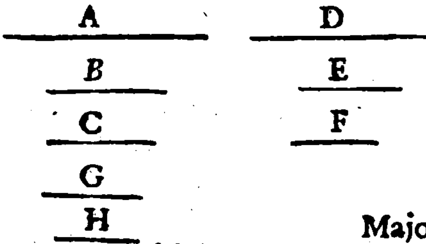


POnatur G ad C uti E ad F, atque H ad G, uti D ad E.

Demonſtratio.

QVia (*per hyp.*) major eſt ra-

ratio *B* ad C, quam E ad F;
Ratio autem E ad F (*per constructionem*) eadem ac ratio G ad C.



[*per* 13. *bujus*.] erit
Major ratio B ad, C quam G ad C;
Quare (*per* 10. *bujus*.)
B major quam G:
Ergo [*per* 8. *bujus*.)
Major ratio A ad G, quam A ad B:
Sed (*per hyp*.)
Major ratio A ad B, quam D ad E: ergo
Multo major ratio A ad G, quam D ad E.
Pariter quia [*per constructionem*.]
D : E : : H : G : erit etiam
Major ratio A ad G, quam H ad G:
Ergo [*per* 10. *bujus*.)
A major quam H:
Unde [*per* 8. *bujus*.]
Major ratio A ad C, quam H ad C:
Sed ex æquo [*per* 22. *bujus*.]
H : C : : D : F:
Ergo ex æquo
Major ratio primæ A ad tertiam C, quam primæ D ad tertiam F. q. e. d.

Propos. XXXII. Theor. XXXII.

Si ex una parte fuerint tres magnitudines A. B. C., tresque D. E. F ex alia; sit autem major ratio primæ A ad secundam B, quam secundæ E ad tertiam F: pariterque major sit ratio secundæ *B* ad tertiam C, quam primæ D ad secundam E.

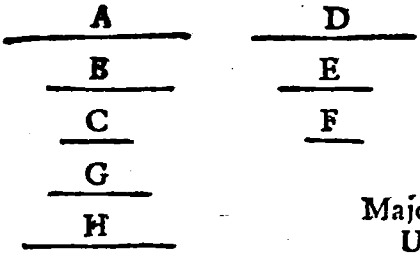
Dico, ex æqualitate perturbata majorem rationem habere primam A ad tertiam C, quam primam D ad tertiam F.

Con-

Constructio.

Constituatur G ad C uti D ad E, atque H ad G, uti E ad F.

Demonstratio.



Quia (*per hyp.*) ratio B ad C major quam ratio D ad E; ratio autem D ad E (*per constructionem.*) æqualis rationi G ad C,
(*per* 13. *hujus*) erit
Major ratio B ad C, quam G ad C.
Unde (*per* 10. *hujus.*)
B major quam G:
Igitur [*per* 8. *hujus.*]
Major ratio A ad G, quam A ad B.
Sed (*per hyp.*)
Major ratio A ad B, quam E ad F: ergo
Multo major ratio A ad G, quam E ad F.
Quia vero (*per constructionem.*)
H : G : : E : F,
Major erit ratio A ad G, quam H ad G:
ideoque (*per* 10. *hujus.*]
A major quam H.
Quamobrem [*per* 8. *hujus.*]
Major ratio A ad C, quam H ad C;
Sed ex æqualitate (*per* 23. *hujus.*]
H : C : : D : F.
ergo ex æquo
Major ratio A ad C, quam D ad F. q. e. d.

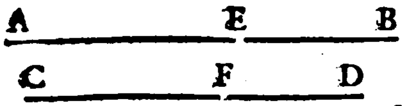
Propos. XXXIII. *Theor.* XXXIII.

Si fuerit major ratio totius AB ad totum CD, quam ablati AE ad ablatum CF.

Di-

Dico reliquum EB ad reliquum FD, majorem habere rationem quam totum AB ad totum CD.

Demonſtratio.



CUm [*per hyp.*] major ſit ratio AB ad CD, quam AE ad CF.

Permutando [*per 27.hujus.*] erit

Major ratio AB ad AE, quam CD ad CF:

Quare per conuerſionem rationis (*per 30. hujus.*)

Minor ratio AB ad EB, quam CD ad FD,

Ergo permutando (*per 27. hujus.*)

Minor ratio AB, ad CD, quam EB, ad FD:

Ideoque

Major ratio EB, ad FD, quam AB, ad CD. q. e. d.

Propoſ. XXXIV. *Theor.* XXXIV.

Si fuerint quotcumque magnitudines A.B.C. ex una parte, totidemque D.E.F. ex alia parte; ſitque major ratio primæ A ad primam D, quam ſecundæ B, ad ſecundam E, & tertiæ C, ad tertiam F, ſicque deinceps, ſi plures ſuerint magnitudines.

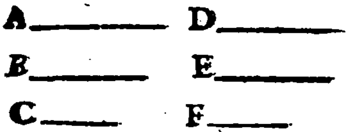
1 Dico omnes magnitudines A. B.C. ad omnes D.E F. majorem habere rationem, quam B.C relicta prima A, ad E. F relicta prima D.

2. Dico omnes magnitudines A. B. C. ad omnes D. E. F., minorem habere rationem, quam habeat prima A ad primam D.

3. Di-

5. Dico omnes magnitudines A. *B*. C. ad omnes D. E. F. majorem habere rationem, quam ultima C ad ultimam F.

Demonstratio primæ partis in tribus magnitudinibus.



QVia [*per hyp.*) major est ratio A ad D, quam *B* ad E.

Permutando [*per* 27. *hujus.*]

Major ratio A ad B, quam *D* ad E.

Componendo [*per* 28. *hujus.*]

Major ratio *A* + *B* ad *B*, quam D + E, ad E.

Iterum permutando [*per* 27. *hujus.*)

Major ratio A + *B* ad D + E, quam *B* ad E.

Cum igitur totum *A* + *B* ad totum D + E majorem habeat rationem, quam ablatum *B* ad ablatum E:

(*per* 33. *hujus*] erit.

Major ratio reliquæ A ad reliquum D, quam totius A + *B* ad totum D + E.

Eodem modo demonstrabitur,

Majorem habere rationẽ *B* ad *E*, quam habeat *B* + C ad *E* + F: quare multo major ratio A ad D, quam *B* + C, ad *E* + F:

Ergo permutando [*per* 27. *hujus.*)

Major ratio A ad *B* + C, quam D ad *E* + F.

Igitur componendo [*per* 28. *hujus.*].

Major ratio A + *B* + C ad *B* + C, quam D + *E* + F ad *E* + F.

Rursus permutando [*per* 27. hujus.]

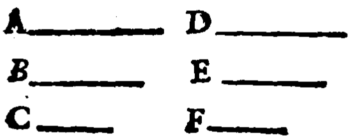
Major ratio A + *B* + C ad D + E + F, quam *B* + C ad *E* + F.

q. e. i. d.

Demonstratio secundæ partis.

CUm in prima parte hujus propositionis fuerit demonstratum majorem rationem habere A + *B* + C ad D + *E* + F, quam *B* + C ad *E* + F.

Si *B* + C, & *E* + F intelligantur tamquam ablata [*per* 33. *hujus*]



bujus] major erit ratio residui A ad residuum D, quam A + B + C ad D + E + F. q. e. 2. d.

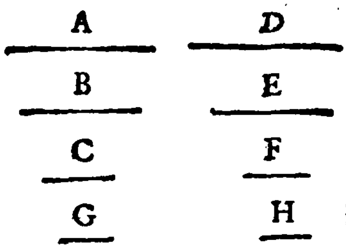
Demonstratio tertiæ partis.

QVia [*per hyp.*] major ratio B ad E, quam C ad F.
Permutando (*per 27. bujus.*) erit
Major ratio B ad C, quam E ad F.
Componendo (*per 28. bujus.*)
Major ratio B + C ad C, quam E + F ad F,
Denuo permutando
Major ratio B + C ad E + F, quam C ad F:
Sed ex demonstratis in prima parte
Major ratio A + B + C ad D + E + F, quam B + C ad E + F;
ergo erit etiam
Major ratio A + B + C ad D + E + F, quam C ad F. q. e. 3. d.

Demonstratio si quatuor, vel plures sint magnitudines ex utraque parte.

SI ex una parte quatuor sint magnitudines A. B. C. G, & quatuor ex alia D. E. F. H.

Sitque major ratio { A ad D, quam B ad E) B ad E, quam C ad F) C ad F, quam G ad H.) } idem demonstrabitur



1. Cum in tribus tantum magnitudinibus B. C. G, alijsque numero æqualibus E. F. H in secunda parte demonstrata sit,
Major ratio B ad E, quam B + C + G ad E + F + H;
Multo major erit ratio A ad D, quam B + C + G ad E + F + H,
Quare permutando (*per 27. bujus.*]
Major ratio A ad B + C + G, quam D. ad E + F + H:
Igitur

Igitur componendo [*per 28. hujus.*]

Major ratio A + B,C,G,ad B, C, G quam D + E,FH, ad E,FH, ergo permutando [*per 27. hujus.*]

Major ratio A + B,C, G ad D + E, F H quam B, C G,ad *E*,FH. q. e. d.

2. Cum ex modo demonstratis.

Major sit ratio omnium A, B, C, G, ad omnes D, *E*, F, H, quam B, C, G ad *E*, F, H.

Erit [*per 33. hujus.*]

Major ratio residui A ad residuum D, quam totius A, B, C, G ad totum D, *E*, F, H. q. e.d.

3. Quia in tribus tantum magnitudinibus, non solum demonstrata est,

Major ratio B, C, G, ad *E*, F, H, quam G, ad H, verum etiam

Major ratio A, *B*, C, G ad *D*,*E*, F, H, quam *B*CG, ad *E*FH.

Multo major erit ratio A*B*CG ad D,*E*,F,H,quam G ad H. q.e.d.

Datis quinque, sex, vel septem magnitudinibus colligi poterit id, quod de tribus, & quatuor magnitudinibus fuit demonstratum.

Propos. XXXV. *Theor.* XXXV.

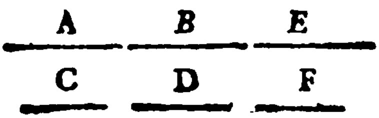
Si ratio A ad B sit eadem ac ratio C ad D.

Dico rationem duplicatam A ad B æqualem esse rationi duplicatæ C ad D, & vicissim.

Si duplicata ratio A ad B eadem est, ac duplicata C ad D.

Dico dimidiatam, seu subduplicatam rationem esse æqualem.

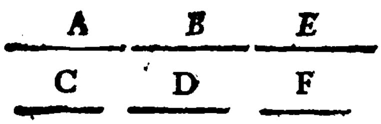
Constructio.



VT A ad B ita sit B ad E, & ut C ad D, ita D ad F.

P De-

Demonſtratio primæ Partis.



QVia (*per hyp.*) A ad *B*, ita C ad D; ſunt autem (*per conſtructionem.*) ut A ad *B*, ita *B* ad E, & ut C ad D, ita D ad F.

Quare [*per* 11. *hujus.*)
Ut A ad *B*, ita C ad D, & ut B ad *E*, ita D ad F;
Igitur ex æquo [*per* 22. *hujus.*]
Ut *A* ad *E*, ita C ad F,
Sed (*per def.* 10. *hujus.*)
Ratio A ad *E* eſt duplicata A ad *B*, & ratio C ad F duplicata C ad D; ſi ergo ratio *A* ad *B* ſit ratio C ad D, etiam duplicatæ *A* ad *E*, & C ad F eædem erunt. q. e. 1. d.

Demonſtratio ſecundæ partis.

RAtio A ad *B* bis ſumpta [*per def.* 10. *hujus.*] facit *E*, atque ratio C ad D pariter bis accepta facit F; ſed [*per hyp.*] ratio A ad *E*, eadem, ac ratio C ad F: ergo etiam ratio A ad *B* ſemel ſumpta æqualis erit rationi C ad D ſemel ſumptæ; quare ſi eædem ſunt rationes duplicatæ, etiam dimidiatæ eædem erunt. q. e. 2. d.

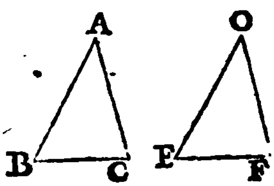
Elementi Quinti Finis.

LIBER VI. EUCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIONES.

Definitio I.

SIMILES dicuntur illæ figuræ rectilineæ, quæ ſingulos angulos ſingulis angulis æquales habent, & latera æquales angulos comprehendentia proportionalia.



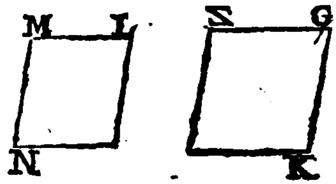
SI duo triangula *ABC*, OEF (idem de reliquis figuris rectilineis intelligendum) habeant angulum A = ang O: ang. *B* = ang. *E*: ang. C = ang. F: & inſuper

Si *AB*: *BC*: : OE : *EF*.
Si *BC*: CA : : *EF*: FO.
Si C*A*: *AB*: : FO: OE.

Dicta triangula dicuntur SIMILIA.

Def. II.

RECIPROCÆ figuræ dicuntur, cum in utraque figura antecedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.



SI in figuris LN, ZK, latera ZG, GK, lateribus LM, MN fuerint taliter proportionalia, ut in utraque figura sint antecedentes, & consequentes rationum, hoc est.

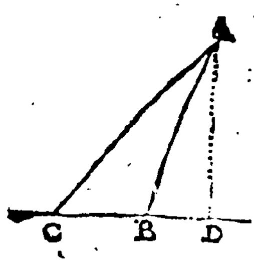
GZ : LM :: MN : GK.

Rationis GZ ad LM antecedens est in figura ZK, & consequens in figura LN: rationis verò MN ad GK antecedens est in figura LN, & consequens in figura ZK; quamobrem figuræ ZK, LN RECIPROCÆ appellantur.

Def. III.

EXTREMA, & MEDIA ratione recta linea terminata *AB* secta dicitur, cum taliter secta fuerit, ut tota *AB* sit ad majus segmentum *AC*, ut *AC* ad minus segmentum *CB*.

Defin. IV.



ALTITUDO cujuscumque figuræ dicitur perpendicularis a vertice ad basim ducta.

SI figuræ A*B*C vertex statuatur punctum A; perpendicularis ab A supra basim C*B* ducta, hoc est AD; dicitur figuræ A*B*C ALTITUDO.

Def.

Def. V.

RATIO ex RATIONIBUS COMPONI dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.

AD habendam integram hujus Definitionis notitiam est animadvertendum, Denominatorem cujuscumque rationis ostendere quantitatem rationis cadentem inter antecedens, & consequens, manifestando quanta sit magnitudo antecedentis ad consequens comparata; si enim talis denominator sit quatuor, signum est quod antecedens quater continet consequens; si vero denominator rationis sit $\frac{1}{4}$; indicium erit, antecedens existere quartam partem consequentis.

Hoc stante Euclides in posita definitione dicit, quod ratio ex rationibus composita dicitur, quando rationum denominatores inter se multiplicati, aliquam efficiunt rationem.

A. B. C. D.

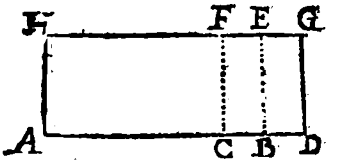
Datis igitur rationibus 12 ad 3, & 4 ad 2, ut talium rationum rationem componamus, in primis oportet accipere rationum denominatores, qui sunt 4, & 2: secundo fiat multiplicatio 4 in 2, productum erit 8. denominator rationis compositæ ex rationibus 12 ad 3, & 4 ad 2. hoc est ratio 8 ad 1.

Circa hanc compositam rationem est observandum, quod Euclides rationes illas, ex quibus resultat ratio composita, QVANTITATES appellavit, dum alij INDICES, & EXPONENTES nominant, alii vero QUOTIENTES dicunt, & hoc quia indicant, exponunt, atque manifestant quoties antecedens rationis contineat suum consequens.

Verum dimissa hac terminorum varietate, circa rationem ex rationibus compositam, sat erit intelligere, quod universaliter loquendo, quotiescumque duæ, vel plures rationum quantitates simul multiplicantur productum, quod ex tali multiplicatione resultat, vocatur ratio ex rationibus composita, cum ex plurium rationum quantitatibus inter se multiplicatis componatur.

Def. VI.

PARALLELOGRAMMUM ad aliquam rectam lineam applicatum dicitur deficere a parallelogrammo, quando non occupat totam lineam: excedere verò dicitur, quando occupat majorem lineam, ac sit illa, cui applicatur; ita tamen, ut deficiens, aut excedens parallelogrammum eamdem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, & cum eo constituat unum parallelogrammum.



SI parallelogrammum AF applicatum ad rectam AB non occupet totam AB, at solam partem AC, completo parallelogrammo AE, parallelogrammum AF dicitur deficere parallelogrammo CE; & parallelogrammum CE dicitur defectus.

Quod de defectu dictum est, etiam de excessu intelligi debet; si enim super AB constitutum fueri parallelogrammum AG, hoc parallelogrammum excedere dicitur parallelogrammo BG, quod excessus vocatur.

Propos. I. Theor. I.

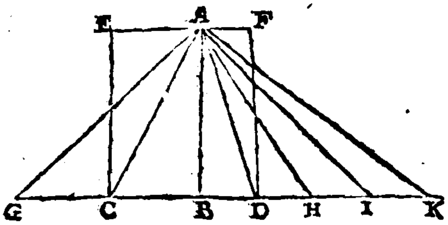
Si triangula CAB, BAD, vel parallelogramma BE, BF in eadem fuerint altitudine.

1. Dico triangulum CAB ad triangulum BAD illam habere rationem, quam habet basis CB ad basim BD.

2. Dico parallelogrammum BE, ad parallelo-

lelogrammum BF habere rationem basis CB ab basim BD.

Constructio primæ partis.



REcta CD indefinitè producatur ad utramque partem, versus G, & versus K. Ex CG [*per 3. pri.*] auferantur quæcumque partes æquales ipsi CB: in præsenti verò figura una tantum pars facta fuit æqualis ipsi CB, nempe CG. Pariter in recta BK notentur DH, HI, IK singulæ ipsi BD æquales Notentur rectæ AG, AK, AI, AH.

Demonstratio primæ partis.

CUm triangula BAC, CAG sint super æqualibus basibus BC, CG, & inter easdem parallelas constituta: (*per 38. pri.*) erunt æqualia: ob eamdem rationem æqualia erunt etiam triangula BAD, DAH, HAI, IAK.

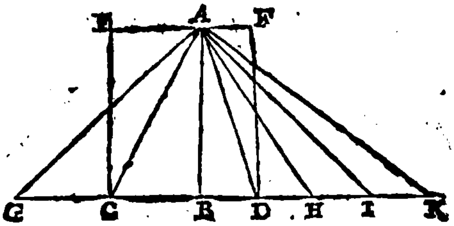
Quo stante quam multiplex est recta BG rectæ BC, tam multiplex etiam erit triangulum BAG, trianguli BAC: pariter quam multiplex est recta BK rectæ BD, tam multiplem etiam erit triangulum BAK trianguli BAD.

Rursus quia dum basis BG = BK, etiam triangulum BAG = triangulo BAK: quando BG major BK, etiam triangulum BAG majus triangulo BAK: & quando BG minor BK, etiam triangulum BAG minus triangulo BAK.

Hoc posito statuatur basis BC prima magnitudo; *BD* secunda; triangulum BAC tertia; & triangulum BAD quarta.

Quia vero [*per demonstrata*] primæ BC, & tertiæ *BAC* sumpta fuerunt pariter multiplicia *BG*, & *BAG*; secundæ etiam

BD, & quartæ *BAD* posita sunt æqualiter multiplicia *BK*, & *BAK*: hæc autem æqualiter multiplicia, ex visis, talia sunt videlicet,



Quando *BG* multiplex primæ æquat *BK* multiplicem secũdæ, etiam *BAG* multiplex tertiæ æquat *BAK* multiplicẽ quartæ.
Quando *BG* majus B K, etiam *BAG* majus *BAK*.
Quando *BG* minus BK, etiam *BAG* minus *BAK*.

Secundum quamcumque multiplicationem.

Sequitur (*per def. 6. quinti.*)

ut basis BC ad basim *BD*, ita triangulum *BAC*, ad Triangulum BAD. q. e. 1. d.

Constructio secundæ partis.

SUper triangulorum basibus *BC*, *BD*, & inter parallelas CD EF duo constituantur parallelogramma *BE*, *BF*.

Demonstratio secundæ partis.

PArallelogrammum *BE* [*per* 34. *primi*.) duplum trianguli *BAC*, atque parallelogrammum *B* F duplum trianguli *BAD*.

Igitur (*per* 15. *quinti*.)

Parallelog. *BE* ad parallelog. *BF*, ut triang. *BAC*, ad triang. *BAD*.

Sed [*per demonstrata in prima parte*.)

Ut triang. *BAC* ad triang. *BAD*, ita basis *BC* ad basim *BD*.

Ergo (*per* 11. *quinti*.) ut

Paranllelog. *BE* ad parallelog. *BF*, ita basis *BC* ad basim *BD*. q. e. 2. d.

Propos.

Propos. II. Theor. II.

Si in triangulo BAC lateri BC ducta fuerit parallela DE.

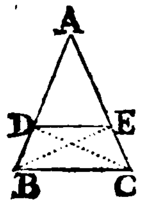
1. Dico reliqua trianguli latera AB, AC esse proportionaliter secta in D, & E.

2. Dico. Si trianguli latera AB, AC fuerint proportionaliter secta in D, & E, rectam DE, ipsi BC esse parallelam.

Constructio.

Notentur duæ rectæ EB, DC.

Demonstratio primæ partis.

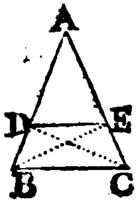


DUo triangula DBE, ECD (*per 37. pri.*) sunt æqualia.
Quare (*per 7. quinti.*) ut
Triang. ADE ad triang. BDE, ita triang. ADE ad triang. ECD.
Sed (*per 1. hujus.*) ut
Triang. ADE ad triang. DBE, ita AD ad DB,
Atque: [*per eamdem 1. hujus.*] ut
Triang. ADE ad triang. ECD, ita AE ad EC:
Ergo (*per 11. quinti.*)
AD : DB : : AE : EC. q. e. 1. d.

Demonstratio alterius partis.

(*per hyp.*] AD : DB : : AE : EC.
Sed (*per 1. hujus.*)
Ut AD : DB : : triang. AED : triang. DEB; atque
Ut AE : EC : : triang. ADE : triang. EDC:
Igitur (*per 11. quinti.*)

Ut



Ut triang. *AED*: triang. *DEB*: : triang. *AED*: triang. *EDC*;

Igitur (*per 9. quinti*.

Triang. *DEB* = triang. *DCE*.

Cum autem hæc triangula æqualia sint super eadem basi *DE* constituta: (*per 39. pri.*) erunt inter easdem parallelas: ideoque *DE* parallela *BC*: q. e. 2. d.

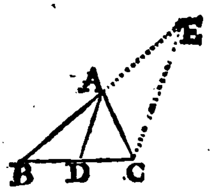
Propos. III. Theor. III.

Si trianguli BAC, angulus BAC fuerit bifariam divisus a recta AD.

1. Dico *B*D: DC: : *B*A: AC,
Vicissim, si *B*D: DC: : *B*A: AC.

2. Dico angulum *B*AC esse bifariam divisum a recta AD.

Constructio.



A Puncto C (*per 31. pri.*) notetur CE parallela AD, quæ producatur quousque concurrat cum BA producta in E: debet enim concurrere, quia in triangulo ADB anguli ABD, ADB [*per 17. pri.*] sunt duobus rectis minores. Cum autem (*per 29. pri.*) angulus ADB = ang. ECD; inde sequitur angulos ABC, ECB esse duobus rectis minores: quare (*per axjo. 13.*) rectæ BA, & CE debent concurrere in E.

Demonstratio primæ partis.

QVia (*per constructionem.*) rectæ DA, CE sunt parallelæ (*per 29. pri.*) ang. ECA = ang. CAD, & ang. E = DAB. Cum autem [*per hyp.*] sit ang. CAD = ang. DAB: sequitur ang. ECA = ang. E.

Qua-

Quare (*per 6. pri.*]
AE = AC.
Ergo (*per 7. quinti.*]
BA : AE : : BA : AC.
Cum autem in triang. BEC (*per constructionem*] sit AD parallela EC : erit [*per 2. hujus.*]
BA : AE : : BD : DC,
Ergo (*per 11. quinti.*)
BA : AC : : BD : DC : q. e. p. d.

Demonstratio alterius partis.

[*Per suppositum*) BD : DC : : BA : AC,
(*per 2. hujus.*)
BD : DC : : BA : AE ;
Erit [*per 11. quinti.*]
BA : AC : : BA : AE ;
Quare (*per 9. quinti.*)
AC = AE.

Ideoque in triang. CAE (*per 5. primi.*) ang. ACE = ang. AEC. Cum autem ob parallelas AD, EC (*per 29. primi.* sit ang. ACE = ang. CAD, & ang. AEC = ang. DAB : erit (*per axio pri.*) ang. CAD = ang. DAB : ergo angulus BAC est bifariam divisus a recta AD. q. e. 2. d.

Propos. IV. Theor. IV.

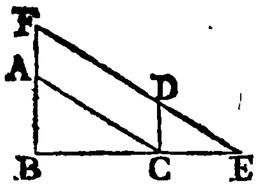
Si triangulum BAC habeat singulos angulos æquales singulis angulis trianguli CDE ; hoc est

ang. ABC = DCE
ang. BCA = CED
ang. CAB = EDC

Dico circa æquales angulos, latera esse pro-

por-

portionalia, & homologa esse illa latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, videlicet.



AB: *BC*:: *DC*: *CE*.
BC: *CA*:: *CE*: *ED*.
CA: *AB*:: *ED*: *DC*.

Constructio.

DAta triangula *ABC*, *DCE* taliter disponantur, ut non solum homologa latera BC, CE, in recta linea BCE sint constituta, verum etiam æqualium angulorum DCE, *ABC*, unus sit externus, alter verò internus, & oppositus. Producantur latera B A, ED quousque concurrant in F; debent enim concurrere, quia anguli *ABC*, *BCA* [*per* 17.*pri.*] sunt minores duobus rectis: cum autem (*per hyp.*) angulus *BCA* = ang. *CED*; etiam anguli *ABC*, *CED* duobus rectis minores erunt; ideoque [*per axio.* 13.] rectæ *BA*, *ED* productæ ad partes *A*, & *D* debent concurrere in F.

Demonstratio.

QVia (*per hyp.*) angulus *DCE* = ang. *ABC* (*per* 28. *pri.*] rectæ *AB*, *DC* erunt parallelæ; ob eamdem rationem etiam parallelæ erunt rectæ *CA*, *ED*: quamobrem *AD* erit parallelogrammum; ac propterea (*per* 34. *pri.*) *CD* = *AF*, *CA* = *DF*.

His positis, quia in triangulo *FBE* recta *AC* est parallela FE; erit [*per* 2. *hujus*.)

BA: *A*F:: *BC*: *CE*, seù *BA*: *CD*:: *BC*: *CE*,
permutando [*per* 16. *quinti*.)
BA: *BC*:: *CD*: *CE*.

Rursus quia in eodem triangulo FBE recta DC est parallela BF;

erit (*per* 2. *huius*.]
BC: *CE*:: *FD*: *DE*, seu *BC*: *CE*:: *AC*: *DE*,
permutando [*per* 16. *quinti*.
BC: *AC*:: CE: DE.

Denuo, quia [*ex demonstratis*.]

AB:

$AB : BC :: DC : CE$, atque $BC : CA :: CE : DE$,
Ex æquo (*per 22. quinti.*) erit
$AB : AC :: DC : DE$.

Quare in datis triangulis circa æquales angulos proportionalia sunt latera, & homologa sunt illa latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. q. e. d.

Corollarium.

Ex hac propos. fit manifestum in triangulo *FBE*, rectam lineam *AC* parallelam *FE* abscindere triangulum *ABC* simile toti triangulo *FBE*; cum dicta triangula [*per 29. pri.*] sint æquiangula.

Nota. Æquiangula triangula FBE, *ABC* dicēda sunt SIMILIA juxta sensum Definitionis primæ hujus Libri; & hoc quia æquales habent angulos, & latera [*per demonstrata*] circa æquales angulos proportionalia.

Propos. V. Theor. V.

Si duo triangula ABC, DEF latera habuerint proportionalia, nempe

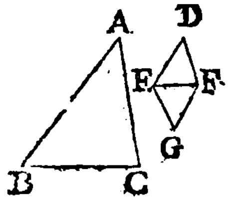
$AB : BC :: DE : EF$,
$BC : CA :: EF : FD$,
$CA : AB :: FD : DE$,

Dico esse æquiangula, æqualesque habere illos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur, videlicet

ang. $A = D$
ang. $B = E$
ang. $C = F$.

Cu-

Constructio.



PONatur (*per* 23. *pri.*] angulus FEG = ang. B.

Per eamdem propositionem fiat angulus EFG = ang. C,

Concurrantque rectæ EG, FG in G.

Demonstratio.

QVia (*per constructionem*] in triangulo EGF angulus FEG = ang. B, & ang. EFG = ang. C: [*per* 32. *pri.*) & ang. G = ang. *A*: triangula B*AC*, EGF erunt æquiangula:

ergo [*per* 4. *huius*.]

AB: BC:: GE: EF,

Sed [*per hyp.*)

AB: BC:: DE: EF,

Quare (*per* 11. *quinti*.)

GE: EF:: DE: EF,

ergo (*per* 9. *quinti*.)

GE = DE.

Eadem prorsus ratione demonstrabitur

GF = DF.

Cum autem in triangulis EGF, EDF latera EG, GF sint singula singulis æqualia lateribus ED, DF, atque basis EF communis; sequitur (*per* 8. *pri.*) ang. G = ang. D: & erunt (*per* 4. *pri.*) reliqui anguli reliquis angulis æquales, sub quibus æqualia latera subtenduntur, nempè

ang. DEF = ang. FEG, &

ang. DFE = ang. EFG.

Quare triangula EDF, EGF sunt æquiangula: sed triangulum EGF (*per constructionem*) est æquiangulum triangulo BAC: ergo etiam triang. EDF erit æquiangulum eidem triang. BAC. q. e. d.

Propos.

Propos. VI. Theor. VI.

Si in triangulis *BAC*, *EDF* sit ang. B = ang. E; atque latera æquales angulos comprehendentia proportionalia, nempe

AB : BC : : DE : EF.

Dico esse æquiangula, æqualesque esse illos angulos; sub quibus homologa latera subtenduntur, nempe

ang. C = ang. F, & ang. A = ang. D.

Constructio.

AD punctum E, & ad rectam EF (*per 23. pri.*) ponatur angulus FEG = ang. B, & ad punctum F constituatur angulus EFG = ang. C.

Demonstratio.

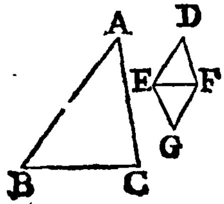
IN triangulis BAC, EGF (*per constructionem*) anguli, E, & F sunt singuli singulis æquales angulis B, & C: quare (*per 32. pri.*) & ang. G = ang. A: unde dicta triangula BAC, EGF erunt æquiangula.

Quamobrem (*per 4. bujus.*)
AB : BC : : GE : EF.
Sed [*per hyp.*]
AB : BC : : DE : EF:
Ergo [*per 11. quinti.*]
GE : EF : : DE : EF,
Unde (*per 9. quinti.*)
GE = DE.

Cum igitur [*per hyp.*] ang. B = ang. DEF, & (*per constructionem.*) idem ang. B = ang. GEF (*per axio. 1.*)

ang. DEF = ang. GEF.

Sintque latera DE, EF singula singulis lateribus GE, EF æqua-



æqualia: (*per* 4. *pri.*) erunt reliqui anguli æquales, nempe

ang. DFE = ang. GFE, & ang. D. = ang. G.

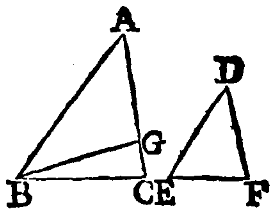
Quare triãg. EDF æquiangulũ triang. EGF. Sed triangulum EGF [*per demonstrata.*] æquiangulum triangulo BAC: ergo triangula BAC, EDF æquiangula. q. e. d.

Propos. VII. Theor. VII.

Si in triangulo ABC fuerit ang. A = ang. D. in triangulo DEF, latera verò comprehendentia angulos B, & *E* proportionalia, videlicet *AB*: *BC*:: *DE*: *EF*; atque reliqui anguli C, & F ambo majores, vel non majores recto.

Dico hæc triangula esse æquiangula, æqualesque habere non solum angulos B, & *E*, verum etiam C, & F.

Constructio, & Demonstratio.



Suppositis angulis C, & F recto minoribus, si anguli ABC, DEF non sunt æquales, unus erit major, & alter minor: ponatur angulus ABC major angulo DEF. Hoc supposito ad punctum B, & ad rectam BA [*per* 23. *primi.*) ponatur angulus ABG = ang. DEF.

Quia in triangulis ABG, DEF (*per hyp.*) angulus A = ang. D, & angulus ABG [*per constructionem.*) = ang. E; (*per* 32. *primi.*) erit ang. BGA = ang. EFD: quare triangula ABG, DEF æquiangula.

Ideoque (*per* 4. *bujus.*
AB: BG:: DE: EF.

Sed

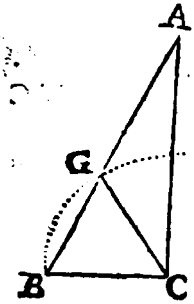
Sed [*per hyp.*)
AB : BC : : DE : EF.
Ergo (*per* 11. *quinti*.]
AB : BG : : AB : BC.
Quare (*per* 9. *quinti*.)
BG = BC,
Igitur triangulum GBC isosceles, unde (*per* 5. *primi*.)
ang. BCG = ang. BGC.

Cum autem, (*ut supponitur*.) angulus BCG sit acutus, etiam acutus erit angulus BGC: ergo (*per* 13. *quinti*.) angulus BGA erit obtusus: sed angulus BGA demonstratus est æqualis angulo F, qui suppositus fuit acutus: ergo angulus BGA erit acutus, & obtusus; quod repugnat; unde angulus ABC non erit major angulo DEF.

Pariter si duo anguli C, & F singuli sint non minores recto [*per superius demonstrata*.] erit angulus BCG = ang. BGC: cum autem angulus BCG supponatur non minor recto, angulus BGC erit vel rectus, vel obtusus: ergo in triangulo BCG erunt duo anguli non minores duobus rectis, [*contra prop*. 17. *pri*.] ergo dicendum erit ang. ABC = ang. DEF: quare (*per* 32. *pri*.) triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum. q. e. d.

SCHOLIUM.

Quærenti postea cur Euclides in hoc theoremate apposuerit illa verba (utrumque vero reliquorum angulorum C, & F debere esse minorem, vel non minorem recto.) *Respondeo, hoc fuisse factum, quia dari possunt duo triangula, in quibus licet sit unus angulus uni angulo æqualis, & circa reliquos angulos latera proportionalia, ipsa tamen non sint æquiangula; ut patet in duobus triangulis ACB, ACG, quæ habent angulum communem A, & circa angulos ACB, ACG latera proportionalia, quia (per* 7. *quinti.) AC* : CB : : *AC* : CG: *licet hæc triangula non sint æquiangula. Quamobrem Euclides, ut propositionem poneret universalem addidit illa verba*, reliquos angulos debere esse minores, vel non minores recto; *quia hac conditione supposita, triangula sunt æquiangula.*

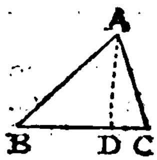


Propoſ. VIII. Theor. VIII.

In triangulo rectangulo BAC, ſi ab angulo recto A in baſim BC demiſſa fuerit perpendicularis AD.

Dico triangula BAD, DAC toti triangulo BAC, & inter ſe eſſe ſimilia.

Demonſtratio.



Triangula BAC, BDA habent angulos BAC, BDA æquales, quia rectos: ulterius habent angulum B. communem utrique triangulo: quare [*per corol. 2. prop. 32. pri.*) & angulus C = ang. BAD: ergo triangulum BDA (*per 2. hujus*] ſimile triangulo BAC.

Eodem prorſus modo demonſtrabitur triangulum CDA æquiangulum ejdem triangulo BAC; ideoque ſimilia etiam triangula CDA, BAD.

Quod poſtea triangula BDA, CDA inter ſe ſint ſimilia, taliter demonſtratur: habent enim angulos ADB, ADC æquales, quia rectos: Rurſus [*per ſuperius demonſtrata.*] angulus BAD = C: quare (*per 32. pri.*] & angulus DAC = ang. B; ideoque triangula BDA, CDA [*per 4. huius.*) inter ſe ſimilia erunt. q. e. d.

Corrollarium primum.

Ex hac propoſitione patet, in Triangulo rectangulo BAC perpendicularem ab angulo recto in baſim demiſſam, mediam eſſe proportionalem inter baſis ſegmenta BD, DC: quia ob ſimilitudinem triangulorum BDA, CDA (*per 4. hujus.*)

BD : DA : : DA : DC : q. e. d.

Corrol-

Corrolarium secundum,

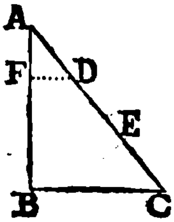
PAriter fit manifestum, latus BA esse medium proportionale inter BC, & BD, atque latus CA medium proportionale inter BC, & CD: & hoc quia ob similia triangula BAC, BDA, [*per 4. bujus.*) CB: BA: : BA: BD.

Rursus quia similia sunt triangula BAC, CDA (*per eandem 4.*) BC: CA: : CA: CD: q. e. d.

Propos. IX. Probl. I.

A data recta AB terminata quæsitam partem auferre.

Constructio.



A Puncto A ducatur quæcumque recta AC indefinita, quæ cum data AB angulum efformet BAC. In AC signetur quodcumque punctum D.

Si ex data AB auferenda sit pars tertia, in AC [*per 3. pri.*] accipiantur tres partes æquales, & sint AD, DE, EC.

Ducatur BC, & ex D [*per 31. pri.*) notetur DF parallela BC.

Dico AF tertiam esse partem datæ rectæ AB.

Demonstratio.

QVia (*per constructionem.*) DF est parallela CB [*per 2. bujus.*)

AD: DC: : AF: FB;

[Componendo (*per 18. quinti.*)

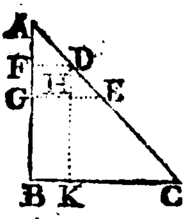
AD: AC: : AF: AB,

Cum autem (*per constructionem.*) AD sit pars tertia ipsius AC, erit & AF tertia pars datæ rectæ AB. q. e. f.

Propos. X. *Probl. II.*

Duabus datis rectis lineis terminatis AB, AC, quarum AB sit insecta, AC vero secta in D, & E: oportet similiter secare AB, ac secta est recta AC.

Constructio.



DAtæ rectæ *AB*, AC taliter disponantur, ut constituant angulum BAC. A puncto C ad B recta ducatur CB: ex punctis D, & E [*per* 31. *primi*.) notentur rectæ DF, EG parallelæ CB, signeturque DK parallela AB.

Dico datam rectam *AB* in F, & G esse similiter sectam, ac secta est AC in D, & E.

Demonstratio.

QVia [*per constructionem*.) DF, EG parallelæ BC; erit [*per* 30. *pri*.) DF parallela EG: quamobrem in triangulo AEG [*per* 2. *hujus*.)

AD: DE: : AF: FG.

Pariter quia in triangulo DKC recta E H, est ipsi CK parallela (*per* 2. *hujus*.)

DE: EC: : DH: HK.

Cum autem [*per* 34. *pri*.] sit DH = FG, & HK = GB; erit

DE : EC: : FG. GB:

Quare

AF: FG: : AD: DE,

FG: GB: : DE: EC,

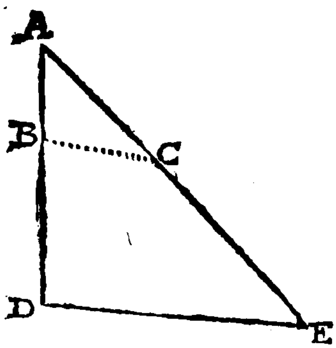
Unde data recta *AB* erit similiter secta, ac secta fuit data AC. q. e. f.

Pro-

Propos. XI. *Probl.* III.

Duabus datis rectis lineis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Constructio:



Datæ rectæ *AB*, AC taliter disponantur, ut quemcumque efforment angulum BAC. In AB producta acipiatur *BD* = AC, notetur BC. Ex puncto D (*per* 31. *pri.*) notetur DE parallela BC: ellongetur AC quousque concurrat cum DE in E.

Dico CE esse tertiam proportionalem duabus datis AB, *AC*.

Demonstratio.

In triangulo ADE (*per constructionem.*) recta *BC* parallela DE: quare (*per* 2. *bujus.*)

AB: BD:: AC: CE,

Cum autem (*per constructionem*) BD = AC, erit

AB: AC:: AC: CE: igitur

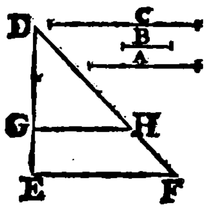
Recta CE erit tertia proportionalis datis rectis BA, AC.

q. e. f.

Propos. XII. *Probl.* IV.

Tribus datis rectis lineis A.B.C. quartam proportionalem invenire.

Constructio.



EX datis rectis lineis duæ priores A, & B secundum rectam DE disponantur, sitque DG = A, & GE = B. Notetur quæcumque recta DF, quæ angulum efficiat cum DE. In recta DF indefinitè producta (*per 3. pri.*) accipiatur DH = C: notetur HG: & ex E ducatur EF parallela GH, quæ concurrat cum DH producta in F.

Dico AF esse quartam proportionalem tribus datis A.B.C.

Demonstratio.

IN triangulo EDF [*per constructionem.*] GH parallela EF, Quare [*per 2. hujus.*

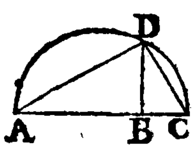
DG : GE : : DH : HF,

Ergo HF est quarta proportionalis tribus datis A.B.C. q. e. f.

Propos. XIII. Probl. V.

Duabus datis rectis lineis AB, BC mediam proportionalem invenire.

Constructio.



DAtæ rectæ, inter quas invenienda est media proportionalis, disponantur secundum rectam ABC. Recta AC bifariam dividatur, & supra ipsam notetur semicirculus ADC. Ex puncto B erigatur BD perpendicularis ipsi AC.

Dico BD esse mediam proportionalem inter AB, & BC.

Notentur rectæ DA, DC.

Demonstratio.

ANgulus ADC in semicirculo (*per 31. tertij.*] rectus est: quare in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto D in basim

basim AC (*per constructionem.*) ducta est perpendicularis DB: quare (*per corol. 1. prop. 8. hujus*) erit DB media proportionalis inter datas rectas *AB*, *BC*. q. e. f.

Propos. XIV. Theor. IX.

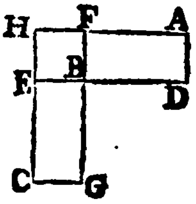
Si parallelogrammum AB æquale fuerit parallelogrammo BC, habueritque angulum FBD = ang. EBG.

Dico latera circa æquales angulos esse reciprocè proportionalia: & vicissim.

Si latera circa æquales angulos fuerint reciprocè proportionalia.

Dico parallelogramma esse æqualia.

Constructio.



DAta parallelogramma *AB*, EG taliter disponantur, ut æqualium angulorum latera DB, BE componant rectam lineam DBE: producantur latera AF, CE donec concurrant in H.

Demonstratio primæ partis.

CUm anguli FBD, EBG (*per hyp.*) sint æquales, atque latera E B, BD [*per constructionem.*) in rectum constituta, (*per corol. 3. prop. 15. pri.*] etiam FB, BG, erunt in rectum disposita.

His stantibus quia (*per hyp.*] parallelogrammum AB = parallelogrammo EG erit,

[*per 7. quinti.*

Parallelog. *AB* ad parallelog. FE, ut parallelog. EG ad parallelog. FE:

Sed (*per 1. hujus.*)

Parallelog. *AB* ad parallelog: FE, ut DB, ad *BE*, pariterque
Parallelog. *EG* ad parallelog. F*E*, ut G*B*, ad *BF*:
Quare [*per* 11. *quinti.*]
D*B* : *BE* : : G*B* : *BF*. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

[*per hyp.*] D*B* : *BE* : : G*B* : *B*F;
Sed (*per* 1. *hujus.*)
Ut D*B* ad *BE*, ita parallelog. *AB* ad parallelog. F*E*, atque
Ut G*B* ad *BF*, ita parallelog. G*E* ad parallelog. F*E*:
Quare (*per* 11. *quinti.*]
Ut parallelog. *AB* ad parallelog. F*E*, ita parallelog. *EG* ad parallelog. F*E*,
ergo [*per* 7. *quinti.*)
Parallelog. *AB* = parallelog. *E*G. q. e. 2. d.

Propos. XV. Theor. X.

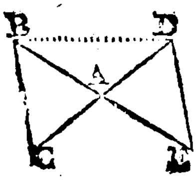
Si triangulum BAC fuerit æquale triangulo DAE, habueritque angulum BAC æqualem angulo DAE.

Dico latera circa æquales angulos esse reciprocè proportionalia: & vicissim

Si circa æquales angulos latera fuerint reciprocè proportionalia.

Dico triangula fore æqualia.

Constructio.



D*Ata* triangula *BAC*, *DAE* taliter secundum angulos æquales *BAC*, *DAE* disponantur, ut latera *BA*, *AE* componant rectam *BAE*; quo facto (*per corol.* 3. *prop.* 15.)

15. *primi.*) etiam latera *CA*, *AD* erunt in rectum constituta. Ducatur *BD*.

Demonstratio primæ partis.

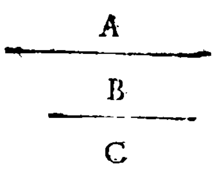
QVoniam (*per hyp.*] triang. *BAC* = triang. *DAE*.
[*per 7. quinti.*)
Triang. *BAC* ad triang. *BAD*, ut triang. *DAE* ad triang. *BAD*;
Sed *per 1. hujus.*]
Triang. *BAC* : triang. *BAD* : : *CA* : *AD* : atque
Triang. *DAE* : triang. *BAD* : *EA* : *AB*,
Ergo (*per 11. quinti.*)
CA : *AD* : : *EA* : *AB*. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

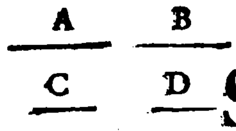
IN triangulis *BAC*, *DAE* cum angulis æqualibus *BAC*, *DAE*.
[*per hyp.*]
CA : *AD* : : *EA* : *AB*.
Sed [*per 1. hujus.*)
CA : *AD* : : triang. *CAB* : triang. *BAD*; pariterque
EA : *AB* : : triang. *EAD* : triang. *DAB*.
Ergo (*per 11. quinti.*]
Triang. *CAB* : triang. *BAD* : : triang. *EAD* : triang. *DAB*.
ergo [*per 9. quinti.*]
triang. *CAB* = triang. *EAD*. q. e. 2. d.

Propos. XVI. Theor. XI.

Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, fuerint proportionales.



Dico A × D = B × C: & vicissim,
Si A × B = B × C.
Dico quatuor lineas A, B, C, D esse proportionales.



Demonstratio primæ partis.

SI unum rectangulum ex prima A, & quarta D fuerit efformatum, aliud vero rectangulum a secunda B, & tertia C comprehensum; hæc duo rectangula erunt duo parallelogramma æquiangula, in quibus circa æquales angulos (*per hyp.*) latera erunt reciprocè proportionalia quare [*per 14. bujus.*] dicta rectangula æqualia erunt. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

QVia (*per hyp.*) rectangulum ex A, & D efformatum æquat rectangulum a rectis B & C comprehensum: duo erunt parallelogramma æquiangula, & æqualia: quare (*per 14. buius.*) latera circa æquales angulos erunt reciprocè proportionalia; nempe A ad B, uti C ad D. q. e. 2. d.

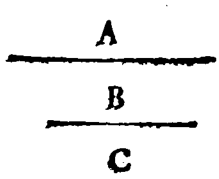
Propos. XVII. Theor. XII.

Si tres rectæ A, B, C fuerint proportionales. Dico rectangulum a prima A, & tertia C contentum æquale esse quadrato a media B descripto; & vicissim.

Si rectangulum a prima A & tertia C efformatum æquale fuerit quadrato mediæ B.

Dico tres rectas A, B, C esse proportionales.

Demonstratio primæ partis.



REctangulum ex prima A, & tertia C efformatum, atque quadratum Mediæ B sunt parallelogramma æquiangula, quæ (*per hyp.*) circa æquales augulos habent latera reciprocè proportionalia: ergo go [*per* 14. *hujus.*) erunt æqualia. q.e.1.d.

Demonstratio secundæ partis.

Rectangulum comprehensum a rectis A, & C [*per hyp.*] est æquale quadrato rectæ *B*: cum autem hæc rectangula sint æquiangula, & æqualia parallelogramma [*per* 14. *hujus.*] circa æquales angulos erunt latera reciprocè proportionalia: quare A ad B, uti B ad C. q.e.2.d.

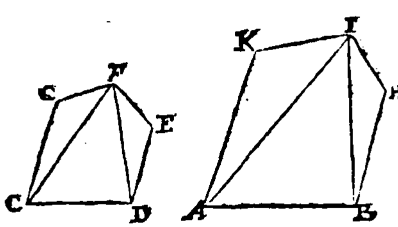
SCHOLIUM.

Circa has demonstrationes est observandum quodlibet Rectangulum esse parallelogrammum: & ideo de parallelogrammo demonstrata, valent etiam de rectangulo.

Propos. XVIII. *Probl. VI.*

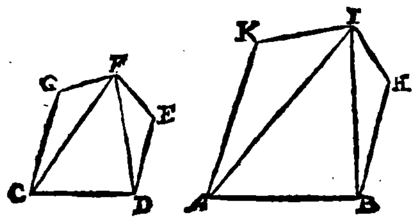
Datis rectilineo CDEFG, rectaque AB, ad ipsam AB applicandum est rectilineum simile, similiterque positum. Dato rectilineo CDEFG.

Constructio.



Datum rectilineum CDEFG rectis FC, FD resolvatur in triangula FGC, FCD, FED numero minora quantum fieri potest.

Ad punctum A, & ad rectam AB [*per* 23. *pri.*) constituatur an-



angulus BAI = ang. DCF: pariter ad punctum B, & ad rectam *AB* applicetur angulus *ABI* = ang. CDF: hoc facto producantur rectæ AI, *B*I donec concurrant in I; debent enim concurrere, quia discedunt a duobus angulis minoribus duobus rectis, qui (*per constructionem*) æquales sunt angulis DCF, CDF, qui [*per 17. pri.*] sunt duobus rectis minores.

Eodem prorsus modo ad punctum A, & ad rectam AI ponatur angulus IAK = ang. FCG: pariter ad punctum I efformetur ang. AIK = ang. CFG, rectæque A*K*, IK concurrant in K.

Tandem ad *B*, & I extrema rectæ BI applicentur anguli I*B*H, BIH singuli singulis æquales angulis FDE, DFE, concurrantque rectæ BH, IH in H.

Dico rectilineum ABHI*K* ad rectam A*B* datam applicatum simile esse, & similiter positum dato rectilineo CDEFG.

Nota. Figuræ similes dicuntur SIMILITER POSITÆ, quæ ad eamdem partem angulos habent æquales, & latera proportionalia.

Demonstratio.

IN triangulo AKI (*per constructionem*) anguli IA*K*, AI*K* sunt æquales angulis GCF. GFC in triangulo FCG: quare [*per 32. pri.*] ang. K = ang. G. Eadem ratione in triangulis IBH, FDE demonstrabitur ang. H = ang. E.

Rursus cum [*per constructionem.*] ang. KAI = ang. GCF, & ang. IAB = ang. FCD; erit (*per axio. 2.*) totus angulus KAB = toti ang. GCD: eodem modo demonstrabitur ang. A*B*H = ang. CDE, & ang. HIK = ang. EFG: quare posita rectilinea erunt æquiangula.

Quod postea latera circa æquales angulos sint proportionalia, ita demonstrabitur. Trian-

Triangula CGF, AKI [*per constructionem*, & *per demonstrata*.] sunt æquiangula ; ideoque (*per* 4. *hujus*.)

GC : CF : : KA : *A*I.

Insuper quia triangula CFD, *A* I *B* & ipsa (*per constructionem*.] sunt æquiangula [*per eamdem* 4.)

CF : CD : : *A*I : *A*B :

Ergo ex æqualitate (*per* 22. *quinti*.)

GC : CD : : K*A* : *A*B :

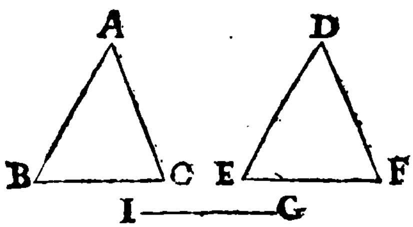
igitur circa æquales a gulos C, & *A* latera sunt proportionalia.

Simili prorsus modo demonstrabitur circa reliquos rectilineorum æquales angulos latera esse proportionalia ; ideoque rectilineum ABHIK ad datam rectam *A*B applicatum, simile, & similiter positum dato rectilineo CDEFG. q. e. f.

Propos. XIX. Theor. XIII.

Si triangula BAC, EDF fuerint similia. Dico inter se habere duplicatam rationem laterum homologorum.

Constructio, & Demonstratio.



In datis triangulis [similibus B*A*C, EDF sit

ang. *A* = ang. D

ang. B = ang. E

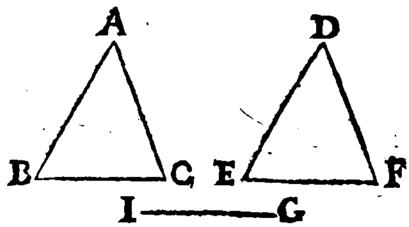
ang. C = ang. F.

Homologa vero latera sint BC, & EF. Oportet demonstrare, triang. B*A*C, ad triang. EDF rationem habere duplicatam lateris BC ad latus EF.

Quia vero hæc homologa latera BC, EF possunt esse inter se æqualia, & inæqualia : si fuerint æqualia, ut in prima figura, veritas hujus theorematis ita demonstratur.

Æqualium laterum homologorum BC, & EF [*per* 11. *hujus*.] tertia proportionalis inveniatur IG, quæ, & ipsa lateribus

BC

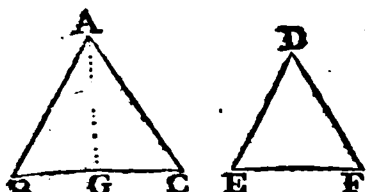


BC,EF æqualis erit; ideoque ratio BC ad IG, quæ *juxta def.* 10. *quinti.*) dicitur duplicata illius rationis, quam habet BC ad *EF*, erit ratio æqualitatis.

Cum autem (*per hyp.*) in triangulis *BAC*, EDF sit
CB: *BA*: : FE: ED, atque
BC: *CA*: . EF: FD,

Posita antecedentium *BC*, & *FF* æqualitate [*per* 14. *quinti.*) etiam consequentia *BA*, & *ED* æqualia erunt: ideoque *BA* = *ED*, & C*A* = DF: quare [*per* 8. *pri.*) triangulum *BAC* = triang. EDF: ex hoc sequitur quod ratio trianguli *BAC* ad triangulum EDF, sit ratio æqualitatis; sed ex dictis est etiam ratio æqualitatis duplicata homologorum laterum æqualium BC,EF: quare trian. B*AC* ad triang. *EDF* rationem habebit duplicatam homologorum laterum *BC*, *EF*. q. e. i. d.

Si vero homologa latera *BC*, *EF* fuerint inæqualia *BC* scilicet majus, & *EF* minus, ut in præsenti figura, eadem veritas taliter demonstrabitur.



Laterum homologórum *BC*, *EF* (*per* 11. *hujus.*) tertia proportionalis inveniatur *B*G, quæ minor erit quam *BC*, quia *BC* major ponitur quam EF. Ducatur *AG*.

Hac constructione posita, quia (*per hyp.*] in triangulis similibus *BAC*, *EDF*.

AB: *BC*: : *DE*: EF,
alternando [*per* 16. *quinti.*)
AB: DE: : *BC*: EF.
Sed (*per constructionem*)
BC: EF: : EF: *BG*,
Ergo [*per* 11. *quinti.*)
AB: DE: : EF: *BG*.

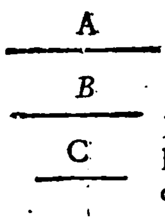
Duo

Duo igitur triangula *ABG*,DEF [*per hyp.*) angulos habent *B*,& E æquales, atque latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia: ergo [*per 15. hujus.*] triang. *ABG* = triang. DEF, unde [*per 7. quinti.*]

Triang. *ABC* : triang. *ABG* : : triang. *ABC* : triang. DEF.
Sed [*per 1. hujus.*]
Triang. *ABC* : triang. *ABG* : : *BC* : *BG*.
Ergo [*per 11. quinti.*]
Triang. *ABC* : triang. DEF : : *BC* : BG :

Cum autem (*per constructionem*) ratio BC ad BG sit duplicata illius, quam habet homologum latus BC, ad homologum latus EF; etiam triangulum *ABC*, ad triangulum DEF habebit rationem duplicatam laterum homologorum BC, E*F*. q. e. d.

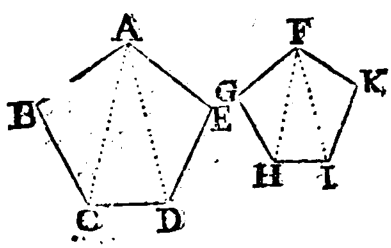
Corollarium.



Ex hoc theoremate fit manifestum; quod si tres rectæ lineæ A. *B*. C. fuerint proportionales, triangulum supra primam A ad simile triangulum supra secundam B, illam habere rationem, quam habet prima A ad tertiam C.

Propos. XX. Theor. XIV.

Si fuerint similia Polygona ABCDE, FGHIK.
1. Dico hæc Poligona partiri in triangula similia numero æqualia, & homologa totis.
2. Dico Polygonum ad Polygonum habere rationem duplicatam laterum homologorum.

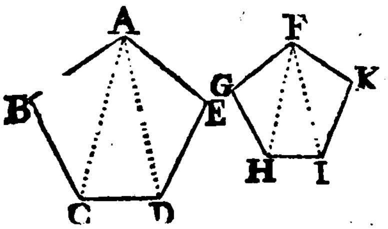


Constructio.

Ab angulis æqualibus A, & F ad oppositos angulos C, D, H, I, rectæ ducantur AC, AD, FH, FI.

De-

Demonstratio.



CUm [*per hyp.*) ſimilia ſint data polygona, tot erunt anguli in uno polygono, quot in alio. quare triangula numero æqualia erunt in dictis polygonis.

Quoniam vero ang. *B* [*per hyp.*] = ang. G, & latera circa iſtos æquales angulos proportionalia ſunt; (*per 6.hujus.*) triangula ABC, FGH erunt æquiangula; ideoque ang. BCA = GHF, pariterque ang. *BAC* = ang. GFH, quibus homologa latera ſubtenduntur: unde *per 4. hujus.*] hujuſmodi triangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia.

Eadem prorſus ratione æquiangula erunt triangula *AED*, *FKI*: quare (*per 4. hujus.*) ſimilia.

Quantum poſtea ad triangula CAD,HFI, quia [*per hyp.*] ang. BCD = ang. GHI, demptis æqualibus angulis BCA, GHF, [*per axio.3.*) ang.ACD = ang. FHI. Eodem modo demonſtrabitur ang. ADC = ang. FIH: unde (*per 32. pri.*) & ang. CAD = ang. HFI: ideoque etiam triangula ACD, FHI (*per 4. hujus*] erunt ſimilia: Idem de aliis triangulis dicendum, ſi plura fuerint.

Quod vero hæc triangula ſint homologa totis, videlicet, quod ita ſint ſingula triangula in uno polygono ad ſingula triangula ſimilia in altero polygono, ut polygonum ad polygonum, ita demonſtratur.

Triangulum ABC ad triangulum FGH (*per 19.hujus.*) habet duplicatam rationem homologorum laterum AC, FH; & triangulum CAD ad triang. HFI rationem habet duplicatam eorumdem laterum homologorum AC, FH.

Quare (*per 11. quinti.*)

Triang. ABC: triang. *F*GH: triang. ACD: triang. *F*HI.

Cum autem [*per eamdem 9.*] triang. ACD ad triang. *FHI* ſit in duplicata ratione laterum homologorum AD, *F*I, in qua ratione eſt etiam triang. ADE ad triang. *F*IK; ex hoc ſequitur.

Triang. ACD: triang. *F*HI : : triang. ADE: triang. FIK.

Igi-

Igitur triangula unius polygoni, alterius polygoni triangulis proportionalia sunt, & hujus proportionalitatis antecedentia sunt in uno polygono, & consequentia in altero polygono.

Sed (*per 12. quinti.*)

ut unum antecedens ad unum consequens, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia: ergo

$$\text{triang. } ABC : \text{trang. } FGH :: \text{omnia triang. } \left.\begin{array}{l} ABC \\ ACD \\ ADE \end{array}\right\} :$$

$$\text{ad triang. } \left.\begin{array}{l} FGH \\ FHI \\ FIK \end{array}\right\} ;$$

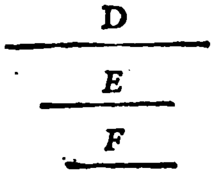
$$\text{sed triang. } \left.\begin{array}{l} ABC \\ ACD \\ ADE \end{array}\right\} = (\textit{per axio. 9.}) \text{ poligono ABCDE, \&}$$

$$\text{triang. } \left.\begin{array}{l} FGH \\ FHI \\ FIK \end{array}\right\} = \text{polygono } FGHIK\text{: ergo}$$

ut triang. *ABC* ad triang. *FGH*,
ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK.

Cum autem ratio triang. *ABC* ad triang. *FGH* [*per 19 bujus.*] sit ratio duplicata homologorum laterum *AB*, FG; etiam ratio polygoni *ABCDE*, ad polygonum *FGHIK* erit duplicata laterum homologorum *AB*, *FG*, q. e. d.

Corollarium.



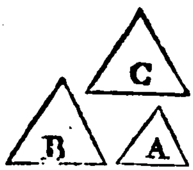
EX hac propositione colligitur, quod si tres rectæ lineæ *D. E. F.* fuerint proportionales, polygonum supra primam D descriptum ad simile polygonum factum supra secundam E, illam habere rationem, quam habet prima linea D ad tertiam *F*: & hoc quia ratio D ad *F* est duplicata rationis D ad E, uti supra in def. 10. libri quinti dictum fuit.

Propos. XXI. Theor. XV.

Si rectilinea A, & B similia fuerint rectilineo C.

Dico inter se esse similia.

Demonstratio.



Cum [*per hyp.*) rectilineum A simile sit rectilineo C, non solum anguli rectilinei A, æquales erunt angulis rectilinei C, verum etiam latera circa æquales angulos erunt proportionalia; idem pariter dicendum de rectilineo *B* : quare (*per axio primum*] singuli anguli rectilinei *A* æquales singulis angulis rectilinei B: atque [*per* 11. *quinti.*) latera rectilinei *A* proportionalia lateribus rectilinei B: ergo [*per def.* 1. *hujus.*) rectilineum *A* simile rectilineo B. q. e. d.

Propos. XXII. Theor. XVI.

Si quatuor rectæ lineæ AB, CD, EF, GH fuerint proportionales.

Dico ab hujusmodi lineis rectilinea similia, similiterque descripta, esse proportionalia: & vicissim.

Si a quatuor rectis lineis rectilinea similia descripta, fuerint proportionalia.

Dico quatuor lineas esse proportionales.

Constructio.

Super primam A B, & secundam C D (*per* 18. *hujus.*) similia describanbantur rectilinea I, & K. Pari modo super tertiam EF, & quartam GH signentur alia similia rectilinea L, & O; de istis rectilineis primo est demonstrandum rectil. I : rectil. K :: rectil. L : rectil. O.

Demonstratio primæ partis.

QVia (*per hyp.*) rectilineum I simile est rectilineo K: (*per* 20. *hujus.*) I ad K habebit rationem duplicatam homologorum laterum AB, CD: similiter rectilineum L ad rectilineum O est in duplicata ratione homologorum laterum EF, GH; sed (*per* 35. *quinti.*) duplicata AB ad CD eadem est, ac duplicata EF ad GH:

Quare [*per* 11. *quinti.*] ut

Rectil. I ad rectil. K, ita rectil. L ad rectil. O. q. e. d.

Demonstratio secundæ partis.

RAtio I ad K (*per corol.* 20. *hujus.*] est duplicata AB ad CD; & ratio L ad O duplicata EF ad GH; sed [*per hyp.*] ratio I ad K eadem, ac ratio L ad O:

Ergo (*per* 11. *quinti.*)

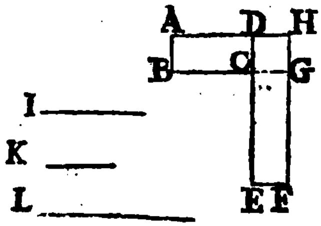
Duplicata ratio AB ad CD eadem ac duplicata ratio EF ad GH: cum autem [*per* 35. *quinti.*] duplicatæ rationes inter se æquales, etiam subduplicatas æquales habeant: sequitur dimidiatam AB ad CD æqualem esse dimidiatæ EF, GH: igitur AB ad CD, uti EF ad GH. q. e. d.

Propos. XXIII. *Theor.* XVII.

Si parallelogramma AC, EG fuerint æquiangula.

Dico inter se habere illam rationem, quæ ex lateribus componitur.

Constructio.



Data parallelogramma AC, EG uniantur secuudum angulos æquales BCD, ECG taliter, ut BC, & CG sint in directum constituta, efformentque rectam BCG: quo stante [*per corollar. 3. prop. 15. primi.*) etiam latera DC CE erunt in rectum posita: unde DCE erit recta linea.

Producantur latera AD, FG donec concurrant in H; debent enim concurrere, quia FG secat parallelam BG; unde (*per axio. 23.*) secabit aliam parallelam AH.

Ulterius (*per 12. bujus.*) fiat

ut BC: CG:: I: K; &

ut DC: CE:: K: L.

Demonstratio.

(*per 1. bujus*] ut BC ad CG, ita parallelog. BD ad parallelog. CH,

Sed (*per constructionem.*]

ut BC ad CG, ita I ad K:

Ergo [*per 11. quinti.*]

ut parallelog. BD ad parallelog. CH, ita I ad K;

Pariter (*per eamdem 1. bujus.*)

ut DC ad CE, ita parallelog. CH ad parallelog. CF,

Sed (*per constructionem.*)

ut DC ad CE, ita K ad L:

Ergo (*per 11. quinti.*]

ut parallelog. CH ad parallelog. CF, ita K ad L,

unde ex æquo (*per 22. quinti.*)

ut parallelog. BD ad parallelog. CF, ita I ad L,

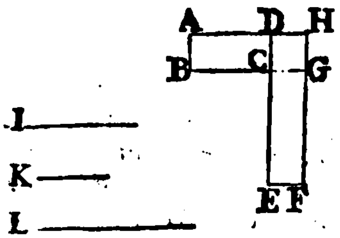
Sed [*ut infra demonstrabitur.*]

ratio I ad L est composita ex rationibus I ad K, & K ad L;

Ergo

ratio parallelog. BD ad parallelog. CF erit composita ex rationibus I ad K, & K ad L,

Sed



Sed [*per constructionem*.) ratio composita ex rationibus I ad K, & K ad L eadem est, ac composita ex rationibus BC ad CG, & DC ad CE.

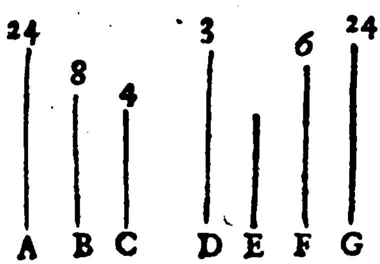
ergo [*per 11. quinti*.] ratio parallelog. BD ad parallelog. CF erit composita ex rationibus laterũ BC ad CG, & DC ad CE. q.e.d.

Nota. Componentium rationum antecedentia debent esse in uno parallelogrammo, & consequentia in alio.

SCHOLIUM.

Dum Euclides in hac Propos. XXIII. *dicit æquiangula parallelogramma inter se habere compositam ex duabus rationibus, quas habent latera circa unum angulum in uno parallelogrammo, ad duo latera circa alium angulum æqualem in alio parallelogrammo, hoc solum vult intelligere, quod si duæ laterum rationes disponantur in tribus quantitatibus; quemadmodum prima quantitas ad tertiam, ita parallelog. ad parallelog. Insuper cum dicat idem Author, primam magnitudinem ad tertiam, rationem habere compositam ex rationibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam: circa hujusmodi assertum necessarium putavi in hoc loco addere sequentem demonstrationem ex Eutochio antiquissimo Euclidis interprete desumptam.*

Theorema demonstrandum.



Si fuerint tres quæcumque magnitudines A.B.C.

Dico rationem A ad C esse compositam ex rationibus A ad B, & ad C iuxtà Def.V.hujus Libri.

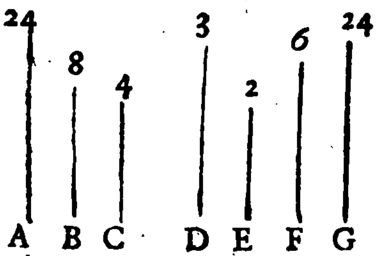
Ad hoc Theorema demonstrandum cum eodem Eutochio assumo sequens axioma.

AXIOMA.

DENOMINATOR, sivè QUANTITAS illius rationis, quam habet antecedens A ad consequens B, ducta in consequens B producit antecedens A.

Veritas hujus axiomatis satis constat per solam terminorum explicationem, quia omnis rationis quantitas, siuè denominator ostendit habitudinem illam, quam habet antecedens A ad consequens B: quare si consequens B multiplicetur per illum DENOMINATOREM, *productum erit idem antecedens A.*

Constructio.



Denominator rationis A ad B sit D, & Denominator rationis B ad C, sit E.

Productum ex his denominatoribus D, & E sit F.

Dico productum ex F in C esse A. Productum ex C in F sit G: si ergo G æqualis fuerit ipsi A; erit verum dicere A esse productum ex F in C.

Demonstratio,

Quia D est denominator rationis A *ad* B *[per axio. superius positum.] productum ex D in* B *erit* A.

Eadem ratione, cum E sit denominator rationis B *ad C, productum ex E in C, erit* B.

Quoniam igitur C multiplicando E facit B, & C multiplicando F facit G; (per 15. quinti.)

F : E :: G : B,

Rursus quia D multiplicando E facit F, & D multiplicando B facit A *(per 15. quinti.)*

E : B :: F : A,

Igitur permutando [per 16. quinti.)

E : F :: B : A.

Con-

Convertendo [per corol. 4. quinti.]

F : E : : A : B :

ut autem F ad E (per demonstrata.] ita G ad B,

ergo (per 11. quinti.)

A : B : : G : B,

Quare (*per 9. quinti.*)

A = G.

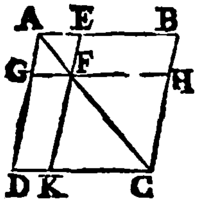
Quia vero (per constructionem.) G est productum ex F in C, etiam A erit productum ex F in C: quare F erit quantitas, siuè denominator rationis primæ magnitudinis A ad tertiam C; sed F est productum ex D denominatore rationis A ad B, & ex E denominatore rationis B ad C: ergo (per def. 5. hujus.) ratio A ad C erit composita ex rationibus A ad B, & B ad C. q. e. d.

Propos. XXIV. *Theor.* XVIII.

In parallelogrammo DB.

Dico parallelogramma GE, KH circa diametrum AC consistentia, esse similia toti parallelogrammo DB, & inter se.

Constructio.



IN parallelogrammo *DK* ducatur diameter AC: in dicta diametro notetur punctum F, per quod ducatur recta GH parallela AB, vel DC. Pariter per idem punctum F notetur EK parallela AD, vel BC.

Demonstratio.

ANgulus DAB communis est utrique parallelogrammo DB, GE; ergo æqualis in ambobus parallelogrammis.

Angulus AGF (*per 29. pri.*] æqualis ang. D; & angulus AEF (*per eamdem 29.*) æqualis ang. B.

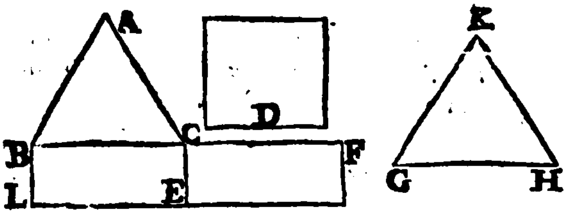
Pariter angulus GFE (*per 15. pri.*) æqualis angulo KFH; angulus KFH [*per 34. pri.*] æqualis ang. DCB: quare parallelog.

lellog.GE æquiangulum parallelogrammo DB.
Cum auté (*per construct.*)GF sit parallela *DC*, (*per corol: 4. bujus.*) erit
AG : GF : : AD : DC.
GF : FA : : DC : CA.
AF : FE : : AC : CB.
Quare ex æquo (*per 22. quinti.*)
GF : FE : : DC : CB.
Eadem ratione demonstrabitur
FE : EA : : CB : BA : atque
EA : AG : : BA : AD.
Quamobrem parallelogrammum GE (*per def. 1. bujus.*) simile erit parallelogrammo DB.
Eodem prorsus modo demonstrabitur parallelogrammum KH simile eidem parallelogrammo DB : quare (*per 21. bujus.*] etiam parallelogamma GE, & KH inter se similia. q. e. d.

Propos. XXV. Probl. VII.

Duobus datis rectilineis BAC, & D: constituere aliud rectilineum GKH simile rectilineo BAC, & æquale rectilineo D.

Constructio.



AD unum latus illius rectilinei, cui simile constitui debet, hoc est ad latus BC (*per 44. vel 45: pri.*] in quovis angulo applicetur parallelogrammum BE, æquale rectilineo BAC. Super rectam CE in angulo ECF, qui æqualis sit angulo CBL (*per*

(*per* 45. *pri.*) conſtituatur paralellog. *EF* æquale rectilineo D.
Inter rectas BC, CF [*per* 13. *bujus.*] inveniatur media proportionalis GH: ad GH (*per* 18. *bujus.*] applicetur rectilineum GKH ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo BAC.
Dico, rectilineum GKH eſſe ſimile dato rectilineo BAC, & æquale rectilineo D.

Demonſtratio.

Quia (*per conſtructionem*] angulus FCE = ang. CBL; [*per* 14. *pri.*) BF erit una linea recta: idem verificatur de linea LI.
Rurſus, quia (*per conſtructionem.*) eſt rectilineum BE ad rectil. C, ita rectil. BAC ad rectil. D.

Ac (*per* 1. *bujus.*]
Rectil. BE : rectil. CI : : BC : CF,
Eſt enim (*per* 11. *quinti.*)
Rectil. BAC : rectil. D : : BC : CF,
Sed [*per corol. prop.* 19. & 20. *bujus.*)
BC : CF : rectil. BAC : rectil. GKH,
Ergo [*per* 11. *quinti.*]
Rectil. BAC : rectil. D : : rectil. BAC : rectil. GKH.
Quare (*per* 9. *quinti.*)
Rectil. GKH = rectil. D. q. e. f.

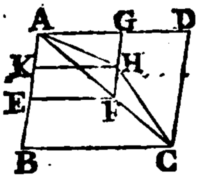
Propoſ. XXVI. Theor. XIX.

Si à parallelogrammo BD ablatum fuerit parallelogrammum EG ſimile, ſimiliterque poſitum toti parallelogrammo BD, communemque cum eo habens angulum A.

Dico parallelogrammum EG circa eamdem diametrum AC conſiſtere.

Con-

Constructio.



DUcantur rectæ AF, FC; hoc facto, si AFC est una linea recta, evidens est veritas præsentis propositionis.

Si verò AF, FC non componunt rectam lineam, ab A ad C recta ducatur AHC, quæ seccabit FG, vel FE: secet FG in H; per H notetur HK parallela AG.

Demonstratio.

QVia (*per constructionem.*) AHC est recta linea, & diameter parallelogrammi BD: [*per* 24. *hujus.*] parallelogrammum BD erit simile parallelogrammo KG: sed (*per hyp.*] parallelogrammum EG est simile parallelogrammo BD: ergo (*per* 21. *hujus.*) parallelog. KG simile parallelog. EG, & similiter positum:

Quare (*per def.* 1. *hujus.*]
GA : AE :: GA : AK,
Ideoque (*per* 9. *quinti.*)
AE = AK;

Quod cum repugnet veritati axio. 9. AHC non erit linea recta. Cum autem hoc de quacumq, alia linea ab A ad C ducta idem demonstrari possit, non autem de recta AFC; hæc sola erit dicenda recta linea ab A ad C ducta: ideoque parallelogrammum EG erit circa eamdem diametrum cum toto parallelogrammo BD. q. e. d.

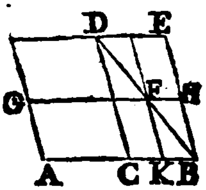
Propos. XXVII. Theor. XX.

Si recta AB divisa sit bifariam in C, & non bifariam in K, & parti AC applicetur parallelogramma AD, cujus defectus erit CE, & parti AK applicetur parallelogrammum AF,

cujus

cujus defectus erit KH, & hi duo defectus CE, KH sint duo parallelogramma similia.

Dico AD esse majus quam AF.



Constructio.

IN parallelogrammo CE, quod est defectus parallelogrammi AD, ducatur diameter DB. In hac diametro erit punctum F [*per 26. hujus.*] cum KH, & CE sint similia.

Demonstratio.

QVia [*per 43. primi.*) complementum CF = complemento FE.

Communi addito KH erit

CF + KH = FE + KH,

Sed [*per 36. pri.*]

CF + KH = CG,

Quare [*per axio. 1.*)

CG = FE + KH,

Communi addito CF erit

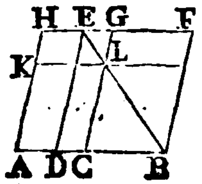
CG + CF, hoc est AF = FE + KH + CF.

Cum autem [*per axio. 9.*] parallelogrammum CE majus sit FE + KH + CF, sitq; parallelogrammum CE (*per 36. pri.*) æquale parallelogrammo AD; erit etiam

Parallelogrammum AD majus parallelogrammo AF. q. e. d.

Idem valebit, si divisa AB bifariam in C, & non bifariam in D parti AC applicetur AL, cujus defectus erit LB, & parti AD applicetur AE, cujus defectus eit EB, & hi defectus LB, EB sint similes, nam ducta diametro BE, hæc transibit per L [*per 26. hujus.*] Et erit AL majus quam AE, ut demonstro.

Demonstratio.



QVia (*per hyp.*] AC = CB: ipsi vero AC (*per 34. pri.*] æqualis est HG, & ipsi CB æqualis GF [*per axio.* 1.] erit HG = GF. Quare [*per 36. primi.*) parallelog. GK = parallelog. FL.

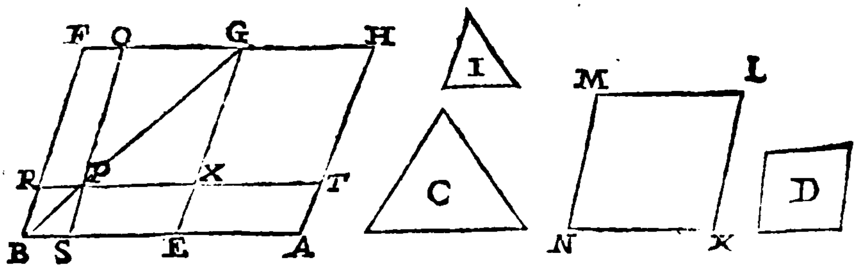
Sed (*per 43. primi.*)
Parallelog. FL = parallelog. LD,
ergo (*per axio.* 1.)
KG = LD,
Sed (*per axio.* 9.)
KG majus quam KE:
Ergo, & LD majus quam KE,
Addito communi KD:

erit LD + KD, hoc est parallelog. AL ad dimidiam AC applicatum, majus quam KE + KD, hoc est AE, applicatum ad AB cum defectu DF simili defectui BL. q. e. d.

Propos. XXVIII. Probl. VIII.

Ad datam rectam AB applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo C, quod deficiat parallelogrammo simili alteri dato parallelogrammo D. Oportet autem rectilineum C, cui æquale est applicandum parallelogrammum, non esse majus illo quod ad dimidiam BE applicari potest, & est simile dato parallelogrammo D.

Con-



Constructio.

Data recta AB (*per* 10.*pri.*) bifariam dividatur in E, super dimidiam BE [*per* 18. *bujus.*) constituatur parallelogramum BG simile,& similiter positum parallelog.dato D.Compleatur parallelog. BH: ducatur EG parallela AH.

Hoc facto parallelog. EH, vel est æquale dato rectilineo C, vel majus (minus enim esse nequit) (*per suppositionem.*)

Si igitur parallelog. EH adæquat C, cum defectus sit parallelog. EF [*per constructionem.*] simile ipsi D, factum erit. q. e. f.

Si postea parallelog. EH majus est dato rectilineo C (*per* 45. *pri.*) inveniatur excessus parallelog. EH supra rectilineum C quod sit I.

(*Per prop.* 25. *bujus.*] constituatur parallelog. KM simile parallelog. D, vel EF, & æquale rectilineo I, quod minus erit parallelog. EF, cum I sit excessus parallelogrammi EF supra recti lineum C.

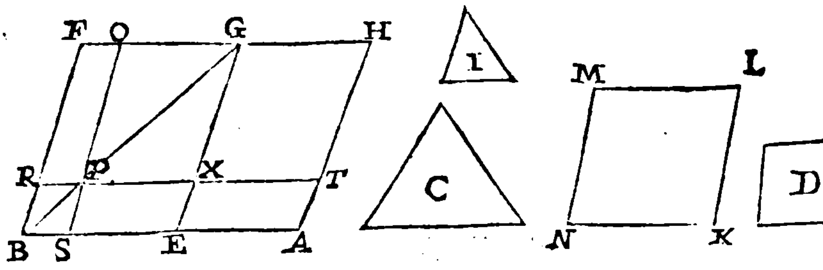
Cum autem (*per constructionem.*] parallelogramma EF, & KM sint ambo similia rectilineo D; (*per* 21. *bujus.*) inter se similia erunt: quare [*per def.* 1. *bujus.*] habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, videlicet

KL : LM : : EG : GF,

Quia verò (*ex demonstratis.*) parallelog. EF majus est parallelogrammo KM, etiam recta EG major quam KL, & recta GF major quam LM.

Tan-

Tandem fiat GX = KL, atque GO = LM. Per O notetu parallela *FB*. Per X ducatur recta RT parallela *BA*.



Dico parallelogrammum AP ad AB applicatum, æquale e rectilineo *C*, ejusque defectum RS esse simile dato parall grammo D.

Ducatur GB, quæ (*per 26. hujus.*) transibit per P. nam fit

OG : GX : : FG : GE,

erunt parallelogramma OX, FE similia.

Demonstratio.

CUm (*per constructionem*) KM fit excessus parallelogran EF supra rectilineum C: erunt *KM*, & C = EF.

Sed XO factum fuit æquale *K*M: ergo XO est excessus pa lelogrammi EF supra C.

Quare parallelogramma OR, RE æqualia rectilineo sed (*per 36. pri.*) ipsi RE = ET: ergo OR + ET = rec neo C:

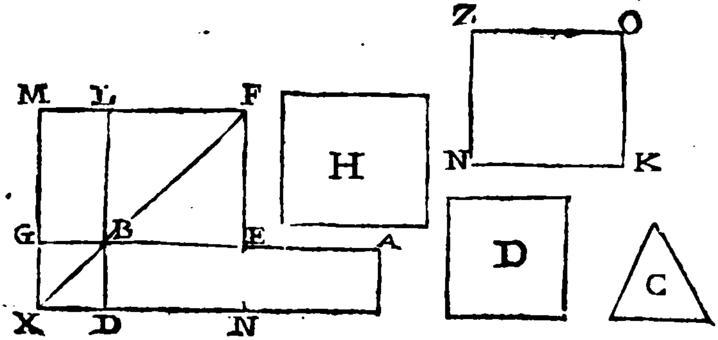
Quia vero (*per 43. primi.*) O*R* = EP; erit ET + EP, v licet parallel. AP = dato rectilineo C.

Demum quia defectus RS (*per 24. bujus.*) similis est EF,& (*pe*

(*per constructionem.*) simile ipsi D: [*per* 21. *bujus.*] RS simile ipsi D : quare parallelogrammum AP ad AB rectam applicatum, erit æquale dato rectilineo C, ejusque defectus RS erit parallelogrammum simile dato parallelogrammo D. q. e. f.

Propos. XXIX. Probl. IX.

Ad datam rectam AB applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo C, excedens parallelogrammo simili alteri dato parallelogrammo D.



Constructio.

Data recta AB (*per* 10. *pri.*) bifariam dividatur in E. Supra dimidiam BE [*per* 18. *bujus.*] constituatur parallelogrammum EL simile, & similiter positum dato paralellogrammo D.

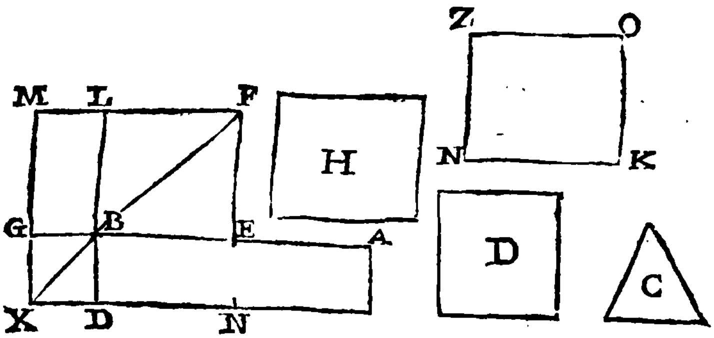
Pariter (*per* 14. *secundi*) rectilineo C, & parallelogrammo EL æquale constituatur quadratum H, cui quadrato H *per* 25. *buius.*) æquale fiat parallelog KZ, simile, atque similiter positum parallelog. EL.

Hoc facto erit ZK majus quam EL. Cum autem KZ, & EL facta sint similia, similiterque posita; erunt latera KO, OZ majora lateribus EF, FL: productis minoribus lateribus EF; FL, fiat FN = OK, & FM = OZ. Com-

Compleatur parallelogrammum MN, quod erit simile, similiterque positum parallelogrammo EL: quare [*per 26. hujus.*] parallelogramma MN, EL erunt circa eamdem diametrum FX, atque MN = KZ ob similitudinem, quam habent MN. & ZK, & laterum æqualitatem.

Producatur LB in D, compleaturque parallelogrammum DA.

Dico parallelog. AD applicatum ad rectam AB æquale esse dato rectilineo C, & excessum DG simile esse dato parallelogrammo D.



Demonstratio.

Quia [*per 36. pri.*) parallelog. AN = parallelog. BN atque (*per 43. pri.*) parallelog. BN = parallelogrammo BM: (*per axio. 1.*) erit parallelog. AN = parallelog. BM,

Communi addito NG erit

AN + NG, hoc est AX = BM + NG.

Cum autem (*per constructionem*) MN = KZ, & KZ = EL + C,

Erit BM + NG = C: sed

AX = BM + NG: ergo, & AX = C.

Demum quia parallelog. GD simile est parallelogrammo D: sequitur ad datam AB fuisse applicatum parallelog. AX æquale dato rectilineo C, & excedere parallelogrammo GD simili dato parallelogrammo D. q. e. f.

Pro-

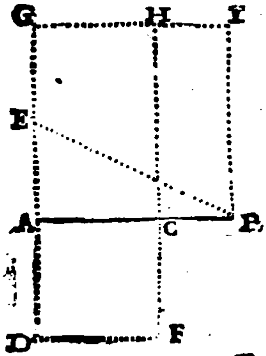
Propos. XXX. Probl. X.

Datam rectam AB terminatam taliter secare, ut sit tota ad majus segmentum, uti majus segmentum ad minus.

Constructio.

Constructio hujus problematis illa eadem est, quæ in propos. 11. lib. 2. proposita fuit pro constituendo rectangulo CI = quadrato AF. Tali igitur constructione supposita:

Dico rectam AB in C esse taliter sectam, ut sit AB ad AC, uti AC ad CB: ideoque datam rectam extrema, & media ratione sectam dicunt.



Demonstratio.

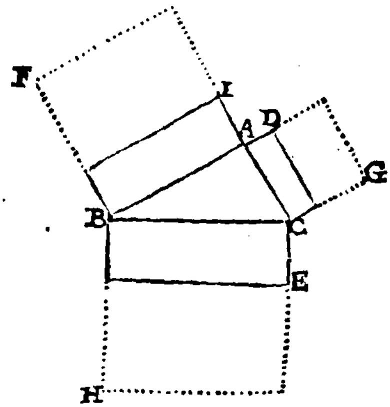
Quia (*per 11. secundi.*) rectangulum CI = quad. AF. (*per 14. hujus.*)
HC : CF : : AC : CB;
Sed [*per def. quadrati.*)
AC = CF, & HC = AB,
Quare mutatis HC in AB, & F in AC, erit
AB : AC : : AC : CB. q.e.f.

Propos. XXXI. Theor. XXI.

In triangulo rectangulo BAC cum angulo recto A.

Dico figuram supra BC descriptam æqualem esse figuris sibi similibus a lateribus BA, AC descriptis.

Constructio.



AD dati trianguli latera AB, BC, CA [*per 18. hujus.*) applicentur similes figure BI, CD, BE.

Dico figuram BE descriptam a latere subtendente angulum rectum A, æqualem esse figuris similibus BI, CD lateribus BA, AC angulum rectum comprehendentibus, applicatis.

Constructio.

Super latera trianguli rectanguli [*per 46. primi.*) tria describantur quadrata CH, AF, AG.

Demonstratio.

QVia tam descriptæ figuræ, quam quadrata [*per constructionem.*) sunt inter se similia.

[*per 20. hujus.*]

quad. AF est ad quad. CH in duplicata ratione AB ad BC; pariterq;

fig. BI est ad fig. BE in duplicata ratione AB ad BC:

Quare (*per 11. quinti.*)

Ut quad. AF ad quad. CH, ita fig. BI ad fig. BE;

Ob eamdem rationem erit etiam

Ut quad. AG ad quad. CH, ita fig. CD ad fig. BE.

His demonstratis: erit

Ut prima magnitudo quad. AF ad secundam quad. CH,

Ita tertia fig. BI ad quartam figuram BE.

Pariter ut quinta quad. AG, ad secundam quad. CH,

Ita sexta fig. CD ad quartam fig. BE:

Ergo (*per 24. quinti.*)

Ut prima quad. AF cum quinta quad. AG ad secundam quad. CH,

Ita tertia fig. BI cum sexta fig. CD ad quartam fig. BE:

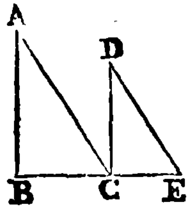
Sed [*per 47. pri.*] Qua-

Quad. AF, & AG ad quad. CH rationem habent æqualitatis;
Quare etiam
Ratio figurarum BI, & CD ad fig. BE erit ratio æqualitatis,
Ideoque figuræ BI, CD a lateribus BA, AC descriptæ = fig. BE.
q. e. d.

Propos. XXXII. *Theor.* XXII.

Si duo triangula BAC, CDE habeant latera BA, AC proportionalia lateribus CD, DE, atque secundum unum angulum ACD taliter composita fuerint, ut homologa latera AB, DC, atque AC, DE sint parallela.

Dico reliqua horum triangulorum latera BC, CE esse in directum posita.



Demonstratio.

Quia (*per hyp.*) latus AB parallelum DC [*per 29. pri.*) ang. BAC = ang. ACD. Pariter quia supponitur latus AC parallelum lateri DE [*per eamdem 29.*) ang. ACD = ang. CDE: quare [*per axio. 1.*) ang. A = ang. D.

Cum autem triangula BAC, CDE [*per demonstrata*] æquales habeant angulos A, & D, atque (*per hyp.*) circa istos æquales angulos latera proportionalia: [*per 6. hujus.*) dicta triangula erunt æquiangula; ideoque ang. ABC = ang. DCE.

additis æqualibus angulis BAC, ACD: erunt

$$\text{anguli} \left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \text{angulis} \left.\begin{matrix} ACD \\ DCE \end{matrix}\right\} \text{hoc est angulo } ACE.$$

Denuo addito communi angulo ACB: erunt

$$\text{anguli} \left.\begin{matrix} A \\ B \\ ACB \end{matrix}\right\} = \text{angulis} \left.\begin{matrix} ACE \\ ACB \end{matrix}\right\}:$$

 Sed

Sed [*per 32. pri.*)

anguli $\left.\begin{matrix}A\\B\\ACB\end{matrix}\right\}$ = duobus rectis: quare etiam

anguli $\left.\begin{matrix}ACE\\ACB\end{matrix}\right\}$ = duobus rectis:

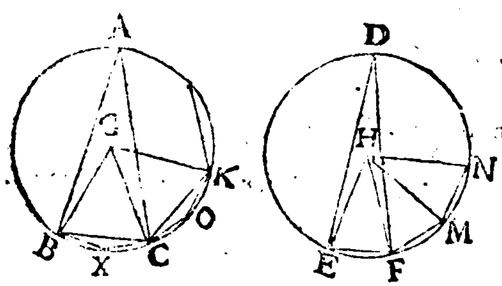
Igitur (*per 14. primi.*]
latus BC erit in rectum cum latere CE. q. e. d.

Propos. XXXIII. *Theor.* XXIII.

In æqualibus circulis, ABC, DEF, si ad centra constituti sint anguli BGC, EHF, vel ad peripherias BAC, EDF.

Dico angulum BGC esse ad angulum EHF, ut peripheria BC ad peripheriam EF: Sectoremque BGC ad sectorem EHF, ut peripheria BC, ad peripheriam EF.

Constructio prioris partis.



Ducantur rectæ BC, EF, atque (*per 1. quarti.*) in circulo ABC accomodetur CK = BC: pariter in circulo EDF adaptentur rectæ FM, MN = EF, notenturque rectæ KG, MH, NH.

Demonstratio primæ partis.

Quoniam (*per constructionem.*) BC = CK (*per 28. tertij.*) arcus BC = arcui CK: unde (*per 27. tertij.*) ang. BGC =

ang.

ang. CGK. Eadem ratione in circulo EDF æquales erunt arcus EF, FM, MN, & anguli EHF, FHM, MHN: ergo

Quam multiplex est arcus BCK arcus BC,

tam multiplex etiam erit ang. BGK anguli BGC.

Pariter quam multiplex est arcus EFMN arcus EF,

tam multiplex etiam ang. EHN anguli EHF.

Ulterius si arcus BCK æqualis sit arcui EFMN;

[*per 27. tertij*] & ang. BGK = ang. EHN.

Si arcus BCK minor fuerit arcu EFMN,

& ang. BGK minor ang. EHN.

Si denique arcus BCK major fuerit arcu EFMN,

& angulus BGK major erit angulo EHN.

Si ergo hæc pariter multiplicia tam arcuum BC, EF, quam angulorum BGC, EHF servant ordinem æqualitatis superioritatis, & inferioritatis præscritum in def. 6. libri quinti, fatendum erit,

Arcum BC esse ad arcum EF, uti ang. BGC ad ang. EHF. q. e. 1. d.

Hoc idem demonstrabitur de angulis A, & D ad circumferentiam constitutis; quia (*per 28. tertij.*) dicti anguli A, & D sunt medietates angulorum ad centra BGC, EHF; quare ut ang. A ad ang. D, ita arcus *BC* ad arcum EF. q. e. 2. d.

Constructio alterius partis.

In segmentis *BC*, *CK* constituantur anguli *BXC*, COK.

Demonstratio.

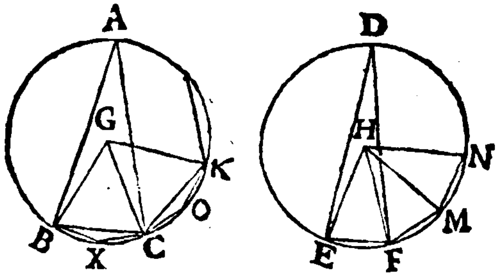
CUm anguli *BXC*, COK insistant æqualibus arcubus *BAC*, *CBAK* (*per 27. tertij.*) erunt æquales; quare (*per def. 10. tertij.*) segmentum *BXC* simile segmento COK, ideoque (*per 24. tertij.*) dicta segmenta inter se æqualia.

Quia vero (*per 4. primi.*) etiam æqualia sunt triangula *BGC*, CGK, si æqualibus segmentis addantur æqualia triangula, resultabunt sectores *BGC*, *CGK* inter se æquales: Quamobrem quam multiplex est sector BG*K* sectoris *BGC*, tam multiplex etiam arcus *BC*K, arcus *BC*.

Ulterius si arcus *B*CK sit æqualis arcui EFMN,

etiam

etiam sector EGK erit æqualis sectori EHN.
Si arcus major arcu, etiam sector major sectore, &
Si arcus minor arcu, etiam sector minor sectore.
Hoc stante sequitur
Quando sector BGK major est sectore EHN,
etiam arcus BCK major arcu EFMN.
Quando sector = sectori, etiam arcus = arcui; &
Quando sector minor sectore, etiam arcus minor arcu.



His positis si sector BGC statuatur prima magnitudo; sector EHF secunda; arcus BC tertia; & arcus EF quarta.

Quia (*per constructionem.*) primæ, & tertiæ sumpta sunt pariter multiplicia, videlicet sector BGK, & arcus BCK: pariter secundæ, & quartæ accepta sunt æqualiter multiplicia, nempe sector EHN, & arcus EFMN: de istis autem æqualiter multiplicibus demonstratum fuit, quod

Quando multiplex primæ magnitudinis superat multiplicem secundæ, etiam multiplex tertiæ superat multiplicem quartæ.

Quando æquale, æquale; & quando minus, minus: sequitur

[*per def. 6. quinti.*]

Sectorem BGC esse ad sectorem EHF, ut arcum BC ad arcum EF. q. e. d.

Corollarium I.

Ex hoc Theoremate fit manifestum, ut sector ad sectorem, ita esse angulum unius sectoris ad angulum alterius sectoris; quia

quia [*per superius demonstrata.*) tam anguli, quam sectores inter se sunt ut arcus ad arcum: quare

(*per* 11. *quinti.*)

Sector ad sectorem ut angulus sectoris ad angulum sectoris.

Corollarium II.

RUrsus perspicuum, est ita esse angulum in centro *BGC* ad quatuor rectos, uti est arcus *BC* illi angulo subtensus, ad totam circumferentiam: quia

Ut ang. in centro *BGC* ad ang. rectum in centro,
Ita circumferentia *BC* ad circumferentiam subtensam angulo recto: quare
Ut angulus in centro, ad quatuor rectos (*per* 15. *quinti.*)
Ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, hoc est ad totam circumferentiam:
Convertendo igitur,
Ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. q. e. d.

Elementi sexti finis.


DOCET

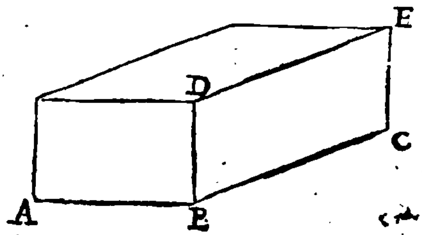
EUCLIDIS ELEMENTUM UNDECIMUM, ET SOLIDORUM ELEMENTUM PRIMUM.

DEFINITIONES.

Def. I.

SOLIDUM, siue CORPUS dicitur illud, quod longitudinem, latitudinem, atque crassitiem habet.

IN explicatione defin. 1. primi Elementi dictum fuit in magnitudinibus, triplicem dari partium componentium ordinationem, nempè in longum, in latum, & in crassum. In def. 2. ejusdem primi Elementi illa magnitudo, quæ solam habet longitudinem, dicta fuit LINEA. In defin. 5. illa magnitudo, quæ longitudinem, & latitudinem obtinet, appellata fuit SUPERFICIES. In hac verò defin. illæ magnitudines, quarum componentes partes in longum, latum, atque crassum ordinantur, a Mathematicis SOLIDA, siue CORPORA appellantur, illaque doctrina, quæ solida, siue corpora contemplatur, peculiari vocabulo STEREOMETRIA dicitur: hoc cernere licet in apposito solido AE, in quo BC est longitudo, BA latitudo, BD vero crassities.



T Def.

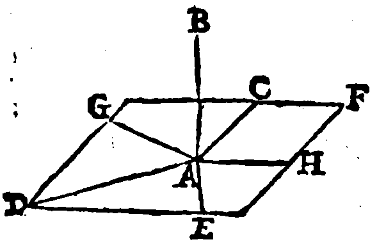
Def. II.

TERMINI solidorum dicuntur superficies.

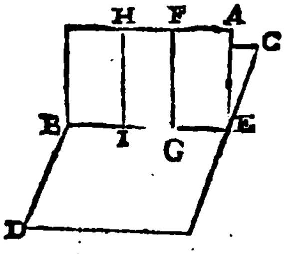
QVemadmodum Euclides in defin. 3. Lib. primi Elementorum lineæ terminos puncta nominavit, atque in defin. 6. ejusdem Elementi superficiei terminos lineas vocavit, ita in hoc loco solidorum, siuè corporum terminos superficies dicit.

Def. III.

RECTA LINEA BA dicitur ad PLANUM FD recta, quando angulos efficit rectos cum omnibus lineis CA, HA, EA &c. in proposito plano ductis, illamque tangentibus in A.



DUm recta linea AB taliter insistit plano FD, ut solum punctum A sit in plano FD, reliqua vero extra, angulosque facit rectos cum omnibus lineis CA, HA, EA &c. in plano FD ductis, & concurrentibus in A; tunc recta linea AB dicitur RECTA subiecto plano FD.

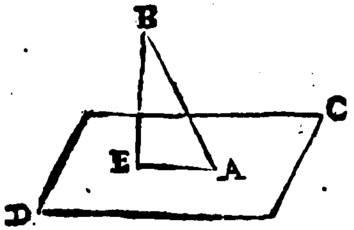


Defi. IV.

Planum AB ad planum DC dicitur RECTUM, cum rectæ lineæ FG, HI &c. in plano AB ductæ, communique planorum sectioni BE perpendiculares, alteri plano CD rectæ sunt.

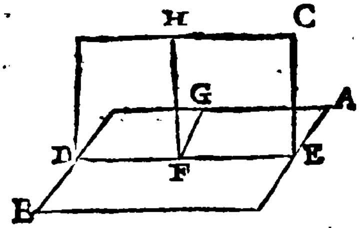
Def.

Def. V.

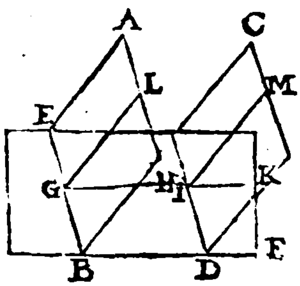


INCLINATIO lineæ rectæ BA ad planum CD dicitur angulus acutus BAE efformatus a linea BA insistente subiecto plano CD, & a recta AE in eodem plano CD ducta a puncto A ad punctum E, in quod cadit BE recta plano CD.

Def. VI.



INCLINATIO plani CD ad planum AB vocatur angulus acutus HFG comprehensus a recta linea HF in plano CD con: constituta, & perpendiculari communi planorum sectioni DE, & a recta linea FG ducta in plano AB, & perpendiculari eidem communi planorum sectioni DE.



Def. VII.

SIMILITER inclinata dicuntur plana AB, CD ad planum EF, quando anguli inclinationis planorum LGH, MIK sunt æquales.

Def. VIII.

PARALLELA Plana vocantur AB, CD, quando in quamcumque partem producta, numquam concurrunt.

Def. IX.

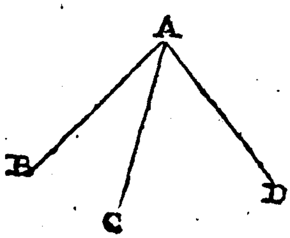
SIMILIA Solida dicuntur illa, quæ a planis similibus, & numero æqualibus continentur.

Def. X.

ÆQUALIA, & SIMILIA appellantur illa solida, quæ a similibus planis numero, ac magnitudine æqualibus comprehenduntur.

Def. XI.

SOLIDUS angulus A ille dicitur, qui a pluribus quam duobus planis angulis BAD, BAC, CAD ad idem punctum A constitutis, neque in eodem plano existentibus, continetur.



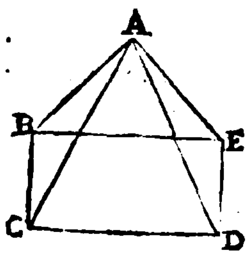
SI concipiamus tres planos angulos BAD, BAC, CAD, ad idem punctum A esse constitutos, neque in eodem existere plano, quia linea AC est intelligéda extra planum anguli BAD; angulus A a tribus angulis planis BAD, BAC, CAD comprehensus, vocatur angulus solidus.

No-

Notandum. Duo tantum plani anguli nequeunt solidum angulum componere, cum ad minus tres requirantur.

Def. XII.

PYRAMIS dicitur figura solida BCDEA contenta à planis BAC, CAD, DAE, EAB a plano BD ad punctum A ductis.

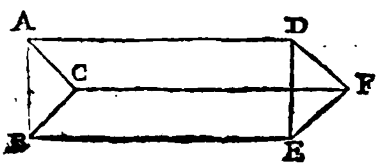


Notandum. Punctum A, ad quod concurrunt plana BAC, CAD &c. Pyramidis VERTEX nuncupatur: Planum BD dicitur BASIS pyramidis. Distantia puncti A a plano BD vocatur ALTITUDO pyramidis.

Si pyramidis basis sit triangulum, etiam pyramis triangularis dicitur: si basis sit quadrangulum, vocatur quadrangularis; si pentagonum pentagonalis &c.

Def. XIII.

PRISMA vocatur figura solida ABEDCF a planis contenta, quorum duo opposita ACB, DFE sunt æqualia, similia, & parallela; reliqua vero plana AE, AF, BF sunt parallelogramma.



Notandum. Quando prismatum opposita plana sunt triangula, tunc prisma dicitur triangulare; quando sunt quadrangula, prisma vocatur quadrangulare &c.

Def. XIV.

SPHÆRA dicitur, quando ſemicirculi manente diametro circum ductus ſemicirculus in ſe ipſum revolvitur, unde moveri ceperat, circumaſſumpta figura.

HÆc eſt Sphæræ Defin. ab Euclide tradita in hoc loco. Theodoſius Lib. I. Sphæricorum Defin. I. aliter ſphæram definivit, dicendo

Spæra dicitur figura ſolida unica ſuperficie comprehenſa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, omnes cadentes rectæ lineæ, ſunt inter ſe æquales.

Def. XV.

CENTRUM Sphæræ dicitur illud punctum, a quo omnes rectæ lineæ ad ſphæræ ſuperficiem ductæ, ſunt æquales.

Def. XVI.

AXIS ſphæræ appellatur quæcumque recta linea per ſphæræ centrum ducta, & utrimque a ſuperficiæ ſphæræ terminata, ſupra quam immobilem revolvitur ſphæra.

Def. XVII.

DIAMETER ſphæræ vocatur quælibet recta linea per ſphæræ centrum ducta, & utrimque a ſphæræ ſuperficie terminata.

Def.

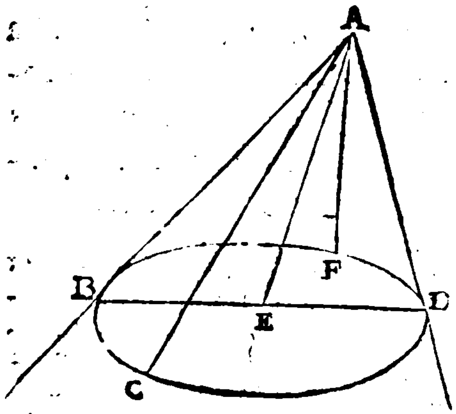
Def. XVIII.

POLI sphæræ appellantur duo puncta axem terminantia.

Def. XIX.

CONICA superficies dicitur illa, quæ describitur, dum ab aliquo puncto immobili extra circuli planum accepto ad circuli circumferentiam ducta recta linea in utramque partem producta, manente puncto convertitur circa circuli peripheriam, quousque circuli revolutionem absolvat.

Fig I.

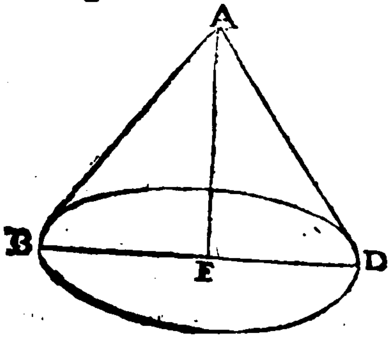


IN apposita figura si extra planum circuli BCD acceptum fuerit punctum A, a quo ad dati circuli circumferentiam ducta sit recta AB, & manente puncto A, recta AB intelligatur moveri per totam circumferentiam BCD, per talem motum genita superficies, dicitur CONICA superficies.

Def. XX.

CONUS appellatur illa figura solida, quæ circulo, & conica superficie comprehenditur, uti est solidum BAD.

Fig. II.

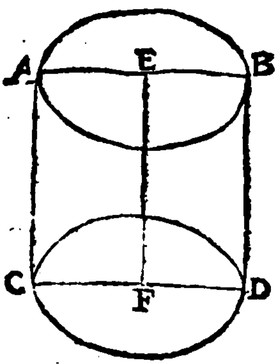


1. VERTEX coni dicitur punctum A.
2. BASIS coni vocatur circulus BCD.
3. AXIS coni appellatur recta AE a vertice ad basis centrum ducta.
4. CONUS RECTUS illæ dicitur, qui habet AXEM AE, *fig.* 2. basi BC rectum.
5. CONUS SCALENUS vocatur illæ, qui AXEM AE habet basi BCD inclinatum. *fig.* I.

Def. XXI.

CYLINDRICA superficies dicitur illa, quæ designatur, dum duorum circulorum æqualium, & parallelorum diametri parallelæ, una cum recta linea diametrorum terminos ab eadem parte coniungente, in circulorum planis circa manentia centra circumferuntur quousque integram compleant revolutionem.

Fig.I.



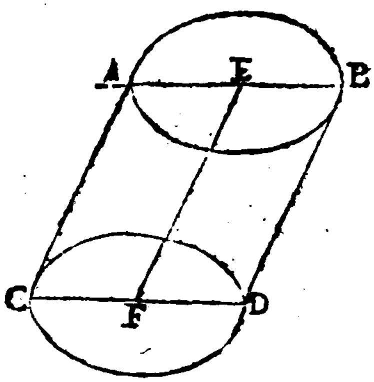
SI fuerint duo circuli AB, CD inter se æquales, & paralleli; pariterque horum circulorum diametri AEB, CFD æquedistantes, coniungatque ad easdem partes A, & C diametrorum extremitates recta AC. Dum dictæ diametri circa manentia circulorum centra E, F, una cum recta AC revolvuntur, completa revolutione superficies signata a recta linea AC, CYLINDRICA superficies appellatur.

Def.

Def. XXII.

CYLINDRUS dicitur illa figura solida, quæ a duobus æqualibus, & parallelis circulis, ac cylindrica superficie comprehenditur.

Fig. II.



1. BASES Cylindri vocantur duo circuli AB, CD æquales, & paralleli.
2. AXIS Cylindri dicitur recta EF coniungens circulorum centra E, & F.
3. LATUS Cylindri appellatur recta AC ad easdem partes coniungens circulorum diametros AB, CD.
4. RECTUS Cylindrus nuncupatur, qui axem habet ad bases rectum, ut in *Fig. I.*
5. SCALENUS Cylindrus dicitur, qui Axem habet ad bases inclinatum, ut in *Fig. II.*

Def. XXIII.

SIMILES recti Coni, & Cylindri vocantur illi, qui axes, & basium diametros habent proportionales.

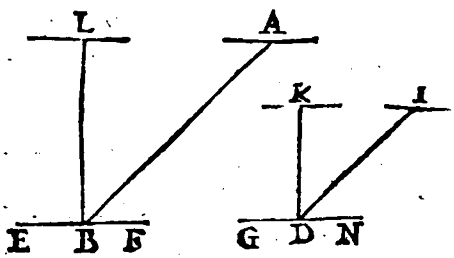
Def. XXIV.

SIMILES Scaleni Coni, & Cylindri appellantur illi, qui AXES habent basibus similiter inclinatos, atque basium diametris proportionales.

SCHO.

SCHOLIUM.

Quia Euclides tantummodo conos, atque Cylindros rectos definivit, non autem Scalenos, cum satis manifestum sit ad habendam similitudinem in Conis, & in Cylindris Scalenis, haud satis esse AXES, & basium diametros esse proportionales; Ut ea, quæ ab eodem Euclide de solis Conis, & Cylindris rectis similibus fuerunt demonstrata, etiam Scalenis similibus accomodari possint, necessarium fuit definire etiam Conos, atque Cylindros Scalenos similes: quemadmodum in superiore definitione factum fuit. Hac enim posita definitione, quæ de Conis, ac Cylindris rectis similibus demonstrantur, etiam de scalenis pariter similibus verificantur: hocque taliter suadetur.



Sint in Cylindris Scalenis similibus diametri basium EF, GN, *& Axes* BA, DI. Super bases EF, GN *in eadem altitudine cum Cylindris Scalenis intelligantur Cylindri recti, quorum Axes sint* BL, DK.

Dico Cylindros rectos esse similes: quia cum supponantur similes Cylindri Scaleni (per def. 24. hujus.) angulus BAL = *angulo* DIK: *pariter quia (per hyp.) æquales etiam sunt anguli* BLA, DKI, *quia recti; triangula* ALB, IKD: [*per* 32. *pri.*] *erunt æquiangula: quare (per* 4. *sexti.) etiam similia; ideoque*

LB : BA :: KD : DI

Cum autem [*per hyp.*)

BA : DI :: EF : GN :

Erit (*per* 11. *quinti.*)

LB : EF : KD :: GN,

Et alternando (*per* 16. *quinti.*)

LB : KD :: EF : GN.

Igitur in cylindris rectis axes LB, KD *sunt basium diametris* EF, GN *proportionales: ideoq; cylindri sunt similes: quia verò cylindrus rectus, cujus Axis* BL = *Cylindro Scaleno cum Axe* BA, *atq; Cylin-*

lindrus rectus, cum Axe DK = Cylindro Scaleno in Axe DI (inferius demonstrabitur) cum eamdem habeant basim, & altitudinem; ea, quæ de Cylindris rectis similibus dicuntur, etiam scalenis similibus superius definitis accommodari poterunt.

Quod de Cylindris dictum est, est de Conis intelligendum. Quare &c.

Def. XXV.

CUBUS dicitur figura solida sub sex æqualibus quadratis contenta.

Def. XXVI.

TETRAEDRUM vocatur illa solida figura, quæ sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris continetur.

Def. XXVII.

OCTAEDRUM appellatur figura Solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris comprehensa.

Def. XXVIII.

DODECAEDRUM nominatur illa figura solida, quæ sub duodecim Pentagonis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis continetur.

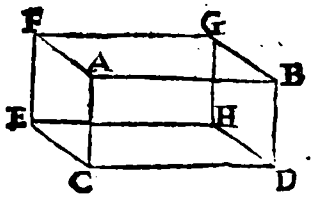
Def. XXIX.

ICOSAEDRUM dicitur illa figura solida, quæ sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris comprehenditur.

Def.

Def, XXX.

PARALLELEPIPEDUM nuncupatur illa figura ſolida, a ſex planis figuris quadrilateris contenta, quarum oppoſitæ ſunt parallelæ.



SI ſolida figura FD contineatur a ſex figuris planis quadrilateris CF, DG, CB, EG, CH, AG, quarum oppoſitæ CF, DG : CB, EG : CH, AG parallelæ ſint; talis figura dicenda erit PARALLELEPIPEDUM.

Def. XXXI.

Solida figura in ſolida figura INSCRIBI dicitur, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur, vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis illius figuræ, cui inſcribitur.

Def. XXXII.

Solida figura ſolidæ figuræ CIRCUMSCRIBI dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ, tangunt omnes angulos illius figuræ, circum quam deſcribitur.

Poſtulatum I.

Per duas rectas lineas ad punctum concurrentes planum ducere.

Poſtulatum II.

Per tria puncta planum ducere.

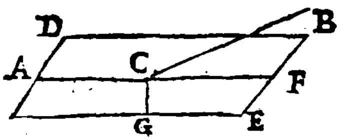
Pro-

Propos. I. Theo. I.

Si rectæ lineæ ACB pars AC fuerit in plano DE.

Dico totam lineam ACB esse in eodem plano DE.

Constructio.



SI pars AC potest esse in plano DE, pars vero CB extra planum DE; a puncto C in plano DE (*per 11. primi.*) ducatur CG perpendicularis ipsi AC. Vlterius in eodem plano DE a puncto C ipsi CG notetur perpendicularis CF.

Demonstratio.

TRes rectæ lineæ CA, CG, CF (*per constructionem.*) sunt in eodem plano DE. Anguli ACG, FCG, quia facti sunt recti, erunt duobus rectis æquales: quare (*per 14. pri.*) ACF erit linea recta: cum autem (*per hyp.*) recta sit linea ACB, duæ rectæ lineæ ACF, ACB, idem segmentum AC commune habebunt: quod est contra Axio. 10. Si ergo pars AC est in plano DE, etiam tota ACB in eodem erit plano DE. q. e. d.

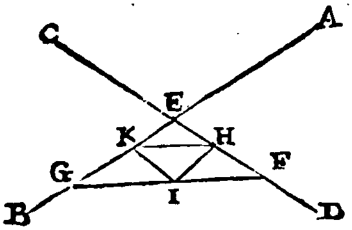
Propos. II. Theor. II.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secent in E.

Dico eas esse in eodem plano, atque triangulum omne in uno existere plano.

Con-

Constructio.



IN rectis EB, ED, utcumque notentur duo puncta G, & F, unianturque recta GF. Pariter in lateribus trianguli E G F signentur puncta H, I, *K*, addanturque rectæ HI, I*K*, KH.

Demonstratio secundæ partis.

SI trianguli GEF aliqua pars EKIF potest esse in uno plano; altera, pars vero GKI in alio plano: etiam rectarum EG, FG partes E*K*, FI erunt in uno plano, partes verò KG, IG in alio plano: quod cum fieri nequeat [*per* 1. *hujus.*) in illo plano, in quo est pars E*K*IF, est etiam alia pars KGI. Cum autem hoc valeat de quibuscumque alijs partibus trianguli EGF: sequitur quod totum triangulum EGF sit in uno plano. q. e. 1. d.

Demonstratio primæ partis.

TOtum triangulum GEF [*per demonstrata.*] est in uno plano; sed in illo plano, in quo est triangulum G E F, sunt etiam rectæ EG, EF: ergo rectæ EG, EF in eodem sunt plano. Quia vero (*per* 1. *hujus.*) in illo plano, in quo est GE, reperitur etiam EA; & in plano, in quo posita est FE, est etiam EC: ergo rectæ BA, DC se mutuo secantes in E, in uno erunt plano. q. e. 2. d.

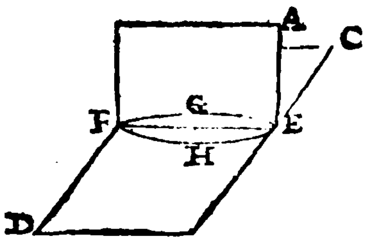
Propos. III. Theor. III.

Si planum AF secet planum CB.

Dico lineam EF, communem sectionem planorum AF, CB esse lineam rectam.

Con-

Constructio, & Demonstratio.



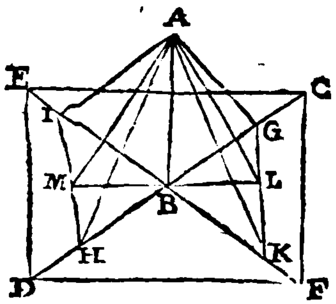
QVia in quovis plano a puncto ad punctum semper duci potest linea recta, si linea FE in utroque plano AF, CB constituta, non est recta linea; in plano AF a puncto F ad E recta ducatur EGF; pariter in plano CB ab E ad F notetur recta EHF: quo facto duæ reæ lineæ claudent spatium: contra Axio. 14: ergo sola linea EF communis sectio planorum AF, CB, erit linea recta. q. e. d.

Propos. IV. Theor. IV.

Si recta linea AB perpendiculariter insistat duabus rectis lineis CD, EF se mutuo secantibus in B.

Dico AB rectam esse plano CD, per rectas CD, EF ducto.

Constructio.



FIat BH = BG, atque BK = BI: notentur rectæ IH, & GK. Per B ducatur recta MBL, addanturque rectæ IA, MA, HA, KA, LA, GA.

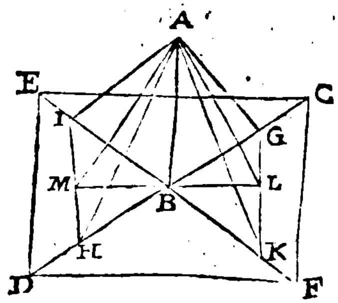
Demonstratio.

IN triangulis $\left.\begin{matrix}ABG\\ABH\end{matrix}\right)$ (*per constructionem.*] latera AB, BG sunt singula singulis æqualia lateribus AB, BH, & [*per hyp.*] angulus ABG = ang. ABH: quare (*per 4. primi.*) AG = AH.

Ob

Ob eamdem rationem in triangulis $\left.\begin{matrix}ABI\\ABK\end{matrix}\right\}$ AI = AK.

In triangulis $\left.\begin{matrix}IBH\\GBK\end{matrix}\right\}$ latera IB, BH (*per constructionem*:) singula singulis æqualia lateribus KB, BG, & ang. IBH (*per* 15. *pri.*) = ang. KBG: ergo (*per.* 4. *pri.*) IH = KG: atque ang. BIH = ang. BKG.



In triangulis $\left.\begin{matrix}BIM\\BKL\end{matrix}\right\}$ (*per demonstrata.*) ang. BIM = ang. BKL, & ang. IBM (*per* 15. *pri.*) = ang. KBL, latusque IB (*per constructionem.*) = lateri BK: quare (*per* 26. *pri.*) IM = KL, & MB = BL.

In triangulis $\begin{matrix}IAH\\KAG\end{matrix}$ latera IA, AH (*per demonstrata*) singula singulis æqualia lateribus KA, AG, basisque IH = basi KG: igitur (*per* 8. *primi.*) angulus HIA = ang. GKA:

In triangulis $\left.\begin{matrix}AIM\\AKL\end{matrix}\right\}$ (*per demonstrata*) latera AI, IM singula singulis æqualia lateribus AK, KL, & angulus AIM = ang. AKL: igitur (*per* 4. *pri.*) AM = AL.

In triangulis $\left.\begin{matrix}ABM\\ABL\end{matrix}\right\}$ latera AB, BM (*per demonstata*) singula singulis æqualia lateribus AB, BL, atque basis AM = basi AL: ergo (*per* 8. *pri.*) angulus ABM, = ang. ABL. quare (*per def.* 10. *pri.*) dicti anguli ABM, ABL erunt ambo recti.

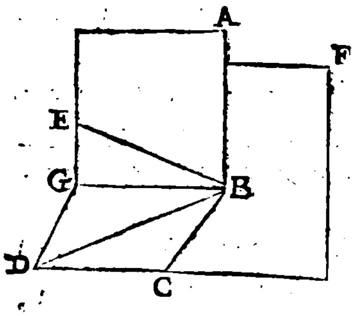
Quod de recta AB in ordine ad rectam MBL demonstratum est, de quacumq; alia recta linea in plano EF ducta, & transeunte per punctum B ostendi poterit: quare (*per def.* 3. *hujus*) linea AB erit recta plano EF per rectas CD, EF ducto. q. e. d.

Propos. V. Theor. V.

Si recta AB ad rectos angulos insistat tribus rectis lineis BC, BD, BE sese mutuo tangentibus in B.

Dico tres rectas BC, BD, BE in eodem existere plano.

Constructio; & Demonstratio.



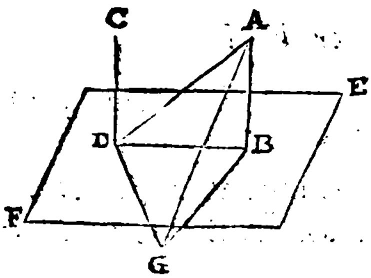
QVia (*per 2. hujus.*) rectæ BC, BD sunt in uno plano, sit hoc planum FD: si recta BE non est in plano FD (*per eamdem 2.*) erit in eodem plano cum AB: sit planum rectarum AB, EB planum AG.

Quoniam verò planum AG occurrit plano FD (*per 3. hujus.* BG communis sectio talium planorum erit linea recta.

Hoc stante, quia (*per hyp.*) AB est perpendicularis lineis BC, BD [*per 4. hujus.*] AB recta erit plano FD: sed BG est in plano FD: ergo angulus ABG erit rectus: cum autem [*per hyp.*] sit etiam rectus angulus ABE; erit ang. ABG = ang. ABE: quod repugnat, cum angulus ABG sit totum, & ang. ABE pars: quare recta BE erit & ipsa in plano rectarum BC, BD. q. e. d.

Propos. VI. Theor. VI.

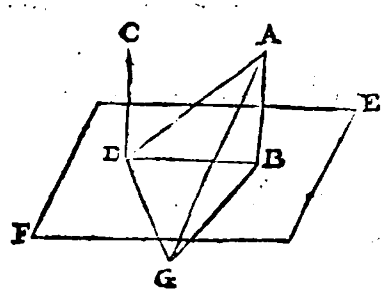
Si duæ rectæ lineæ AB, CD rectæ sint ad planum EF.



Dico AB, & CD esse parallelas.

Constructio.

DUcatur recta BD. A puncto D [*per 11. pri.*] notetur



tur DG perpendicularis ipsi DB, in plano EF,& æqualis BA: addanturq; rectæ BG, AG, AD.

Demonstratio.

QVia rectæ lineæ AB, CD (*per hyp.*) rectæ sunt plano EF [*per def.3.hujus*] anguli ABD, CDB erunt recti.

In triangulis ABD) GDB) (*per constructionem*] latera AB, BD sunt singula singulis æqualia lateribus GD, DB, & anguli ABD, GDB pariter æquales, quia recti: ergo [*per* 4.*pri.*) AD = GB.

In triangulis ABG) GDA) (*per constructionem,& per demonstrata.*) latera AB, BG singula singulis sunt æqualia lateribus GD, DA, basisq; AG cõmunis ergo (*per* 8.*pri.*] angulus ABG = ang. GDA: sed ang. ABG (*per def.* 3. *hujus.*] est rectus: quare etiam ang. GDA rectus erit.

Cum autem (*per hyp.*] sit etiam rectus angulus GDC: sequitur quod recta GD perpendicularis sit tribus lineis DB,DA, DC: quare (*per* 5. *hujus*,] rectæ DB, DA, DC in eodem erunt plano: sed [*per* 2. *hujus*] in illo plano, in quo sunt DB, DA est etiam AB: ergo in eodem plano erunt AB, & CD.

Ulterius quia duo interni, & ad easdem partes anguli ABD, CDB (*per hyp.*) sunt ambo recti, erunt duobus rectis æquales: ideoque (*per* 28. *pri.*) rectæ AB, CD erunt parallelæ. q. e. d.

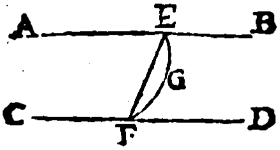
Propos. VII. Theor. VII.

Si in duabus rectis lineis parallelis AB, CD accepta sint puncta E, & F.

Dico lineam rectam coniungentem puncta E, & F in plano parallelarum AB, CD existere.

Con-

Constructio, & Demonstratio.



SI recta *EF* non est in plano parallelarum *AB*, CD, erit in alio plano. Hoc aliud planum, si producatur necessario secabit parallelarum planum, quia puncta E, & F sunt in plano parallelarum. *Sit* igitùr communis horum planorum sectio EGF, quæ [*per 3. hujus*] erit linea recta: quamobrem duæ rectæ EF, & EGF claudent spatium, quod repugnat [*per axio. 14.*]: ergo recta EF est in plano parallelarum *AB*, CD. q. e. d.

Propos. VIII. Theor. VIII.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD sint parallelæ, fueritque earum una, nempe AB, recta ad planum EF.

Dico & alteram CD eidem plano EF rectam esse.

Constructio.

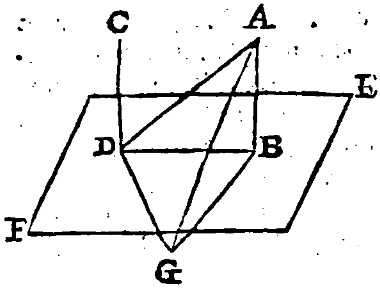
DUcatur recta *BD*, quæ erit in plano EF. A puncto D in eodem plano EF ducatur DG ipsi *DB* perpendicularis, & æqualis *BA*, adiunganturque rectæ *GB*, GA, DA.

Demonstratio.

QVia *AB* [*per hyp.*] est recta plano EF (*per def. 3. hujus.*) erit angulus *ABD* rectus; sunt autem (*per 29. primi.* anguli *ABD*, CD*B* duobus rectis æquales: quare angulus CD*B* rectus erit.

In triangulis $\left.\begin{matrix} GDB \\ ABD \end{matrix}\right\}$ latera G D, D *B* [*per construct.*] sunt singula singulis æqualia lateribus *AB*, *BD*, & angulus GD*B* = ang. *ABD*, quia ambo recti; ergo [*per 4. pri.* (BG = *AD*.

In triangulis GD*A*) GB*A*) latera GD, D*A* (*per construct. & per demonstrata.*] sunt singula singulis æqualia lateribus *AB*, *EG*, basisque *A*G communis: ergo (*per 8. pri.*] ang. GD*A*, = ang. *AB*G; sed ang. *AB*G (*per hyp.* est rectus: ergo etiam angulus GD*A* rectus erit: ex quo sequitur, rectam GD perpendicularem esse duabus rectis D*B*, D*A* concurrentibus in D: quare [*per 4. hujus.*] GD recta erit plano per *B*D, & *A*D ducto; sed (*per 2. hujus.*] in illo plano, in quo sunt *B*D, & *AD*, est etiam *AB*; & in plano, in quo est *AB* (*per hyp.*) est & CD: ergo tres rectæ *B*D, *AD*, CD concurrentes in D in uno erunt plano: quare [*per 4. hujus.*] G D perpendicularis etiam erit ipsi CD.



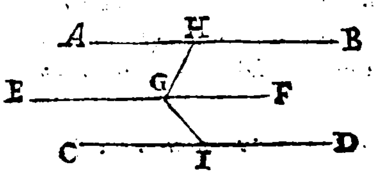
Cum igitur CD sit perpendicularis rectis D*B*, *D*G concurrentibus in D (*per 4. hujus.*) CD recta erit plano EF per rectas *BD*, GD ducto q. e. d.

Propos. IX. Theor. IX.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD sint ipsi EF parallelæ, quamvis EF in alio sit plano.

Dico AB, & CD fore inter se parallelas.

Constructio.



IN recta E*F* assumatur quodcumque punctum G, a quo [*per 12. primi.* ad rectas *AB*, CD notentur perpendiculares GH, GI.

De-

Demonstratio.

QVia (*per hyp.*] AB est parallela ipsi EF, & angulus GHA (*per constructionem.*) rectus: [*per* 29. *pri.*] & ang. EGH rectus erit. Eadem prorsus ratione rectus erit angulus EGI.

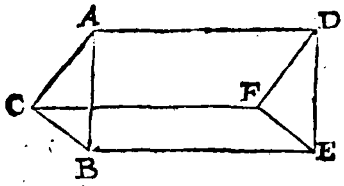
Quoniam vero EG perpendicularis est duabus rectis GH, GI concurrentibus in G: [*per* 4. *hujus.*] EG recta erit plano per GH, & GI ducto. Cum autem (*per hyp.*] CI sit parallela ipsi EG (*per* 8. *hujus.*) etiam CI recta erit eidem plano per GH, & GI signato. Eadem ratione plano per GH, & HI ducto recta est AH: quare [*per* 6. *hujus.*] AH parallela CI. q.e.d.

Propos. X. *Theor.* X.

Si duæ rectæ lineæ AC, BC, concurrentes ad punctum C, singulæ singulis parallelæ sint duabus rectis DF, EF concurrentibus in F, & in alio plano existentibus.

Dico angulos ACB, DFE ab illis lineis comprehensos esse æquales.

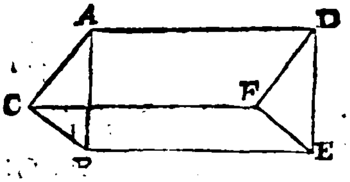
Constructio.



FIat CA = FD, atque CB = FE. Ducantur AB, DE, adaturque CF.

Demonstratio.

QVoniam rectæ AC, DF [*per hyp.* & *per constructionem.*) parallelæ sunt, & æquales (*per* 33. *pri.*] AD, & CF sunt parallelæ, & æquales. Eadem ratione CF parallela, & æqualis ipsi BE: quare [*per* 9. *hujus.*] AD parallela, & æqualis BE: ergo (*per* 33. *primi.*) AB = DE:

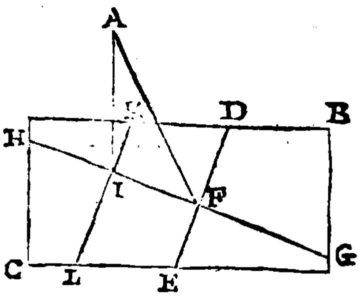


In triangulis ACB / DFE latera AC, CB [*per constructionem.*) sunt singula singulis æqualia lateribus DF, FE, basisque AB [*per demonstrata.*] æqualis basi DE: igitur (*per 8. pri.*) angulus ACB = ang. DFE. q. e. d.

Propos. XI. Probl. I.

Dato quovis puncto A extra planum BC; ad idem planum rectam ducere.

Constructio.



IN plano BC utcumque recta notetur DE; ad DE ex A [*per 12. primi.*) perpendicularis ducatur AF: a puncto F [*per 11. primi.*] in plano BC notetur FH perpendicularis ipsi DE: a puncto A dato [*per 12. primi.*) notetur AI perpendicularis rectæ HG.

Dico AI rectam esse plano BC.

Per I ducatur KIL parallela ED.

Demonstratio.

QVia DF (*per constructionem.*) perpendicularis est rectis FA, FH: (*per 4. bujus.*] DF recta erit plano per FA, & FH ducto: quare (*per 8. bujus.*) etiam KI eidem plano per FA, FH ducto, recta erit.

Quia vero AI (*per 2. bujus.*) est in plano rectarum FA, FH tangitque KL in I: (*per def. 3. bujus.*) angulus AIK erit rectus: ergo AI perpendicularis erit rectis IK, IF: unde (*per 4. bujus.*] AI recta erit plano BC per rectas IK, IF ducto. q. e. f.

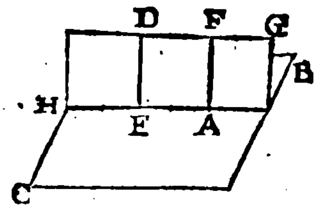
Pro-

Propos. XII. Probl. II.

Puncto A in plano BC dato.

Ab eodem puncto A eidem plano BC rectam lineam excitare.

Constructio.



EX puncto D utcumque extra planum BC signato [*per* 11. *hujus.*] ad planum BC recta ducatur DE, quæ si cadat in A factum est, quod erat faciendum, si cadat extra A, ut in E, ab E ad A ducatur EA. A puncto A in plano rectarum DE, EA, hoc est in plano GH (*per* 11. *pri.*) ipsi EA perpendicularis ducatur AF.

Dico AF rectam esse plano BC.

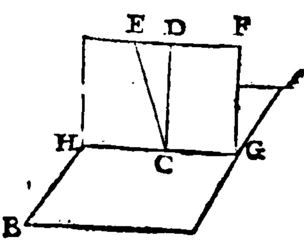
Demonstratio.

QVia (*per constructionem.*] AF parallela ED, ED vero facta est recta plano BC [*per* 8. *hujus.*) erit etiam AF eidem plano BC recta. q. e. f.

Propos. XIII. Theor. XI.

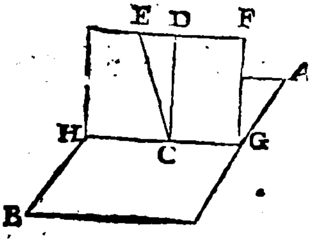
Ab eodem puncto C in plano AB accepto, duæ rectæ lineæ CD, CE plano AB rectæ ad easdem partes duci nequeunt.

Constructio.



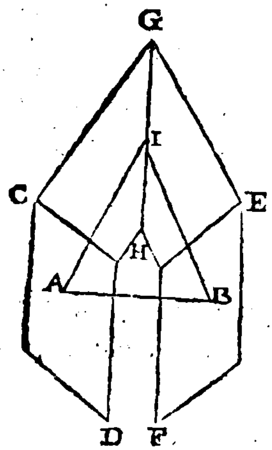
PEr duas rectas lineas CD, CE ducatur planum FH, communisque sectio plani FH cum plano AB sit recta HCG.

Demonstratio.



SI lineæ DC, EC ambæ rectæ sunt plano AB: (*per def.3.hujus.*) erunt anguli DCH, ECH recti, & ideo æquales; hoc est impossibile, quia DCH est totum, & ECH est pars, ergo est imdossibile, DC, EC ambas esse rectas plano *AB*.

Propos. XIV. *Theor.* XII.



Si linea AB sit recta planis CD, EF.

Dico illa plana esse parallela.

Constructio, & Demonstratio.

SI plana CD, EF non concedantur parallela, producta concurrent: concurrant igitur ad partes C, & E in recta GH, in qua accipiatur punctum I, ad quod in planis DCGH, FEGH ducantur rectæ lineæ AI, BI; quæ constituant triangulum AIB.

Cum autem [*per hyp.*] AB recta sit planis DCGH, FEGH: (*per def. 3. hujus.*) anguli BAI, ABI erunt recti: ideoque duobus rectis æquales, quod cum repugnet *Prop.* 17.*pri.*, plana CD, EF non poterunt concurrere: unde erunt parallela. q. e. d.

Propos. XV. *Theor.* XIII.

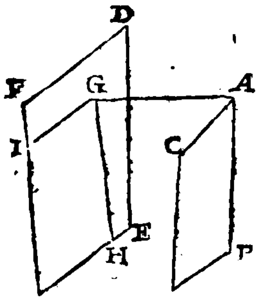
Si duæ rectæ lineæ AC, AB concurrentes in A, sint singulæ singulis duabus rectis lineis DF,

DE

DE concurrentibus in D, & in alio plano existentibus, parallelæ.

Dico planum per *AB*, & *AC* ductum parallelum esse plano per DF, DE descripto.

Constructio.



Ex puncto A (*per* 11. *bujus.*) recta ad planum FE ducatur GA. Ex puncto G in plano FE (*per* 31. *pri.*) notentur GH parallela DE, atque GI parallela *DF*.

Demonstratio.

Quia (*per hyp. & per construct.*) rectæ AB, GH parallelæ sunt ipsi DE: (*per* 9. *bujus.*) erit AB parallela *GH*: eadem ratione AC parallela GI: quare (*per* 29. *pri.*) erunt ang. $\left.\begin{matrix}\text{BAG}\\ \text{HGA}\end{matrix}\right\}$ duobus rectis æquales; sed ang. HGA (*per construct.*) est rectus: ergo & angulus BAG rectus erit: eadem prorsus ratione demonstrabitur rectus angulus CAG.

His manentibus, cum linea AG perpendicularis sit duabus lineis AB, AC concurrentibus in A: (*per* 4. *bujus.*) AG recta erit plano BC per lineas AB, AC ducto: quare (*per* 14. *bujus.*) plana BC, EF erunt parallela. q. e. d.

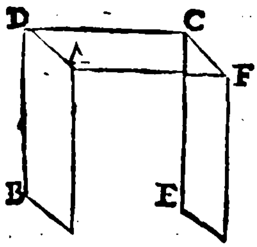
SCHOLIUM.

Quia ad sequentes propositiones demonstrandas opus est per datum punctum extra planum acceptum, ducere planum alteri plano parallelum; ideo opportunum duxi in hoc loco sequens probl. demonstrare.

Dato

Dato plano *AB*, & puncto C extra planum *AB* posito: per punctum C ducere planum plano *AB* parallelum.

Constructio.



IN dato plano AB ducantur duæ quæcumque lineæ DA, DB efformantes angulum ADB. A puncto D ad C notetur recta DC. In plano rectarum DC, DB, hoc est in plano CB a puncto C (per 31. pri.] ducatur CE parallela DB, & in plano rectarum CD, DA, nempe in plano CA notetur CF parallela DA.

Dico planum per CE, & CF ductum dato plano AB esse parallelum.

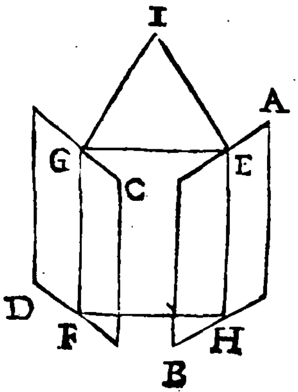
Demonstratio.

QUia rectæ CE, CF concurrentes in C (per construct.] parallelæ sunt rectis DB, DA concurrentibus in D (per 15. hujus.) plana AB, FE per dictas lineas ducta erunt parallela. q. e. f.

Propos. XVI. Theor. XIV.

Si duo plana parallela AB, CD secentur a plano EF.

Dico communes sectiones EH, GF esse parallelas.



Constructio, & Demonstratio.

QUia communes sectiones plani EF cum planis AB, CD, quæ sunt EH, GF ambæ reperiuntur in plano secante EF, si non sunt parallelæ poterunt concurrere; si fieri potest concurrant in I productæ ad partes E, & G.

Hoc

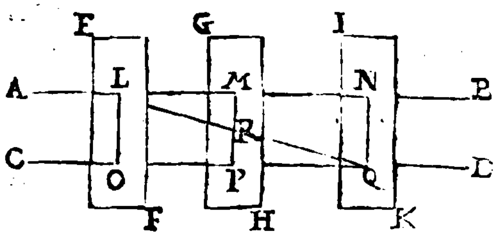
Hoc posito:] *per* 1. *hujus*.) recta linea FGI tota erit in plano CD, & linea EH tota erit in plano AB: si ergo rectæ FGI, HEI concurrunt in I, etiam plana AB, CD debent concurrere, cum sit impossibile concurrere lineas, non autem illa plana, in quibus concurrentes lineæ reperiuntur: sed plana (*per def.* 8. *hujus*.] nequeunt concurrere: ergo neque communes sectiones GF, EH poterunt concurrere: quare erunt parallelæ. q. e. d.

Propos. XVII. Theor. XV.

Si rectæ lineæ AB, CD quomodocumque dispositæ secentur a planis parallelis EF, GH, IK.

Dico lineas AB, CD secari in partes proportionales, videlicet LM : MN : : OP : PQ.

Constructio.



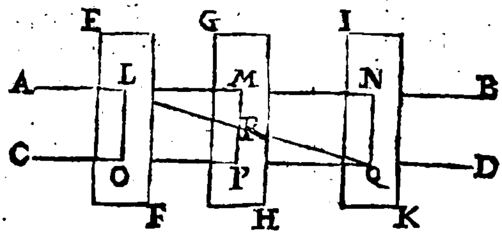
In plano EF ab L ad O ducatur recta LO: pariter in plano IK ab N ad Q notetur recta NQ. A puncto L ad Q ducatur recta LQ, quæ plano GH occurrat in R. A puncto R ad puncta M, & P in plano GH notentur rectæ RM, RP.

Demonstratio.

Triangulum LNQ [*per* 2. *hujus*] est in uno plano: quod pariter de triangulo LOQ est intelligendum.

Quia vero parallela plana GH, IK secantur a plano trianguli LNQ; atque parallela plana EF, GH secantur a plano trianguli LOQ: [*per* 16. *hujus*. (communes talium planorum sectiones erunt parallelæ: quare MR parallela NQ; & RP parallela LO.

His



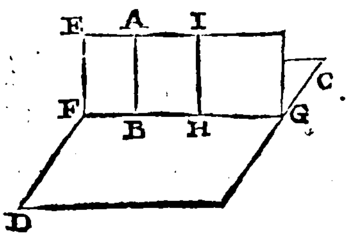
His demonstratis in triangulo LNQ, [*per 2. sexti.*]
LM : MN : : LR : RQ.
Ob eamdem causam in triangulo LOQ.
LR : RQ : : OP : PQ.
Quare (*per 11. quinti.*)
LM : MN : : OP : PQ. q. e. d.

Propos. XVIII. *Theor.* XVI.

Si linea AB plano CD recta fuerit.

Dico omnia plana per AB ducta eidem plano CD esse recta.

Constructio.



PEr *A*B ducatur quodcumque planum EG, cujus communis sectio cum plano CD sit FG in communi sectione FG accipiatur quodvis punctum H, a quo in plano E G (*per 31. pri.*] notetur HI ipsi B*A* parallela.

Demonstratio.

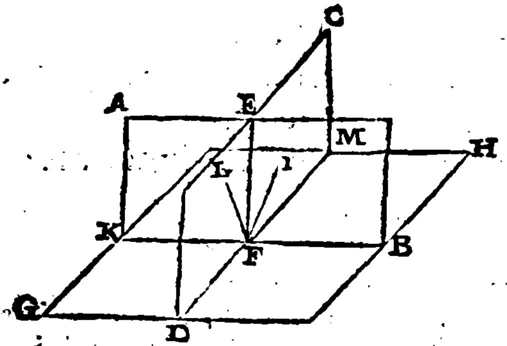
QVoniam [*per constructionem.*] lineæ B*A*, HI sunt parallelæ, atque (*per hyp.*) *AB* recta est plano *CD*: (*per* 8. *hujus.*]. & HI plano CD recta erit: ergo (*per def. 3. hujus.*] & HI erit perpendicularis communi sectioni FG. Quod autem de recta HI demonstratum est, valet etiam de quacumque alia linea in in plano EG ducta parallela ipsi BA: quare (*per def. 4. hujus.*) planum EG ad planum CD rectum erit: sed demonstrata de plano EG, etiam cuivis plano per BA ducto applicari possunt: ergo omnia plana per AB ducta, plano CD recta erunt. q. e. d.

Propos. XIX. Theor. XVII.

Si duo plana se ad invicem secantia in communi sectione EF, plano HG recta fuerint.

Dico EF communem talium planorum sectionem, plano HG rectam esse.

Constructio, & Demonstratio.



COmmunis sectio plani AB cum plano GH sit KB: atque communis sectio plani CD cum eodem plano GH sit DM. Hoc posito EF communis sectio planorum AB, CD vel erit perpendicularis ad utramque communem sectionem KB, DM, vel ad unam tantum, vel ad neutram.

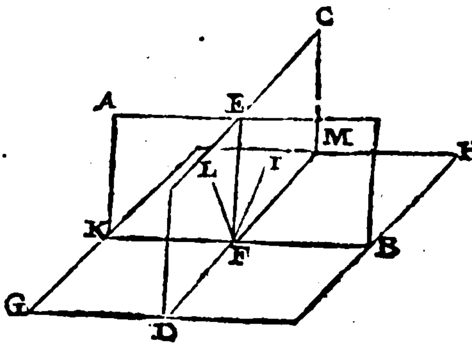
Si EF perpendicularis est ad ambas communes sectiones KB, DM (*per 4. hujus.*) recta erit plano GH per illas communes sectiones ducto.

Si EF est uni tantum rectarum KB, DM, ver.gr. ipsi KB perpendicularis; quia (*per hyp.*) planum AB rectum est ad planum GH, & EF perpendicularis ad KB, ut supponimus: EF (*per def. 4. hujus.*) recta erit plano GH.

Si denique EF non sit perpendicularis ad KB; neque ad DM; ex puncto F in plano AB ipsi KB perpendicularis ducatur FI; pariter.

riterque in plano CD notetur FL perpendicularis ipsi DM.

His positis, quoniam planum AB (*per hyp.*) rectum est ad planum GH; erit IF [*per def.* 4. *hujus.*] recta ad planum GH: ob eamdem causam LF ad idem planum GH recta erit: quare ab eodem puncto F in plano GH accepto ad easdem partes ductæ erunt



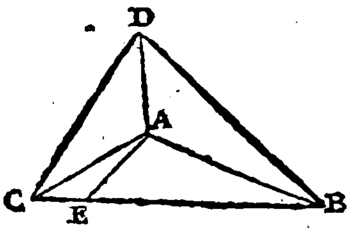
duæ lineæ FI, FL eidem plano GH rectæ: quod cum sit contra demonstrata in 13. hujus, FE communis sectio planorum AB, DC recta erit ad planum GH. q. e. d.

Propos. XX. Theor. XVIII.

Si solidus angulus A a tribus angulis planis BAC, BAD, CAD fuerit contentus.

Dico ex his tribus angulis duos simul acceptos reliquo esse majores.

Constructio, & Demonstratio.



QVando tres anguli plani solidum angulum comprehendentes sunt æquales, per se patet duos existere tertio majores.

Quando duo tantum sunt æquales, tertius vero inæqualis perspicuum est, unum æqualium cum inæquali alterum æqualium superare.

Tota igitur dubietas *habetur*, dum tres anguli plani constituentes angulum solidum sunt inæquales; unde circa hanc solam planorum angulorum constitutionem oportet demonstrare, quod medius, atque minor angulus

lus simul accepti superant maximum angulum.

Sit angulus BAC omnium maximus, CAD verò minimus. Ad punctum A, & ad rectam BA (*per* 23. *pri.*) constituatur angulus BAE = ang. BAD, fiatque recta AE = rectæ AD. Per puncta B, & E notetur BE, & producatur donec secet AC in C. Addantur CD, & BD.

His taliter peractis in triangulis $\left.\begin{matrix}\text{BAD}\\\text{BAE}\end{matrix}\right\}$ (*per constructionem.*) latera BA, AD singula singulis sunt æqualia lateribus BA, AE, atque ang. BAD = ang. BAE: quare (*per* 4. *pri.*) BD = BE. Quia vero (*per* 20. *pri.*) in triangulo *BDC* latera *BD*, *DC* majora sunt quam BC, demptis æqualibus BD, BE: (*per axio.* 5.) DC majus quam EC.

In triangulis $\left.\begin{matrix}\text{DAC}\\\text{EAC}\end{matrix}\right\}$ (*per constructionem,*) latera DA, AC singula singulis æqualia lateribus EA, AC, basis vero DC (*per demonstrata.*) major quam EC: ergo (*per* 25. *primi.*) angulus DAC major angulo EAC.

Cum autem (*per constructionem.*) ang. BAD = ang. BAE, si ang. BAD addatur ang. DAC, & ang. BAE adiungatur ang. EAC: (*per axio.* 5.) erunt

duo ang. $\left.\begin{matrix}BAD\\DAC\end{matrix}\right\}$ majores duobus ang. $\left.\begin{matrix}\text{BAE}\\\text{EAC}\end{matrix}\right\}$; sed

anguli $\left.\begin{matrix}\text{BAE}\\\text{EAC}\end{matrix}\right\}$ æquant angulum BAC: ergo

anguli $\left.\begin{matrix}\text{BAD}\\\text{DAC}\end{matrix}\right\}$ majores angulo BAC. q. e. d.

Propos. XXI. Theor. XIX.

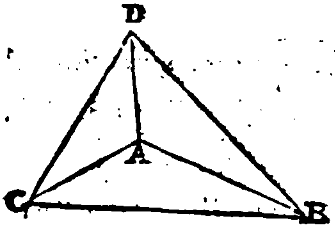
Si solidus angulus *A* a tribus angulis planis *BAC*, *CAD*, *DAB*, fuerit comprehensus.

Dico istos tres angulos quatuor rectis minores esse.

Con-

Constructio.

IN rectis AB, AC, AD utcumque notentur puncta B, C, D, addanturque rectæ BC, CD, DB.



Demonstratio.

SI intelligatur planum per rectas BC, CD, DB ductum, constituti erunt tres anguli solidi B, C, D singuli a tribus angulis planis contenti:

Quare (*per 20. hujus.*)

In ang. solido B duo ang. ABC, ABD } majores ang. CBD.

In ang. solido C duo ang. ACB, ACD } majores ang. BCD.

In ang. solido D duo ang. ADC, ADB } majores ang. BDC.

Ergo sex anguli plani ABC, ABD, &c. majores erunt tribus angulis planis CBD, BCD, BDC.

Quia vero (*per 32. pri.*) tres anguli CBD, BCD, BDC sunt duobus rectis æquales; sex anguli ABC, ABD &c. erunt majores duobus rectis; sed isti sex anguli ABC, ABD &c. additis tribus angulis ad punctum A constitutis (*per 32. pri.*) æquant sex angulos rectos: si ab hac summa demantur sex anguli ABC, ABD &c. qui (*per demonstrata.*) sunt majores duobus rectis; remanebunt ad punctum A tres anguli Plani *BAD*, *DAC*, *CAB*, comprehendentes angulum solidum *A*, quatuor rectis minores. q. e. d.

SCHOLIUM.

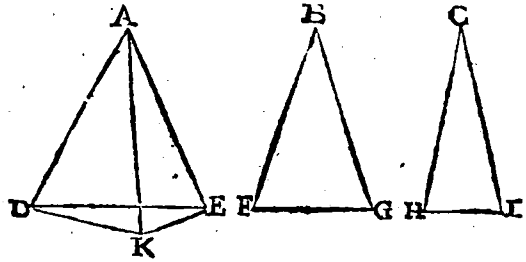
QUamvis ab Euclide hoc Theorema fuerit tantumodo propositum de angulo solido a tribus angulis planis efformato, adhuc tamen de qucumque solido angulo, a pluribus angulis planis composito verificatur, uti a Clavio, aliisque Scriptoribus in hoc loco fuit demonstratum.

Pro-

Propos. XXII. Theor. XX.

Si fuerint tres anguli plani A,B,C ab æqualibus rectis lineis *A*D, AE : BF, BG : CH, CI : comprehensi, quorum duo quomodocumque sumpti, reliquo sint majores.

Dico ex basibus DE, FG, HI posse triangulum efformari.



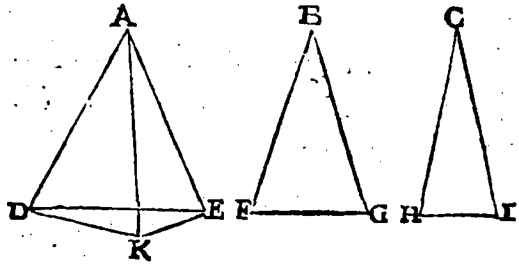
Constructio, & Demonstratio.

DAti tres anguli *A*, *B*, *C* possunt esse omnes inter se æqua les, vel duo tantum, vel omnes inæquales.

Si dati anguli A, B, C fuerint æquales, cum (*per hyp.*) æquales etiam sint rectæ A D, *A*E &c; erunt (*per* 4. *pri.*) bases DE, FG, HI æquales: quare ex his basibus duæ, quomodocumque simul acceptæ, erunt majores tertia.

Si ex datis angulis duo tantum fuerint æquales (*per* 4. *primi.*) duæ etiam bases erunt æquales: ideoque una æqualium basium cum tertia inæquali, aliam æqualem superabit.

Si demum tres anguli dati A, B, C fuerint inæquales, & angulus A maximus, reliqui vero B, & C æquales, vel inæquales inter se: erit (*per* 24. *pri.*) DE basium maxima; reliquæ verò bases FG, HI, inter se æquales, vel inæquales: quare DE + FG superabit HI, pariterque DE + HI major erit quam FG.



His manentibus oportet demonſtrare, minores baſes FG, HI ſimul ſumptas ſuperare maximam DE.

Fiat [*per 23. pri.*) angulus DAK = ang. B, ſitque AK = AD. Quia vero (*per hyp.* ang. A major eſt ang. B, recta AK cadet intra rectas AD, AE. Notentur rectæ DK, KE.

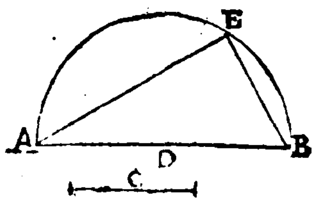
Quoniam verò duo anguli B, & C majores ſunt ang. DAE, & ang. B [*per conſtruct.*) æqualis ang. DAK: erit ang. C major ang. EAK.

Cum autem in triangulis $\left.\begin{matrix}\text{DAK}\\ \text{FBG}\end{matrix}\right\}$ latera AD, AK (*per hyp.*) ſingula ſingulis ſint æqualia lateribus BF, BG; & ang. DAK [*per conſtruct.*] = ang. B: (*per 4. pri.*) DK = FG.

In triangulis $\left.\begin{matrix}\text{HCI}\\ \text{KAE}\end{matrix}\right\}$ [*per hyp. & per conſtruct.*) latera CH, CI ſingula ſingulis æqualia ſunt lateribus AK, AE; angulus autem C [*per demonſtrata*) major ang. EAK: igitur (*per 24. pri.*] erit HI major EK.

Cum igitur DK (*per demonſtrata*] ſit æqualis FG: [*per axio. 4.*) FG + HI major erit quam DK + KE: quare [*per 22. pri.*] ex tribus baſibus DE, FG, HI poterit triangulum efformari. q.e.d.

LEMMA.



Duabus datis rectis lineis inæqualibus, nempe AB majori, & C minori, potentiam majoris lineæ AB ſupra potentiam minoris C invenire.

Con-

Constructio.

Super *AB* describatur semicirculus AE*B*: in hoc semicirculo (*per* 1. *quarti*.) accommodetur *BE* = C: iungatur AE. Dico quadratum rectæ AE esse potentiam majoris lineæ AB supra potentiam minoris lineæ C.

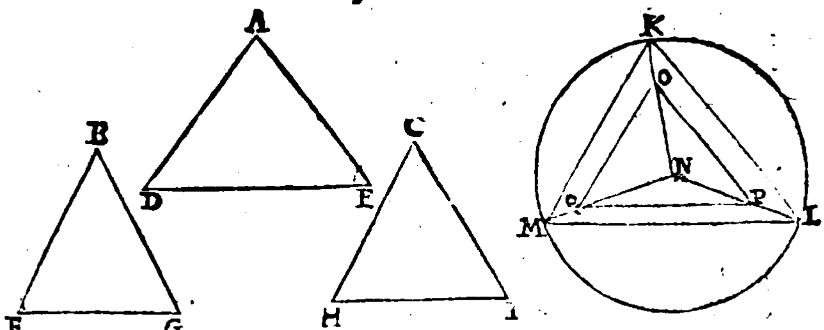
Demonstratio.

In semicirculo AE*B* (*per* 31. *tertij*. angulus *AEB* est rectus: quare (*per* 47. *pri.*) quad. *AB* = quad. $\left.\begin{matrix} BE \\ AE \end{matrix}\right\}$: sed quad *BE* (*per constructionem.*) = quad. C: ergo quad. *AB* = $\left.\begin{matrix} \text{quad.}\,AE \\ \text{quad.}\ C \end{matrix}\right\}$ ideoque recta *AB* plus potest quam C quad. *AE*. q. e. f.

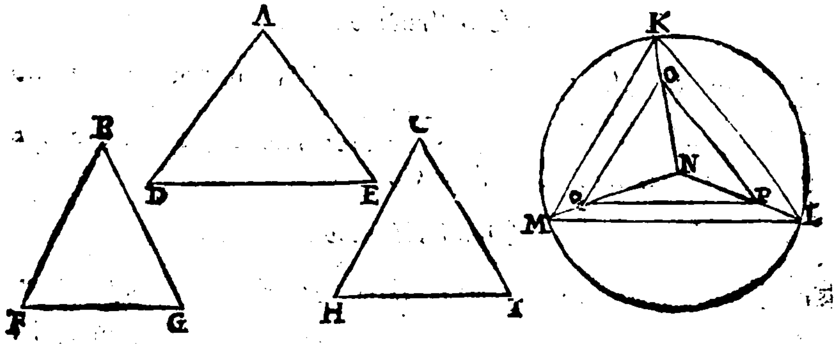
Propos. XXIII. *Prob.* III.

Ex datis tribus angulis planis A, B, C quatuor rectis minoribus, quorum duo quomodocumque accepti reliquo sint majores; solidum angulum constituere.

Constructio.



In una linearum comprehendentium datos angulos *A*, *B*, *C*, ut in AD, signetur punctum D. Fiant omnes reliquæ *AE*. *BF*,



BG, *CH*, *CI* ipsi *AD* æqnales, addanturquæ rectæ *DE*, *FG*, *HI*, ex quibus (*per* 22. *bujus*) poterit triangulum efformari: Constituatur ergo [*per* 22. *pri.*] ex tribus lineis DE, FG, HI triangulum KLM, sit que KL = DE:
KM = FG:
ML = HI:

Circa triangulum MKL [*per* 5. *quarti*) describatur circulus, cujus centrum sit N, a quo ad angulos trianguli MKL ducantur rectæ NM, NK, NL

Dico omnes rectas *AD*, *AE*, cæterasque datos angulos *A*, *B*, *C* comprehendentes, superare rectas NK, NM, NL a circuli centro N ad trianguli angulos M, K, L ductas.

Quia verò tres dati anguli *A*, *B*, C tales esse possunt, ut centrum circuli circa triangulum MKL descripti, aliquando sit intra triangulum, aliquando in uno trianguli latere, & aliquando extra triangulum: in omni casu opus est demonstrare, rectas *AD*, *AE* &c. superare N*K*, NM, NL.

Quando centrum N cadit intra triangulum.
Constructio, & Demonstratio.

SI rectæ *AD*, *AE* &c. non concedantur majores quam NK, NM, NL, erunt vel æquales, vel minores: sint primo, si esse possunt, æquales. Hoc supposito,

In triangulis $\left.\begin{matrix} DAE \\ KNL \end{matrix}\right\}$ latera *DA*, *AE* erunt singula singulis

æqua-

æqualia lateribus KN, NL, atque (*per constructionem*) basis DE = basi KL, ergo (*per 8. primi.*) ang. A = ang. KNL. Eadem ratione erit ang. B = ang. KNM, & ang. C = ang. MNL; sed tres anguli ad punctum N constituti. [*per corol. 1. prop. 15. primi.*) sunt quatuor rectis æquales: ergo & tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales erunt, quod est contra suppositum: quare rectæ AD, AE &c. nequeunt esse æquales rectis NK, NM, NL.

Secundo sint Minores, si esse possunt. Fiant NO, NP, NS æquales rectis AD, AE &c. ducatur recta OP: Hoc facto

In triangulo KNL [*per def. circuli.*] NK = NL, [*per constructionem.*) NO = NP: quare (*per 19. quinti.*) OK = PL: ergo

NO : OK :: NP : PL,

unde (*per 2. sexti*) OP parallela ipsi KL: igitur (*per corol. prop. 4. sexti.*) triangula KNL, ONP similia: ideoque

NL : LK :: NP : PO,

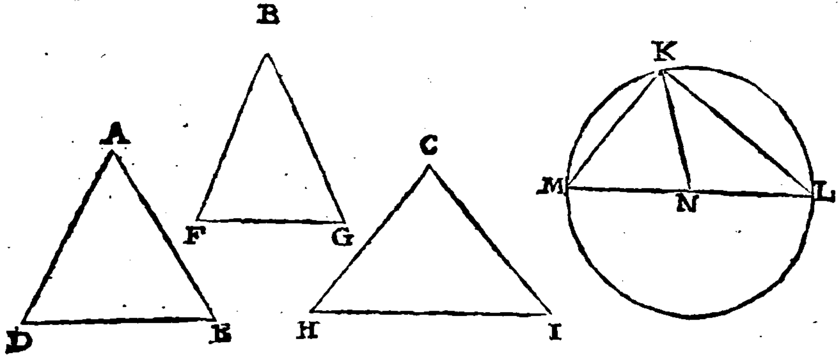
ergo (*per 14. quinti.*) KL major, quam OP.

Cum autem KL (*per constructionem.*) sit æqualis DE; erit OP minor DE.

In triangulis $\left.\begin{matrix}\text{DAE}\\ \text{ONP}\end{matrix}\right\}$ latera AD, AE erunt singula singulis æqualia lateribus NO, NP, basisque DE (*per demonstrata*) major quam OP: ergo [*per 25. pri.*] ang. A major ang. ONP.

Eodem argumento ducta OS, demonstrabitur ang. B major ang. ONS, & ang. C major ang. SNP.

Cum autem tres anguli circa punctum N [*per corol. 1. prop. 15. pri.*] sint quatuor rectis æquales; tres anguli dati A, B, C quatuor rectis majores erunt, cõtra hypotesim, quia supponuntur quatuor rectis minores. ex quo sequitur, lineas NK, NL, NM non esse majores rectis AD, AE &c. Vlterius cum [*per demonstrata.*] neque æquales esse possint, rectæ AD, AE, &c. superabunt NK, NL, NM, q. e. 1. d.

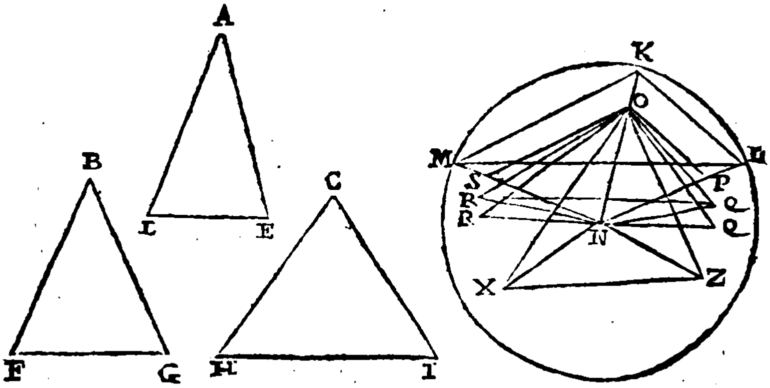


Quando centrum N cadit in unum latus trianguli.
Constructio, & Demonstratio.

ML = HI
KL = DE
KM = FG

QVando centrum N cadit in latus M L, ducatur NK: in hoc casu, si dicamus CH, CI æquales esse rectis N L, NM, NK, rectæ CH, CI æquabunt OL, NM: sed (*per constructionem.*) NL, NM, hoc est ML æqualis est ipsi HI: quare in triangulo CHI latera CH, CI non erunt majora, quam HI contra demonstrata (*in* 20. *primi.*): ergo rectæ CH, CI &c. non erunt rectis NL, NM, NK. Cum autem neque possint esse minores, quia, si hoc esset, latus HI superaret latera CH, CI; quod magis est contra eamdem 20. primi; quando igitur centrum N est in latere trianguli, rectæ AD, AE &c. majores sunt rectis NK, NM, NL. q. e. 2. d.

Quan-



Quando centrum N cadit extra triangulum. Conſtructio, & Demonſtratio.

Exiſtente centro N extra triangulum MKL, ſi primo dicamus rectas AD, AE &c. æquales eſſe rectis NM, NK, NL, in triangulis $\left.\begin{matrix}KNL\\DAE\end{matrix}\right)$ ſingula latera erunt ſingulis lateribus æqualia, baſiſque LK [*per conſtruct.*] æqualis baſi DE [*per 8. pri.*]: quare erit ang. A = ang. KNL. Eadem ratione ang. C = ang. KNM: quare totus angulus MNL æqualis duobus angulis A, & C. Cum autem [*per hyp.*) anguli A, & C ſimul accepti ſint majores angulo B, etiam angulus MNL major erit angulo B.

Quia vero in triangulis $\left.\begin{matrix}MNL\\FBG\end{matrix}\right)$ latera MN, NL ſupponuntur æqualia lateribus FB, BG, atque baſis ML [*per conſtruct.*) æqualis baſi FG: (*per 8. pri.*) erit ang. MNL = ang. B; ergo ang. MNL major, & æqualis erit angulo B. Quamobrem rectæ AD, AE &c. non ſunt æquales rectis NM, NK, NL.

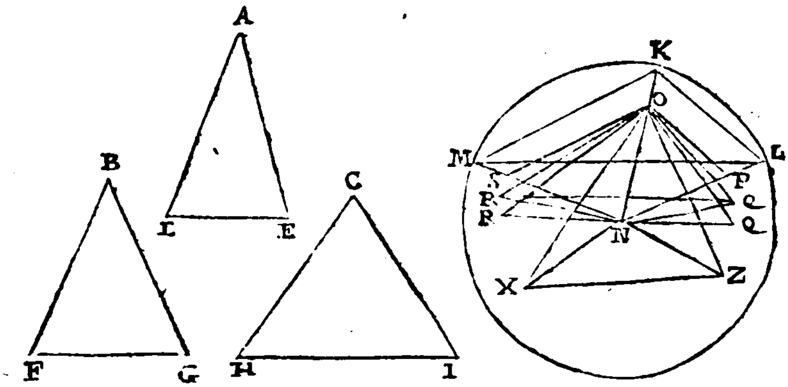
Si poſtea dicamus rectas AD, AE &c. minores eſſe quam NM, NK, NL; (*per 3. pri.*] fiant NS, NO, NP æquales ipſi AD, AE &c. ducanturque OS, OP.

Hoc facto [ut in prima parte) non ſolum demonſtrabitur angulus A major angulo ONP, verum etiam ang. C major ang. ONS.

Ad punctum N, & ad rectam NO (*per 23. pri.*) constituatur angulus ONQ = ang. A, atq; ang. ONR = ang. C, sintq; rectæ NQ, NR æquales ipsis AD, AE &c; addantur rectæ OR, OQ, quæ necessario intra OS, & OP cadere debent, quia circumferentia circuli ex centro N, intervallo NO descripta debet transire per puncta QPOSR.

Quia vero efformato angulo ONR = ang. A, & ang. ONQ = ang. C potest contingere, quod lineæ NR, NQ dictos angulos efformantes, angulum constituant ad partes trianguli *MKL*, quod sint in directum positæ, quodque ad oppositas partes trianguli *MKL* angulum constituant, ut in fig. 1.

Si contingat quod NR, NQ angulum efforment ad partes trianguli *MKL*, ducatur RQ.



Rectæ OS, OP [*per demonstrata in prima parte.*] parallelæ sunt rectis *K*M, K*L*: quare (*per 29. pri.* ang. MKN = ang. SON, & ang. LKN = ang. PON, atque totus ang. M*K*L = toti ang. SOP: sed ang. ROQ [*per axio. 9.*) minor ang. SOP: ergo, & ang. ROQ minor ang. MKL. His manentibus.

In triangulis $\left.\begin{matrix}\text{DAE}\\ \text{ONQ}\end{matrix}\right\}$ latera AD, AE singula singulis æqualia lateribus NO, NQ, & ang. A (*per constructionem*) æqualis ang. ONQ: quare (*per 4. pri.*) basis DE = basi OQ. Eadem ratione in triangulis $\left.\begin{matrix}\text{HCI}\\ \text{ONR}\end{matrix}\right\}$ basis HI = basi OR. Cum autem

per

(*per constructionem*) sit DE = KL, & HI = KM; erit OQ = KL, & OR = KM.

In triangulis $\left.\begin{matrix}LKM\\QOR\end{matrix}\right\}$ [*per demonstrata.*] latera KL, KM singula singulis æqualia lateribus OQ, OR, angulus verò LKM major angulo QOR: quare (*per 24. primi.*) basis ML major, quam basis RQ; sed [*per constructionem.*] ML = FG: quare FG major quam RQ.

In triangulis $\begin{matrix}FBG\\RNQ\end{matrix}$ (*per constructionem.*) latera FB, BG singula singulis æqualia lateribus NR, NQ, & (*per demonstrata.*) basis FG major basi RQ; (*per 25. pri.*) quare ang. B major angulo RNQ. Quia vero (*per constructionem.*) ang. RNQ est æqualis angulis A, & C: igitur ang. B major angulis A, & C, contra suppositum: ergo rectæ AD, AE &c. nequeunt esse minores rectis NL, NK, NM. Cum autem [*per demonstrata.*) neque possint esse æquales, restat quod sint majores. q. e. 3. d.

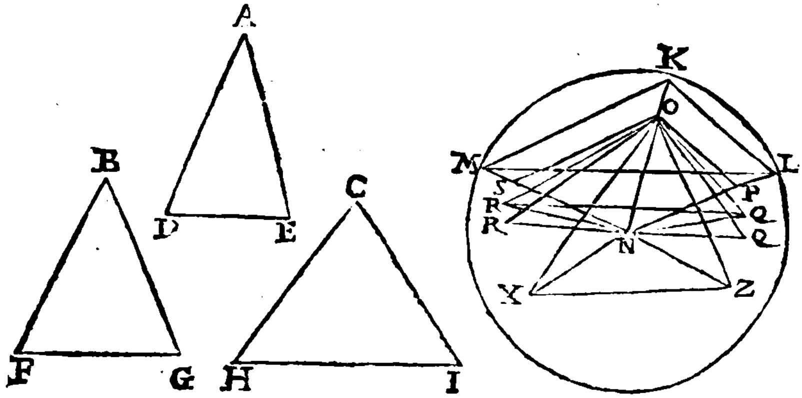
2. Si eveniat quod NR, NQ sint in directum positæ ducantur rectæ OR, OQ, quarum OR, uti supra, demonstrabitur æqualis ipsi KM, & OQ æqualis KL, quare

In triangulis $\left.\begin{matrix}MKL\\ROQ\end{matrix}\right\}$ latera MK, KL sunt singula singulis æqualia lateribus RO. OQ, & ang. MKL major ang. ROQ: ergo (*per 24. pri.*) ML major quam RQ: sed ML (*per construct.*) æqualis HI: ergo RQ minor quam HI: cum autem [*per constructionem.*] sit NR = CH, & NQ = CI: erit HI major quam CH, cum CI: quod repugnat (*per 20. pri.*]

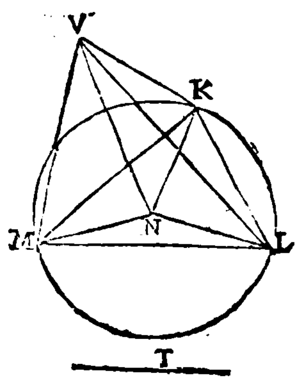
3. Si contingat quod rectæ NR, NQ infra centrum N constituant angulum XNZ ductis lineis OX, OZ, uti supra demonstrabitur OX = KM, OZ = KL: quare

In triangulis $\left.\begin{matrix}MKL\\XOZ\end{matrix}\right\}$ latera KM, KL singula singulis æqualia lateribus XO, OZ, angulus verò MKL major angulo XOZ: quare [*per 24. pri.*) ML major quam XZ; sed (*per construct.*) ML = HI, ergo HI major quam XZ.

In triangulis $\left.\begin{matrix}HCI\\XNZ\end{matrix}\right\}$ latera CH, CI (*per constructionem.*) singula singulis æqualia lateribus NX, NZ, & (*per demonstrata.*]



tâ.] basis HI major quam basis *XZ* : ergo (*per* 25.*pri.*) angulus C major angulo XNZ; sed angulus XNZ cum duobus angulis KNX, KNZ complet quatuor rectos: ergo angulus C cum angulis A, & B superabit quatuor rectos: quod est contra suppositum, quia tres anguli A, B, C supponuntur quatuor rectis minores: quamobrem non erit verum rectas AD, AE &c. minores esse rectis NK, NM, NL, at neque æquales esse possunt [*per demonstrata*): ergo solum restat quod sint majores. q.e 3.d.



Demonstratis lineis AD, AE &c. maoribus quam sint lineæ NK, NM, NL a circuli centro ad trianguli angulos ductis (per Lemma antecedens) inveniatur excessus potentiæ unius rectarum AD, AE &c. supra potentiam rectæ N*K*, vel NM, vel NL, talisque excessus sit quadratum rectæ T.

Ex centro N plano circuli MKL [*per* 12. *hujus*.) recta excitetur NV = ipsi T, ductisque rectis MV, *K*V, LV.

Dico ad punctum V constitutum esse angulum solidum a tribus datis angulis planis A, B, C comprehensum.

De-

Demonstratio.

QVia NV (*per constructionem*) recta est plano circuli LKM, (*per def.3. hujus.*] anguli VNL, VNK, VNM erunt recti: quare [*per* 47. *pri.*) quad. VL = $\left.\begin{matrix}\text{quad. VN}\\ \text{quad. NL}\end{matrix}\right)$. Cum autem] *per construct.*) quad. AD æquale sit iisdem $\left.\begin{matrix}\text{quad. VN}\\ \text{quad. NL}\end{matrix}\right\}$ erunt quad. $\left.\begin{matrix}\text{quad. VN}\\ \text{quad. NL}\end{matrix}\right\}$ = quad. AD: unde (*per scol. prop.* 46. *pri.*) recta VL = rectæ AD.

Denuo in triangulis $\left.\begin{matrix}\text{VNL}\\ \text{VNK}\end{matrix}\right\}$ latera VN, NL singula singulis æqualia lateribus VN, NK, æqualesque anguli VNL, VNK, quia recti: igitur (*per* 4.*pri.*] VL = VK; sed VL fuit demonstrata æqualis ipsi AD: ergo, & VK eidem *A*D æqualis erit. Eadem ratione poterit demonstrari VM = *AD*: quare tres rectæ VL, V*K*, VM inter se, & rectis *AD*, *AE* &c. æquales erunt.

In triangulis $\left.\begin{matrix}DAE\\ \text{KVL}\end{matrix}\right\}$ latera *DA*, *AE* [*per demonstrata.*) singula singulis æqualia lateribus VL, VK, basisque *D*E (*per construct.*) æqualis basi LK: quare (*per* 8.*pri.*) ang. *DAE* = ang. LV*K*. Iisdem fundamentis poterit demonstrari angulus B = ang. LVM, & ang. C = ang. MVK: quare angulus solidus V efformatus erit ex tribus angulis planis LV*K*, LVM, *M*VK æqualibus tribus angulis datis *A*, *B*, C. q. e. f.

Propos. XXIV. Theor. XXI.

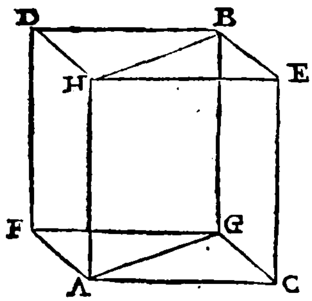
Si Parallelepipedum AB a sex planis AE, FB, AG, HB, AD, CB fuerit comprehensum. Dico plana opposita AE, FB &c. esse parallelogramma similia, & æqualia.

Constructio.

In oppositis planis AG, HB notentur rectæ *A*G, HB.

De-

Demonstratio primæ partis.



QVia plana parallela *AG*, *HB* secantur a plano BC. [*per 16. hujus.*) rectæ EB, & CG erunt parallelæ. Pariter quia parallela plana *AE*, FB secantur a plano BC [*per eamdem 16.*] rectæ BG, EC, & ipsæ erunt parallelæ: ergo (*per def. 40. pri.*) quadrilatera figura BC erit parallelogrammum. Eadem ratione demonstrari poterunt parrallelogramma reliqua plana parallelepipedum comprehendentia. q. e. d.

Demonstratio secundæ partis.

REctæ lineæ *FA*, *AC* (*per demonstrata in prima parte*) parallelæ sunt rectis D*H*, HE: quare [*per 10. hujus.*) ang. *FAC* = ang. DHE, eamdem ob causam reliqui anguli parallegrammi *A*G = ang. parallelogrammi *D*E.

Quoniam vero (*per 34. pri.*) est F*A* = DH, & *AC* = HE: erit F*A*: *A*C:: *D*H: HE.

Cum autem eadem analogia habeatur in reljquis lateribus oppositorum parallelogrammorum *A*G, HB: (*per def. 1. 6.* [parallelogramma *A*G, HB (idem valet de reliquis) erunt similia, q. e. 2. d.

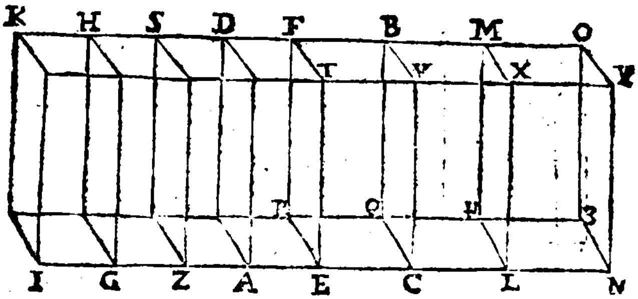
Demonstratio tertiæ partis.

IN triangulis $\left.\begin{matrix} ACG \\ HEB \end{matrix}\right\}$ [*per 34. primi, & per demonstrata*] latera *AC*, *CG* sunt singula singulis æqualia lateribus HE, EB, & ang. *A*CG = ang. HEB: ergo [*per 4. pri.*] triangulum *A*CG = triangulo HEB: eadem ratione triang. *AFG* = triang. HDB: quare parallelogrammum FC = opposito DE. Cum autem idem de alijs parallelogrammis oppositis verificetur in parallelepipedo plana opposita erunt parallelogramma similia, & æqualia. q. e. d.

Pro-

Propos. XXV. Theor. XXII.

Si parallelepipedum AB sectum fuerit plano EF oppositis planis AD, CB parallelo.
Dico ut basis EV ad basim AT, ita solidum EB ad solidum AF.



Constructio.

Parallelepipedo AB in oppositas partes IK, NO indefinitè producto, in recta AI accipiantur quæcumque partes AZ, ZG, GI singulæ æquales ipsi AE. Pariter in recta CN notentur partes CL, LN singulæ æquales ipsi EC: per puncta Z, G, I, L, N (*per Lemma superius positum*) notentur plana ZS, GH, IK, LM, NO parallela plano AD, vel CB.

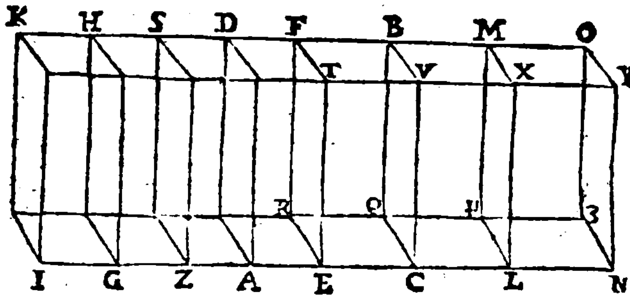
Demonstratio.

Quia solidum EB (*per hyp.*) a parallelis planis continetur:) [*per def. 29. hujus.*) est parallepipedum, in quo [*per 24. hujus.*] plana opposita EF, CB &c. sunt parallelogramma similia, & æqualia. Eadem ratione solida ED, AS, ZH, GK, CM, LO erunt parallelepipeda, in quibus (*per 24. hujus.*) opposita plana sunt parallelogramma similia, & æqualia.

Ulterius quia parallelogramma FV, CX, LY, [*per constructio-*

ctionem.) bases habent æquales EC,CL, LN, & in ijsdem parallelis continentur: (*per 36.pri.*) erunt æqualia.

Pariter quia anguli unius parallelogrammi [*per 29.pri.*) sunt aliorum parallelogrammorum angulis æquales, atque circa æquales angulos latera proportionalia, cum antecedentia sint antecedentibus, & consequentia consequentibus æqualia: [*per def.*10 *hujus*.] parallelepipeda EB, CM, LO, erunt æqualia. Eadem ratione æqualia erunt parallelepipeda ED, AS, ZH.GK.



His manentibus quam multiplex basis ND ipsius basis CT, tam multiplex etiam erit parallelepipedum EO parallelepipedi EB, & quam multiplex est basis IT ipsius basis AT, tam multiplex etiam erit parallelepipedum IF parallelepipedi AF.

Ulterius quando basis EY est æqualis basi IT, cætera etiam plana parallelepipedi EO sunt æqualia, & similia planis parallelepipedi EK (*per def.* 10. *hujus*) parallelepipedum EO = parallelepipedo IF: quando basis EY minor base IT, etiam solidum EO minus solido IF; & quando basis EY major base IF, etiam parallelepipedum EO majus parallelepipedo IF.

Ponatur basis EV prima magnitudo; basis AT secunda; solidum EB tertia; solidum AF quarta: Primæ, atque tertiæ magnitudinis (*per demonstata*) æqualiter multiplicia sunt EY, & solidum EO: secundæ vero, & quartæ pariter multiplicia sunt IT, & solidum IF. Cum autem hæc pariter multiplicia obtineant conditiones Def. 6. Libri quinti, (*per eamdem def.*) ut basis EV ad basim AT, ita parallelepipedum EB ad parallelepipedum AF. q.e.d.

SCHO-

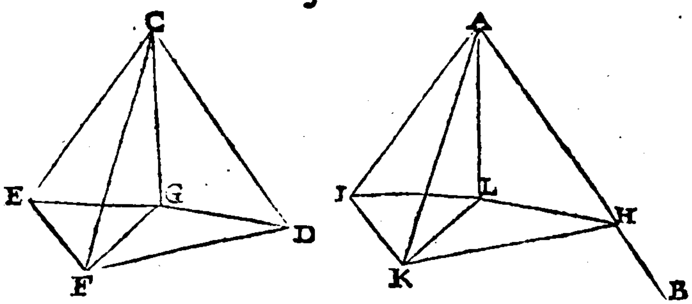
SCHOLIUM.

Quod de solis parallelepipedis superius demonstratum est, valet etiam de quibuscumque prismatis, quia portiones prismatum sectarum plano oppositis planis parallelo, ad inuicem sunt ut bases.

Propos. XXVI. Probl. IV.

Ad punctum datum A, & ad rectam AB constituere angulum solidum æqualem dato angulo solido C a tribus angulis planis DCE, DCF, FCE comprehenso.

Constructio.



IN recta CF accipiatur quodcumque punctum F, a quo (*per* 11. *hujus*) ad planum rectarum CD, CE perpendicularis ducatur FG, signentur rectæ GC, GD, GE, FE, FD.

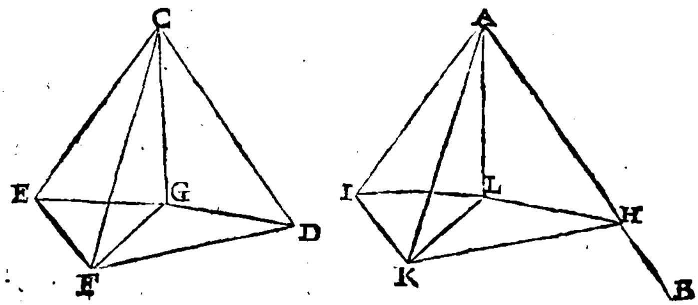
In data recta AB [*per* 3. *pri.*] fiat AH = CD. Ad punctum A, & ad rectam AB (*per* 23. *pri.*) constituatur angulus HAI = angulo DCE, sitque recta AI = CE.

In plano rectarum AH, AI ad punctum A, & ad rectam AB fiat ang. HAL = ang. DCG, sitque AL = CG; notentur rectæ LI, LH.

Ex puncto L [*per* 12. *hujus*) ad planum rectarum BA, AI excitetur perpendicularis LK = ipsi GF: addanturque rectæ lineæ KA, KH, KI.

Dico solidum angulum A = dato solido angulo C.

De-



Demonstratio.

IN triangulis $\left.\begin{matrix}HAL\\DCG\end{matrix}\right\}$ [*per constructionem.*] latera HA, AL singula singulis æqualia lateribus DC, CG, & angulus HAL = angulo DCG: ergo [*per 4. pri.*] HL = DG.

Quia (*per constructionem.*) ang. HAI = ang. DCE, & ang. HAL = ang. DCG: erit ang. LAI = ang. GCE.

In rriangulis $\left.\begin{matrix}LAI\\GCE\end{matrix}\right\}$ (*per constructionem*) latera LA, AI alterum alteri æqualia lateribus GC, CE, & ang. LAI (*per demonstrata*) = ang. GCE: igitur (*per 4. pri.*) LI = GE.

In triangulis $\left.\begin{matrix}HLK\\DGF\end{matrix}\right\}$ latera HL, LK [*per demonstrata, & per constructionem*) singula singulis æqualia lateribus DG, GF, & angulus HLK = ang. DGF: igitur (*per 4. pri.*) HK = DF.

In triangulis $\left.\begin{matrix}ALK\\CGF\end{matrix}\right\}$ [*per constructionem, & per demonstrata*) latera AL, LK singula singulis æqualia lateribus CG, GF, atque angulus ALK = ang. CGF, quia (*per constructionem*) recti: ergo [*per 4. pri.*) AK = CF.

In triangulis $\left.\begin{matrix}HAK\\DCF\end{matrix}\right\}$ (*per constructionem, & per demonstrata*) latera HA, AK singula singulis æqualia lateribus DC, CF, basisque HK = basi DF. igitur (*per 8. pri.*) ang. HAK = ang. DCF.

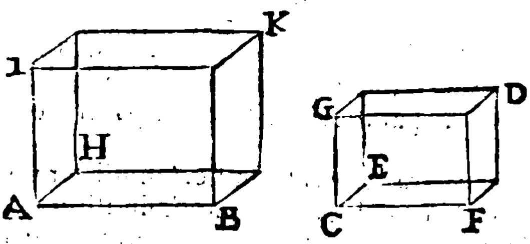
In triangulis $\left.\begin{matrix}KLI\\FGE\end{matrix}\right\}$ [*per constructionem, & per demonstrata,*) latera KL, LI singula singulis æqualia lateribus FG, GE, & angulus KLI = ang. FGE, quia (*per construct.*, ambo recti: quare [*per 4. pri.*] IK = FE.

In

In triangulis $\left.\begin{matrix}KAI\\FCE\end{matrix}\right\}$ (*per construct. & per demonstrata*) latera KA, AI singula singulis æqualia lateribus FC, CE, latusque KI [*per demonstrata.*] æquale lateri FE: sequitur (*per 8. primi.*) ang. KAI = ang. FCE: quare ad datum punctum A, & ad datam rectam AB constitutus est solidus angulus A dato angulo solido C æqualis. q. e f.

Propos. XXVII. Probl. V.

Ad datam rectam AB parallelepipedum constituere simile, similiterque positum dato parallelepipedo CD.



Constructio.

AD punctum A, & ad rectam AB [*per 26. hujus.*) ponatur ang. solidus A = ang. solido C, sintque in his angulis solidis sequentes plani anguli æquales.

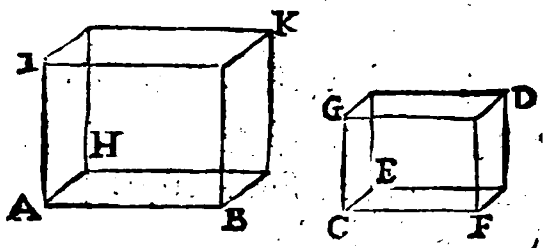
ang. planus BAI = angulo plano FCG.
ang. planus BAH = angulo plano FCE.
ang. planus IAH = ang. plano GCE.

Hoc posito (*per 12. sexti.*) fiat
FC : CG :: BA : AI. pariterque fiat
GC : CE :: IA : AH. hoc posito
Ex æquo erit (*per 22. quinti.*)
FC : CE :: BA : AH
Compleantur parallelogramma BI, HI, BH.

 Per

Per tria puncta B, I, H (*ut in schol. propos.* 15. *hujus.*] ducatur planum HK parallelum plano BI: planum BK parallelum plano HI, & planum BH parallelum plano KI: quo facto completum erit parallelepipedum AK, quod

Dico simile, & similiter positum dato parallelepipedo CD.



Demonstratio.

Angulus BAH (*per constructionem.*] æqualis angulo FCE, atque latera circa istos angulos proportionalia: quare (*per def.* 1. *sexti.*] parallelog. BH simile parallelog. FE, & similiter positum.

Eadem ratione parallelog. *HI*, simile, & similiter positum parallelog. EG; atque parallelog. *BI* simile, & similiter positum parallelog. FG. Quo posito in parallelep. A*K* erunt plana BH, HI, IB similia, similiterque posita planis FE, EG, GF in solido CD. Cum autẽ (*per* 24. *hujus.*) in omni parallelepipedo tria plana sint tribus oppositis planis similia: inde sequitur sex plana parallelepipedi A*K* esse similia, similiterq; posita sex planis parallelepipedi CD: quare (*per def.* 9. *hujus.*) parallelepipedum AK simile erit, similiterque positum parallelepipedo CD. q. e. f.;

Propos. XXVIII. Theo. XXIII.

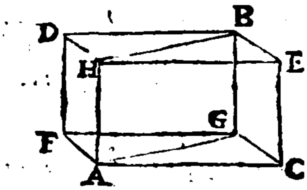
Si parallelepipedum AB a plano ducto per diagonios oppositorum planorum AG, HB sectum fuerit.

Dico ab eodem plano bifariam secari.

De-

Demonstratio.

QVia [*per* 34. *pri.*] rectæ AH, BG sunt parallelæ, & æquales ipsi FD: (per 9. *bujus*] AH, & GB inter se parallelæ, & æquales erunt: quare (*per* 33. *pri.*) HB parallela, & æqualis ipsi AG: ideoque diagonales *A*G, HB (*per def.* 39. *pri.*] sunt in eodem plano; quod planum dico bifariam dividere parallelepipedum *AB.*



Opposita plana ED, CF (*per* 24. *bujus*] sunt parallelogramma similia, & æqualia: quare (*per* 34. *pri.*) triangulum BDH = triangulo GFA, pariterque triang. HEB = triang. *A*CG. Insuper, cum in triangulis $\left.\begin{matrix}BDH\\GFA\end{matrix}\right\}$ angulus BDH (*per* 10. *bujus.*] sit æqualis angulo CF*A*, atque latera circa æquales angulos proportionalia, quia [*per* 34. *pri.*] DB = FG, & DH = F*A*, triangula $\left.\begin{matrix}BDH\\GFA\end{matrix}\right\}$ (*per* 6. *sexti*) erunt similia: ob eamdem rationem similia erunt triangula $\left.\begin{matrix}HEB\\ACG\end{matrix}\right\}$.

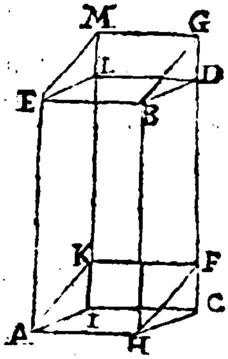
Vlterius quia (*per* 24. *bujus.*) parallelog. *AD* simile est, & æquale parallelog. CB: parallelog. CH simile, & æquale parallelog. GD: parallelog. vero *AB* commune: (*per def.* 10. *bujus.*] prisma *ADBG* æquale erit prismati *ECHA*. q. e. d.

Propos. XXIX. *Theor.* XXIV.

Si parallelepipeda ACDE, AFGE super eadem basi AB, & in eadem altitudine fuerint constituta hac lege, scilicet quod parallelepipedorum insistentes lineæ AI, AK: EL, EM: BD, BG: HC, HF in iisdem collocentur rectis lineis CG, IM.

Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.

Demonstratio.



QVia parallelog. *AL* (*per* 35. *pri.*) = est parallelogrammo *AM* æquale, ablato communi trapetio *A*KLE; erit triang. *A*I*K* = triang. ELM.

Pari modo quia (*per* 34. *pri.*) IL, & *K*M (*per* 34 *pri.*) sunt ipsi *A*E æquales (*per axio.* 1.) ablata communi parte KL, erit I*K* = LM, perterea est (*per* 34. *pri.*) EL = *A*I.

Cum igitur duo triang. $\left.\begin{matrix}\text{AIK}\\ \text{ELM}\end{matrix}\right\}$ (*per.* 29. *pri.*) habeant angulum *AIK* = angulo ELM, atque latera circa æquales angulos proportionalia, propter demonstratam antecedentium, & consequentium æqualitatem: (*per* 6. *sexti.*) dicta triangula erunt æquiangula, ideoque (*per* 4. *sexti.*) similia.

In triangulis $\left.\begin{matrix}\text{AIK}\\ \text{HCF}\end{matrix}\right\}$ quia (*per* 34. *pri.*) singula latera sunt singulis lateribus æqualia, cumque (*per* 10. *hujus.*) singuli anguli sint singulis angulis æquales: (*per* 4. *sexti.*) dicta triangula erunt similia, & æqualia.

Pari ratione similia, & æqualia erunt triangula ELM, BDG: quatuor igitur triangula ELM, BDG, AIK, HCF similia erunt, & æqualia.

Parallelog. AC (*per* 24. *hujus.*) simile, & æquale parallelog. ED.

Parallelog. AF simile, & æquale parallelog. EG.

Parallelog. IF simile, & æquale parallelog. LG.

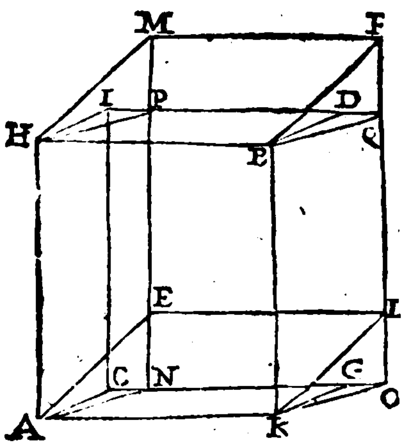
Quare (*per def.* 10. *hujus.*) prisma AHCK = prismati EBDM addito communi solido AFDE: erit parallelepipedum ACDE = parallelepipedo AFGE super eadem basi, & in eadem altitudine constituto. q. e. d.

Pro-

Propos. XXX. Theor. XXV.

Si super eadem basi AB, & in eadem altitudine constituta fuerint parallelepipeda AIDK, AMFK, hac lege, quod scilicet rectæ AE, HM, BF, KL insistentes parallelepipedi AMFK non cadant in lineas alterius parallelepipedi AIDK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.

Constructio.



Quia (*per hyp.*) parallelepipeda AIDK, AMFK, sunt in eodem altitudine: parallelogramma IG, ML erunt in eodem plano. Productis igitur lineis CG, ID, FL, ME hæ omnes lineæ erunt in plano parallelogrammorum IG; ML; atque CG concurret cum FL in O: & cum ME in N. ID vero concurret cnm FL in Q, & cum ME in P. Hoc posito erit factum parallelogrammum PQON. Ducantur jam rectæ HP, BQ, KO, AN.

Demonstratio.

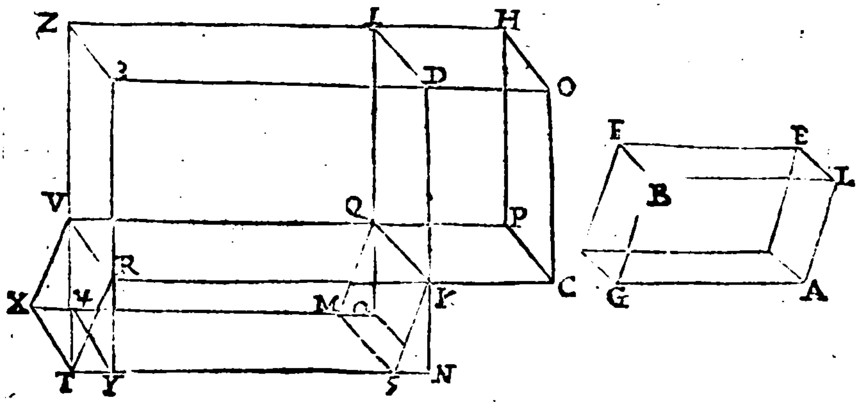
PQ (*per* 34.*pri.*) = MF: MF = HB: ergo (*per axio.*1.) PQ = HB: sunt autem (*per eamdem* 34. *pri.*) PQ, & HB parallelæ: quare (*per* 33. *pri.*) HP ipsi BQ æqualis, & parallela: ergo HQ erit parallelogrammum. Eadem ratione parallelogramma erunt AP, AO, KQ, NQ: quapropter solidum APQK (*per def.*21.*hujus.*) erit parallelepipedum. Cum autem (*per* 29. *hujus.*) parallelepipedum AIDK æquale sit parallelepipedo APQK; parallelepipedum autem APQK (*per eamdem* 29.] æquet parallelepipedum AMFK (*per axio* .1.) erit parallelepipedum AIDK = parallelepipedo AMFK. q. e d.

Propos. XXXI. *Theor.* XXVI.

Si parallelepipeda AEFG, CHIK super æquales bases AB, CD, & in eadem altitudine fuerint constituta.

Dico esse æqualia.

In hoc theoremate parallelepipedorum insistentes LE, BF, CP, OH &c. possunt esse basibus AB, CD rectæ, vel inclinatæ.



Constructio.

PRoducatur recta CK, fiatque KR = BL. In plano OK (*per* 23. *pri.*) fiat angulus RKS = ang. BLA, sitque KS = LA. Compleatur parallelogrammum KT, Supra basim KT in altitudine KQ constituatur parallelepipedum QSTV.

Producantur DK, & TS quousque concurrant in N, perficiaturque parallelogrammum KY. Supra basim KY constituatur pa-

parallelepipedum QNYV. Rectæ HI, & HV productæ coucurrant in Z: OD, & YR se tangant in 3: compleatur parallelepipedum IKRZ.

Demonstratio quando insistentes parallelepipedorum sunt basibus rectæ.

QVia rectæ KR, KS (*per constructionem.*) æquales rectis BL, LA, & angulus RKS = ang. BLA: [*per 29. & 34. primi.*) parallelog. KT, LG sunt similia, & æqualia. Pariter (*per constructionem.*) rectæ KQ, KS = rectis EL, LA, & angulus QKS = ang. ELA, quia QK, & EL supponuntur rectæ planis QT, LG: ergo parallelog. QS simile, & æquale parallelog. EA.

Eodem modo demonstrabitur parallelog. KV simile, & æquale parallelog. LF.

Cum igitur in parallelepipedo QSTV (*per demonstrata.*) tria plana KT, QS, KV æqualia sint, & similia tribus planis LG, EA LF in parallelepipedo AEFG, atque [*per 24. hujus.*] in parallelepipedo opposita plana sint æqualia, & similia: (*per def. 10. hujus.*) parallelepipedum QSTV = parallelepipedo AEFG. Quoniam vero (*per 29. hujus.*) parallelepipedum QSTV est æquale parallelepipedo QNYV. [*per axio. 1.*] parallelepipedum QNYV = parallelepipedo AEFG.

Parallelog. KT (*per 35. pri.*) = parallelog. KY, & parallelog. KT (*per constructionem*) = parallelog. LG; LG verò (*per hyp.*) = parallelog. CD: ergo parallelog. KY = parallelog. CD. Quare [*per 7. quinti.*)

Ut parallelog. CD, ad parallelog. DR; ita parallelog. KY ad parallelog. DR.

Sed [*per 25. hujus.*]

Ut parallelog. CD ad parallelog. DR; ita parallelepip. CHIK ad parallelepipedum KIZR.

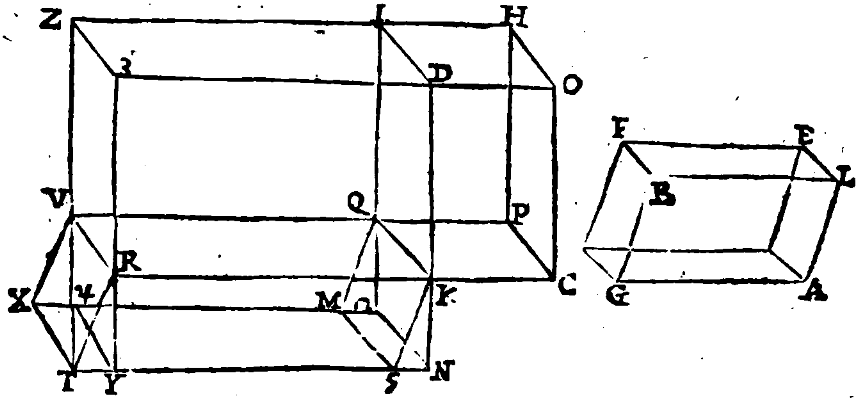
Pariterque (*per eamdem 25.*)

Ut parallelog. KY ad parallelog. DR; ita parallelepip. NQVY ad parallelepip. KIZR.

Ergo [*per 9. quinti.*]

Parallelepipedum CHIK = parallelepipedo QNYV.

Sed [*per demonstrata.*)
Parallelepip. QNYV = parallelepip. AEFG : ergo erit etiam
Parallelepip. CHIK = paralleled. AEFG. q. e. 1. d.



Demonstratio quando insistentes sunt basibus inclinatæ.

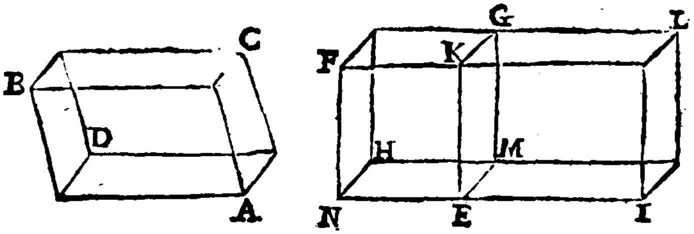
Supra æquales bases AB, CD in eadem altitudine intelligantur constituta parallelepipeda, quorum insistentes sint basibus AB, CD inclinatæ. Hoc posito [*per 29, vel 30. hujus.*) parallelepipeda cum insistentibus inclinatis æqualia sunt parallelepipedis cum insistentibus rectis basibus AB, CD: quare si) *per demonstrata in prima parte*] parallelepipeda, quorum insistentes sunt basibus rectæ, inter se sunt æqualia; etiam æqualia inter se erunt illa parallelepipeda, quorum insistentes sunt basibus inclinatæ. q. e. 2. d.

Propos. XXXII. *Theor.* XXVII.

Si parallelepipeda ABDC, EGFH supra bases AB, EF constituta, eamdem habuerint altitudinem.

Dico inter se esse ut bases.

Con-



Constructio.

AD rectam EK in angulo FNE (*per* 45. *pri.*) constituatur parallelogrammum IK = parallelog. AB.

Parallelepipedi EGFH, hoc est plana GF, GH, EH, producantur ad partes I, & L. Per punctum I (*per Scholium propos.* 15. *hujus.*) ducatur planum IL plano EG parallelum; eritque completum parallelepipedum EL.

Demonstratio.

QVia angulus KEI (*per constructionem.*) = ang. FNE (*per* 14. *primi.*) NEI erit linea recta, atque non solum FI erit unum parallelogrammum, verum etiam solidum ILFH erit unum parallelepipedum, cujus pars, nempè parallelepipedum ILGE, (*per* 37. *hujus.*) æquale erit parallelepipedo ABCD.

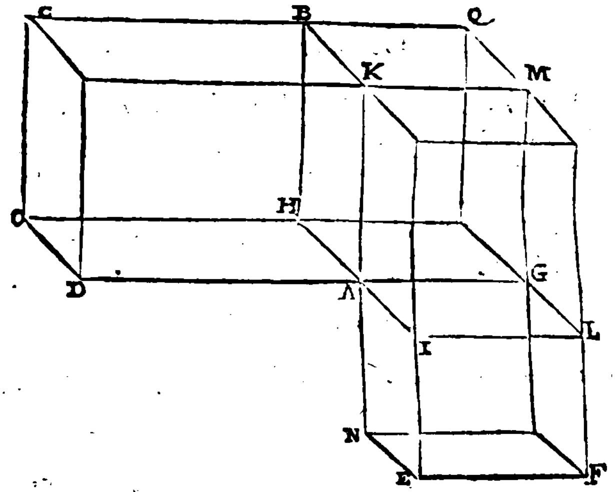
Quare (*per* 7. *quinti.*)
Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EGFH;
Ita parallelepi. ILGE ad parallelepi. EGFH;
Sed (*per* 25. *hujus.*)
Ut parallelepi. ILGE ad parallelepi. EGFH,
Ita basis IK ad basim EF.
Ergo (*per* 11. *quinti.*)
Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EGFH;
Ita basis IK ad basim EF;
Quia vero basis IK (*per constructionem.*) = basi AB: erit
Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EGFH;
Ita basis AB, ad basim EF. q. e. d.

Pro-

Propos. XXXIII. *Theor.* XXVIII.

Si fuerint ſimilia parallelepipeda ABCD, AEFG.

Dico inter ſe habere triplicatam rationem laterum homologorum DA; AG.



Conſtructio.

HOmologa letera omnium ſimilium parallelogramm. taliter diſponantur ut ſint in rectum conſtituta; quodquidem fieri poteſt, quia ob ſuppoſitam parallelogrammorum DK, NG ſimilitudinem ang. DAK = NAG: quare (*per corol.3.prop.15.pri.*) Si DA, eſt in rectum cum AG, etiam AK erit in rectum cum AN. Pariter quia dummodo tamen parallelogramma DK, GN ſupponantur poſita in eodem plano: ang. DAH = ang. GAI, quando recta eſt DAG, etiam recta erit HAI.

Poſita hac homologorum laterum diſpoſitione compleantur parallelepipeda ABQC, IKML.

De-

Demonstratio.

QVia parallelog. AO (*per hyp.*) simile parallelog. AL,
DA : AH : : AG : AI.
Alternando [*per 16. quinti.*]
DA : *AG* : : *AH* : *AI*.
Pariter ob similitudinem parallelog AB, AE.
HA : AK : : IA : AN :
Permutando [*per 16. quinti.*]
HA : IA : : AK : AN.
His manentibus parallelepipedum ABCD [*per 32. hujus*] ad parallelepipedum ABQG, ut basis DH ad basim HG;
Sed [*per 1. sexti.*)
Ut basis DH ad basim HG : ita DA, ad AG : ergo
parallelepi. ABCD ad parallelepi. ABQG,
ut DA, ad AG.
Ob eamdem rationem, erit
Parallelip. ABQG ad parallelip. IKML,
ut HA ad AI :
Pariterque erit.
Parallelepi. IKML ad parallelepi. AEGF;
ut KA ad AN.
Cum autem (*per hyp.*] sit
HA, ad AI, atque KA ad AN, ut DA AG,
Quatuor parallelepipeda ABCD: ABQG: IKML: AEGF,
inter se erunt in ratione DA, ad AG: quare
(*per def. 10. quinti.*)
Primum parallelepipedum ABCD, ad quartum sibi simile AEGF rationem habebit triplicatam homologorum laterum DA, AG.
q. e. d.

Corollarium.

EX hoc theoremate fit manifestum, quod positis quatuor rectis lineis continve proportionalibus, ut prima ad quartam, ita parallelepipedum supra primam ad sibi simile parallelepipedum supra secundam.

Pro-

Propos. XXXIV. *Probl.* XXIX.

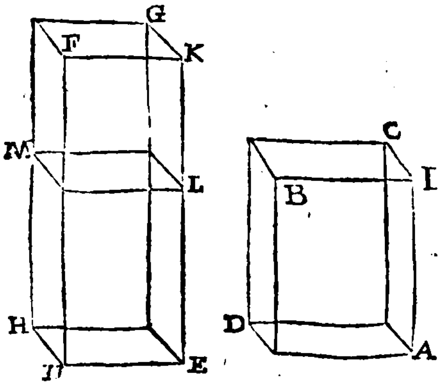
Si fuerint æqualia parallelepipeda ABCD, EFGH.

Dico bases AD, EH, & altitudines AI, EK reciprocari, & viciſſim.

Si parallelepipedorum ABCD, EFGH reciprocentur bases, & altitudines.

Dico parallelepipeda esse æqualia.

In hoc Theoremate hæc contingere possunt.



1. QVod parallalepipedorum insistentes sint basibus rectæ.
2. Quod sint basibus inclinatæ.
3. Quod sint æquales, vel inæquales.

Constructio quando insistentes sunt basibus rectæ.

QVando insistentes AI, EK &c. sunt basibus AD, EA rectæ, si EK major sit AI [*per 3. pri.*] notetur EL = AI, atque (*per Scol. Propos.* 15. *hujus.*] ducatur planum LM basi EH parallelum.

Demonstratio.

QVia [*per hyp.*) insistentes AI, EK sunt basibus AD, EH rectæ [*per def.* 4. *sexti*. erunt mensura altitudinum parallelepipedorum ABCD, EFGH.

Hoc posito, si altitudo AI sit = altitudini EK [*per conversam*

prop.

prop. 31. *hujus.*] erit etiam basis AD = basi EH: quare reciprocè, ut basis AD ad basim EH; ita altitudo EK ad altitudinem AI. q. e. 1. d.

Demonstratio, quando EK major quam AI.

QVia [*per constructionem.*] altitudo AI = altitudini EL, atque (*per hyp.*) parallelepi. ABCD = parallelepi. EFGH: (*per 7. quinti.*]

Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EHLM;
Ita parallelepi. EFGH ad idem parallelepi. EHLM;
Sed (*per 32. hujus.*)
Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EHLM;
Ita basis AD ad basim EH.

Eadem ratione, cum parallelepi. EFGH, EHLM sint in eadem altitudine,

(*per eamdem 31. hujus.*]
Ut parallelepi. EFGH, ad parallelepi. EHLM.
Ita basis KN, ad basim LN:
Quare (*per 11. quinti.*]
Ut basis AD, ad basim EH; ita basis KN ab basim LN:
Sed (*per 1. sexti.*]
Ut basis KN, ad basim LN; ita KE ad LE.
Et (*per constructionem.* LE = AI, ergo erit
Ut basis AD ad basim EH; ita reciprocè altitudo EK
ad altitudinem AI. q. e. 2. d.

Demonstratio, quando insistentes sunt basibus inclinatæ.

SUpra bases AD, EH intelligantur constituta parallelepipeda, quorum insistentes sint basibus rectæ in eadem altitudine cum illis parallelepipedis, quorum insistentes sunt basibus inclinatæ.

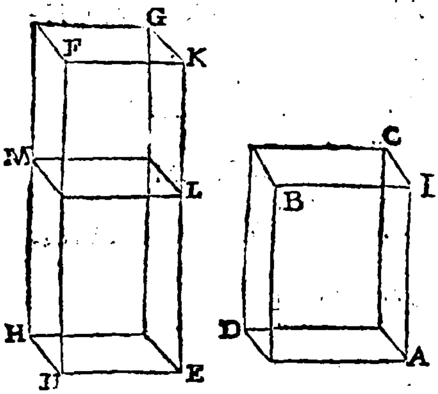
Hoc facto supra singulas bases AD, EH constituta erunt duo parallelepipeda æqui-altera, quorum unum insistentes habet basi rectas, alterum vero inclinatas.

Parallelepipeda supra communes bases AD, EH constituta [*per 29. vel 30. hujus.*] sunt æqualia.

Quia

Quia vero (*per demonstrata.*) parallepipeda æqualia cum insistentibus basibus rectis, bases, & altitudines habent reciprocas, etiam æqualia parallelepipeda cum insistentibus basibus inclinatis, habebunt bases, & altitudines reciprocas. q. e. d.

Demonstratio alterius partis.



Est (*per hyp.*) ut basis AD ad basim EH; ita altitudo EK ad altitudinem AI, siue LE.

Sed (*per 1. sexti.*)

Ut EK ad LE, ita basis KN ad basim LN.

Ergo (*per 11. quinti.*)

Ut AD ad EH; ita KN ad LN

Sed (*per 25. hujus.*)

Ut KN ad LN; ita parallelep. EGFH ad parallelep. EHML,

Ergo (*per 11. quinti.*

Ut AD ad EH; ita parallelepi. EGFH ad parallelepi. EHML.

Cum autem (*per 32. hujus.*)

Ut AD ad EH; ita parallelepi. ABCD, ad parallelepi. EHML:

Erit (*per 11. quinti.*)

Ut parallelepi. ABCD ad parallelepi. EHML;

Ita parallelepi. EGFH ad idem parallelepi. EHML.

Quare (*per 9. quinti.*)

Parallelepi. ABCD = parallelepipedo EGFH. q. e. 2. d.

Propos. XXXV. *Theor.* XXX.

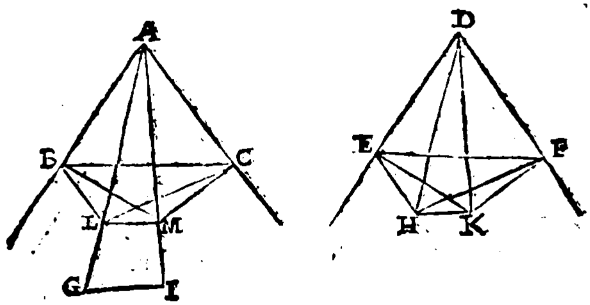
Si duo anguli plani BAC, EDF fuerint æquales, eorumque verticibus A, & D in sublimi insistant rectæ lineæ AG, DH, quarum AG cum lineis primo positis AB, AC contineat angulos BAG, GAC singulos singulis angulis EDH, HDF æqua-

æquales: atque in lineis AG, DH accepta fuerint quæcumque puncta G, & H, a quibus ad plana rectarum BAC, EDF ductæ sint rectæ GI, HK additis lineis IA, KD.

Dico angulum GAI = angulo HDK.

Constructio.

SI AG major sit quam DH, ex AG [*per 3. primi.*] auferatur AL = DH. A puncto L in plano trianguli GAI [*per 31. primi.*] ducatur LM parallela GI. Denuo a punctis M, & K ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares ducantur MB, MC, KE KF, addanturque rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF.



Demonstratio.

QVia (*per constructionem.*) LM parallela GI, atque GI recta ad planum per BA, AC ductum, etiam LM [*per 8. hujus.*] eidem plano recta erit: ideoque (*per def. 3. hujus.*) ang. LMA rectus.

Hoc posito [*per 47. primi.*]

$$\text{quad. } AL = \left.\begin{matrix}\text{quad. } AM\\ \text{quad. } ML\end{matrix}\right\} \quad \text{quad. } AM = \left.\begin{matrix}\text{quad. } AC\\ \text{quad. } CM\end{matrix}\right\}$$

Ergo (*per axio. 1.*)

$$\text{quad. } AL = \left.\begin{matrix}\text{quad. } AC\\ \text{quad. } CM\\ \text{quad. } ML\end{matrix}\right\}$$

Sed

Sed [per 47. pri.)

$\left.\begin{array}{l}\text{quad. CM}\\ \text{quad. ML}\end{array}\right\} = \text{quad. CL}$: ergo quad. $AL = \left.\begin{array}{l}\text{quad. } AC\\ \text{quad. CL}\end{array}\right\}$

Quare [per 48. pri.)

Angulus ACL est rectus.

Pariter (per 47. primi.)

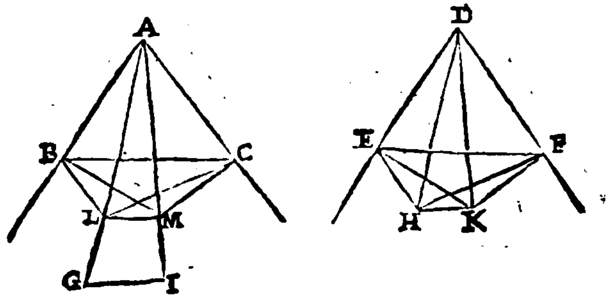
quad. $AM = \left.\begin{array}{l}\text{quad. } AB\\ \text{quad. } BM\end{array}\right\}$: quare

quad. $AL = \left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. BM}\\ \text{quad. ML}\end{array}\right\}$;& [per 47. pri.) q. $\left.\begin{array}{l}BM\\ ML\end{array}\right\} =$ quad. BL.

Ergo quad. $AL = \left.\begin{array}{l}\text{quad. } AB\\ \text{quad. } BL\end{array}\right\}$ ideoque [per 48. pri.]

Angulus ABL est rectus.

Eadem prorsus ratione demonstratur angulos DFH, DEH esse rectos.



His demonstratis ang. $\left.\begin{array}{l}ABL\\ LAB\end{array}\right\}$ (per constructionem, & per demonstrata) sunt singuli æquales singulis angulis $\left.\begin{array}{l}DEH\\ HDE\end{array}\right\}$ latusque AL = lateri DH: quare (per 26. primi.] AB = DE, & BL = EH.

Eadem ratione demonstratur AC = D.F, & CL = FH.

In triangulis $\left.\begin{array}{l}BAC\\ EDF\end{array}\right\}$ [per demonstrata] latera BA, AC singula singulis æqualia lateribus ED, DF, & ang. BAC = [per hyp.] an-

angulo EDF : ergo (*per 4. pri.*) BC = EF, atque ang. *ABC* = ang. DEF, & ang. *ACB* = ang. DFE.

Sunt autem (*per constructionem.*) ang. $\left.\begin{matrix}ABM\\ACM\end{matrix}\right\} =$ ang. $\left.\begin{matrix}DEK\\DFK\end{matrix}\right\}$ demptis æqualibus remanebit ang. CBM = ang. FEK, & ang. BCM = ang. EFK.

Cum autem [*per demonstrata.*] sit BC = EF:

(*per 26. primi.*)

Erit BM = EK, atque CM = FK.

In triangulis $\left.\begin{matrix}ACM\\DFK\end{matrix}\right\}$ [*per demonstrata.*) latera AC, CM singula singulis æqualia lateribus DF, FK, atque ang. ACM = (*per constructionem.*) ang. DFK : quare (*per 4. pri.*] AM = DK.

Cum autem (*per demonstrata.*] sit BL = EH [*per Schol. prop. 46. pri.*] quad. BL = quad. EH.

Sed [*per 47. pri.*)

$$\text{quad. BL} = \left.\begin{matrix}BM\\ML\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}\text{quad. EK}\\\text{quad. KH}\end{matrix}.$$

$$\text{Erunt } \left.\begin{matrix}\text{quad. BM}\\\text{quad. ML}\end{matrix}\right\} \ \&\ \text{q. EH} = \begin{matrix}EK\\KH\end{matrix}.$$

ablatis æqualibus quadratis rectarum æqualium BM, EK: remanebit quad. LM = quad. HK: ideoque (*per Schol prop. 46. pri.*) LM = HK.

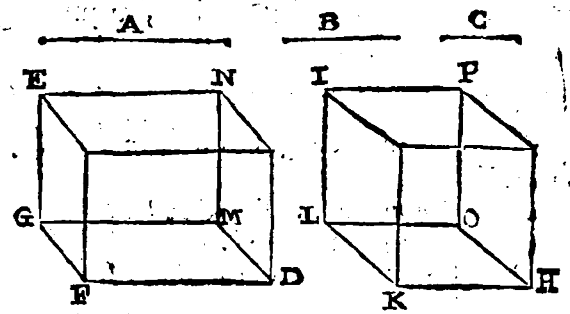
Demum in triang. $\left.\begin{matrix}AML\\DKH\end{matrix}\right\}$ [*per constructionem, & per demonstrata.*] latera LA, AM singula singulis æqualia lateribus HD, DK, basisque LM = basi HK: ergo [*per 8. pri.*] ang. LAM = ang. HDK. q. e. d.

Propos. XXXVI. Theor. XXXI.

Si tres rectæ lineæ A, B, C, proportionales fuerint.

Dico parallelepipedum a tribus datis lineis A, B, C descriptum æquale esse parallelepipedo æquilatero a media B descripto priori parallelepipedo æquiangulo.

 Con-



Constructio.

EX tribus quibuscumque angulis planis, FGM, FGE, MGE constituatur angulus solidus G, sitque GM, = A: GE = B; & GF, = C. Compleantur tria parallelogramma FM, FE, ME, atque totum parallelepipedum DNEF.

Pariter [*per* 26. *hujus*.] fiat solidus angulus L = ang. solido G, sitque

ang. planus KLO = ang. FGM,
ang. planus KLI = ang. FGE,
ang. planus OLI = ang. MGE,

tres rectæ LO, LK, LI = ipsi B. Compleantur parallelogramma KO, KI, OI, atque totum parallelepipedum HPIK, quod a media proportionali B erit efformatum.

Demonstratio.

QVia (*per constructionem*.) in parallelogrammis FM, *K*O sunt æquales anguli FGM, *K*LO, insuperque GM : LO : : LK : GF (*per* 14. *sexti*.) erit parallelog. FM = parallelog. *K*O.

Pariter quia (*per construct*.) angulus solidus L æqualis est solido ang. G, si punctum L intelligatur in G, angulus planus *K*LI congruet cum angulo plano FGE, quia dicti anguli facti sunt æquales: quare recta LI cadet supra GE.

Quia vero [*per construct*.] LI, & GE singulæ sunt æquales ipsi B, & inter se æquales erunt: ergo punctum I cadet in E. Quamobrem si ex E ad planum basibus FM, KO commune [*per*

11. *bujus*.] recta ducatur, hæc erit communis parallelepipedorum HI, DE altitudo.

Cum autem, & bases FM, KO demonstratæ sint, & ipsæ æquales: erit; [*per* 31. *bujus*.) parallelepi. DE = parallelepi. HI. q. e. d.

Propos. XXXVII. *Theor.* XXXII.

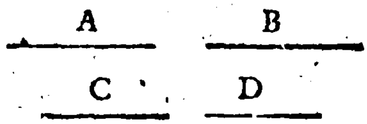
Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D fuerint proportionales.

Dico similia parallepipeda super has lineas descripta esse proportionalia, & vicissim

Si similia parallepipeda super rectas lineas A, B, C, D descripta, fuerint proportionalia.

Dico rectas A, B, C, D esse proportionales.

Demonstratio primæ partis.



PArallelepipedum supra A ad sibi simile parallelepipedum supra B (*per* 33. *bujus*.) rationem habet triplicatam A, ad B. Eadem ratione parallelepi. supra C ad sibi simile supra *D*, est in triplicata ratione C ad D: sed [*per* 35. *quinti*.) ratio triplicata A ad B = triplicatæ C ad D: ergo ut parallelepip. supra A, ad prallelepi. simile supra B; ita parallelepi. supra C, ad parallelepi. simile supra D. q. e. 1. d.

Demonstratio secundæ partis.

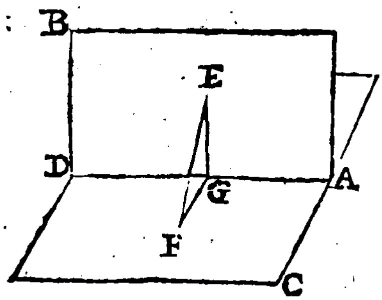
REcta A ad rectam B [*per* 33. *bujus*.) rationem habet subtriplicatã parallelepipedi supra A ad parallelepipedum supra *B*. Pariter recta C ad rectam D (*per eamdem* 33.) rationem habet subtriplicatam parallelepipedi supra C ad parallelepipedum supra D, sed (*per* 35. *quinti*.) subtriplicata parallelepi. supra A ad parallelepip. supra B, eadem est ac subtriplicata parallepi. supra C, ad parallelepi. supra D: ergò eadem ratio A ad B, & C ad D. q. e. 2. d.

Propos. XXXVIII. *Theor.* XXXIII.

Si planum BA sit plano DC rectum, & a puncto E in plano BA constituto ducta sit EG plano DC recta.

Dico EG cadere in communem planorum sectionem AD.

Constructio, & Demonstratio.



SI ex puncto E quæ ducitur plano DC recta extra communem sectionem AD cadere potest, cadat in F; à puncto E ad cõmunem sectionem DA perpendicularis ducatur EG: addatur FG.

Quia [*per hyp.*) planum BA rectum est plano DC, atque EG facta est perpendicularis communi sectioni DA: (*per def.* 4. *hujus.*] EG recta erit plauo DC: quare (*per def.* 3. *hujus.*) ang. EGF erit rectus. Cum autem, & linea EF supponatur recta plano DC (*per eamdem def.* 3.) ang. EFG rectus erit: quare in triangulo EGF erunt duo anguli recti; (*quod est contra propos.* 17. *pri.*) ergo EF non est recta plano DC. Hoc absurdum demonstrari potest de quacumque alia linea extra communem sectionem DA cadente: igitur linea quæ ex E recta ducitur plano DC in communem planorum sectionem DA cadet. q. e. d.

Propos. XXXIX. *Theor.* XXXIV.

Si parallelepipedi *AB* latera oppositorum planorum BD, C*A* bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, P, Q, N, O; per sectiones autem

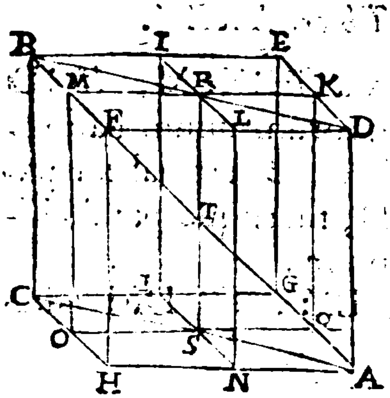
tem ducta sint plana IN, KO, quorum communis sectio sit RS: ducta diametro AB.

Dico rectas AB, & RS, se mutuo bifariam secare in T.

Constructio.

Notentur rectæ SC, SA, RB, RD.

Demonstratio.



In triangulis $\left.\begin{matrix} SQA \\ SOC \end{matrix}\right\}$ (*per constructionem*) latera AQ, QS sunt singula singulis æqualia lateribus CO, OS, & ang. AQS (*per 29. pri.*) = ang. COS: quare (*per 4. pri.*) SA = SC, & ang. ASQ = ang. CSO: addito communi ang. ASO; erunt ang. $\left.\begin{matrix} ASQ \\ ASO \end{matrix}\right\}$ = ang. $\left.\begin{matrix} ASO \\ CSO \end{matrix}\right\}$ sed ang. $\left.\begin{matrix} ASQ \\ ASO \end{matrix}\right\}$ (*per 13. pri.*) = duobus rectis: ergo & ang. $\left.\begin{matrix} ASO \\ CSO \end{matrix}\right\}$ duobus rectis æquales: ideoque (*per 14. pri.*) ASC erit linea recta. Eadem ratione demonstrabitur DR, RB rectam lineam componere.

Rursus quia utraque rectarum AD, BC (*per 34. pri.*) parallela, & æqualis ipsi FH: (*per 9. hujus*) erit AD parallela, & æqualis ipsi BC: quare (*per 33. pri.*) AC æqualis, & parallela ipsi DB atque medietas AS = medietati BR.

Denuo quia (*per demonstrata*) AC est parallela DB (*per def. 39. pri.*) erunt in eodem plano. Sont vero in plano rectarum AC, DB (*per 7. hujus.*) etiam AB, RS; quare cum non sint parallelæ, se secabunt; se igitur secent in T.

In triangulis $\left.\begin{matrix}AST\\BRT\end{matrix}\right\}$ (*per 29. & per 15. pri.*) anguli AST, ATS sunt singuli singulis æquales angulis BRT, BTR; atque (*per demonstrata*) AS = BR: ergo (*per 26. pri.*) erit non solum AT = BT, verum etiam ST = RT. q. e. d.

Corollarium.

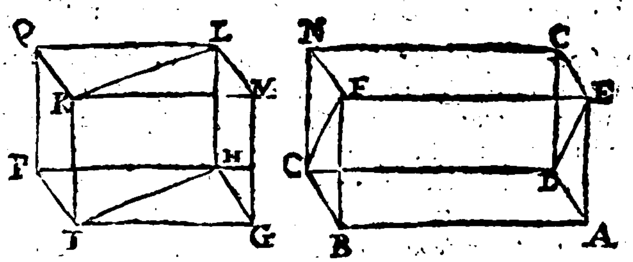
IN omni parallelepipedo diametri, sese mutuo bifariam secant in uno puncto, ut in T, in quo diameter AB bifariam dividitur.

Propos. XXXX. Theor. XXXV.

Si fueriut duo prismata GHIKLM, ABCD EF in eadem altudine, quorum unum basim habeat triangulum GHI, aliud vero habeat parallelogrammum ABCD, fueritque parallelogrammum trianguli duplum.

Dico prismata GHIKLM, ABCDEF esse æqualia.

Constructio.



PRoductis prismatum planis efformentur parallelepipeda AN, GQ, quæ eamdem cum prismatis habeant altitudinem: ideo que sint æquè alta.

De-

Demonstratio.

QVia [*per* 34. *primi*.] parallelog. GP est duplum trianguli GHI, atque [*per hyp*.] parallelogrammum AC sit ejusdem trianguli GHI duplū: [*per axio*.6.] erit parallelog. GP = parallelog. AC: quare parallelepipeda GQ, AN super æquales bases GP, AC, & in eadem altitudine erunt constituta: ideoque (*per* 31. *hujus*) parallelepi. GQ = parallelepipedo AN; sed (*per* 32. *hujus*.] prismata GHIKLM, ABCDEF sunt medietates parallelepipedorum GQ, AN: ergo dicta prismata erunt æqualia. q. e. d.

Corollarium.

EX hoc Theoremate colligitur, quod illa prismata, in quibus unum ex planis oppositis accipitur tamquam basis, esse ad invicem ut bases, dummodo eamdem habeant altitudinem: quia si prismata æquè alta habeant bases triangulares, sunt ut bases. Hujus veritatis ratio est manifesta, nam completis parallelepipedis, hæc parallelepipeda erunt in eadem altitudine: ideoque (*per* 32. *hujus*] inter se erunt ut bases; sed prismata cum basibus triangularibus sunt medietates parallelepipedorum, atque bases triangulares medietates basium parallelepipedorum: quare prismata æquè alta, & triangulares bases habentia, inter se erunt, ut bases.

Quod demonstratum est de prismatis supra triangulares bases constitutis, valet etiam circa prismata polygonas bases habentia; quia bases polygonæ in triangula resolvi possunt; ideoque omnia prismata æqualis altitudinis, haud secus ac parallelepipeda inter se erunt ut bases.

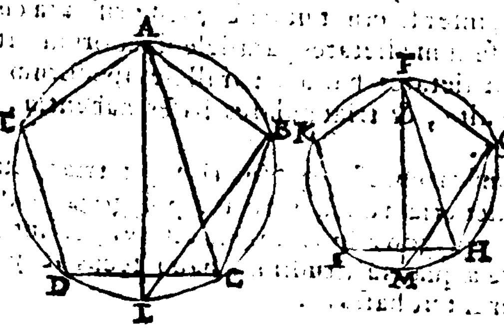
Elementi undecimi finis.

EUCLIDIS ELEMENTUM DUODECIMUM, ET SOLIDORUM ELEMENTUM SECUNDUM.

Propos. I. Theor. I.

Si polygona similia ABCDE, FGHIK in circulis ADC, FIH fuerint descripta.

Dico polygonum ABCDE ad polygonum FGHIK habere illam rationem, quam habet quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM.



Constructio.

Ductis circulorum diametris AL, FM, duobus similium polygonorum æqualibus angulis ABC, FGH, subtendantur rectæ AC, FH, addanturque rectæ BL, GM.

Demonstratio.

QVoniam (per suppositam polygonorum similitudinem)
AB : BC :: FG : GH, & ang. ABC = ang. FGH;
erit (per 6. sexti.) triang. ABC æquiangulum triangulo FGH:
igitur ang. ACB = ang. FHG :

Sed (per 21. tertij.)
ang. ACB = ang. ALB: ob eandem causam ang. FHG = ang. FMG:
quare (per axio. 1.) ang. ALB = ang. FMG.

Cum igitur in triangulis $\left.\begin{matrix}ABL\\FGM\end{matrix}\right\}$ (per demonst.) ang. ALB
= ang. FMG, atque (per 31. tertij.) ang. ABL = ang. FGM:
(per corol. 2. prop. 32. pri.) ang. BAL = ang. GFM quamobrem
(per 4. sexti.) triangulum ABL simile triangulo FGM : ergo

LA : AB :: MF : FG,

Permutando (per 16. quinti.)

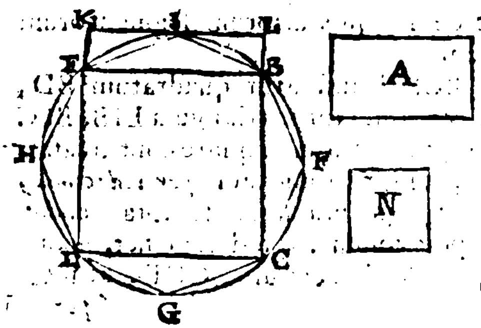
LA : MF :: AB : FG :

Igitur (per 22. sexti.)

ut quad. diametri AL ad quad. diametri FM,
ita poligonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, q. e. d.

LEMMA.

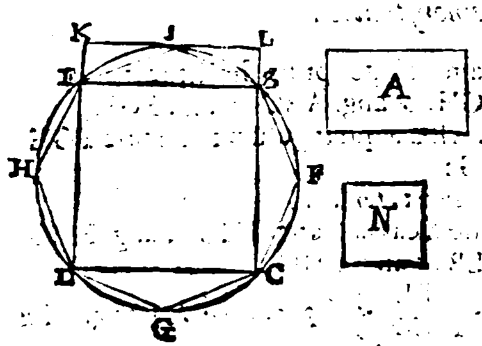
DAta magnitudine A minore circulo BCDE: in dato circulo describere polygonum regulare, quod sit majus quam A.



Constructio.

SIt magnitudo N defectus magnitudinis A, a circulo BCDE, hoc est A + N = circulo BCDE,

In dato circulo (per 6. quarti.) describatur quadra-



dratum BCDE, quod si majus fuerit quam A factum erit q. e. f. Si postea idem quadratum BCDE minus fuerit magnitodine A (per 30. tertii.] arcus EB, BC &c. bifariam dividantur in I, F, G, H, ductisque rectis EI, IB &c. constitutum est octogonum IBF &c. Si dictum octogonum fuerit etiam minus quam A, iterum bifariam dividantur arcus octogoni, ducanturque subtensæ illis arcubus; quo facto compositum erit polygonum regulare à sexdecim lateribus comprehensum.

Hujusmodi operatio continvetur quousque omnia circuli segmenta EI, IB &c. simul acepta minora sint quam N.

Dico polygonum EIBF &c. circulo BCDE inscriptum majus esse magnitudine A. Per punctum I, idem de reliquis intelligendum, ducatur tangens KL, producantur rectæ CB, DE in K, & L.

Demonstratio.

Quia quadratum BD circulo inscriptum est medietas quadrati circa circulum descripti; erit quadratum BD majus dimidio circulo BCDE. Pariter quia triangulum EIB [per 41. pri.] est medietas parallelogrammi BK erit triangulum EIB majus medietate segmenti BIE: hoc de reliquis aliorum segmentorum triangulis venit intelligendum.

Hoc manente si a circulo BCDE auferatur quadratum BD, a segmentis vero EIB, BFC &c. auferantur triangula EIB, BFC &c. id, quod aufertur, erit supra dimidium; quare continuata tali divisione, auferendo semper supra dimidium per 1. decimi.) tandem, quæ remanent circuli segmenta simul sumpta debent esse minora quam N.; quare polygonum, quod remanet, majus erit quam A, quia (per hyp.] A + N = circulo BCDE, atque

(per

(*per axio.* 19.) polygonum, atque segmenta ejdem circulo sunt æqualia, q. e. f.

SCHOLIUM.

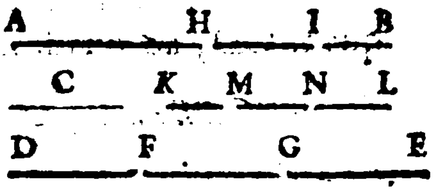
Quia in hoc loco, & in sequentibus tyrones possent dubitare, an scilicet, quando ex majore magnitudine detrahitur supra dimidium, & ex residuo pariter aufertur supra dimidium, tandem quod restat in majore magnitudine debeat esse minus quacumque data quantitate; ideoque sequens theorema, quod est primum Lib. 10. Euclidis, taliter demonstratur.

Theorema I. Libri X. Elementorum Euclidis.

Si fuerint duæ magnitudines AB major, & C minor.

Dico si ex AB auferatur supra dimidium AH: pariterque ex residuo HB dematur plusquam dimidium HI: hocque semper fiat: quod restat IB tandem minus erit quam C.

Constructio.



Fiat DE multiplex ipsius C proximè major quam AB. Dividatur DE in partes æquales ipsi C, sintque DF, FG, GE.

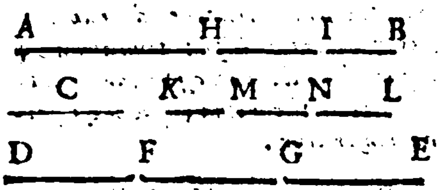
Quot sunt partes in DE æquales ipsi C, tot fiant divisiones in AB detrahendo supra dimidium ex tota AB, & ex residuo HB, ut tot sint partes numero æquales in AB, quot sunt in *DE*.

Denuo assumatur *K*L tam multiplex ipsius IB, quam multiplex est DE ipsius C. Si KL resoluatur in partes KM, MN, NL æquales IB: erunt in KL tot partes æquales ipsi IB, quot sunt in DE æquales ipsi C.

De-

Demonstratio.

QUia (*per hyp.*) AH major quam HB, etiam dimidium AH majus dimidio HB: sed (*per constructionem.*) dimidium HB majus quam IB: ergo [*per axio.* 21.] dimidium AH, & multo magis AH, major quam IB, seu KM.



Cum autem (*per hyp.*) HI major sit quam IB, & (*per demonstrata*) AH major quam KM: erit AI major KN: additis æqualibus IB, NL: [*per axio.* 4.] AB major quam KL: sed (*per construct.*) DE major quam AB: ergo DE major KL.

Quia (*per 15. quinti.*) DE: C:: KL: IB: (& *per demonstrata*) & DE major quam KL (*per 14. quinti.*) etiam C erit major quam IB. q.e.d.

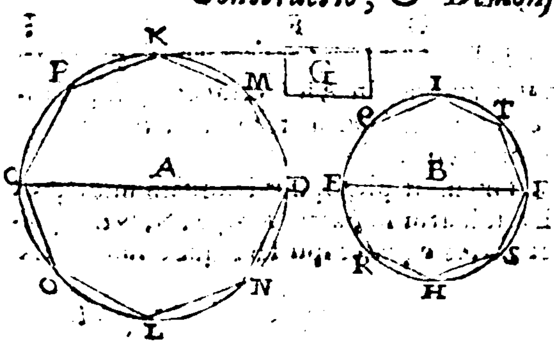
Si ex majore magnitudine auferatur sola medietas; & ex residuo pariter ablata sit medietas, hoc idem demonstrabitur.

Propos. II. Theor. II.

Si fuerint circuli A, & B, quorum diametri CD, EF.

Dico circulum A ad circulum B esse, ut quad. CD, ad quad. EF.

Constructio, & Demonstratio.



SI circulus A ad circulum B non habet illam rationem, quam obtinet quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF; erit verum dicere, quod circulus A ad cir-

circulum B majorem, vel minorem habeat rationem quam quad. CD ad quad. EF: hoc autem non esse possibile, ita demonstratur.

Si circulus A ad circulum B majorem habeat, rationem, quam sit ratio quad. CD, ad quad. EF; erit assignabilis magnitudo G, quæ ad circulū B rationem habeat quam quad. CD ad quad. EF. Hoc posito (*per* 10. *quinti*.] G erit minor quam circulus A.

In circulo A (*per Lemma* 1.) describatur polygonum regulare KMD &c. quod sit majus magnitudine G, cui simile describatur in circulo B, nempe polygonum ITF &c.

Quia [*per* 1. *bujus*.]

Polyg. A, ad polig. B; ut quad. CD, ad quad. EF;

Atque (*per constructionem.*)

Magnitudo G, ad circulum B; ut quad. CD, ad quad. EF;

Erit (*per* 11. *quinti*.)

Polyg. A ad polig. B, ut magnitudo G ad circulum B.

Sed (*per constructionem.*)

Polyg. A majus quam magnitudo G:

Ergo (*per* 14. *quinti.*)

Polyg. B majus quam circulus B: quod fieri nequit, quia polyg. B est pars circuli B: quare circulus A ad circulum *B* nequit habere majorem rationem quam sit ratio quadrati diametri CD ad quadratum diametri EF. q. e. d.

Si verò circulus A ad circulum B minorem obtineat rationem, quam quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF:

erit convertendo (*per* 26.*quinti*.)

Major ratio circuli B ad circulū A, quam quad. EF, ad quad. CD. Si ergo accipiatur magnitudo G, quæ ad circulum A sit, ut quad. EF, ad quad. CD: (*per* 10.*quinti*.) erit G minor quam circulus B.

Hoc stante in circulo B [*per Lemma* 1.) describatur polygonum regulare ITF &c. majus magnitudine C. Aliud simile polygonum inscribatur circulo A, & sit polygonum KMD &c.

Quia [*per constructionem.*}

Ut magnitudo G ad circulum A; ita quad. EF ad quad. CD;

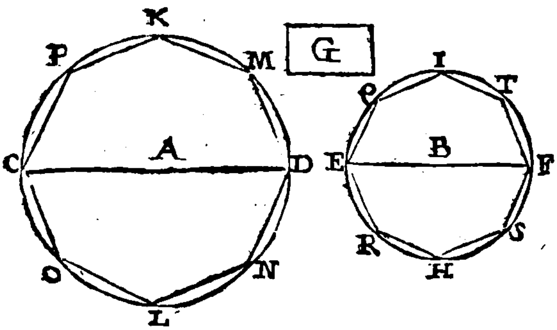
Atque (*per* 1. *bujus*.] sit

Ut quad. EF ad quad. CD, ita polyg. ITF &c. ad polyg. KMD &c;

Erit (*per* 11. *quinti*.]

Magnitudo G ad circulum A, ut polyg. B ad polyg. A.

Cum autem [*per constrnctionem*] G minor sit quam p...



(*per* 14. *quinti*.) etiam circulus A minor polyg. A: quod fieri nequit, quia polyg. eſt pars circuli.

Si ergo circulus A ad circulum B rationem habere nequit majorem, vel minorem illa, quam habet quadratum diamerri CD ad quadratum diametri EF, verum erit dicere, circulum A ad circulum B illam habere rationem, quam quadratum diametri circuli A ad quadratum diametri circuli B. q. e. 2. d.

Corollarium I.

EX hoc theoremate colligitur, circulos inter ſe duplicatam habere rationem diametrorum; quia diametrorum quadrata inter ſe [*per* 20. *ſexti*] duplicatam obtinent rationem laterum homologorum, hoc eſt eorumdem diametrorum: quare ratio circuli ad circulum erit duplicata diametri ad diametrum.

Corollarium II.

CIrculi inter ſe ſunt in ratione ſimilium polygonorum in circulis deſcriptorum; quia tam circulus ad circulum, quam polygonum ad ſimile polygonum rationem obtinent, quam quadrata diametrorum.

Corollarium III.

SEmicirculi, aliæque circulorum ſimiles partes inter ſe ſunt in ratione duplicata diametrorum, ſemidiametrorum, aliarumque partium aliquotarum ſimilium ipſarum diametrorum; & hoc quia (*per* 15. *quinti*) partes, cum pariter multiplicibus, in eadem ſunt ratione.

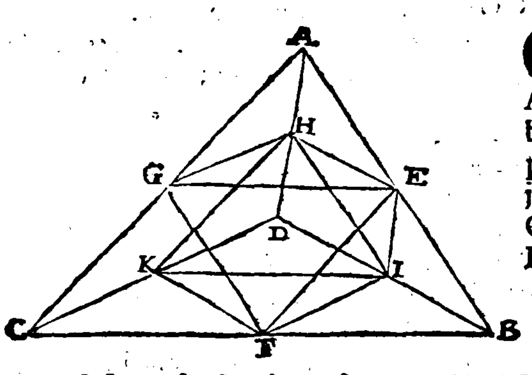
Pro-

Propos. III. Theor. III.

Si pyramis ABCD basim habeat triangulum ABC.

Dico talem pyramidem partiri in duas pyramides triangulares bases habentes inter se similes, & æquales, atque similes toti pyramidi: & in duo prismata pariter inter se æqualia medietate totius pyramidis ABCD majora.

Constructio.



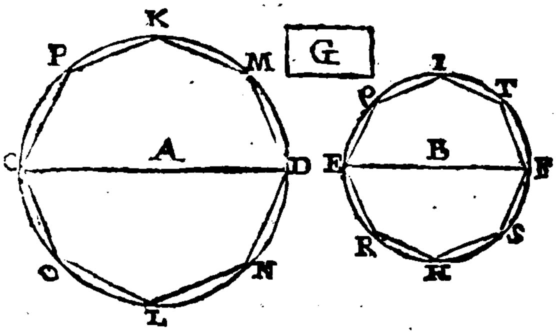
OMnia pyramidis latera AB, AC, AD &c. (*per* 10. *pri.*) bifariam dividantur in punctis E, F, G, H, I, K, junganturq; rectæ GF, GF, EF, HI, HK, KI, HG, HE, FK, FI, EI.

Hac constructione posita, si tota pyramis ABCD intelligatur secta a planis triangulorum HIK, EHG, EIF, atque a plano quadrilateri GHIF.

Dico datam pyramidem ABCD fore divisam in duas pyramides HKID, AGEH inter se æquales, & similes, atque similes toti pyramidi ABCD; & in duo prismata BEFIHK, CFEGHK, inter se æqualia, quæ simul accepta superant dimidium pyramidis ABCD.

Demonstratio primæ partis, videlicet quod pyramides AGEH, HKID sint similes.

QVia (*per construct.*) rectæ DA, DB, sunt bifariam sectæ in punctis H, & I: unde (*per* 2. *sexti.*) HI parallela ipsi AB: eadem ratione. KI



KI parallela CB.
KH parallela CA.
EG parallela BC.
EF parallela AC.
FG parallela AB.
EH parallela BD.
HG parallela DC.
KF parallela BD.
FI parallela CD.

Vlterius (*per 9. undecimi*) FG parallela HI, atque GH parallela FI: quamobrem (*per def. 40. pri.*) quadrilatera *A*I: HB: DE: BG: HC: CI: & GI: erunt parallelogramma.

Duæ rectæ HE, HG [*per demonstrata.*] parallelæ sunt rectis *D*B, DC: quare (*per 10. undecimi*) ang. EHG = ang. BDC: eadem ratione

ang. HEG = ang. DBC, &
ang. HGE = ang. DCB.

Quare triangula GHE, CDB sunt æquiangula: ideoque (*per 4. sexti.*) similia. Ob eamdem causam

triang. *A*HE simile triang. *A*DB.
triang. *A*HG simile triang. *A*DC.
triang. *A*EG simile triang. *A*BC.

Ergo (*per def. 9. undec.*) pyramis *A*EGH similis pyramidi *A*BCD.

Pariter quia [*per demonstrata*] HI parallela *A*B, & HK parallela *A*C (*per 10. undec.*] ang. KHI = ang. C*AB*.

ob eamdem causam { ang. HIK = ang. *A*BC:
ang. HKI = ang. *ACB*:

Quare (*per 4. sexti*)

triang. HIK simile triang. *ABC*.
triang. D*HI* simile triang. D*AB*.
triang. *DI*K simile triang. DBC.
triang. DK*H* simile triang. D*A*C.

Ergo pyramis HIKD (*per def. 9. undec.* similis pyramidi *ABCD*: quare (*per 21. sexti*) pyramis *HI*KD similis pyramidi *A*EGH. q. e. d.

De-

Demonstratio secundæ partis, nempe quod pyramis HIKD = sit pyramidi AEGH.

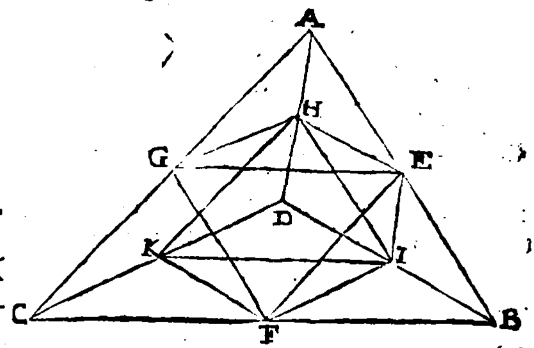
(per 38. primi.) { triang. AGH = triang. HKD
triang. AEH = triang. HID.
triang. AGE = triang. HKI.
triang. HGE = triang. DKI. }

quare (*per def. 10. undec.*) pyramis AEGH = pyramidi HIKD. q. e. 2. d.

Demonstratio III. partis, videlicet quod solida EBFHIK, EFCGHK sint duo prismata æqualia.

Quod sint prismata, ita demonstratur.

IN solido EBFHIK opposita plana hoc est triangula BEF, IHK [*per demonstrata*] sunt similia; pariter quia (*per 34. pri.*) BE =: IH: BF = IK: EF = HK; dicta triangula BEF, IHK similia erunt, & æqualia. Insuper quia (*per demonstrata*) horum triangulorum latera sunt singula singulis parallela: (*per 15. undec.*) talium triangulorum plana erunt parallela.



Ulterius quia (*per demonstrata*) plana EI, BK, EK sunt paparallelogramma [*per def. 13. undec.*] solidum EBFHIK ab his planis comprehensum; erit prisma.

In solido EFCGHK plana opposita, nempe triangula EHG, FKC [*per demonstrata*] sunt similia: rursus sunt æqualia, quia (*per 34. pri.*) EH = FK: HG = KC: EG = FC: insuper quia (*per demonstrata*) latera trianguli EHG singula sunt singulis lateribus trianguli FKC parallela [*per 15. undec.*] horum triangulorum plana erunt etiam parallela: cum autem reliqua plana

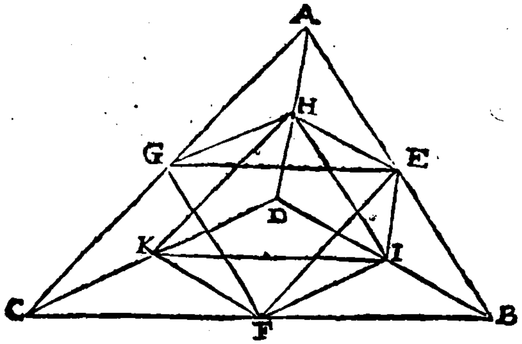
EK, EC, HC hoc solidum comprehendentia (*per demonstrata*) sint parallelogramma: (*per 13. undec:*) solidum EFCGHK erit prisma.

Quod postea dicta prismata sint æqualia demonstratur, quia ambo sunt in eadem altitudine, unumque habet basim triangulum EBF, alterum vero parallelogrammum EC [*per 41. pri.*] duplum trianguli EBF: quare [*per 40. undecimi.*] hæc prismata erunt æqualia. q. e. 3. d.

Demonstratio IV. partis, nempe quod dicta prismata sint dimidio totius pyramidis majora.

PRisma EBFHIK (*per axio. 9.*) majus est pyramide EBFI; sed pyramis EBFI [*per demonstrata*] = pyramidi HIKD, ergo etiam prisma EBFHIK maius pyramide HIKD.

Insuper, quia [*per demonstrata*) pyramis HIKD = pyramidi AEGH, atque prisma EBFHIK = prismati EFCGHK: erit etiam prisma EFCGHK majus quam pyramis AEGH: quare duo prismata erunt duobus pyramidibus majora. Quia vero tota pyramis ABCD in dictas duas pyramides, & in dicta duo prismata fuit divisa: duo prismata erunt dimidio totius pyramidis majora. q. e. 4. d.



LEMMA II.

SI pyramidis *ABCD* omnia latera a base *ABC*, ad verticem D ducta fuerint bifariam divisa in punctis *H*, *I*, K.

Dico planum per puncta *H*, *I*, K ductum bifariam dividere altitudinem pyramidis *ABCD*.

De-

Demonstratio.

REctæ *HI*, HK [*per 2.sexti*) parallelæ sunt rectis AB, AC: quare [*per 15. undec.*] planum per *HI*, *HK* ductum erit parallelum plano per AB, AC ducto: ideoque [*per 17. undec.*] omnes rectæ a pyramidis vertice D ad basim ABC ductæ, erunt proportionaliter sectæ; sed DB [*per construct.*] a plano *HI*K est bifariam divisa in I: ergo etiam altitudo pyramidis ab eodem plano *HI*K erit bifariam divisa. q. e. d.

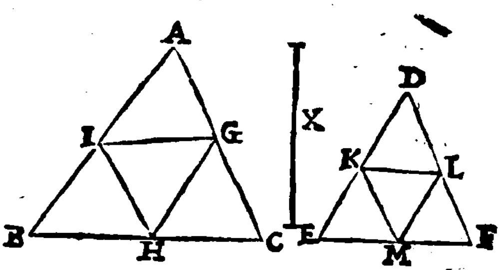
Propos. IV. Theor. IV.

Si duæ pyramides eamdem altitudinem, & pro basibus triangula habẽtes in duas pyramides æquales, & similes toti pyramidi, & in duo prismata æqualia dividantur, rursusque factæ piramides similiter fuerint divisæ.

Dico ut basis ABC ad basim DEF, ita esse omnia prismata unius pyramidis ad alia prismata alterius pyramidis numero æqualia.

Constructio.

DUo triangula ABC, *DE*F intelligantur bases duarum pyramidum cum eadem altitudine X. Istarum basium ABC, DEF omnia latera bifariam dividantur in punctis *I*G *H*KLM: ducanturque rectæ IG, G*H*, *HI*, KL, LM, MK.



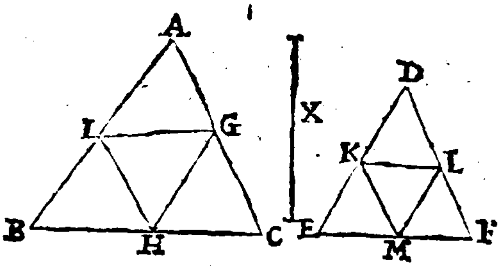
Hoc facto in base ABC triangula AIG, IG*H* erunt bases similium, & æqualium pyramidum; uti pariter triangulum G*H*C,

 atque

atque parallelogrammum GB erunt æqualium prismatum bases [supposita tamen pyramidum divisione, ut in præcedente prop. factum fuit.] Quod de base ABC dictum fuit, etiam circa basim DEF est intelligendum.

Nam quot divisiones in pyramide, cujus basis triangulum ABC, factæ sunt, tot etiam fiant in pyramide supra basim DEF constituta, ut numero æqualia prismata in utraque pyramide inveniatur.

Demonstratio.



QVia (*per construc.*) BC, *EF* in *H*, & M fuerunt bifariam divisa: erit
BC : *HC* : : *EF* : *MF*
& (*per corol.4.sexti.*) Trang. *BAC* simile triang. *HGC* ; pariterque triang. *EDF* simile triang. MLF :

Quare [*per* 22. *sexti.*]
Ut triang. A*BC* ad triang.*HGC*;ita triang.DEF,ad triang.MLF:
permutando [*per* 16. *quinti.*)
Ut triang. A*BC* ad triang.*EDF*;ita triang.*HGC* ad triang.MLF:
Sed (*per corol. prop.* 40. *undec.*)
Ut triang. *HGC* ad triang. MLF; ita prisma super basim *HGC* ad prisma super basim MLF.

Cum autem prismata super bases *HGC* , MLF [*per* 3. *hujus.*) æqualia sint prismatis super bases parallelogrammas *BG*, *EL* constitutis:

erunt [*per* 15. *quinti.*)
Duo prismata super bases *HGC* , & *BG* constituta ad duo prismata super bases MLF, & EL efformata ;

Ut basis *HGC* ad basim MLF: quia [*per lemma* 2. *hujus*) hæc prismata sunt in eadem altitudine.

Quia vero [*per demonstrata.*]
Ut basis *HGC* ad basim MLF; ita basis *BAC* , ad basim *EDF*, erit Ut

erit (*per* 11. *quinti*.)

Ut basis BAC ad basim EDF; ita duo prismata supra bases HGC, & BG, ad duo prismata supra bases MLF, & EL.

Consimili modo si intelligamus pyramides ejusdem altitudinis supra bases triangulares AIG, DKL in duas pyramides, & in duo prismata, uti supra, divisas; eadem ratione demonstrabitur, ut basis AIG ad basim DKL; ita prismata unius pyramidis esse ad prismata alterius pyramidis: Quod pariter est dicendum de prismatis factis in pyramidibus supra bases IHG, KML constitutis, nempe quod bases sint ad bases, ut prismata ad prismata: hocque semper verificabitur quousque pyramidum divisio fuerit continvata; sed omnes bases, ad omnes bases sunt ut basis AIG ad basim DKL;

Ut autem basis AIG ad basim DKL; ita basis ABC, ad basim DEF:

Ergo (*per* 11. *quinti*.)

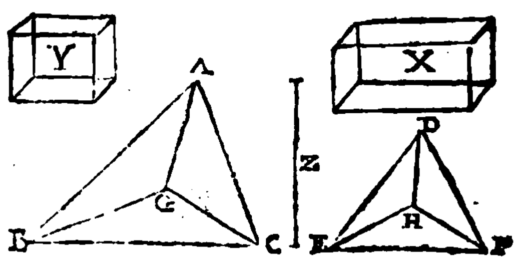
Ut basis ABC ad basim DEF; ita omnia prismata unius pyramidis, ad omnia prismata alterius pyramidis. q. e. d.

Propos. V. Theor. V.

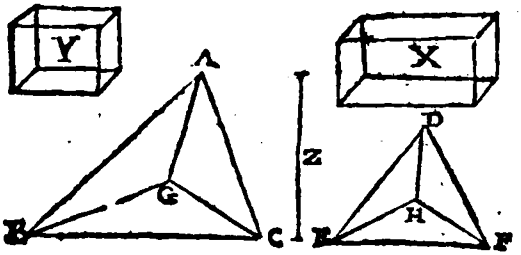
Si Pyramides ABCG, DEFH supra triangulares bases ABC, DEF, & in eadem altitudine Z fuerint constitutæ.

Dico pyramides esse ad inuicem, ut bases.

Constructio, & Demonstratio.



SI pyramis ABCG in altitudine Z non est ad pyramidem DEFH ut basis ABC ad basim DEF; necessariò sequitur, quod pyramis ABCG ad pyramidẽ DEFH



majorem, vel minorem habeat rationẽ, quam basis ABC, ad basim DEF: quod autem hoc esse nequeat ita demonstratur.

Si pyramis ABCG ad pyramidẽ DEFH majorem habeat rationem quam basis ABC ad basim DEF; intelligatur magnitudo X, quæ ad pyramidem DEFH habeat rationem basis ABC, ad basim DEF: hoc stante (*per* 10. *quinti.*] magnitudo X erit minor quam pyramis ABCG: *sit igitur X minor pyramide ABCG quantitate Y.*

Hoc posito pyramis ABCG intelligatur divisa quemadmodum fuit factum in 3. prop.hujus,] continvataque talis divisio in illis pyramidibus, quæ per hanc divisionem resultant, quousque omnes pyramides ablatis prismatis, sint minores quam Y.

Jisdem numero divisionibus, quibus partita fuit pyramis ABCG, pariter dividatur pyramis DEFH: eruntque tot prysmata in pyramide ABCG, quot sunt in pyramipe DEFH.

His taliter peractis (*per* 4. *bujus*] erunt.

Omnia prismata pyramidis ABCG, ad omnia prismata pyramidis DEFH; ut basis ABC, ad basim DEF;

Sed (*per hyp.*]

basis ABC ad basim DEF est ut X ad pyramidem DEFH:

Quare (*per* 11. *quinti*)

Ut magnitudo X ad pyramidem DEFH;

Ita omnia prismata pyramidis ABCD, ad omnia prismata pyramidis GEFH.

Cum autem [*per constru*ct*.*] magnitudo X minor sit quam omnia prismata pyramidis ABCG: (*per* 14. *quinti*) erit etiam pyramis DEFH minor, quam omnia prismata ejusdem pyramidis DEFH: quod repugnat, quia pyramis est totum, & prismata sunt pars pyramidis: ergo pyramis ad pyramidem nequit habere majorem rationem, quam babeat basis ad basim DEF. q. e. 1. d.

Quod postea pyramis ABCG ad pyramidem DEFH nequeat habere minorem rationem, quam sit ratio basis ABC ad basim DEF, ita euincitur. Si

Si ratio pyramidis ABCG ad pyramidem DEFH, minor est, quam ratio basis ABC, ad basim DEF.

Convertendo [*per 26. quinti*]

Pyramis DEFH ad pyramidem ABCG majorem habebit rationem, quam basis DEF ad basim ABC.

Assumatur magnitudo X quæ sit ad pyramidem ABCG;
Ut basis DEF ad basim ABC: eritque (*per 10. quinti*) magnitudo X minor pyramide DEFH.

Ut in prima parte factum fuit diuidatur pyramis DEFH in tot prismata, quæ omnia simul sumpta majora sint, quam X. similis divisio pariter fiat in pyramide ABCG.

Hoc facto [*per 4. hujus.*)

Ut omnia prismata pyramidis DEFH, ad omnia prismata pyramidis ABCG numero æqualia;

Ita basis DEF, ab basim ABC:

Sed [*per constructionem*)

Ut basis DEF, ad basim ABC; ita magnitudo X ad pyramidem ABCG:

Ergo (*per 11. quinti*]

Ut magnitudo X ad pyramidem ABCG;

Ita omnia prismata pyramidis DEFH, ad omnia prismata numero æqualia pyramidis ABCG.

Cum autem magnitudo X [*per construct.*) minor sit quam prismata pyramidis DEFH: [*per 14. quinti.*] erit etiam plramis ABCG minor omnibus prismatis ejusdem pyramidis ABCG: quod esse non potest, quia prismata sunt partes pyramidis: ergo pyramis ABCG ad pyramidem DEFH nequit habere minorem rationem, quam basis ABC, ad basim DEF. q. e. 2. d.

Cum igitur (*per demonstrata*) pyramis ad pyramidem non possit habere majorem, vel minorem rationem, quam basis ad basim; sequitur quod pyramides triangulares bases habentes in eadem altitudine, inter se sint ut bases. q. e. d.

Corollarium.

Æquales Pyramides in eadem altitudine, æquales habent bases, vel eamdem basim, & viciſſim.

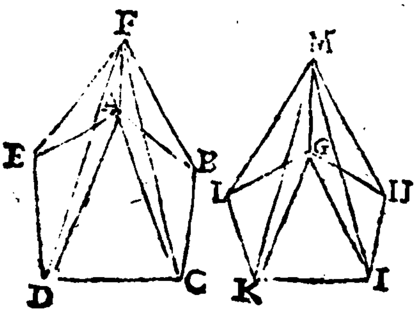
Æquales pyramides super æquales bases, vel super eamdem basim constitutæ, æquales habent altitudines, vel eamdem altitudinem.

Propos. VI. Theor. VI.

Si pyramides ABCDEF, GHIKLM eamdem habuerint altitudinem, atque latera numero æqualia.

Dico tales pyramides inter se habere rationem basis ABCDE, ad basim GHIKL.

Constructio.



Pyramidum bases resolvantur in triangula AED, DAC &c. Super dicta triangula intelligatur efformatæ pyramides in eadem altitudine: quo facto datæ pyramides ex tribus pyramidibus triangulares bases habentibus, & in eadem altitudine erunt compositæ.

Demonstratio.

Quia duæ pyramides ABCF, ACDF sunt æque altæ; [per 5. bujus.)

Ut basis ABC, ad basim CAD; ita pyramis ABCF ad pyramidem CADF.

Eadem de causa,

Ut basis CAD ad basim DAE; ita pyramis CADF ad pyramidem DAEF.

Igitur componendo (per 18. quinti.)

Ut basis ABCDE ad basim ADE; ita pyramis ACDEF ad pyramidem ADEF.

Si-

Simili ratione demonstrabitur

Ut basis GHIKL ad basim KGL; ita pyramis GHIKLM ad pyramidem KGLM,

Convertendo [*per corol. prop. 4. quinti.*)

Ut basis GKL ad basim GHIKL; ita pyramis KGLM ad pyramidem GHIKLM;

Sed [*per 5. hujus.*)

Ut basis ADE ad basim KGL; ita piramis ADEF ad pyramidem KGLM: quamobrem bases erunt insistentibus suis pyramidibus proportionales, hoc est

basis ABCDE ad pyramidem ABCDEF.
basis ADE — ad pyramidem ADEF.
basis GKL — ad pyramidem GKLM.
basis GHIKL ad pyramidem GHIKLM:

Ergo ex æquo (*per 22. quinti.*]

Ut basis ABCDE ad basim GHIKL;

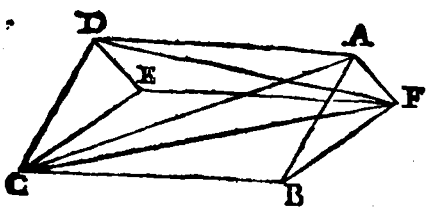
Ita pyramis ABCDEF ad pyramidem GHIKLM. q. e. d.

Propos. VII. Theor. VII.

Si prisma ABCDEF bases AFB, DEC habeat triangulares.

Dico hoc prisma partiri in tres pyramides æquales triangulares bases habentes.

Constructio.

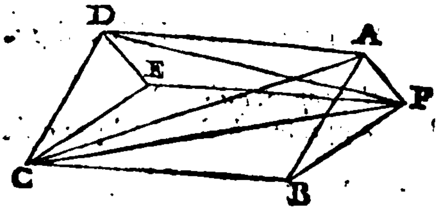


TRium parallelogrammorum AE, BE, BD ducantur diametri DF, CF, AC.

Demonstratio.

TRiangula ABC, ADC [*per 34. pri.*) sunt æqualia: Quia verò pyramides ABCF, ADCF sunt in eadem altitudine;

(*per*



(*per* 5. *hujus*.]
Ut basis ABC ad basim ADC; ita pyramis ABCF ad pyramidem ADCF: sed bases (*per* 34. *pri.*] sunt æquales: ergo etiam
pyramis ABCF = pyramidi ADCF.

eadem ratione
pyramis ADFC = pyramidi DEFC;
Cum ergo pyramis ADCF eadem sit ac pyramis ADFC; tres pyramides ABCF, ADCF, DEFC erunt æquales. q. e. d.

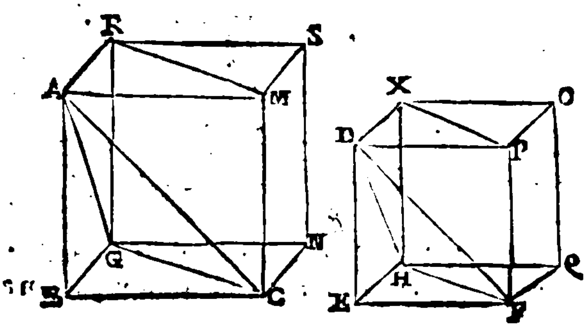
Corrularium.

QVæcumque pyramis est tertia pars prismatis eamdem basim, & altitudinem habentis, & vicissim.

Quodcumque prisma est triplum pyramidis eamdem basim, & altitudinem habentis.

Propos. VIII. Theor. VIII.

Si fuerint similes pyramides ABCG, DEFH. Dico hujusmodi pyramides inter se habere rationem triplicatam homologorum laterum BC, EF.



Con-

Constructio.

Quando pyramides bases habent triangulares.

PRoducantur plana pyramides comprehendentia, compleanturque parallelogramma *BN*; BM : BR : EQ : EP : EX, necnon etiam parallelepipeda *BS*, EO.

Notentur rectæ RM: GC : XP : HF, ducanturque plana RC, XF.

Demonstratio.

QVia (*per hyp.*) triangulum A*B*C est simile triangulo DEF,
[*per def.* 1. *sexti.*)
ang. *ABC* = ang. DEF : insuperque *AB* : *BC* : : *DE* : *EF* :
Quare parallelog. *B*M simile erit parallelog. EP.
Eadem ratione demonstrabitur
parallelog. *BR* simile parallelog. *EX*, &
parallelog. *B*N simile parallelog. EQ.

Quia vero (*per* 24. *undec.*] in parallelepipedo tria plana sunt singula singulis similia tribus planis oppositis: inde sequitur, sex plana parallelepipedi *BS* similia esse sex planis parallelepipedi EO:

Quare [*per def.* 9. *undec.*) erit
parallelepipedum *BS* simile parallelepipedo EO.
ergo (*per* 33. *undec.*)
dicta parallelepipeda inter se erunt in triplicata ratione laterum homologorum *BC*, *EF*.

Cum autem plana RC, XF [*per* 28. *undec.*) bifariam dividant parallelepipeda *BS*, EO:
igitur [*per* 15. *quinti.*]
parallelepipedorum medietates, hoc est prismata ARMCG*B*, DXPFHE, inter se erunt in triplicata ratione laterum homologorum *BC*, *EF*:
Sed [*per corol. prop.* 7. *hujus.*)
dicta prismata sunt pyramidum *BGCA*, *EHFD* tripla:
(*per* 15. *quinti.*)
etiam pyramides *BGCA*, *EHFD* inter se erunt in triplicata ratione laterum homologorum *BC*, *EF*. q. e. d.

Con-

Constructio
Quando pyramides similes bases habent polygonas.

SImilium pyramidum bases polygonæ resolvantur in triangula numero æqualia, atque datæ pyramides dividantur in pyramides numero æquales basibus correspondentes, & triangulares bases habentes.

Demonstratio.

QVia [per primam partem hujus prop. similes pyramides triangulares bases habentes, sunt in triplicata ratione laterum homologorum: quemadmodum singulę piramides sunt singulis pyramidibus in triplicata ratione laterum homologorum; ita (*per 12. quinti*) erunt omnes pyramides ad omnes pyramides in triplicata ratione eorumdem laterum homologorum. q. e. d.

Propos. IX. Theor. IX.

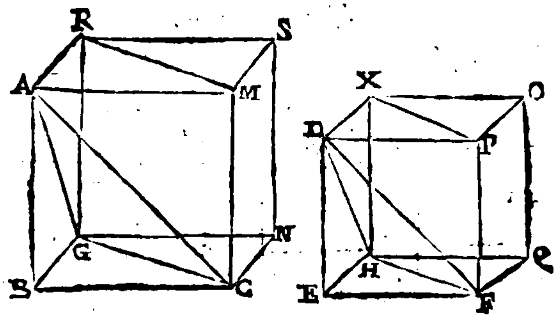
Si fuerint æquales pyramides BGCA, EHFD. Dico talium pyramidum bases BGC, EHF, & altitudines BA, ED esse reciprocas, & vicissim. Si pyramidum bases, & altitudines fuerint reciprocæ.

Dico pyramides esse æquales.

Constructio
Quando pyramides sunt triangulares.

QVemadmodum in superiore propositione producantur pyramidum plana, fiantque parallelogramma BM: BR: BN: EP: EX. EQ; atque compleantur parallelepipeda BS, EO: addanturque rectæ RM, XP.

De-



Demonstratio primæ partis.

QVia (*per hyp.*) pyramis *B*GCA = est pyramidi EHFD:
erit (*per corol. 7. hujus.*)
prisma *B*GC*A*RM = prismati EHFDXP,
Sunt autem (*per* 28. undec.)
parallelepipeda *B*S, EO prismatum dupla: ergo
parallelepipedum *B*S = parallelepipedo EO:
Quare (*per* 34. undec.)
Ut basis *B*N ad basim EQ; ita altitudo ED ad altitudinem *BA*;
Sed (*per* 15. *quinti.*
Ut *B*N, ad EQ; ita triang. *B*GC ad triang. EHF:
Igitur [*per* 11. *quinti.*]
Ut triangulum *B*GC basis pyramidis *B*GCA, ad triang. EHF basis pyramidis EHFD;
ita altitudo ED, ad altitudinem *BA*: q. e. d.

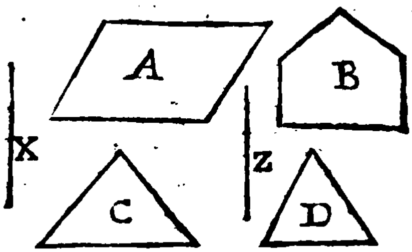
Demonstratio secundæ partis.

QVia [*per hyp.*] basis BGC, ad basim EHF, ut altitudo *E*D ad altitudinem *BA*:
erit (*per* 15. *quinti.*)
parallelog. *B*N ad parallelog. *E*Q ut altitudo *E*D, ad altitudinem *B*A: Eritque (*per* 34. *undec.*)
parallelepipedum *B*S = parallelepipedo *E*O.

Cum autem (*per* 28. *undec.*] prismata *B*GCARM, *E*HFDXP sint medietates parallelepipedorum *B*S, *E*O: pariterq; [*per* 7. *hujus*) pyramides *B*GCA, *E*HFD sint prismatum tertiæ partes: erit pyramis *B*GCA = pyramidi *E*HFD. q.e.d. Cu-

Constructio.

Quando æquales pyramides habent bases polygonas.



ÆQualium pyramidum polygonis basibus A, & B (*per* 45. *pri.*) æqualia constituantur parellelogrāma: pariter dictis parallelogrammis (*per* 41. *pri.*] æqualia ponantur triangula C, & D. Supra C in altitudine pyramidis A, hoc est in altudine X, & supra D in altitudine pyramidis supra B hoc est Z intelligantur constitutæ duæ pyramides triangulares, quarum illa, quæ basim habet C in eadem erit altitudine cum illa, quæ basim habet A, atque pyramis supra D ejusdem altitudinis erit cum pyramide supra *B.*

Demonstratio.

PYramis supra basim C, constituta [*per* 6. *hujus.*] æqualis est pyramidi supra A efformatæ, atq; pyramis supra D æqualis pyramidi supra B.

Cum autem (*per hyp.*) pyramides supra A, & *B* sint æquales, etiam pyramides supra C, & D æquales erunt.

Sed (per primam partem hujus propositionis.)

Ut basis C, ad basim D; ita reciprocè altitudo Z ad altitudinē X; ergo etiam ut basis A, ad basim B; ita reciprocè altitudo pyramidis B hoc est Z, ad altitudinem pyramidis A hoc est X. q. e. d.

Si vero in pyramidibus cum basibus polygonis A, & B fuerit reciprocè, ut basis ad basim, ita altitudo ad altitudinem.

Dico pyramidem supra A = pyramidi supra B.

Demonstratio.

Manente constructione superius facta ut basis C ad basim D; ita basis A ad basim B: atq; pyramis supra C = pyramidi supra A, & pyramis supra D = pyramidi supra B.

Quia

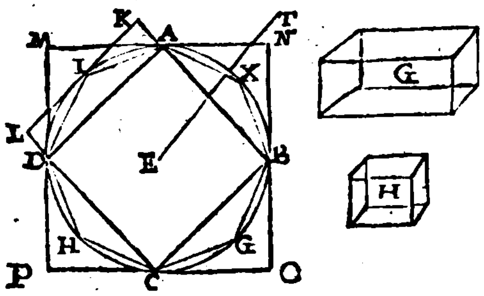
Quia verò [per primam partem hujus propositionis.] si basis C ad basim D; ita reciprocè altitudo Z ad altitudinem X. ∴ Piramis supra C est æqualis piramidi supra D, ergo si A ad B, ut Z ad X, erit piramis super A æqualis piramidi super B. q. e. d.

LEMMA III.

Dato cylindro, cujus basis circulus ABCD, & altitudo EF; atque data magnitudine G cylindro minore quantitate H.

In cylindro describi potest prisma data magnitudine G majus.

Constructio.

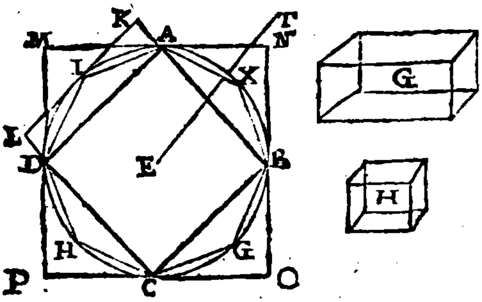


IN dato circulo [*per 6. quarti*.] describatur quadratum AB OD, & circa circulum notetur quad. MNOP. Arcus AB, BC, CD, DA (*per 30. tertii.*] bifariam dividantur in X, G, H, I, junganturque rectæ AX, XB, BG &c. quo facto in dato circulo descriptum erit octogonum AXBG &c. Ducatur L*K*, quæ circulum tangat in I, producanturque CD, BA usque ad L, & *K*.

Tandem supra circulum ABCD tamquam basim in altitudine EF debemus concipere cylindrum: pariterque supra quadrata MO, & AC debemus intelligere descripta prismata in altitudine EF.

De-

Demonstratio.



QVia quadratum MO majus est circulo ABCD, & est duplum quadrati AC: erit quad. AC majus quam medietas circuli ABCD.

Sed (*per corol. prop. 40. undecimi.*) prismata æquealta inter se sunt, ut bases: ergo prisma supra quadratum MO duplum prismatis supra quadratum AC.

Cum autem prisma supra quad. MO(*per axio.9.*) majus sit cylindro supra circulum ABCD constituto: sequitur quod prisma supra quad. AC sit majus medietate cylindri supra circulum ABCD.

Pariter quia [*per 41. primi.*] parallelogrammum KD est duplum trianguli AID, etiam prisma supra parallelog. KD [*per corol. prop. 40. undecimi.*] erit duplum prismatis supra triangulum AID; sed (*per axio. 9.*) prisma super parallelog. KD majus est segmento cylindri supra segmentum circuli AID constituto: ergo prisma supra triangulum AID majus medietate segmenti cylindri supra segmentum circuli AID efformato.

Hoc demonstrato si a cylindro, cujus basis circulus ABCD auferatur prisma cujus basis quadratum ABCD: pariterque si a segmentis cylindri supra circuli segmenta AID, DHC &c. constitutis demantur prismata super triangula AID, DHC &c. efformata, ablatum (*per demonstrata.*] superabit residui dimidium: quare continvata tali divisione (*per scol. lemmatis 1. hujus.*) tamdem remanebunt cylindri segmenta, quorum bases sunt segmenta circuli AI, ID, DH &c. minora magnitudine H; sed (*per hyp.*] H, & G æquant cylindrum supra circulum ABCD: ergo prisma supra polygonum AKBG &c. superabit magnitudinem G. q. e. f.

Co-

Coorollarium.

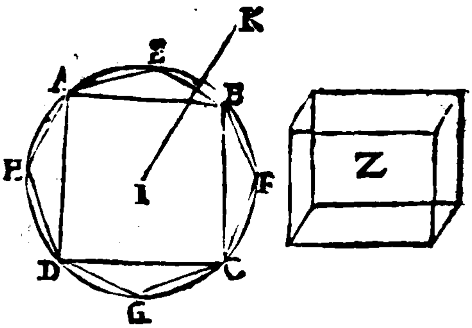
QVod de cylindro dictum est, etiam cono poterit applicari; siquidem & in cono describi poterit pyramis major quacumque data magnitudine cono minore.

Propos. X. Theor. X.

Si conus, & cylindrus fuerint super eadem basi ABCD, & in eadem altitudine IK.
Dico conum esse tertiam cylindri partem.

Constructio, & Demonstratio.

SI conus non est tertia pars cylindri, neque cylindrus erit coni triplus, at maior, vel minor triplo coni.



Sit, si fieri potest, cylindrus major triplo coni. Accipiatur magnitudo Z, quæ sit coni tripla; eritq; magnitudo Z [*per 10. quinti*] cylindro minor.

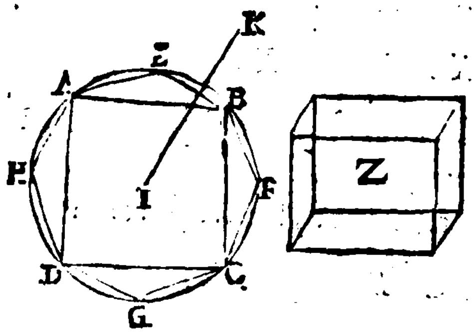
In cylindro (*per lemma antecedens*] in altitudine IK describatur prisma, quod sit majus quam Z, sitque tale prisma constitutum supra basim polygonam AEBF &c. Super hanc eamdem basim polygonam AEBF &c. intelligatur etiam descripta pyramis in altitudine IK, quæ minor erit quam conus supra circulum ABCD descriptus. His positis satis constat circulum ABCD basim esse cylindri, & coni; polygonum vero AEBF &c. esse basim prismatis, atque pyramidis in altitudine IK.

Prisma, cujus basis polygonum AEBF &c. (*per corol. prop. 7. hujus*) est triplum pyramidis eamdem basim, & altitudinem cum prysmate habentis; cum autem [*per hyp.*] & magnitudo Z sit tripla coni supra circulum ABCD descripti.

Erit (*per* 11.*quinti.*)

Ut prisma ad pyramidem; ita magnitudo Z ad conum.

Sed [*per constructionem.*)



prisma majus est quam magnitudo Z: ergo (*per* 14.*quin.*] etiam pyramis major erit cono: quod repugnat, quia pyramis est pars coni: quare cylindrus non erit major triplo coni.

Si postea cylindrus ponatur minor triplo coni, convertendo [*per* 26. *quinti*) conus major erit subtriplo cylindri.

Accipiatur magnitudo Z, quæ sit subtripla cylindri, & hæc magnitudo Z (*per* 10. *quinti*) erit minor cono.

In cylindro (*per lemma* 3.] describatur pyramis major quam Z, habeatque hæc pyramis basim poligonam AEBF &c. in altidine IK.

Quia pyramis supra basim AEBF &c. (*per corol. prop.* 7. *hujus.*] est subtripla prismatis super eadem basi AEBF &c. & in eadem altitudine IK constituti: pariterque magnitudo Z (*per hyp.*) subtripla cylindri: erit

Ut pyramis ad prisma; ita Z ad cylindrum.

Quia vero (*per constructionem*] pyramis superat Z: (*per* 14. *quinti.*] etiam prisma cylindrum superabit: quod cum fieri nequeat, quia prisma est pars cylindri: sequitur igitur cylindrum ad conum super eadem basi, & in eadem altitudine constitutum non posse habere rationem majorem, vel minorem tripla: ergo cylindrus erit coni triplus. q. e. d.

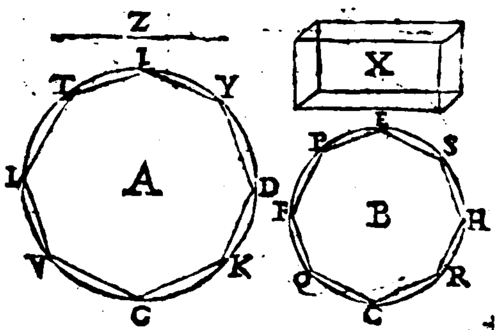
Pro-

Propos. XI. *Theor.* XI.

Si coni, vel cylindri ſupra baſes, ſeu circulos A, & B in altitudine Z fuerint conſtituti.

Dico inter ſe habere rationem baſis A ad baſim B,

Conſtructio, & Demonſtratio.



SI cylindrus ſupra circulum A ad cylindrum ſupra circulum B non eſt, ut circulus A ad circulum B: neceſſario cylindrus ſupra A ad cylindrum ſupra B majorem, vel minorem, habebit rationem, quam ſit ratio circuli A ad circulum B. Quod autem neutrum eſſe poſſit taliter evincitur.

Quo ad primum. Si cylindrus ſupra circulum A ad cylindrum ſupra circulum B majorem habeat rationem, quam circulus A ad circulum B; aſſumatur magnitudo X, quæ ad cylindrum ſupra circulum B, habeat rationem circuli A ad circulum B: Hoc facto (*per* 10. *quinti*) magnitudo X minor erit cylindro ſupra circulum A deſcripto.

In cylindro, cujus baſis eſt circulus A (*per lemma* 3.] in altitudine Z inſcribatur priſma, quod ſit majus, quam X, habeatque tale priſma baſim poligonam ITLV &c.

In circulo EFGH inſcribatur polygonum EPFQ &c. ſimile polygono ITLV &c.: quod quidem facillimè fiet, ſi in tot partes æquales dividatur circumferentia EFGH, in quot æquales partes diviſa fuit circumferentia ILCD.

Supra polygonum EPFQ &c. intelligatur conſtitutum priſma in altitudine Z.

His manentibus, quia (*per constructionem*) magnitudo X ad cylindrum supra circulum B est, ut circulus A ad circulum B:

atque (*per corol. 2. propos. 2. hujus.*)

Ut circulus A ad circulum B; ita poly.ITLV &c. ad poly.EPFQ.

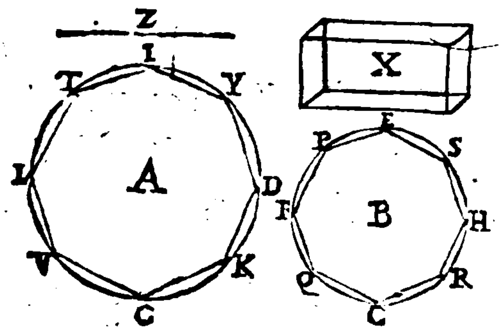
Pariter [*per corol. prop. 40. undec.*]

Ut polyg. ITLV &c. ad poly. EPFQ &c. ita prisma supra poly. ITLV &c. ad prisma supra poly. EPFQ &c.

Erit [*per* 11. quinti.]

Ut magnitudo X ad cylindrum supra circulum B;

Ita prisma supra poly.ITLV&c.ad prisma supra poly.EPFQ &c.



Quia verò (*per constructionem.*) magnitudo X minor est quam prisma supra polyg. ITLV &c. (*per* 14. *quinti.*) & cylindrus supra circulum B minor erit quam prisma supra poly. EPFQ &c. constitutum: quod repugnat, quia prisma est pars cylindri: ergo cylindrus ad cylindrum nequit majorem habere rationem, quam basis ad basim.

Quo ad secundum. Si cylindrus supra circulum A ad cylindrum supra circulum B minorem habuerit rationem, quam circulus A ad circulum B.

Convertendo [*per* 26. *quinti.*]

Major erit ratio cylindri supra circulum B ad cylindrum supra circulum A, quam circuli B ad circulum A.

Sit magnitudo X ad cylindrum supra circulum A;

uti circulus B ad circulum A.

Erit [*per* 19. *quinti.*)

Magnitudo X minor cylindro supra circulum B constituto.

Quemadmodum factum fuit in prima parte hujus theorematis, in cylindro constituto supra circulum B, inscribatur prisma, majus quam X, ejusque basis sit polygonum EPFQ &c.: paritérque in circulo A inscribatur aliud polygonum ITLV &c. simile

polygono EPFQ &c. His positis.

Est [*per constructionem*] magnitudo X ad cylindrum supra circulum A;

Ut circulus B ad circulum A:

Sed (*per corol. 2. prop. 2. hujus.*]

Ut circulus B ad circulum A, ita poly. EPFQ &c. ad poly. ITLV &c. Pariter (*per corol. prop. 40. undec.*)

Ut poly. EPFQ &c. ad simile poly. ITLV &c.;

Ita prisma supra poly. EPFQ. ad prisma supra poly. ITLV &c.

Ergo [*per 11. quinti.*)

Ut magnitudo X ad cylindrum supra circulum A;

Ita prisma supra Poly. EPFQ &c. ad prisma supra poly. ITLV &c.

Quia vero [*per constructionem*] magnitudo X minor est quam prisma supra poly. EPFQ &c. constitutum:

Erit (*per 14. quinti.*)

Cylindrus supra circulum A minor prismate supra polygonum ITLV &c. constituto: quod fieri nequit, quia prisma est pars cylindri: ergo cylindrus ad cylindrum non potest habere rationem minorem, quam sit ratio basis ad basim. Cum autem [*per demonstrata*) neque majorem habere possit; erit cylindrus ad cylindrum in eadem altitudine, ut basis ad basim. q. e. d.

Quod pariter coni ejusdem altitudinis ad invicem sint, ut bases, demonstratur, quia [*per 10. hujus*) coni sunt tertiæ partes cylindrorum: quare (*per 15. quinti*) ut cylindrus ad cylindrum ita conus ad conum: sed [*per demonst.*) cylindrus ad cylindrum est, ut basis ad basim: ergo [*per 11. quinti.*) ut conus ad conum, ita basis ad basim. q. e d.

Corollarium.

Coni, & cylindri super æquales bases, & in eadem altitudine, sunt æquales, quia ex visis sunt in ratione basium.

Æquales coni, & cylindri supra æquales bases constituti, sunt in eadem altitudine.

Si coni, & cylindri sint æquales, & in eadem altitudine, bases habent æquales.

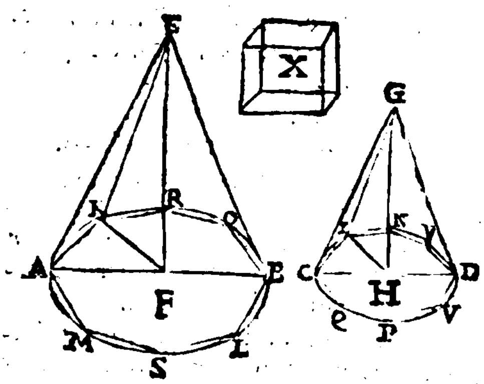
Si coni, & cylindri bases habeant æquales inter se sunt, ut altitudines.

Propos. XII. Theor. XII.

Si coni, & cylindri similes AEB, CGD supra bases AB, CD fuerint descipti.

Dico inter se habere rationem triplicatam diametrorum basium AB, CD.

Constructio, & Demonstratio.



SI conus AEB ad conum CGD non habet triplicatam rationem diametri AB ad diametrum CD, ponamus primo habere majorem.

Accipiatur magnitudo X, quæ ad conum CGD rationem habeat triplicatam diametri AB ad diametrum CD: quo facto (*per* 10. *quinti.*] X erit minor cono AEB.

In cono AEB, & in altitudine EF (*per Lemma* 3.) inscribatur pyramis major quam X supra basim polygonam AKR &c.

In circulo CD inscribatur polygonum CIN &c. simile polygono AKR &c. Supra hoc polygonum in altitudine GH inscribatur pyramis, quam

Dico similem pyramidi descriptæ in cono AEB.

Ducantur rectæ EK, HI, atque KE, IG,

Quia (*per hyp.*) similes sunt coni AEB, CGD;

erit (*per def.* 20. *undecimi.*]

AB : CD : : FE : HG.

Pariterque (*per* 15. *quinti.*]

AF : CH : : FE : HG.

Permutando (*per* 16. *quinti.*)

AF : FE : : CH : HG.

In

In triangulis $\left.\begin{matrix}AFE\\CHG\end{matrix}\right\}$ [*per schol. def. 19. undec.*) anguli AFE, CHG sunt æquales, quia recti, & [*per demonstrata.*] circa æquales angulos latera sunt proportionalia:

Quare (*per 6. sexti.*)

Triangulum AFE simile triangulo CHG: quare

EA : AF : : GC : CH.

In triangulis $\left.\begin{matrix}AFK\\CHI\end{matrix}\right\}$ anguli $\left.\begin{matrix}AFK\\CHI\end{matrix}\right\}$ sunt æquales, utpote insistentes similibus arcubus AK, CI; atq; est AF : FK : : CH : HI, quia (*per def. circuli.*) sunt antecedentia antecedentibus, & consequentia consequentibus æqualia quare (*per 6. sexti.*] triang. AFK simile triangulo CHI.

Unde [*per 4. sexti.*]

FA : AK : : HC : CI :

Ergo ex æqualitate [*per 32. quinti.*]

EA : AK : : GC : CI.

In triangulis $\left.\begin{matrix}EFK\\GHI\end{matrix}\right\}$ (*per hyp.*) EF : FK : : GH : HI;

Sunt autem, & comprehensi anguli EFK, GHI æquales, quia recti;

ergo (*per 6. sexti.*]

EK : KF : : GI : IH.

Cum autem (*per demonstrata*) similia sint triangula FKA, HIC;

(*per 4. sexti.*]

FK : KA : : HI : IC :

Quare ex æquo (*per 22. sexti.*)

EK : KA : : GI : IC :

Ergo [*per 5. sexti.*)

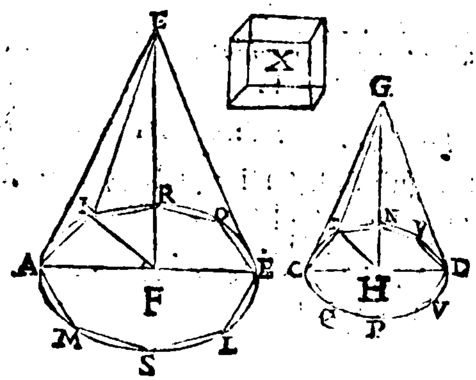
Triangulum AEK simile triangulo CGI.

Eadem ratione reliqua triangula comprehendentia pyramidem supra polygonum AKRO &c. constitutã, similia erunt triangulis continentibus pyramidẽ supra polygonũ CINY &c. efformatam.

Si ergo harum pyramidum plana sunt similia, & numero æqualia (*per def. 9. undecimi.*) similes erunt pyramides. q. e. d.

Demonstrata hac pyramidum similitudine; quia (*per constructionem*) magnitudo X est ad conum CGD in triplicata ratione diametri AB ad diametrum CD: & pariter, quia pyramis descripta in cono AEB [*per 8. hujus*) ad pyramidem factam in co-

no CGD rationem habet triplicatam homologorum laterum AK, CI; ratio autem AK, ad CI (*per 4. sexti.* est ratio AF ad CH, seu AB ad CD:
Ergo [*per 11. quinti.*)
Ratio AK ad CI erit ratio AB ad CD: ergo pyramis descripta in cono AEB (*per 35. quinti.*] ad pyramidem efformatam in cono CGD erit in triplicata ratione diametri AB ad diametrum CD:
Ergo (*per 11. quinti.*]
Ut magnitudo X ad conum CGD; ita pyramis facta in cono AEB ad pyramidem efformatam in cono CGD.
Sed (*per constructionem.*)
Magnitudo X minor quam pyramis coni AEB:
Ergo (*per 14. quinti.*].
Conus CGD minor erit quam pyramis ejusdem coni CGD:



quod cum repugnet, quia pyramis est semper pars coni: ergo conus ad conum non potest habere majorem rationem, quam sit triplicata diametrorũ basium. q. e. i. d.

Pariter quod ratio coni AEB ad conum CGD non possit esse minor quam triplicata diametrorum basium AB, CD, taliter demonstrabitur.

Si ratio coni AEB ad conum CGD minor sit quam triplicata diametrorum AB, CD; invertendo (*per 26. quinti.*) ratio coni CGD ad conum AEB erit major quam triplicata diametri CD ad diametrum AB.

Ponatur magnitudo X ad conum AEB in triplicata ratione diametri DC ad diametrum AB: quo stante (*per 10. quinti.*) X minor erit quam conus CGD.

In cono CGD (*per lemma 3. hujus*) inscribatur pyramis, cujus basis polygonum CINY &c. quæ sit major quam X. Pariter in base coni AEB inscribatur aliud polygonum AKRO &c. simile polygono CINY &c. Supra polygonum AKRO &c. in altitu-

dine

dine coni efformetur alia pyramis, quæ (*per demonſtrata in prima parte*) erit ſimilis pyramidi alterius coni CGD.

Quia magnitudo X (*per conſtructionem*) eſt ad conum AEB in ratione triplicata diametri CD ad diametrum AB: pariter quia (*per 8. hujus.*) pyramis coni CGD ad pyramidem ſimilem coni AEB eſt in triplicata ratione CD ad AB:

Erit [*per 11. quinti.*)

Magnitudo X ad conum AEB, ut pyramis coni CGD ad pyramidem coni AEB.

Cum autem (*per conſtructionem*) magnitudo X. minor ſit quam pyramis coni CGD: *per 14. quinti.*) erit & conus AEB minor pyramide ejuſdem coni AEB; quod eſſe nequit, quia pyramis eſt pars coni: ergo conus ad ſimilem conum nequit habere rationem minorem quam ſit triplicata diametrorum. q. e. 2. d.

Hoc ſtante dicendum erit ſimiles conos inter ſe habere triplicatam rationem diametrorum baſium q. e. d.

Quod de conis ſimilibus fuit demonſtratum, valet etiam de cylindris pariter ſimilibus, quia & cylindri ſimiles ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium, cum (*per 10. hujus,*) cylindri ſint conorum tripli, ideoque (*per 15. quinti.*)

Ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum;

Sed (*per demonſtrata.* (coni ſimiles inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium: ergo & cylindri in eadem ratione erunt. q. e. d,

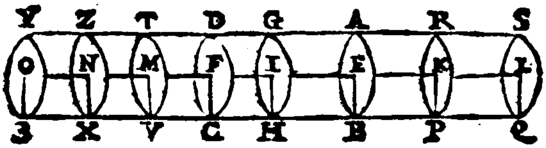
SCHOLIUM.

Quod de ſolis conis, atque cylindris rectis ſimilibus in ſuperiore Propoſitione ab Euclide fuit demonſtratum, valet etiam de ſcalenis ſimilibus (juxta def. 24. hujus) & ſcholium ejuſdem definitionis, in quo Scholio oſtenſum fuit, conos, atque cylindros ſimiles ſcalenos correſpondentes conos, atque cylindros rectos ſimiles habere, dummodo coni, & cylindri recti, & ſcaleni eaſdem habeant baſes, & altitudines.

Pro-

Propos. XIII. *Probl.* XIII.

Si cylindrus ABCD, ejusque axis FE secentur plano GH oppositis planis AB, CD parallelo. Dico cylindrum ABHG, esse ad cylindrum GHCD, uti axis EI, ad axem IF.



Constructio.

Cylindrus ABCD ad utramque partem una cum axe EF producatur. In axe producto versus O accipiantur portiones FM, MN, NO singulæ æquales FI. Pariter ex alia parte in axe producto versus L notentur EK, KL æquales ipsi EI.

Per puncta M, N, O, K, L rectæ notentur MV, NX, O3, KP, LQ parallelæ ipsi FC, & æquales.

Hoc facto, si cylindrus ABCD supra axem FE revolvatur, rectæ MV, NX &c. designabunt circulos TV, ZX &c. parallelos, & æquales circulis DC, AB.

Demonstratio.

Quia cylindri GB, AP, RQ (*per constructionem*) bases, & altitudines habent æquales (*per* 11. *hujus.*) inter se æquales erunt: eadem de causa æquales erunt cylindri HD, CT, VZ, XY: ergo cylindrus HS erit tam multiplex cylindri HA, quam multiplex est axis IL axis IE: pariterque cylindrus HY erit tam multiplex cylindri HD, quam axis IO multiplex axis IF.

Denuo quia cylindri HS, HY eandem habent basim HG; (*per corol. prop:* 11. *hujus*) inter se erunt ut altitudines: quare

Quando axis IL = IO, etiam cylind. HS = cylin. HY,

Quan-

Quando IL major IO, etiam cylin. HS major cylin. HY;
Quando IL minor IO, etiam cylin. HS minor cylin. HY.
Ergo [*per def. 6. quinti* :]
Cylin. HA ad cylin. HD; ut axis IE, ad axem IF. q. e. d.

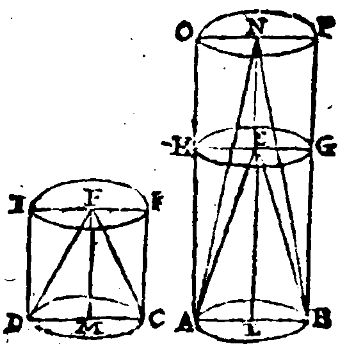
Propos. XIV. Theor. XIV.

Si coni, uel cylindri bases AB, CD habuerint æquales,

Dico inter se esse, ut altitudines LE, MF.

Constructio.

Cylindrus AG versus E producatur una cum Axe LE, abscindatur EN = MF: per N ducatur planum PO parallelum plano GH; eritque efformatus circulus PO parallelus circulo GH.

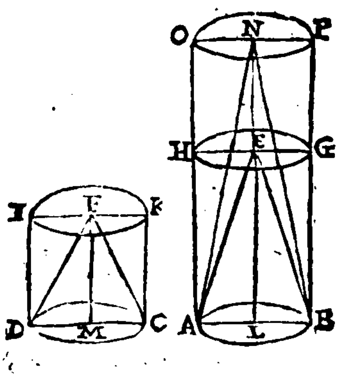


Demonstratio.

Quia (*per constuct.*] cylindri DK, HP non solum altitudines MF, EN habent æquales, verum etiam [*per hyp.*) bases DC, HG (*per corol. 11. hujus*) cylin. DK = cylin. HP.

Quare (*per 7. quinti.*)
Ut cylin. AG ad cylin. HP; ita cylin. AG ad cylin. CI.
Sed (*per 13. hujus.*]
Ut cylin. AG ad cylin. HP; ita axis LE, ad axem EN.
Est vero (*per constructionem*) EN = MF: ergo
Ut cylin. AG ad cylin. CI; ita axis LE ad axem MF.
Sed axes LE, MF sunt cylindrorum altitudines: ergo

cylin-



cylindrus AG ad cylindrum CI, ut altitudo LE ad altitudinem MF. q. e. d.

Pariter quod conus AEB sit ad conum DFC, ut axis LE ad axem MF; demonstratur, quia [*per* 10. *hujus.*] coni sunt tertia pars cylindrorum, ideoq; (*per* 15. *quinti.*] ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum: cum autem [*per demonstrata*] cylindrus ad cylindrum sit ut axis ad axem.

Erit (*per* 11. *quinti.*]

Ut conus AEB ad conum DFC, ita axis LE ad axem MF. q. e.d.

Propos. XV. *Theo.* XV.

Si æquales coni, vel cylindri bases habeant AB, DE, & altitudines LC, MF.

Dico bases, & altitudines esse reciprocas, & vicissim.

Si bases, & altitudines sint reciprocæ.

Dico conos, & cylindros, esse æquales.

In hoc theoremate duo possunt contingere. 1: Quod altitudines sint æquales. 2. Quod sint inæquales.

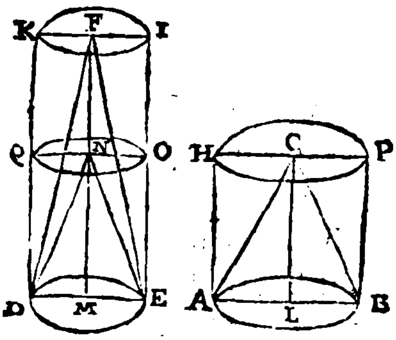
Constructio, & Demonstratio.

1 SI conorum, & cylindrorum altitudines MF, LC fuerint æquales (*per corol. prop.* 11. *huius.*] etiam bases erunt æquales: quare ut basis DE ad basim AB; ita reciprocè altitudo LC ad altitudinem MF. q. e. d.

2. Si altitudo MF major fuerit quam altitudo LC: ex MF (*per* 3. *pri.*) accipiatur MN = LC: Per N ducatur planum QO plano DE parallelum. Quo-

Quoniam (*per hyp.*] cylindrus DI = cylindro AP:
Erit *per 7. quinti.*)
Ut cylin. DI ad cylin. DO; ita cylin. AP ad cylin. DO:
Sed (*per 11. bujus.*)
Ut cylin. AP ad cylin. DO; ita basis AB ad Basim DE;
Pariterque [*per 14. bujus.*]
Ut cylin. DI ad cylin. DO; ita MF ad MN:
Ergo *per 11. quinti.*)
Ut basis AB ad basim DE; ita MF ad MN, seu LC:

Quamobrem æqualium cylindrorum bases, & altitudines erunt reciprocè proportionales. q. e. d.



Eadem veritas demonstrabitur in conis æqualibus, quia (*per 10. bujus.*) coni sunt tertiæ partes cylindrorum: quare si cylindri æquales bases, & altitudines habent reciprocas, uti demonstratum fuit, etiam ratio conorum [*per 15. quinti.*] eadem erit. q. e. d.

Vicissim postea supposita conorum, atque cylindrorum basium, & altitudinum reciprocatione, si altitudines fuerint æquales, etiam bases æquales erunt. quare [*per corol. propos. 11. bujus.*) etiam coni, & cylindri inter se æquales erunt.

Si verò altitudines fuerint inæquales, nempe MF major, & LC minor accipiatur, ut prius, MN = LC, ducaturque planum OQ plano DE parallelum.

Cum igitur [*per hyp.*] sit, ut basis AB ad basim DE;
Ita altitudo MF ad altitudinem LC, siuè MN
atque [*per 11. bujus.*]
Ut basis AB ad basim DE; ita cylin. AP ad cylin. DO:
erit (*per 11. quinti.*]
Ut cylin. AP ad cylin. DO; ita altit. MF ad altit. MN.
Sed (*per 14. bujus.*)
Ut MF, ad MN; ita cylin. DI ad cylin. DO:

Qua-

Quare (*per* 11. *quinti*]
Ut cylin. AP ad cylin. DO; ita cylin. DI ad cylin. DO:
Igitur (*per* 9. *quinti*.)
cylindrus AP = cylindro DI. q. e. d.

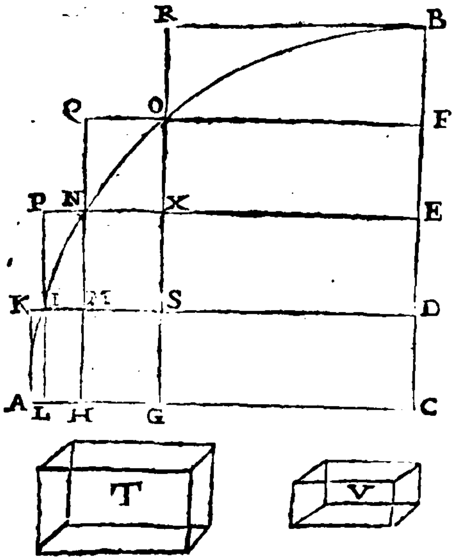
Quod de cylindris fuit demonstratum, etiam conis applicari potest, cum coni sint tertiæ partes cylindrorum. q. e. d.

SCHOLIUM.

DUæ sequentes Euclidis propositiones, cum nimis diffusæ, atque tyronibus difficiles, ommittuntur substituendo loco talium propos. sequentia lemmata.

LEMMA IV.

Data sphæra, cujus maximi circuli pars quarta sit quadrans ABC, dataque magnitudine T sphæra minore magnitudine V: in data sphæra cylindri inscribi possunt, quorū summa major sit quam T.



Constructio.

REcta CB in quascumque partes æquales dividatur, uti sunt partes CD, DE, EF, FB. Per puncta D, E, F, B, [*per* 31. *pri.*] rectæ notentur DK, EP, FQ, BR parallelæ ipsi AC. Denuò per puncta A, I, N, O ducantur rectæ AK, IP; NQ, OR ipsi BC parallelæ, quæ concurrant cum rectis DI, EN &c. in punctis K, P, Q, R. Demum producantur PI, in L: QN, in H: & RO in G.

facta

Facta hac constructione non solum completa erunt rectangula quadranti ABC inscripta, uti sunt rectangula CI, DN, EO, verum etiam circumscripta CK, DP, EQ, FR.

Demonstratio.

Parallelogramma CK, DP, EQ, FR quadranti ABC circumscripta excedunt parallelogramma CI, DN, EO eidem quadranti inscripta, parallelogrammis, LK, MP, XQ, *FR*, per quæ transit circumferentia quadrantis ABC.

Quia vero parallelogramma LK, MP, XQ, FR, simul accepta æquant parallelogrammum CK, & hoc quia FR = CS: XQ = GM : MP = HI; LK verò spatium commune: erit parallelogrammum CK excessus parallelogrammorum circumscriptorum supra parallelogramma inscripta quadranti ABC.

Hac constructione facta, si intelligamus quod quadrans ABC super rectam BC immobilem revolvatur revolutione completa quodlibet parallelogrammum designabit cylindros hæmisphærio inscriptos, & circumsciptos; prout scilicet, parallelogramma cylindros efformantia sunt in sphæræ quadrante ABC inscripta, vel circumscripta.

Quia verò (*per demonstrata*) excessus rectangulorum circumscriptorum supra rectangula inscripta, est rectangulum CK, etiam excessus cylindrorum sphæræ circumscriptorum supra cylindros sphæræ inscriptos, erit cylindrus a rectangulo CK efformatus; sed sphæra minor est quam omnes cylindri a rectangulis circumscriptis efformati: ergo excessus sphæræ supra cylindros inscriptos minor erit cylindro a rectangulo CK efformato: quare sphæra major erit quam cylindri sphæræ inscripti quantitate minore, quam sit cylindrus a rectangulo CK descriptus.

Cum autem rectangulum *CK* semper supra dimidium possit imminui, accipiendo minus quam dimidium altitudinis CD; quod facillimè fieri poterit taliter multiplicãdo partes semidiametri CB, ut earum numerus excedat duplum numeri partium præexistentium: quo facto cylindrus á tali rectangulo efformatus (*per prop. 1. decimi*), minor erit magnitudine V: tandem excessus sphæræ supra inscriptos cylindros minor erit quam V: ergo omnes inscripti cylindri majores quam T: quia [*per hyp.*) T, & V sphæ-

V sunt sphæræ æquales. Quod autem de hemisphærio dictum est, etiam de tota sphæra est intelligendum. q. e. f.

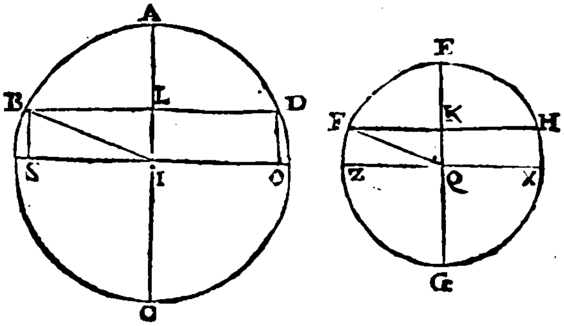
LEMMA V.

Si in duabus sphæris ABCD, EFGH cylindri similes fuerint inscripti.

Dico tales cylindros inter se habere triplicatam rationem diametri AC ad diametrum EG.

Constructio.

IN sphæris ABCD, EFGH sint descripti similes cylindri recti geniti ex revolutione similium rectangulorum BO, XF supra diametro immobiles LI, KQ facta; ducantur rectæ BI, FQ.



Demonstratio.

QVia [per hyp.) similia sunt rectangula BO, FX erit, (per def. 1. sexti.)

Ut DB, ad BS; ita HF, FZ.

Sed [per 34. pri.)

BS = LI, atque FZ = KQ: ergo

Ut DB : LI; : HF: KQ:

atque

atque (*per 15. quinti.*]
BL: LI:: FK: KQ,
Quia vero, & angulus BLI = ang. FKQ, quia recti;
(*per 6. sexti.*]
erit triangulum BLI simile triangulo FKQ:
Igitur LB: BI:: KF: FQ.
Sed (*per def. circuli.*)
BI = IA, & FQ = QE: ergo
BL: IA:: FK: QE,
Talium rationum antecedentibus, & consequentibus duplicatis:
ergo erit (*per 15. quinti.*)
BD: AC:: FH: EG.

Cum autem similes cylindri BO, FX geniti ex revolutione rectangulorum BO, FX basium diametros habeant BD, FH: (*per 12. hujus.*) cylindri BO, FX erunt in triplicata ratione BD, FH.

Sed [*per demonstrata.*)
BD: FH:: AC: EG: quare
cylindrus BO ad cyli. FX erit in triplicata ratione AC, ad EG.

Si vero cylindri numero æquales in sphæris ABCD, EFGH fuerint inscripti singuli singulis similes,
(*per 12. quinti.*)
Ut unus cylindus unius sphæræ, ad alium cylindrum similem in altera sphæra constitutum; ita omnes cylindri unius sphæræ, ad omnes cylindros alterius sphæræ;

Sed (*per demonstrata*].cylindrus in una sphæra descriptus ad cylindrum alteri sphæræ inscriptum est in triplicata ratione diametrorum: ergo omnes cylindri ad omnes cylindros rationem habebunt triplicatam diametri unius sphæræ ad diametrum alterius sphæræ. q. e. d.

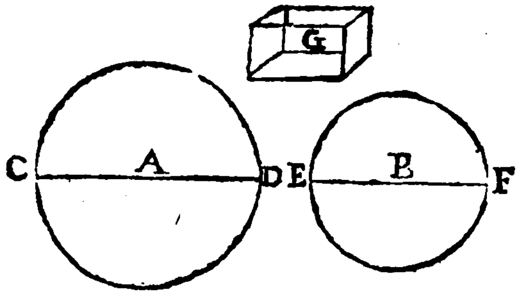
Propos. XVIII. Theor. XVIII.

Si fuerint Sphæræ A, & B.

Dico inter se habere rationem triplicatam diametrorum CD, EF.

Demonstratio.

SI sphæra A ad ſphæram B non habet triplicatam rationem diametri CD ad diametrum EF, neceſſario habebit ſphæra A ad ſphæram B majorẽ, vel minorem rationem quam ſit triplicata diametri CD ad diametrum EF: quod neutrum eſſe poſſit ita demonſtratur.



Primo ſi ſphæra A ad ſphæram B majorem habeát rationem quam ſit triplicata CD ad EF; erit aſſignabilis magnitudo G, quæ ad ſphæram B rationem habeat triplicatam CD, ad EF; eritque (*per* 10. *quinti*) G minor quam ſphæra A: quare in ſphæra A (*per lemma* 4. *hujus*] poterunt inſcribi cylindri, qui omnes ſimul accepti, ſint majores quam G.

In ſphæra B inſcribantur cylindri ſimiles,& numero æquales cylindris ſphæræ A:

His peractis,quia [*per conſtructionem*) magnitudo G ad ſphæramB rationẽ habet triplicatam CD ad EF: ulterius, quia cylindri ſphæræ A ad cylindros ſimiles, & numero æquales ſphæræ B (*per lemma* 5. *hujus*.] rationem habent triplicatam CD, ad EF:

[*per* 11. *quinti*]

Ut magnitudo G ad ſphæram B; ita cylindri ſphæræ A ad cylindros ſphæræ B;

Sed (*per hyp.*)

Magnitudo G minor quam cylindri ſphæræ A: ergo

(*per* 14. *quinci*]

Sphæra B minor quam cylindri in ſphæra B deſcripti: quod repugnat quia cylindri ſunt pars ſphæræ: igitur ſphæra A ad ſphæram B nequit rationem habere majorem quam ſit tripl icata diametrorum CD, EF. q. e. I. d.

2. Si ſphæra A ad ſphæram B rationem habeat minorem, quam

quam ſit triplicata diametri CD ad diametrum EF;

Convertendo (*per 26. quinti*)

Sphæra B ad ſphæram A majorem habebit rationem, quam ſit triplicata diametrorum EF, CD.

Si ergo magnitudo G ad ſphæram A rationem habuerit triplicatam diametri EF ad diametrum CD; magnitudo G [*per 10. quinti*] minor erit quam ſphæra B.

Quemadmodum ſuperius factum fuit, in ſphæra B deſcribantur cylindri, qui omnes ſimul accepti majores ſint quam G: & in ſphæra A deſcribantur cylindri ſimiles, & numero æquales cylindris ſphæræ B.

His peractis, quia magnitudo G ad ſphæram A (*per conſtruct.*) rationem habet triplicatam EF ad CD, pariterque (*per lemma 5. bujus*) cylindri ſphæræ B ad cylindros ſimiles, & numero æquales ſphæræ A rationem habent triplicatam EF, ad CD:

erunt [*per 11. quinti.*)

Ut G ad ſphæram A; ita cylindri ſphæræ B ad cylin. Sphæræ A.

Quia vero [*per conſtructionem*] magnitudo G minor eſt quam cylindri ſphæræ B:

(*per 14. quinti.*]

Sphæra A minor erit quam cylindri ejuſdem ſphæræ A: quod eſſe nequit, quia ſphæra eſt totum, & cylindri inſcripti pars: quamobrem ſphæra A ad ſphærā B non poterit habere rationem minorem, quam ſit triplicata diametrorum CD, EF: igitur ſphæra ad ſphæram ſolam rationem triplicatam habebit. q. e. d.

Corollarium.

EX hoc theoremate colligitur ſphæras inter ſe habere illam rationem, quam obtinent Cubi a diametris deſcripti: ſiquidem cubi ſunt parallelepipeda ſimilia, quæ [*per 33. undec.*) habent triplicatam rationem laterum homologorum; hoc eſt diametrorum:

Quare (*per 11. quinti.*)

Ut ſphæra ad ſphæram; ita cubus unius diametri ad cubum alterius diametri.

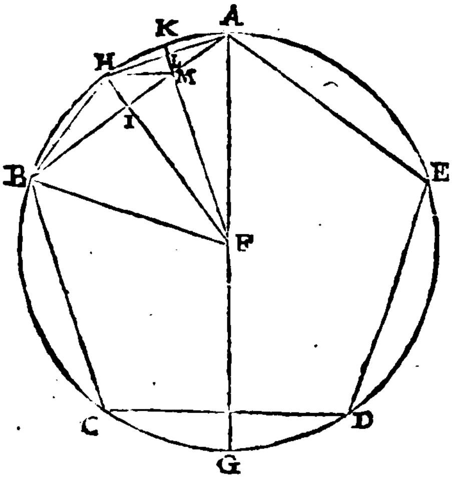
Theoremata duo Elementaria ex Decimo Tertio Euclidis Elemento excerpta.

Propos. X. *Theor. X.*

Si in circulo descriptum fuerit pentagonum æquilaterum ABCDE.

Dico potentiam lateris pentagoni AB æqualem esse potentiæ lateris exagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum.

Constructio.



Ducatur diameter AFG, atque semidiameter FB. Arcus BA (*per 30. tertij.*) bifariam dividatur in H, & arcus HA in *K*. Notentur rectæ FH, F*K*, HB, HA, HM.

Hoc facto HA erit latus decagoni; BF vero (*per corol. propos. 15. quarti.*) erit latus exagoni.

Demonstratio.

Quia (*per constructionem*) arcus AH = arcui HB: (*per 27. tertii.*) ang. AFH = ang. HFB.

In triangulis $\left.\begin{matrix}AIF\\BIF\end{matrix}\right\}$ latera AF, FI singula singulis æqualia lateribus BF, FI, & [*per demonstrata*] ang. AFI = ang. BFI: (*per 4. pri.*) AI = BI; atque ang. AIF = BIF: quare (*per def. 10. pri.*) ambo recti. Eadem ratione AL = HL, & ang. AFL, HFL æquales, quia (*per hyp.*): arcus AK = arcui KH.

Cum

Cum autem (*per hyp.*] pentagonum ABCDE sit æquilaterum : (*per* 28. *tertij*) & arcus AB, BC &c. inter se æquales: Et [*per constructionem*) AH est medietas arcus AB; erunt omnes arcus AB, CD &c. arcus AH dupli, atque talium arcuum medietates ipsi AH æquales, & ipsius AK duplæ.

Ulterius semicirculus ABCG = semicirculo AEDG, ablatis æqualibus Arcubus ABC, AED; erit CG = DG: igitur arcus CD est bifariam divisus in G; ideoque arcus CG = AH, atque duplus AK, vel KH.

His manentibus cum arcus BC duplus sit arcus HA, & CG, duplus HK: erit arcus BCG duplus arcus BHK: ergo (*per* 33. *sexti*) ang. BFG duplus ang. BFK: sed (*per* 20. *tertij.*] idem angulus BFG duplus anguli BAF: igitur ang. BFM = ang. BAF: quamobrem triangulum ABF æquiangulum triangulo FBM: igitur (*per* 4. *sexti*.

AB : BF :: BF : BM :

Ideoque [*per* 17. *sexti*]

AB × BM = quad. BF.

Rursus in triangulis $\left.\begin{matrix}\text{ALM}\\\text{HLM}\end{matrix}\right\}$ latera AL, LM (*per demonstrata*] singula singulis æqualia lateribus HL, LM, & angulus ALM = ang. HLM, quia ambo recti: ergo (*per* 4. *pri.*] AM = HM, & angulus MAL = angulo MHL.

Quia vero in triangulo isosceles BHA (*per* 5. *pri.*) ang. MAL = ang. MBH: [*per axio.* 1.] erit ang. AHM = ABH: quapropter triang. AHM simile triangulo ABH: ergo (*per* 4. *sexti.*]

AB : AH : AH : AM,

Unde [*per* 17. *sexti.*]

AB × AM = quad. AH.

Sed (*per demonstrata.*)

AB × BM = quad. BF:

Ergo

AB × AM + AB × BM = quad. AH + quad. BF:

Sed (*per* 2. *secundi.*]

AB × AM + AB × BM = quad. AB: ergo

quad. AB = quad. AH + quad. BF:

Sed quad. AB est potentia lateris pentagoni: quad. AH potentia lateris decagoni: quad. BF potentia exagoni in eodem circulo

culo inſcripti: ergo potentia lateris pentagoni = potentiæ lateris exagoni, & decagoni. q. e. d.

Propoſ. XII. *Theor.* XII.

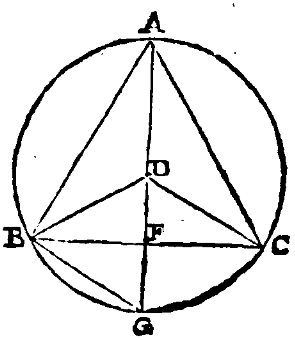
Si in circulo inſcriptum fuerit triangulum æquilaterum ABC.

Dico potentiam lateris trianguli AB triplam eſſe potentiæ ſemidiametri DA.

Conſtructio.

DUcatur diameter AG, quæ ſecet BC in F: addanturque rectæ DB, BG.

Demonſtratio.



QVia ſemicirculus ABG = ſemicirculo ACG, atque [*per* 29. *tertij*.) arcus AB = arcui AC: erit arcus BG = arcui CG:

Cum autem [*per* 29. *tertij*) arcus BGC ſit tertia pars totius periphæriæ ABCA, & BG ſit dimium arcus BGC erit arcus BG pars ſexta ejuſdem periphæriæ ABCA: quare recta BG erit latus exagoni (*per corol. prop.* 15. *quarti*] = ſemidiametro DB.

Quoniam verò in triang. ABG (*per* 31. *tertij*) angulus ABG eſt rectus.

[*per* 47. *pri.* quad. AG = $\left.\begin{array}{l}\text{quad. } AB \\ \text{quad. } BG\end{array}\right\}$

Sed (*per* 4. *ſecundi*]

quad. AG quadruplum quad. *BG*: ergo

$\left.\begin{array}{l}\text{quad. } AB \\ \text{quad. } BG\end{array}\right\}$ quadrupla quad. *BG*: igitur

quad.

quad. *AB* triplum quad. *BG* : quare potentia *AB* lateris trianguli est tripla potentiæ *BG* lateris exagoni. q.e.d.

Corollarium I.

EX demonstratis in hoc Theoremate colligitur, potentiam diametri circuli sesquitertiam esse potentiæ lateris trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti: cum enim [*per demonstrata*) quad. AG quadruplum sit quad. *BG*;& quad. *AB* triplum ejusdem quad. *BG*: erit quad.AG sesquitertium quad. *AB*. q.e.d.

Corollarium II.

PAriter colligitur *BC* latus trianguli æquilateri in circulo inscripti, bifariam dividere semidiametrum DG in F : quia (*per demonstrata*]

quad. *AB* triplum quad. *BG*:

qualium igitur partium quad. *AB* est 12. talium partium quad. *BG* erit 4.

Sed [*per 47. primi.*)

quad. *BG* = quad. *BF* + quad. FG: ergo

quad. *BF* + quad. FG erit earumdem partium 4.

Cum autem latus *BC* [*per corol.* 1.] sit bifariam divisum in F; sitque [*per hyp.*] *AB* = *BC* : erit *AB* duplum *BF* : quare (*per 4. secundi.*] quad. *AB* quadruplum quad. *BF* : igitur qualium partium quadratum *AB* est 12, talium partium quad. *BF* erit 3;

Sed [*per demonstrata*)

quad. *BF* + quad. FG earumdem partium erat 4: igitur quad. FG erit 1 : ergo quad. *BG*, seu quad. DG quadruplum quad. FG. quare DG dupla FG. q.e.d.

Euclidis Elementorum finis.