

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

Ymp. ellon. T. 16. de aye mps
ed.
LES
QUINZE LIVRES
DES ELEMENTS
D'EVCLIDE.

Traduits de Latin en François:

Par D. HENRION *Mathematicien.*

SECONDE EDITION,

Reueü, corrigée & augmentée.

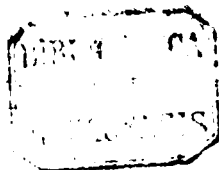


J. Bap.^{ta}

= Vanden Driessche

A PARIS,
Chez JEAN ANTHOINE IOALLIN, dans
la cour du Palais, entre les deux grandes
portes, proche la barriere du Tresor.

M. DC. XXI.
Avec Privilege du Roy.



3-11-64
Bureau of
Minerals

to [illegible]



A MESSIRE CHARLES
DESCOUBLEAU, MARQUIS
de Sourdy, & d'Alluie, Comte de la
Chapelle Belloüin, Baron d'Auneau,
& Mondoubleau; Seigneur de Ioüy,
Montrichard, la tour d'Argy, & au-
tres lieux: Conseiller du Roy en ses
Conseils d'Estat & Priué, & Capitai-
ne de cinquante hommes d'Armes
d'ordonnances de sa Majesté.



ONSEIGNEUR,

Il y a quelques années que j'employay mes
heures de loisir à la traduction des Ele-
mens tant de la Geometrie d'Euclide, que des Sphéri-
ques de Theodose, en intètion de les mettre au iour, es-
clairer de vostre illustre nom, m'assurant que l'appro-
bation que vous feriez d'icelles traductions leur ser-
roit de touche, comme ces Elemens seruent de guide
aux amateurs de la diuine Mathematique: car tout
ainsi que ceux là trauiilleroient en vain, qui vou-
droient paruenir au but d'une vraye demonstration

EPISTRE.

par quelque voye contraire à celle desdicts Elemens ; de mesme ceux aussi se monstreroient temeraires & ridicules, qui se voudroient ingerer de contrarier à ce que vous auriez approuué, veu qu'outre le solide iugement dont la nature vous a doué, & la grande cognoissance que vous auez, non seulement des choses concernant la milice, mais aussi en toutes les sciences liberales, & principalement en la Mathématique ; vous auez esté si bien instruit és bonnes lettres, que vous pouuez voir & entendre les plus graues autheurs en leurs vrayes sources & langage naturel. Or suiuant ma premiere resolution, ie vous presentay ma traduction des Spheriques de Theodose, & non celle des Elemens d'Euclide, à raison qu'elle fut imprimée en mon absence ; mais maintenant qu'elle est prestée de voir le iour pour la deuxiesme fois, beaucoup mieux estoffée, & polie qu'en l'Edition precedente, ie la vous offre, Monseigneur, avec ceste assurance que vous la receurez en vostre sauuegarde & protection, d'un aussi gracieux visage & liberal accueil, que d'une deuote humilité & respectueuse obeissance le sacrifice vous en est faict par

Vostre tres-humble & tres-obeissant seruiteur.

D. HENRION.



D. HENRION.

A V L E C T E U R.



L y a dix ou vnze ans , que voyant que personne n'auoit encore traduit en nostre langue, tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public, m'excita d'entreprendre cette traduction: Mais comme ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preuenue de Monsieur Dounot: ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein, me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'une iuste translation: Mais voyant en lisant ladite traduction, que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Auteur en plusieurs endroits, & mesme introduit de nouvelles demonstrations vicieuses & erronnées: cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres: & neantmoins i'usay de quelque surseance, esperant que par une seconde impression, ledit Dounot pourroit émander la premie-

re: Mais en l'année 1613. voyant qu'iceluy Dounot auoit fait faire ladite seconde impression, & en icelle corrigé peu de fautes, & mesmes qu'il y en auoit de nouvelles, cela me fit lors résoudre à mettre en lumiere cette miennē translation, pour le soulagement des François amateurs des disciplines Mathematiques: Elle fut donc imprimée en l'année 1614, mais si à la hâte, que ie n'eus le loisir d'en mettre la coppie au net, ny mesme d'en voir aucune épreuve, m'estant fié de ce, à quelqu'un qui s'en acquita si mal, que l'impression estant faite i'y trouuay tāt de fautes, que ie fus long temps en doute si ie la deuois aduoüer, & recognoistre l'ouurage pour mien, mais en fin ie le laissē aller au iour, m'estāt persuadé que les beneuolles Lecteurs excuseroient ces fautes, & supplēeroient aux manquemens qu'ils y trouueroient, iusques à ce que le temps me peut permettre d'en faire faire vne autre impression plus correcte. Ayant donc eu quelque loisir, ie me suis mis à reuoir, corriger, & augmenter en diuers lieux cette mienne traduction d'Euclide, & icelle fait mettre sous la presse; à l'impression de laquelle i'apporteray tel soing & diligence, que i'espere la garantir non seulement de toutes les fautes qui s'estoient glissées en la premiere impression, mais aussi l'exempter de beaucoup d'autres qui y pourroient de nouveau arriuer. Or voicy comme ie me suis comporté en cette traduction d'Euclide: Premièrement ie me suis efforcé de rendre les demonstrations des Anciens, & principalement de Theon, lesquelles Proclus assure estre d'Euclide,

quelquesfois plus briefues, autant que la matiere l'a peu permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant où il y auoit de la superfluité, & éclaircissant où il y auoit trop de briefueté, fuiuant en ce Commandinus & Clavius: voire mesme en quelques endroiets où i'estimois les demonstrations de Theon trop longues & embrouillées, ie les ay totalement delaiſſées pour en prendre d'autres, non ſeulement plus briefues, mais auſſi claires & intelligibles. Outre ce-là i'ay adiouſté en diuers endroiets pluſieurs Problemes & Theoremes vtils & dignes d'eſtre ſçeus, leſquels i'ay tiré de diuers bons Auteurs. D'auantage i'ay taſché d'éclaircir les plus obſcures definitions d'Euclide, qui à faute d'eſtre bien priſes, en ont fait chopper pluſieurs, comme l'a tres-bien remarqué Clavius. Et d'autant que les doctes Commandinus, Stheuin & Dibuadius ont eſtimé que le dixième liure de ces Elements (lequel eſt tenu par pluſieurs fort difficile) ſeroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y ioignant les nombres, ie les ay adiouſtez aux endroiets plus difficiles & obſcurs, me ſervant du travail des ſuſdits Auteurs. Finalement voyant que chacun n'entendoit pas les operations des nombres radicaux & ſourds, comme eſtans éloignées de celles de l'Arithmetique vulgaire, leſquelles neantmoins ſont neceſſaires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales; en la première impreſſion i'auois fait un ſommaire & abrégé de l'Algebre, lequel nous auons retranché en cette, à cauſe qu'il groſſiſſoit par trop ce volume, &

aussi qu'il estoit inutile à beaucoup: Neantmoins afin de contenter ceux qui le desireront voir, nous avons ioinct ce sommaire d'Algebre, avec plusieurs autres traictez de Mathematiques, recueillis en un volume intitulé, Collection Mathematique, lequel a esté depuis peu mis en lumiere à mon grand regret, attendu qu'entre tous ces diuers traictez, il y en a trois qui ont esté imprimés à mon desceu, sur quelques copies tirées d'aucuns de mes disciples, aussi bien que certaines leçons d'Horologeographie qu'on a mise à la fin d'un autre traicté de ce mesme subject, fait par un nommé P. de Flourrieres. Voila donc mon travail; reçois-le (amy Lecteur) attendant que ie te puisse bailler le second volume de mes memoires Mathematiques, & quelques autres œures de plus grande estude que cette traduction.

Maintenant parce que ces Elemens d'Euclide seruent d'entrée à toutes les autres disciplines Mathematiques, i'ay estimé qu'il seroit bon auparavant que nous venions à les interpreter, de reciter succinctement, (comme ont fait Commandin & Clavius) d'où les disciplines Mathematiques ont pris leur nom: quelle est leur diuision: par qui elles ont esté premierement inuentées: & qui sont ceux par qui elles ont esté depuis augmentées: combien grande est leur excellence, & vtilité, & telles autres choses qui conuiennent à nostre subject.

*Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté
ainsi appellées.*

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la quantité pour leur objet, ont pris leur nō de la diction Grecque $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ ou bien $\mu\alpha\theta\eta\mu\epsilon\iota\varsigma$, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens, estimans que les ames raisonnables estoient contenues en vn nombre certain & déterminé, & qu'elles passoient d'un corps en vn autre (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) témoignent que ces disciplines mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles, nous acquerons le ressouvenir & la reminiscence de cette science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faussement) estoit informée & instruite auparauant qu'elle fust entrée dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts Mathematiques obtiennent le nom de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedēt tousiours de certains principes cogneus auparauant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amènent pour confirmer ce qu'elles veulent mōstrer, les choses qui n'ont pas esté assez expliquées ny demōstrées auparauant.

Division des disciplines Mathematiques.

Les Pythagoriens, lesquels ont esté suivis presque

de tous les Mathematiciens , & de plusieurs Philosophes, ont diuisé toutes les disciplines Mathematiques en quatre parties , sçauoir Arithmétique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur object, est ou discrete, sous laquelle tous les nōbres sōt cōpris, ou continuë, sous laquelle sont comprises toutes les grandeurs, & que l'une & l'autre partie est considerée, tant selon soy, qu'en comparaison d'une autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'une & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmetique traite de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant soigneusement toutes les proprieté & passions des nombres. La Musique traite de la mesme quantité discrete, ou bien d'un nōbre cōparé avec un autre, entend qu'elle considère les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quātité cōtinuë, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finalement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'un continuel mouuement. Or à ces quatre sciences Mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & la Geometrie sont appellées pures; mais la musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traitant en quelque maniere que ce soit de la quantité, telle qu'est la Perspective, la Geographie, & autres semblables, peuuent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles dépendent.

Quelques anciens Geometres diuisent les disciplines Mathematiques d'une autre maniere: car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement es

choses intellectibles séparées de toutes matieres, & aucunes és choses sensibles, de telle sorte qu'elles touchent la matiere subiecte aux sens: du premier genre, ils establisent deux premieres & principales sciences, l'Arithmetique, & la Geometrie: Mais au dernier genre, ils en constituēt six, Astrologie, Optique, Geodesie, Canonique, ou Musique, Supütatrice & Mechanique. Ils disent que l'Astrologie, est vne science qui discoure des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celestes; & de leurs distances à la terre, & d'autres choses semblables: Et derechef de ceste science, ils en constituent trois parties: La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimension des heures, par la position des Gnomons: La metheoroscopique, laquelle enseigne la difference des éléuations; trouue les distances des Astres, & enseigne plusieurs autres & diuers Theoremes Astrologiques: Et la Dioptrique, laquelle discerne par instrumens Dioptriques les distances des planettes, & autres estoilles. Ils disent que l'Optique est engendrée de la Geometrie, pour ce qu'elle se sert de rayons visuels, comme de lignes & d'angles qui sont constituez d'iceux rayons: Or elle est diuisée en trois parties: en l'Optique, qui est le nom general, Catoptrique, & Scenographie, ou comme quelques-vns aiment mieux Sciagraphie. L'Optique ou perspective, rend la cause des apparences, lesquelles ont de coustume se presenter à nous, autrement qu'elles ne sont, à cause des diuerses leituations, & distances des choses qui tombent sous la veüe, comme de la coïncidence de paralleles, & de l'aspect des quarteaux, comme si c'estoient cercles: La Catoptrique ou speculaire vniuerselle, a diuerses refractions pour son object: Et la Sciagra-

phie, ou Designatrice des ombres, monstre par quel-
 le maniere se peut faire, que les choses qui paroîs-
 sent és images, semblent plaisantes & non difformes,
 pour les distances & hauteurs des choses designées.
 Ils appellent Geodasie la science, laquelle mesure les
 choses qui consistent en quantité, comme les tas &
 monceaux des choses materielles, ainsi que les Co-
 nes, & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle
 fait, non pas par lignes droictes intellectuelles, com-
 me de la Geometrie, mais seulement par les sensuel-
 les. Cette Geodasie, comme la Geometrie est diui-
 sée en la partie qui mesure les plans; & en celle qui
 mesure les solides. Or quelques vns, entre lesquels
 est Pédiasmus, comme rapporte Clavius au com-
 mencement du sixième liure de la Geometria practi-
 que, disent que Geodasie n'est que cette partie de
 Geometrie, laquelle enseigne à partir ou diuiser les
 superficies: comme s'il falloit partir vn champ ou
 piece de terre, ou autre superficie entre diuerses per-
 sonnes, cela seroit proprement appellé Geodasie.
 Ces anciens la appellent Canonique ou Musique, la
 science qui considere les raisons apparentes des ac-
 cords des sôs, & qui se sert partout de l'aide des sês,
 & laquelle cômme dit Platon, semble auoir preferé les
 oreilles à l'entendement. La Supputatrice quant à eux,
 est la mesme que ce que nous appellôs arithmetique
 pratique: Car elle considere les nôbres, non pas és
 choses intellectuelles, mais cômme és choses sensuelles.
 Et finalement la mechanique, laquelle cōsiste en la co-
 gnoissance des choses sensuelles & conjointes à la
 matiere; ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il
 y en a vne qui est effectrice des instrumens de guer-
 re, tels que l'on dit qu'Archimede en auoit construits,
 pour faire resistance à ceux qui auoient assiegé tant

par mer que par terre la ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle enseigne à construire certains instrumens, qui par le moyen des vents, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibe & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par diuers moyens imitent les cōuolutions & mouuemens des choses animées, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit. Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellées centropōderantes. Et finalement il y en a vne qui est appelée effectrice des Spheres, à l'imitation des circōuolutions celestes, telle qu'Archimede en a aussi fabriqué: Et pour dire en vn mot, toute science est mécanique, laquelle a la force de mouuoit la matiere. Or voila comme les Anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Jean de Broyart

Les histoires tesmoignent, que toutes les disciplines Mathematiques ont tiré leur origine de diuers Autheurs, voire mesme que chacune de ces sciences n'ont pas acquis vne perfection dès le commencement, mais qu'elles ont procedé peu à peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers inuenteurs de l'Arith. ont esté les Pheniciens, à cause de leurs traffics & commerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentée merueilleusement, & esclarcie de diuers Problemes & Theoremes. Quant à la Musique plusieurs historiens ont laissé par ecrire, qu'elle a esté premierement inuentee par Mercure, laquelle

depuis il communiqua & apprit à Orphee Musicien fort estimé, & Orphee à Thamyre & à Linus; & Linus à Hercules; & ainsi par succession continuelle d'autres Musiciens excellens, de temps en temps elle est paruenue iusqu'à nous. Mais la Geometrie, selon Procle a esté trouuee par les Egyptiens, & a tiré son origine du mesurage des terres labourables; car comme l'inondation du fleuve du Nil confondoit & gastoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoistre l'estendue des siennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs esprits à la maniere de mesurer les terres, afin que par ce moyen on rendist à chacun le sien: Laquelle maniere de mesurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, si est-ce toutesfois que de là elle prit son nom de Geometrie, qui signifie autant que l'art de mesurer la terre. Or peu à peu la Geometrie commença à estre plus polie, & non contente de ses limites, elle s'appliqua aussi à mesurer les corps celestes, & enseigna les principes de l'Astronomie, de l'Optique, & de plusieurs autres disciplines qui dependent d'icelle, comme des racines. L'on dit que Thales Milesien la transféra d'Egypte en Grece, & depuis plusieurs Philosophes & renommez Mathematiciens l'ont enrichie & embellie de plusieurs demonstrations: entre lesquels ceux-cy sont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras, Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theæterus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentin, Euclide, Serenus, Hypsicles Alexandrin, Archimede Syracusien, Apollonius Pergæus, Theodose Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexan-

drin, Ptolomee, Eutocius Ascalonite, Pappus, Proclus, & plusieurs autres innombrables, lesquels il seroit long de rapporter. Finalement, plusieurs estiment que l'Astronomie a esté premierement inuentée par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré son origine, que de ses espaules il auoit soustenu le ciel, à cause de l'excellente cognoissance qu'il auoit de l'Astronomie. Les autres estiment que par longue obseruation les Chaldéens ont inuété la science des astres. D'autres font les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceste science. Les autres les Assyriens. Et finalement les autres estiment que ceste gloire & loüange doit estre deferee aux Babylonniens. Or en ceste sciëce, comme elle est tres-excellente, aussi y a-il eu plusieurs Autheurs excellents qui y ont trauaillé, lesquels nous ne rapporterons icy pour briefuer. Ces quatre principales disciplines Mathematiques ayans esté inuentées, toutes autres qui traitent de la quantité en quelque sorte que ce soit, ont esté facilement deriuées d'icelles, tout ainsi que petits ruisseaux d'vne fontaine. *J. V. Volant*

L'excellence des sciences Mathematiques.

D'autant que les disciplines Mathematiques traitent des choses, lesquelles sont considerées sans aucune matiere sensible, encore qu'elles ne soient naturellement sans matiere, il est euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphysique, & la science naturelle, si nous cōsiderons leur sujet, comme Procle le prouue fort bien. Car le sujet de la Metaphysique est separé de toute matiere, tant intellectuelle que sensuelle: mais le sujet de la Physique est conioinct à la matiere sensible, d'où vient

que puis que le sujet des disciplines Mathématiques est considéré hors de toute matière sensuelle, mais non hors de toute matière intelligible : il est évident qu'il est moyen entre ces deux-là. Mais s'il faut estimer l'excellence d'une science par la certitude des démonstrations desquelles elle use, sans doute les disciplines Mathématiques tiennent le premier lieu entre toutes : Car elles démontrent toutes choses desquelles elles entreprennent la dispute, par des raisons très-fermes, & les confirment de telle sorte, qu'elles engendrent véritablement une science en l'esprit de ses auditeurs, & ôte tous les doutes : ce qu'à peine pouvons-nous attribuer aux autres sciences, veu qu'en icelles souvent l'entendement est en suspens & en incertitude par la multitude des opinions, & diversité des avis sur la vérité des conclusions : ce que témoignent ouvertement tant de sectes des Peripateticiens, (afin que ie laisse tous les autres Philosophes à part) lesquelles ayant pris leur origine d'Aristote, comme les ruisseaux de leur source ou fontaine, sont tellement en discord, & entr'elles, & quelquesfois avec leur auteur même Aristote, qu'on ignore tout à fait ce que veut dire Aristote ; d'où vient qu'une partie suit les interprètes Grecs, comme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philosophes qu'ils appellent Reaux, (tous lesquels se vantent d'être Peripateticiens) laquelle diversité ie n'estime pas que personne ignore combien est esloignée des démonstrations Mathématiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent aujourdhuy la même pureté de la vérité, la certitude des choses, la force & fermeté des de-

monstrations qu'elles ont eu par tant de siècles precedens. A cecy se rapporte ce que Platon dit en son dialogue du souverain bien, que ceste science là est la plus digne, & la plus excellente, laquelle est la plus amatrice de sincerité & verité. Veu donc que les disciplines Math. desirent, ayment, & cultivent si soigneusement la verité, que non seulement elles n'admettent rien qui soit faux, mais mesme rien qui soit seulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonstrations tres-certaines, il n'y a point de doute qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres sciences.

Diverses utilitez des disciplines Mathematiques.

Les disciplines Mathematiques ne doivent pas estre seulement estimées vtils, mais aussi fort necessaires, tant pour apprendre les autres arts parfaitement, que pour bien instituer & gouverner la chose publique : Car comme enseigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entrée à la Metaphysique, si ce n'est par les Mathematiques. Car si des choses sensibles, lesquelles le Physicien considere, nous voulons esleuer nostre entendement sans aucun milieu, aux choses du tout separées de la matiere sensible, lesquelles le Metaphysicien considere, nous nous aveuglons nous-mesmes, tout ainsi qu'il arrive à celui qui de quelque lieu tenebreux, où il a esté long temps, vient tout soudain paroistre en vne grande lumiere. C'est pourquoy auparavant que l'entendement monte, des choses Physiques qui sont comioinctes à la matiere subiecte aux sens, aux choses Metaphysiques qui en sont separées, il est necessaire de peur d'estre esblouy de leur clarté, qu'il

soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerées par les Mathematiciens, afin qu'il les puisse plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon asseure que les Mathematiques esleuent l'esprit, & le subtilisent, pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'utilitez pour bien entendre les saintes Escritures, Sainct Augustin, sainct Hierosme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entendues de plusieurs par l'ignorance des nombres, pource qu'elles ont esté couchees dans l'Escriture mystiquemēt. Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement vtils aux Theologiens. Et Sainct Basile est grandement loüé par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien versé en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquerir parfaitement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. L'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droit sont proposez pour guide, pour bien & sainement philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples Mathematiques, pour ceste raison principalemēt, afin que les choses qui semblent estre enuelopees de grandes difficultez fussent rendues plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques; d'où vient qu'an-

ciennement la frequentation du college de Platon estoit interdite à ceux qui n'estoient pas bien versez és disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son Timee, il appelle les Mathematiques le chemin de routes vrayes eruditions : voire mesme il dit en son Philebe, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Mathemat. Je pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages, tant de Platon, qu'autres Philosophes excellents, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneuës, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'utilité & necessité de l'Arithmetique, non seulement à ceux qui s'employent au commerce, mais presque à toutes sortes de personnes ? Qui ne void l'utilité de la Geometrie ; puis que c'est elle qui conduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens : l'Ingenieur en la construction des forteresses, en l'inuention des machines, tant offensives, que deffensives : puis que c'est elle (dis-je) qui monstre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs ; la diuision des terres, à prendre, & representer le plan des villes, ou autres lieux : à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes ; à diuiser & compasser en vn champ les espaces pour camper vne armée ; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon quelle figure ou forme, il doit ranger son armée, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est : Bref, qui ne void combien l'Astrologie est vtile, puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons ? Et qui est-ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller és contrées lointaines, voir le nouueau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons

de ces quartiers là ? Et comment l'Hystorien rapportera-il la scituation des climats, les grandeurs, diametres , & circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie ? Que dirons-nous plus ? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tres-vtile à Iosephe, Sacrificateur des Iuifs, lors qu'à la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armée Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres luy sauua la vie ? La mesme vtilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb, grand Admiral de l'Océan Occidental, sous Dom Ferrand, Roy de Castille, premier explorateur du nouveau monde: Car estant paruenue pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & là perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillée, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans d'icelle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouuoir tous vaincre & sacager: Mais ledit Colomb cognoissant par l'Astrologie qu'une nuit prochaine, il se feroit vne grande Eclypse de Lune, il dit à quelques-vns des habitans, que s'il ne luy vendoiert des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang ; & pour tesmoignage que cela aduiendroit ainſi, ils verroient en un tel iour, & à vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant aduenue ainſi, lesdits habitans ignorans l'Astrologie, adiouterent foy aux menaces dudit Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adiouterons encore icy, que Hieron

Roy

Roy de Syracuse, avoit fait bâtir vne navire pour en-
voyer à Ptolomée Roy d'egypte, d'une telle grandeur,
que tous les Syracusiens ensemble ne la pouvoient
remuer de sa place. Vn seul Archimede par le moyen
de la Geometrie, fist que le Roy seul, sans aucune
peine la remua de son lieu, dont le Roy & tous les
Syracusiens furent grandement émerveilléz. Qui
est donc celuy qui ne doine desirer les disciplines
Mathematiques sur toutes les autres scionces, puis
qu'elles sont non seulement agreables, mais aussi
tres-viles & necessaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne sont pas bien d'accord, qui a esté
Euclide, qui a composé ces Elemens, & en quel
temps il a floré. Car plusieurs pensent que ç'a esté
vn Philosophe de la ville de Megare, disciple de So-
crates, qui institua la secte appelée par luy Megari-
que. Mais si nous croyons Proclus, Autheur excel-
lent, & autres anciens, nostre Euclide a esté depuis
celuy de Megare, & a floré au temps de Ptolomée
premier, lequel commença à regner en Egypte apres
la mort d'Alexandre, la 115. Olimpiade, & l'an 319.
auparavant la natiuité de nostre Seigneur, comme le
rapporte Jean Lucide : Ce qui est plus vray sembla-
ble, d'autant que Diogenes Laërtius rapportant
tous les ouvrages d'Euclide Megarien, il ne fait aucu-
ne mention de cét admirable volume des Elemens
Geometriques, par lequel nostre Euclide s'est ac-
quis vne renommée & gloire immortelle. C'est
pourquoy nostre Euclide tres-subtil Geometrien,
est bien autre que ce Megarien là, d'autant qu'estant
tres-bien versé en la doctrine des Academicques, il

applicqua son esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent, que par le commun consentement de tous, il a obtenu le premier lieu entre les Mathematiciens. Or il a écrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donnez; l'œuvre des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tres-subtil des diuisions des superficies, attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Dée, & de Federic Commandin. Pareillement il a écrit les Elemēs Coniques, comme dit Proclus, lesquels toutesfois ne sont pas encore paruenus jusques à nous, & autres petits traictez semblables. Mais principalement il a tissu ce volume des Elemens Geometriques, qui par le consentement de tous, ne sera iamais assez louié, avec vn ordre si admirable, & l'a rempli d'une si grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont écrit de semblables Elemens, (car comme dit Proclus, il y en a plusieurs qui en ont composé) qui l'ait égalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'un qui l'ait surpassé, auquel volume comme il a fait paroistre la grande subtilité de son esprit, ainsi il n'a pas estimé qu'il fallut mettre au jour toutes les choses qui touchent la Geometrie, mais seulement les choses qui luy ont semblé viles & necessaires pour tous, lesquelles il a confirmées & fortifiées d'argumens & raisons tres-fermes & tres-solides. Or l'on peut recognoistre clairement, tant des choses que nous auons déjà représentées, que de ce que nous disons enoie presentement, combien est grande l'vtilité & excellence de ces

Elemens Geometriques d'Euclide, & consequemment de toute la Geometrie. Ces Elemens sont ainsi appelez, d'autant que nous ne pouuons sans cela entreprendre aucunes œures Mathematiques, tant s'en faut que nous en puissions retirer aucun fruit: Car tous les Autheurs des Mathematiques, comme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodose &c. se seruent en leurs demonstrations de ces Elemens d'Euclide, comme de principes certains, & desquels les demonstrations estoient déjà il y auoit long temps recogneuës & tenuës pour constantes & asseurées de tout le monde. Parquoy il est necessaire que celuy qui desire-sçauoir, & se rendre familiere quelconque partie des Mathematiques, apprenne auparauant ces Elemens Geometriques. Car d'iceux Elemens, comme d'une fontaine plantureuse, est produite la dimension des latitudes, longitudes, altitudes & profondeurs: la diuision des terres, montagnes, & isles: l'observation des astres du ciel, qui se fait par les instrumens: la composition des horologes scioteriques: la force des machines: la raison des pois: & cette diuersité d'apparences qu'on voit és miroirs, és peintures, és eaux, & en l'air diuersemēt illuminé. Par le moyen dis-je de ces Elemens, a esté trouué le milieu & centre de toute cette machine du monde; & ont esté trouuez les poles, à l'entour desquels il se tourne continuellement: & a esté recherchée & trouuée la figure & quantité de toute la terre. Par la force de cette seule science est monstrée & demonstrée la conuersion de tout le ciel, & des astres: leur leuer & coucher: leur approchement & éloignement: leur ascension & descention; la variété du iour & de la nuit, & des temps en toute l'année, par toute la scituation des endroits de la

terre. Pareillemēt les conjōctiōs des Planettes, leurs oppositiōs, & diuers aspects, sōt cogneus si facilēmēt que les Mathematiciens peuuent dire leurs lieux au ciel, & predire assūrēmēt les Eclipses, soit de Soleil, soit de la Lune, aupaŗuāt qu'elles aduēnēt, pour si long temps qu'il leur plaist. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuvre de Dieu perceptible aux yeux de nostre entēdemēt.

La diuision de Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie est diuisée en la contemplation des plans, qui est appellée du mot general Geometrie; & en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellent par vn nom propre & particulier la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerselle se propose ce but, qu'elle constituē ou les plans, ou les solides, ou bien estans constituez, elle les compare entr'eux, ou les diuise. Or nostre Euclide voulant laisser vne parfaicte cognoissance en ces Elemens des choses Geometriques, il traite des plans aux six premiers liures; & aux cinq derniers, il dispute fort subtilement des solides; & recherche leurs proprietēz les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appelez corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez parfaicement sans la cognoissance des lignes cōmensurables, & incommensur. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enseignemens requis pour l'intelligence, & dimēsiō des magnitudes, il a mis son dixiēme liure deuant la Stereometrie, auquel il discoure subtilement de ces sortes de lignes là: Et qui plus est, Eu-

clide ſachant que ce traité des lignes commensurables & incommensurables ne ſe peut bien faire ſans la cognoiſſance des nombres; deuant le dixième liure, il traite des paſſions ou proprieté des nombres, és trois liures qui le precedent. C'eſt pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze liures, (deſquels les treize premiers ſont attribuez de tous à Euclide ſans aucun contradict, mais les deux derniers ſont attribuez à Hypſicle Alexandrin) ſe pourra à bon droit diuiſer en quatre parties; tellement que la premiere partie contenuë és fix premiers liures, traite des plans: la ſeconde comprenant les trois liures ſuiuans recherche les paſſions des nombres: La troiſième partie, laquelle le dixième liure conſtituë ſeul, traite des lignes commensurables & incommensurables. Et finalement la quatrième partie contenuë aux cinq autres liures, comprend la ſciëce des corps ou ſolides. La premiere partie ſe diuiſe derechef en trois: Car aux quatre premiers liures, il eſt traité des plans abſolument, en recherchant leur égalité & inégalité; mais au cinquième liure, il eſt traité en general des proportions des magnitudes; & au ſixième, ſont examinées les proportions des figures planes.

Que c'eſt que Probleme, Theoreme, propoſition, Lemme, Coroll. & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonſtration de Mathematiques, eſt diuiſée par les Anciens Autheurs, en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, cette demonſtration qui cõmande & enſeigne à conſtituer quelque choſe: Et Theoreme, la demonſtration laquel-

le recherche seulement, quelque passion ou propriété d'une ou plusieurs quantitez ensemble : Bref les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affirmations & proprieté des choses déjà faites & construites : Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appelez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant nécessaire à leur demonstration, ils le prennent & prouvent auparavant que venir à leur dite demonstration principale, afin de la faire plus evidente & briefve. Mais ce que nous appellons Corollaire, est une consequence que nous tirons de ce qui a esté démontré en quelque proposition. Et finalement, ce qu'on nomme Scholie, est une annotation qu'on fait seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veu que toute doctrine & discipline est engendrée d'une cognoissance precedente, comme le témoigne Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedez, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes ; les disciplines Mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedez, elles confirment leurs Problemes & Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitions, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traitant de la science, l'estans trompez par l'ambiguité

des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou demandes, qui sont choses si claires & evidentes en cette science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement del'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au troisiéme genre sont referez les Axiomes, ou communes notions del'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & evidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, ausquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & evidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subject de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes, qu'on pourroit nommer en François Avant-propos. Nous viendrons donc maintenant à l'exposition des principes d'Euclide.





ELEMENT

PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



Es Physiciens disent que le point est le moindre object de la veüe: & iceluy peut estre décrit avec ancre ou autre chose. Mais les Mathematiciens reietant ceste definition, disent que le point est vn object de l'intellect si subtil qu'il ne peut estre divisé en aucunes parties: Et iceluy ne se peut escrire, mais seulement entendre & imaginer: bien est vray que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous seruons du point Philique. Le point n'a donc aucunes des dimensions geometriques; c'est à dire, qu'il n'a ny lon-

gueur, largeur, ny espaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est vne longueur sans largeur.

Après le point vient la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou coulement du point en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide; puis que le point du coulement duquel elle est produite n'en a aucune; & par consequent la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë a seulement vne dimension, sçauoir est longueur: car n'ayant aucune largeur, elle sera aussi necessairement sans espaisseur.

3. Les extremités des lignes, ce sont points.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à vn point & acheuent aussi à vn point: Car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres sortes de lignes, auxquelles on ne peut assigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, est celle qui est également comprise entre ses points.

Les Mathématiciens ont diuerses sortes de lignes; mais Eucl. ne traite icy que des deux plus simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire: en ceste definition il parle de la droicte, laquelle est le plus court chemin d'un point iusques à l'autre: ou

comme dit Archimede, c'est la plus courte d'entre ses extremittez.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Après la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë, & qui a vne seule dimension, Euclide definit la superficie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimensions : sçauoir est, longueur & largeur; & comme la ligne est produite par le flux ou coullement du point, ainsi la ligne se mouuant en trauers, produit la superficie.

6. Les extremittez de la superficie, ce sont lignes.

Il faut icy entendre des superficies bornées, & terminées par lignes droictes : car il y a bien plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la superficie spherique, qui circuit & environne vn corps entierement rond & spherique. Comme donc la ligne terminée commence à vn point, & finit à vn autre point, ainsi aussi la superficie terminée commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7. Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes.

Ceste definition de la superficie plane se rapporte à celle de la ligne droicte: Car comme celle-cy est

la plus courte d'entre les extremittez, ainsi aussi la superficie plane est celle qui est la plus courte d'entre les limites ou extremittez, tellement qu'il n'y a aucun endroit d'icelle superficie qui soit plus esleué ou abbaislé que seldites extremittez. Mais toutes superficies esquelles il y a des endroits les vns plus esleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'est la superficie interieure d'une voute ou arcade, ou bien l'exterieure d'un globe, ou d'une colonne ronde, & aussi d'un cone, &c. sont appellées superficies courbes: & icelles sont de plusieurs sortes, c'est à sçauoir conuexe, comme la superficie exterieure d'une sphere, ou d'une colonne ronde; & concaue, comme la superficie interieure d'une voute ou arcade.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en vn plan non directement.
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droictes, l'angle sera appellé rectiligne.

Quand deux lignes constituées en quelque superficie plane, concurrent en vn point d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes, s'appelle angle plan. Or tout angle plan est fait, ou de deux lignes droictes, & alors il se nomme rectiligne: ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curviligne: ou bien d'une ligne droicte, & d'une courbe, & alors il

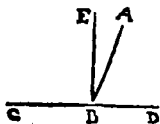
s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Dounot, & pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la première impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il estoit necessaire qu'estans continuées du poinct de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy, dont s'ensuiuroit que deux cercles s'entretouchant en vn plan, ou qu'une ligne droite touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p. 3. & comme l'a aussi bien demonsté Clavius sur la mesme proposition, où il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennēt encore ceste opinion, se moquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droite touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'attouchemēt. Or la grandeur d'un angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

10. Quand vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre esgaux entr'eux, les angles sont droicts; & la ligne tombante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

11. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Si vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite, ne s'encline pas d'auantage d'un costé que de l'autre, mais fait égale inclination, & par conséquent deux angles égaux entr'eux, chacun d'iceux est appellé angle droit, & la ligne ainsi tombante, perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe. Mais quand ceste ligne tombante s'encline plus d'un costé que de l'autre, elle fait deux angles inégaux entr'eux, dont le plus grand est appellé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en vn plan concurrent plus de deux lignes en vn mesme point, & par conséquent constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour eiter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu monstre le point, auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extremes signifient les commencemens d'icelles lignes, qui font iceluy angle: Comme pour exemple en ceste figure où les lignes AB & EB concurrent au point B de la ligne CD: & EB est autant inclinée vers CB qu'à DB, mais AB panche vers la partie DB. Pour donc exprimer ces angles, nous disons que les deux CBE, & DBE sont droits, puis que la ligne EB tombant sur CD ne panche d'un costé ny d'autre, comme fait AB; & par conséquent icelle EB est perpendiculaire à CD: Mais que l'angle ABC, qui est plus grand que le droit EBC, est obtus, & ABD, qui est moindre que le droit DBE, est aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de cognoistre facilement les



angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainsiles poinçts sont termes ou extremitiez des lignes; les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dictée figure; ains seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux poinçts, n'est pas dite figure: mais toutes superficies & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont enuironnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le cercle, l'Ellipse, & la sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle est vne figure plane, contenüe par vne seule ligne qu'on appelle circonference; vers laquelle toutes les lignes droictes menées d'un seul poinçt de ceux qui sont en icelle figure, sont egales.

16. Et ce poinçt là est appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, est vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonferéce d'iceluy cercle, le diuise en deux egalement.
18. Demy cercle, est vne figure comprise du diametre, & moitié de la circonferance.

Toutes ces definitions sont aisées: car le cercle, sa circonferance, son centre, son diametre, & le demy cercle declarez en icelles definitions, sont toutes choses cognues, voire aux plus ignorans.

19. Portion ou segment de cercle, est vne figure comprise d'une ligne droicte, & de partie de la circonferance.

Ceste definition est repetée au troisieme liure, auquel lieu elle conuient mieux qu'en cestuy-cy.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droictes.
21. Figure de trois costez, est celle qui est comprise de trois lignes droictes.

22. Figu-

22. Figure de quatre costez ; est celle qui est comprise de quatre lignes droictes.
23. Figures multilataires ou de plusieurs costez , sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes est infiny : Les Geometres les nomment, tantost par le nombre de leurs costez, tantost par le nombre de leurs angles.

24. Or des figures de trois costez , celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.
25. Triangle Ifocele, qui a deux costez egaux seulement.
26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.
27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.
28. Ambligone, qui a vn angle obtus.
29. Oxigone , qui a les trois angles aigus.
30. Mais des figures de quatre costez,

- celle qui a les quatre costez egaux,
& les quatre angles droicts s'appelle
le quarré.
31. Quarré long, qui a les quatre angles
droicts, mais non pas tous les co-
stез egaux.
32. Rhombe, qui a les quatre costez
egaux, mais non pas les quatre
angles droicts.
33. Rhomboide, qui a les angles, & aus-
si les costez opposez egaux en-
tr'eux, sans estre equilateral, ny
rectangle.
34. Toute autre figure de quatre co-
stез, est appelée trapeze.
35. Lignes droictes paralleles, sont cel-
les qui estant sur vn mesme plan, &
prolongees de part & d'autre ne se
rencontrent iamais.
- Icy finissent les definitions du premier liure d'Eu-
clide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est sou-
uent parlé de parallelogramme, lequel Euclide n'a
point desiny, nous adjousterons icy sa definition.
36. Parallelogramme, est vne figure

quadrilatere quia les costez oppo-
sez parallels ou equidistans.

Telle figure est tousiours l'une de ces quatre:
Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboïde.

P E T I T I O N S O V demandes.

1. D'un point donné à un autre
point, mener une ligne droicte.
2. Continuer infiniment une ligne
droicte donnee & terminee.
3. Descrire un cercle de quelque cen-
tre & interual que ce soit.

Euclide ne se sert en ces Elemens cy que de deux
sortes de lignes simples, sçavoir est de la droicte, &
de la circulaire; la description desquelles estant fort
facile, il demande qu'il luy soit permis de descrire,
ou de s'imaginer des lignes droictes de telle lon-
gueur qu'il vouldra: Pareillement des cercles de tel
diametre qu'il vouldra, sans qu'il soit contrainct de
demonstrer que cela est possible.

C O M M U N E S S E N T E N C E S.

1. Les choses egales à une mesme, sont
egales entr'elles.

2. Si à choses egales, on adjouste choses egales, les tous sont esgaux.
3. Si de choses egales, on oste choses egales, les restes sont egaux.
4. Si à choses inegales, on adjouste choses egales, les tous sont inegaux.
5. Si de choses inegales, on oste choses egales, les restes sont inegaux.
6. Les choses doubles d'une autre sont egales entr'elles.
7. Les choses qui sont moitez d'une mesme, ou de choses egales, sont egales entr'elles.

Est aussi manifeste que les choses triples d'une mesme, ou quadruples, ou quintuples, &c. sont aussi egales entr'elles. Pareillement que les choses qui sont tierces parties d'une mesme, ou quart, &c. sont aussi egales entr'elles.

8. Les choses qui conuiennent entr'elles, sont egales entr'elles.

C'est à dire, que deux grandeurs seront egales, si estant posees l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'adjustent entr'elles: comme deux lignes droictes, seront dictes estre egales, si l'une estant posee sur l'autre, celle qui est po-

see dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excedee d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront egaux, quand le sommet de l'un, estant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, c'est à dire que les lignes de l'un tombent sur celles de l'autre: car par ainsi les inclinations des lignes seront esgales.. Ainsi aussi deux superficies seront egales, quand l'une estant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excedee par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Or Donnott dit que conuenir, c'est auoir les extremittez sur les extremittez: ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple, vne ligne droite peut bien auoir ses extremittez sur les extremittez d'une ligne courbe, laquelle neantmoins ne luy sera egale. Ainsi aussi vne ligne courbe peut bien auoir ses extremittez sur les extremittez d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtant egale. Or il est manifeste que de cest axiome on peut bien conuertir & prendre pour principe, *que les lignes droictes egales conuenient.* Pareillement, *que les angles rectilignes egaux conuenient.* Semblablement, *Que les superficies planes egales & semblables conuenient.* On peut bien encore tirer quelques autres conuerles de cet axiome: mais de le vouloir conuertir vniuersellement (comme quelques-vns) c'est se moquer, veu que si on trouue vne ligne courbe egale à vne droictte, elles ne conuiendront pas pourtant: & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiline egal; lesquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire mesme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quelque autre figure rectiligne: lesquels pourtant ne peuvent iamais conuenir. Ce qu'a bien recogneu Donnott en cet endroit, & neantmoins il conuertit

vniuersellement ce principe au scholie de la 4. p. 1.
concluant ainsi : *Car c'est vne necessité geometrique que
les choses egales conuiennent, & que celles qui conuiennent
soient egales.*

9. Le tout est plus grand que sa partie.
10. Tous les angles droicts sont egaux
entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & pren-
dre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn
angle droit, est aussi droit.

11. Si vne ligne droicte tombant sur
deux autres lignes droictes, faict
les angles interieurs d'un mesme
costé plus petits que deux
droicts ; icelles deux lignes estans
continues à l'infyn, se rencon-
treront du costé où les angles
sont plus petits que deux droicts.
12. Deux lignes droictes n'enferment
pas vn espace.



ELEMENT

PREMIER.

PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

O R la ligne droicte donnee AB; sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interualle de AB, soit descript le cercle BCD:

Item du centre B, & de l'interualle de la mesme

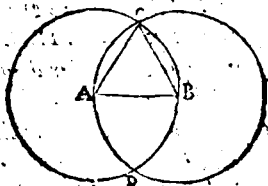
AB, soit descript vn autre

cercle ACD, couppant le premier es poincts C & D,

de l'un desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, &

CB: le dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

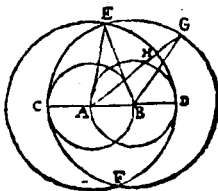
Car le costé AC, est egal au costé AB par la 1.^e deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le



costé BA, est égal au costé BC. Donc par la 1. com. sent. les costez CA & CB seront egaux, étant chacun égal à AB : & partant le triangle ABC descript sur AB, est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur une ligne droitee donnée un triangle isoscelle, & un Scalene, ce que nous ferons aussi en ceste maniere. Soit une ligne droitee donnée AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient escripts deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'autre vers les circonferences jusques en C & D : puis du centre A & interneale AD soit descript le cercle DEF : Item



du centre B, & interneale BC, le cercle CEF, coupant le premier es points E & F, de l'un ou l'autre desquels, qui est de E, soient menees aux points A & B, les deux lignes AE, EB : le dis que le triangle AEB, fait sur la ligne donnée AB, est isoscelle, qui est que les deux costez AE, EB, sont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15. def. AE, est égal à la ligne AD, & icelle AD est double de AB, d'autant que BA, DB sont egales entr'elles; aussi AE sera double de AB. Derechef parce que BE est égal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE sera double d'icelle AB. Veu donc que l'un & l'autre costé AE, BE est double de la mesme AB, ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partans plus grâds que la ligne AB. Donc le triangle AEB est isoscelle. Maintenant si du point A, on tire la ligne droitee AG, à la circonferance EGF, qui ne soit la mesme que AE ou AD, coupant la circonferance EHD en H, & de

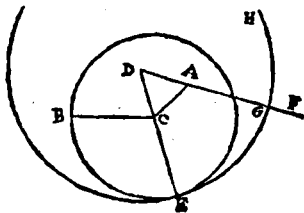
On mene à B la ligne droite GB , sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB , lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. definition, tant AH , AD que BG BC sont egales. Mais AD , BC sont doubles de AB ; d'icelle seront aussi doubles, AH , BG ; & partant plus grandes qu'icelle AB . Ven donc que AG est plus grande que AH , ou que BG , le triangle AGB sera scalene.

PROB. 2. PROP. II.

D'un point donné, mener vne ligne droite egale à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné A , & la ligne droite donnée BC ; & il faut du point A , mener vne ligne droite egale à icelle donnée BC .

De l'un ou l'autre extreme de la ligne donnée BC , sçavoir est de C , comme centre, & de l'intervalle de CB , soit descript le cercle BE : puis du point donné A , au centre C , soit menée la ligne droite AC (sinon que le point A fut donné en la ligne BC) sur laquelle AC par la precedente proposition soit descript le triangle equilateral ADC ; & soit continué le costé DC , jusques à ce qu'il rencontre la circonférence en E , mais le costé DA tant qu'on voudra en F . En apres du centre D , & de l'intervalle de la ligne droite DE , soit descript le cercle EGH coupant la ligne DF



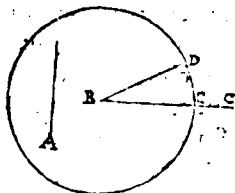
en G: le dis que la ligne AG qui est menée du point donné A, est égale à la ligne droite donnée B C.

Car D G & D E sont égales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste D A & D C qui sont égales, estant DAC triangle equilateral; les restes C E & A G seront aussi égales par la troisieme com. sent. Mais C B est égale à C E, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc A G sera égale à C B, par ce que les choses égales à vne sont égales entr'elles. Nous auons donc du point donné A mené la ligne A G égale à la ligne droite donnée B C. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estās données, oster de la plus grande, vne ligne droite égale à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & B C, desquelles B C est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne égale à A. A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne B C, sçauoir est au point B, soit posée par la precedente prop. la ligne B D égale à la moindre A: puis du centre B, & de l'intervalle B D soit décrit vn cercle coupant B C en E: le dis que la ligne B E est égale à A. Car d'autant que par la quinziesme definition, les lignes B D, B E sont égales, & par la construction B D est égale à



A; par la premiere commu. sent. BE sera aussi egale à A. Nous auons donc osté de BC, la ligne BE egale à A, ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

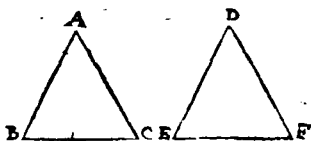
Cette construction a esté retenüe par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Dounot qui l'a changée: car à l'extremite de la moindre ligne, il en pose vne egale à la plus grande; quoy faisant il aduient que d'icelle plus grande ligne donnée, il n'en coupe pas vne egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'une egale à icelle.

THEOREME I. PROP. III.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera egale à la base; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D:

Je dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC egal au triangle DEF.



Qu'il ne soit ainsi : si on entend le point D estre posé sur le point A, & que D E tombe sur A B, aussi D F tombera sur A C; autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez A B & A C sont egaux aux costez D E & D F, chacun au sien, ils conuiendront par la huitième commune sentence conuertie, & partant les extremitéz E & F, tomberont sur les extremitéz B & C. Ainsi les deux bases B C & E F conuiendront, & seront egales par la mesme huitième commune sentence. Et le triangle D E F conuiendra avec le triangle A B C, & l'angle B conuiendra avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F : partant egaux. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generale, estans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'adient pas en toutes propositions, comme on peut voir en nostre traité des triangles spheriques, c'est pourquoy nous estendrons toutes ces propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les specifie.

THEOR. 2. PROP. V.

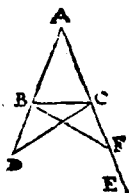
Les triangles Ifofceles, ont les angles sur la base egaux : & les costez egaux

estans continuez, les angles extérieurs sous la base sont egaux.

Soit le triangle Iſoſcele ABC : le dis que les angles ABC , & ACB , sur la base BC , sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC , costez egaux iusques en D & E : & soit fait AF egale à AD par la troisieme proposition, & soient menées les lignes BF & CD . Les deux triangles ADC , & AFB , ayans l'angle A commun, ont les deux costez AD & AC egaux aux deux costez AF & AB , chacun au sien; & par la quatrième proposition, la base BF sera egale à la base CD , & l'angle ABF egal à l'angle ACD , & l'angle D egal à l'angle F . Item les triangles DCB , & FCB , ayant l'angle D egal à l'angle F , & les deux costez DB , & DC egaux aux deux costez CF & FB : (car BF a esté prouvé tantost egal à DC ; & AD , AF estans egaux; & AB , AC aussi egaux; les restes BD , & CE seront aussi egaux) par la quatrième proposition la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien : ſçavoir l'angle BCD , sera egal à l'angle CBF . Et qui des angles egaux ABF & ACD , oste les angles egaux CBF , & BCD ; les demeurans ABC , & ACB , seront egaux.

Pour la seconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles extérieurs sous la base BC , sont egaux, ſçavoir DBC à ECF , elle a esté ſuffiſamment demonſtrée, lors qu'on a prouvé que les triangles DBC , & ECB , auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Iſoſceles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

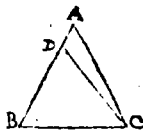
Ceste proposition est aussi vraie és triangles equilateraux; Car les deux costez AB , AC du triangle ABC sont égaux entr'eux, ou l'autre costé CB , est pareillement égal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arrive au triangle Isoscele; Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC , sont égaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi égaux entr'eux, comme il appert par la demonstration cy dessus.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles égaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles feront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle ABC , duquel les deux angles ABC , & ACB sur la base BC sont égaux: Je dis que les deux costez AB & AC qui soustendent les angles égaux sont aussi égaux.

Autrement soit AB plus grand que AC , s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie égale à C par la troisième proposition: soit icelle BD égale à AC , & soit menée la ligne DC : ainsi les triangles DBC , & ACB , ont les deux costez BD & BC égaux aux deux costez AC , & CB , & l'angle B égal à l'angle ACB , & par la quatrième proposition ils



feront egaux ; ce qui est impossible : car l'un est partie de l'autre. Donc les costez AB , & AC n'estoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

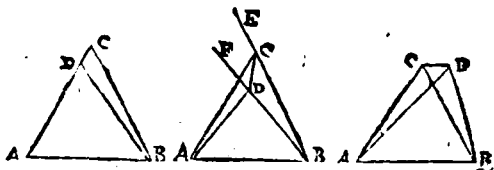
Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle equiangular, c'est à dire qui a tous les angles egaux, est equilateral: Car par ce qui a esté icy demonstté, les angles ABC , ACB estés egaux, les deux costez AB , AC , seront pareillemēt egaux: Mais si les deux angles A & B estoient encore egaux, aussi les costez CA , CB subterdans iceux angles seroient aussi egaux: & partant tous les trois costez AB , AC , BC egaux entr'eux, puis que les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.

T H E O R. 4. P R O P. VII.

Si des extremittez de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droictes, se rencontrant à vn poinct ; des mesmes extremittez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de mesme part, se rencontrant à vn autre poinct.

Soit la ligne AB , des extremittez de laquelle soient menées les deux lignes droictes, Ac & CB se rencontrant au poinct C : le dis que des mesmes extremittez A & B , de la mesme part que c , on ne peut mener deux autres lignes droictes égales à icelles

AC, BC, chacune à la sienne, qui se rencontrent à vn autre point que c ; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC, & de l'extremité B, la ligne BD égale à BC, il ne peut estre que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.



Car si faire se peut que le point de rencontre D tombe ailleurs qu'au point C : ou iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC ; ou dans le triangle ABC ; ou hors iceluy.

Premierement iceluy point de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC : car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout : ce qui est absurde ; partant la rencontre D, ne se fera point sur AC ; ny sur BC, à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC : & après auoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera isoscele, & par la cinquième proposition les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE ; & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE. Derechef puis que les lignes BC, BD,

BD, sont posées égales, le triangle $c d b$ doit estre Iſoſcele; & partant les angles $c d b$ & $d c b$ ſous la baſe $D C$ ſeront egaux par la cinquième propoſition. Mais il a eſté demonſtré que l'angle $C D F$ eſt beaucoup moindre que l'angle $d c b$: dont le meſme angle $C D F$ eſt moindre que l'angle $D C E$, & auſſi egal à iceluy: ce qui eſt abſurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D , hors iceluy triangle $A c b$, comme en la 3. figure: apres avoir mené la ligne $C D$, il ſ'enſuivra que les deux triangles $A d c$ & $b c d$ ſeront Iſoſceles; & partant qu'ils auront les angles ſur la baſe cd egaux: ſçavoir eſt $A c d$ à $A d c$, & $b c d$ à $b d c$. Mais iceluy $b d c$ eſt plus grand que $A d c$: donc auſſi $B C D$ eſt plus grand que $A c d$; c'eſt à dire la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle $A B C$, ny dedans iceluy, ny ſur les lignes $A c$ & $b c$: Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre c : Parquoy ſi des extremittez de quelque ligne d'icelle, &c. Ce qu'il falloit demonſt.

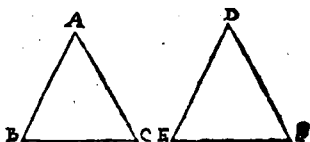
S C H O L I E.

Donnot a traduit ceſte propoſition ainſi. Si deux lignes droictes menées des extremittez d'une autre ligne droicte ſe rencontrent en un poinct, & des meſmes extremittez on en mene deux autres egales aux deux premieres, elles ſe rencontreront au meſme poinct, pourveu que chacune ſoit du coſté de ſon egale. Ce qui eſt fort eſloigné de l'intention d'Euclide: car il ne dit pas que les deux lignes ſe rencontreront (choſe qui eſt euſdemment fauſſe, veu qu'inſinſites lignes peuvent eſtre menées, comme dit eſt, lesquelles ne ſe rencontreront pas) mais bien que ſi elles ſe rencontrent, ce ſera au meſme poinct que les premieres.

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base egale à la base; ils auront aussi l'angle egal, compris d'iceux costez egaux.

Soient deux triangles ABC , DEF , desquels le costé AB , est egal à DE ; AC à DF , & la base BC à la base EF : Je dis que les angles A & D compris d'iceux costez egaux, sont egaux.



Car puis que la base BC est égale à la

base EF ; si on entéd icelles estreposées l'une sur l'autre, elles cōviendront tōbant le point E sur le point B ; & F sur C : & par la 7. prop. les deux lignes ED & FD , qui sont egales à BA & CA , se rencōtreron au point A , & cōviendront avec icelles lignes BA & CA : partant cōviendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. comm. sont. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

Puis que la base EF conuient avec la base BC , & les costez DE , DF conuient aussi avec les costez AB , AC ; il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D ; mais qu'aussi l'angle E est egal à l'angle B , & l'angle F , egal à l'angle C , & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Coupper en deux également vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC , lequel il faut coupper en deux également : c'est à dire en deux angles égaux entr'eux.

Soit de AB & AC retranché deux parties égales AD & AE : & apres auoir mené la ligne DE , sur icelle soit décrit le triangle equilateral DEF par la premiere prop. & soit menée la ligne AF : Je dis que icelle ligne coupe l'angle BAC en deux également.



Car les lignes AD & AE du triangle DAE estans égales aux deux lignes AE & AF du triangle EAF , & la base DE égale à la base EF , (estant DEF triangle equilateral) par la 8. proposition, l'angle DAF fera égal à l'angle EAF : & partant l'angle BAC est couppe en deux également. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné la pratique de ceste proposit. en nostre Geometrie pratique Prob. 3. Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi coupper vn angle rectiligne en quatre parties égales, en huit, en seize, en trente-deux, & ainsi consecutiuement, en procedant toujours par augmentation d'ordre.

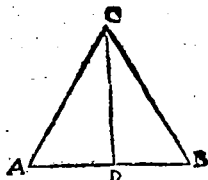
Car apres qu'un angle & ligne est couppe en deux egalement, si on diuise derechef chaque partie en deux egalement, on aura quatre angles egaux. Que si on coupe derechef chacun d'eux en deux egalement, nous aurons huit angles egaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Coupper en deux egalement vne ligne droicte donnee & terminée.

Soit la ligne droicte donnee & terminée AB : laquelle il faut coupper en deux egalement.

Soit sur icelle ligne construit le triangle equilateral ACB par la 1. propos. & par la precedente prop. soit l'angle C couppe en deux egalement par la ligne CD : Je dis que CD coupe AB en deux egalement en D .



Car puis que les angles du point C sont egaux, & le triangle ACB est equilateral, les deux triangles ACD , & BCD , ont deux costez egaux à deux costez, & un angle egal à un angle; & partant par la 4. prop. la base AD sera egale à la base DB . Donc AB est couppee en deux egalement en D . Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la pratique de cette proposition en nostre Geometrie pratique Prob. 1. Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi coupper vne ligne droise finie en quatre

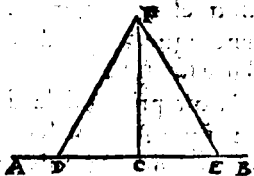
parties égales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droite terminée en tant de parties égales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement que mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnée, & d'un point en icelle, esleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnée AB , & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB .

Soient du point C prises les deux lignes égales CD & CE par la troisiéme proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DEF , & de C à F soit menée la ligne CF : le dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandée.



Car les triangles DFC & CFE ayans deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, sçauoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF egale à la base FE , à cause que le triangle DEF est equilateral; par la huietiéme proposi. les angles au point C , contenus des costez egaux, seront egaux: & partant par la dixième definition, ils sont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB , ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

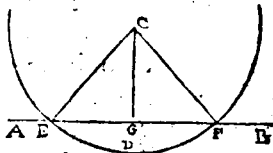
La pratique, tant de cette proposition que de la suivante est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. où l'apprentis trouuera soulagement à quelque doute qui luy peut auenir en la pratique de ceste proposition.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaïsser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminée, & d'un poinct hors icelle.

Soit la ligne droicte donnée & interminée AB, & le poinct hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque poinct D; puis du cêtre C, & interualle CD, soit descript le cercle EDF, couppant la ligne AB és poincts E & F; puis par la 10. prop. soit couppée EF en deux egaux. au poinct G, & soit menée la ligne CG, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.



Car estans tirées les lignes droictes CE, CF; les deux costez EG & GC du triangle EGC, seront egaux aux deux costez FG, & GC du triangle FGC, vn chacun au sien, & la base CE est égale à la base CF, estans icelles tirées du centre C vers la circonférence, & par la 8. prop. les angles du poinct G seront

egaux, & partât par la 10. definit. ils seront droicts, & la ligne CG perpendicul. à AB . Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

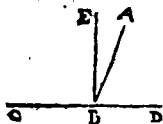
Au lieu de prendre le point D , de l'autre costé de la ligne AB , Donnott dit qu'on le prenne à l'adventure dans icelle AB , & que descrivant vn cercle du centre C & intervalle CD , il coupera la ligne AB : ce qui n'est pas universellement vray, car il est manifeste que si le point D estoit pris d'adventure en G , le cercle ne couperoit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le point D ne doit donc estre pris à l'adventure dans la ligne AB , comme veut Donnott.

T H E O R. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles; ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB , laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD , fait les angles CBA , & DBA : Je dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD , ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droicts par la 10. deff. Si elle ne l'est pas, soit leuée la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droicts par la susdite definition: mais les deux angles CBA & DBA ensembles, occupent autant

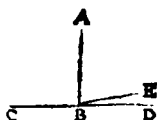


d'espace qu'iceux angles droicts CBE , DBE , & contiennent avec eux: Donc par la 8. commune sentence CBA & DBA seront egaux à deux droicts. Parquoy si vne ligne droicte tombante sur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à l'extremité d'une ligne droicte se rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles egaux à deux droicts; icelles lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne AB à l'extremité de laquelle B se rencontrent deux autres lignes droictes CB & DB , faisant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: Je dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que $CB D$ est vne ligne droicte.



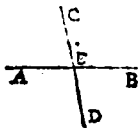
Autrement, si $CB D$ n'est ligne droicte, soit continuée CB directement, tant qu'il sera de besoin: ce qui sera adiousté à CB directement, ou bien tombera au dessous de BD , ou au dessus: soit au dessus, & soit CBE , ligne droicte; les deux angles ABC , & ABE , seront donc egaux à deux droicts par la 13. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droicts, & par la 10. com. s'ensuyuent tous les angles droicts sont egaux entr'eux: donc par la premiere commune sentence, ces deux angles ABC , & ABD seront egaux aux deux ABC , & ABE .

Parquoy ostant l'angle commun ABC , les restans ABD , & ABE , seront egaux, le tout à la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte CB , estant prolongee, elle ne tombera pas au dessus de BD : mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité: donc CB , & DB , se rencontroient directement. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB , & CD , se coupans l'une l'autre au point E : Je dis que les angles opposez au sommet AEC , & DEB , sont egaux.



Car d'autant que sur AB , tombe la ligne CE , les angles AEC , & BEC , sont egaux à deux droicts par la 13. proposition. Item pour la mesme raison CEB , & DEB , seront egaux à deux droicts: parrant les deux AEC , & CEB , sont egaux aux deux CEB & DEB . Que si on oste le commun CEB , le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB . Le mesme se peut dire des deux AED , & CEB . Parquoy si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

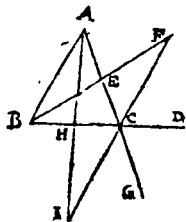
Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes

s'entrecompant, font au point de leur section quatre angles égaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituex tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'un seul & mesme point, qu'ils seront seulement égaux à quatre angles droicts : car si de E on mene tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituex au point E, en plusieurs parties : toutes lesquelles prises ensemble seront égales aux quatre angles d'iceluy point, c'est à dire à quatre droicts.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'un triangle estant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des opposez intérieurement.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D. Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé intérieur BAC, ou que ABC, autre opposé intérieur.



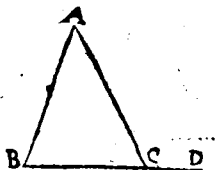
Qu'ainsi ne soit: Apres auoir couppe AC en deux egalemēt en E, soit menée la ligne BE continuée iusques en F, & soient faites BE & EF égales, & soit menée FC. Les deux triangles AEB, & CEF, auront les deux costez AE & EB égaux aux deux costez CE & EF par la construction, & par la precedente proposition l'angle AEB est égal à l'angle CEF: donc par la quatriesme proposition les bales AB, & EC seront égales; & les autres angles égaux, chacun au sien: & partâ l'angle BAE, sera égal à l'angle ECF,

qui n'est que partie de l'angle ACD , lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé BAC . Que si le costé AC est prolongé en G , & BG coupé en deux également en H , & on tire la ligne AHI , tellement que HI soit égale à AH , & soit menée CI : On démontrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG , est plus grand que l'interne & opposé ABC . Mais par la proposition précédente à iceluy BCG , est égal l'externe ACD : donc iceluy ACD , est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC . Parquoy en tout triangle vn costé estant prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC : Je dis que les deux angles B , & ACB , sont plus petits que deux droicts: Item les deux B , & ACB : item les deux A , & B .

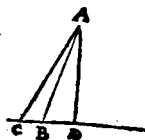


Car apres auoir continué le costé BC , iusques en D ; Il est euident par la 16. proposition que l'angle extérieur ACD , est plus grand que l'opposé intérieur B . Mais les deux ACD , & BCA , sont égaux à deux droicts, par la 13. prop. Parrant ABC , & BCA , sont plus petits que deux droicts. On démontrera pareillement que les angles A & ACB : Item les angles A & B , en prolongeant

vn autre costé, sont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste que d'un mesme poinct on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur vne ligne droite. Car si faire se peut, soient menees de *A* sur la ligne droite *BD*, les deux perpendic. *AD*, *AB*. Donc au triangle *ABD*, les deux angles internes *ABD*, *ADB*, seront egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible : Car il a esté demonstté cy-dessus que deux angles d'un triangle sont moindres que deux angles droicts.



Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté demonstté que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droicts, il est necessaire que s'il y en a vn droit ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres, soit aigu : car autrement en vn triangle seroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'ensuit encore de ceste prop. que si vne ligne droite, *AB*, fait avec vne autre ligne droite *CD*, angles inegaux, sçavoir est *ABD*, aigu, & *ABC*, obtus, & de quelconque poinct d'icelle *AB*, on tire vne perpendiculaire sur *CD*, comme *AD* : icelle perpendiculaire *AD*, tombera de la part de l'angle aigu *ABD*. Car qu'elle tombe, s'il est possible, du costé de l'angle obtus *ABC*. Donc au triangle *ABC*, les deux angles *ABC*, *ACB*, obtus & droit, sont plus grands que deux droicts ; mais aussi moindres que deux droicts. par ce-

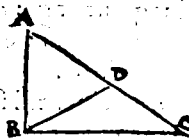
ste prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de *A*, ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus, & partant tombera du costé de l'angle aigu.

Est encore manifeste par ceste prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle isoscele, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient, d'un triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'un isoscele sont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux cy ensemble, que ces deux là, sont moindres que deux droicts par ceste proposition, chacun d'eux sera moindre qu'un droict, c'est à dire aigu: car s'il estoit droict ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVII.

De tout triangle, le plus grand costé
soustient le plus grand angle.

Soit le triangle donné *ABC*,
duquel le costé *AC* est plus
grand que le costé *AB*. Je dis
que l'angle *ABC*, est plus grand
que l'angle *ACB*.



Qu'il ne soit ainsi: Puis que *AC* est plus grand
que *AB*, soit d'iceluy retranché *AD*, egal à *AB*, &
soit mené *BD*. Le triangle *ABD*, est isoscele, & par
la 5. prop. les deux angles *ABD*, & *ADB*, sur la ba-
se *BD*, seront egaux. Or l'angle extérieur *ADB*, est
plus grand que l'opposé intérieur *C*, par la 16. prop.
Mais *ABC*, étant plus grand que *ABD*, il
sera aussi plus grand que son egal *ADB*: & à plus
forte raison *ABC*, sera plus grand que *C*. Par mesme

raison, si on pose le costé AC, plus grand que le costé BC; on démontrera l'angle A. BC estre plus grand que l'angle BAC, sçavoir est, si de CA on coupe vne ligne egale à CB, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, soustient le plus grand angle: Ce qu'il falloit demonstret.

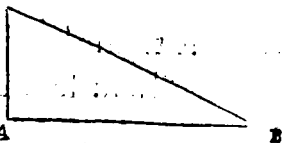
COROLLAIRE.

Il est donc manifeste par ceste demonstration que tous les trois angles d'un triangle scalenc sont inegaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC qui soustient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB, qui soustient vn moindre angle C.



Autrement, il sera egal, ou plus petit. Il ne peut estre egal, d'autant que le triangle seroit isoscele, & par la 9. prop. les deux angles A & C, seroient egaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi estre plus petit, d'autant que par la 18. pro. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par mesme raison on prouuera le costé BC, estre plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, estre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé: Ce qu'il falloit demonstret.

ELEMENT.
COROLLAIRE.

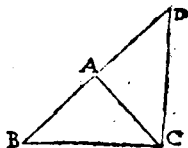
63

Il s'ensuit de ceste proposition, que si de quelcōque point on tire sur vne ligne droite tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toujours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux costez de quelle façon qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisieme.

Soit le triangle A B C. Je dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçavoir est A B, & A C, sont plus grands ensemble que le troisieme B C.

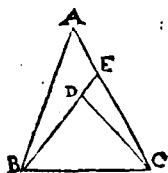


Qu'il ne soit ainsi : apres avoir proiongé B A iusques en D, & faict A D egal à AC, soit menée la ligne D C. Le triangle D A C. sera Isole, & par la cinquiesme propos. les deux angles ADC & ACD sur la base DC, seront egaux. Mais DCB est plus grād que DCA: aussi sera-il plus grand que son egal ADC : & partant par la 19. prop. B D sera plus grand costé que B C. Mais B D est egal aux deux costez AC & B A : donc iceux AC & B A seront plus grāds que B C. On demonsttera en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grands que l'autre. Parquoy deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre: Ce qu'il falloit demonsttrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremittez d'un costé de quel-
que triangle, on meine deux lignes
droictes se rencontrans au dedans
d'iceluy ; icelles seront plus petites
que les deux autres costez du trian-
gle, mais elles feront vn plus grand
angle.

Soit le triangle ABC , & des
extremittez du costé BC , soient
menées interieurement deux li-
gnes, BD , CD , se rencontrans
au point D : Je dis qu'icelles li-
gnes sont plus petites que BA ,
& CA : Mais que l'angle D , est
plus grand que l'angle A .



Qu'ainsi ne soit, soit continuée BD , iusques au
point E . Donc par la 20. proposition les deux co-
stés BA , & AE , du triangle BAE , seront plus grâds
que le troisieme BE . Que si à BA , & AE , plus
grands que BE , on adjouste chose commune EC ,
les tous CE , EB seront tousiours plus petits que les
tous CE , EA , AB , c'est à dire CA , AB . Pareillement
les deux costés CE , & ED , du triangle CED , sont
plus grands que le troisieme CD , auxquels si on ad-
jouste chose egale, sçavoir DB ; les tous CE , ED ,
 DB , ou CE , EB seront tousiours plus grands que
les tous CD , & DB . Mais il a esté demonstéré que
 CA ,

CA, AB sont plus grands que CE, EB : donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

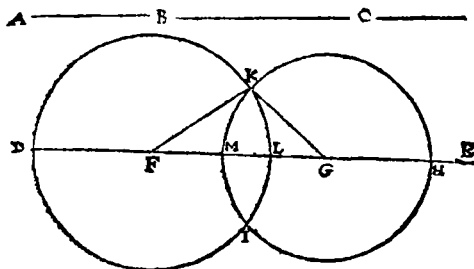
Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle D est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est extérieur au triangle CED, il sera plus grand que son opposé intérieurement CED par la 16. prop. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé intérieurement A : donc à plus forte raison D sera plus grand que A. Si d'oc des extremitez d'un costé de quelque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes, egales à trois autres donnees; mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles soient prises, soient plus grâdes que l'autre: D'autant que de tout triangle, les deux costez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, desquelles deux de quelle façon qu'elles soient prises sont plus grandes que la troisiésme: car autrement d'icelles on ne pourroit pas constituer vn triangle comme il appert de la 20. pr. en laquelle il a esté demonstté que de tout triagle deux costez sont tousiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle d'icelles, ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droiçte, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchée DF, égale à A; & puis du reste soit prise FG égale à B, & GH égale à C: & soit décrit vn cercle du centre F & interual FD: Item vn autre cercle du



centre G, & interual GH, coupant le premier cercle au point K, duquel soient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG sont égaux aux trois lignes données A, B, C.

Car FD, FK estans égales par la deff. du cercle: item GK & GH; il est euident que les trois costez du triangle FKG, sont égaux aux trois lignes FD, FG, GH lesquelles estans égales aux données, aussi les costez du triangle seront égaux aux lignes données. Nous auons donc fait vn triangle de trois lignes droiçtes, égales aux trois lignes droiçtes données A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

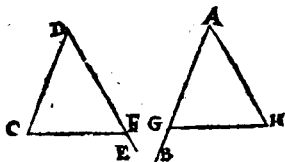
SCHOLIE.

La pratique tant de ce prob. que du suiuant, est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 11. & 4.

PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB : & le poinct en icelle A , sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné CDE .



Ayant pris és lignes CD, DE quelcōques poinctz C & F , soit menee la ligne CF : & sur AB soit construit par la prop. precedente le triangle AGH , ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDE , sçauoir est les deux costez GA, HA , aux deux costez CD, FD , & la base GH à la base CF . Il est euident par la 8. prop. que l'angle A sera egal à l'angle D donné. Nous auons donc fait sur AB l'angle GAH egal à vn donné CDE , ainsi qu'il estoit requis.

THEOR. 15. PROP. XXIII.

Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle cōtenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les deux costez AB ,

AC sont egaux

aux deux costez

DE, DF , chacun

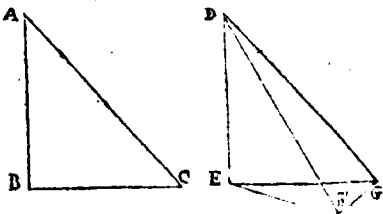
au sien: mais l'an-

gle A est plus

grand que l'an-

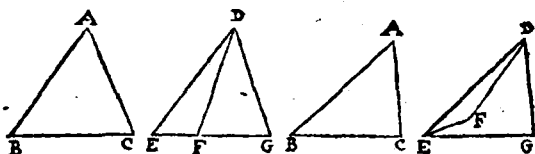
gle EDF . Je dis

que la base BC est plus grande que la base EF .



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE , & au point D , soit fait par la precedente prop. l'angle EDG egal à l'angle A ; (& la ligne droicte DG tombera hors le triangle DEF , puisque l'angle EDF a esté posé moindre que l'angle A) & soit posée DG , egale à DF , c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG , laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF , ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF , & soit tirée la ligne FG : D'autant que les deux costez AB, AC , sont egaux aux deux costez DE, DG , vn chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction: la base BC sera egale à la base EG , par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG , sont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF : donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le mesme angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le mesme angle EGF . Donc au triangle EFG , le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a esté démontré que EG est egale à BC : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui estoit proposé.

Maintenant que EG tombe sur icelle EF : d'au-



tant que comme dessus la base EG, sera égale à la base BC par la 4. prop. & EG est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : ce qui estoit proposé.

En troisieme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que les deux DG EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est égale à DF : donc EG est plus grâde que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est égale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez égaux, &c. Ce qu'il fall oit demonstrier.

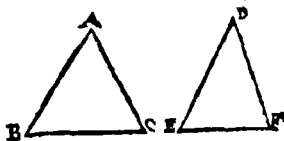
THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez égaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les deux costez AB & AC , sont egaux aux deux DE & DF , chacun au sien : Mais la base BC est plus grande que la base EF .

Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D .

Autrement il sera égal, ou plus petit. Mais il ne peut estre égal : d'autant que par la 4. proposition, les bases



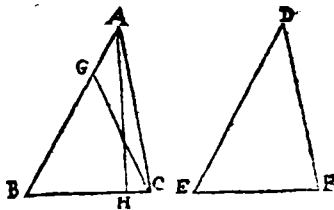
BC & EF seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peut estre plus petit ; d'autant que par la vingt-quatriesme proposition la base BC seroit plus petite que la base EF ; & elle a esté posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D , puis qu'il ne peut estre égal, ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé égal à vn costé, sçavoir est, ou celui aux extremittez duquel sont les angles egaux, ou

bien celuy qui soustient l'un d'iceux angles egaux : ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les angles B , & ACB , sont egaux aux deux E , & F , chacun au sien, & soit premierement le costé BC , aux extremitéz duquel sont les angles B , & ACB , egal au costé EF , aux extremitéz duquel sont les angles E & F . Je dis que les deux autres costez

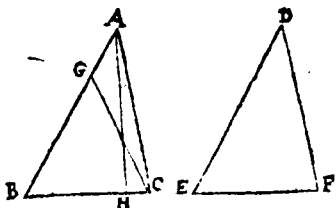


AB , AC , sont egaux aux deux autres costez DE , DF , chacun au sien, sçavoir est AB à DE , & AC à DF . Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D .

Car si AB n'est egal à DE , soit AB plus grand, duquel soit retranché BG egal à DE : puis soit tirée la ligne droite CG . Donc puisque les costez BC , BG , sont egaux aux costez EF , DE , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E , par la 4. prop. la base CG sera egal à la base FD , & les autres angles egaux.

aux autres angles, chacun au sien, c'est à sçavoir que l'angle BCG sera egal à l'angle F , auquel est aussi egal l'angle ACB par l'hypotese. Partant les deux angles ACB

& GCB seroient egaux, la partie au tout; ce qui est absurde. Donc le costé AB n'estoit pas inegal au costé DE , mais egal. Parquoy ven que les



costez AB, BC sont egaux aux costez DE, EF , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E ; la base AC sera egale à la base DF , & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D , par la 4. prop. de celiure. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant egaux deux autres costez, sçavoir est AB à DE soustendans angles egaux ACB & F . Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont egaux aux deux autres costez DF, EF , chacun au sien, c'est à dire AC à DF , & BC à EF : & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D . Car si le costé BC n'est egal au costé EF , soit le plus grand BC , duquel soit coupé BH egal à EF , puis tiré la ligne AH . Donc puis que les costez AB, BH sont egaux aux costez DE, EF , vn chacun au sien, & l'angle B est egal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera egal à l'angle F . Mais par l'hypothese l'angle ACB est aussi egal à l'angle F . D'oc l'angle AHB sera aussi egal à l'angle ACB , l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde: car il est plus grand par

la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé BF, ains egal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux costez DE, EF, chacun au sien, & par la 4. proposition, l'angle B estant egal à l'angle E, les bales AC, DF, seront egales, & les autres angles BAC & D aussi egaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

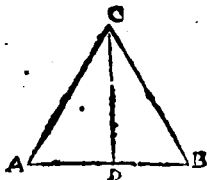
SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez vils & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou isoscele, estant menée vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egaleement, ou l'angle ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle coupe l'angle en deux egaleement, elle coupera aussi la base en deux egaleement: Mais si elle coupe en deux egaleement la base, elle coupera pareillement l'angle en deux egaleement. Et au contraire estant tirée vne ligne droicte perpendiculaire à la base, elle diuise en deux egaleement, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez egaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuise premierement l'angle C en deux egaleement. Je dis qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la diuise en deux egaleement. Car puis que les deux costez AC, CD, sont egaux aux deux costez BC, CD,

Et les angles qu'ils contiennent aussi égaux, par la quatrième proposition, les bases AD , BD seront aussi égales, Et les angles au point D égaux, Et partant droicts.



Que si la ligne droite CD diuise en deux également la ligne AB : ie dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB , Et que l'angle C est coupé en deux également. Car puis que les deux costez AD , DC , sont égaux aux deux costez BD , DC , Et la base AC égale à la base BC , par la 8. prop. les angles du point D seront égaux, Et partant droicts, Et la ligne CD perpendiculaire, Et par le corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi égaux.

Maintenant soit la ligne droite CD perpend. à AB : ie dis qu'elle coupe aussi la base BA , Et l'angle C en deux également. Car par la 5. pro. les angles A & B seront égaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont égaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , vn chacun au sien, Et le costé C d'opposé aux angles égaux A & B commun, par la 26. propos. les autres costez AD , BD seront aussi égaux, Et les autres angles à C pareillement égaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

Le second Theoreme est tel.

Le triangle auquel vne ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, diuise ou la base ou l'angle en deux également, a les deux costez comprenant iceluy angle égaux: Et si la base est diuisée en deux également, l'angle sera aussi diuisé en deux également: Mais si l'angle est diuisé en deux également, aussi sera la base diuisée en deux également.

Au mesme triangle ABC , soit CD perpendiculaire à la base AB , Et la diuise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont égaux, Et les angles à C aussi égaux. Car puis

que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçavoir droicts, par la 4. propos. les bases AC, BC , & les angles A, C seront pareillemens egaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD coupe en deux également l'angle C : ie dis que les costez AC, BC ; & les lignes AD, BD sont egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux costez AC, BC , & les costez AD, BD , seront egaux: Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes fait les angles opposez alternativement egaux; icelles deux lignes seront paralleles entre-elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD , sur lesquelles tombant la ligne droicte EF fait les angles BEF , & EFC alternativemēt egaux. Ie dis que AB & CD sont paralleles.

Car si elles ne sont paralleles, estans continuées, elles se rencontreront. Que si



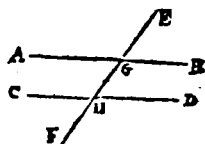
elles se rencontroient comme au point G , elles feroient vn triangle avec le costé EF , & l'angle extérieur $C F E$ seroit plus grand que l'opposé intérieur $F E B$, par la seizième proposition; ce

qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB , & CD ne se rencontreront jamais; & par la 25. des. icelles lignes seront paralleles entr'elles. Parquoy si vne ligne droicte tombante sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, fait l'angle exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé; ou bien les deux interieurs de mesme costé, egaux à deux droicts; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD , sur lesquelles tombant vne autre ligne droicte EF , elle fait l'angle exterieur EGA egal à GHC son opposé interieur de mesme costé. Je dis que AB & CD sont paralleles entre-elles.



Car puis que l'angle GHC est posé egal à l'angle EGA , auquel est aussi egal l'angle BGH par la quinzième proposition, les angles alternes BGH , GHC , seront egaux par la premiere commune sentence: partant les lignes AB , CD seront paralleles par la proposition precedente. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux an-

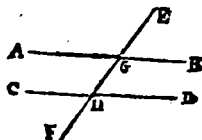
gles interieurs de mesme costé AGH , & CHG sont egaux à deux droicts, que aussi AB & CD seront paralleles. Car par la trezième proposition, les deux angles GHC & GHD sont egaux à deux droicts; partant aussi egaux aux deux AGH & GHC . Que si d'iceux angles egaux, on oste le commun GHC , les demeurans AGH & GHD se trouueront alternativement egaux, & par la vingt-septième proposition AB & CD seront paralleles. Si donc vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles opposez alternativement egaux; & l'exterieur egal à son oppose interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD . (en la figure de la precedente proposition) sur lesquelles tombe la ligne droicte EF . Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternativement sont egaux. Autrement s'ils ne sont egaux, l'un sera plus grand, ou plus petit que l'autre: Soit donc AGH plus petit s'il est possible, que GHD : & si à iceux angles inegaux on a adjousté chose

comm. ſçauoir l'angle GHC , les deux AGH & GHC ſeront plus petits que les deux GHC & GHD , leſquels par la 13. propoſit. eſtans egaux à deux droicts, AGH & GHC ſeront plus petits que deux droicts, & par la penultième, com.



ſent. les deux lig. AB & CD ne ſont point paralleles: ce qui eſt cõtre noſtre hypothèſe. Dõc il falloir que l'ang. AGH fuſt egal à l'ang. GHD ſon alterne oppoſé.

Pour la ſeconde partie. Ie diſ que l'angle extérieur EGB eſt egal à ſon oppoſé intérieur de meſme coſté GHD : ce qui eſt manifeſte par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, ſçauoir que les angles AGH & GHD eſtoient egaux, eſtant auſſi EGB egal à AGH par la 15. propoſ. & par la 1. com. ſentence EGB & GHD ſeront egaux: eſtans tous deux egaux au meſme AGB .

Pour la troiſième partie: ie diſ que les deux intérieurs de meſme coſté AGH & GHC ſont egaux à deux droicts: car ſ'il eſtoit autrement les lignes AB & CD ne ſeroient paralleles par la penultième commune ſentence, contre l'hypothèſe. Si donc vne ligne droite tombe ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

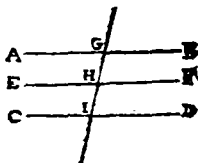
Les lignes droictes paralleles à vne meſme ligne droite, ſont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB , CD paralleles à vne meſme ligne droite EF . Ie diſ que AB & CD ſont

paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB , EF , CD , sont posées en vn mesme plan, soit tirée la ligne droite GH , qui les coup-

pe toutes trois, sçauoir est AB en G ; EF en H ; & CD en I . Et puis que AB est posée parallele à EF , les angles alternes AGH , GHE , seront egaux entr'eux par la precedente proposition. Dere-



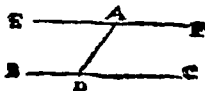
chef, puis que CD est aussi posée parallele à la mesme EF ; l'angle DIH sera aussi egal au mesme angle GHE , c'est à sçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DIH seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralleles entr'elles, par la vint-septième proposition. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droite sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 10. PROP. XXXI.

D'un point donné, mener vne ligne droite parallele à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné A , duquel faut mener vne ligne parallele à la donnée BC .

Soit menée la ligne AD faisant avec BC l'ang. ADC , & sur



icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallèle à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront parallèles entr'elles par la vingt-septième proposition. Nous auons donc d'un point donné A, mené vne ligne droicte EF parallèle à vne droicte donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

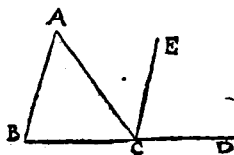
SCHOLIE.

Il est manifeste par ceste construction, que le point donné doit estre tellement scitué hors la ligne donnée, qu'elle estant continuée ne conuienne avec iceluy. Quant à la pratique de ceste proposition, nous l'auons enseignée en nos Memoires Mathematiques, Probl. 6. de la Geometrie pratique.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'un des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez intérieurs : & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont égaux à deux droicts.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé jusques en D. Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux opposez intérieurs A & B.



Qu'il

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mène CE parallèle à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les parallèles AB, EC , par la 29. pro. les angles BAC , & ACE , seront alternativement égaux: item l'extérieur ECD sera égal à son opposé intérieur ABC . Partant il est manifeste que le total ACD , est égal aux deux $A \& B$, opposez intérieurement.

Pour la seconde partie, que les trois angles $A, B \& C$ intérieurs du triangle ABC sont égaux à deux droits, il est évident, étant ACD égal aux deux $A \& B$. Mais $ACD \& ACB$, sont ensemble égaux à deux droits, par la 13. prop. Partant les trois angles intérieurs $AB \& ACB$, seroient aussi égaux à deux angl. droits. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

De ceste proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droits sont égaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne: & ce par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a de costez entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont égaux à deux fois un droit, c'est à dire à deux droits: Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont égaux à deux fois deux droits, sçavoir est à quatre droits: Mais ceux de la troisieme figure, sont égaux à deux fois trois droits, c'est à dire à six droits; & ainsi des autres. Or le lien qu'obtiens chascune figure rectiligne entre les figures rectili-

gues, est montré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas une superficie, & par consequent ne cōstituent une figure: mais sont requises au moins trois lignes droictes pour construire une figure rectiligne; d'où vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la dixième figure, puis que deux estans ostez de douze, restent dix: & ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenüe de douze costez, est la dixième, elle aura aussi douze angles equivalens à vingt angles droicts, c'est à sçavoir à deux fois dix angles droicts: Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenüe de dix costez, equivalent à seize angles droicts, puis qu'icelle figure est la huitième en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantième en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou de costez, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera diuisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux: le Pentagone en trois, &c. Veü donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposée, & tous

les angles de quelque triangle sont egaux à deux droicts; il est manifeste



que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont e-

gaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'est le nombre des triangles esquels elle se dinise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure est quantième en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est veu manifestement es figures cy deuant proposées.

Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre estans ostez, qu'il y a en icelles d'angles, ou de costez.

C'est à dire, que les angles de chasque triangle sont egaux à deux fois trois droicts; quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droicts: Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, sçavoir est vinge angles droicts, &c. Or la demonstration de cela est icelle. Si de quelconque point pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chasque triangle par la trentième-deuxième prop. sont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles, sont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: Et pariant si on oste ces angles là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le point pris estans ostez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais

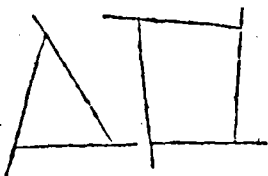
sons ces angles là d'alentour le point pris, sont seulement égaux à quatre droicts, ainsi que nous l'avons colligé de la quinzième proposition. Parquoy les angles de quel-



conque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.

Or il appert de ce que dessus, que si ch. que costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers une mesme part, tous les angles externes pris ensemble, seront égaux à quatre droicts. Car par la treizième proposition, les angles intérieurs pris avec les extérieurs, sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles intérieurs sont égaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous avons montré cy dessus;

partant les extérieurs sont toujours égaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles intérieurs & extérieurs ensemble, sont égaux à six droicts: comme il appert en ceste figure.



Mais par la trente-deuxième proposition, les internes seuls sont égaux à deux droicts. Donc les seuls extérieurs seront égaux à quatre droicts. En un quadrangle, les angles extérieurs & les intérieurs ensemble, sont égaux à huit droicts. Mais les intérieurs seuls sont égaux à quatre droicts, comme nous avons démontré: les extérieurs seuls seront donc aussi égaux

à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuvent estre venues és figures appostées cy denant. Il y a la mesme raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.

COROLLAIRE.

Il resulte de ceste trense-deuxième proposition, que les trois angles de quelconque triangle, pris ensemble, sont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble: Pource que tant ces trois là, que ces trois cy, sont egaux à deux droicts: D'où vient que si deux angles d'un triangle sont egaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième de l'un sera aussi egal au troisième de l'autre, & les triangles seront equiangles.

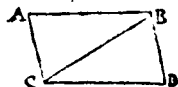
Il appert aussi que tout triangle Isocele, duquel l'angle compris par les costez egaux, est droict, à chacun des autres angles demy droicts. Car les deux restans ensemble font un droict, puis que par la trense-deuxième proposition, les trois sont egaux à deux droicts: & le troisième est posé droict. Parquoy puis que par la cinquième proposition les deux restans sont egaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droict. Car les deux restans ensemble seront moindre qu'un droict, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plus grand qu'un demy droict. Pource que les deux restans ensemble, seront plus grand qu'un droict, &c.

Il est pareillement manifeste, que chascun angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droict, ou la tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, auxquels sont egaux les trois angles d'un triangle equilateral, divisez en trois angles egaux, sont les deux tierces parties d'un droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de meſme part, ſont auſſi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB , & CD , qui conjoignent de meſme part deux autres lignes AC & BD egales & paralleles, le dis que AB , & CD , ſont auſſi egales & paralleles.



Q'il ne ſoit ainſi: ſoit mennee la diagonale AC . Icelle tombant ſur les deux paralleles AC , & BD , fera les angles ACB & CBD alternativement egaux par la vingt-neufieme propoſition. Item AC , & BD eſtant egales, les deux triangles CAB & CBD , auront deux coſtez egaux à deux coſtez chacun ſien, & les angles qu'ils comprennent auſſi egaux, & par la 4. prop. la baſe AB ſera egale à la baſe CD , & l'angle ABC ſera egal alternativement à l'angle DCB , & par la 27. prop. icelles lignes egales AB , & CD ſeront auſſi paralleles. Donc les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les coſtez, &

les angles opposez, sont egaux entre-eux ; & la diagonalle le coupe en deux egalemēt.

Soit le parallelogramme $ABCD$, en la figure de la proposition precedente. Je dis que le costé AB est egal à son opposé CD ; & aussi le costé AC egal au costé BD : Item que l'angle A est egal à son angle opposé D , & encore l'angle ABD egal à l'angle ACD : finalement qu'iceluy parallelogrāme $ABCD$, est coupé en deux egalemēt par la diagonalle BC .

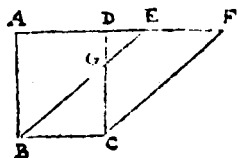
Car puis que la figure quadrilataire $ABCD$ est vn parallelogramme, le costé AB sera parallele au costé CD , & AC à BD , & par la 29. proposition, l'angle ABC sera alternatiuemēt egal à BCD . Item l'angle ACB alternatiuemēt egal à l'angle CBD . Ainsi les deux triangles BAC , & DCB auront les angles ABC , & BCA , egaux aux angles BCD & $CB D$, chacun au sien, & le costé BC commun à tous les deux susdits triangles : Et partant par la 26. prop. les autres costez AB & AC , seront egaux aux autres costez CD & BD , chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'angle D . Et si, il est euidēt que les deux angles du poinct B ensemble, seront egaux aux deux ensemble du poinct C . Encores par la 4. prop. les triangles ABC , & CDB seront egaux ; & partant le parallelogramme $ABCD$ est coupé en deux egalemēt par la diagonalle BC : Donc en tout parallelogramme les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur
mesme base, & entre mesmes paralle-
les, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes ABCD, & BCEF, tous deux sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles AF, & BC. Je dis qu'ils sont egaux.

Car par la trente-quatrième proposition les costez opposez des parallelogrammes estans egaux, AB & BC seront egaux. Item BC, & EF, & partant AD, & EF egaux, auxquels si on ad-

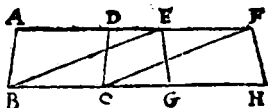


jouste la ligne commune DE; AE sera egale à DF. Item AB est egale à DC, lesquelles estans paralleles, l'angle extérieur CDE sera egal à l'opposé intérieur EAB: & par la quatrième proposition les triangles BAE, & CDF seront egaux: desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG, & CGEF, seront egaux: auxquels si on adiouste le triangle commun BGC, le parallelogramme ABCD sera egal au parallelogramme BCEF: Donc les parallelogrammes constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux: Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases égales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrâmes ABCD, & EFGH, ayans les bases BC, & GH égales, & entre les mesmes paralleles AF, & BH. Je dis qu'ils sont egaux.

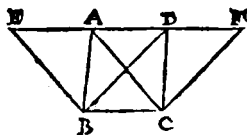


Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes BE, CF; d'autant que BC est posée égale à GH, & que par la 34. prop. la mesme GH est égale à son opposée EF; les deux lignes BC, EF, seront égales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les conjoignent, seront aussi égales & paralleles par la 33. prop. & par consequent BEFC sera un parallelogramme constitué sur mesme base, & entre mesmes paralleles que le parallelogram. ABCD, & par la 35. prop. ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH, estant sur mesme base FF, avec iceluy, & entre mesmes parallel. AF, BH: Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH, seront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC , & BDC , tous deux constituez sur la mesme base BC , & entre mesmes paralleles EF , & BC . Je dis qu'ils sont e-



gaux entr'eux. Car si on mene BE parallele à CA , & CF parallele à BD , seront accõplis les parallelog. $A E B C$, & $B C F D$, lesquels seront egaux par la 35. prop. Mais les triangles donnez $A B C$, & $D B C$, sont moitez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont coupeez en deux egale-ment par les diagonales AB , DC : donc aussi les tri-angles ABC & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouver.

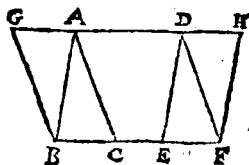
THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC , DEF , constituez sur

bases egales BC , & EF , & entre mesmes paralleles GH , & BF . Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car apres avoir mené BG parallele à CA , & FH parallele à DE par la 31. prop. les deux parallelogram. $ACBG$, $DEFH$, estans constituez sur bases egales, & entre mesmes paralle-

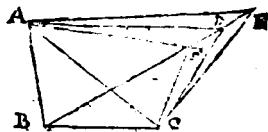


les, seront egaux par la 36. prop. aussi egales seront leurs moitez, sçavoir les triangles proposez ABC , & DEF par la 34. prop. estans les parallelogrammes coupez en deux egalemant par les diagonales BA , & DF . Donc les triangles constituez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 29. PROP. XXXIX.

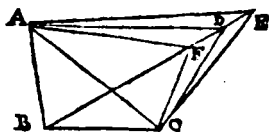
Les triangles egaux constituez sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC , & BCD constituez sur mesme base BC , & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mes-



mes paralleles, c'est à dire que si on mène la ligne AD , elle sera parallele à BC .

Autrement du point A , on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou bien au dessus de AD , ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE , s'il est possible: & apres auoir continué BD iusques en E , & mené EC . Les deux triangles BAC , & BEC par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront egaux. Mais par l'hypothese BAC , & BDC sont aussi egaux; partant BEC , & BDC seroient aussi egaux, la partie au tout; donc AE parallele ne pouuoit tomber par dessus AD . Le mesme inconuenient s'ensuura si on pose la parallele AF au dessous de AD : car ayant mené CF , il s'ensuura que les triangles BFC , & BDC sont egaux, ce qui ne peut estre: Donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC . Parquoy les triangles egaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demon-



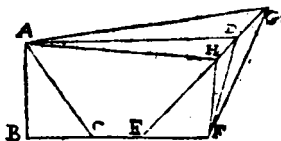
THEOR. 30. PROPOS. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC , & DEF , constituez sur bases egales BC , & EF , & de mesme

part. Je dis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles; c'est à dire, que si on mene vne ligne droite de A en D, qu'icelle sera parallele à BF.

Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus,



& soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux par la 1. com. sent. la partie au tout, ce qui est impossible: Partant la parallele menee du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuira si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF, & EDF se trouueroient egaux: donc du point A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux construisez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

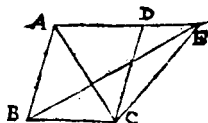
T H E O R. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la mesme

basse BC , que le triangle BCE , & tous deux entre mesmes paralleles AE , & BC . Je dis que le parallelograme est double du triangle.

Car si on mene la diagonale AC , le triangle ABC fera la moitié du parallelograme $ABCD$ par la 34. prop. lequel sera egal au triangle BEC par la 37. prop. partant le parallelograme qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre. Si donc vn parallelograme & vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

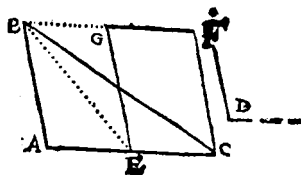


PROB. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC , auquel il faut faire vn parallelogramme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D .

Soit la base du triangle AC coupee en deux egalemment en E , & fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. proposition. Puis par la 31. prop. soit menee de B , la ligne BF parallele à AC , laquelle coupe EG en G . Derechef de C soit menee CF parallele à EG , rencontrant BF en F : & sera consti-



tué vn parallelogramme EGFC, lequel ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tirée la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la prop. precedente, duquel est aussi double le triangle ABC par la 38. prop. iceluy estant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux: le parallelogramme EGFC, & le triangle ABC seront donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallelogramme a l'angle CEG egal au donné D par la construction, nous auons construit vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Pellerier adioute icy la conuerse de ceste proposition, qui est telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Et d'autant que nous auons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques, Prob. 14. nous n'en ferons icy repetition.

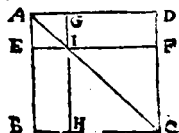
THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme, les suppléments des parallelogrammes qui sont sur le diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC,

à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEIG & IHCF. Ie dis que les parallelogrammes GIFD & EBHI, qu'on appelle suppléments, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, sont egaux entr'eux : Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes



ABHI, ADFI. Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEI, AGI, partant si on les oste des trapezes, demeureront egaux les suppléments EBHI, GIFD: donc en tout parallelogramme les suppléments, &c. Ce qui estoit à prouuer.

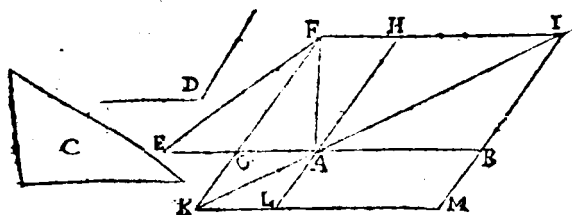
PROBL. 12 PROP. XLIII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn parallelogramme egal à vn triangle donne, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donne.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donne C, & l'angle rectiligne donne D. Il faut sur AB descrire vn parallelogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donne D.

Soit prolongee la ligne donnee AB iusques en E, tellement que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22. prop. le triangle AFE, ayant les costez egaux
aux

aux costez dudit triangle donné C, lequel luy sera



aussi egal par le corol. de la 8. prop. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallélogramme AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D : & apres auoir continué la ligne FH iusques en I, tellement que HI soit egale à AB, soit menée IA iusques à ce qu'elle rencontre FG prolongee en K : ce qui doit arriuer, n'estant I A parallele à FG, par la 11. com. sent. puis du point K, soit menée KM parallele à GB, iusques à ce qu'elle rencontre IB tiree en M : & finalement soit prolongee HA iusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallelogramme ABML est le requis.

Car il est constitué sur la ligne droite donnee AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est egal à l'angle GAH, qui a esté fait egal à l'angle D : Finalement il est egal au triangle donné C, puis que par la 43. propos. il est egal au parallelogramme AHFG, lequel a esté fait egal au triangle AFE, ou C. Nous auons donc décrit sur la ligne donnée vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

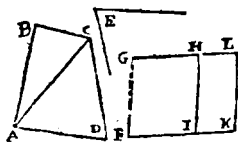
SCHOLIE.

Nous auons enseigné la pratique de ce Prob. en nos Mémoires Mathem. Prob. 15. & le conuerse d'iceluy au Problème 16. C'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnee ABCD, & l'angle donné E. Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait vn angle egal au donné E.



Soit resoluë la figure rectiligne donnee en triangles, sçauoir est menant la ligne AC : puis par la 42. prop. soit fait le parallelogramme FGH I egal au triangle ADC, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item sur HI soit fait le parallelogramme HIKL. egal au triangle ABC, ayant vn angle HIK egal au donné E : & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E ; & ces deux parallelogr. ensemble en font vn seul. Car d'autant que chacun

des angles GFI , HIK est egal à l'angle donné E , ils le seront aussi entr'eux : ausquels si on adjouste l'angle commun FIH , les deux angles GFI , HIF , qui sont egaux à deux droicts par la 29. prop. estant FH , parallelogramme ; seront egaux aux deux angles HIK , HIF , lesquels partant seront egaux à deux droicts , & par la 14. prop. les deux lignes FI , KI , se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI , HLK estans egaux par la 34. pr. car ils sont opposez à angles egaux GFI , HIK : Si à iceux on adjouste l'angle commun IHL , par le mesme discours que cy-dessus, les deux lignes GH & LH se rencontreront directement : ainsi FK & GL estans lignes droictes , & conjoignant de mesme part les egales & paralleles FG & KL ; elles seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. & partant $FGLK$ sera parallelog. ; lequel nous avons construit egal à la figure rectiligne donnée $ABCD$, & fait l'angle F egal au donné E , ainsi qu'il estoit requis.

S C H O L I E.

Si l'y eust eu davantage de triangles en la figure donnee, il eust fallu construire sur KL vn troisieme parall. logr. egal au troisieme triangle : puis sur le costé oppose à KL , vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle jusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera toujours la mesme que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or Pellesier adiouste icy vn Prob. tres-vtil, qui est, Qu'estans données deux figures rectilignes inegales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre. Mais d'autant que nous l'avons enseigné en suite de celui cy dessus, en nostre Geometrie pratique, Prob. 18. nous n'en ferons icy repetition.

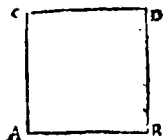
COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses dictes cy-dessus, comme on descrira sur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme égal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle égal à vn angle rectiligne donné. Car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee, nous eussions par la precedente prop. décrit sur icelle le parallelogramme $FGHI$; puis sur la mesme ligne FG , ou plustost sur vne égale à icelle HI , le parallelogramme $HIKL$; & ainsi consecutivement s'il y auoit dauantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

PROBL. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee AB , sur laquelle il faut descrire vn quarré. Du poinct A , soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle soit faicte égale à AB , & apres auoir mené CD parallele à AB , & BD parallele à AC par 31. propos. ie dis que le quadrilatre $ABDC$ est quarré.



Car d'autant que par la construction il est parallelogramme: les costez, & les angles opposez sont egaux par la 34. prop. partant le costé AB est égal à CD , & AC à BD : mais AC estant égal à AB par la construction; il est euident que les quatre costez sont egaux entr'eux. Item l'angle A estant droict par la construction, aussi son opposé D sera

droict. Et la ligne AC tombât sur les deux lignes paralleles A B, C D, les deux angles interieurs A & C sont egaux à deux droicts par la 29. prop. Mais l'angle A est droict : donc l'angle C sera aussi droict : partant aussi droict son opposé B : ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droicts : & par la def. du quarré, la figure A D sera quarrée. Nous auons donc descrit vn quarré sur la ligne droicte donnée. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné la pratique de ceste prop. en nostre Geometrie pratique. Prob. 12.

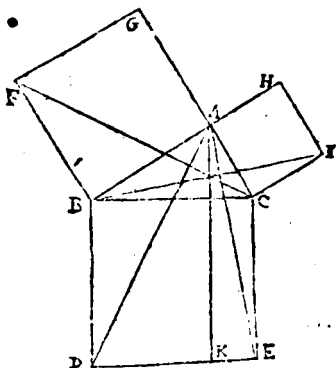
Proclus demonstre icy : Que les quarez de lignes egales sont egaux : & que de quarez egaux, les lignes sont egales. Ce qui est aisé à prouuer par la superposition d'un quarré sur l'autre : Car les lignes estans egales si l'une est posée dessus l'autre, elles conuiendront entr'elles ; & les angles estans aussi egaux, c'est à sçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux : & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que si les quarez sont egaux, ils conuiennent entr'eux, à cause de l'egalité des angles : Donc aussi les lignes ; autrement vn quarré seroit plus grand que l'autre. Nous auons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle cy qui est breue & facile.

THEO. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux deux quarez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC , sur les costez duquel soient descrits les trois quarréz $BCDE$, $ABFG$, $AHIC$. Je dis que le quarré $BCED$ descrit sur le costé BC , qui soustient l'angle droit BAC , est egal aux deux quarréz $ABFG$ & $AHIC$ descrits sur les deux autres costez AB & AC .

Car soit mēee la ligne AK parallele à BD , ou à CE , & tirees les lignes AD , AE , CF , BI . Et d'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au point A sont droicts, les lignes droictes AB , AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droicte: Itē CA , AG par la 14. prop. Derechef puis que les angles ABF , CBD



sont egaux, car ils sont droicts, si on leur adiouste le commun ABC , le total $FB C$ sera egal au total ABD . Le triangle ABD a donc les deux costez AB , BD , egaux aux deux costez FB , BC du triangle CBF , chacun au sien, & les angles ABD , CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. prop. les triangles ABD , CBF seront egaux. Mais le quarré AF est double du triangle $FB C$ par la 41. prop. car ils sont sur mesme base BF , & entre mesmes paralleles BF , GC ; il sera donc aussi double de son egal ABD : duquel le parallelog. BK est aussi double par

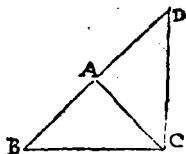
la mesme 41. prop. & par consequent le quarré AF sera egal au parallelog. BK : car les choses doubles d'une mesme sont egales entr'elles. Par mesme discours on prouuera que le parallelog. CK est egal au quarré AI : partant les deux ensemble BK, & CK seront egaux aux deux quarréz ensemble AF, & AI. Donc le quarré BE qui est composé d'iceux parallelog. BK, CK sera aussi egal aux mesmes quarréz AF, AI : parquoy aux triangles rectangles, le quarré du costé, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

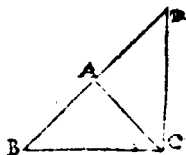
Si le quarré de l'un des costez d'un triangle, est egal aux quarréz des deux autres costez, le triangle sera rectangle.

Soit le triangle donné ABC, & soit le quarré du costé BC egal aux deux quarréz des deux autres costez BA, & AC. le dis que l'angle BAC est droit.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & fait AD egale à AB, soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarréz de CA, & AD, lesquels sont egaux aux quarréz de BA, & AC, estans leurs lignes egales;



& par la 1. com. sent. le quarré de B C sera egal au quarré de CD : partant la ligne CB egale à C D. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & la base egale à la base, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD : partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.



Fin du premier Element.





ELEMENT

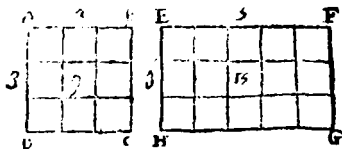
SECOND

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, est dit estre cõpris des deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a esté dit en la 36. deff. 1. que c'est que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre sortes: mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par consequent il y a seulement le quarré, comme *ABCD*, & le quarré long comme *EFGH*, qui soient rectangles: car il n'y a que ces deux parallelogrammes qui ayent les ang. droicts.

Est icy à noter, qu'en tout parallelogramme si un seul angle est donné droict, il est nécessaire que les trois autres soient aussi



droicts: comme si l'angle *E* du parallelogramme *EFGH* est droict: ie dis que les trois autres *F*, *G*, *H*, sont aussi droicts.

Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallèles les angles internes E & H sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese: l'angle H sera donc aussi droict: & par la 34. p. 1. leurs opposez G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallelog. estre contenu sous deux lignes droictes, qui comprennent vn seul angle droict; tellement que le parallelog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH: ou sous les deux EF, FG: ou sous FG, GH: ou finalement sous GH, HE: ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'un parallelogramme rectangle: sçauoir l'une comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur: & par le mouuement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meue en trauers, tellement qu'elle face tousiours angle droict avec icelle EH, iusques à ce que le point E paruienne au point H, & le point F, au point G: sera descript tout le parallelog. rectangle EFGH. Le mesme sera fait, si on pose EH se mouoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que si EF est de 5. pieds, & l'autre costé EH de trois: si on multiplie vn nombre par l'autre, fera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme. Pareillement au rectangle ABCD, le costé AB estant de 3. pieds, & le costé AD aussi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy dessus.

Et est icy à noter, qu'en ce second liure, & es autres sui-uans, Euclide appelle les parallelog. rectangles, simplement rectangles: ce que obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tousiours entendre parallelogramme rectangle.

2. En tout parallelogramme, l'un des parallelogramme décrits à l'entour du diametre, avec les deux supplémés, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme ABCD, (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée de la diagonale BC; & EF parallele à AC coupant la diagonale en I; & par iceluy point I soit menée GH parallele à AB: & le parallelogramme sera diuisé en 4. parallelog. deux desquels EG, & HF sont dictz estre décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez supplémens. Or la figure composée d'iceux supplémens & de l'un ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonale, sera dicté Gnomon, comme la figure F ACDHI, ou EDBAGI.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si de deux lignes droictes l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes, est egal au rectangle de la non coupée, & d'une chacune partie de celle qui est coupée.

Soient deux lignes AB & C, dont la première AB est coupée à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C,

sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'une chacune partie de A B.

Qu'il ne soit ainsi: Qu'on mène A F perpendiculaire à A B par la 11. propo. 1. laquelle soit faite egale à C, & du point F soit menée F G parallele à A B; & B G parallele à A F par la 31.



prop. 1. Il est evident que le rectangle A G sera compris des deux lignes données A B & C, puis que A F est egale à C. Item soient menées les deux lignes D H, & E I paralleles à A F par la 31. prop. 1. Donc les trois parallelogrammes A H, D I, E G, seront rectangles compris des lignes A F, D H, E I, & des trois segmens A D, D E, E B, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conviennent au rectangle A G, compris des lignes données: & par la 8. commune sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

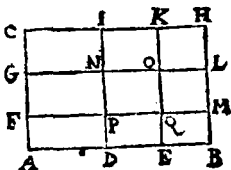
Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de cest second liure, nous l'avons appliqué & démontré en nombres au Scholie de la 14. prop. 9.

Commandin demontre icy deux autres Theoremes qui ensuiuent.

S'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit couppee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chasque segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droictes A B, A C contenant un angle

droit A : & AB soit coupée és points D & E , mais AC és points F & G . Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC , est égal aux rectangles compris de chaque parties AD, DE, EB & d'un chacun segment AF, FG, GC , c'est à dire égal aux rectangles contenus de AD, AF ; AD, FG ; AD, GC ; DE, AF ; DE, FG ; DE, GC ; EB, AF ; EB, FG ; EB, GC . Car étant acco-

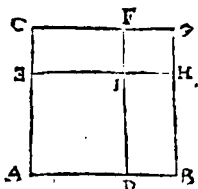


ply le rectangle AH , soient tirées DI, EK parallèles à AC : Item FM, GL parallèles à AB , qui couperont les premières és points P, Q, N, O . Ven donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF : & FN sous AD, FG : & GI sous AD, GC , (pource que par la 34. proposi. 1. les lignes FP, GN sont égales à icelle AD .) Item que les rectangles DQ, PO, NK , sont contenus sous DE, AF ; DE, FG ; DE, GC : (car DP, PN, NI sont égales à icelles AF, FG, GC , & PQ, NO , à icelle DE , par la 34. proposi. 1.) Et par mesme raison les rectangles EM, QL, OH , sont compris sous EB, AF ; EB, FG ; EB, GC . Il est evident que le rectangle contenu sous AB, AC , est égal aux rectangles compris sous chaque parties AD, DE, EB , & un chacun des segments AF, FG, GC : ce qui estoit proposé.

S'il y a deux lignes droictes couppees comme on voudra; le rectangle compris sous icelles, avec celui compris sous vne partie de l'une d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, est égal aux rectangles contenus sous les lignes totales & les susdites parties reciproquement, avec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC , faisant l'angle droit A , lesquelles soient couppees comme on voudra en D & E . Je dis que le rectangle compris sous AB, AC , avec celui compris sous les parties AD, EC , est égal aux rectangles con-

tenus sous $AB, EC: AC, AD: DB, AE$. Car ayant accompli le rectangle AG , soit menée DF parallèle à AC ; & EH à AB , s'entre coupans en I . Veu donc que le rectangle AG est égal aux rectangles EG, AI, DH : si on leur adionste le commun rectangle EF : les rectangles AG, EF , qui sont compris sous les toutes AB, AC , & les parties AD, EC , seront égaux aux rectangles EG, AF, DH , compris sous $AE, EC: AC, AD: DB, AE$: ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

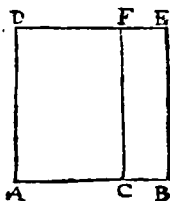
Par ce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit coupée comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera égal au rectangle compris sous l'une totale, & un segmen de l'autre, & aux deux rectangles conuenus de l'autre segmen de ceste-cy, & d'un chacun segmen de celle-là. Car le rectangle AG , qui est compris des deux toutes AB, AC est égal au rectangle EG , conuenus de la toute EH , c'est à dire AB , & du segmen EC , & aux deux rectangle AI, DH , compris de l'autre segmen AE , & des segmens AD, DB : Iceluy rectangle AG , est aussi égal aux trois rectangles AH, EF, IG . Pareillement aux trois AF, DH, IG , comme aussi aux trois autres DG, AI, EF .

THEOR. 2. PROP. 11.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra: les rectangles compris

de la toute & d'une chascune partie,
sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte AB, coup-
pée en deux parties telles qu'on
voudra au point C. Je dis que le
rectangle de la toute AB & de la
partie AC, avec le rectangle de la
toute AB, & de l'autre partie CB,
sont egaux au quarré de la toute
AB.



Qu'il ne soit ainsi. Sur AB soit décrit le quarré
AE; puis de C soit menée CF parallele à AD, la-
quelle CF sera egale à icelle AD, c'est à dire à AB:
car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré.
Il est donc evident que les deux rectangles AF, &
CE, sont compris de la toute AB, ou son egale CF, &
des deux parties AC & CB; & si ils conviennent avec
le quarré AE, & par consequent luy sont egaux. Si
donc une ligne droicte est couppee comme on vou-
dra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

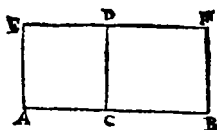
S C H O L I E.

Encore qu'en ce theoreme Euclide propose d'une ligne di-
uisée en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la
mesme maniere sera demonstrier le mesme, si la ligne est di-
uisée en tant de parties qu'on voudra. Sera aussi demonstrier
comme dessus que si une ligne droicte est couppee en tant de
parties qu'on voudra: le quarré de la toute est egal aux re-
ctangles contenus sous chascun segment & un chascun
segment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premiere-ment prise.

Soit la ligne droicte AB couppée à l'aduenture au point C . Je dis que le rectangle compris de la totale AB , & de l'une ou l'autre partie, comme AC , est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC , & CB , & au quarré de la partie AC , laquelle auoit esté premierement prise.



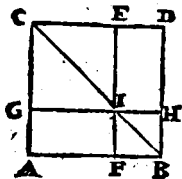
Qu'il ne soit ainsi: Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. prop. 1. Item soit menée BF parallele à CD par la 31. p. 1. rencontrant ED , prolongée en F . Il est donc euident que AD est le quarré de AC ; & CF le rectangle de AC & CB ; (car CD est egal à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de AB & AC , partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD , & le rectangle CF ensemble, conuiennent avec le rectangle AF ; & par consequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte est couppée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR.

THEO. 4. PROP. IIIL.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra; le quarré de la toute est egal aux deux quarez des deux parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnee AB, coupee comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarez décrits sur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB, sont egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit décrit le quarré AD; & apres auoir mené la diagonale BC: & du point F, la ligne droicte FE parallele à AC, couppant la diagonale BC en I, & derechef par iceluy point I soit mennee GH parallele à AB, le tout par la 1. pr. 1. ie dis premierement que HF, & EG sont quarez.

Car desia il apert qu'ils sont parallelogrammes, estans décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele. & par la 5. pr. 1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle extérieur FIB egal à l'opposé intérieur ACB par la 29. propos. 1. lequel estant egal à ABC par

H

la 1. com. sent. ABC & FIB seront égaux, & par la 6. pr. 1. les deux costez BF & FI seront égaux : & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF , aura les quatre costez égaux : & partant il sera quarré ; car l'angle FBI estant droit, les trois autres seront aussi droits, comme nous auons demonstté à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont descrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droits, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles, & égaux entr'eux par la 43. propos. 1. & sont compris des deux parties AF , FB , estant EI égale à AF , & HI , IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB , lesquels avec les deux quarez FH & GE conuiennent avec le quarré total AD , & par la 8. comin. sent. ils luy seront égaux. Si donc vne ligne droite est couppee comme on voudra, le quarré de la toute est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par ce que dessus, que les parallelogrammes descrits à l'entour de la diagonale d'un quarré, sont quarez. Et aussi que la diagonale coupe en deux également les angles du quarré.

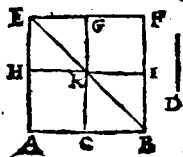
SCHOLIE.

Clavius demonstre en ce lieu le theoreme suuant.

Si vne ligne droite est double d'une autre, le quarré de celle-là est quadruple du quarré de ceste-

cy: & si vn quarré est quadruple d'un autre quarré: le costé de celuy-là est double du costé de cestuy-cy.

Soient deux lignes droictes AB & D , desquelles AB est double de D . Je dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D . Car ayant divisé AB en deux également en C , si on fait telle construction qu'en ceste 4. prop. il est evident que les



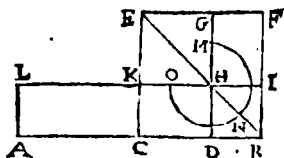
4. parallelogrammes AK , CI , HG , KF , seront quarrés & égaux entr'eux. Mais le quarré AF est égal à iceux quatre quarrés: donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC , c'est à dire de D , qui luy est égale: car AB est double de l'une & de l'autre.

Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D . Je dis que AB est double de D . Car AB estant coupée en deux également en C , le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC , comme il a esté démontré cy dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D : donc les quarrés des lignes AC & D sont égaux, & parant icelles lignes AC & D aussi égales. Mais AB est double de AC , donc aussi double de D .

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est coupée en deux parties égales, & en deux inégales: le rectangle des deux parties inégales, avec le quarré de la section du milieu, sont égaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnee
 AB couppee en deux
 parties egales au
 poinct C, & en deux
 inegales au poinct D.
 Je dis que le rectangle
 compris des deux par-
 ties inegales A D, &



DB, avec le quarré de la section du milieu CD,
 sont egaux au quarré de la moitié CB.

Car sur la ligne CB, soit descript le quarré CF par
 la 46. prop. 1. & apres auoir mené DG parallele à
 BF, soit menee la diagonale BE coupant DG au
 poinct H, par lequel soit mené IKL parallele à
 AB, puis AL parallele à DH, couppant KL en L.
 Donc par le corol. de la preced. prop. DI, K G se-
 ront quarréz; & partant la ligne DH egale à la li-
 gne DB: & par la 34. prop. 1. KH est aussi egale à
 CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux
 segmens AD, DB; & K G sera quarré de la se-
 ction du milieu CD. Il faut donc prouuer que le re-
 ctangle AH, avec le quarré KG est egal au quarré
 CF, fait sur la ligne CB, moitié de la toute AB.

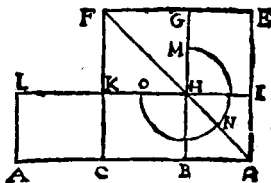
Or le rectangle AK est egal au rectangle CI par
 la 36. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egales
 AC & CB, & entre mesmes paralleles AB & LI. Pa-
 reillement les supplemens CH, & HF sont egaux
 par la 43. p. 1. auxquels si on adjoust le quarré cō-
 mun DI, les tous CI, & DF seront egaux: & par la 1.
 com. sent. DF sera egal à AK, auxquels si on adjou-
 ste aussi le supplement commun CH, le gnomon
 ONM sera egal au rectangle AH. Mais iceluy gno-
 mon & le quarré KG, conuiennent avec le quarré
 CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc

aussi le rectangle A H, & le quarré κ G seront egaux au quarré C F par la 1. com. sent. Parquoy si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

T H E O R. 6. P R O P. V I.

Si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & on luy adjoust directement quelque autre ligne droicte : le rectangle de la toute & de l'adjoustee comme d'une, & de l'adjoustée, avec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'adjoustee comme d'une.

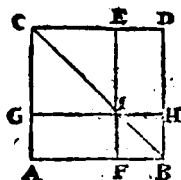
Soit la ligne droicte AB coupee en deux egalem ent au poinct C; & à icelle soit adjoustee directement BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'adjoustee BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD.



Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit descrit le quarré C E avec sa diagonale D F, & apres avoir mené B G parallele à D E, laquelle coupera la diagonale au poinct H : par iceluy poinct H soit menée κ L parallele à A D par la 31. propos. 1

deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premièrement prise.

Soit la ligne $A B$ couppee comme on voudra au point F . Je dis que les deux quarez de la totale $A B$, & de la partie $A F$, sont egaux au quarré de l'autre partie $F B$, & au rectangle deux fois, de $A B$, $A F$.



Qu'il ne soit ainsi : sur $A B$ soit descrit le quarré $A D$ avec sa diagonale $B C$, & après auoit mené du point F , $F E$ parallele à $A C$, laquelle couppera la diagonale $B C$ au point I : d'iceluy point soit menée $G H$ parallele à $A B$ par la 31. prop. 1. Donc $F H$ & $G E$ seront quarez par le cor. de la 4. pr. de ce liu. & puis que par la 34. pr. 1. $G I$ est egale à $A F$; $G E$ sera quarré du segm. $A F$. Derechef pour ce que $A C$ est egale à $A B$, le rectangle $A E$ sera cōpris sous la toute $A B$, & le segm. $A F$. Par mesme raison le rectangle $G D$ sera compris sous les mesmes lignes $A B$, $A F$: (car $C D$, $C G$ sont egales à $A B$, $A F$, à cause des quarez $A D$, $G E$.) Veu donc que les rectangles $A E$, $I D$, avec le quarré $F H$ sont esgaux au quarré $A D$; si on leur appose le commun quarré $E G$, les quarez $A D$, $E G$ seront egaux aux rectangles $A E$, $G D$, (chacun desquels est compris de la toute $A B$ & de la partie $A F$) avec le quarré $F H$: parquoy si vne ligne droite est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

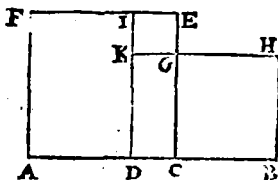
S C H O L I E.

Commandin demonstre en ce liu. le theoreme suivant.

Si vne ligne droicte est coupee en deux parties inegales; les quarez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droicte AB coupee en deux parties inegales, AC, CB , desquelles AC est la plus grande, & d'icelle A soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excès de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarez des parties AC, CB , sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB , & au quarré de DC .

Car soient construits les quarez AE, CH , & mené DI parallele à CE ; puis prolongé HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or



d'autant que les lignes BC, AD sont egales, leur adjoignant la commune DC , la toute AC , c'est à dire CE , sera égale à la toute DB . Mais CG est aussi égale à CB : donc aussi le reste GE sera égal au reste DC : & partant puis qu'assisi IE est égale à DC par la 34. prop. 1. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excès DC . Et d'autant que les rectangles AI, DH sont contenus sous les parties AC, CB ; (car AC est égale à l'une & à l'autre ligne AF, DB : CB à l'une & à l'autre AD, BH .) Il est manifeste que les quarez AE, CH , des parties AC, CB sont egaux aux rectangles AI, DH , qui sont contenus sous les parties AC, CB , & à IG quarré de l'excès DC : Ce qui estoit proposé.

THEOR. 8. PROP. VIII.

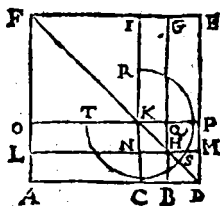
Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra: quatre fois le rectan-

gle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'un ou l'autre segment, sçavoir BC, c'est à dire de AB, & BD, (si apres avoir prolongé la ligne AB, on fait BD egale à BC) avec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD composée de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne soit ainsi : sur AD soit fait le quarré AE avec sa diagonale FD, & des deux points B & C, soient menées BG & CI paralleles à DE. Item des points H & K, auxquels elles coupent la diagonale FD, soient menées LM & OP paralleles à AD, par la 31. p. 1. lesquelles coupent les premieres paralleles en N, & Q.

Premierement par ce qui resulte de la 4. p. de ce liure, les rectangles OI, NQ, BM, au long de la diagonale seront quarrés. Item d'autant que CB est egale à BD; CH, & BM, seront egaux, & quarrés: (estant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrés; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrés, & egaux: & par la 43. p. 1. les deux suppléments. LK & KG seót aussi egaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est egal à AN; & KG à QE: & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi egaux entr'eux;



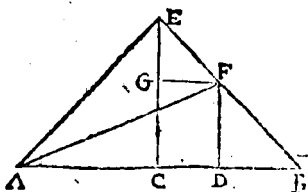
Mais comme aux precedentes il est evident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH , (egale à BD) qui est vn des quatre rectangles avec vn des quatre petits quarrez egaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarrez faisant le Gnomon RST , seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD , lequel Gnomon avec le carré de OK , (egale à AC par la 34. p. 1.) sçauoir est OI , conuiennent avec le carré AE ; & partant par la 8. com. sent. ils luy seront egaux : Si donc vne ligne droite est couppee comme on voudra, quatre fois le rectangle &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite est couppee en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez des parties inegales seront doubles des quarrez de la moitié, & de la section du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppee en deux egalemēt au point C , & en deux inegalemēt en D . le dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi : au point C soit leuee la perpendiculaire CE , qu'on se ra egale à CA



& apres auoir mené AE, & BE, soit leuée la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel poinct soit menée FG parallele à AB, couppant CE en G : & finalement soit menée AF.

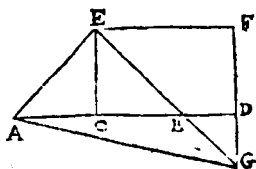
Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Iſoſceles, & feront les angles ſur les baſes AE, & EB egaux par la 5. p. 1. ſçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p. 1. eſtant l'angle ECB droit pour eſtre CE perpendiculaire. Item FDB eſtant droit, & DBF demy droit, auſſi par la 32. p. 1. DFB ſera demy droit, & par la 6. p. 1. les coſtez DB, & DF, du triangle BDF, ſeront egaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera demonſtré que les coſtez GF, GE du triangle FGE, ſont egaux entr'eux. Item il eſt euident que l'angle AEB ſera droit, eſtant compoſé des deux demy droicts AEC, BEC.

Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droit, eſt double du quarré de AC, eſtant egal à tous les deux de AC, & CE. Par meſme diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou CD ſon eg. par la 34. p. 1. partant les deux quarréz de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF eſtant egal aux deux de AE, & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC, & CD. Mais par la meſme 47. p. 1. le quarré de AF, eſt egal aux deux de AD, & DF, ou DB ſon egale: donc les deux quarréz de AD & DB ſeront doubles des deux de AC, & CD. Si donc vne ligne droite eſt couppée en deux parties egales, & en deux inegales; les quarréz des parties inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite est couppee en deux parties egales, & on luy adjoust directemēt quelque autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'adjoustée comme d'une, & le quarré de l'adjoustée, sont doubles des quarez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adioustée comme d'une.

Soit la ligne droite AB couppee en deux egale-
ment au point C, à la-
quelle soit adjoustée di-
rectement BD. Je dis que
les quarez de AD & BD,
sont doubles des quarez
de AC, & CD.



Qu'ainsi ne soit, au point C soit leuée la perpen-
diculaire CE par la 11. p. 1. egale à AC: & apres auoir
menés les deux lignes AE & EB, soient menées par la
31. p. 1. EF patallele à CD, & DF à CE se rencontrant
en F, & soient continuées EB, & FD iusques à ce
qu'elles se coupent au point G. Finalement soit
tirée la ligne AG.

Premierement puis que AC & CE sont egaux,
aussi par la 5. p. 1. les angles EAC, & CEA sont egaux
& demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ACE
droit. Par mesme discours, les angles CBE & BEC se-

ront aussi demy droicts, & l'angle AEB droict, estant composé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBC sera egal à CBB , & demy droict; & les deux lignes CD & EF estans paralleles, par la 29. p. 1. l'angle interieur de mesme costé BEF sera aussi demy droict; & l'angle F estant droict par la 34. p. 1. car il est opposé à vn droict, BGD sera demy droict par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF , & BGD seront Isoleles rectangles; & ce parallelograme rectangle.

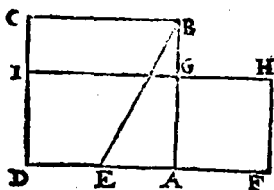
Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE , costé qui soustient l'angle droict C , est egal aux deux quarez des deux autres costez AC , CE ; partant double du quarré de AC . Par mesme discours EG se trouuera double du quarré de EF , ou de CD , qui luy est egale par la 34. p. 1. ainsi les deux quarez de AE , & EG , ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. p. 1. sera double des deux de AC & CD . Mais par la mesme 47. p. 1. il est egal au deux quarez de AD & DG , ou BD son egal; & par consequent les deux quarez de AD & BD , seront doubles des deux de AC & DC . Si donc vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & on luy adjoust directement quelque autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. I. PROP. XI.

Coupper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre.

Soit la ligne droite donnée AB , laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Après auoir cōstruit sur icelle AB le quarré AC , soit diuisée AD en deux également au



poinct E , & après auoir mené EB , & prolongé EA vers F , tellement que EF soit égale à EB , sur AF soit fait le quarré AH ; & soit continuée HG iusques en I . Je dis que la ligne AB est coupée au poinct G , en sorte que le rectangle CG compris de BC égale à BA , & de BG partie de BA , est égal au quarré de l'autre partie AG , sçauoir à GF .

Car la ligne AD estant coupée en deux également en E , & on luy adjoust directement AF , le quarré de la moitié & de l'adjoinstée comme d'une, sçauoir EF , ou de son égale EB , est égal au rectangle de DF, AF , & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB est égal aux deux de BA , & AE par la 47. p. 1. ainsi les deux quarez de BA , & AE seront egaux au rectangle de DF, AF , & au quarré de AE : ostans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB , sçauoir AC , & le rectangle de DF, AF , sçauoir FI , seront egaux, desquels AC & FI , si on oste le rectangle commun AI , le demeurant quarré FG , sera égal au demeurant rectangle GC . Parquoy nous auons coupé la ligne droite AB en G , tellement que le rectangle d'icelle & de la partie CG , est égal au quarré de l'autre partie AG : Ce qu'il falloit faire.

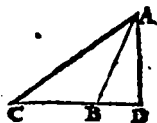
S C H O L I E.

Nous avons enseigné en nos memoires Mathematiques Prob. 72. à conpper une ligne droicte, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la touse, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnée.

THEOR. II. PROPOS. XII.

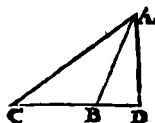
Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du costé contenant l'angle obtus, sçavoir celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire, & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le costé CB iusques en D, & du point A soit menée la perpendiculaire AD par la 12. p. 1. Je dis que le quarré du costé AC qui soustient l'angle



obtus ABC , est plus grand que les quarréz de AB & CB , de deux fois le rectangle de CB & BD , sçauoit CB , qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire AD , & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire; c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarréz des costez AB, BC , avec deux fois le rectangle de CB, BD .

Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est coupée en B , le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarréz de CB, BD , & au rectangle compris deux fois sous CB, BD , par la 4. p. de ce liure: Ad-ioustant donc le commun quarré de AD , les deux quarréz de CD, DA , seront egaux aux trois quarréz de CB, BD, DA , & au rectangle compris deux fois sous CB, BD . Mais par la 47. p. 1. le quarré de AC est egal aux quarréz de CD, DA : donc aussi le quarré de AC sera egal aux trois quarréz de CB, BD, DA , & au rectangle compris deux fois sous CB, BD . Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB est egal aux quarréz de BD, DA ; le quarré de AC sera egal aux quarréz de CB, AB , & à deux fois le rectangle de CB, BD . Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.



S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tirée de A , doive tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demonst rerons ainsi: Soit le triangle ABC

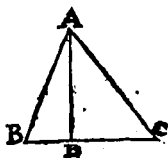


ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B. Je dis que la perpendiculaire de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF: derechef au triangle ABE, les deux angles ABF, AFB seront plus grands que deux droicts: ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'un des costez qui font l'angle aigu, sçavoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Je dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C,



est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AC, & CB de deux fois le rectangle de BC & CD: sçavoir BC, l'un des

costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & iceluy angle aigu C.

Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de celiure, ausquels si on adjouste le quarré commun de AD, les trois quarez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarez de AD, DC par la 47. propos. 1. Donc les deux quarez de AC, BC feront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD : en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarez de AC, BC : ce qui estoit proposé à prouver. On démontrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soutient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles oxigones, le quarré du costé qui soutient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Or combien qu'Euclide propose ce theoreme des triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. ou 32. prop. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousiours dans le triangle, comme Euclide l'a prie en la demonstration : ce qui est

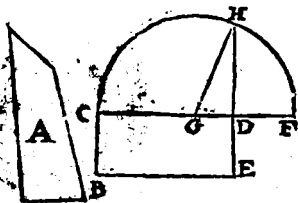
aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit. Ce qui est absurde.

PROBL. 2. PROP. XIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premièrement fait le parallelogramme B D egal à la figure A, & ayant vn angle droit par la 45. propos. 1. puis soit prolongé le costé



C D iusques en F, & fait D F egale à D E: & apres auoir coupé C F en deux egalelement au point G, & d'iceluy point G & interualle G C ou G F, décrit le demy cercle C H F, soit continuée E D iusques en H en la circonference du demy cercle. Je dis que le quarré de D H est egal à la figure rectiligne A.

Car puisque C F est couppee en deux egalelement au point G & en deux inegalelement au point D, le rectangle de C D & D F, sçauoir B D, avec le quarré de la section du milieu G D, est egal au quarré de la moitié G F par la 5. propos. de ce liure, ou de son egale G H, lequel est egal aux deux quarrés de G D & D H par la 47. propos. 1. Que si on

oste le quarré commun de GD , le demeurant quarré de DH , se trouuera egal au demeurant rectangle BD : & par consequent à la figure rectiligne donnee A . Nous auons donc trouué le costé d'un quarré egal à vne figure rectiligne donnee A . Ce qu'il falloit faire.

Fin du second Element.





ELEMENT

TROISIÈME.

DEFINITIONS.

CERCLES égaux , sont ceux desquels les diamètres sont égaux , ou desquels les lignes droictes menées du centre à la circonférence , sont égales.

2. Vne ligne droicte est dictée toucher le cercle , laquelle touchant le cercle , si elle est continuée ne le coupe point.

3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre , quand en se touchant ils ne se coupent point.

4. Les lignes droictes sont dictées estre également distantes du centre.

lors que les perpendiculaires tirees du centre sur icelles, sont egales. Mais celle est plus esloignee du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5. Segment ou portion de cercle, que la plupart appellent aussi section, est vne figure comprise d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

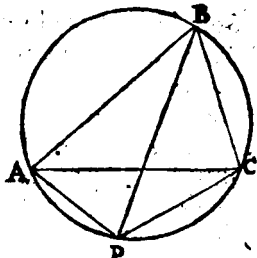
6. L'angle du segment, est celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

7. Vn angle se dit estre en la portion, lors que sur vn point pris en la circonference, sont menees deux lignes droictes des deux extremittez de la ligne qui sert de base à la portion, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit estre ou s'appuyer sur icelle.

Euclide defint es trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA , contenu sous la ligne droite AC , & la circonference ABC s'appelle angle de la

portion. En la 7. def. il dis, que si à quelque point B , prins en la circonference d'une portion ABC , sont menees deux lignes droictes AB , CB , des extremitez de la ligne droicte AC qui sert de base à la section, l'angle rectiligne ABC , sera dit estre en la portion ou segment ABC : Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la portion ADC : mais l'angle BAC , est dit estre en la portion BAC . Es en la 8. def. Euclide



dit qu'estant pris quelque point B , en la circonference du cercle $ABCD$, si on tire d'iceluy les lignes droictes BA , BC aux deux extremes A & C , de la circonference ADC , laquelle prennent icelles lignes BA , BC ; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonference ADC : Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonference AD : & l'angle BAD , sur la circonference BCD : mais l'angle BAC sur la circonference BC .

9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes ambrassant quelque circonference, & faisant angle au centre du cercle.

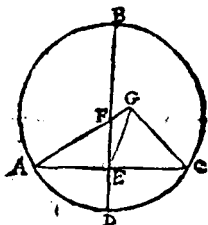
10. Semblables portions de cercle, sont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. I. PROPOS. I.

Trouuer le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné A
BC, duquel il faut trouuer
le centre.

Soit tirée en iceluy la li-
gne droite AC comme que
ce soit, laquelle par la 10. &
11. prop. 1. soit couppee en
deux également, & à droicts



angles par la ligne BD, se terminant à la periphe-
re es poinçts B & D : & icelle BD estant couppee
en deux également en F. Je dis que F est le centre du
cercle proposé.

Car en icelle ligne droite BD, vn autre poinçt
que F ne sera pas le cẽtre, veu que tout autre poinçt
la diuise inegalement. Si donc le poinçt F n'est le
centre : le poinçt G hors la ligne BD soit le centre
(s'il est possible) duquel soient mienées les trois li-
gnes droictes GA, GE, & GC : d'autant que si G
estoit le centre, par la def. du cercle AG & GC se-
ront egales : mais AE & EC sont aussi egales, & GE
commune : donc les deux triangles GEA & GEC,
ont deux costez egaux à deux costez, chacun au
sien, & la base AG egale à la base CG, & par la
8. prop. 1, les angles AEG & CEG seront egaux :
& partant droicts, & la ligne EG perpendiculaire
par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la constru-
ction est droict, & tous les angles droicts sont egaux
par la 10. com. sent. donc les deux angles AEG
& BEA seroient egaux, sçauoir le tout à la partie : ce

qui est absurde. Donc le point G n'est pas le centre. Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre point hors la ligne BD . Parrant le point F sera le centre du cercle ABC , requis à trouuer.

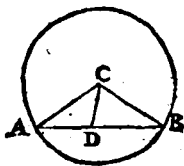
COROLLAIRE.

De cery est manifeste, que si au cercle vne ligne droicte coupe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts; le centre du cercle sera en icelles couppanie. Car il a esté demonstté qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au point F milieu de la ligne BD , laquelle coupe la ligne AC en deux egalement, & à angles droicts en E .

THEOR. I. PROP. II.

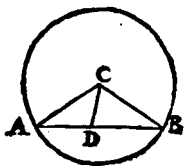
Si en la circonference d'un cercle, on prend deux points comme on voudra; la ligne droicte menée de point à autre, tombera d'as le cercle.

En la circonference du cercle AB , dont le centre est C , soient pris deux points tels qu'on voudra A & B . Je dis que la ligne droicte AB menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.



Car soit pris en icelle ligne droicte AB quelconque point comme D , entre ses extremes A & B ; puis du centre C , soient menées les lignes

droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC, seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC : & partant par la 19. p. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD : parquoy puis que CA est tirée du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra iusques à icelle circonference ; & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstté de tout autre poinct pris. Donc toute la ligne droicte AB tombe dans le cercle : Ce qu'il falloit prouuer.



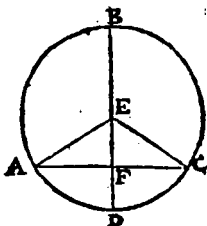
COROLLAIRE.

De cery est manifeste, qu'une ligne droicte touchant un cercle, le touche seulement à un poinct : car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle couppe- roit le cercle, contre l'hypothes.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle, quelque ligne droicte passe par le centre, & coupe en deux également vne autre ligne droicte, ne passant point par le centre ; elle la coup- pera à droicts angles : & si elle la coupe à droicts angles, elle la couppera aussi en deux également.

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux également la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre; ie dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.



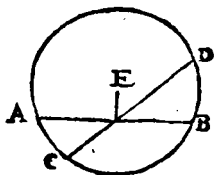
Car estans menées les deux lignes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE égale à la base EC; & par la 8. p. 1. les deux angles au point F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

Ie dis pareillement que si BD coupe AC à angl. droicts au point F; qu'elle la coupera aussi en deux également. Car les deux angles au point F estans droicts, ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. p. 1. estant AEC triangle Isocele, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. p. 1. AF sera égale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. IIII.

Si dans le cercle, deux lignes droictes ne passans point par le centre, s'entre-coupent; elles ne se couperont point l'une l'autre en deux également.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes AB & CD s'entre coupans au poinct F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est couppee inegalement.



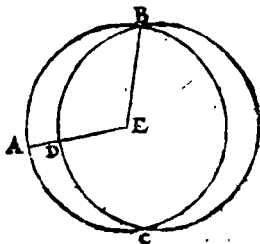
Car du centre E estant mené la ligne EF; si icelles lignes AB, CD se coupent en deux également au poinct F, EF les couperait au mesme poinct aussi en deux également, & à droicts angles par la prop. preced. & les angles AFE, EFB seront droits, & egaux à CFE, EFD aussi droits, & egaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux également. Parquoy si dans le cercle deux lignes droictes ne passant poinct par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. v.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD, se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne scauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droictes: sca-



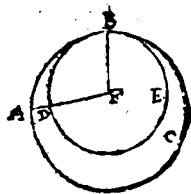
noir EB à la section B: Mais EA couppans l'une & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droite ED sera egale à la ligne droite EB par la 15. d. 1. De rechef, puis que E est aussi posé centre du cercle ABC, la ligne droite EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB: sçauoir est FB à l'atouchement B; & FA, couppât l'un & l'autre cercle en D, A; il est euidant que la mesme absur-



dité aduendra qu'en la precedente; sçauoir que FA, FD, seroient egales la partie au tout: donc F ne pouuoit estre centre commun des cercles s'entre touchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demonstrier.

TROISIÈME
SCHOLIE.

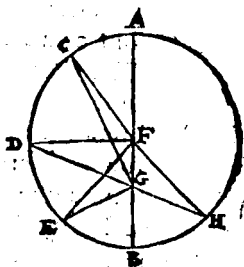
Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touchant seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont diuers : vus qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle. Ce que Dounot pouuoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale, comme il a fait contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroits de ce liure, soit ou en changeant les mots dont il a vsé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adjoûtant : Comme pour exemple, en la prop. suivante, au lieu qu'il y a selon Euclide qui est menée par le centre, Dounot luy fait dire, qui coupe le centre : chose absurde, puis que par les def. le centre du cercle est un point lequel est induisible : Il fait encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots, Desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra. Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adjoûté une à la demonstration : sçauoir est celle qu'il fait la tierce. Item il a retranché les deux dernières parties de la 31. p. de ce mesme liure,

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre, & d'iceluy point tombent quelques lignes droictes en la circonferéce, la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste : Mais des autres tousiours la plus proche de celle

qui est menée par le centre, est plus grande que la plus esloignée : Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy poinct de part & d'autre du diametre, sont egales.

Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelque poinct G outre le centre, & d'iceluy poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference. le dis en premier



lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menées à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE : le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. p. 1. Mais les lignes droictes GF, FC sont egales aux lignes droictes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grâde que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grâde que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisieme DF par la 20. p. 1. ou que son egale BF. Que si on ost la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par mes-

me raison GB sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit dauantage de tirées de G à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle CFG plus grand que l'angle DFG : & partant par la 24. p. r. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour mesme raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

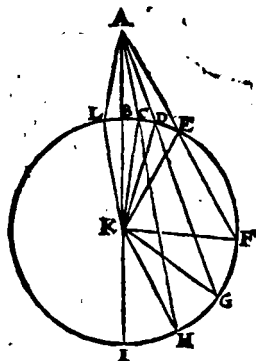
Finalemēt, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH : ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux : les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre, du diametre, sont egales entr'elles : Et il est euident qu'on ne pourra tirer du point G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH ; & par ce qui a esté monstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelle GE, GH. Donc du point G à la circonference se peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui soient egales entr'elles. Parquoy si au diametre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R.

THEOR. 7. PROPOS. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy soient menées quelques lignes droictes dans iceluy cercle, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées dans la circonference concaue. Quant aux autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignée. Mais de celles qui tombent en la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le poinct & le diametre: Quant aux autres, la plus esloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus prochê; & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droictes AF, AG, AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes: puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grande que AG qui en est plus esloi-



gnée: Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire: Je dis que AB comprise entre le point A & la circonference conuexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle: puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus esloignée: Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Finablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K estans menées aux points C, D, E, F, G, H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH: Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droite AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui

tombent du point A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez Ak , & kH du triangle $A KH$ sont egaux aux costez Ak , kG du triangle AkG , chacun au sien, & l'angle AkH plus grand que l'angle AkG ; la base AH sera plus grande que la base AG , par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF ; item AG plus grande que AF . Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus estoignée.

Derechef, puis qu'au triangle Ack la ligne Ax est moindre que les deux Ac , ck ; si on oste les egales ak , ck , demeurera encore AB moindre que AC . Par semblable raison AB sera plus petite que AD , & que AE . Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADk tombent deux lignes droictes Ac , ck , des extremitez du costé Ak ; icelles Ac , ck seront moindres que AD , Dk par la 21. p. 1. desquelles si on' oste les egales ck , Dk , restera encore AC moindre que AD . Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE : Item AD moindre que AE . Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB , est moindre que la plus estoignée.

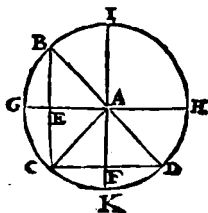
Finablement, soit fait l'angle AkL egal à l'angle Akc , & soit menée la ligne AL . D'autant que les costez Ak , kC du triangle Akc , sont egaux aux costez Ak , kL du triangle AkL ; & les angles Akc , AkL aussi egaux, les lignes droictes AC , AL de part & d'autre de la moindre AB , seront egales entr'elles par la 4. p. 1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il est euident; car si on en

mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AB; & par ce qui a esté démontré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy si on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque poinct au dedans d'un cercle, & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, vers la circonference, le poinct pris est le centre du cercle.

Soit pris le poinct A au cercle BCD, & d'iceluy poinct tombent à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC, AD. Je dis que le poinct pris A est le centre du cercle.



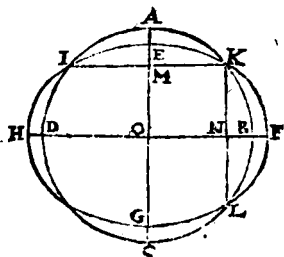
Qu'il ne soit ainsi: soient menées les lignes BC & CD, & apres les auoir couppe en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, soient menées les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez,

chacun au sien; & les bases AB , AC aussi egales, les deux angles au point E seront egaux; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. de ce liure le centre du cercle sera en la ligne droicte GAH ; puis qu'elle diuise la ligne droicte BC en deux egalement, & à angles droicts en E . Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte KI . Il faut donc que ce soit à leur commune section A , n'y ayant point d'autre point commun. Parquoy si on prend quelque point dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 9. PROP. X.

Vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles $ABCD$ & $EFGH$, se couppans aux trois points I , K & L , s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droictes IK , & KL , lesquelles soient coupées en deux egalement aux points M & N



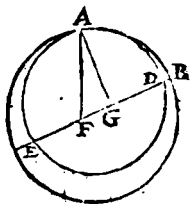
par la 10. p. 1. & soient menées les lignes MC , & NH à droicts angles sur IK , & KL . Il faudra par le corol. de la 1. p. de ce liure que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC ; ils seront aussi en la ligne FH : Ce sera donc au point de la com-

mune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. de ce liure. Donc les cercles ABCD & EFGH ne se pouuoient pas couper en plus de deux poinçts: Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. XI.

Si deux cercles ſe touchent l'un l'autre au dedans, & l'on prend les centres d'iceux; ayant ioinçt iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE ſe touchans interieurement au poinçt A; & F, ſoit le centre du cercle ABC, & G le centre du cercle ADE, leſquels centres ſont neceſſairement diuers, puis que par la 6. p. de ce liure deux cercles ſ'entre-touchant au dedans, ne peuuent auoir vn meſme centre. Je diſ que la ligne droicte menée d'un centre à l'autre, & produicte, tombera ſur le poinçt de l'attouchement A. Car ſi elle n'y tombe, qu'elle coupe l'un & l'autre cercle és poinçts B, D, E, C; & de l'attouchement A, aux centres F & G, ſoient menées les lignes droictes AF, AG. D'autant que par la 20. p. 1. les deux coſtez AG, FG du triangle AFG, ſont plus grands que le coſte FA; & FA eſt egale à la ligne FB, (pource que F a eſté poſé centre du cer-

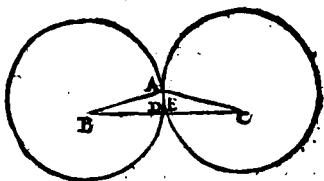


cle ABC) aussi AG, GF seront plus grandes que FB: ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA est egale à GD: (car G a esté posé centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte conjoignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produicte, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droicte mence d'un centre à l'autre, passera par l'attouchement.

Soient deux cercles se touchans au point A, desquels les centres soient B, & C. Je dis que si d'un centre à l'autre on meine vne ligne



droicte, qu'icelle passera par le point d'attouchement A.

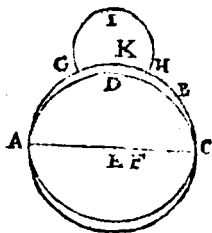
Autrement, in s'ensuiura absurdité: car si icelle ligne ne passe par le point d'attouchement, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçauoir aux points D & E, & du point d'attouchement A soient menées les deux lignes AB, & AC, lesquelles par

la 20. p. 1. seront plus grandes que BC , & par la def. du cercle, il s'en suit que BD , estant egale à BA , & CE à CA , que les deux lignes BD & CE , seroient plus grandes que BC , la partie que le tout. La ligne droicte menee d'un centre à l'autre, passera donc par l'atouchement. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC , & ADC se touchans interieurement aux deux points A & C , s'il est possible; & d'autant qu'ils ne peuvent auoir vn mesme centre par la 6. p. de ce liure, soient les deux centres diuers E & F , par lesquels est tirée la ligne droicte EF , & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe es points d'atouchement A & C par la 11. p. de ce mesme liure: & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes EA & EC soient egales. Item FA , & FC . Mais FA est plus grande que EA . Parrant FC sera aussi plus grande que EC , la partie que le tout: ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.



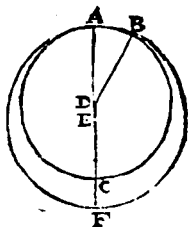
Pareillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point : car si le cercle HIG , le centre duquel est K , pouvoit toucher le cercle ABC en deux points, sçavoir en H & G , il faudroit que la ligne droite menée par les deux centres E & K passast par les deux points d'attouchement H & G , par la proposition precedente, ce qui est impossible : ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Clauius demonstre en cel lieu le theoreme suiuant.

Si au demy diametre d'un cercle produict, on prend vn point outre le centre; le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extreme du semi-diametre, & tombera tout dehors le meisme cercle.

Soit le cercle ABC , duquel le centre est D , & au demy diametre AD prolongé, soit prins quelconque point E , duquel & de l'intervalle EA soit descript le cercle AF , lequel ie dis toucher le cercle ABC au seul point A . Car ou le point E est dans le cercle ABC , ou dehors. S'il est dedans : d'autant que AE est plus grand que AD , c'est à dire que D



C , & à plus forte raison que $EC : EF$ qui est egale à EA sera aussi plus grande que EC : & partans le point F est hors le cercle ABC , & le cercle AF hors le meisme cercle pres du point F . Iceluy point F tombera beaucoup d'auantage

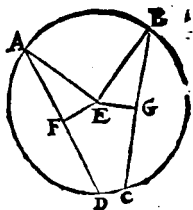
bors le cercle ABC , si E est bors le mesme cercle ABC . Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle ABC , tellement qu'il le touche au seul point A , que le cercle AF coupe ou touche le cercle ABC , en un autre point B , si faire se peut, & soit tirée la ligne DB . Ven donc qu'au diametre du cercle AF est pris le point D , outre le centre E , DA sera la plus petite de toutes les lignes tombantes de D , par la 7. p. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA , DB tombant du centre D en la circonference d'un mesme cercle ABC , sont egales. Donc le cercle AF ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que A , mais tombe tout dehors iceluy: ce qui estoit proposé.

Que si au semi-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit point extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE , du cercle AF , on prend le point D , duquel & de l'interualle DA on descript le cercle ABC , iceluy tombera totalement dans AF , & le touchera au seul point A . Car puis qu'il a esté demonsté cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-soucheint au seul point A : & par ainsi appert ce qui estoit proposé.

THEO. 13. PROP. XIII.

Dans un cercle, les lignes droictes egales, sont également distantes du centre: & les également distantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle $A B C D$, duquel le centre est E , soient deux lignes droictes egales $A D$, & $B C$. le dis qu'elles seront egale-
ment distantes du centre E .



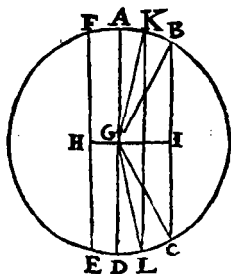
Qu'ainsi ne soit, par la 12. p. 1. du centre E soient menees les deux lignes $E F$, $E G$, perpendiculaires aux deux lignes $A D$, $B C$: puis soient tirees les deux $A E$, & $B E$. Or les deux lignes $A D$, & $B C$ estans coupees en angles droicts par les perpendiculaires $E F$, & $E G$, elles seront aussi coupees en deux egale-
ment par la 3. p. 3. & partant $A F$ sera egale à $B G$. Pareillement $A E$ estant egale à $B E$ par la def. du cercle, & le quarré de $A E$ estant egal aux deux quarez de $A F$, $F E$, par la 47. p. 1. & son egal quarré de $B E$ estant aussi egal aux deux quarez de $B G$, $G E$, les deux quarez de $A F$, $F E$ seront egaux aux deux quarez de $B G$, $G E$. Mais le quarré de $A F$ est egal au quarré de $B G$, & par consequent le quarré de $F E$ est egal au quarré de $G E$. Parquoy la ligne $F E$ sera egale à la ligne $G E$, & par la 4. def. du 3. $A D$, & $B C$ seront egale-
ment du centre du cercle proposé.

Quant à la seconde partie. le dis que si $A D$, $B C$ sont egale-
ment distantes du centre E , qu'elles seront egales; car ayant construit comme dessus, les perpendiculaires $E F$ & $E G$ seront egales par la 4. def. de ce liure, & couperont $A D$, $B C$ en deux egale-
ment par la 3. p. de ce mesme liure, & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus, $A F$ se trouuera egale à $B G$, & par consequent aussi leurs doubles $A D$, & $B C$ seront egales. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui estoit à demonst-
rer.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle , la plus grande ligne est le diamettre : quant aux autres tousiours la plus proche du centre est plus grande que la plus esloignee.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G, soit le diamettre A D, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais B C la plus esloignee. Je dis que de toutes ces lignes A D est la plus grande, & que FE est plus grande que B C.



Car soient tirees du centre G les lignes droictes GH, GI perpendiculaires aux lignes droictes FE, BC : & pource que BC est plus esloignee du centre que FE ; la perpendiculaire GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de celiure. Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menee KML perpendiculaire à GI, & soient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes droictes KL, FE seront egalemment distâtes du cêtre par la 4. def. de celiure, & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que K L

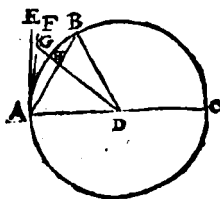
par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre AD ; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE . Par mesme raison AD sera demonst^ré plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL , & GBC , les costez GK, GL, GB, GC , sont esgaulx par la definition du cercle, & l'angle GKL est plus grand que BGC , & par la 24. p. 1. la base KL , ou son egale FE , sera plus grande que la base BC ; & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonst^rer.

THEOR. 15. PROP. XVI.

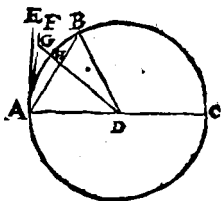
Si à l'extremité du diametre d'un cercle, on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle, & entre icelle perpendiculaire & la circonferen-
ce ne tombera pas vne autre ligne droi-
cte, & l'angle du demy cercle est plus
grand que tout angle rectiligne aigu,
& celuy qui reste plus petit.

Du cercle ABC , soit le cen-
tre D , le diametre AC , sur
l'extremité duquel A soit le-
uee la ligne perpendiculaire
 AE , par la 11. p. 1. le dispre-
mierement qu'icelle ligne AE
tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB ,

estant tiree DB, les deux angles DAB, DBA, seront egaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droit par la cōstruction; DBA sera donc aussi droit: ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la



perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison elle ne tombera pas aussi en la circonference, mais dehors, comme est A E.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire A E, & la circonference A B, vne autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe comme A F, de D soit menee sur icelle la perpendiculaire D G, couppant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles D A G, D G A, sont moindres que deux droits par la 17. p. 1. & par la construction D G A est droit, l'angle D A G sera moindre qu'un droit, & partant la ligne DA, ou son egale DH, sera plus grande que D G, par la 19. p. 1. la partie que le tout: ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire A E, & la circonference A B ne tombera donc pas vne autre ligne droite.

Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle B A C contenu du diam. A C, & de la circonference A B, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celui qui reste B A E contenu de la ligne droite A E, & de la circonference A B, est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque C A E est angle droit diuisé par la seule circonference A B, & qu'entre icelle circonference A B & la ligne droite A E, ne peut

tomber vne autre ligne droicte; l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droicte, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droicte; ny par consequent l'agle BAC ne sera augmété par aucune ligne droicte. Si d'óc à l'extremité du diametre d'un cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demōstrer.

COROLLAIRE.

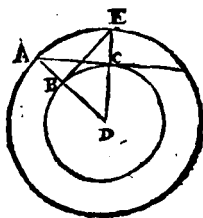
Par ces choses est manifeste qu'une ligne droicte tirée perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn seul poinct. Car il a esté demonsté qu'elle tombe hors le cercle: parquoy elle le touche seulement au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il estoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circonference du cercle, laquelle touche le cercle en A , nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD , & sur icelle seroit élencee la perpendiculaire AE , laquelle touchera le cercle en A , comme il a esté demonsté.

PROBL. 2. PROP. XVII.

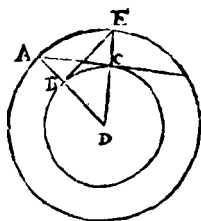
D'un poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A , duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC , dont le centre est D .

Soit menée la ligne AD couppant le cercle BC en B : puis du centre D , & interuale



DA, soit décrit le cercle AE.
Et apres avoir leué la perpen-
diculaire BE au bout du demy
diametre BD par la 11. p. 1.
Soit menee la ligne ED cou-
pât le cercle BC au poinct C,
& du poinct donné A, à iceluy
poinct C, soit menee la ligne
AC, ie dis qu'elle touche le cercle au poinct C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux
costez esgaulx, & l'angle D commun, la base AC se-
ra egale à la base EB, & l'angle droit ACD egal à
l'angle EBD, qui sera aussi droit. Et par le corol. de
la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC
au seul poinct C. Nous auõs donc du poinct donné A
mené la ligne droite AC, qui touche le cercle don-
né au poinct C : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

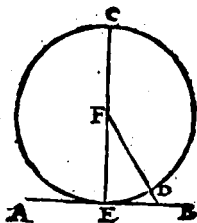
*Nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique, Prob. 26
vne autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.*

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droite touche vn cer-
cle, & du centre à l'attouchement on
meine vne ligne droite, elle fera per-
pendiculaire à la touchante.

Soit

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point E , & d'iceluy point soit menee la ligne droite EC passant par le centre F . Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .

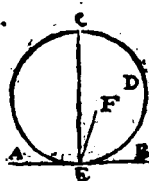


Car si elle ne l'est, soit menee FG perpendiculaire à AB , coupant la circonférence en D . Veu donc qu'au triangle FEG les deux angles FEG , FGE sont moindres que deux droits par la 17. p. 1. & FGE est droit par la construction, FEG sera moindre qu'un droit; & par la 19. p. 1. la ligne FE , ou FD ion egale, sera plus grande que FG , la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB . Parquoy si vne ligne droite touche vn cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droite touche vn cercle; & au point de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire, en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE au point E : & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC . Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire.



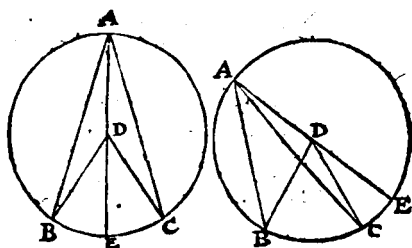
Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F , s'il est possible, & d'iceluy

point soit menée la ligne EF au point de l'attouchement E , elle sera aussi perpendiculaire à AB par la prop. preced. ce qui est impossible : car les deux angles AEC , AEF , seroient droicts, & egaux, la partie au tout : partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne EC , ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.

Dans le
cercle
 ABC ,
soient
les deux
angles,
sçauoir
 BAC en
la circō-



ference, & BDC au centre, ayant mesme circonference BC , pour base. Je dis que BDC sera double de BAC .

Car premierement si les lignes droictes AB , AC enclosent les lignes DB , DC , comme en la premiere figure ; par le centre D estant menée la ligne DE ; & les lignes DA , DB , & DC .

estans egales, les deux triangles ADB , & ADC seront Iſoſceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles egaux sur les bases AB & AC . Mais l'angle extérieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles intérieurs DAB , & DBA , qui sont egaux: partant il sera aussi double du seul DAB : par mesme discours EDC se trouuera double de DAC , & par consequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC .

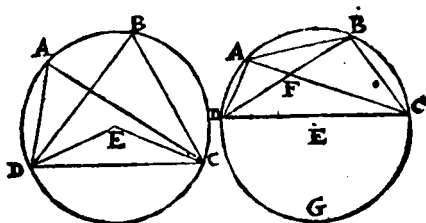
Que si l'angle de la circonference A est comme en la seconde figure, il s'ensuiura tousiours le mesme, ſçauoir que BDC sera double de BAC .

Car apres auoir mené la ligne ADE , tout ainsi comme cy dessus par la 32. p. 1. l'angle extérieur BDE sera egal aux deux opposez intérieurs ABD , DAB , & double du seul DAB estant le triangle Iſoſcele: par mesme discours CDE sera double de CAD , & par les com. sent. Si de BDE double de BAE on oſte CDE , double de CAE , le demeurant BDC sera double du demeurant BAC . Parquoy dans le cercle l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui sont en vne mesme portion, sont egaux entr'eux.

Toute
portion
de cer-
cle, est
ou plus
grande
ou plus
petite



que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande portion DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED, & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la propos. precedente & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'une mesme, sont egales entr'elles, ainsi les angles A & B seront egaux entr'eux.

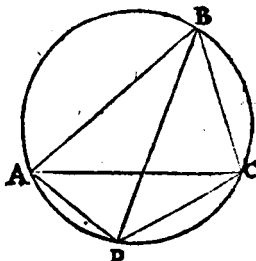
Soit maintenant vne portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC sont en la mesme portion DABC sont egaux.

Car si on mene la ligne AB, il se fera vne portion BGA plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonsté cy dessus les deux angles ADB & BCA, qui sont en vne mesme portion AGB seront egaux; pareillement au deux triangles DAF, & CBF les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonsté à la 32. p. 1. le troisieme angle DAF sera egal au troisieme angle CBF. D'oc au cercle les angles qui sont en vne mesme portion sont egaux entr'eux: ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 20. PRO. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle $ABCD$. Je dis que les angles opposez ABC, ADC ; item BAD, BCD , sont aussi egaux à deux droicts.



Car si on mene les deux lignes AC , & BD , les deux angles ACD , & A estans en vne mesme portion $ABCD$, seront egaux par la prop. precedente. Pareillement DBC , & CAD , estans en vne mesme portion $DABC$, seront egaux: donc les deux angles sous le poinct B , seront egaux aux deux DAC , & DCA , lesquels avec les deux du poinct D , sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le poinct B avec les deux sous le poinct D : c'est à dire le total ABC , avec le total ADC , seront egaux à deux droicts. Nous demonst rerons en la mesme maniere, que les deux angles BAD, BCD , sont egaux à deux droits. Car de recherche les deux angles ABD, ACD , sont egaux. Item les deux BCA, BDA ; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB , lesquels avec BAD sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. Donc aussi

les deux BCD , BAD , seront égaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre costez inscrites au cercle, ont les angles opposez égaux à deux angles droicts. Ce qu'il falloit demonstrei.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC , & ADC sur la ligne droicte AC , & de mesme costé. Il est evident qu'elles s'entre-couperont seulement és poincts A & C , puis que par la 10. prop. de ce liure vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux poincts; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droicte CB couppant les circonférences en D & B , & tirées les deux lignes droictes BA , & DA : par la definition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront égaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle extérieur ADC doit estre plus grand que l'opposé intérieur B . Donc les deux portions ABC , & ADC estans semblables, & inegales, ne se pouuoient mettre sur vne mesme ligne



droiſte A C, & de meſme part. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Semblables portions de cercles eſtans conſtituées ſur lignes droiſtes egales, ſont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles ſemblables ABC & DEF conſtituées ſur lignes droiſtes egales



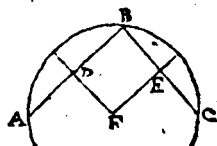
AC, & DF. Je diſ qu'icelles portions ſont egales entr'elles.

Aurement, ſi elles eſtoient inegales, il ſ'enſuiroit que deux portions ſemblables & inegales pourroient eſtre poſées ſur lignes droiſtes egales ou bien ſur vne meſme, contre la prop. precedentee donc les deux portions ABC & DEF conſtituez ſur lignes droiſtes egales, ſeront egales : Ce qu'il falloit prouver.

PROB. 3. PRO. XXV.

La portion d'un cercle eſtant donnee, deſcrire le cercle duquel elle eſt portion.

Soit vne portion de cercle ABC , de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.



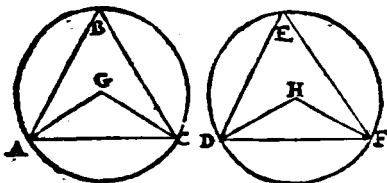
En la circonference d'icelle portio soient pris comme on voudra les trois poinçts A , B , C , & apres auoir mené les deux lignes droictes AB & BC , & icelles coupees en deux egalelement en D & E par la 10. p. 1. d'iceux poinçts soient leuees par la 11. p. 1. les perpendiculaires DF , & EF , se rencontraans au poinçt F : (or elles se doiuent rencontrer, pour ce que si on menoit la ligne droicte DE , seroient faits deux angles EDF , DEF , moindre que deux droits. Je dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. prop. de celiare le centre sera à la ligne DF : Il sera aussi en EF : ce sera donc au poinçt F , qui leur est commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portio: Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonfereces egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonfereces.

Soient les cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & les angles d'iceux egaux, sçavoir aux circonferences, B egal à E; & aux centres, G egal à H. Je dis que les circonferences AC, & DF, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.



Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirées du centre à la circonferance seront egales par la 1. def. de ce liure. Ainsi ayant tiré les deux lignes droictes AC, DF, les deux triangles AGC, & DHF, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H; & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E, la portion ABC sera semblable à la portion DEF, par la 10. def. de ce liure, & par la 24. prop. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste portions egales, sçavoir ABC & DEF; le demeurant AC sera egal au demeurant DF: ainsi les angles egaux s'appuyeron sur circonferences egales AC, DF. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appoyent sur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouver.

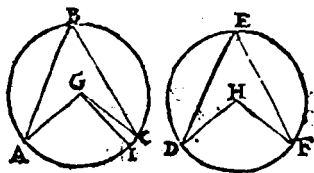
S C H O L I E.

Ce qu'Euclide dit en ceste proposition, & aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre en mesme cercles, c'est à dire qu'en vn mesme cercle les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car tousiours la mesme demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux aura aussi lieu en vn mesme cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF soient les angles ABC, &



DEF tous deux en la circonferance. Item AGC & DHF au centre; ie dis premierement que les angles G & H seront egaux.

Autrement, l'un d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, il faudra par la 23. p. 1. sur AG faire l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales: ce qui est

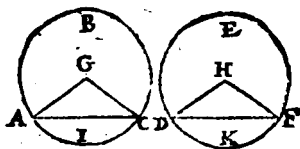
contre nostre hypothese; car nous auions posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales contre la 8. commune sentence. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal.

L'egalité des angles du centre estant prouuée, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitez d'iceux par la 20. proposition de ce liure. Donc aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonférences egales sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales, prennent circonférences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Soiēt les deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les cētres soiēt G & H, & dās iceux deux lignes droictes egales AC &



DF. Je dis que les circonférences qu'elles couppent sont egales, sçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

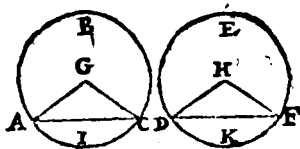
Qu'il ne soit ainli; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la premiere def. de ce liure, estans les cercles egaux

& la ligne droite AC estant egale à la ligne droite DF , les deux triangles AGC , & DHF auront les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien: & par la 8. p. 1. l'angle G sera egal à l'angle H , & par la 26. prop. de ce liure ils s'appuyent dessus circonferences egales AIC , & DKF ; & qui de cercles egaux oste icelles circonferences egales, resteront les circonferences ABC , DEF , aussi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, soustendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC & DEF , desquels les centres sont G , & H , soient les circonferences ABC , DEF egales, soustendues des lignes droictes AC & DF . Je dis qu'icelles soustendantes sont egales.



Qu'ainsi ne soit; des centres G & H soient menées les lignes droictes GA , GC , HD , HF . Or d'autant que l'on pose les circonferences ABC , DEF egales, les angles G & H qui s'appuyent dessus circonferences egales, seront egaux par la 27. prop. de ce liure: pareillement les costez GA & GC , estans egaux aux costez HD & HF par la 1. def. la base AC

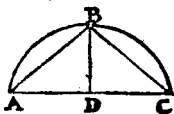
sera égale à la base DF par la 4. p. 1. Donc aux cercles égaux, les circonférences égales soustendent lignes droictes égales : ce qui estoit à prouver.

PROB. 4. PROP. xxx.

Coupper vne circonference donnée en deux également.

Soit la circonference donnée ABC , laquelle il faut coupper en deux également.

Soit menée la ligne droicté AC , laquelle soit couppée en deux également au point D , duquel point soit esleuée la perpédiculaire DB par la 11. p. 1. Je dis que la circonference ABC est couppée en deux également en B .



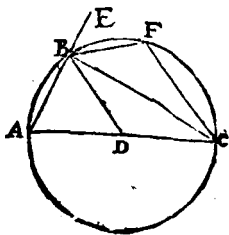
Qu'il ne soit ain si : il faut mener les lignes droictes AB & BC ; & pour autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB , sont égaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB , & les deux angles au point D égaux ; par la 4. p. 1. la base AB sera égale à la base BC , & par la 28. p. de ce liure les circonférences AB & BC seront égales. Nous auons donc couppé la circonference donnée en deux également. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 27. PROP. xxxi.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit : & celuy qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un

droict: Mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droict. Et d'avantage, l'angle de la plus grande portion, est bien plus grand qu'un droict: mais l'angle de la plus petite portion est plus petit qu'un droict.

Au cercle ABC, duquel D est centre, & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC: & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC; mais en la moindre portion BFC l'angle CFB. Je dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, est droict.



Car apres avoir mené la ligne BD, & continué AB iusques en E; il est euident que les triangles ABD & CBD sont Iſosceles, & par la 5. p. 1. ils aurōt les angles sur la base egaux, ſçavoir BAD à ABD, & CB D à BCD; & partant les deux ensemble ABD CBD seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au point B, faisant le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. ABC & CBE seront tous deux angles droicts.

Je dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est en la plus grande portion CAB, est plus petit qu'un droict: ce qui est aisé à prouver par la 32. p. 1. d'au-

tant que l'angle ABC , estant droit, les deux autres ensemble ne vaudrôit qu'un droit; & partant l'angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Ie dist tiercemêt, que l'angle BFC , qui est en la petite portion CFB , est plus grand qu'un droit: car par la 22. prop. de ce liure la figure de quatre costés $ABFC$ inscrite au cercle, a les deux angles opposez egaux à deux droits; sçavoir A & F . Mais nous auons prouué A estre plus petit qu'un droit; par consequent F sera plus grand.

Ie dis en quatriesme lieu, que l'angle de la plus grande portion, compris de la ligne droite BC , & de la periphèrè BAC , est plus grand qu'un angle droit: ce qui est euident, car l'angle droit rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA .

Finablement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droite BC & de la circonferèrè BFC , c'est à dire l'angle mixte CBF , est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE . Donc au cercle l'angle qui est au demy cercle est droit, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

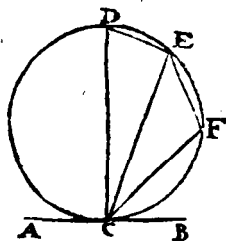
C O R O L L A I R E.

De ce que dessus, est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres, est droit.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelqueligne droite touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droite couppant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point C , & d'iceluy point soit menée CE , coupant le cercle en deux portions inégales. Je dis que l'angle ECB , est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande portion CDE ,



& que ECA est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite portion CFE .

Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diametre CD , soient menées les lignes DE , EF , FC . Maintenant par la proposition precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont égaux à un droit, c'est à dire à DCB , lequel est droit par la 18. prop. de ce liure; desquels si on oste l'angle commun ECD , le demeurant ECB sera égal au demeurant D . Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle $CFED$, aura les angles opposez F & D , égaux à deux droits: c'est à dire aux deux ECA , ECB , desquels si on oste choses égales, c'est à sçauoir les angles D & ECB égaux, les demeurans F & ECA seront égaux.

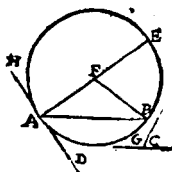
Que si la ligne coupant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la proposition precedente. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

P R O B L.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnée, decrire la portion d'un cercle capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB , & l'angle rectiligne C : il faut sur icelle ligne decrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C .



Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23.

p. 1. & au poinct A soit leuée AE perpendiculaire à AD ; puis sur la ligne AB , & au poinct B , soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. p. 1. tirant la ligne BF iusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au poinct F : donc par la 6. p. 1. les costez FA , FB , seront egaux: Partant le cercle descript du centre F & interval FA , passera aussi par le poinct B ; & apres auoir mené la ligne droicte BE , ie dis que l'angle E , qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C . Car d'autant que la ligne droicte AE passe par le centre F , & qu'à icelle, DA est perpendiculaire; par le corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A . Parquoy par la précéd. prop. l'angle BAD , qui est egal à l'angle C , sera egal à l'angle E , descript dans la portion AEB ; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C : ainsi nous auons descript vne portion de cercle sur la ligne donnée AB , capable d'un angle egal à vn angle donné C .

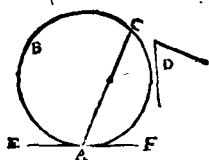
Que si l'angle donné eust esté obtus, comme G, il eust fallu construire l'angle BAH égal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour décrire le cercle AEBI, & par la prop. précédente la plus petite portion AIB eust compris vn angle égal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droit, ne falloit que décrire vn demy cercle sur la ligne donnée. Or nous auons donc construit sur la ligne donné AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, oster vne portion capable d'un angle égal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC; duquel il faut oster vne portion capable d'un angle rectiligne égal à l'angle donné D.

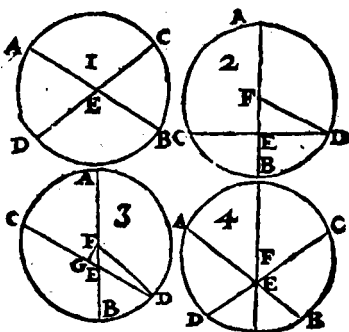


Soit menée la ligne droite EF touchant le cercle en A: puis par la 23. p. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A l'angle rectiligne FAC égal au donné D, faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux portions. Le dis que tout angle qui sera fait en la portion ABC, sera égal au donné D. Car il sera égal à l'angle FAC par la 32. prop. de ce liure, lequel est égal à D par la construct. on. Nous auons donc du cercle donné ABC coupé vne portion, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 29. PROP. xxxv.

Si dans vn cercle, deux lignes droictes se couppent l'une l'autre; le rectangle contenu des deux pieces de l'une, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

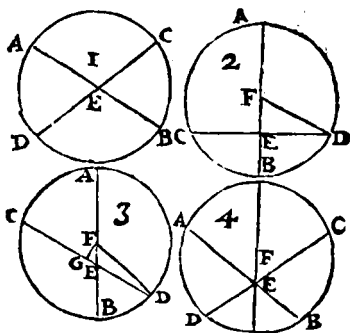
Soient deux lignes droictes AB , CD dans le cercle $ACBD$, s'entrecoupant en E . Je dis que le rectangle compris des deux pieces AE & EB , est egal au rectangle cōtenu des deux pieces CE & ED .



Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passeroient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seule AB , passe par le centre F , & diuise DC en deux egaleme, comme en la 2. figure; elle la diuifera aussi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD , il est euident par la 5. p. 2. que le rectangle de AE & EB avec le quarré de EF , seront egaux au quarré de FB , ou FD , (car la ligne AB est couppée en deux egaleme au point F ,

& en deux inegalement en E) & par la 47. p. 1. le quarré de FD estât egal aux deux quarez de FE & ED, en ostant le quarré cômun de FE, le demeurant rectâgle de AE & EB, se trouuera



egal au quarré de ED, comme il a esté demonsté à la 14. p. 2. ou au rectangle de CE, ED.

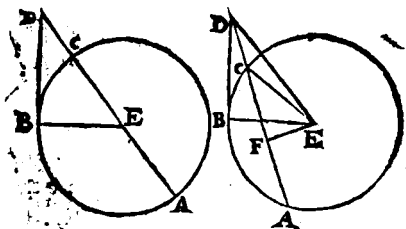
Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisieme figure) diuise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuiura la mesme chose. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droiète FD : pourautant que AB est couppee en deux egalelement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG & GE par la 47. p. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. p. 1. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarez de FG & GE, sera egal aux deux quarez de FG, & GD : & partant en ostant le quarré cômun de FG, le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Par mesme discours, & par la mesme 5. p. 2. le quarré de GD est egal au rectangle de CE & ED, & quarré de GE ; en ostant donc le quarré cômun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouuera egal au rectangle de CE & ED.

Que si ny l'une ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuiura la mesme : car si on mei-

ne le diametre HI , passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH , sera egal au rectangle de CE & ED , comme cy dessus a esté dit; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AE & EB ; item de CE & ED , seront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes s'entrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

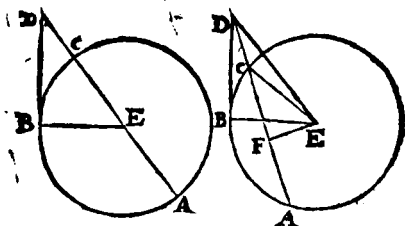
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle, on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Hors le cercle ABC soit pris le point D , duquel soit menée la ligne DA , coupant le cercle en C , &c.

la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la toute AD, & de la partie CD prise entre le point donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante B D.



Qu'il ne soit ainsi : du centre E au point d'atouchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce livre sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour-autant que la ligne AC est couppee en deux également au point E, & à icelle est adjoustée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de la partie CD avec le quarré de CE, ou BE son egal, est egal au quarré de DB par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de DB, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrier en ceste sorte : du centre E soient menées les lignes EN, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux également par la 3. prop. de ce livre. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, avec le quarré de CF, sera egal au quarré de DE, ausquelles choses egales si on adjoust le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux quarrés de CF & FE, ou le seul de

CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarréz de DE & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarréz egaux de CE. & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

Par ces choses est manifeste, que si d'un point pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes coupant le cercle; les rectangles compris souz chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles, sera egal au quarré de la ligne touchante.

Appert aussi que deux lignes droictes tirées d'un mesme point, & touchant le cercle, sont egales entr'elles puis que le quarré de chacune d'icelles, sera egal au rectangle de la ligne tirée du mesme point & coupant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

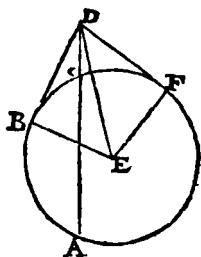
Est aussi euident que d'un mesme point pris hors le cercle, peuvent estre seulement tirées deux lignes droictes qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles; & partant du point D pourroient estre menées plus de deux lignes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. proposition de ce troisieme livre.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle, on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droictes au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre

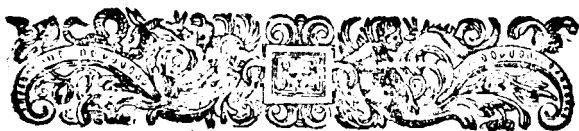
l'atteint : Si le rectangle compris de toute la coupée, & de la partie prise entre le point & la circonférence convexe, est égal au carré de celle qui atteint ; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle $A B C$ soit pris le point D , & d'iceluy soit menée la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C , & la ligne DB qui atteint le cercle au point B ; & soit le rectangle de la toute AD & de la partie CD , égal au carré de DB . Je dis que DB touche le cercle en B .



Car du point D , étant menée la ligne DF touchant le cercle au point F , & du centre E les lignes EB, ED, EF , par la proposition précédente, le carré de DF sera égal au rectangle de AD & CD . Mais par l'hypothèse le carré de DB , est aussi égal à iceluy rectangle : & partant les carrés, & les lignes DF & DB , seront égales. Item EF & EB , sont aussi égales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme : ainsi les deux triangles DBE , & DFE ayans les trois costez égaux aux trois costez, chacun au sien, les angles B & F , seront égaux par la 8. p. 1. & F étant droit par la 13. prop. de ce liure, aussi B sera droit ; & par le coroll. de la 16. prop. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Fin du troisieme Element.



ELEMENT

Q V A T R I E S M E.

D E F I N I T I O N S.

Vne figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche un chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi vne figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand un chacun costé de la circonscrite touche un chacun angle de l'inscrite.

3 Mais vne figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand un chacun angle de la figure inscrite, touche la cir-

conference du cercle.

4. Et vne figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5. Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit estre circonscrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est descrit.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodée dans le cercle, quand les extremittez d'icelle sont en la circonference du cercle.

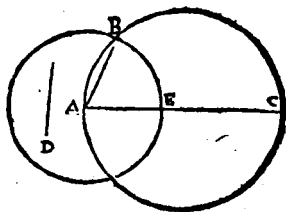
Toutes ces definitions sont si claires & faciles à entendre, qu'il n'est besoin d'en donner autre explication.

PROBL. I. PROPOS. I.

Au cercle donné, accommoder vne

ligne droicte egale à vne ligne droicte
donnee , laquelle ne soit pas plus gran-
de que le diametre du cercle.

Soit le cercle don-
né ABC , dans le-
quel il faut accom-
moder vne ligne
droicte egale à la
ligne droicte don-
nee D , qui n'est
pas plus grande
que AC diametre
d'iceluy cercle.



Soit du diametre
 AC couppee AE
portion egale à la
ligne D . En apres du centre A , & interval AE soit des-
crit le cercle BE couppant le cercle donne au poinct
 B , & soit menee la ligne droicte AB . Ie dis que AB
est egale à D .

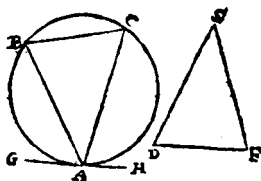
Car par la def. du cercle, AB & AE sont egales, &
par la construction, icelle AE est egale à D , & par la
1. com. sent. AB & D seront egales. Nous auons donc
accommodé au cercle donne vne ligne droicte, &c.
Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donne , inscrire vn
triangle equiangle à vn triangle donne.

Soit le cercle donné $A B C$, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné $D S F$.

Soit menée la ligne $G H$, qui touche le cercle au poinct A , auquel poinct soient faicts les deux an-



gles $G A B$ egal à l'angle D , & $H A C$ egal à l'angle F , par la 23. p. 1. Puis soit menée $B C$. Je dis que le triangle inscrit $A B C$ est equiangle au donné $D S F$.

Car puis que la ligne $A B$ coupe le cercle en deux portions, l'angle C en la grande portion sera egal à l'angle de l'attouchement $G A B$, & par consequent à l'angle D par la 32. p. 3. & par la mesme raison, la ligne $A C$ coupant le cercle, l'angle B se trouuera aussi egal à l'angle F , & par la 32. p. 1. le troisieme A sera aussi egal l'angle S , & par consequent les triangles seront equiangles. Au cercle donné nous auons donc décrit vn triagle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

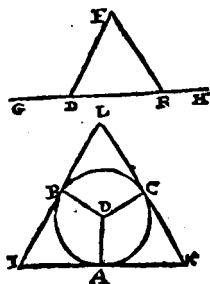
PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné $A B C$, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné $D E F$.

Soit prolongé le costé $D F$ de part & d'autre iuf-

ques en G & H, & du centre D, soit menee à l'aduenture la ligne D A, sur laquelle au point D, soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC, egal à l'angle HFE par la 23. p. 1. & aux trois lignes D A, D B, D C, soient menees les trois lignes perpendiculaires I K, I L, K L,



lesquelles toucheront le cercle és points A, B, C, par le corol. de la 16. p. 3. & icelles se rencontrant aux trois points I, k, L, feront le triangle I K L, lequel ie dis estre le triangle demandé.

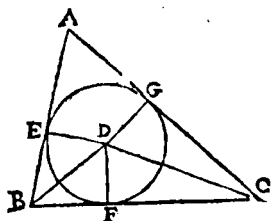
Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puisque tous les costez d'iceluy le touchent és points A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1;) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par la cōstruction ADB est egal à GDE: donc l'angle I sera egal à l'angle E D F. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisieme L sera egal au troisieme E: ainsi les triangles circonscrit I K L, & donné DEF, seront equiangles: Parquoy nous auons fait ce qui estoit requis.

P R O B . 4 . P R O P . I I I I .

Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les deux angles B & C coupez en deux également par la 9. p. 1. par les deux lignes B D & C D, se rencontrans au point D : Item d'ice-



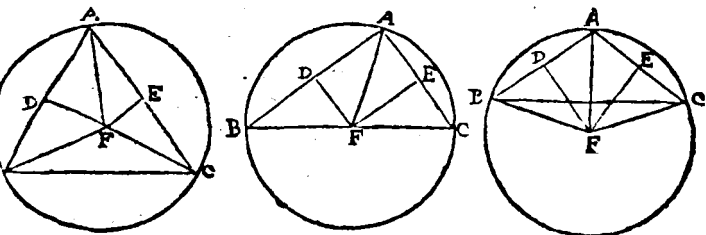
luy point de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & du centre D, & interualle DE soit descript le cercle EFG. Le disqu'iceluy cercle est inscrit au triägle dōné ABC.

Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillement droit, & le total B estant couppé en deux également, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egal à DF, & par la 1. com. sent. les trois lignes DE, DF, DG, seront egales: ainsi le cercle EFG descript de l'interualle DE, sera aussi del'interualle des deux autres: & partant il passera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le coro. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'un triangle donné, de-
crire un cercle.

Soit le triangle donné ABC , à l'entour duquel il
faut décrire un cercle.



Soient coupez également les deux costez AB au point D , & AC au point E par la 10. p. 1. & par la 11. p. 1. d'iceux points D , & E , soient leuees les perpendiculaires DF, EF , se rencontrans au point F , lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC , ou hors le triangle : & apres auoir mené les trois lignes FA, FB, FC , les deux triangles ADF, BDF , auront les costez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au point D egaux pour estre droicts : donc les bases AF, BF , seront egales par la 4. p. 1. Par mesme discours AF, CF , seront aussi egales : & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC , seront egales : & partant le cercle décrit de F & interuale FA , passera aussi par les points B & C . Nous auons donc décrit un cercle à l'entour du triangle donné ABC : ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus: car ils sont tous en vne grande section de cercle: mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit: si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre section de cercle.

Et au contraire, est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy: mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit: & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droite: car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel faudra descrire vn cercle, comme est enseigné en ce Prob. Cey se pratique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique, Prob. 21.

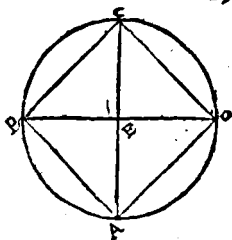
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné ABC , dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres AC & BD se couppans

couppans au centre E en angles droicts, & soient menées les quatre lignes AB , BC , DC & DA . Je dis que $ABCD$ est quarré inscrit au cercle donné.



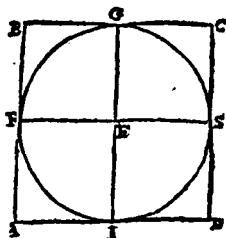
Car d'autant que les quatre angles au point E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs auxquels ils insistent, seront egaux par la 26. p. 3. & partant les lignes droictes soustendans iceux seront aussi egales par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatere $ABCD$ seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts, par la 31. p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle: donc le quadrilatere $ABCD$ est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 7. PROP. VII.

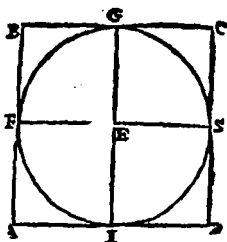
A l'entour d'un cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné $FGSI$, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menées les deux diametres FS & GI se couppans au centre E à droicts angles, & sur les points G & I , soient menées les deux lignes BC , AD paralleles à



FS: Ité par les deux poinçts F & S soient menées les deux lignes AB, DC parallèles à GI par la 31. p. 1. icelles quatre lignes parallèles se rēcōtrans aux poinçts A, B, C, D. Je dis que le quadrilatere A B C D est le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux à l'un ou l'autre des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34. p. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinçt E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais iceux estans droicts, aussi les quatre A, B, C, D, seront chacun droict, & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poinçts F, G, S, I, par le corol. de la 16. p. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'un cercle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 8. PRO. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la figure cy dessus) dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient coupez en deux également les quatre costez aux poinçts F, G, S, I, & apres auoir mené les deux lignes F S & GI s'entrecouppans au poinçt E,

d'iceluy poinct E, & interualle E F, si on décrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33. p. 1. IG sera egale & parallele à AB: & FS à B C; ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre, parallelogrammes, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez-oppoſez egaux, ainsi AF & I E seront egaux: Item FE, & AI; FB & E G; ID & ES: mais toutes icelles moities des costez du quarré sont egales, partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales, & comme elles touchent le quarré aux poincts F, G, S, I, aussi le cercle décrit del'interuale de l'vne d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poincts, par le corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auōs donc décrit vn cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il falloit faire.

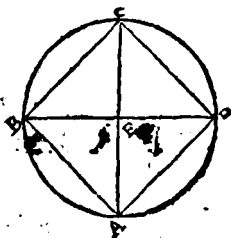
PRO. 9. PROP. IX.

À l'entour d'un quarré donné, déſcrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, à l'entour duquel il faut déſcrire vn cercle.

Soient menees les deux diagonales A C & B D, s'entrecoupons au poinct E; puis du centre E, & de l'interuale E A, soit déſcrit le cercle A D C B.

le dis qu'il ſera le demandé: c'eſt à dire qu'il tou-



chera les quatre angles du quarré donné $ABCD$.

Car le costé AB estant egal au costé AD , le triangle BAD sera Ifofcelle : & par la 5. p. 1. les angles ABD & ADB , sur la base BD seront egaux, & seront chacun demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle BAD droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstons que tous les autres angles des poincts A, B, C, D , seront aussi demy droict; & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle AED les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droictes EA , ED aussi egales par la 6. p. 1. & par mesme discours ED sera egalé à EC , & EC à EB ; comme aussi EB à EA : & partant les quatre lignes droictes EA , ED , EC , EB , estans egales, il est aisé de conclurre comme aux precedentes, que le cercle descript du centre E , & de l'interualle de l'une d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné $ABCD$. Nous auons donc d'escrit vn cercle à l'entour d'un quarré donné : ce qu'il falloit faire.

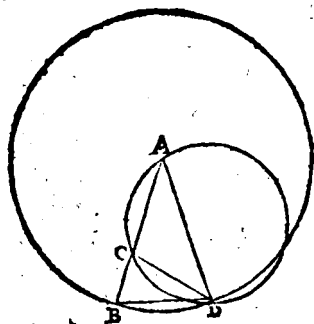
SCHOLIE.

Nous auons enseigné en nostre Geometrie la pratique & construction presque de tous les probl. de ce quatriesme liure, c'est pourquoy nous n'en disons icy autre chose.

PROB. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Ifofcelle, ayant vn chacun des angles de la base double del'autre.

Soit la ligne AB coupée en C , comme enseigne la 11. p. 2. & du centre A , & intervalle AB soit décrit vn cercle, dans lequel soit accommodée la ligne DB égale à AC ; & apres soit menée la ligne AD . Je dis que ABD est le triangle Isocele demandé.



Car apres auoir mené CD , si à l'entour du triangle ACD , on décrit le cercle ACD , comme il a esté enseigné cy dessus; puis que la ligne AB à esté coupée en C , comme enseigne la 11. p. 2. le rectangle de AB & BC , sera égal au quarré de CA , ou de son égale DB ; & par la 37. p. 3. la ligne DB touchera le cercle en D , & l'angle CAD sera égal à l'angle CDB par la 32. p. 3. & si à iceux on adioute l'angle commun ADC , les tous seront égaux; sçauoir le total ADB , aux deux CAD & ADC : mais l'angle extérieur DCB , est aussi égal aux deux CAD & ADC , par la 32. p. 1. partant il sera aussi égal à l'angle ADB , ou à son égal ABD par la 5. p. 1. (car le triangle est Isocele) & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isocele, & le costé DC égal à DB : partant aussi égal à CA ; & le triangle DCA étant Isocele, il aura les deux angles sur la base AD égaux par la 5. p. 1. & l'angle extérieur DCB (qui est égal à tous les deux) sera double du seul A : aussi sera son égal B , & partant aussi son autre égal AD : voila donc ABD

triangle Iſoſcele, ayant les angles de la baſe doubles du troiſieſme : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle ABD , ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à 5 cinquieſmes de deux droicts: il eſt euident que l'angle A eſt la 5 partie de deux droicts, & chacun des autres B & D , les deux cinquieſmes parties: item A eſtre les deux quints d'un droict: chacun B & D les 4 quints, puis que tous les trois ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à 10 quints d'un droict.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit conſtruire un triangle Iſoſcele, ayant un chacun des angles de la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme faiſt icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnée, nous l'auons enſigné (apres Pappus & Clavius) en noſtre Geometrie pratique Prob. 37, & Scholie du 126.

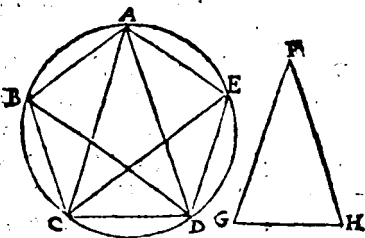
PRO. II. PROP. XI.

Dans un cercle donné, deſcrire un pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cerle donné à $ABCDE$, dans le quel il faut inſcrire le pentagone demandé.

Dans iceluy cercle il faut inſcrire le triangle ACD equiangle au triagle FGH , lequel ait eſté cōſtruit ſelō le requis de la precedente propoſition, & apres

auoir mené les
deux lignes droi-
ctes CE & DB,
couppât les deux
angles ACD &
ADC, en deux
egalement par la
9.p.1. soient me-
nées les lignes
droictes CB, BA,
AE, ED. Je dis



que ABCDE, est le pentagone inscrit equiangle & equilateral.

Car puis que le triangle FGH a esté construit selon le precepte de la precedente proposition, les deux angles sur la base GH, seront doubles du troisieme F, & par consequent le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisieme A, lesquels estans coupez en deux egalement par les lignes droictes CE & DB, & les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE sont egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour bases; mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29.p.3. donc tous les cinq costez estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi sera-il bien aisé de prouuer qu'il est equiangle par la 27. prop. 3. d'autant que chacun angle est soutenu de circonferences egales, sçauoir de trois arcs comprenant trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cery il s'ensuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquiemes parties de deux droicts, ou bien les 6 quintes d'un droict. Car puis que les trois angles BAC , CAD , DAE sont egaux par la 27. propos. 3. & CAD est le quint de deux droicts, ou des deux quintes d'un droict; le total BAE , qui est compose de ces trois sera les trois quintes de deux angles droicts, ou bien les six quintes d'un droict.

S C H O L I E.

Clavius enseigne en ce lieu cy deux manieres pour descrire vn pentagone equilateral, & equiangle sur vne ligne droite donnee & terminee, la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

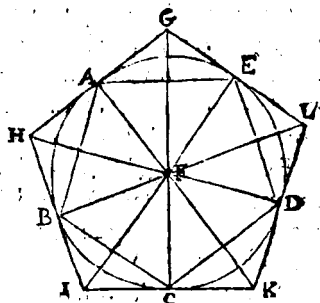
P R O B. 12. P R O P. XII.

A l'entour d'un cercle donne, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donne $ABCDE$, a l'entour duquel il faut descrire le pentagone demande.

Dans iceluy soit descript le pentagone $ABCDE$ par la precedente, & apres auoir mene du centre F les cinq lignes FA , FB , FC , FD , FE , soient me-

nées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, kL, LG par la 11. pr. 1. se rencontrent aux cinq points G, H, I, K, L (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux



droits, estant parties des angles droits GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droictes AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Je dis que GHIKL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidentement circonscrit; puis que par le coroll. de la 16. prop. 3. les lignes GH, HI, IK, KL, LG touchent le cercle es points A, B, C, D, E: en apres si on mene les cinq lignes FG, FH, FI, Fk, FL, d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. pr. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarréz de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarréz de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarréz de FA, FE sont egaux: (estans descrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux, & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, PG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux; & partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours aussi AFB egal à AFE par la 27. prop. 3. car ils ont egales circon-

ferences pour bases) sera double de $A F H$, & par consequent $A F G$ & $A F H$ seront egaux: Donc les triangles $A G F$, $A H F$ ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé $A F$ commun: & par la 6. prop. 1. $A G$ sera egale à $A H$. Par mesme discours $G E$ & $E L$ se trouueront egales: mais $A G$ & $E G$ estant egales, aussi leurs doubles $G H$ & $G L$ seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monstré que les angles des triangles $A G F$, $E G F$ sont egaux: sçauoir est, les angles $A G F$, $E G F$: Item $A G F$, $A H F$: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le poinct G , seront egaux aux deux angles sous le poinct H , & ainsi des autres; partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous auons donc décrit à l'entour d'un cercle donné vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

P R O B. 13. P R O P. XIII.

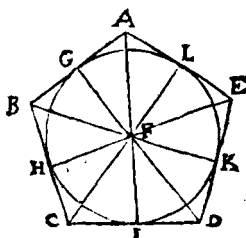
Dans vn pentagone equiangle, & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral $A B C D E$, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient coupees en deux egaleement chacun des angles A , & B , par les lignes $A F$ & $B F$ par la 9. prop. 1. se rencontrans au poinct F , & par la 12. propos. 1. du poinct F soient menées les perpendiculaires $F G$,

FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interuale FG soit descript le cercle GHKL. le dis que c'est le cercle demandé.

Car puisque par la construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total couppe en deux egale-ment, & l'angle droit G egal à l'angle droit L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF,



par la 26. p. 1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AG à AL & BG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouueront egales : & partant le cercle descript de F & interuale FG, passe par les points G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16. p. 3. le cercle GHKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

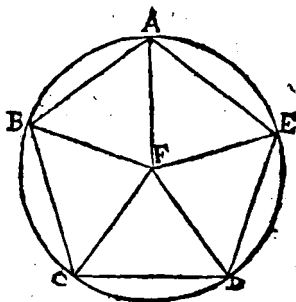
PROBL. 14. PROP. XIII.

À l'entour d'un pentagone equiangle,
& equilateral, descrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.

Soient coupees les cinq angles A, B, C, D, E, en deux egale-ment par la 9. p. 1. avec les lignes AF, BF, CF,

FD, EF serencōtrans au point F, & d'iceluy point F, & interuale del'vne d'icelles cinq lignes, soit descrit le cercle A B C D E. Je dis qu'il sera circonscrit au Pentagone.



Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy a esté couppé en deux egalement, les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6. p. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux : & par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, ainsi des autres ; & par la 1. commune sentence il est evident qu'icelles cinq lignes seront egales entr'elles, & que partant le cercle descrit de l'interuale del'vne d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pantagone donné. Parquoy nous auons descrit vn cercle à l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral : Ce qu'il falloit faire.

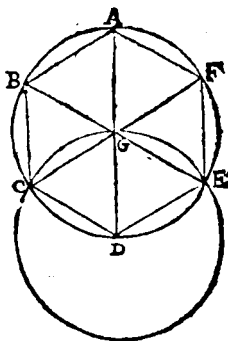
PROB. 15. PROP. xv.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné A B C D E F, dont le centre est G; dans lequel cercle il faut inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, & du centre D & inter-

uale DG, soit décrit vn autre cercle GCE coupant le donné aux points C & E, desquels points soient menées les deux lignes CGF, EGB: finalement soient menées les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EF, FA. Je dis que ABCDEF est l'hexagone demandé.



Car il est evident, n demonstrent comme en la 1. p. 1. que les deux triangles CDG, DEG sont equilateraux, & par le corol. de la 5. p. ils seront aussi chacun equiangles, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts, & l'angle AGB par la 15. p. 1. vaudra le tiers de deux angles droicts: ainsi par la 13. & 15 p. 1. tous les angles au point G, seront egaux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts; partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone sera equilateral, & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du point A seront egaux aux deux du point B; & ainsi des autres. Nous auons donc décrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

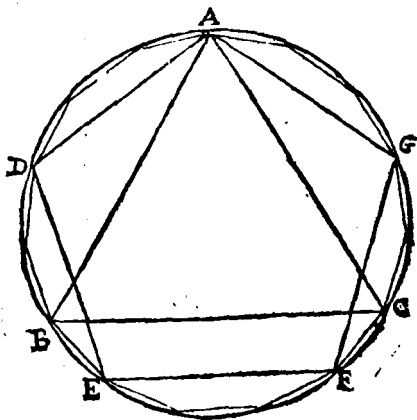
COROLLAIRE.

Par cecy. est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle: car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné , descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle, & equilateral.

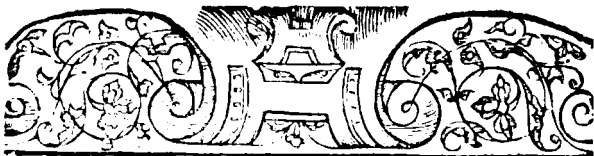


Soit premierement descrit dans iceluy le triangle equilateral A B C par la 1. prop. de ce liure; les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisée en trois également par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone A D E F G par la 11. prop. de ce liure, ayant l'un des angles sur le poinct A. Je dis que ayant mené la ligne droite B E, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD, cinquiésme partie de la circonference; partant doit contenir trois costez du quindecagone; & les deux arcs AD & DE contiendront fix costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq: donc l'arc BE sera la quinziésme partie de toute la circonference; partant la ligne droicte BE sera le costé du quindec. & si par la 1. prop. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelles BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, c'est à sçauoir composez de 13 arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poinçts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descriira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & d'auantage nous descrirons & circonscriurons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode praticquée au pentagone.

Fin du quatriésme Element.



E L E M E N T

C I N Q V I E S M E .

D E F I N I T I O N S .



PARTIE, est vne grandeur tirée d'une plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grâde.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dictée partie d'icelle, comme *A* qui est contenu 3 fois en *B*, est dis partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux sortes de *A. B. C.* parties: car il y en a vne qui mesure son tout; 3. 9. 7. comme *A*, lequel repeté 3 fois constituë son tout *B*: & l'autre sorte ne mesure pas son tout; mais prise ie ne sçay combien de fois excède iceluy, ou deffaut au mesme, comme *A*, lequel estant pris 3 fois excède *C*, mais estant pris seulement 2 fois, il est excédé par le mesme *C*: Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquante; de ceste-là seulement parle icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout; & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. livre, mais parties.

2. **Multipliee**, est vne grandeur plus grande

grande qu'une plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si *A* est mesurée par *B* moindre grandeur qu'icelle *A*, elle est dite multipliee de *B*: Ainsi aussi *C*, qui est mesurée 4 fois par *D*, est dite multipliee d'icelle *D*.

A 12. *B* 4.

C 20. *D* 5.

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire qu'une moindre est contenuë autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes-là sont dites equemultipliees d'icelles moindres. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de mesme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale; telle comparaison est appellée raison, & par quelqu'uns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne, & la superficie, ny le nombre & la ligne, ne sont pas quantitez de mesme genre. Semblablement si on compare une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire

selon que l'une est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dictée raison; pource qu'elle n'est pas faicte selon la quantité.

Oriagoit que la raison se trouue proprement és sealles quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, comme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les mouuemens, les pois, & les puissances, sont aussi dictes auoir raison, si l'habitude d'iceux est considérée, selon la quantité, comme quand nous disons un temps estre plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps estre egaux, &c. celle habitude sera dite raison, pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referée à une autre, est dictée par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dictée consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B ; A est dict antecedant de la raison, & B consequent: Que si au contraire B est comparé à A ; B sera appelé antecedant, & A consequent.

$A.$ $B.$
8. 10.

Or ceste raison definie par Euclide, est diuisée en raison rationnelle, & irrationnelle.

La rationnelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10. pieds à une autre de 5. pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10. & 5. Mais l'irrationnelle, est ceste raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'un quarre au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonsté par Euclide, en la dernière prop. du 10. liure.

Autres disent que la raison ou proportion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire qui ont une commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par une mesme commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20. pieds à une autre de 8. pieds: car une ligne de 4. pieds ou de 2. est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonale, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. livre.

Cette raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité, est quand deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10 à 10; une ligne de 12. pieds à une autre ligne de 12. pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, come 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 9: celle d'une ligne de 7. pieds à une autre de 15. pieds, &c.

Cette raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dictée raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à une de 4. &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7. pieds à 9. s'appelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9. pieds à une autre de 12. pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité majeure, est diuisée en 5. genres, sçavoir raison multiple, superparticuliere, super-

partiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composées d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois précisément : & ceste raison contient sous soy diuerses especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre deux fois précisément, elle est dite double : si trois fois, triple : si 4, quadruple : si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4, est dite quintuple, pource que 20 contient 4. cinq fois ; & la raison d'une ligne de 18 pieds à une autre de 3 pieds est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité contient la moindre une fois, & en outre une partie aliquote d'icelle moindre : & ceste raison a diuerses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité ; est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3 à 2 en laquelle 3, majeure quantité contient la moindre 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle ; si elle est tierce partie, sesquiterce : si une quarte partie, sesquiquarte : si une cinquiesme partie, sesquiquinte, &c. commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'icelle : & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée une raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20, contient 12, une fois & $\frac{2}{3}$ d'icelle ; si $\frac{3}{4}$ sera constitué une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36.

Et ainsi des autres, le nom d'icelles commençant toujours par super, Et prenant à son milieu le numérateur de la partie aliquote, Et le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois, Et encore vne partie aliquote d'icelle: ceste cy est composée de la premiere Et de la deuxiesme; Et tous ainsi que chacune d'icelles contiennent plusieurs especes, aussi fait celle cy. Car si la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, Et encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceste raison sera appellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois Et $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{2}{3}$ d'icelle, comme d'une ligne de 7 pieds à vne de 3; pieds, ceste raison s'appellera double sesquiterce: Et la raison de 29 à 7, s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29, 7 est contenu 4, fois Et $\frac{1}{7}$ d'iceluy, Et ainsi des autres.

La raison multiple superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois, Et plusieurs parties aliquotes d'icelle: ceste raison est composée de la premiere Et troisieme; Et tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait celle cy; comme si la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, Et encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, ceste raison sera appellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3: mais si elle la contient 3 fois, Et encore $\frac{3}{4}$ d'icelle, elle s'appellera triple supertripartiente quarte, comme est la raison de 15 à 4: si elle la contient 4 fois Et encore $\frac{4}{7}$ d'icelle, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7; Et ainsi des autres.

Or tout ce qui a esté dit cy dessus des 5 especes de raison rationnelle d'inegalité mineure, se doit aussi entendre des 5 especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut toujours

apposer ceste syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Pour ce que les denominateurs des raisons rationnelles cy dessus exposées sont vtils, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denomment. Nous appellons denominateur le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'une quantité à l'autre: comme le denominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là monstre que la quantité majeure contient 5 fois la mineure. Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre vne fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme i'estime, Euclide au 6. liure, & autres Mathématiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle; car il denomme, comme nous auons dit, combien vne quantité est en vne autre avec laquelle elle est conserée, ainsi qu'il appert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unités, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominateur de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'unité: mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raison multiple ou sub-

multiple, puis que la prolation monstre le denominateur de la raison, comme il est evident par les exemples proposez cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'vnité avec la partie aliquote que la maieure quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominateur de la raison sesquialtere est $1\frac{1}{2}$: de la sesquiterce, $1\frac{2}{3}$; &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est vn nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquialtere, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsesquiterce, est $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote ; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsesquisepiesme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsesquinciesme est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raison superpartiente, est vne vnité avec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quartes est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$, & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolation de la raison exhibe le propre denominateur, comme il appert es exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est vn nombre rompu, duquel le numera-

teur est moindre que le denominateur, d'autant d'unités, que la plus grande quantité contient de parties aliquotes par dessus la moindre. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{3}$: celui de subsuperquadrupartiente quarte, est $\frac{4}{3}$, &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison, auquel si on adionste le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction: comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinze est $\frac{15}{8}$, pource que le numerateur de ceste fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est adionsté le nombre 3, des trois parties, à fin de faire 8, denominateur de la fraction: mais le denominateur de la raison subsuperquadrupartiente neufiesme est $\frac{9}{13}$: & ainsi des autres.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier, denommant la multiple raison, avec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiesme est $3\frac{1}{7}$: mais celui de la raison quadruple sesquiquinte est $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pource que la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme se voit es exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes obtenues en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte est $\frac{4}{13}$: de subquintuple sesquiseptiesme, $\frac{7}{26}$, &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy estant multiplié

par le denominatedeur de la raison multiple, si on adiouste 1 au produit, on aura le denominatedeur de la fraction comme il est manifeste par les exemples cy dessus.

Le denominatedeur de quelconque raison multiple superpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, avec les parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de la moindre. Comme le denominatedeur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$: de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominatedeur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominatedeur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme appert es exemples cy dessus: & le denominatedeur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominatedeur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{2}{3}$: de subquadruple supertripartiente quintes, est $\frac{3}{5}$, &c. Le denominatedeur de telles raisons sera trouvé, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominatedeur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominatedeur de la raison multiple, & au nombre produit adiouste le nombre des parties aliquotes, viendra le denominatedeur de la fraction, ainsi qu'il appert es exemples posés cy dessus.

Finablement le denominatedeur de la raison d'egalité est toujours l'unité, pource que les quantitez d'icelle raison sont égales entr'elles; & partant l'une contient l'autre une fois précisément.

4. Proportion, est une similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles

est dictée raison, ainsi la comparaison de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dictée proportion : comme si la raison de A à B , est semblable à la raison de C à D , l'habitude d'entre ces raisons sera dictée A. B. C. D. proportion. Or ceste proportion est continue 3. 12. 18. 27. ou discrete: la continue est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedant & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dict, que celle qui est la raison de A à B , telle est celle de B à C , où la quantité B est antecedant de la quantité C , mais consequent de la quantité A . Mais proportion discrete ou non continue, est celle en laquelle chaque quantité entre moyenne est prise seulement vne fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent, mais seulement antecedant ou consequent: comme quand on dict que la raison de A à B , est comme celle de C à D .

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'une à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent excéder l'une l'autre.

Euclide, ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste. cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, à fin qu'elles soient dites auoir raison, sçavoir est que l'une ou l'autre d'icelles estant multipliée, elle s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré, & le diametre constituent un triangle isoscele, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus

grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'est à dire pris 4, fois, excède la circonference: car toute la circonference, comme il est demonstté par Archimede, ne consient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'une septiesme partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de ceste def. qu'une ligne finie n'aura raison à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que soit multipliée la ligne finie, elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il appert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dites estre en mesme raison, la premiere à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, quand les equemultiplices de la premiere & troisieme, aux equemultiplices de la seconde & quatrieme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egales, ou excèdent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre respondent.

Ayant esté dit par Euclide, que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites auoir raison l'une à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour estre en mesme raison, sçavoir est que les equemultiplices de la premiere & troisieme grandeur excèdent, soient egales

ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatries-
me, en quelque multiplication que soient prises icelles equemultiplices ; comme appers en ces quatre quantitez *A, B, C, D*, où les equemultiplices de *A* & *C*, premiere & tierce sont *E* & *F*, & les equemultiplices de *B* & *D*, seconde & quatriesme quantitez sont *G*, & *H* ; tellement qu'il se voit qu'ayant multiplié *A*, & *C*, par un mesme nombre ; & *B*, & *D* par quelconque mesme nombre ; si

<i>A.</i>	<i>B.</i>	<i>C.</i>	<i>D.</i>
6.	3.	4.	2.

<i>E.</i>	<i>G.</i>	<i>F.</i>	<i>H.</i>
24.	15.	16.	10.
30.	30.	20.	20.
12.	21.	8.	14.

la multiplie *E* excède la multiplie *G* qui luy correspond, aussi la multiplie *F* excède la multiplie *H* ; si elle est egale, l'autre sera aussi egale ; si elle defaut, aussi sera l'autre, & ce en quelque multiplication qu'on prenne les equemultiplices : & partant il y a mesme raison de *A* premiere quantité à *B* seconde, que de *C* troisieme à *D* 4.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisieme à la quatriesme, il s'ensuit que les equemultiplices de la premiere & troisieme excèdent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme, engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y mesme raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quatriesme, il s'ensuiura que les equemultiplices de la premiere & troisieme n'excéderont, ne seront egales, ou ne defaillront aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, à fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en mesme

raison sont appellées proportionnelles.

Comme si des grandeurs $A, B, C,$ A. B. C. D.
 D, il y a mesme raison de A à B , que 12. 8. 6. 4.
 de C à D , icelles grandeurs sont dites
 proportionnelles.

Et les grandeurs $E, F, G,$ lesquelles E. F. G.
 sont en proportion continuë, sont aussi 12. 6. 3.
 dites continuellement proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celui de la premiere grandeur excède celui de la seconde, & le multiplie de la troisieme n'excede celui de la quatrieme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4 grandeurs, à fin que la premiere soit dite avoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4. disant qu'ayant pris les equemultiplices de la 1. & de la 3, & les equemultiplices de la 2. & 4. si la multiplie de la premiere excède la multiplie de la 2. mais la multiplie de la 3. n'excede la multiplie de la 4. il y aura plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple
 icy posé, auquel sont prinſes $E, & F,$ doubles
 de $A & C,$ 1. & 3. grandeurs, mais $G & H$ triples de $B & D$
 2. & 4. grandeurs: & pource que E multiplie de A 1. est plus grande que G multiplie de B 2. & F multiplie de C 3. n'est pas plus grande que H multiplie de D 4. la raison de A 1. grandeur à B 2. est dite plus grande que la raison de C 3. à D 4.

Or à fin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est nécessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excèdent, soient égales, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur soit dictée auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la premiere grandeur excède celle de la deuxiesme : & la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une autre, que d'une troisieme à une quatriesme. il suffira de demonstrier que selon quelque multiplication, la multiplie de la premiere grandeur excédant celle de la seconde, la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme.

Et conuertissant ceste 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiesme, que de la troisieme à la quatriesme, la multiplie de la premiere excédant celle de la deuxiesme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme.

Que si au contraire d'icelle def. la multiplie de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multiplie de la 3. excède celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons : il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais en sans quatre au moins, si elle est proportion discrete.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisieme la raison doublée de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre, la premiere est dite estre à la quatrieme, en raison triplée de la premiere à la seconde: & tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit acheuée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite auoir à la 3. quantité C, la raison doublée de celle de A à la secõde B, pource qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B, sçauoir est la raison de A à

B, & celle de B à C, tellement que la raison de A à C prend par ce moyen la raison doublée de A à B, c'est à dire posée deux

fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4. D, est dictée triplée de celle de A à B, pource qu'entre A & D se trouuent trois raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B: c'est à sçauoir la raison de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raison de A à D encloist par ce moyen la raison triplée de A à B, c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E, est dictée quadruplée de la raison de A à B; pource qu'entre A & E sont encloses 4 raisons qui sont egales à celle de A à B, &c.

Donnot a retranché de ceste def. ces mots: Et tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit finie.

II Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecédans aux antecédans, & les conséquens aux conséquens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez A. B. C. D. sont proportionnelles, comme A, B, C, 4. 2. 6. 3. D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C soit à D, les quantitez A, & C antecédantes de chaque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez conséquentes B & D. Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G, sont proportionnelles aux quantitez H, I, K : les termes E, & H, seront dictes homologues ou de semblable raison : comme aussi le terme F sera dicté homologue au terme I : & aussi G à K : ainsi les costez des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecédans des raisons, & quels conséquens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. & es suivantes, aucuns moyens d'argumenter es proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dict donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C est à D ; on vient à conclure qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant

A. B. C. D.
4. 6. 2. 3.

dant

dans C, qui du consequent B au consequent D: Et ceste maniere d'argumenter se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en permutant, comme A sera à C, ainsi B à D. Or il est necessaire qu'en ceste maniere d'argumenter, les quatre grandeurs soient de mesme genre. Car le nombre A estant au nombre B, comme vne superficie E est à vne superficie F; de vouloir inferer cōme a fait Donnus en plusieurs endroits, Et notamment Es 17. p. 5; 29, 48 Et 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A est à la superficie E, comme le nombre B à la superficie F, c'est se moquer: puis qu'il n'y a nulle raison du nombre à la superficie, comme il appert par les 3 Et 5. def. Ceste maniere d'argumenter est demonstrée en la 16. p. de ce liure.

13. Raison inuerse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecedant pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequent.

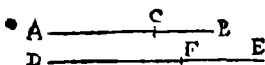
Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous insererons que par raison inuerse, comme B est à A, ainsi D est à C, c'est à dire les consequens aux antecedans. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent presque ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C. Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

Ceste def. a esté tellement traduite par Donnus, que le sens d'Euclide n'y peut estre reconnu.

14 Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedant avec le consequent, comme vne seule chose, pour

le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB , comme DF à FE : & on vient à conclure que la route AB est à CB , comme la route DE à FE ; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB , est au mesme consequent CB , comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est à iceluy consequent FE : ceste maniere d'argumenter sera dictée composition de raison : & se prononce ainsi : comme AC est à CB , ainsi DF à FE : donc en composant AB sera à CB , comme DE à FE : laquelle sorte d'argumentation sera démontré en la 18. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuvent estre adjustez deux autres : le premier peut-estre dictée composition contraire de raison : sçavoir quand on prend l'antecedent & consequent comme vn seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB , comme DF à FE ; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant AC , ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF : laquelle argumentation nous démonstrerons estre valide sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut-estre dictée composition contraire de raison ; c'est à sçavoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme vn seul. Comme si AC est à CB , ainsi que DF à FE , & nous inferons par composition contraire de raison : donc comme AC l'antecedant sera à la route AB , composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la route DE , composée de l'antecedant & du consequent. Nous démonstrerons sur la 18. p. de ce liure que ceste forme d'argumentation est valable.

15. Diuision de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB , (soit veue la precedente figure) que de DE à FE : donc aussi AC , excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent sera à CB consequent, comme DF excex par lequel l'antecedant excede le consequent, sera à FE consequent. Or les auteurs coucluent ordinairement avec ceste raison ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en diuisant AC sera aussi à CB , comme DF à FE . Ce qui sera demonsté en la 17. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter en peuuent aussi estre adjoustez deux autres: le premier peut estre appelé diuision conuerse de raison, c'est à sçauoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent. Comme si AB est à CB , comme DE à FE , & nous inferons: donc aussi par diuision conuerse de raison, comme CB consequent sera à AC , excex par lequel l'antecedant surmonste le consequent, ainsi FE consequent sera à DF , excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent: laquelle maniere d'argumentation nous demöstrerons pouuoir estre sur la 17. p. 5. Il est manifeste, qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par diuision de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conseré à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB , comme DF à DE : Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB , excex par lequel le consequent surmonste l'antecedant, comme DF antecedant sera à FE , excex par lequel le

consequent surpasse l'antecedant: le quel moyen d'argumenter nous demonsturerons sur la 17. p. de ce liure.

Il est evident qu'en ceste division contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuersion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , (soit venè la figure de la 14. def.) ainsi DE à FE : & on vient à conclure que AB antecedant sera aussi à AC , excez par lequel il surmonta le consequent, comme DE antecedant sera à DF , excez par lequel l'antecedant excède le consequent, cela sera dit conuersion de raison. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : Donc par conuersion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au coroll. de la 19. p. de ce liure. Ceste 16. def. a esté retranchée par Dounot.

17. Raison egalle, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autremét, c'est lors qu'on préd les extremes par la soustractiō des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D , & autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B , comme E à F ; & B à C , comme F à G ; & C à D comme G à H : si on infere que comme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H , premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumentation est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçavoir est, quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre; & quand l'ordre est perverty: Euclide explique es deux des. suivantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.

18 Proportion ordonnée, est quand l'antecedant est au consequent, comme l'antecedant est au consequent de l'autre: & ainsi que l'un des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la des. précédente, où nous avons posé A estre à B , cōme E à F ; & B à C , comme F à G , & C à D , cōme G à H : Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres; & partans ceste proportion est dictée ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalité, la proportion d'ordre estant observée, soit bon, il sera démontré en la 22. p. de ce livre.

19. Proportion troublée est quād trois grandeurs estans d'un costé, & autant

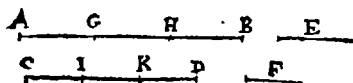
d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiesme à la sixiesme, & comme la seconde à la troisieme; ainsi la quatrieme à la cinquiesme.

Comme si *A* est à *B*, ainsi que *E* est à *F*;
 & comme *B* est à *C*, ainsi *D* à *E*: ceste proportion *A. B. C.*
 sera dite troublée ou perturbée, d'autant qu'un 12. 8. 4.
 mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison *D. E. F.*
 des premieres grandeurs entr'elles, qu'és secon- 12. 6. 4.
 des aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la
 premiere est comparée à la seconde, & ceste cy à la 3; mais és
 secondes quantitez la 2 est comparée à la 3, & la premiere à
 la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison egale,
 la proportion troublée est ant gardée, soit bon, il sera demon-
 stré en 23. p. de ce livre.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra
 equemultiplices d'autât d'autres grâ-
 deurs, chacune à la sienne; comme
 l'une sera multiplice de l'une, ainsi les
 toutes seront multiplices des toutes.

Soient tant de
 grâdeurs qu'on
 voudra *AB* &
CD, equemul-



tiplices d'autant d'autres grandeurs *E* & *F*. Je dis que
 les grandeurs *AB* & *CD* ensemble, seront autant
 multiplices de *E* & *F* ensemble, comme *AB* est de
E, ou *CD* de *F*.

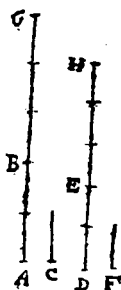
Car puis que AB est multipliee de E ; E mesurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la mesure donc trois fois, & soit icelle AB couppee en trois parties egales, AG , GH , HB , qui seront chacune egale à E . Le mesme se peut dire de la grandeur CD , laquelle on coupera aussi en trois parties egales, CI , IK , KD , estant chacune d'icelles egale à F : mais qui a choses egales, sçavoir à AG & E , adjouste choses egales, sçavoir CI & F , les routes AG , CI ensemble, seront egales aux routes E & F ensemble. Par mesme raison GH & IK ensemble, seront egales à icelles E & F ensemble; pareillement HB & KD , aux mesmes E & F . Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB , egales à E ; & en CD egales à F ; autant y en a-il en AB & CD prises ensemble, qui sont egales à E & F prises ensemble: Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F , comme la seule AB est triple de la seule E , ou la seule CD de la seule F . S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, que la troisieme de la quarte; & la cinquiesme autant multipliee de la seconde, que la sixiesme de la quarte; la composee de la premiere &

cinquième, sera autant multiplie de la seconde, comme la composée de la troisième & sixième, de la quarte.

Soit la première grandeur AB , autant multiplie de la seconde C , comme la 3. DE l'est de la 4. F : & soit la 5. BG autant multiplie de la 2. C , comme la 6. EH , de la 4. F : le dis que la 1. & 5. ensemble AB & BG , seront autant multiplie de la 2. C comme la 3. & 6. DE & EH ensemble, le feront de la 4. F .



Car puis que AB est autant multiplie de C , comme DE de F , il y a en AB autant de grandeurs egales à C , qu'il y en a en DE d'egales à F . Par mesme raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs egales à C , comme il y en a en EH d'egales à F . Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C , qu'il y en a en DH d'egales à F : parquoy AG composée de la première & 5. est autant multiplie de la seconde C , comme DH composée de la 3. & 6. l'est de la 4. F . Parquoy si la première est autant multiplie de la seconde, que la troisième de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

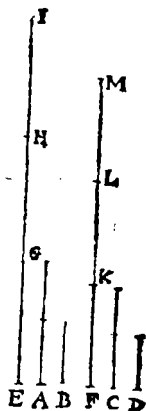
THEOR. 3. PROP. III.

Si la première est autant multiplie de la seconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des equimultiples

de la premiere, & troisieme: la multi-
 plice de la premiere sera aussi autāt mul-
 tiplice de la seconde, que la multiplique
 de la tiercele sera de la quarte.

Soit A autāt multiplique de B, com-
 me C l'est de D; & de la 1. & 3. A, C,
 soient prises les equemultiplices E,
 & F. Je dis que E sera autant multi-
 plices de B, que F de D.

Car puisque E est autant multi-
 plice de A, que F l'est de C: E con-
 tiendra autant de parties egales à A,
 comme F de parties egales à C.
 Soit donc E divisée en EG, GH, &
 HI, chacune egale à A: Item F di-
 visée en Fk, KL & LM, chacune
 egale à C: & d'autant que EG &
 & FK sont egales à A & C, lesquel-
 les sont equemultiplices de B & D
 par l'hypothese, aussi EG & FK
 seront equemultiplices des mesmes



B & D. Par mesme raison GH & KL: item HI &
 LM, seront equemultiplices d'icelles B & D. Veu
 donc que EG premiere grandeur est autant multi-
 plice de la seconde B, que FK 3. l'est de D 4. item
 GH 5. autant multiplique de la mesme seconde B, que
 KL 6. de la 4. D; aussi EH composée de la 1. & 5. se-
 ra autant multiplique de la 2. B, que FL composée
 de la 3. & 6. l'est de la 4. D, par la precedente prop.
 Derechef puis que EH premiere grandeur est autant
 multiplique de la seconde B que FL 3. l'est de D 4. &

HI 5. est aussi autant multiplie de la seconde B, que L M 6 l'est de la 4. D'E I composee de la 1. & 5. sera aussi autant multiplie de la 2 B, que F M composee de la 3 & 6 l'est de D 4. par la 2. prop. de ce liure. Si donc la premiere est autant multiplie de la seconde, &c. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 4. PROP. III.

Si la premiere est à la seconde, en mesme raisó que la tierce à la quarte: aussi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront mesme raison aux equemultiplices de la secóde & quarte, en quelque multiplicatió que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrespondent.

Soit A à B en mesme raison que C à D, & soiét prises E & F equemultiplices de A premiere & C 3: Itē G & H equemultiplices de B 2. & D 4. seló quelque multiplication que ce soit. Je dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere est autant multiplie de A 2. que F 3. l'est de C 4. & I, k sont



prinſes equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce ; auſſi par la 3. prop. de ce liure I & K, ſeront equemultiplices de A & C, ſeconde & quarte. Par meſme raiſon L & M, ſeront auſſi equemultiplices de B & D : & puis que A eſt à B cōme C à D : & d'icelles A & C, 1 & 3, ont eſté demōſtrées I & K equemultiplices, mais de B, & D, 2 & 3 autres equemultiplices L & M : par la conuerſe de la 6 def. de ce liure, ſi I deſſaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K deſſaudra, ſera egale, ou plus grāde que M, ſelon quelconques multiplications qu'icelles equemultiplices ſoient priſes. Et pour autant que I & k, ſont equemultiplices de E & F ; pareillement L & M de G & H, par la meſme 6 def. il y aura meſme raiſon de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

C O R O L L A I R E.

Par cecy eſt manifeſte la preuue de la raiſon innuerſe, qu'Eulide a expliquee en la 13. def. de ce liure, ſçauoir eſt, que ſi 4. grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, c'eſt à dire que E eſtant à G comme F à H, auſſi en changeant G ſera à E comme H à F. Car puis qu'il a eſté demonſtré que ſi I deſaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K deſaudra, ſera egale, ou plus grande que M : ſelon quelconques multiplices. Il appert auſſi que ſi L deſaut, eſt egale, ou plus grande que I, auſſi M deſaudra, ſera egale, ou plus grande que K, ſelon quelconques multiplications : Et partans par la 6 def. il y aura meſme raiſon de G à E que de H à F.

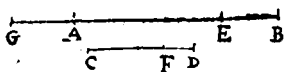
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur eſt autant multipliee

d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée: aussi le reste sera autant multiplie du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute A B, autant multiplie de la toute CD, comme la retranchée A E, de la retranchée C F. Je dis que le reste E B sera autant multiplie du reste F D, que la toute A B est de la toute C D.

Car A G étant faite autant multiplie de F D, comme A E est de C F, ou comme la toute



te A B l'est de la toute de C D: d'autant que A E, A G sont equemultiples de C F, F D: par la 1. prop. de ce liure la toute G E, sera autant multiplie de la toute C D, comme A E de C F: Mais aussi A B, estoit autāt multiplie de C D comme A E de C F: donc G E, A B, sont equemultiples de C D, & partant egales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce qui est de commun A E, demeureront egales G A, E B; & partant seront equemultiples de F D, puis que G A a esté posée multiplie d'icelle F D, & autant comme A B de C D: donc aussi le reste E B sera autant multiplie du reste F D, que la toute A B l'est de la toute C D. Parquoy si vne grandeur est autant multiplie d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

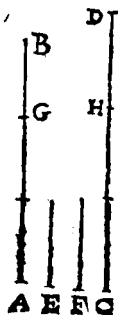
THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultiples

de deux autres grandeurs , & d'icelles on retranche des equemultiplices; ou les restes seront egaux aux mesmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs $A B, C D$, equemultiplices des grandeurs E, F , & les retranchees $A G, C H$ aussi equemultiplices des mesmes E, F . Je dis que les restes $G B, H D$, seront ou egales aux mesmes E, F , ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que $A B$ & $C D$, sont equemultiplices de E & F ; en $A B$ il y aura autāt de grandeurs egales à E comme en $C D$ de grandeurs egales à F . Pareillement d'autant que la retranchee $A G$ est autant multiplie de E , que la retranchee $C H$ l'est de F ; $A G$ contiendra autant de grandeurs egales à E , que $C H$ de grandeurs egales à F , par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales

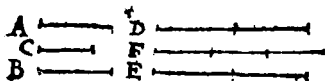


multitudes de grandeurs $A B$ & $C D$, on oste egales multitudes de grandeurs $A G, C H$, les multitudes demeurantes $G B, H D$ seront egales: c'est à dire que $G B$ contiendra autant de fois E , comme $H D$ contiendra F ; ou bien si $G B$ est egale à E , aussi $H D$ sera egale à F : & par ainsi iceux restes $G B, H D$ seront egales à E & F , chacune à la sienne, ou bien seront equimultiplices d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont equimultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales : ont mesme raison à vne mesme : & ceste - cy aura mesme raison aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle soit. C. Je dis



que A & B ont mesme raison l'une que l'autre à C; & que C aura mesme raison à A que à B.

Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E equemultiples de A premiere, & B tierce, soit aussi pris F quelconque multiple de C, seconde & quarte: donc pour autant que D est autant multiple de A, que E est multiple de B; & que A & B sont posées egales: aussi, D & E seront egales par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, egale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, egale, ou plus petite que la mesme F, & par la susdite def. de celiure, il y aura telle raison de A à C, comme de B à la mesme C.

Quant à l'autre partie, elle se prouue tout de mesme par la susdite def. en prenant les mesmes equemultiples, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inuerse. Car puis qu'il a esté démontré que A est à C comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le corol. de la 4. prop. de celiure. Donc les grandeurs egales ont mesme raison à vne mesme, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

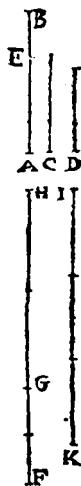
THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande

a plus grande raison à vne mesme, que la plus petite: & vne mesme a plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales A B & C, desquelles A B est la plus grande, & vne troisieme que'elle quelle soit D. Je dis que A B a plus grande raison à la troisieme D, que non pas C: item, que D a plus grande raison à C, qu'à A B.

Qu'il ne soit ainsi: soit entenduë A B, premiere grandeur, D seconde, C tierce, & D quarte. D'autant que A B est plus grande que C, soit retranchée A E egale à icelle C, & soient trouuées les equemultiples, à sçauoir F G de B E, & G H de E A, en sorte que F G & G H soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux F G, G H, sont equemultiples des deux B E, E A, par la 1. prop. de ce liure, la route H F sera autant multiplice de la route A B, comme H G de A E, ou de C son egale: Maintenant soit prise I k aussi multiplice de D, en sorte qu'elle soit plus petite que H F, mais plus grande que H G: (ce qui est facile, d'autant que D est plus petite que ny F G, ny G H: si bié qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'õ ait ce que l'õ cherche.) D'autât que F H, G H sont equemultiples de A B premiere, & C troisieme, si I k est prise pour l'equemultiplice, tant de D secõde, que



D quatriesme, il est euident que HF multiplie de AB premiere, estant plus grande que Ik multiplie de D secõde, ne multiplie de C tierce, n'est pas plus grande que Ik multiplie de D quarte: & partant par la huietieme def. de ce liure il y aura plus grande raison de AB à D , que de C à la mesme D .

Quant à la secõde partie: d'autant que Ik multiplie de la premiere D , (car il faut maintenant poser D premiere & troisieme, C secõde, & AB quatrieme) est plus grande que HG multiplie de la seconde C ; & IK multiplie de la troisieme D , est moindre que FH multiplie de AB quatrieme: Il y aura plus grande raison de D à C , que de D à AB par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grãdeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme, sont egales entr'elles: & celles là aussi sont egales, auxquelles vne mesme grandeur a mesme raison.

Soient premierement deux grãdeurs A & B , lesquelles ont mesme raison l'une que l'autre à la troisieme C . Je dis qu'elles sont egales entr'elles.

Car si elles n'estoient egales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raison



à C ;

a C, que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C a vne mesme raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi egales entr'elles: Car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la mesme 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme grandeur sont egales entr'elles, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 10. PROPOS. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle à laquelle la mesme a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à C soit p plus grande de que B à la mesme C. Je dis que A sera plus grande que B. Item si C a plus grande raison à B que non pas à A: Je dis que B sera plus petite que A.



Autrement, pour la premiere partie; si A n'estoit plus grande que B, elle seroit egale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales elles auroient mesme raison l'une que l'autre

à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui seroit cōtre l'hypothese: si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce mesme liure, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny egale à B; & par consequent sera plus grande.

Quant à la seconde partie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus grande, ce qui est impossible: car si A & B estoient egales, C auroit mesme raison à l'une qu'à l'autre par la susdicte 7. prop. de ce liure: ce qui est contre nostre hypothese: si aussi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la susdicte 8. prop. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F: Je dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi; de routes les antecedentes A, C, E, soient prises quelconques equemultiplices, G, H. I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si G multiplie de A, est egale, plus grande, ou plus petite que k multiplie de B: aussi H multiplie de C, sera egale, plus grande, ou plus

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

petite que L multiplie de D. Item puis que comme C à D , ainsi E à F, si H multiplie de C est egale, plus grande, ou plus petite que L , multiplie de D, aussi I multiplie de E sera egale, plus grande , ou plus petite que M multiplie de F : Parquoy si G multiplie de A premiere est plus grande , egale, ou plus petite que K multiplie de B seconde, aussi I multiplie de E tierce, sera plus grande, egale , ou plus petite que M multiplie de F quarte; & par la susdite 6. def. comme A sera à B , ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de mesme à vne sont aussi de mesme entr'elles : Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR 12. PROP. XII.

Sitant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles : comme l'une des antecédâtes sera à l'une des conséquentes, ainsi toutes les antecédantes seront à toutes les conséquentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir que A soit à B comme C est à D, & E à F : Je dis que comme l'une des antecédantes est à vne des conséquentes, sçavoir est A à B, ainsi toutes les antecédantes ensemble A, C, E , seront à toutes les conséquentes ensemble B, D, F.

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I, item de B, D, F, les equemultiplices k, L, M, toutes les trois multiplices ensemble G, H, I, seront autant multiplices des trois ensemble A, C, E, comme la seule G est multiplice de la seule A par la premiere prop. de ce liure. Pareillement par la mesme raison toutes les trois k, L, M ensemble, seront autant multiplices des trois B, D, F ensemble, comme k sera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G multiplice de A premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que k multi-

G	_____	H	_____	I	_____
A	_____	C	_____	E	_____
B	_____	D	_____	F	_____
K	_____	L	_____	M	_____

plice de B seconde, aussi H multiplice de D troisieme, sera plus grande, egale, ou plus petite que L, multiplice de D quatriesme, par la conuerse de la 6. def. de ce liure, & ainsi des deux autres : Partant si G est plus grande, egale, ou plus petite que k, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, egal ou plus petit que le composé des trois k, L, M. Donc par la mesme 6. def. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble : Parquoy si tant de grandeurs qu'on vandra sont proportionnelles, &c. Ce qui estoit à prouuer

THEOR. 13 PRO. XIII.

Sila premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquiesme à la sixiesme : aussi la premie

re aura plus grande raison à la seconde, que la cinquième à la sixième.

Soit A première à B seconde (en la précédente figure) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquième à F sixième. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A première à B seconde, que de E cinquième à F sixième.

Car estans prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & de B, D, F, aussi les equemultiplices K, L, M; pour- autant que A est à B, comme C à D, si G multiple de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiple de B, aussi par la converse de la 6. def. de ce liure, H multiple de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L multiple de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C première à D seconde, que de E tierce à F quatrième, si H multiplié de C, est plus grande que L multiple de D, il n'est pas nécessaire que I multiple de E excède M multiple de F, par la 8. def. de ce liure cōuertie : donc aussi si G excède K il n'est pas nécessaire que I excède M : & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la première est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquième E à la sixième F : aussi la première A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquième E, à la sixième F.

Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde estant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excède M, il n'est pas necessaire que H excède L, car quelques fois elle defaut, ou est egale à icelle par la 8. def. de ce liure conuertie. Mais si H defaut, ou est egale à L, aussi G defandra, ou sera egale à K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excède M, il n'est pas necessaire que G excède K: & partant par la susdicte 8 def. il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F, ce qui estoit proposé.

En la mesme maniere sera demonstté, que s'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquieme à la sixiesme; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raison à la seconde, que la cinquieme à la sixiesme.

Que si la premiere a moindre raison à la seconde que la tierce à la quarte, & la tierce a moindre raison à la quarte que la cinquieme à la sixiesme; aussi la premiere aura beaucoup moindre raison à la seconde, que la cinquieme à la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte, & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C est à D, & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C troisieme: le dis que B seconde sera aussi plus grande, egale ou plus petite que D quatrieme.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raison de A à B, que de C à la mesme B, par la 8. prop. de ce liure, & par consequent plus grande raison de C à D, que de C à B, estant icelle la mesme raison que de A à B, & par la 10. prop. de ce mesme liure B sera plus grande que D.

Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce mesme liure A sera à B, comme C à B; & puis que les raisons de C à D, & C à B, sont les mesmes que de A à B, les raisons de C à D, & de C à B, seront de mesme entr'elles par la 11. prop. de ce liure, & partant par la 9. prop. B & D seront egales.

Finablement soit A moindre que C, & par la susdite 8. prop. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D; & par consequent plus grande raison de A à B, que de A à D, puis qu'il y a mesme raison de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce mesme liure B sera moindre que D. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Que si la seconde est plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: aussi la premiere sera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puisque A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le corol. de la 4. p. de ce liure. Donc si B est plus grande, ou egale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la susdite 14. prop.

Or Euclide n'a pas démontré que si la première est plus grande, égale, ou plus petite que la seconde: aussi la tierce sera plus grande, égale, ou moindre que la quarte, pour ce que cela est évident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions néanmoins démontrer après Commandin: mais d'autant que sa démonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous-nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de divers genres.

THEOR. 15. PRO. xv.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs equemultiplices entr'elles.

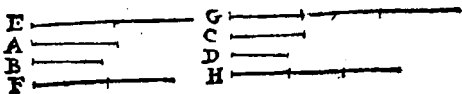
Soit A B autant multiplie de C comme D E est multiplie de F. Je dis que A B sera à D E, comme C à F. Car puis que A B & D E sont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en A B, autant de parties égales à C, comme D E contient de parties égales à F: soit donc diuisee A B és parties A G, G B égales à C, & D E és parties D H, H E égales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de A B, sera à vne chacune partie de D E, comme C est à F, & par la 12. prop. toutes les antecedantes A B, seront à toutes les consequentes D E, comme A G l'une des antecedantes, est à D H, l'une des consequentes, c'est à dire comme C à F, puis que c'est la mesme raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles comme sont leurs equemultiplices entr'elles: Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles ; elles le seront aussi estans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.



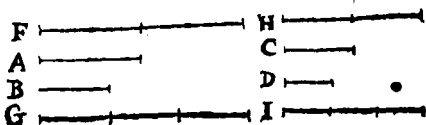
Car si on prend E & F equemultiples de A & B ; item G & H, equemultiples de C & D ; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D ; & par conséquent E estant à F, & C à D, en même raison que A à B, elles sont de même entr'elles par la 11. prop. de ce liure. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mêmes que de C à D, elles seront aussi de même entr'elles par la susdite 11. prop. c'est à dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte : parquoy par la 14. prop. de ce même liure si E premiere est plus grande, egale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, egale, ou moindre que H quatriesme, en quelconque multiplication que soient prises les equemultiples ; & par la 6. def. d'iceluy cinquième liure A sera à C, comme B à D (puisque E & F sont equemultiples de A premiere, & B

troisiemes; & G & H equemultiples de C seconde & D 4. & celles-là defaillent, sont egales, ou excèdent celles-cy, &c.) Parquoy si quatre grâdeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estant permutees: Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Or la demonstration de ceste proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B estoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre; aussi les equemultiples E & F seroient d'un genre, c'est à sçavoir duquel sont A & B; & les equemultiples G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui auquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E estre plus grand, egale on, moindre que G; & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce livre. La raison permutee a donc seulement lieu quand les quatre grandeurs sont d'un mesme genre: Ce que Donnot n'a pas reconnu, puis qu'il y surpe icelle, les grandeurs estans de diuers genres, en plusieurs propositions, tant de celui que du 10.

Ledit Donnot a aussi reiesté ceste demonstration des anciens, & au lieu d'icelle s'est imaginé la suivante. Soit A à B comme C est à D. Je dis aussi, que A sera alternatiue-



ment à C comme B est à D. Car si on prend F & H equemultiples de A & C: item G & I equemultipli-

ces de B & D , par la 4. p. 5. F , G , H , I , seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F sera plus grande, égale, ou plus petite que G ; aussi H sera plus grande, égale, ou plus petite que I : (ce qui ne le peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la première F estant plus grande, &c. que H ; la seconde G seroit plus grande, &c. que I 4. mais bien pouvoit-il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) Et par la 6. def. 5. A sera à C comme B à D : ce qui est euidentement faux: car pour estre A à C comme B à D , il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiples de A première & B troisième; item H & I multiples de C 2. & D 4. fussent equemultiples, & elles ne le sont pas. Dounor n'a pas donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant sa prétenduë demonstration de ceste 16. proposition doit estre rejettée, & celle des anciens suivie.

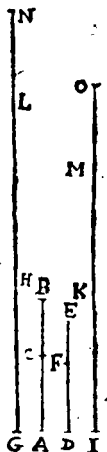
THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles diuisées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB , CB , & DE , FE proportionnelles, c'est à dire que A B soit à C B comme D E à F E . Je dis que les mesmes grandeurs diuisées sont aussi proportionnelles, c'est à dire que comme A C est à C B , ainsi D F est à F E .

Car d'icelles AC , CB , DE , FE soient prises les equemultiples GH , HL , IK , KM , chacune à chacune,

& par la 1. prop. de ce liure G L sera autant multi-
 plice de AB, que GH de AC, c'est à dire comme IK
 de DF. Mais icelle IK est autant multipliee de DF,
 que IM de DE par la mesme 1. prop. donc GL, IM
 sont equemultiplices de AB, DE. Derechef soient
 prises LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour
 autant que H L premiere est autant
 multipliee de CB seconde, que K M
 tierce de la quarte FE, & LN cinquies-
 me autant multipliee de CB seconde,
 que M O sixiesme de la quarte FE, par
 la 2. prop. de ce mesme liure, HN sera
 autant multipliee de CB seconde, que
 KO de FE quatriesme. Et puisque A B
 est à CB, comme DE à FE: & ont esté
 prises GL, IM equemultiplices de AB,
 DE, mais HN, KO de CB, FE, par la 6.
 def. conuertie si GL multipliee de AB
 premiere excède, est egale, ou moindre
 que H N multipliee de CB seconde,
 aussi IM, multipliee de DE tierce ex-
 cedera, sera egale, ou moindre, que KO
 multipliee de FE quarte: ostant donc les choses
 communes HL, KM, si GH excède LN, aussi IK ex-
 cedera MO; & si egale, egale; & si moindre, moin-
 dre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiplices
 de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO eque-
 multiples de CB seconde & FE quarte, & il a esté
 demonstté (en quelconque multiplication qu'ayent
 esté prises icelles equemultiplices) que les eque-
 multiples de la premiere & troisieme excèdent,
 sont egales, ou moindres, que les equemultiplices
 de la seconde & quatrieme, par la susdite 6. def. de ce
 cinquiesme liure AC sera à CB, comme D F à FE: ce



qui estoit proposé. Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles diuisées seront aussi proportionnelles: Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Nous démonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerse de la raison diuisée: c'est à dire que si AB est à CB , comme DE à FE , aussi CB sera à AC , comme FE à DF . Car d'autant que comme AB à CB , ainsi DE à FE , en diuisant par la 17. p. 5. comme AC sera à CB , ainsi DE à FE : & en changeant, comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF : ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere, sera démontré ce moyen là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appelé contraire diuision de raison: c'est à dire que si AC est à AB , comme DF à DE : aussi AC sera à CB , ainsi que DF à FE . Car puis que AC est à AB comme DF à DE : en changeant, comme AB sera à AC , ainsi DE à DF : donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB à AC , ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB , ainsi DF à FE : ce qui estoit à démonstrer.

T H E O. 18. P R O P. XVIII.

Si les grandeurs diuisées sont proportionnelles; icelles composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuisées AB , BC , & DE , EF proportionnelles. Je dis qu'en composant, AC est à CB , comme DF à EF .

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est pas à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible: & en diuisant par la precedente proposition, DG sera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF: donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF



par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere est plus grande que DE troisieme: donc par la 14. proposition de ce mesme liure GF seconde sera aussi plus grande que EF quatrieme, la partie que le tout; ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.

Par mesme discours on demonstrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, en mesme raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs diuisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Donnois s'estant licentié de changer la 17. p. a la 18. a aussi rejetté ceste demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non: & celle qu'il a mise au lieu d'icelle a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il usurpe la raison permise, laquelle nous

avons montré au folio de la 16. p. 5. ne pouvoir conuenir que aux grandeurs de mesme genre : & partant doit estre preferée la demonstration vniuerselle des anciens à la particuliere de Donnor.

Nous demonstrerons icy ces deux moyens là d'argumenter es proportions, lesquels nous auons décrits en la 14. def. de celiure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EF . Je dis, que comme AC est à AB , ainsi DE à DE . Car puis que comme AB est à BC , ainsi DE à EF , en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. prop. cy dessus, comme AC sera à AB , ainsi DE à DE : ce qu'il falloit prouuer.

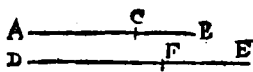
Quant à l'autre moyen que nous auons appelé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à BC , ainsi DE à EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC , ainsi DE à DE . Car puis que comme AB est à BC , ainsi DE à EF , en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la mesme prop. comme AC sera à AB , ainsi DE à DE : & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC , ainsi DE sera à DE : ce qui estoit proposé à prouuer.

THEO. 19. PROP. XIX.

Sile tout est au tout, comme le retranché au retranché ; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit à la toute AB , la toute DE , comme le retranché AC , au retranché DF . Je dis que le reste CB est aussi au reste FE , comme la toute AB à la toute DE .

Car puisque AB est à DE,
comme AC à DF, aussi en
permutant par la 16. prop.
de celiure AB sera accom-
me DE à DF; & par la 17.



prop. de ce mesme liure, en diuisant comme CB sera
à AC, ainsi FE sera à DF: parquoy en permutant
derechef par la susdicte 16. prop. CB sera à FE, com-
me AC à DF, c'est à dire comme la toute AB à la
toute DE, puisque AB, DE, & AC, DF, ont esté
posées en mesme raison. Parquoy si le tout est au
tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il
falloit demonstrier.

SCHOLIE.

*Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter es pro-
portions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit
comme AB à CB, ainsi DE à FE. le dus par conuersion de
raison, AB estre aussi à AC, comme DE à DF. Car puisque
comme AB à CB, ainsi DE, à FE en diuisant par la 17.
prop. de ce liure, comme AC à CB, ainsi DF à FE: donc
aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF: es-
parant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme
liure, comme AB à AC, ainsi DE à DF; ce qui estoit proposé.*

THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois
d'un autre, estans prises de deux en
deux, sont en mesme raison, & qu'en
raison egale la premiere soit plus
grande

grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme, & si egale, egale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A premiere soit plus grande que C troisieme. Je dis que D quatrieme sera aussi plus grande que F sixieme.



Car puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquieme liure. Mais comme A à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puisque B est à C, comme E à F, en changeant comme C sera à B, ainsi F à E) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E, que de F à E, & par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est egale à C; ie dis aussi que D sera egale à F. Car puisque A est egale à C, par la 7. prop. de ce liure, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E: & par la 11. p. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E; & partant D & F seront egales par la 9. prop. de ce mesme liure.

En troisieme lieu, si A est moindre que C; ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B,

que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à ainsi D est à E; il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquieme liure. Mais en changeant comme dessus, C et B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en son egal la premiere soit plus grande que la troisieme; aussi la 4^e sera plus grande que la sixieme, & si elle est egale: si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C. & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison, estant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale,



plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grãde que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. prop. de ce liure Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquiẽme liure. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouver comme en la precedente, si A est egale, ou plus petite que C; D estre aussi egale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estans prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raison egale comme A à C, ainsi D à F.

Car estans prises G, H equemultiples de A, D: item I, K, equemultiples de B, E: Item L, M equemultiples de C, F: puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiplie de A premiere

sera à I multiplie de B deuxiesme, comme H multiplie de D troisieme à K multiplie de E quatrieme par la 4. prop. de ce cinquiesme liure. Par mesme raison I sera à L, comme K à M. Veu donc que les trois grandeurs G, I, L, & les trois autres H, K, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, par la 20. p. 5. si G excède L, aussi H excèdera M; & si egale, egale; & si plus petite, plus petite: & partant puique G, H, equemultiplices de A & D defaillent, sont egales, ou excèdent L, M, equemultiplices quelconques de C, & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F: ce qu'il falloit prouuer.

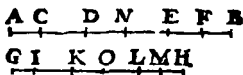
Maintenât soient plus de trois grâdeurs, telle que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que encore à N comme D à O. Car puique nous de demonstrier que A est à C, comme D à O, on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, le sont pris de deux en deux en mesme raison. comme il a esté demonstéré es trois grandeurs sus, A sera derechef à N, comme D à O. En la me maniere sera demonstéré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

A	B	C	N	D	E
G	I	L	H	K	M

S C H O L I E.

Le tres-docte Stevin en la 19. def. de ses prob. geomet. explique vne sorte d'argumenter es proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en vn tel theoreme que le suivant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppee en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles: la compotee de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la compotee des parties restantes, en mesme raison que la compotee, d'autant de parties de la posterieure grandeur, sera à la compotee des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est couppee en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie là, est aussi couppee en deux autres parties proportionnelles à ces deux là: les totales grandeurs seront aussi couppees proportionnellement.



Soit vne grandeur AB couppee en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB ; & vne autre grandeur GH , couppee en autant de parties que AB , sçavoir est es cinq GI, IK, KL, LM, MH , proportionnelles à celle-là de AB . Je dis que AD compotee des deux parties AC, CD , est à DB compotee des trois parties restantes, comme GK compotee des deux parties GI, IK , est à KH compotee des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD , ainsi GI est à IK , en composans par la 18. proposition de ce liure AD sera à CD , comme GK à IK . Mais comme CD à DE , ainsi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce mesme liure en raison egale, comme AD sera à DE , ainsi GK sera à KL .

Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE , comme H à ML , aussi en composant BE sera à FE , comme HL à M . Mais FE est à ED , comme ML à LK : donc en raison égale BE sera ED , comme HL à LK ; & en composant, DE sera à ED , comme HK à LK , & en changeant, DE à L comme KL à KH . Parquoy puis qu'il a esté démontré, AD est à DE , comme GK à KL , & DE est à DB , comme à KH , par la susdite 22. p. 5. en raison égale comme AD à DB , ainsi GK sera à KH .

Nous démonstrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH . Car derechef en changeant, & par égalité de raison, comme BC sera à CB , ainsi HI à IK : & en changeant, comme CD sera à CB , ainsi IK sera à IH . Veu donc que comme AC est à CD , GI est à IK , & comme CD à CB , ainsi IK à IH : en raison égale, comme AC sera à CB , ainsi GI sera à IH .

Par mesme raison, come AF sera à FB , ainsi GM sera à MB . Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à EF , ainsi GM sera à LM , par les susdites 18, & 22. prop. de ce lieu. Mais aussi comme EF est à FB , LM à MH : Donc en raison égale, comme AF est à MB , ainsi GM est à MH , & ainsi des autres: appert donc ce qu'estoit premierement proposé.

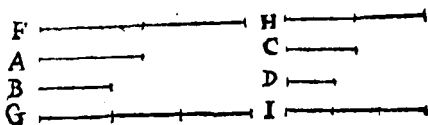
Maintenant soit coupée, (comme pour exemple) la mesme partie DE en deux quelconques parties DN , & aussi la troisieme KL en deux parties KO , OL proportionnelles à celle-là. Je dis que comme AN à NB , GO à OH . Car en changeant, comme EN sera à ND , ainsi LO à OK : & en composant par la 18. p. 5. ED sera à DN , ainsi LK à KO . Parquoy puisque CD est à DE ; ainsi LK à KL : & comme DE à DN , KL à KO : par la 22. p. 5. en raison égale, comme CD

DN, ainsi Ik à ko : donc les parties AC, CD, DN, sont proportionnelles aux parties Gl, Ik, ko. Derechef pour ce qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi ML à Lk: & en composant, comme DE à NE, ainsi kL à OL, en raison égale, comme FE sera à EN, ainsi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB, sont proportionnelles à toutes les parties Gl, Ik, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté démontré en la premiere partie, AN sera à NB, comme GO à OH: appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

Caluius demonstre encore en ce lieu cyle theoreme suyuant.

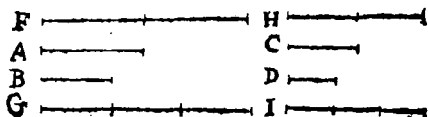
Si la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troisieme auront aussi vne mesme raison à la seconde & quatriesme. Item les equemultiplices de la seconde & quatriesme auront vne mesme raison à la premiere & troisieme. Et au contraire, la seconde & quatriesme auront vne mesme raison aux equemultiplices de la premiere & troisieme. Item la premiere & troisieme auront vne mesme raison aux equemultiplices de la deuxiesme & quatriesme.

Soit A à B comme C à D, & soient F, H, equemultiplices



de A, C: item G, I, equemultiplices de B, D. Je dis que F est à B, comme H à D: item que G est à A, comme I à C. Et au contraire que B est à F comme D à H: item A à G, comme C

à I. Car puisque F est autant multiplié de A, que H l'est C, comme F est à A, ainsi H à C, & par l'hypothese est à B, comme C à D; donc en raison egale par la p. 5. comme F sera à B, ainsi H sera à D. Derechef, puisque G est à B, comme I à D, & comme B à A, ainsi à C: (car puisque A est à B comme à C à D par l'hypothese, en changeant comme B à A, ainsi D à C) raison egale, comme G sera à A, ainsi I à C par la dite 22. p. 5.



Maintenant pource que B est à A, comme D à C raison innerse: & comme A à F, ainsi C à H: en raison egale, comme B sera à F, ainsi D à H. Derechef puis A est à B, comme C à D: & comme B est à G, ainsi à I; en raison egale, comme A sera à G, ainsi C par ladite 22. p. 5. ce qui estoit proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'augmenter, dont Geometres s'aident souvent, principalement Archim Apolonius Pergeus, & autres: sçavoir est comme A ainsi C est à D: donc comme F double, ou triple quadruple, &c. de A est à B, ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D: Item comme est à B, ainsi C à D: donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B, sçavoir est à G; ainsi C sera au double, triple, ou au quadruple, &c. de D, ainsi est à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée: icelles en raison égale seront proportionnelles,

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison, étant la proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que A sera à C, comme D à F.

Car estans prises G, H, I, equemultiples de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiples de C, E, F. Par la 15. p. de ce liure, comme A sera à B, ainsi G à H, puisque G, H, sont equemultiples d'icelles A, B. Mais cōme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdicte 15. p. 5. pource que L, M, sont equemultiples d'icelles E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puisque comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. p. 5. comme H multiplie de la premiere B, sera à K multiplie de la seconde C. ainsi I multiplie de la troisieme D, sera à L multiplie de la quatrieme E: donc les trois grandeurs G,

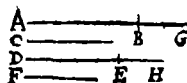


H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'elles sans ordre, puis qu'il a esté démontré que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, égale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, égale, ou moindre que M, & par la 6. déf. comme A sera à C, ainsi sera D à F. Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublée &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 24. PROP. XXIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, & la cinquieme à la seconde, comme la sixieme à la quatrieme; la composée de la premiere & cinquieme, sera à la seconde, comme la composée de la troisieme & sixieme, sera à la quatrieme.

Soit la premiere AB à la seconde C, comme la troisieme DE est à la quatrieme F; & la cinquieme BG à la deuxieme



C, comme la sixieme EH à la quatrieme F. Je dis que la toute AG, sera à C, comme la toute DF à F.

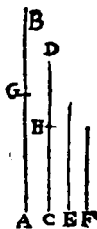
Car puisque comme BG à C, ainsi EH à F, aussi en changeant, comme C sera à B G, ainsi F à EH. Veu donc que AB est à C, comme DE à F, & C à B G, comme F à EH, en raison egale, AB sera à BG, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en composant, comme la toute AG sera à BG, ainsi la toute DH sera à EH, par la 18. prop. d'iceluy 5. liure : & derechef puis que AG est à BG, comme DH à EH, & BG à C, comme EH à F, en raison egale, AG sera à C, comme DH à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. xxv.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Je dis que la plus grande & la plus petite AB & F ensemble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.

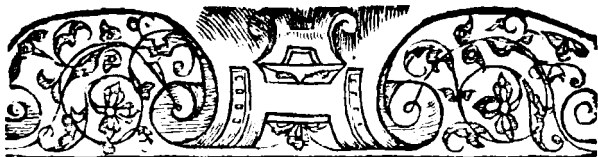
Car si de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retranche CH egale à E : AG sera à CH, comme E à F, c'est à dire comme AB à CD. Et puisque la toute AB est à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce liure, comme la toute AB sera à la toute CD, ainsi le reste GB sera au reste HD : Parquoy iceluy reste GB sera plus



grand que le reste HD , comme la toute AB est plus grande que la toute CD . Et pour autant que AG & E sont egales, si on adioust à icelles, les grandeurs egales F & CH , c'est à sçauoir, F à icelle AG , & CH à E ; viendront AG & F ensemble, egales à E & CH ensemble. Et adioustant à ces choses egales, les inegales GB , & HD , seront faictes AB & F ensemble plus grandes que GE & CD ensemble, puis que GB est plus grande que HD . Parquoy si quatre grandeurs sont porportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

Fin du cinquiesme Element.





ELEMENT

SIXIESME.

DEFINITIONS.

EMBLABLES figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'vne & en l'autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'vne des figures, & le second & troisieme en l'autre ; icelles figures seront dictes reciproques.

3. Vne ligne droicte est dite estre diui-

see en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

- 4 La hauteur d'une chacune figure, est la perpend. tiree du sommet a la base.
- 5 Vne raison est dite estre composee de raisons, quand les quantités des raisons multipliees entr'elles font quelque raison.

C'est à dire que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliees entr'elles, produisent quelque quantité de raison: icelle raison est dite estre composée de celles là. Or la quantité d'une raison est le denominateur d'icelle: tellement que la quantité de la raison triple est 3: mais de la subtriple, c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison trigecuple se dit estre composee des double, triuple, & quintuple. Car les denominateurs d'icelles, sçavoir est 2, 3, & 5, multipliés entr'eux produisent 30. denominateur d'icelle raison trigecuple. Pareillement la raison double se dit estre composee de la sesquialtere, & de la sesquiterce, pource que les denominateurs d'icelle, sçavoir est $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ estans multipliés entr'eux produisent 2. denominateur de la raison double. Parquoy estant posces tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extremes sera composee des raisons des moyennes: comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double, & C à D en raison superbipartiente tierce: Il est euidēt que multipliant le de-

A. B. C. D.
30. 20. 10. 6.

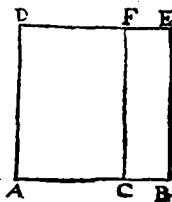
nominateur de la raison de A à B, par celuy de B à C, sçavoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3. & partāt

*A est à C en raison triple, & multipliant 3 par le denoms-
 seur de la raison de C à D prouiennent 5, & partant A est à D
 en raison quintuple.*

*Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tan-
 les 27, 28. & 29. propo. de ce liure, que plusieurs du 10. adion-
 sent icy ceste def.*

6. Vn parallelogramme appliqué selon
 quelque ligne droicte, est dict defail-
 lir d'un parallelogramme, lors qu'il
 ne peut occuper entieremēt la ligne;
 mais excéder, quād il occupe vne plus
 grande ligne que celle selon laquelle il
 est appliqué; en telle sorte toutesfois
 que le parallelogr. deffaillant, ou exce-
 dāt ait vne mesme hauteur que le pa-
 rallelogramme appliqué, & constitué
 avec iceluy vn seul parallelogramme.

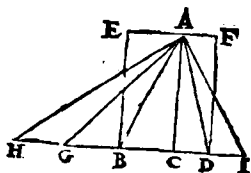
*Cōme le parallelogramme AF appli-
 qué selon la ligne AB, est dict defaillir du
 parallelogramme CE, lequel est appellé
 defaut: Mais le parallelogramme AE ap-
 pliqué selon la ligne AC, est dict exce-
 der du parallelogramme CE, lequel est
 dict l'excez.*



THEOR. I. PRO. I.

Les triangles, & les parallelogrammes de
 mesme hauteur, sont l'un à l'autre
comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de mesme hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE ,



CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC , CD . le dis premierement que le triangle ABC , est au triangle ACD , comme la base BC , est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC , pour seconde la base CD , pour troisieme le triangle ABC , pour quatrieme le triangle ACD ; les equemultiplices de la premiere & troisieme seront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatrieme, ainsi que le requiert la 6. definition du 5. liure.

Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres avoir couppe BG & GH , egales à BC d'un costé; item DI , egale à CD de l'autre, soient menées les lignes AG , AH , AI . Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC , ABG , AGH , estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux: aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est evident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC , autant de fois le triangle AHC contiendra le triangle ABC . Pareillement autant de fois que CI contiendra CD , autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD . Que si la base CH est egale à CI , le triangle AHC sera egal au triangle ACI , par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. def. 5. cōme la base BC , à la base CD , ainsi le triangle ABC , sera au triangle ACD : ce qui estoit

estoit à demonstrier pour la premiere partie.

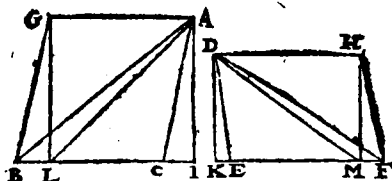
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF; le mesme se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases: Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont egales, ou vne mesme, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les



bases BC, EF egales. Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI est à la hauteur DK. Car si on prend les lignes IL, KM egales aux bases BC, EF, & on tire les lignes LA, MD; le triangle ALI sera egal au triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils sont sur bases egales LI, BC, & entre mesmes paralleles AG, IB: Par-mesme raison le triangle DKM sera egal au triangle DEF. Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC sera à DEF, ainsi ALI sera à DKM. Mais par la 1. p. 6. comme ALI est à DKM, ainsi AI à DK. (car si AI, DK sont posées les bases, les lignes droictes egales LI, KM seront

les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF , comme AI à DK .

Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC est à DEF , ainsi le parallélogramme $AGBC$ au parallélogramme $DEFH$: (car iceux parallélogrammes sont doubles des triangles par la 41. p. 1.) aussi $AGBC$ sera à $DEFH$, comme AI à DK . Le mesme s'ensuivra si les triangles, & les parallélogrammes ont une mesme base.

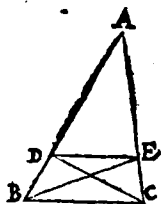
THEOR. 2. PROP. II.

Si dans vn triangle on meine vne ligne parallele à l'un de ses costez; elle coupera les autres costez du triangle proportionnellement: & si les costez sont coupez proportionnellement, la ligne couppante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ABC , dans lequel soit menée DE parallele à BC , couppant les deux autres costez AB & AC aux points D & E . Je dis que AD sera à DB , comme AE est à EC .

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC , estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux; & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme line ADE . Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB , & DEA estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre cōme la base BD à la base DA : & par la

mesme proposition, le triangle CD E , estât de mesme hauteur qu'iceluy triâgle EDA , ils seront l'un à l'autre comme CE est à EA : & partant par la 11. p. 5. BD sera à DA , comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA , & du triangle CDE au mesme triangle DEA .) Ce qui estoit proposé.



Pour la seconde partie: ie dis que si DB est à DA , comme CE à EA , qu'aussi DE sera parallele à BC .

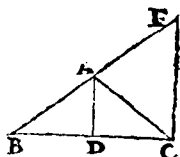
Car les triangles DEB & DEA , seront par la 1. p. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA . Item les deux autres CDE , EDA , seront aussi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA , comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA : & par la 9. p. 5. les deux triangles BED , & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE , par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles: & partant DE sera parallele à BC . Parquoy si l'on meine vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle, icelle coupera les autres costez d'iceluy triangle proportionnellement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est couppe en deux egalement par vne ligne droite, laquelle coupe aussi la base; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'un à

l'autre comme les autres costez : la ligne droicte tiree du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD. Je dis qu'il y a mesme raison de BD à DC, comme de AB à AC.



Qu'il ne soit ainsi: apres avoir du point C mené CE parallele à DA, soit continuee BA directement iusqu'à ce qu'elle rencontre CE: (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE s'ont moindres que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal à son alterne ACE par la 29. p. 1. Et si l'exterieur DAB sera egal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD estas egaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront egaux: & partât par la 6. p. 1. les costez AE & AC seront egaux. Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD à DC, (estant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie : ie dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droicte AD.

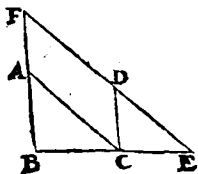
Car apres avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC seront egaux; & par-

rant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE , serót aussi egaux; & par la 29. p. 1. ils sót egaux, l'un à DAB , & l'autre à DAC , lesquels par ce moyen seront aussi egaux; ce qui estoit proposé. Parquoy si l'angle d'un triángle est couppé en deux egalemét par vne ligne droicte, laquelle coupe la base, &c. Ce qu'il falloit demóstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triángles equiángles, les costez qui sont au lóg des angles egaux, sont proportionaux, & les costez qui soustiennét les angles egaux, sont de mesme raisó.

Soient deux triángles ABC, DCE , equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal à l'angle DCE , & l'angle ACB à l'angle E , & le troisiéme au troisiéme. Je dis que comme AB à BC , ainsi DC à CE , & comme BC à CA , ainsi CE à ED , & finalement comme AB à AC , ainsi DC à DE . Car ainsi les costez d'alentour les angles egaux, sont les proportionaux, & les costez homologues, sont ceux-là qui soustiennent les angles egaux, c'est à dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles egaux.



Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE soit egal à l'interne ABC , & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC : & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal à l'angle ACB , aussi les angles B & E serót

moindres que deux droicts: & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennēt en F. Il est euident que l'angle exterieur ECD, estāt, par l'hypothese egal à son opposé interieur CBA; DC sera parallele à EB par la 28. p.1. Pareillement l'angle exterieur ACB estant egal à son opposé interieur DEC, aussi par la mesme 28. p.1. CA, & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p.1. il aura les angles, & les costez opposés egaux. Mais AC estant parallele à EF, par la 2. p.6. AB sera à AF, ou CD sont egale, comme BC à CE, & en permutant par la 16. p.5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD estant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son egale, sera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.

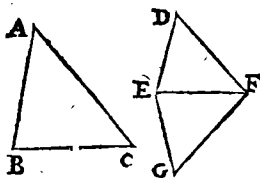
Veudonc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison egale AB sera à AC, cōme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA comme EF à FD, & encore AB à AC

comme DE à DF. Je dis que les triangles sont equiangles, ſçauoir l'angle A eſtre egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; car ainſi les angles egaux regardent les coſtez de meſme raiſon.

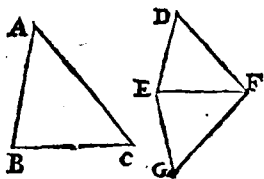


Qu'il ne ſoit ainſi: ſur la ligne EF, & aux deux poinçts E & F ſoient conſtruits les deux angles FEG egal à B, & EFG egal à C, & conuiennēt les lignes EG, FG en G: par la 32. p. 1. le troiſieſme angle G ſera egal au tiers A. & partant les triangles ABC, GEF ſont equiangles: parquoy comme AB à BC, ainſi GE à EF par la 4. p. 6. Mais comme AB à BC, ainſi a eſté poſé DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainſi DE à la meſme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE ſeront egales. Et d'autant que par la propoſition precedente, comme BC à CA, ainſi EF à FG: & par l'hypotheſe comme BC à CA, ainſi EF à FD: par la 11. p. 5. comme EF ſera à FG, ainſi la meſme EF ſera à FD: & par la 9. p. 5. FG, FD ſeront egales. Veu donc que les coſtez EG, FG du triangle GEF ſont egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & la baſe EF commune, les angles G & D ſeront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE ſeront auſſi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au ſien. Parquoy l'angle G eſtant egal à l'angle A, auſſi l'angle D ſera egal au meſme angle A: & ainſi l'angle DEF ſera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C. Si donc deux triangles ont les coſtez proportionaux, ils ſeront equiangles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux: ils seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle A egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE à EF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.



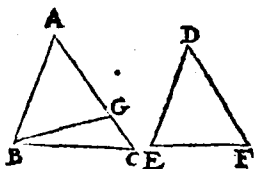
Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit comme en la proposition precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egales; & les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au point E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & partant seront equiangles. Mais l'un d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

Parquoy si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn autre angle, proportionnaux, estans les troisiemes angles de mesme espeece : Iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.

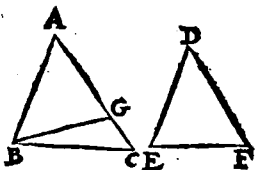
Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'aléctour l'angle ABC, proportionnaux aux



costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espeece, c'est à dire aigus, droicts, ou obtus, & soient premiere-ment aigus le dis que les triangles sont equiangles, sçauoir les angles ABC & E à l'entour desquels sont les costez proportionnaux, & les angles C & F estre egaux.

Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E, si egal, aussi par la precedente les triangles seront equian-

gles. Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. le troisieme angle AGB, sera egal au troisieme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la mesme AB sera à BC; & partant par la 9. p. 5. BG, BC seront egales & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront egaux, & tous deux aigus, & par cō-



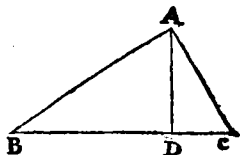
sequent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droits: Mais l'angle ABG a esté démontré egal à l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera egal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroient moindres que deux droits, mais egaux, ou plus grands que deux droits: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que 2. droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisieme C sera aussi egal au tiers F. Si donc deux triangles ont un angle egal à un angle, & les costez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle re-

Et angle on tire vne perpendiculaire sur la base; les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que



les triangles ABD & ADC sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par consequent semblables.

Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & egal à l'angle droit BAC, du triangle total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisieme angle BAD, est egal au troisieme ACB: & partant les deux triangles BAD & BCA, seront equiangles; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA; & comme BC à CA, ainsi BA à AD; & partant par la 1. def. de celiure les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours on prouera que les deux triangles BAC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle C estant commun à tous les deux, & l'angle droit egal à l'angle droit, le troisieme CAD sera egal au troisieme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA est à CD; & comme CA à AB, ainsi CD à DA; & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même manière les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puis-que les angles au point D sont droicts, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont esté démontréz égaux; & parât par la 4.^{p.} 6. comme BD à DA, ainsi DA à DC; & cōme DA à AB, ainsi DC à CA; & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'un triangle rectāgle on tire vne perpendiculaire sur la base, &c. Ce qu'il falloit démonstrier.

COROLLAIRE.

De cery est manifeste que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'un triangle rectāgle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base: & chacun des costez comprenant l'angle droict, estre aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

Car il a esté démontré que comme BD est à DA, ainsi DA à DC; & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC: item que comme CB est à BA, ainsi BA à BD; & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB, & BD: finalement que comme BC à CA ainsi CA à CD, & partant CA estre moyenne proportionnelle entre BC & CD.

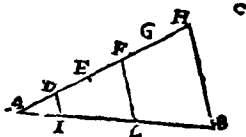
PROB. I. PROP. IX.

D'une ligne droicte donnée, oster la partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oster la cinquiesme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droicte AC, fai-

fant angle avec AB , & en icelle AC , soient prises à l'aduanture cinq parties egales; (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH ;



& apres auoir mené la ligne BH , du point D soit menée DI , parallele à HB : Je dis que AI est la cinquiésme partie de AB .

Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallele au costé HB , par la 2. p. 6. comme HD sera à DA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. p. 5. comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquiésme partie de la ligne droite AB , laquelle auoit esté demandée.

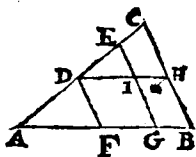
S C H O L I E.

Que si de AB il falloit ôter plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiésmes, il est evident par ce qui a esté démontré qu'estans tirée la ligne FL parallele à HB , le segment AL sera les trois cinquiésmes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquiésmes de AH .

PROBL. 2. PROP. X.

Couper semblablement vne ligne droite donnée non coupée, à vne autre ligne droite donnée & coupée.

Soient données les lignes droictes AB AC , desquelles AC est coupée en D & E : & il faut couper AB en parties semblables, & proportionnelles à celles de AC .



Soient accommodées icelles lignes données en sorte qu'elles fassent l'angle BAC ; & apres auoir mené BC , de D & E , soient menées DF , EG , paralleles à icelles BC par la 31. p. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement coupée en F & G , comme est coupée AC en D & E . Car par la 2. p. 6. comme AD est à DE , ainsi AF à FG . Que si on tire DH parallele à AB coupant EG en I . Derechef par la susdicté 2. p. 6. comme DE sera à EC , ainsi DI à IH , c'est à dire ainsi, FG à GB , pource que par la 34. p. 1. FG est egale à DI , & GB à IH . Parquoy les parties FG , GB seront aussi proportionnelles aux parties DE , EC . Les trois parties AF , FG , GB , sont donc proportionnelles aux trois parties AD , DE , EC : & partant AB est coupée semblablement à AC , ainsi qu'il falloit faire.

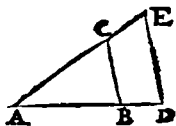
PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, trouuer vne troisieme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC , ausquelles il faut trouuer vne troisieme proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en vn angle CAB ;

& apres auoir prolongé AB iusques en D, soit faite BD egale à AC; & apres auoir mené CB, du point D, soit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE



est la troisieme proportionnelle, c'est à dire que comme AB est à AC, ainsi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE la ligne droite BC est parallele au costé DE, par la 2. p. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB est à BD, ainsi la mesme AB est à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB est à AC, ainsi à AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troisieme proportionnelle: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes données; trouuer la quatrieme proportionnelle.

Soient les trois lignes données (en la precedente figure) AB, BD, AC, auxquelles il faut trouuer la quatrieme proportionnelle.

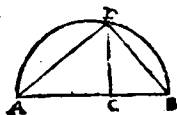
Soient disposées les deux premieres AB, BD, selon vne ligne droite AD; & la troisieme AC face avec la premiere AB vn angle A: puis apres soit menée BC, & de D, la ligne DE parallele à icelle BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE est la 4. proportionnelle requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD, ainsi AC est à CE. Nous auons donc

trouué vne quatriesme ligne proportionnelle à trois données : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes droictes données AC & CB , entre lesquelles il faut trouuer vne moyenne proportionnelle.



Soient icelles disposées en vne ligne droicte AB , sur laquelle soit descript vn demy cercle ADB ; & apres auoir du poinct C levé la perpendiculaire CD : Je dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.

Car estans menées les deux lignes AD & BD , l'angle ADB dans le demy cercle sera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB , est tirée DC perpendiculaire à la base AB , par le corol. de la 8. p. 6. CD sera moyenne proportionnelle entre AC , CB . Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre les deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

De cecy est euident qu'une ligne droicte tirée perpendiculairement de quelconque poinct au diametre d'un cercle, iusques à la circonference, est moyenne proportionnelle entre
les

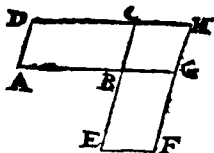
les segments du diamètre faits par icelle perpendiculaire. Car de quelconque point pris au diamètre AB , étant levée une perpendiculaire jusques à la circonférence, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne prop. entre les deux segments du diamètre AB .

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à vn angle : les costez au long des angles egaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

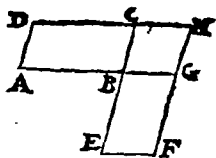
Soient deux parallelogrammes egaux $ABCD$, & $BEFG$, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : Je dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques : c'est à dire que AB est à BE , comme EB à BC .

Car les parallelogrammes AC , BF , estans disposez de telle façon que AB & BE , facent une ligne droicte, soient prolongez DC , FG , jusques à ce qu'il se rencontrent en H . Puis donc que les deux parallelogrammes AC , EG , sont egaux, ils auront une mesme raison au parallelogramme BH , par la 7. p. 5. Mais la raison du parallelo-



gramme AC à BH , est par la 1. p. 6. comme celle de la base AB à la base BC . Item celle des parallelogrammes EG, BH , est comme celle de EB à BC ; & partant par la 11. p. 5. comme AB à BC , ainsi EB à BC . Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie; si AB est à BG , comme EB à BC , & que les angles ABC & EBG soient egaux: le dis que les parallelogrammes AC & EG , seront aussi egaux.

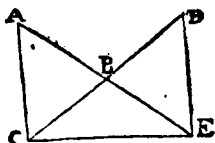


Car demeurant la mesme construction, on prouvera par la 1. p. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC , au parallelogramme BH , que de la base AB à la base BG : pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG , au parallelogramme BH , que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables: donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG , au troisieme BH seront semblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils seront egaux. Parquoy des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal; les costez au long, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 10. PROP. xv.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle; ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux triangles égaux ABC & DBE , ayans les angles au point B égaux. Je dis que les costez qui sont au long des angles égaux, sont reciproques : c'est à dire que comme AB est à BE , ainsi DB sera à BC .



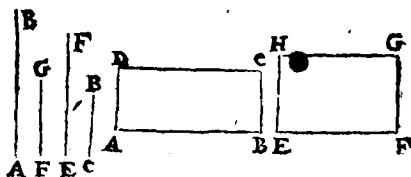
Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit menée la ligne CE . Pour-autant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC , au triangle EBC , (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE ; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle EBC , comme DB est à BC ; & partant par la 11. p. 5. AB sera à BE , comme DB à BC . Ce quia esté propossé.

Pour la seconde partie, elle se prouuera comme en la precedente, en retrogradant par la 1. p. 6 : 11. p. 5. & 9. p. 5. Donc les triangles égaux ayans vn angle égal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, est égal à celuy des moyennes : & si le rectangle compris des extremes, est égal au rectangle compris des moyennes : les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes proportionnelles AB, FG, EF, BC , sçavoir est que AB soit à FG , comme EF à BC , & soit le rectangle $ABCD$ compris des extremes A, B, BC ; & le rectangle $EFGH$ compris sous les moyennes EF, FG . Je dis que les rectangles AC, EG , sont egaux.



Car puis que les angles droicts B & F sont egaux; & que comme AB est à FG , ainsi EF à BC ; les costez au long des angles egaux B & F , seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

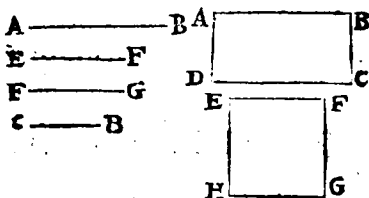
Quant à la seconde partie; soient les rectangles AC, EG egaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC , sont proportionnelles; c'est à dire que comme AB est à FG , ainsi EF est à BC . Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, sçavoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. sçavoir est que comme AB est à FG ainsi EF à BC . Si donc quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportion-

nelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré fait de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré décrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes proportionnelles AB , EF , BC ; & soit le rectangle $ABCD$ compris sous les extremes AB , BC , & le quarré



de la moyenne EF soit $EFGH$. Je dis que le rectangle AC est egal au quarré EG .

Car étant prise FG egale à EF , les quatre lignes AB , EF , FG , BC , seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF , FG , à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedente prop. le rectangle AC compris des deux extremes AB BC est egal au quarré EG , c'est à dire au rectangle des moyennes EF , FG . Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie, le rectangle AC soit egal au quarré EG . Je dis que comme AB est à EF ainsi EF à BC . Car puisque les rectangles AC , EG sont egaux, par la 16. p. 6. comme AB sera à FE , ainsi FG à BC : mais par la 7. p. 5. cōme FG est à EC , ainsi E egale à icelle FG , est à la même BC : & partant

cōme AB est à EF , ainsi EF est à BC . Si donc trois lignes droictes sont proportionnelles, le rectangle compris des extrêmes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

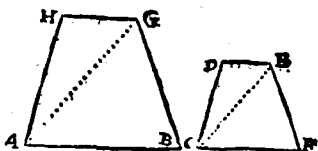
COROLLAIRE.

Il est manifeste par la dernière partie de ce theoreme, qu'une ligne droicte est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent un rectangle egal au carré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC est egal au carré de EF , il a esté demonsté, que comme AB à EF , ainsi EF à BC ; & parcaus EF est moyenne prop. entre AB & BC .

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droicte donnée AB , sur laquelle il faut construire vne figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée $CDEF$.



Soit diuisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CE ; & apres auoir par la 23. p. 1. décrit sur la ligne AB , & aux points A & B , les deux angles BAG, ABG , egaux, l'un à l'angle

FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il est evident par la 32. p. 1. que le troisieme sera egal au troisieme, & les triangles CEF, AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux points A & G, soient descrits les deux angles HAG, & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au sien : aussi par la 32 p. 1. le troisieme H sera egal au troisieme D, & les triangles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux : ainsi l'angle D estant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G ; les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles : & pour autant qu'elles sont composees de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux, proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG, & comme CE à CD, ainsi AG à AH ; & en raison egale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH ; ainsi les costez aux long des angles egaux FCD, BAH, seront aussi proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites. Nous avons donc fait ce qui estoit requis.

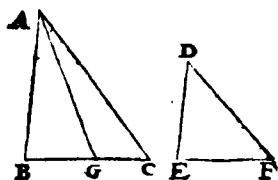
Que si la figure donnee auoit plus de 4. costez, il la faudroit diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à

l'autre en raison doublee de leurs co-
stez de mesme raison.

Soient deux triangles
semblables ABC & DE
F. Je dis qu'ils seront l'un
à l'autre en raison dou-
blee de leurs costez de
mesme raison BC & EF:
c'est à dire que si à BC &
EF on trouue la troisiè-



me proportionnelle BG; le triangle ABC sera au
triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisième
proportionnelle BG: car telle est la raison doublee
par la 10. def. 5.

Car estant tiree la ligne AG; d'autant que les trian-
gles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB
est à BC, ainsi DE est à EF; en permutant par la 16. p.
5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais
comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la con-
struction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à
BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG,
DEF, auront les costez au lōg des angles egaux α & α ,
reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, D
EF, seront egaux entr'eux; & partāt cōme le triangle
ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le mesme trian-
gle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme
le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hau-
teur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. p. 6.
Donc comme le triangle ABC est au triangle DFF,
ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG, estans conti-
nuellement proportionnelles, BC est à BG en raison
doublee de BC à EF par la 10. def. 5. donc aussi le
triangle ABC est au triangle DEF en raison dou-

blée du costé BC au costé EF. Donc les triangles semblables sont l'un à l'autre en raison double de leurs costez de mesme raison : ce qu'il falloit démonstrer.

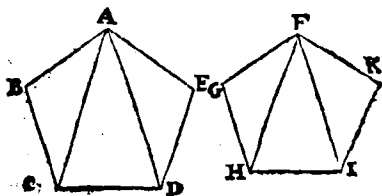
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la troisieme, ainsi le triangle descript sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté démontré que comme BC est à BG, ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14. PROP. XX.

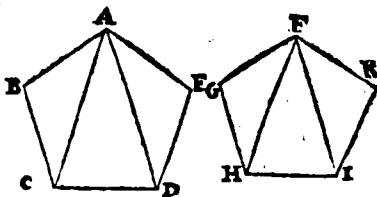
Les polygones semblables peuvent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout: & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables ABCD E, & FGHK. Je dis premierement qu'ils peuvent estre diuisez en nō-



bre egal de triangles semblables.

Car apres avoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est evident que l'une des figures est diuisee en au-



tant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal à l'angle G, & cōme BA sera à BC, ainsi GF sera à GH, & par la 6. p. de ce liure les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. prop. de ce mesme liure, ils auront les costez au long des angles, egaux proportionnaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG: mais BC est à CD comme GH à HI: car ce sont costez de figures semblables: donc en raison egale par la 22. p. 5. AC sera à CD, comme FH, à HI: & d'autant que les angles BCD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; iceux estans ostez, les restans ACD, FHI, seront pareillement egaux; & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD & FHI, seront equiangles, & par consequent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tout. Car les trois triangles de l'une des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la prop. preced. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH: aussi en la mesme raison doublée seront les triangles

ACD, FHI: & le troisieme AED estant au troisieme FKI en raison doublee de AD à FI, qui est la mesme que de AC à FH, estans costez de triangles semblables; aussi les triangles AED, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublee de AC à FH: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triagles de l'un d'iceux, à son respondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone, en raison doublee des costez CD & HI: car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHIK, comme l'un des triangles de l'une ACD, est à l'un des triangles de l'autre FHI, lesquels par la prop. precedente sont en raison doublee de CD à HI, par la 11. p. 5. le polygone sera au polygone, en raison doublee des costez de mesme raison CD & HI. Parquoy les polygones semblables peuvent estre diuises en nombre egal de triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste qu'estans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi sera le polygone descript sur la premiere au polygone semblable, & semblables descript sur la seconde; puis qu'il a esté demonstté que les polygones sont entr'eux en raison doublee de leurs costez de mesme raison, c'est à dire comme le costé du premier à une troisieme proportionnelle ausdits costez de mesme raison.

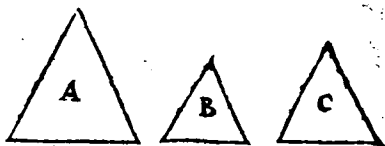
THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes semblables à une, sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure A semblable à la figure B, & la figure C semblable aussi à la mesme B: Je dis que A & C

seront semblables entr'elles.

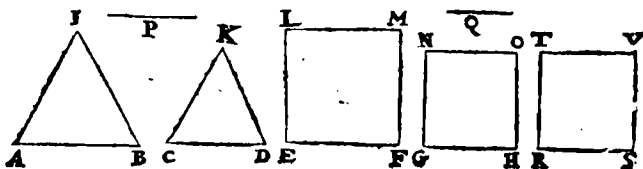
Car d'autant
que chacune
d'icelles A & c
est semblable
à B, elle a les
angles égaux



aux angles de B par la 1. def. 6. & partant par la 1. com.
sent. les angles de A, seront aussi égaux aux angles de
C; & par la 4. p. 6. A & C auront les costez au long
des angles égaux proportionnaux: & par la 1. def. 6.
elles seront semblables: donc les figures rectilignes
semblables à vne sont aussi semblables entr'elles: ce
qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes sont proportionnelles;
les figures rectilignes semblables, &
semblablement descrites sur icelles,
seront proportionnelles: & si icelles
figures ainsi descrites sont propor-
tionnelles, icelles lignes seront aussi
proportionnelles.



Soient quatre lignes proportionnelles AB, CD,

EF, GH; & sur AB & CD soient constituées deux quelconques rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement descrits: item sur EF & GH deux autres quelconques rectilignes semblables & semblablement descrits EFML, GHON. Je dis premierement que ces 4. rectilignes sont proportionnaux, c'est à dire que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi: aux deux lignes AB & CD, soit trouuée P troisieme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF & GH, soit trouuée Q aussi troisieme proportionnelle: & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH. Item CD à P: comme GH à Q; en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement descrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionnelles.

Car soit trouué RS 4. proportionnelle aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS descrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM, & semblablement posé par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. preced. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté démontré cy dessus, le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, comme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par

la 9. p. 5. RV , GO seroẽt egaux: lesquels estẽs semblables & semblablement descrits, consistent necessairemẽt (comme nous demonst rerons incontinent) sur lignes droictes egales RS , GH . Parquoy par la 7. p. 5. comme EF sera à RS , ainsi EF sera à GH . Mais par l'hypothese EF est à RS , comme AB à CD : donc par la 11. p. 5. comme AB sera à CD , ainsi aussi EF sera à GH : Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

LE M M E.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO , RV , consistent sur lignes droictes egales, on le prouvera aussi. Si les lignes GH , RS peuvent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO , ainsi RS à SV : & GH ayant estẽe possee plus grande que RS , par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV ; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV ; puis que cestuy-cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayant estẽe posez egaux. Les lignes GH , RS ne sont donc pas inegales, mais egales: ce qui estoit proposeẽ.

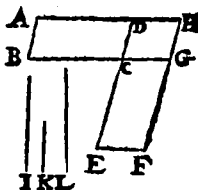
S C H O L I E.

Il est evident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillemens proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles: donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a estẽe cy dessus demonst re. V on donc que le rectiligne qui sera descrit sur la seconde ligne, sera egal à celuy descrit sur la 3. est manifeste ce qui estoit proposeẽ.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'un à l'autre en la raison compoſee de celles de leurs coſtez.

Soient deux parallelogrammes equiangles $ABCD$, & EFG , ayans les deux angles B & C égaux: le diſ que la raison de l'un à l'autre eſt compoſee de celles de leurs coſtez, ſçavoir eſt compoſee de la raison que BC a à CG , & de celle que DC a à CE .



Car ayant diſpoſé les deux parallelogrammes, en ſorte que BC & CG , ſe puiſſent rencontrer directement, & ne faſſent qu'une ligne droite, comme auſſi DC , CE vne autre ligne droite, ſoit paracheué le parallelogramme $DCGH$; & ſoit priſe quelconque ligne droite I ; puis aux 3. BC , CG & I , ſoit trouué la 4. prop. K . Item aux 3. DC , CE , & K , la 4. prop. L . Ven donc que par la 1. p. 6. comme BC eſt à CG , ainſi AC à DG ; & comme BC à CG ; ainſi auſſi I eſt à K par l'hypotheſe: pareillement comme AC ſera à DG , ainſi ſera I à K par la 11. p. 5. Le meſme ſe peut dire de DG à CF , qu'ils ſont l'un à l'autre comme K à L , par la 1. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raison egale, comme AC ſera à CF , ainſi I ſera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L eſt compoſee de la raison de BC à CG , & de celle de DC à CE par la 5. def. de celine. D'oc auſſi d'icelles raisons eſt compoſee la raison

du parallélogramme AC au parallélogramme CF. Parquoy les parallélogrammes equiangles sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs costez: Ce qu'il falloit prouver.

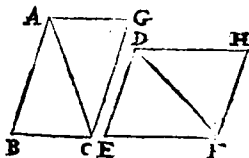
SCHOLIE.

Il est facile à colliger de ceste démonstration comment on compose vne raison de deux ou de d'avantage. Car des raisons de BC à CG, & DC à CE a esté composée la raison de I à L. Que s'il faut composer vne raison de trois autres proposées, ayant trouvé celle composée de deux, d'icelle & de la troisièsmes nous en composerons vne autre en la mesme manière, laquelle sera composée de trois: & ainsi consequemment des autres.

Clavius demonstre en ce lieu-cy (apres Commandin) quelques autres propositions assez utiles: c'est pourquoy nous les joindrons aussi icy.

Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, sont en raison composée des costez comprenant l'angle egal.

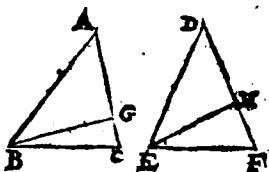
Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle B egal à l'angle E: Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des costez comprenant les angles B & E. Car ayant achevé les parallélogrammes BG, EH, ils seront equiangles, & parant par la 23. p. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs costez. Veu donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiés par la 34. p. 1. sont en la mesme raison qu'iceux par la 15. p. 5. aussi iceux triangles seront l'un à l'autre en icelle raison composée des costez.



Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, sont l'un

i'un à l'autre, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC , DEF ayans l'angle A egal à l'angle D . Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , comme le rectangle de AB, AC , est au rectangle de DE, EF .



Car estans tirees sur AC, DF , les perpendiculaires BG, EH ; les triangles ABG, DEH seront equiangles, comme appert par le corol. de la 32. p. 1. donc par la 4. p. 6. comme GB est à BA , ainsi HE à ED . Mais par la 1. p. 6. comme GB est à BA , ainsi le rectangle de BG, AC , au rectangle de BA, AC , pource que posant GB, BA , bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une mesure, scavoir AC . Semblablement comme HE à ED , ainsi est le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF . Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC est au rectangle de AB, AC , comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF ; & en permutant le rectangle de BG, AC , sera au rectangle de EH, DF , comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF . Mais le rectangle de BG, AC , est au rectangle de EH, DF , ainsi que le triangle ABC , au triangle DEF par la 15. p. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles par la 41 p. 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC, DF ; & mesmes hauteurs BG, EH ; & partant entre mesmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB, AC , est au rectangle de DE, DF : ce qui estoit proposé.

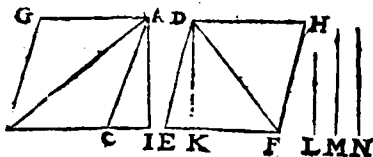
COROLLAIRE.

De cery resulse que les parallelogrammes equiangles sont

aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

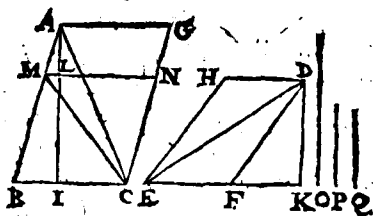
Soient les triangles ABC , DEF ; & les parallelogrammes CG , EH , les hauteurs d'iceux soient AI ,



DK . It dis que la raison d'iceux triangles, & parallelogrammes, est composee de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases, ou aussi egales, ou inegales: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M ; & comme AI à DK , ainsi M à N , lesquelles seront egales, puis que AI , DK , sont posees egales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M , c'est à dire comme BC à EF . Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC au triangle DEF ; & le parallelogramme CG au parallelogramme EH : Donc par la 11. p. 5. comme L sera à N , ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M , c'est à dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est à dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallelogramme CG au parallelogramme EH , est aussi composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI , DK inegales, & AI la plus grande, mais les bases BC , EF , ou egales, ou aussi inegales. Soit fait comme AI à DK , ainsi O à P ; & comme BC à EF , ainsi P à Q : & ayant couppe IL egale à DK ,

par L soit tirée ML
 & parallèle à BC ,
 & joindz CM .
 D'autant que le
 triangle ABC est
 au triangle MBC ;
 & le parallélogra-
 me BC au pa-
 rallélog. BN , cō-



me la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui luy est égale,
 c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1. p. 6. &
 comme le triangle est MBC au triangle DEF , & le pa-
 rallélogramme BN au parallélogramme FH , ainsi est la
 base BC à la base EF , (pource qu'ils sont de mesme hauteur)
 c'est à dire ainsi P à Q ; en raison égale ABC sera à DEF , &
 BG à FH , comme O à Q . Parquoy puis que la raison de O à Q
 est composée de la raison de O à P , c'est à dire de AI à DK , &
 de la raison de P à Q , c'est à dire de la base BC à la base EF : la
 raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallélo-
 gramme BG au parallélogramme FH , sera composée des mes-
 mes raisons. Ce qui estoit proposé.

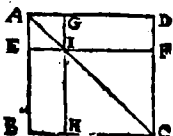
On peut démonstrer en la mesme maniere, que le triangle
 DEF , qui à la moindre hauteur, est au triangle ABC , & le
 parallélogramme FH au parallélogramme CG en la raison com-
 posée de celle de la base EF à la base BC , & de celle de la hau-
 teur DK à la hauteur AI ; & ce en faisant que comme EF à BC
 ainsi Q à P ; & puis comme DK à AI , ainsi P à O ; & tout le
 reste comme dessus. Appert donc ce qui estoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIII.

En tout parallélogramme; les parallé-
 logram. qui sont à l'entour du diame-
 tre, ayans vn angle commun ou total;

sont semblables entr'eux, & au total

Soit le parallelogramme ABCD, duquel le diametre est AC: le dis que les deux parallelogrammes GE & FH descrits sur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs avec le total, sont semblables entr'eux, & au total ABCD.



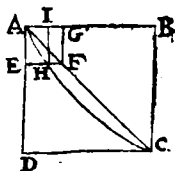
Car d'autant que les lignes AD, EF, BC, sont paralleles, sur lesquelles tombent AC & GH, elles feront les angles alternativement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles AIG & ICF, seront equiangles entr'eux, & au total ACD, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux, proportionaux. Le mesme se peut dire des trois autres triangles AIE, ICH & ACB, lesquels sont egaux aux trois premiers, chacun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelogramme EG, ayant les costez AE & EI proportionaux à AB & BC, costez du parallelogramme BD, & aux costez IH & HC du parallelogramme FH, &c. Il est evident par la 1. def. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, seront semblables entr'eux, & au tout BD. Donc en tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre. &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

PROBL. 7. PROP. xxv.

Descrire vne figure rectiligne, semblable à vne donnee, & egale à vne autre proposee.

parallélogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun avec le tout; l'osté sera avec le tout sur vn mesme diametre.

Soit le parallélogramme AB CD, duquel on retranche AEF G parallélogramme qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun avec le total: se dis qu'ils sont sur mesme diametre AFC.

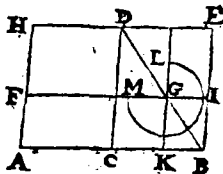


Autrement, s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre AHC, qui ne soit commun à tous les deux parallélogrammes, ains coupe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menée HI parallele à A E, par la 31. p. 1. donc le parallélogramme IE estant sur vn mesme diametre avec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total, GE est aussi semblable par hypothese; & partant par la 21. p. 6. G E & IE seront semblables, & par la 1. def. 6. AE sera à EF, comme AE à EH: mais AE estant egale à soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p. 5. que EF 2. fust egale à EH 4. le tout à la partie, ce qui est absurde: donc les parallélogrammes BD. & GE, total & retranché, estoient sur mesme diametre: car il aduendra tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de BD passe par quelconque autre poinct, soit du costé EF où FG, du parallélogramme retranché GE. Si donc d'un parallélogramme on oste vn parallélogramme, &c. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle de parallelogrammes semblables & semblablement posés à vn autre descrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaillant,

Soit la ligne AB coupée en deux également en C, & sur CB moitié d'icelle, soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si donc on accomplit tout le



parallelogramme A B E H, le parallelogramme AD estant sur la moitié AC, appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme CE & semblable à iceluy CE. le dis que de tous les parallelogrammes appliquez sur icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable à CE, le plus grand est AD, qui est descrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car estans pris au diametre BD quelcōque poinct G, & tirées par iceluy poinct les lignes droictes FG, IG, paralleles aux lignes droictes AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. p. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. p. 1. les complemens CG, GE, sont egaux, si on leur adioute KI commun, aussi CI, KE seront egaux. Mais CI, CF estans sur bases egales, sont pareillement egaux par la 36. p. 1. donc aussi CF, KE seront egaux, & leur adioustant CG commun, le parallelogramme AG sera egal au gnomon LM. Parquoy puisque CE est plus grand qu'iceluy gnomon, LM; (car CE outre le gnomon contient encore le parallelogr. DG) aussi AD qui est egal à CE par la 36. p. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du mesme parallelogramme DG. Et en la mesme maniere sera demonstré que AD est plus grand que tous autres parallelogrammes, qui seront appliquez selon la mesme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 8. PROP. xxviii.

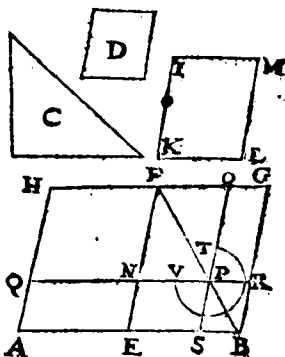
Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'un parallelogramme semblable à vn autre donné, mais il faut

que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant coupé AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. p. 6. & soit accompli le parallelogramme AHGB.

Maintenant, si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est appliqué sur AB, & defaut du parallelogramme EG. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C, (cette egalité ou inégalité, & excez sera cogneue par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. soit reduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG: & veu que EG



est plus grand que KM, il est euident que les costez EF, FG seront aussi plus grands que les costez KI, IM ; parquoy d'iceux EF, FG soient coupez FN, FO, egaux à iceux KI, IM , à fin qu'estant accomply le parallelogramme NFOP, il soit egal à KM, & semblable & semblablement poté au mesme KM ; & partant aussi à EG ; & par consequent qu'estant tiré le diametre BF, iceux parallelog. EG, NO, soient au long d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué les costez NP OP, tant qu'il sera de besoin : le dis que AP est le parallelogramme demandé.

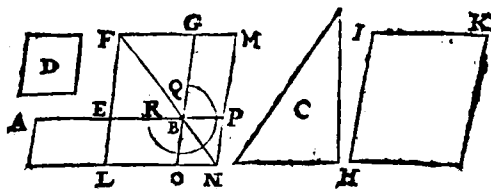
Car il est defaillant du
 parallelogramme SR ,
 lequel par la 24. p. 6. est
 semblable à EG , par-
 tant aussi à D . Item puis
 que IL est l'excez par
 lequel EG excède C , & qu'à iceluy exccez est egal
 NO . Il est euident que le gnomon TV sera egal à
 la figure C . Mais il est aussi egal à AP , comme il a
 esté prouué à la precedente : donc aussi AP sera
 egal à C , & defaudra à la ligne donnée AB du pa-
 rallelogramme SR semblable au donné D . Nous
 auons donc sur vne ligne droicte donnée appliqué
 vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 9. PROP. XXIX.

Sur vne ligne droicte donnée, appli-
 quer vn parallelogramme egal à.

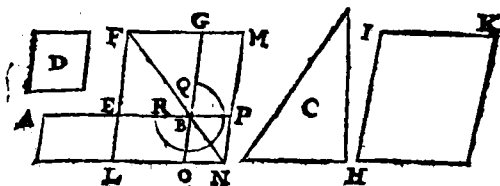
une figure rectiligne donnée, excédant d'un parallélogramme semblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut descrire un parallélogramme égal au rectiligne donné C , mais excédant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme donné D .



Soit coupée en deux également AB au point E , & sur la moitié EB soit descript le parallélogramme $EFGH$ semblable & semblablement posé à D par la 18. p. 6. En apres soit descript le parallélogramme HK égal aux deux figures C & EG , & semblable & semblablement posé à EG par la 25. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallélogrammes HK , EG , comme HI à IK , ainsi EF à FG ; & par consequent HK étant plus grand que EG , aussi les costez HI , IK seront plus grands que les costez EF , FG : estans donc prolongez les costez FE , FG , tellement que EL , FM , soient égales aux lignes HI , IK , & achevé le parallélog. $LFMN$, il sera semblable & semblablement posé à EG . Parquoy par la 26. p. 6. LM , EG ,

seront au long d'un mesme diametre, qui soit FN. Maintenant estans prolongez AB, GB iusques en P & O; & acheué le parallelogramme LA; le parallelogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Je dis donc que le parallelogramme AN est egal au rectiligne C: Car puisque par la 36. p. 1. AL, EO sont egaux, & par la 43. p. 1. EO est egal au complement BM, aussi



AL sera egal à iceluy BM; leur adjoustant donc LP commun, AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C: (car puisque HK, c'est à dire LM est egal au rectiligne C & à EG ensemble: si on oste EG commun, resteront le gnomon QR & le rectiligne C egaux) donc aussi AN sera egal au rectiligne C. A la ligne droicte AB nous auons donc appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à vn autre donné D: ce qu'il falloit faire.

P R O B. 10. P R O P. XXX.

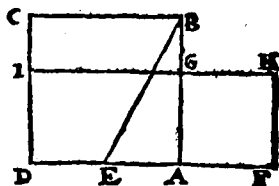
Couper vne ligne droicte donnée en la moyenne & extrême raison.

Soit la ligne droite donnée AB , laquelle il faut couper en la moyenne & extrême raison.

Soit donc icelle coupée au point G , de de telle façon que le carré de la partie AG

soit égal au rectangle de la toute AB , & de la partie GB , comme il a esté enseigné en la 11. p. 2. Je dis que AB sera coupée en la moyenne & extrême raison au point G .

Car puis que le carré de AG est égal au rectangle de AB & GB , les trois lignes AB , AG & GB , seront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG , comme AG au plus petit segment GB ; & par la 3. d. 6. AB est coupée en G , en la moyenne & extrême raison. Ce qu'il falloit faire.

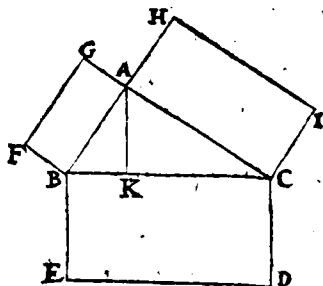


THEO. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droit, est égale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC , ayant l'angle BAC , droit. Je dis que la figure descrite sur le costé AC , qui

soutient l'angle droit, est égale aux deux autres figures semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez AB, & AC.

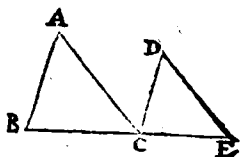


Car si du point A, qui fait l'angle droit, on mène la perpendiculaire Ak, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entr'eux, & au total : ainsi les trois triangles BAK, CAk & ABC seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des costez de mesme raison AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI estans semblables & semblablement posées, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs costez de mesme raison AB, BC, CA, qui sont les mesmes costez des triangles, & par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAk entr'eux; c'est à dire que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAk est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. p. 5. comme le composé des triangles BAK, CAk, sera au triangle ABC, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, sera au rectiligne BD : mais le triangle BAC, est égal aux deux autres : donc la figure BD descrite sur BC, sera aussi égale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit démon-
strer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionnaux à deux costez, & sont disposés faisant vn angle, tellement que les costez de mesme raison soient parallelz ; les deux autres costez se rencontreront directement.

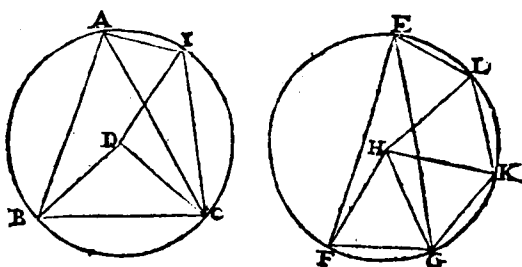
Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les costez BA & AC proportionnaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE : ie dis que BC & CE se rencontreront directement.



Car BA & CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACDE ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6 les deux triangles seront equiangles : donc l'angle ACD, estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est evident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement : Si donc deux triangles ont deux costez proportionnaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux , les angles tant aux centres qu'aux circonferences , sont entr'eux , comme les circonferences qui les soustiennent. Les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.



Soient deux cercles égaux ABC & EFG, desquels les centres sont D & H, & soient les deux angles aux centres BDC & FHG, ou en la circonferencé BAC & FEG; ie dis que comme la circonferencé BC est à la circonferencé FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Qu'il ne soit ainsi : soient pris les deux arcs GK & KL égaux à FG : item CI égal à BC, & soient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE: les trois angles FHG, GHK & KHL sont égaux entr'eux, par la 27. p. 3. ainsi l'arc FGKL est autant multiple de l'arc FG, comme l'angle FHL l'est de FHG : & par le mesme discours, l'arc BCI est autant multiple de l'arc

l'arc BC, comme l'angle BDI, l'est de BDC: partant si l'arc BCI est egal à l'arc FGLK, l'angle BDI sera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. si plus grand, plus grand, si plus petit, plus petit; & par ainsi BCI, BDI, estans equemultiplices de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. comme l'arc BC à l'arc FG, ainsi l'angle BDC à l'angle FHG: le mesme discours est des angles en la circonference.

Pour la seconde partie. Je dis aussi, que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est à l'arc FG.

Car on prouuera aisément (demeurant la mesme construction) que les deux arcs BC, CI estans egaux que leurs cordes seront egales, & les deux portions egales: mais les deux triangles BDC, CDI sont aussi egaux par la 4. p. 1. leur adjoustant donc les deux segmens egaux; par les communes sentences, les deux secteurs BDC, CDI seront egaux, & l'arc BCI sera autant multiplie de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC: & par mesme discours, l'arc FGKL sera autant multiplie de l'arc FG, que le secteur FHL le sera du secteur FHG; la conclusion est aisée par la 6. def. 5. cōme en la premiere partie. Parquoy aux cercles egaux, les angles tant aux centres qu'aux circonférences, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

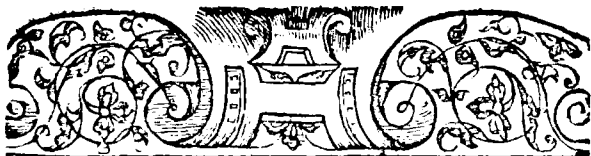
C O R O L L A I R E.

De cety sensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre a la mesme raison que l'arc à l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils seront aussi entre-eux en la mesme raison.

Il est aussi evident que comme un angle au centre, est à quatre angles droits, ainsi est l'arc soustendant iceluy angle, à toute la circonference, & au contraire que comme quatre angles droits sont à un angle au centre, ainsi toute la circonference est à l'arc soustendant iceluy angle.

Car comme un angle au centre est à un angle droit au centre, ainsi l'arc qui soustient iceluy angle, est au quadrant qui soustient l'angle droit par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est à sçavoir à 4. angles droits, ainsi l'arc soustendant iceluy angle, sera au quadruple du quadrant, sçavoir est à toute la circonference, par les choses que nous auons demonstrees à la fin du scholie de la 22. p. 5. puis apres d'autant qu'un angle au centre est à quatre angles droits, comme l'arc qui soustient iceluy angle, est à toute la circonference; aussi en permutans comme quatre angles droits seront à un angle au centre, ainsi toute la circonference sera à l'arc soustendant l'angle au centre: ce qui a esté proposé.

Fin du sixiesme Element.



E L E M E N T

S E P T I E S M E.

D E F I N I T I O N S.



VNITE', est selon laquelle
vne chacune chose de celles
qui sont, est appellée vne.

Euclide ayant traité és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, sçauoir est de celle là qui considere les plans, au parauant que venir à l'autre partie, laquelle traite des solides; il explique en ce septiesme liure & és deux suiuaus les proprietéz & affections des nombres, pour puis apres traiter au 10. liures des lignes commensurables & incommensurables, necessaires pour auoir entiere & parfaicte cognoissance des proprietéz des solides. Euclide definit donc icy que c'est que vnité, & dit que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme vne: & est à noter que tout ainsi que en la Geometrie le point n'a aucune partie, aussi és nombres l'vnité (selon l'auteur) ne reçoit aucune diuision.

2. Nombre, est vne multitude composée de plusieurs vnitez.

C'est à dire qu'estans assemblées plusieurs unités ensemble, leur aggregé s'appelle nombre.

3. Partie est vn petit nombre tiré d'un plus grand, lors que le petit mesure le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un nombre en mesure un plus grand, il est dict partie d'iceluy: Et ceste partie est appellée aliquotte; tellement que 2 est dit partie aliquotte de 4; Et se nomme $\frac{1}{2}$; Et 5, est dict $\frac{1}{3}$ de 15, pource que 5 mesure 15 par 3: ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{1}{7}$, Et.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6. est dict parties de 9: Car il ne le mesure pas précisément, mais est 2 parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12. est parties de 16, sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'un Et l'autre nombre, est 3 fois en 12, Et 4 fois en 16: aussi 15 est parties de 24, sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, Et 8 fois en 24. Et c.

5. Mais vn grand nombre est dit multiple d'un petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'un plus grand, ans seulement de celui là qu'il mesure précisément; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiple, ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux là qui le peuvent précisément mesurer: tellement que de deux nombres inégaux, si le petit mesure précisément le grand, ce moindre est dit partie du grand, mais celui est aussi dit multiple de cestuy là: Ainsi 4 est bien dit

partie de 12, mais aussi iceluy 12 est dit multiplie de 4. Par
reillement 30 est dit multiplie tant de 5 que de 6, qui sont
partie d'iceluy, puis que l'un & l'autre le mesure.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre
diuisé en deux également.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, sont appelez nom-
bres pairs, pource que chacun d'eux peut estre diuisé en deux
egalement, c'est à dire en deux parties egales.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut
estre diuisé en deux également: ou bien
celuy qui est different du nombre pair
de l'vnité.

Comme tous ces nombres cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, sont nom-
mez impairs, pource qu'ils ne peuvent estre diuisez en deux
egalement.

8. Nombre parement pair, est celuy
qu'un nombre pair mesure par un nom-
bre pair.

Comme 32, lequel 8 mesure par 4, est dit nombre paire-
ment pair.

9. Et parement impair, est celuy qu'un
nombre impair mesure par un nombre pair.

Comme 42, lequel 7 mesure par 6, est dit nombre paire-
ment impair.

10. Mais nombre impairement impair,
est celuy qui est mesuré d'un nombre
impair par un nombre impair.

Comme 15, lequel est mesuré de 5 par 3, est dit nombre
impairement impair.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule vunité.

C'est à dire, que si vn nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par l'vnité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux cy 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Car la seule vunité mesure iceux.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux là, qui n'ont autre commune mesure que l'vnité.

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres composez entre-eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'vnité.

15. Vn nōbre est dit multiplier vn nōbre, lorsqu'il en est procrée vn autre, qui est autant de fois composé deceluy qui est multiplié qu'il y a d'vnitez au multipliât.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produict est appellé plan, & les multipliers sont les costez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nōbres se multiplient l'un l'autre, le produict est appellé solide, & les multipliers sont les costez d'iceluy.

18. Nombre quarré, est celuy qui est également egal : ou bien c'est le produit de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, est celuy qui est également egal : ou bien c'est le produit de trois nombres egaux.

20. Les nombres sont proportionnaux, lors que le premier est autāt multiplie, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, côme le troisiem. du quatriesme.

Selon ceste vulgaire def. d'Euclide, ne sont point compris les nombres prop. ceux qui sont en raison superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Car en toutes ces proportions, le premier nombre n'est pas autant multiplie du second, que le 3. du 4. ny aussi mesme partie, ou parties : Mais le premier contient autant le 2, que le troisieme le quatriesme; & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceluy : comme il est evident par les choses que nous auons enseignées à la 1. d. 5. C'est pourquoy Clavius (& à bon droit) a estimé que ceste vulgaire def. d'Euclide a esté corrompue, puis qu'elle est manque & imparfaicte : laquelle imperfection Donnott a encore augmentée en sa traduction, en ostant equemultiplie, tellement que selon sadiète traduction, on ne peut pas conclure que les nombres qui sont en raison multiple soient proportionnaux, comme veut la vulgaire definition. Pour donc rendre ceste 20. def. generale à tous genres de proportions, comme a fait Clavius, nous la poserons telle qu'il ensuit.

Les nōbres sont proportionnaux, lors que le premier est auit multiple, ou bien mesme partie, ou mesmes parties du second que le troisieme du quatriesme. Ou bien quand le premier contient egaleme le second, & le troisieme le quatriesme, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy. Ainsi ces nombres 6. 2. 9. 3. sont proportionnaux, puis que le premier est auit multiplie du second, que le 3. l'est du 4. c'est à sçauoir triple: Item ceux-cy 4. 12. 3. 9; car le premier est la mesme partie du second, que le 3. du 4. sçauoir est le tiers: item ceux cy 6. 8. 9. 12. pource que le premier est mesmes parties du second que le 3. du 4. Sont aussi proportionnaux ces nombres cy 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. Car au premier exemple, le premier & 3. nombre contient vne seule fois le 2 & 4, & en outre vne mesme partie, sçauoir est $\frac{1}{2}$: mais au second, vne seule fois, & en outre mesme parties, sçauoir est les $\frac{1}{4}$: & au 3. deux fois, & encores vne mesme partie, c'est à sçauoir $\frac{1}{2}$: & au dernier, deux fois, & encores mesmes parties, sçauoir est les $\frac{1}{2}$. Que si le premier nombre n'est auit multiplie ou mesme partie, ou parties du second que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne auit de fois le second, que le 3. contient le 4. & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy, les nombres proposez ne pourront estre appelez proportionnaux. Parquoy si 4. nombres sont posez proportionnaux, il est necessaire d'accorder que le premier est auita multiple, &c.

Or Euclide definit seulement les nombres proportionnaux, qui ont vne mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est evident que le premier est auit egal au second, aussi le 3. doit estre egal au 4. afin que les nombres soient dictz proport.

Or de ceste def. resulte aperiment, que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme, & au contraire qu'un nombre a aussi mesme raison à deux egaux: item que les nombres ayant mesme raison à vn mesme, ou ausquels vn mesme nōbre

a mesme raison sont egaux. Car puis que les nombres egaux sont, ou eque multiplies, ou mesme partie, ou mesmes parties d'un mesme nombre; ou contiennent également un mesme nombre, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'un mesme nombre est ou eque multiplies, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient également, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceux: il est evident par ceste definition que les nombres egaux ont mesme raison à un mesme nombre, ou un mesme à des egaux. Ce qui a esté demonstté en toutes grandeurs à la 7. p. 5.

De rebis, pource que les nombres ayans mesme raison à un mesme nombre, sont ou eque multiplies d'iceluy, ou mesme partie, ou parties; ou bien ils le contiennent également, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que un mesme nombre ayant mesme raison à quelq'un des, est ou eque multiplies d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient également, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à un mesme nombre, ou ausquels un mesme nombre a mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui a aussi esté demonstté en toutes sortes de grandeurs en la 7. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à un mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'un mesme nombre a plus grande raison à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inegaux, celui qui a plus grande raison à un mesme, est le plus grand: & celui auquel un mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires, & evidentes, si ceste d. f. est bien entendue. Cecy a aussi esté demonstté es grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

21. Les nombres semblables plans, ou so-

lides, sont ceux qui ont les costez proportionnaux.

Comme 24. & 6. sont nombres plans semblables, pource que 6. & 4. costez de cestuy-là sont proportionnaux à 3. & 2. costez de celuy-cy: ainsi aussi 192. & 24. sont nombres solides semblables, pource que 8. 6. 4. costez de cestuy-là sont prop. à 4. 3. 2. costez de celuy-cy. Et est à noter que ces nombres plans, & solides semblables peuvent bien estre compris sous des costez non proportionnaux, mais toutesfois nous ne les considerons icy qu'entend qu'ils sont contenus sous leurs costez proportionnaux.

22. Nombre parfait, est celuy qui est egal à toutes les parties aliquotes.

Comme 6. est dict nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy, sçavoir 1. 2. 3. prises ensemble, luy sont egales. Ainsi aussi 28. duquel les parties aliquotes, sçavoir est 1. 2. 4. 7. 14. estans prises ensemble, luy sont egales; sera dict nombre parfait.

COMMUNES SENTENCES.

1. **L** Es nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'un mesme nombre, sont egaux entr'eux.

2. Et ceux desquels un mesme nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont egaux, sont aussi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui sont vne mesme partie, ou mesmes parties de nombres e-

gaux, ou d'un mesme, sont egaux entre eux.

4. Et ceux desquels un mesme nombre, ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties: sôt aussi egaux entr'eux.

5. L'unité mesure tout nombre par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire par le mesme nombre.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'unité.

7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelque'un, le multipliât mesurera le produit par le multiplié: mais le multiplié par le mesme multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produit celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou

d'avantage, mesure aussi le composé d'eux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB & CD, si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand, iusques à ce qu'on ait pris l'vnité: Je dis qu'iceux nombres AB, & CD seront premiers entr'eux.

A..... 5 F.. 2 G. 1 B
C.. 3 H.. 2 D
E.. 2

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront cōposés, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par

quelque nombre : soit iceluy E commune mesure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustraiçt de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustraiçt de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure le tout CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG: mais il mesure aussi FB; E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie: ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement: & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de celiure. Si donc de deux nombres inégaux proposez on soustraiçt tousiours alternatiuement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Commentin ayant demonstté la conuerse de ceste prop. vient à la suivante.

Estans proposez deux nombres composez entre-eux, si on soustraiçt tousiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne parviendra iusques à l'vnité.

Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstté en la prop. 17. dessus: & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognissons facilement s'ils sont premiers ou

ex'eux en non. Car estant faicte la soustraction, comme dit est, si on paruiet iusques à l'vnité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on n'y paruiet, ils seront composez.

PROBL. I. PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure de deux nombres proposez non premiers entr'eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit soustrait le plus petit C D, tât de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose comme EB, icy luy soit osté de CD, tellement qu'il reste encore FD; & ainsi soit soustraiet continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la preced. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Qu'ainsi ne soit. Je dis en premier lieu que FD mesure AB, & CD: Car mesurant EB, il mesure aussi CF; par la 11. com. sent. & d'autant qu'il se mesure soy-mesme, par la 10. com. sent. il mesure le tout CD: Pareillement il mesurera AE; & puis qu'il mesure aussi EB, il mesurera le tout AB; ainsi il mesure tous les deux AB, & CD.

Je dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD . Autrement soit vn plus grand nombre, sçauoir G , qui mesure tous les deux nombres AB & CD s'il est possible: & puis qu'il mesure CD , il mesurera aussi AE , & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB ; & par consequent il mesurera CF . Item mesurant le tout CD , il mesurera aussi le reste FD , sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB , CD : partant iceluy nombre FD est la plus grande commune mesure d'iceux AB , & CD .

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB ; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure. Nous auons donc trouué la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonstre que si G mesure AB & CD , il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

S C H O L I E.

Par les choses cy-dessus dictes, nous cognoissons facilement si trois ou d auantage de nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car soient les trois nombres A, B, C . Premièrement donc soit ven par ce qui est dit à la 1. prop. si les A 12
deux nombres A & B sont premiers en- B 9
tr'eux, ou non: Que s'ils sont premiers, il est C 6
aidée que les trois nombres A, B, C , ne seroient D ... 3

composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouuee par la 2. prop, leur plus grande commune mesure D ; que si elle mesure aussi le nombre C , il est manifeste que les trois nombres A, B, C , sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure,

Que si D plus grande commune mesure de A & B , ne mesure C ; C & D seront premieres entr'eux, ou non: S'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C , ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils estoient composez, ils auroient vne commune mesure, laquelle mesurerait aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B , par le corol. de ceste prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C , seront composez entr'eux. Car estant trouuee par la 2. p. 7. & plus grande commune mesure de C & D ; iceluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C ; & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit propose.

En la mesme maniere sera cogneu si d'auantage de nombres que trois sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra esprouuer premierement trois; si cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres proposez.

P R O B. 2. P R O P. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux.

Soient

Soient trois nombres non A.....12 D....4.
 premiers entr'eux A,B,C, des- B.....8 E..2
 quels il faut trouuer la plus C.....6 F...3
 grande commune mesure.

Soit tiree la plus grande commune mesure des deux A & B, par la precedente prop. sçauoir D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: Car si vn plus grand nombre que D mesure A, B, C; par le corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, plus grande mesure de A, & B; sçauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le susdict corol. de la 2. prop. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure de C & D. Il est euident par la 11. comm. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D, lequel mesure B & A. le dis d'auantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçauoir F s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le mesme corol. de la 2. propo. & par la mesme raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E. sçauoir le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres A, B, C, & partant iceluy nombre E sera la plus grande commune mesure d'iceux trois nombres A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus grande commune mesure de tous nombres proposez non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure, & aura aussi lieu le mesme corol.

T H E O R. 2. P R O P. III.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'est à dire que de deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux, A.....6
desquels A soit le plus grand. Je dis que le B...3
plus petit B, est ou partie aliquote, ou ali- B....4
quante de A. B.....5

Car ou B mesure A, ou nō. S'il le mesure, il est partie aliquote par la 3. def. de ce liure: s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombre composez, ou premiers: si composez, ils auront vne commune mesure par la 14. def. de ce mesme liure: si premiers, ils auront l'vnité pour commune mesure par la 12. deff. ainsi B contiendra certain nombre d'vnitez semblables aux vnitez qui sont en A. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O. 3. P R O P. V.

Si de quatre nombres, le premier est

telle partie du second ; que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, B, C, D & E F, desquels A est telle partie de BC, que D est de EF. Je dis que A & D ensemble, sont telle partie de BC & EF ensembles, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Soit donc BC diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC; EF se diuifera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF: & d'autant que BG est egal à A, & EH à D; si à choses egales on adioute choses egales, sçauoir A & BG, à D & EH; A & D ensembles, seront egaux à BG & EH ensembles: le mesme se dira de A, GC; D & HF: & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble: Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le

tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F, desquels le premier AB A... 3 G... 3 B contient autant de parties du second C, que le troisieme DE est D.... 4 H.... 4 E du quatriesme F. Je dis que AB, & F..... 12 DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

Car pour-autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F ; estans AB & DE diuisez en parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. precedente AG & DH ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul ; ainsi AB & DE ensemble, seront telles parties de C, & F ensemble, que AB est de C : Parquoy si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché ; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle $A \dots 4 E \dots 2 B$
 partie du nombre CD, $G \dots 4 C \dots 8 F \dots 4 D$
 que le retranché AE est du retranché CF. Je dis que
 le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout
 AB est du tout CD.

Car estant pris le nombre GC, en sorte que tel-
 le partie qu'est le retranché AE du retranché CF,
 telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. pro-
 pos. les deux nombres AE & EB ensemble seront
 telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est
 AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout C
 D: & partant puisque le nombre AB est telle partie
 du nombre CF que de CD: iceux nombres GF,
 CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en
 ostant donc le nombre commun CF, les demeurans
 GC & FD seront egaux: & partant le reste EB se-
 ra telle partie du reste FD, que de GC: c'est à dire
 que le tout AB du tout CD puisque EB a esté po-
 sé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hy-
 pothese est la mesme que AB de CD. Si donc vn
 nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce
 qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

*Commandin a demonstéré aussi en cest endroit le theoreme
 suivant.*

Si vn nombre est autant multiplie d'un autre
 nombre que le retranché du retranché; aussi le reste
 sera autant multiplie du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiplie
 du nombre CD, que le retranché AE $A \dots 6 E \dots 4 B$
 du retranché CF: Je dis aussi que le reste $C \dots 3 F \dots 2 D$

EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puisque AB, AE sont equemultiplice de CD, CF, par le contraire le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce qui estoit proposé à démonstrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché: aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: le dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puisque GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront egaux: parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de

FD, que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 7. P R O P. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart ; aussi en permutant le premier fera telle partie, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soit A telle partie de BC, que D A...3
est de EF. Je dis qu'en permutant, B...3 G...3 C
A sera telle partie, ou contiendra D....4
telles parties de D, que BC de EF, E....4 H....4 F
pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF,
chacun au sien; car ainsi se doit entendre ceste prop.

Qu'ainsi ne soit: d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF ; BC contiendra autant de parties egales à A que EF d'egales à D: soit donc diuisé le nombre BC en parties BG, GC egales à A ; & le nombre EF en parties EH, HF egales à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. proposition de ce liure, A est partie de D, ou contient parties d'iceluy, & consequemment tous les autres BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG est egale à GC, & EH à HF ; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. proposit. BG, GC ensemble, c'est à dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF

ensembles, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, que le tiers du quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contiét telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB, C, A...2 G...2 B
DE, & F, desquels AB contienne C.....6
telles parties de C, que DE de F. D.....5 H.....5 E
Je dis qu'en permutant, A 3 sera F.....15
telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyen-
nant que AB & C soient plus petits que DE & F,
chacun au sien, car ceste prop. aussi bien que la pre-
cedente se doit ainsi entendre.

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C; & DE en DH, HE parties de F; AB sera diuisé en autāt de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: Dōc en permutant par la 9. prop. de ce 7. liure, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB ensemble, sçauoir est le premier nombre AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est à dire du troisiēme nombre DE, que AG de DH, c'est à dire que le second nombre C du quart F: Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du se-

cond, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD , $A....4E...2B$
comme le retranché AE est au re- $C.....6F...3D$
tranché CF : ie dis que le reste EB
sera au reste FD , comme le tout AB au tout CD .

Car puis que AB est à CD , comme AE à CF ; AB estant plus petit nombre que CD , il sera telle ou telles parties d'iceluy CD , que AE de CF , & par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD , que le tout du tout: & partant par la 20. def. conuertie le reste EB iera au reste FD , comme le tout AB au tout CD . Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Or combien que nous ayons posé le nombre AB estre plus petit que le nombre CD , si est-ce toutesfois que la demonstration, auroit aussi lieu si AB estoit plus grand que CD . Car ou iceluy nombre CD mesurerait AB , ou il ne le mesurerait pas. Que CD mesuro donc premierement AB ;

*& d'autant que comme AB est à CD , $A.....8E.....6B$
ainsi AE est à CF , par la 20. def. $C....4F...3D$*

AB , AE , seront equemultiples de

CD , CF , c'est à dire que CD sera telle partie de AB , que CF de AE ; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi mesme partie de EB , que le tout CD du tout AB : donc par le contraire AB , EB , seront equemultiples d'icelles CD , FD : & par la 20.

def. conuertie comme le tout AB sera au tout CD , ainsi le reste EB sera au reste FD .

Maintenant que CD ne mesure pas AB : $A.....6E...3B$
 derechef puisque. òme AB est à CD , ainsi $C....4F..2D$
 AE est à CF , telles parties que CD est de
 AB , telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def.
 & par la 7. & 8. prop. le reste FD sera mesmes parties du
 reste EB , que le tout CD du tout AB : dont par la mesme def.
 conuertie le reste EB sera au reste FD , comme le tout AB sera
 au tout CD . Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 10. P R O P. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra
 sont proportionnaux ; comme l'un
 des antecedans sera à l'un des conse-
 quens, ainsi tous les antecedans seront
 à tous les consequens.

Soient tant de nombres $A.....6 \quad C....4 \quad E...2$
 qu'on voudra proportion- $B.....9 \quad D.....6 \quad F...3$
 naux $A, B ; C, D ; E, F$; c'est
 à sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B , que de C à D ,
 & que de E à F . Je dis que tous les antecedans A, C ,
 E , ensemble, seront à tous les consequens B, D, F ,
 ensemble, comme A l'un des antecedans à B l'un
 des consequens.

Car puis que les susdits nombres sont propor-
 tionnaux, & A, C, E , sont moindres que B, D, F ; par
 la 20. def. A sera telles parties de B , que C de D , & E
 de F ; & par la 5. ou 6. prop. de ce mesme liure A & C
 ensemble seront telle, ou telles parties de B & D en-

semble, que A de B, ou E de F. Derechef puis que A, C ensemble comme vn seul, est telle partie, ou parties de B, D, ensemble comme vn seul, que E de F, aus-
 ſepar les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront
 telle ou telles parties de B, D ensēble avec F, que A de
 B : parquoy par la susdite 20. def. conuertie tous les
 antecedans A, C, E ensemble, auront mesme raison
 à tous les consequens B, D, F ensemble, que A à B : Si
 donc il y a tant de nombres qu'on voudra propor-
 tionnaux, comme l'un des antecedans, &c. Ce qu'il
 falloit prouuer.

S C H O L I E.

*Encore que ceste prop. aussi bien que la precedente & sui-
 uante ayent plusieurs cas, si est-ce toutesfois qu'Euclide s'est con-
 senté de les demonſtrer en vn seul, apres lequel il est asſé de
 conclure des autres, comme il est manifeste par ce que nous
 auons demonſtré au Scholie precedent, c'est pourquoy nous ne
 nous arreſterons d'auantage sur ces deux propositions.*

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportion-
 naux : aussi en permutant ils seront
 proportionnaux.

Soient quatre nombres propor-
 tionnaux A, B, C, D, ſçauoir qu'il y ait
 telle raison de A à B, que de C à D:
 Je dis qu'en permutant, il y aura
 telle raison de A à C, que de B à D.

A.....6
 B.....9
 C.....8
 D.....12

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A estant plus petit que B, & C que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. conuertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un costé, & autant d'un autre, qui se prennent deux à deux, & en mesme raison; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soiẽt d'une part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & A.....9 D.....6
 autant d'autre part D, E, F, & B.....6 E....4
 que de deux en deux il y ait telle C...3. F..2
 raison de A à B, que de D à E, &
 de B à C que de E à F. Je dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A sera à D, ainsi B à E: semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en permutant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison

que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonsté) & partant en permutant, comme A sera à C, ainsi D sera à F: ce qu'il falloit prouver.

L E M M E.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstresons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B: parquoy F sera aussi telle ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def. convertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de mesme à une, sont aussi de mesme entr'elles

S C H O L I E.

Ce Lemme respond à la 11. p. 5. Douxot se sert d'icelle 11. p. 5. & d'autres prop. du mesme liure pour appuyer les demonstrations des 7. 8. & 9. liures: mais il est evident qu'Euclide a voulu distinguer le nombre d'avec la grandeur, puis que plusieurs propositions demonstrees és grandeurs au 5. liure, sont derechef demonstrees en nombres és 7. 8. & 9. liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations des prop. de ceux cy sur celles de celui-là.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'un tiers mesure vn

quart ; aussi en permutant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois BC, que D mesure EF : Je dis qu'en permutant BC mesurera EF, comme A mesure D.

A.1
B.1G.1H.1C
D..2
E..2I..2K..2F

Car par l'hypothese BC estant diuisé par l'vnité A, & EF par la partie D, icelle partie D sera autant de fois en EF, comme A en BC, & chacune partie de EF sera egale à D, comme chacune de BC à l'vnité A : donc l'vnité BG est à la partie EI, comme GH à Ik, & HC à KF : & partant par la 12. prop. tous les antecedants BC seront à tous les consequents EF, comme BG à EI, ou leur egaux A à D : Parquoy si l'vnité mesure quelque nombre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produicts seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B ; & que A multipliant B produise C ; & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B sera autant dans C, que l'vnité est en A par la 15. def. de

ce 7. liure, & par la 15. prop. en permutant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois dedans D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. def. & nous auons prouué que A estoit autant en C. que l'vnité en B : donc A est autant en C qu'en D; & partant par la com. sent. C & D seront egaux entr'eux : Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

<i>Vnité.</i>	
A...3	B....4
C....	12
D.....	12

THEOR. 15. PROP XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E : le dis que les deux produicts D & E sont entr'eux, comme B à C.

<i>Vnité.</i>	
A...2	
B...3	C....4
D.....	6
E.....	8

Car par la 15. def. B multiplié par A est autant de fois dans son produict D, que l'vnité est en A; & C dans son produict E, comme la mesme vnité en A : par consequent il y aura telle raison tant de B à D, que de C à E, comme de l'vnité à A. Parquoy par le Lemme de la 14. p. 7. B sera à D, comme C à E; & en permutant par la 13. p. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E: donc vn nombre multipliant deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les
produicts seront entr'eux, en mesme
raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, A...3 B....4
multiplians C; & soient les deux C..2
produicts D & E. Je dis qu'i- D.....6 E.....8
ceux D & E seront l'un à l'autre
comme A est à B.

Car puisque A multipliant C produict D, aussi C multipliant A produira le mesme D par la 16. prop. & par la mesme raison, puisque B multipliant C produict E, aussi C multipliant B produira le mesme E: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produicts D, E, seront l'un à l'autre comme A est à B par la prop. preced. Parquoy deux nombres en multipliant vn autre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

S C H O L I E.

Clavius a accommodé (apres Campanus) tant ceste prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra; en ceste sorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produicts seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou estant multiplié par iceux, soient produicts les nombres E, F, G. Je
dis

dis que E, F, G, sont en- A...3
 tr'eux comme les nom- B..2 C...3 D...4
 bres multipliez ou mul- E.....6 F.....9 G.....12
 tiplians B, C, D ; c'est à
 dire que comme B est à C, ainsi B à F ; & comme C à D, ainsi
 F à G. Car puis que E, F sont produicts de A multipliant B,
 C ; ou de B, C, multipliez par A, comme B sera à C. ainsi E
 sera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F,
 G, sont produicts de A en C, D, ou de C, D par A, aussi com-
 me C sera à D, ainsi F sera à G, & ainsi des autres. Appere
 donc ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportion-
 naux , le produict du premier &
 quart, sera egal au produict du se-
 cond & tiers Et si le produict du pre-
 mier & quart, est egal au produict
 du second & tiers , iceux quatre
 nombres sont proportionnaux.

Soient quatre nombres pro- A.....6 B....4
 portionnaux A, B, C, D, & que le C...3 D..2
 premier A multiplié par le der- E.....12
 nier D produise E, & le second F.....12
 B par le tiers C produise F. le G.....18
 dis que E & F sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A par C, & le pro-
 duict soit G : d'autant que A multiplié par C & D,
 produict G & E, il y aura telle raison de G à E, que
 de C à D, par la prop. preced. Pareillement d'au-

tant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G estant à E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la 14. prop. comme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres egaux, ainsi que nous auons dit en la 20. def.

Pour la seconde partie; soit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié C: Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produict de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront mesme raison à G, comme nous auons dit en la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la precedente prop. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17. prop. & Partant par le lemme de la 14. prop. A sera à B, comme C à D: Si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. xx.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produict des extrêmes est egal au produict du milieu: & si le produict des extrêmes est egal à celuy du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Ceste proposition est aisée à demonstrier: car en posant le nombre du milieu deux fois, afin qu'il :

est 4 nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient egaux; par la precedente le produit du premier & quart, sera egal au produit du second & tiers, c'est à dire au produit du second par soy même, &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison avec iceux, mesurent également les nombres qui ont la même raison, sçavoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

Soient deux nombres les plus A...3 B....4
petits en leur raison A & B, & C.....6D.....8
deux autres nombres plus grands
C & D en même raison qu'iceux A & B: Je dis que
de même façon que A mesure C, aussi B mesure D.

Car puisque iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, ils le seront aussi en permutant par la 13. prop. A sera donc à C comme B à D; & A, & B plus petits que C & D, & par la 10. def. ils seront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent estre parties: car il est evident qu'ils ne seroient les plus petits nombres de leur raison; ce qui est contre l'hypothese. Donc A est même partie de C, que B de D: & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D: Parquoy les plus petits nombres de tous ceux

qui ont vne meſme raiſon , &c. Ce qu'il falloir de-
monſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un coſté, & au-
tant d'un autre, leſquels pris de deux
en deux ſoient en meſme raiſon, la
proportion eſtant troublée, en rai-
ſon egale, ils ſeront proportionnaux.

Solent trois nombres d'un A....4 D.....12
coſté A, B, C, & trois d'un au- B...3 E.....8
tre D, E, F, & qu'en propor- C..2 F.....6
tion troublée A ſoit à B, com-
me E à F, & B à C comme D à E : Je diſ qu'en rai-
ſon egale A ſera à C, comme D à F.

Car A eſtant à B, comme E à F, le produit de A
multiplié par F, ſera egal au produit de B multi-
plié par E, par la 19. prop. Item B eſtant à C, comme
D à E; le meſme produit de B multiplié par E, ſera
egal au produit de C multiplié par D, par la meſme
prop. & partant le produit de A par F, ſera egal au
produit de C par D, & par la ſuſdite 19. prop. il y
aura telle raiſon de A à C, comme de D à F : Parquoy
ſil y a trois nombres d'un coſté, & autant d'un au-
tre, &c. Ce qu'il falloir prouver.

SCHOLIE.

*D'autant que de ſix moyens d'argumenter eſ proportions,
leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 3.*

livre, il en demontre en celuy-cy seulement deux en nombres; il ne sera hors de propos de demonstrier aussi en nombres les 4. autres moyens, comme ont fait plusieurs Interpretes.

I.

Si quatre nombres sont proportionnaux; par raison inuerse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Je dis qu'en $A.....6.C...3$ changeant comme B à A, ainsi D à C. Car $B....4 D...2$ puis que comme A à B, ainsi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A sera à C, ainsi B à D. Derechef puis que B est à D comme A à C, par la mesme prop. B sera à A comme D à C. Ce qui estoit proposé.

II.

Si les nombres composez sont proportionnaux; iceux diuisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à EF. Je dis $A.....6C...3B$ qu'aussi en diuisant, comme AC à CB, $D....4 F...2E$ ainsi DF à FE. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le retranché CB au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB est au tout DE, ainsi le reste AC sera au reste DF: c'est à dire AC à DF, comme CB à FE: donc en permutant: comme AC sera à CB, ainsi DF sera à FE. Ce qui estoit proposé.

Par la mesme maniere nous demonstrerons comme au Livre 5. la diuision conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB, ainsi DE à FE; Je dis que, par diuision conuerse de raison, comme CB à AC, ainsi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE; en diuisant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE: & en changeant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF.

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE .
 Je dis par disjuction contraire de raison, que comme AC est
 à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB ,
 ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC ,
 ainsi DE à DF . Donc en disjunctant comme CB à AC , ainsi
 FE à DF : & en changeant comme AC sera à CB , ainsi
 DF à FE . Ce qui estoit proposé.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionnaux : iceux
 composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je $A.....6B...3C$
 dis qu'en composant comme AC est à BC , $D....4E..2F$
 ainsi DF à EF . Car puis que comme AB
 à BC , ainsi DE à EF , en permutant par la 13. prop. comme AB
 à DE , ainsi BC à EF : & partant par la 12. prop. comme AB
 $B C$, ensemble à DE , $E F$ ensemble, c'est dire la toute AC à la
 toute DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop.
 comme AC à BC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous demonstrierons icy comme au 5. liure
 la composition conuerse & contraire de raison. Car soit pre-
 mierement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par compo-
 sition conuerse de raison, que comme AC est à AB , ainsi DF à
 DE . Car ven que AB est à BC , comme DE à EF : en changeant
 comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant comme
 AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit de cief AB à BC , comme DE à EF . Je
 dis que par composition contraire de raison, comme AB est
 à AC , ainsi DE à DF : car puisque comme AB à BC , ainsi
 DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à
 DE . Donc en composant comme AC à AB , ainsi DF à DE , &
 en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF .

IIII.

Si les nombres composez sont proportionnaux ; ils

le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB à CB , ainsi DE à FE . $A.....6C...3B$
 Je dis que par conuersion de raison, com- $D....4F..2E$
 me AB est à AC , ainsi DE à DF . Car puis
 que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13.
 prop. comme le tout AB sera au tout DE , ainsi le retranché
 CB sera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme
 le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC au reste DF . Donc
 en permutant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Ce qui
 estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXI II.

Les nombres premiers entr'eux, sont les
 plus petits de tous ceux qui ont la
 mesme raison avec iceux.

Soient deux nombres pre- $A.....6B.....5$
 miers entr'eux A & B . Je dis $C.... D... E..$
 qu'ils sont les plus petits de
 tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la
 mesme raison, s'il est possible, par la 21. prop. ils me-
 sureront A & B , l'un comme l'autre: qu'ils les me-
 surent donc par le nombre E . Donc E sera commu-
 ne mesure des nombres A & E : ainsi ils ne seroient
 point premiers entr'eux, mais composez contre
 l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous
 ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les
 nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit
 prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Lès plus petits nombres de tous ceux
qui ont vne mesme raison, sont pre-
miers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus A.....6 D...
petits de tous ceux qui ont la mesme C..
raison : Je dis qu'ils sont premiers B.....5 E..
entr'eux.

Autrement ; ils ne sont premiers, que C les me-
sure tous deux si il est possible, sçavoir A autant
de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois
qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A
par les vnitez qui sont en D, & B par les vnitez qui
sont en E, C multipliant D & E, produira A & B par
la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura me-
me raison de A à B que de D à E : & partant puis que
D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres ;
ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de
tous ceux qui ont la mesme raison : ce qui est con-
tre nostre hypothese : A & B sont donc nombres
premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres
de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouver,

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entre-
eux, celuy qui en mesurera l'un sera
premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A.....6 B.....5
entr'eux A & B, l'un ou l'autre C...3 D..

desquels, sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Ven donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent, D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quel que nombre mesure B, on prouvera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

Soient deux nombres A & B,
tous deux premiers à C ; & que A...2 B...3 C.....5
A multiplié par B produise D. Je D.....6 E...2 F...3
dis que D est premier à C.

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux; E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente ; & par la 23. proposi. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & par-

tant ils mesureront également F & B , qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera F , & E mesurera B par la 21. prop. Mais il mesure aussi C : B & C ne seroient donc pas premiers, ce qui est absurde, & contre l'hypothese. D sera donc premier à C . Partant si deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un d'eux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers $A...3$ $B...4$
 A & B , & que l'un ou l'autre d'i- $C...9$ $D...3$
 ceux sçavoir est A , multiplié par soy produise C . Le
 que B & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D , égal à A ; B sera aussi premier à D . Ainsi A & D estans premiers à B , par la 26. p. 7. A multiplié par D , c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au mesme B . Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres, (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produit de A multiplié par B, C...2 B....4
 & F produit de C multiplié par D: le dis que E, & F sont premiers entr'eux.
 E.....8 F.....15

Car A & B estans premiers à C, leur produit E sera aussi premier au même C par la 26. prop. Par le même discours E sera aussi premier à D; ainsi C. & D estans premiers à E, leur produit F sera aussi premier à E par la même 26. prop. Si donc deux nombres sont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chacun par soy, leurs produits seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produits sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencement, les produits sont encores premiers entr'eux; & toujours enuiron les extremes aduendra la même chose.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par soy même produise C, mais B multiplié aussi par soy produise D. Je dis que C & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F.

le dis que E & F seront premiers entr'eux.

A...2

B...3

C....4

D.....9

E.....8

F.....27

G 16

H 81.

Car par la 27. prop. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier à B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté démontré que C est aussi premier à D: parquoy l'un & l'autre nombre A, C, sera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produict de A en C, sera premier à F, produict de B par D.

Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par la mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre; & partant par la 28. prop. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 28. PROP. xxx.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble, le produict sera premier à chacun d'eux: & si le produict est premier à quelqu'un d'i-

ceux deux nombres , ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB & BC : Je dis que le composé des deux AC , sera premier à chacun d'iceux AB, BC .

Car si AC , AB ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible: si donc D mesure le tout AC , & la partie AB ; il mesurera aussi le reste BC , par la 12. com. sent. ainsi AB & BC ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Parquoy AC sera premier à AB : on démontrera par la mesme maniere que AC est aussi premier à BC .

Secondement, si le tout AC est premier à AB ou à BC . Je dis que iceux AB & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC , par la 10. com. sent. Ainsi AC ne seroit premier à AB , & BC , ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres premiers entr'eux sont adiouttez ensemble, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il s'ensuit de cecy, que si vn nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB ; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste prop. Donc aussi AC sera premiere à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé,

THEOR. 29. PROP. xxxi.

Tout nombre premier, est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne mesure le nombre B: le dis que $A \dots, B \dots$ & A & B sont premiers entr'eux. C....

Car s'ils ne le sont, ils aurōt vne commune mesure autre que l'vnité; laquelle soit C, s'il est possible. Or C ne peut estre egal à A puis que nous auons posé que A ne mesure pas B: & par ainsi A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne seroit premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers entr'eux: donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 30. PROP. xxxii.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produict, il mesurera aussi l'un d'iceux deux nombres posez au commencement.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication desquels soit produict C, & que D nombre premier mesure iceluy C. le dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

Autrement, s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il me-

sure C par le nombre E : Si A...4 B.....6
 donc D ne mesure A, par la C.....24
 prop. preced. il sera premier D...3 E.....8
 à iceluy, & par la 13. prop. ils seront les plus petits de
 leur raison. Mais pour-autant que D par E fait C,
 aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A se-
 ra à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesure-
 ront également E & B, c'est à dire que A mesurera
 E; & D mesurera B. En la mesme maniere sera de-
 monstré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A.
 Si donc deux nombres se multiplient l'un l'autre,
 &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par
quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il A.....8
sera mesuré par quelque nōbre premier. B....4

Car puis qu'il est composé, il sera me- C..2
 suré de quelque nombre par la 13. deff. & soit de B,
 lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop.
 est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par
 un autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou
 non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure
 A, aussi C mesurera A par la 11. com sent. Mais si C
 est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et
 pource qu'un nombre ne se diminue infiniment,
 nous viendrons finab'ement à quelque nombre que
 nul autre ne mesurera; & partant à un nombre pre-
 mier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera
 aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé
 est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il
 falloit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Je dis qu'il - A.....5
celuy est ou nombre premier, ou que A.....6
quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la précédente prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

PROB. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouver les plus petits de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de
nombres qu'on voudra A, A.....6 B....4 C.....8
B.C : & il faut trouver les D..2
plus petits en la mesme E...3 F..2 G....4
raison. H.. I.. K... L..

Lesdicts nombres A, B,
C sont ou nombres premiers, ou nombres composés : s'il sont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composés, soit trouué D plus grande commune mesure d'iceux

ceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est evident qu'iceux E, F, G sont és mesmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C, par la 9. com. sent. & par ce que nous auons demonstré à la 18. prop. E, F, G, auront la mesme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K les plus petits nombres ayans mesme proportion qu'iceux A, B, C: ils les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L; ce qu'estant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veudonc que D multipliant E, fait A; & L multipliant H, fait le mesme A; par la 19. pro. il y aura telle raison de D à L, que de H à E: mais H est moindre que E: donc D sera aussi moindre que L: Et puis que H, I, K mesurent A, B, C, par L; L mesurera aussi iceux A, B, C, par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C: ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en mesme raison, que les proposez A, B, C. Parquoy estans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R L L O I R E.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

Par ces choses appele le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A , B , C , continuellement proportionnaux, nous trouuerons les deux moindres en la mesme raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B , c'est à sçauoir ces nombres-là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B , mesure iceux. Car par le corol. cy-dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C .

PROBL. 4. PRO. xxxvi.

Trouuer le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & $A...3$ $B....4$
 B : il faut trouuer le plus petit nom- $C.....12$
 bre mesuré par iceux. $D.....$

Si le plus petit nombre des deux $E... F..$
 donnez mesure le plus grand, iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons: que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non; si premiers, soit C produit de A , multiplié par B . le disque C est le plus petit nombre mesuré par A , & par B . Car par la 7. comm. 1ent. il est euident que C sera mesuré par l'un & par l'autre,

& s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B, en soit vn autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la neuuesme commune sentence, & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous auons monstté que A mesuroit F: donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C estoit donc le moindre nombre que A & B peuuent mesurer.

Soient maintenant les A....4 B.....6
deux nombres A & B com- C..2 D...3 E.....12
posez, & par la preced. prop. soient trouuez C & D
les plus petits nombres de la mesme raison, tellem-
ment que ces 4. nombres A, B, C, D, soient propor-
tionnaux: Quoy posé par la 19. prop. le produit de
A multiplié par D, sera egal au produit de B multi-
plié par C: iceluy produit soit E. Donc E sera mesuré
par B, & par A: & par le mesme discours de la pre-
cedente demonstration, on monstrera qu'il est le
plus petit nombre mesuré par A, & par B. Nous
auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce
qu'il falloit faire.

THEOR. 33. PROP. xxxvii.

Si deux nombres mesurent vn autre
nombre ; le plus petit qu'ils me-

furent , mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B, qui en mesurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

A...2 B...3

C..... F D

E.....6

Autrement , si E ne mesure CD ; apres avoir mesuré CF, qu'il laisse FD plus petit que soy, s'il est possible : A & B mesurans E , ils mesureront aussi CF par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E , ce qui est impossible , estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD : Si donc deux nombres mesurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. xxxviii.

Trouuer le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez

A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

B...2 B...3 C.....6

D.....6

Soit trouué D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B , par la 36. prop. Or C mesure aussi D , cuil ne le mesurera pas : s'il le mesure ; Je dis qu'il est auu le plus petit qu'iceux A, B, C , peuvent mesurer : car

E....

s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petit E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A, B, C.

Que si D n'est aussi mesuré par A...2 B...3 C...4
C: par la même 36. proposi. soit D.....6
trouvé E plus petit nombre me- E.....12
suré par C & D: le dis que E sera F.....
le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement E est mesuré par A, B, C: d'autant que C & D, le mesurent; & A & B mesurant D, par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible: A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la preced. prop. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C le mesurent.) donc C & D mesureront F. Et par la même prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand vn plus petit; ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuuent mesurer: Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cery est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cest autre. Car il a esté demonsté que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le même nombre F.

S C H O L I E .

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4 nombres sont donnez, il faudra trouver le moindre que trois mesurent: si 5, il faudra trouver le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

T H E O R. 34. P R O P. xxxix.

Si vn nombre mesure vn autre nombre;
le mesuré aura vne partie denommée
par le mesurant.

Vnité.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. le dis que iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il ya d'vnitez en C; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A; & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommée par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. deff. de ce 7. liure: donc aussi C sera vne partie de B denommée par A. Si donc vn nombre mesure vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 35. P R O P. xl.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle

soit, le nombre nommant ceste partie
le mesure ra.

Soit le nombre A, ayant la partie B A.....12
denommee par le nombre C. Je dis B...3 C....4
que C mesure A.

Car puis que B est partie denommée par C; &
l'unité est partie de C, denommée par le mesme C;
comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A: & par
la 15. prop. en permutant comme l'unité mesurera B,
ainsi C mesurera A. Parquoy si vn nombre a quel-
conque partie, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les
parties donnees.

Soient les parties données A, A deuxiesme D..2
B, C; il faut trouuer le plus petit B tiers E...3
nombre qui ait icelles parties. C quart. F....4

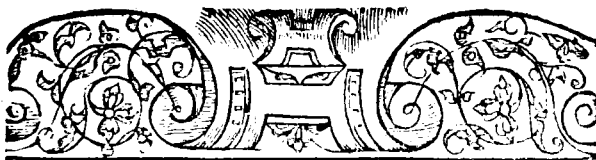
Soient pris les trois nombres, G.....12
D, E, F, denomez par icelles H.....
parties A, B, C; & par la 38. prop. soit trouué G, le
plus petit nombre que peuvent mesurer D, E, F: le
dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G, par la 39. prop. G
aura les parties denommées par D, E, F, c'est à dire
les parties A, B, C. Je dis aussi que G est le plus petit
nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit
H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties.
Et H sera mesuré par les nombres D, E, F denom-

mées par les parties E, B, C, par la precedente prop. & partant puis que H est moindre que G; iceluy nombre G ne sera le plus petit que peuuent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. G est donc le moindre nombre, ayant les parties donnees A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties donnees: Ce qu'il falloit faire.

Fin du septiesme Element.





ELEMENT

HVICTIESME.

THEOR. I. PROP. I.

Si tant de nombres qu'on voudra sont
continuellement proportionnaux, &
les extrêmes sont premiers entr'eux;
ils seront les plus petits de leur raison.



SOIENT trois nom- A....4 D...
bres continuele- B.....6 E....
ment proportion- C.....9 F.....
naux A, B, C; &

que les extrêmes A & C, soient pre-
miers entr'eux: le dis que A, B, C, sont
les plus petits qui soient en la mesme raison.

Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la
mesme raison, s'il est possible. Donc en raison egale,
D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & parce
que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus
petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7.
ils mesureront D & F: ce qui est impossible, pour
estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les

plus petits en la mēme raison. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

P R O B. I. P R O P. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en vne raison donnée.

Soient les deux nombre A
& B les plus petits de tous
ceux qui ont mēme raison:
il faut trouuer le requis.

Que A multiplié par ſoy
produiſe C; A par B pro-
duiſe D; & B par ſoy produi-
ſe E : le diſpremierement

que C, D, E, ſont continuellement proportionnaux
en la raison de A à B. Car puis que A multipliant A
& B a produiſt C & D; comme A ſera à B, ainſi C à
D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A
& B, produiſt D & E, comme A ſera à B, ainſi D
ſera à E: Parquoy C, D, E, ſeront continuellement
proportionnaux en la raison de A à B. Je diſ auſſi
qu'ils ſont les plus petits d'icelle raison donnée. Car
d'autant que par la 24. p. 7. A & B ſont premiers,
auſſi par la 29. p. 7. C & E ſeront premiers: & par la
precedente prop. C, D, E, ſeront les plus petits en la
raison donnée de A à B.

Que ſi on en vouloit quatre. Que A multiplié par
C produiſe F; A par D produiſe G; B par D produiſe
H; & B par E produiſe I: Je diſ que F, G, H, I ſont

F 8.
C 4.
G 12.
D 6.
H 18.
E 9.
I 27.

les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. ces nombres seront continuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux : & par la precedente F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la mesme raison qu'iceux extrêmes F & I. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra. Nous auons donc trouué les nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estans les plus petits de leur raison ; les extrêmes seront quarréz : s'il y en a quatre, qu'iceux extrêmes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrêmes C & E, ont esté produicts de A & B multipliez par eux mesmes, & des 4. F, G, H, I, les extrêmes F & I ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarréz C & E.

Il resulte encore que les extrêmes des nombres continuellement proportionnaux trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstté par les 24. & 29. p. 7. que les extrêmes C, E ; & F, I sont premiers entr'eux.

T H E O R. 2. P R O P. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison : les extrêmes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D : Je dis que les extrêmes A & D sont premiers entr'eux.

Car soient trouvez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G: ils seront premiers entr'eux, par la 23. p. 7. & comme il a esté enseigné en la preced. soient trouvez des nombres

A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premietement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O; & ainsi consecutiuellement vn plus, iusques à ce que on en ayt autant qu'il y en aura de propotez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extrêmes L & O sont premiers entr'eux, par le corol. de la preced. les extrêmes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

P R O B. 2. P R O P. IIII.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les petits continuellement proportionnaux selon les raisons données.

Soient données les deux raisons
de A à B, & de C à D, aux plus
petits termes d'icelles : il faut
trouver trois nombres en con-
tinuelle proportion, les plus pe-
tits de ceux qui sont selon les
raisons données.

Soit trouvé F le plus petit
nombre qui soit mesuré par B,
& par C, par la 36. p. 7. en apres soit trouvé G, au-
tant de fois mesuré par A, que F par B. Pareille-
ment H autant de fois mesuré par D que F par C.
Je dis que les trois nombres G, F, H sont les nom-
bres requis.

Car il est evident qu'ils sont continuellement
proportionnaux en la raison donnée; d'autant que
A mesure autant de fois G, que B mesure F; & par
consequent A & B multiplians vn mesme nombre
(sçavoir celuy par lequel ils mesurent G & F) ont
produit G & F: par la 8. p. 7. G est à F, en mesme
raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H,
comme C à D.

On prouvera aussi qu'ils sont les plus petits, selon
les raisons données: d'autant que s'il n'est ainsi, en
soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possi-
ble, & qui respondent aux raisons données comme
les trois G, F, H: il est evident que B & C doiuent
mesurer M, à cause des semblables raisons, par
la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré
par B & par C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sça-
voir est, le plus grand, le plus petit: ce qui est im-
possible. Partant G, F, H, estoient les plus petits se-
lon les raisons données.

Que si trois raisons estoient données aux plus

petits termes A à B ; C à

D, & F à G, selon les- A 2.

quelles il fallut trouver

quatre nombres tels B 3.

querequiert la propo- H 12. N 24.

sition : on procedera en C 4.

ceste sorte.

K 15. O 30.

Soiēt trouuez les trois D 5.

nombres I, H, K, com- F 6.

L. P 35.

me dessus : ce faict ou F G 7.

mesurera k, ou non. S'il

le mesuroit, faudroit prendre L autant de fois mesu-

ré par G, que K par F: & par la precedente demon-

stration, il est euident qu'on auroit satisfait. Que si

F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre

mesuré par F, & par K, par la 36.p.7. Et que G mesu-

re autant de fois P, que F mesure O. Item que com-

me K mesure O, ainsi H mesure N; & I mesure M.

Je dis que M, N, O, P sont les quatre nōbres requis.

Car puisque I, H, K mesurent egaleement M, N, O,

cōme dit est cy dessus, I sera à H ainsi que M à N, &

comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme

raison de I à H que de A à B, & de H à k que de C à

D, pource que A & B mesurent egalemēt iceux I &

H; & C, D, egaleement H & k. Donc comme A à B,

ainsi M à N, & cōme C à D, ainsi N à O : aussi com-

me F à G ainsi O à P, à cause que F, G mesurent ega-

lement O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont

donc continuellement proportionnaux és raisons

donnes. Et qu'ils soient les plus petits, on le demon-

strera en la mesme façon qu'on a faict cy dessus de

trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé si 4. ou d'a-
uantage de raisons sont données aux plus petits ter-

mes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

T H E O R. 3. P R O P. v.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en la raison composée de leurs costez.

Soient les deux nombres plans A & B; les costez de A, soient C & D; & les costez de B, soient E & F. Je dis que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

C 3.

A 12.

D 4.

G 8.

E 2.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en même raison que C à E, par la 17. p. 7. Et par même discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en même raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composée de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composée de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'un à l'autre en raison composée de celles de leurs costez. Ce qu'il falloit prouver.

B 18.

F 9.

T H E O R. 4. P R O P. vi.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &

que le premier ne mesure le second,
ny aussi pas vn autre ne mesurera pas
vn autre.

Soient tant de nombres A 8. B 12. C 18. D 27.
que l'on voudra conti- E 4. F 6. G 9.
nuellement proportion-
naux A, B, C, D; & que le premier A, ne mesure
point le second B. Je dis que pas vn autre n'en me-
surera pas vn autre.

Car premierement, comme A ne mesure point
B, ainsi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'au-
tant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit
dire qu'en passant quelqu'un, les extrêmes se pour-
roient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C,
soient trouuez trois nombres E, F, G, les plus petits
en la raison de A, B, C par la 37. p. 7. ainsi A estant à
B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G: en
raison egale A sera à C cōme E à G, par la 14. p. 7. &
puis que par l'hypothese, A ne mesure point B, aussi
E ne mesurera point F; & partāt E ne sera pas l'vnité,
autrement il mesurerait F, veu que l'vnité mesure
tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce
liure E & G sont nombres premiers, & que E n'est
pas l'vnité; iceluy E ne mesurera pas G: Mais nous
auons demonstré que comme A est à C, ainsi E est
à G. Donc comme E ne mesure point G, aussi A ne
mesurera point C. Par le mesme discours on prou-
uera de tous les autres. S'il y a donc tant de nom-
bres qu'on voudra continuellement proportion-
naux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres quel'on voudra
continuellement proportionnaux,
& que le premier mesure le dernier,
il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres A 3. B 9. C 12. D 24
qu'on voudra continuelle-
ment proportionnaux A, B, C, D; & que le premier
A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi
le second B.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi
pas vn autre ne mesurerait pas vn autre, & par con-
sequent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothe-
se. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de
nombres qu'on voudra continuellement propor-
tionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quel-
ques nombres moyens proportion-
naux, il en tombera autant entre
deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, A 3. C 9. D 27. B 81.
entre lesquels tombent C G 1. H 3. I 9. k 27.
& D continuellement pro- E 2. L 6. M 18. F 54.
portionnaux: & qu'il y ait
telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre

Bb

E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, k, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B. Donc en raison egale comme A sera à B, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront egaleement E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, k, mesurent egaleement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstté à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est egale à la multitude A, C, D, B, il tombera autât de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E .

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a esté demonstté, que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle des

nombres G, H, I, K : Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B , donc aussi E, L, M, F , sont en mesme proportion que A, C, D, B .

Il appert aussi de ce theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tōber vn nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouuée entre le binaire & l'vnité; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la seule vnité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre 2. nombres differens seulement de l'vnité. ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement vn nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'vnité: lequel nous demonstrerons ne pouoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD , differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'vnité, mais plus grand que CD , aussi de l'vnité. Je dis que

$A.....G$	B	$A..G.B$
$E.....H$	F	$E.H.F$
$C.....D$		$C.D$

EF , n'est moyen prop. entre AB, CD . Car si on dit que comme AB à EF , ainsi EF à CD : estant osté de AB , le nombre AG egal à EF , afin qu'il reste l'vnité GB ; & de FF , le nombre EH egal à CD , afin qu'il reste aussi l'vnité HF ; pareillement comme $A B$ sera à EF , ainsi le retranché AG sera au retranché EH . Donc aussi le reste GB sera au reste HF ; c'est à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout $A B$

au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui est absurde; donc EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi vn entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raison triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui est impossible, comme nous venons de demonstrier.

Par mesme raison, ne peut aussi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomberoit vn, il en tomberoit aussi vn (par ce theor) entre 5 & 1, les petits nombres de la raison quintuple: ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C, tombe vn moyen prop. binaire, ou ternaire D, tellement que AB soit à D, comme D à A.....B.B
C: en changeant C sera à D cōme D à AB. Et D...D...
pource que l'unité C mesure D, aussi D mesurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire AE: donc D mesurera le tout AE, & le retranché AB; & partant par la 11. com. sens. aussi D mesurera le reste unité BE. Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduendra tousiours, si on dit qu'un nombre quaternaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'unité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entre-eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'unité.

Soient deux
 nombres pre- A 8 . C 12. D 18. B 27.
 miers entre- *l'vnité.*
 eux A & B, en- E 2. F 3.
 tre lesquels G 4 H 6. I 9.
 tombét quel- K 8. L 12. M 18. N 27.
 ques nombres

continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petit nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. soient trouuez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I: puis les quatre k, L, M, N; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrêmes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. p. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs egaux en multitude k, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la construction. Donc k, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme k à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la demonstration de la 2. p. 8) E multipliant soy-mesme a produict G; & multipliant G a faict k, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy k par le mesme E: mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E. Donc l'vnité mesurera egallement E; & E iceluy G; & G iceluy k: & partant l'vnité sera mesme partié de E, que E de G, & G de k. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G, k, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouuez con-

B b iij

tinuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'vnité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre k ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. x.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportion-

A 8. I 12. K 18. B 27.

E 4. H 6. G 9.

D 2. F 3.

C 1.

naux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Je dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionnaux entre A & B

Car si on vient à multiplier comme en la 2. p. 8. pour trouuer les trois nombres, H, I, K, c'est à sçauoir que H soit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puisque comme C à D, ainsi D à E, & E à A; & que par la 5. com. sent. C vnité mesure D, par les

vnitez qui sont en D; aussi D mesurera E, par les vnitez qui sont en D; & E mesurera A, par les mesmes vnitez de D; ainsi il est euident que D multiplié par soy-mesme produict E, & E multiplié par D, a produict A. Par mesme discours se prouuera que F multiplié par soy-mesme, a produict G, & que G par F à produict B.

Maintenant puis que D multiplié par soy-mesme, & par F à produict E & H, par la 17. p. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par soy-mesme, a produict H & G; aussi H sera à G comme D à F: Parquoy les trois nombres E, H, G, seront en continuelle proportion. D'auantage D multipliant E & H, produict A & I; partant comme E sera à H, ainsi A sera à I: & puis que D & F multiplient H, & produisent I & K: I sera à K, comme D à F. Par mesme discours k sera à B à la mesme raison, estans les produicts de H & G multipliez par F, le tout par les 17. & 18. p. 7. Il est donc euident que A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux, & que partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'est à sçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 9. P R O P. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel: & le quarré est au quarré en raison doublée du costé au costé.

Soient deux nombres
 quarez A & B, desquels A4. E6. B9.
 les costez soient c & d. le C2. D3.
 dis qu'être iceux quarez
 A & B, tombera vn moyen proportionnel: & que le
 quarré A est au quarré B en la raison doublee du co-
 sté C au costé D.

Car puis que C est le costé de A; C multiplié par
 soy-mesme produira A: pareillement D par soy-
 mesme produira B. Maintenant soit trouué E, pro-
 duit de C multiplié par D. Et par la 17. prop. 7. com-
 me C à D, ainsi A à E, & E à B. Partant E est moyen
 proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie: il est euident que le quar-
 ré A, est au quarré B, en raison doublee du costé C
 au costé D. Car A, E, B estans continuellement pro-
 portionnaux, A est à B en raison doublee de A à E
 par la 10. deff. 5. qui est la mesme raison que de C à
 D, ainsi qu'il à esté demonsté cy-dessus. Parquoy
 entre deux nombres quarez tombe vn moyen pro-
 portionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent
 deux moyens proportionnaux: & le
 cube est au cube en raison triplee du
 costé au costé.

Soient deux nom- A27. H36. I48. B64.
 bres cubes A & B, E9. G12. F16.
 desquels les costez C3. D4.

soient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du costé C au costé D.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme produise E ; D par soy produise F ; mais C & D l'un par l'autre produise G ; & iceluy G multiplié par l'un & l'autre C & D, produise H & I. Or puis que A, & B sont cubes, ils seront les produits de C multiplié par E, & de D multiplié par F : il est donc evident que la construction est semblable à celle de la 2. prop. 8. & par la demonstration de la mesme, A, H, I, B seront continuellement proportionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I, seront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la seconde partie ; il est manifeste que le cube A est au cube B, en raison triplée du costé C au costé D. Car A, H, I, B estans continuellement proportionnaux, A est à B en raison triplée de A à H par la 10. deff. 5. Mais comme A est à H, ainsi C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison triplée du costé C au costé D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux ; iceux estans multipliez chacun par soy, leurs produits seront aussi continuellement proportionnaux : & si

chacun multiplie encores son produit, les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux: & cela aduiendra tousiours environ les extremes.

Soiēt
trois
nom-
A1. B4. C8.
D4. N8. E16. O32 F64.
G8. P16. Q32. H64. R128. S256. I512.
bres continuellement proportionnaux A, B, C : Et qu'iceux se multiplians chacun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chacun son produict facent G, H, I, & ainsi continuellement. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi; que N soit le produict de A multiplié par B; & O, de B par C: Pareillement que P soit le produit de A par N; Q, de A par E; R, de B par O; S, de B par F: par la 17. propolit. 7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B: & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E seront aussi en la mesme raison, & ainsi des autres: Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B: ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en vne mesme raison; & en en raison egale comme D sera à E, ainsi E à F: parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q: par ce que nous auons demonsté

à la 18. prop. 7. G, P, Q , seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E , c'est à dire comme A à B . Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H , & par la 18. prop. 7. comme aussi A sera à B , ainsi Q à H . Donc G, P, Q, H , sont proportionnaux en la raison de A à B . Par mesme discours H, R, S, I , seront prouués proportionnaux en la mesme raison de A à B : & partant en raison egale comme G sera à H , ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui $A\ 4.$ $E\ 12.$ $B\ 36.$ mesure le nombre quarré B ; & $C\ 2.$ $D\ 6.$ d'iceux quarrés les costez soient C , & D . Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D .

Car ayant multiplié C par D , il est euident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen proport. entre A & B , en la raison de C à D : mais le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E . Parquoy puis que comme A à E , ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D . Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D , aussi le quarré A mesurera le quarré B . Car comme dessus A ,

E & B feront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puis que C mesure D , aussi A mesurera E ; & E mesurera B , & par consequent A mesurera aussi B , parce que qui mesure le mesureur , mesure aussi le mesuré , par la 11. com. sent. Parquoy si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré , &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit vn nombre cube A , qui mesure vn autre nombre cube B , & d'iceux cubes les costez soient C & D. Je dis que le costé C mesurera aussi le costé D : Pareillement que si le costé C mesure le costé D , aussi le cube A mesurera le cube B.

Car puis que par la 12. p. 8. entre deux cubes tombés deux moyens proportionnaux H , I , & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé , c'est à dire que le costé C est au costé D , comme l'un des cubes A est à son prochain moyen proportionnel H , lequel il mesurera par la 7. prop. 8. & par consequent le costé C mesurera aussi le costé D. Pour la seconde partie , si le costé C mesure le costé D , aussi le cube A mesurera son prochain moyen prop. H ,

lequel mesurera l'autre moyen prop. I, & iceluy l'autre cube B ; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B, par la 11. com. sent. repetée. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera pas le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarez A & B, desquels les costés sont C & D, mais
 que A ne mesure pas B : le dis premierement que le costé C ne mesurera pas le costé D.

A 16. B 81.

C 4. D 9.

Car par la 14. prop. de celiure, si ledict costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B contre l'hypothese. Pour la seconde partie, que le costé C ne mesure pas le costé D : le dis que le quarré A ne mesurera pas le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre nostre hypothese. Si donc vn nombre quarré ne mesurera pas vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn

nombre cube, aussi le costé ne mesurera pas le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera pas le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les costez sont C & D, & que A A 8. B 27 ne mesure pas B: le dis que le costé C C 2. D 3 ne mesure pas aussi le costé D: & d'avan-
 tantage que si le costé C ne mesure pas le costé D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Ceste demonstration se fait par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesurerait le cube contre l'hypothese. Et pour le second: Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesurerait le costé, par la susdicte 15. p. 8. aussi contre l'hypothese. Parquoy si vn nombre cube ne mesure pas vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plan en raison doublee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres plans A 12. G 18. B 27. semblables A & B, & leurs co- C 6. D 2. E 9. F 3. stez soient C, D, & E, F. le dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn moyen proportionnel; & que A est à B en raison doublee de C à E, costez de mesme raison.

Car puis que les plans A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F; & si A sera le produit de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G; par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produise A & G; A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D, & F, produit G & B; partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F: ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux, en la raison de C à E, & partant G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est euidente: car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux, par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la mesme raison que de C à E, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux; & le solide est au solide en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & C. 2. D 3. E 5. F 4. G 6. H 10. M 60. L 12. K 24. N 120. B 240.

B, desquels les costez soient C, D, E, & F, G, H. Je dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F costez de mesme raison.

Car I soit le produict de C multiplié par D, K le produict de F par G, L le produict de F par D, & M & N produits de L par E & H.

Maintenant puisque par la 21. def. 7. C, D, E, sont l'un à l'autre comme F, G, H: aussi en permutant, ils seront proportionnaux, c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & F, produict I & L, iceux I & L seront l'un à l'autre comme C à F, c'est à dire comme D à G, ou E à H. Par mesme discours F multipliant D & G, produict I & K, iceux seront donc aussi l'un à l'autre comme D à G; & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Parëillement puis que le solide A, est le produict des trois nombres C, D, E; & I, le produict de C par D, aussi A sera le produict de I par E: & par mesme discours B sera le produict de K par H, & par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produict A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est euidente, car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont esté prouuez
conti

continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplee de A à M, c'est à dire comme C à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 18. P R O P. XX.

Si entre deux nombrés, tombe vn moyé
proportionnel: iceux seront nombres
plans semblables.

Soient deux nombres A, & A 12. C 18. B 27. B, entre lesquels tombe C, D 2. E 3. F 6. G 9. moyen proportionnel. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D & E mesureront A & C l'un comme l'autre, par la 11. prop. 7. Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & E mesurent A & C selon le nombre F; & qu'ils mesurent aussi C & B selon le nombre G. Parquoy F multipliant D & E, sera produict A & C, par la 9. com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produicts C & B. Veudonc que E multipliant F & G faict C & B; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. p. 7. Mais comme C est à B, ainsi estoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a faict A, iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pour ce que G multipliant E a faict B; B sera le plan

C c

duquel $\mathbf{E}$ & $\mathbf{G}$ sont les costez. Mais ces costez ont esté demonstrez proportionnaux, c'est à dire $\mathbf{D}$ estre à $\mathbf{F}$, comme $\mathbf{E}$ à $\mathbf{G}$. Donc par la 21. def. 7. $\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$ seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres $\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux $\mathbf{C}$ & $\mathbf{D}$. Je dis qu'ils sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2. prop. 8. les trois nombres $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{A}$ 16. $\mathbf{C}$ 24. $\mathbf{D}$ 36. $\mathbf{B}$ 54. $\mathbf{G}$, les plus petits en la raison de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$. $\mathbf{E}$ 4. $\mathbf{F}$ 6. $\mathbf{G}$ 9. raison de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$. $\mathbf{H}$ 2. $\mathbf{I}$ 2. $\mathbf{M}$ 4. $\mathbf{K}$ 3. $\mathbf{L}$ 3. $\mathbf{N}$ 6. Veu donc qu'en tre $\mathbf{E}$ & $\mathbf{G}$ tombe vn moyen proportionnel $\mathbf{F}$, par la preced. prop. $\mathbf{E}$ & $\mathbf{G}$ seront plans semblables: Soient leurs costez $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$; & $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puis que $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ sont les plus petits en la raison de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, ils les mesureront egalemt par la 21. prop. 7. soit selon le nombre $\mathbf{M}$: c'est à dire que $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, estans multipliez par $\mathbf{M}$ produisent $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$: item par le mesme discours $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, mesureront egalemt les trois nombres $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, chacun le sien: soit selon le

nombre N, c'est à dire que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc evident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H, I, M, & K, L, N. Mais pour autant que M & N multipliant F, produisent C & D, par la 18. p. 7, M sera à N en la raison de C à D, & C est à D en mesme raison que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E & F a produit iceux C & D; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L comme M à N; & en permutant H sera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les costez H, I, M sont proportionnaux aux costez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si entre deux nombres tombent deux moyens continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré; le troisieme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, A 4. B 6. C 9. B, C, desquels le premier A soit quarré: Je dis que le troisieme C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils seront plans semblables; & partant l'un d'iceux estant quarré, aussi sera l'autre. Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres A 8. B 12. C 18. D 27. continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier desquels A soit cube: le dis que le quatrième D est aussi cube.

Car puisque entre A & D tombe deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce liure, iceux A & D seront solides semblables: mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. le dis que B est aussi quarré.

A 16. F 24. B 36.
C 4. E 6. D 9.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, sçauoir est E; il en tombera aussi vn entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux; & le premier A est quatre, aussi par la 22. prop. 8. le troisieme B iera quarré. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Cè qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

Il appert des choses cy-dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré, que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut estre exhibee en deux nombres quarréz: Car si elle y estoit exhibee, par la 24. proposi. 8. les deux premiers nombres ayans la mesme raison que les quarréz de la raison exhibee seroient aussi quarréz, puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car sous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. &c. seroient quarréz; d'autant que 4. estant quarré, par la 24. proposi. 8. aussi 8 seroit quarré: donc aussi 16 & 32. &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8. & entre 8 & 16. & entre 16 & 32, &c. tomberoit vn moyen proportionnel, s'ils estoient quarréz par la 11. prop. 8. & nous auons demonstré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen prop. entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 14. proposi. 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel: donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible, comme nous auons demonstré au Scholie de la 8. prop. 8.

THEOR. 23. PROP. xxv.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Que A soit à B, comme A 8. G 12. H 18. B 27. me le cube C au cube C 64. E 96. F 144. D 216. D, & que A soit cube: Je dis que B est aussi cube.

Car puisque A est à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce livre, lesquels soient E & F: Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatriesme B par la 23. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

C O R O L L A I R E.

Il appert aussi des choses cy dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. xxvi.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nōbres plans sem- A 20. C 30. B 45.
blables A & B. Je dis que A sera D 4. E 6. F 9.
à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyē
prop. & soit C: si donc on prend les trois nombres D,
E, F, les plus petits en la raison cōtinuē de A, C, B, les
extremes D & F seront quarez par le corol. de la 1.
prop. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B,
comme D à F, il est manifeste que A est à B comme
nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir
comme le nombre quarré D au nombre quarré F.
Parquoy les nombres plans semblables sont entre-
eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce
qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Clavius a demonstéré la conuerse de ceste prop. c'est à sçauoir:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme
nōbre quarré à nōbre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quar-
rez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre
iceux quarez, & aussi vn entre A & B, par la 8. prop. 8. &
partant A & B sont plans semblables.

Es par cecy est manifeste que les nombres plans qui nē sont
sembables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre
quarré.

THEOR. 25. PROP. xxvii.

Les nombres solides semblables, sont
l'un à l'autre comme nombre cube à
nombre cube.

Soient deux nombres A 16. C 24. D 36. B 54. solides semblables A , & E 8. F 12. G 18. H 27. B . le dis que A sera à B , comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D . Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C , & qu'en la raison d'iceux on trouve, par la 21. prop. 8. les quatre nombres en continuelle proportion E , F , G , H ; les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 21. propo. 8. & en raison egale comme E à H , ainsi A à B . Parquoy les nombres solides semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

S C H O L I E.

Clavius demonstre aussi la conuerse de ceste proposi. sçavoir est:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B , estans entr'eux, comme les cubes E & H , par la 12. p. 8. Il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H , Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est evident par toutes les choses cy-dessus dites, qu'aucuns nombres ayant raison double, ou superparticuliere, ou superpartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'il estoient plans semblables, par la 28. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté demonsté au Scholste de la 8. prop. 8. Ils ne

seront aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholiste, entre lesquels il certain, que deux nombres moyens prop. ne peuvent tomber.

Samblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuvent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuvent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estans nombre premier, a seulement soy-mesme & l'vnité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les costez sont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy-mesme, & deux vnitez; & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuvent estre proportionnaux.

Parcilleement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarréz, ou cubes, ne peuvent estre plans, ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extrêmes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrêmes n'en ayans point: Parquoy il est euident par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extrêmes seront quarréz, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarréz ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant

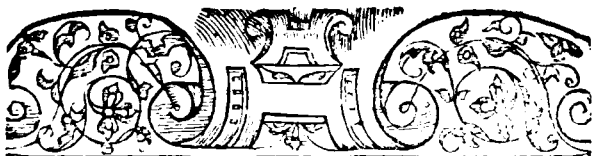
(comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde; car ils on esté possez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy dessus. Ven donc qu'il se mesure aussi soy-mesme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouuer deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbi-partiente; on certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube; il est euident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20, ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils seroient comme quarré à quarré: & 16 estant quarré. par la 24. p. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27. p. 8. ils seroient comme cube à cube; & 27 estant cube par la 25. p. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitiesme Element.



ELEMENT

NEVFIESME.

THEOR. I. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera carré.



SOIENT deux A 4. B 9.
nombres plans D 16. E 24. C 36.
semblables A &
B, lesquels se multiplient mutuelle-
ment, produisent C. Je dis que C
est carré. Car A se multipliant soy-
me produit D carré. Et puisque A multipliant A
& B produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à
C, par la 17. p. 7. Mais A & B estans plans semblables,
il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la
18. p. 8. Il en tombera donc aussi un entre D & C, par
la 8. p. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres con-
tinuellement proportionnaux D, E, C, le premier D
est carré par la construction; le tiers C sera aussi
carré par la 22. p. 8. Parquoy si deux nombres plans

semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'un l'autre produisent vn nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables.

Car que A se multipliant soy-mesme produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrés D & C tombe vn moyen proportionnel ; Il en tombera donc aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplians l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B. Je dis que B est nombre cube.

Car soit C costé du cube A : &c.

A 8.

E 16. D 4.

F 32. C 2.

B 64. Vnié.

de C multiplié en soy, soit produict D; il est manifeste que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a faict D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par C. L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20. d. 7. derechef puisque C multipliant D a faict A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A; (car B a esté faict de A multiplié-en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D; par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4. nombres A. E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriesme sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produict sera cube. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C: Je dis que C est aussi nombre cube. A 8. B 27.
D 64. C 216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B, & soy-mesme, a produit C & D; il y aura telle raison de D à C, que de A à B, par la 17. p. 7. Et par la 12. p. 8. il tombera deux moyēs proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube, par la 23. p. 8. C sera aussi cube. Si donc vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produit sera cube. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube. A 8. B 27.
D 64. C 216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-mesme, comme en la precedente: A sera à B comme D à C, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. A estant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy, si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy-mesme
produict vn nombre cube, iceluy
nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel mul- A 8. B 64. C 512.
tiplié par soy-mesme produise
le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre
cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par
B, il sera cube par la definition du nombre cube; &
par la 5.p. 9. A sera aussi cube. Si donc vn nombre
se multipliant soy-mesme produict vn nombre
cube, iceluy nombre sera aussi cube. Ce qu'il fal-
loit demonst rer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié
par quelque autre, le produict sera
solide.

Soit le nombre composé A, le- A 6. B 5. C 30.
quel estant multiplié par quelque D 2. E 3.
nombre B produise C. Je dis que C
est nombre solide.

Car puisque A est composé, quelqne nombre
outre l'unité le mesurera par la 13.d. 7. Que D mesu-
re donc A par E. Ce qu'estant posé, D multipliant
iceluy E, produira A par la 9.com.sent. Et puis que B

multipliant A a produict C, iceluy C sera Procrée de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B, partant par la 17. d. 7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B. Parquoy vn nombre composé estant multiplié par quelque autre, le produict sera solide. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on vandra continuellement proportionnaux, le troisieme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn: Mais le quatrieme sera cube, & tous les suyans qui en laisseront deux: & le septiesme sera cube & quarré ensemble, & tous les suyans qui en laisseront cinq.

Soiēt *Vnité*. A. B. C. D. E. F. G. H. I.
tant de 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683.
nōbres

qu'on vandra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. le dis que le troisieme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres que le quatrieme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres, comme F & I. Pareillement que le septiesme F est cube & quarré ensemble, comme aussi tous autres qui pourroient suivre en laissant tousiours cinq nombres.

Pour

Pour la premier partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A : partant B troisieme qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D est quarré, aussi F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produict B, & B par A produict C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23. p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube: par mesme raison, estans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F est cube, aussi I sera cube; & ainsi de tous les autres, en laissant deux, si d'auantage y en auoit.

Pour la troisieme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube, il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 9. P R O P. ix.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit

l'vnité soit quarré, aussi tous les autres
seront quarez : que s'il estoit cube,
'aussi les autres seront cubes.

Soient tant de nombres *Vnité*. A. B. C. D.
qu'on voudra cōtinuelle 1. 4. 16. 64. 256.
ment proportionnaux de-
puis l'vnité A, B, C, D. Je dis premierement que si
le premier A est quarré, que tous les autres seront
aussi quarez.

Car il est euident comme en la precedente, que
puis qu'iceux nombres A, B, C, D, sont continuelle-
ment proportionnaux, comme l'vnité mesurera A
par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera aussi B
par les vnitez qui sont en A ; & par consequent B
sera nombre quarré: mais A est aussi quarré par l'hypo-
these; & par la 22. p. 8. C sera aussi quarré : & par
la mesme raison B estant quarré, aussi sera D. Et ainsi
de tous les autres.

Je dis en second lieu que *Vnité* A. B. C. D.
si A est cube, aussi tous les 1. 8. 64. 512. 4096.
autres seront cubes : Car
il est euident que A mesurera B par soy-mesme
comme en la premiere partie: C'est à dire que A
multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B
sera aussi cube par la 3. p. 9. Mais tous les suiuans
sont en la raison de A à B, & par la 23. p. 8. ils seront
tous cubes. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nom-
bres qu'on voudra continuellement proportion-
naux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 10. P R O P. x.
Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres

qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisieme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube; aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatrieme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant	<i>Vnité,</i>	A.	B.	C.	D.	E.	F.
de nombres	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

qu'on voudra

continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Je dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisieme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F sont quarrés: Que si quelqu'un veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on montrera que pas vn autre ne peut estre quarré, sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi

pas vn autre sera cube, sinon C & F, & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8. p. 9. C & F sont cubes: que si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube; il faudroit par la 23. p. 8. que A le soit contre l'hypothese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuvent estre cubes. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit mesure le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient A. B. C. D. E. F.
tant de nombres qu'on 1. 3. 9. 27. 81. 843.
voudra continuellement
proportionnaux B, C, D, E, F. Je dis que le plus petit nombre B mesurera le plus grand F par quelqu'un des nombres C, D, E.

Car d'autant que A, B, C, D, E sont en mesme raison que B, C, D, E, F, en raison egale l'vnité A sera à E, comme B est à F. Et par les def. du 7. comme l'vnité A mesure E par E: ainsi B mesurera F par E. Le mesme peut-on dire des autres. Parquoy si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Il appert par ce que dessus que le plus grand nombre est autant esloigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distant de d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand : & ce d'autant qu'il y doit auoir vne mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera

F par D ; & C me-	Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
surera F par C, c'est	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.
à dire par soy-mes-							

me, &c. Pour ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres : & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

Il appert encor que quelconque de ces nombres, multiplié par soy-mesme en produict vn autre, qui entre les proportionnaux est autant esloigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouiendra sera autant esloigné du grand que le moindre de l'vnité : Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produict celuy-la qui est mesuré par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant esloigné de C qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, sera le mesme F, pour ce que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : Autant de nombres

premiers mesureront le nombre d'après l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux,

A. B. C. D. E. F.

1. 3. 9. 27. 81. 3.

B, C, D, E. Je dis qu'autant de nombres premiers se trouveront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy nombre E, il mesurera aussi B.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront nombres premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D; D & F seront donc aussi premiers par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E; partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E: ce qui est contre l'hypothese; Donc F mesureroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrier,

THEOR. 13. PRO P. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre

nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A 1. B 3. C 9. D 27. E 81.
A soient tant de K 00. I 00. H 00. G 00.
nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nombre G mesure E ; il est manifeste que G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la prop. preced. qu'il mesurast B, qui a esté posé nombre premier : G ne sera donc premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B ; d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il mesurast aussi B nombre premier : ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H : & puis que par les choses dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produist E & G, par la 17. p. 7. comme E sera à G, ainsi D à H : mais G mesure E ; donc aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus qu'il ne peut estre premier ny mesuré par vn autre nombre premier que B : Car si H estoit premier, mesurant D, il mesureroit aussi B : ce qui ne se peut faire, ayant esté posé premier. Que si H est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi D, & celuy qui mesure D, c'est à sçauoir B, par la 11. cō. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H ; & posât que ce soit par le nom-

bie I. On prouuera aussi comme dessus, que cōme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nōbre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre k: par mesmes raisons, comme I mesure C, ainsi k mesurera B nombre premier; il faut donc qu'à tout le moins il luy soit egal; ce qui est impossible; d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par Ioy-mesme. Partant aucun nombre ne mesurera, E sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. p. 9. Parquoy si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 14. PROP. XIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre A. B. C. D. E. F. de tous ceux qui peuuent estre 30. 2. 3. 5. 0. 0. mesurez par les 3. nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, ou C, ou D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F: donc E multiplié par F

produira A, lequel est mesuré par B, C, & D, & par la 32. p. 7. iceux B, C, D, mesureront l'un ou l'autre de E, ou F : Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas un d'iceux, ils mesureront donc F, lequel estant plus petit que A, iceluy A ne seroit le plus petit de ceux qui peuvent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouvoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent estre mesurez, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Nous demonstrerons icy (apres Commandinus & Clavius) en nombres, les 10 premiers theoremes, lesquels sont demonstrez en lignes au second livre.

I.

S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, AB & C, desquels AB est diuisé en AD, DE, EB, & A...D..E.BC.. soit fait F de C en AB : Item GH de C F.....12 en AD, & HI, de C en DE, & IK de G.....H....I..K C en EB : le dis que F est egal aux nombres GH, HI, IK, c'est à dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puisque C multipliant AB, a produit F : AB mesurera F par C, c'est à dire que AB sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison AD sera la partie de GH : & DE de HI : & EB de IK, denommée par C, sçavoir est, la mesme que AB de F. Mais il est enidant par la 5. prop. 7. que AB est la mesme partie de GK, que AD de GH : par-

quoy aussi AB sera mesme partie de GK, que AB de F : & partans par la 4. com. sent. F & GK seront egaux entr'eux. Ce qui estoit proposé,

II.

Si vn nombre est couppé en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuisé en AC, CB.

Je dis que les nombres qui seront produicts du total AB, & des parties AC, CB seront ensemble

A....C..B
D.....

egaux au quarré de AB. Car estant pris le nombre D egal à AB, par le 1. theo. le nombre faict de D ; c'est à dire de AB en AB, sçavoir est le quarré d'iceluy AB, sera egal aux nombres qui seront produicts de D, c'est à dire de AB en AC, & en CB : ce qui estoit proposé.

Le mesme se i'a demonstéré, si AB est couppé en plus de deux parties, comme on peut veoir par la seconde

A...C..D.B

figure icy appostée. Car par la mesme raison,

E.....

le nombre faict de E, c'est à dire de AB en AB, c'est à sçavoir le quarré de AB sera egal aux nombres, qui seront produicts de E, c'est à dire de AB, en chascque partie AC, CD, & DB.

III.

Si vn nombre est couppé en deux parties ; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB.

Je dis que le nombre plan produict de AB en la partie AC, est egal à celuy faict des

A....C.....B
D....

parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D egal à la susdicté partie AC. par le 1. theo. le nombre faict de D, c'est à di-

re de AC en AB ; ou (qui est le mesme) de AB en AC, sera egal aux nombres faits de D, c'est à dire de AC en CB, & de D, c'est à dire de AC en AC, sçavoir est le quarré de A C. Ce qui estoit proposé.

IIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties ; le quarré fait du tout est egal aux deux quarréz faitz des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB. A.....C....B
 Le dis que le nombre quarré fait de AB, est egal aux quarréz des parties AC, CB, avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB. Car par le 2. theo. le nombre quarré de AB, est egal aux nombres faitz de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. theo. le nombre fait de AB en AC, est egal au nombre produit de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC : Item le nombre produit de AB en CB est par mesme raison egal au nombre produit de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré fait de AB, est pareillement egal aux nombres quarréz des parties AC, CB, & a deux fois le nombre fait de AC en CB. Ce qui estoit proposé.

V.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & en deux inegales ; le nombre plan contenu des parties inegales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est egal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties egales AC, CB, & en deux inegales AD, DB. Le dis que le nombre plan compris des parties inegales AD, DB, avec le quarré du nombre CD, est egal au quarré du nombre BC. Car puis que par le theo. preced. le nom- A.....C...D..B
 bre quarré de CB, est egal aux quarréz des parties CD, D

B, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; & par le 3. theor. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble avec la quarré de DB, est egal au nombre produict de CB en DB; sera fait que si ce nombre fait de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD en DB, aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble à l'autre nombre fait de CD en DB, & au nombre produict de CB, c'est à dire de AC en DB: & partant par le 1. theor. le nombre fait du total AD en DB, est egal aux nombres produicts de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

V I.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy est adiousté quelque autre nombre, le nombre qui est fait du tout avec l'adiousté en l'adiousté, avec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB couppe en deux parties egales AC, CB, & à iceluy soit adiousté le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adiousté BD, comme vn seul, scauoir est de AD en l'adiousté BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré fait de la moitié CB & adiousté BD, comme vn seul, c'est à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theor. le quarré de CD est egal aux quarréz des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire aux quarréz des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier theo. le nombre fait de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD, c'est à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD en DB, pour le quarré de la partie BD,

avec les nombres faictz de CB en BD , & de AC en BD , le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CB , ensemble avec le nombre faict de AD en BD : c'est à dire que le nombre faict de AD en BD , avec le quarré de CB , est egal au quarré de CD : ce qui estoit proposé.

VII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, est egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, ensemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB coupé es parties AC, CB . Je dis que le quarré de AB , avec celui de la partie CB , est egal à deux fois le nombre faict de AB en $A.....C....B$ CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC . Car puisque par le 4. theor. le quarré de AB est egal aux quarréz des parties AC, CB , & à deux fois le nombre faict d'icelles AC, CB ; si on adiouste le commun quarré de CB , les quarréz de AB, CB , seront ensemble egaux aux quarréz de AC, CB, CB , avec deux fois le nombre produit de AC en CB : mais par le 3. theor. le nombre faict de AC en CB avec le quarré de CB , est egal au nombre produit de AB en CB ; & partant le double de l'un est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre faict de AC en CB , & quarré de CB , on prend le double du nombre produit de AB en CB , les quarréz des nombres AB, CB seront ensemble egaux à deux fois le nombre de AB en CB , avec le quarré de l'autre partie AC . Ce qui estoit proposé.

VIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB coupé es parties $A....C....B....D$ AC, CB . Je dis que le nombre faict de AB en la partie

CB, ensemble avec le quarré de l'autre partie AC, est égal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB. Car estant adiousté le nombre BD égal à CB, par le 4. theor. le quarré du tout AD est égal aux quarrez des nombres AB, BD, ensemble avec le nombre double de AB en BD, c'est à dire aux quarrez des nombres AB, CB, ensemble avec deux fois le nombre de AB en CB: Mais par le 7. theor. les quarrez de AB, CB, sont égaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, avec le quarré de AC: donc si pour les quarrez de AB, CB, on prend le nombre double de AB en CB, & le quarré de AC; le quarré fait de AD est égal à 4 fois le nombre fait de AB en CB, ensemble avec le quarré de l'autre partie AC: ce qui estoit proposé.

I X.

Si vn nombre est couppé en deux parties égales, & en deux inégales; les quarrez faitz des parties inégales, sont doubles des quarrez faitz de la moitié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB diuisé, és parties égales AC, CB; & és inégales AD, DB. A.....C...D..B
Je dis que les quarrez des parties inégales AD, DB, sont doubles des quarrez de la moitié AC, & du nombre entre-moyen CD. Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre AD est égal aux quarrez des nombres AC, CD, ensemble avec deux fois le nombre fait de AC en CD; si on adiouste le commun quarré de DB, les quarrez des parties AD, DB, seront égaux aux quarrez des parties AC, CD, DB, ensemble avec deux fois le nombre produit de AC en CD, c'est à dire de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, c'est à dire de AC, & CD sont égaux au quarré de DB, & à deux fois le nombre de CB en CD. Donc si pour le quarré de DB, & deux fois le nombre fait de CB en CD; on prend les quarrez de AC, CD, les quar-

rez de AD, DB seront egaux au double des quarrez des parties AC, CD ; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy on adiousté quelque autre nombre; le quarre du nombre composé d'iceux, & le quarre de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB diuisé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy soit A...., C....B...D adiousté le nombre BD. Je dis que le quarre du nombre AD composé du tout AB, & de l'adiousté BD, & le quarre d'iceluy nombre adiousté BD, sont ensemble doubles des quarrez faicts de la moitié AC, & de CD, composé de la moitié CB & de l'adiousté BD. Car puis-que par le 4. theor. le quarre de AD est egal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre produit de AC, c'est à dire de CB en CD; si on adiousté le commun quarre du nombre BD, les quarrez des nombres AD, BD seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, ou AC, & CD sont egaux au quarre de BD, & a deux fois le nombre faict de CB en CD. Donc si pour le quarre de BD, & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD, on prend les quarrez des nombres CB, CD, c'est à dire des nombres AC, CD : les quarrez des nombres AD, BD seront egaux à deux fois les quarrez des nombres AC, CD : & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy : ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Sitrois nombres sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison aveciceux: le composé de deux tels que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportionnaux A, A 9. B 12. C 16. B, C, les plus petits qui soient en la mesme raison : le dis que les deux ensemble A & B sont premiers à C; & B, C ensemble premiers à A; & A, C ensemble à B.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le scholie de la 35. prop. 7. il est evident par ce qui a esté démontré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarrés de D & E, & que B est le produit de D multiplié par E; & par le 3. theo. du scholie precedent D & E, comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B comme vn seul nombre. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi tous deux ensemble, seront premiers au seul E, par la 30. prop. 7. ou à son quarré C, par la 27. prop. 7. Et par la mesme proposition D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit de D & E comme vn seul nombre multiplié par D sera premier à C. Mais nous auons monstré que ce produit est egal au nombre composé de A & B: Donc aussi A & B ensemble seront premiers à C.

En

En apres, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacune d'iceux; par la 26. prop. 7. le produit de D, E comme vn seul nombre multiplié par E sera premier à D . Mais par le susdict theor. iceluy produit est egal à C fait de E en soy, & au nombre B fait de D en E . Donc le nombre composé de ces deux $B \& C$ sera aussi premier à D ; & partant aussi à A par la 27. prop. 7.

Finablement $D \& E$ estans premiers entr'eux par la 24. proposit. 7. & premiers au composé des deux par la 30. propo. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de $D E$ comme vn seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B . Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produit de $D E$ comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à $A \& C \& deux fois B$ ensemble: donc $A \& C$ avec deux fois B , sont premiers à B . Or en ostant les deux fois B ; il est manifeste que le reste $A \& C$ sera premier à B . Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B ; & par consequent aussi le composé de $A \& C \& deux fois B$, qui ne seroit en ce faisant premier à B , contre ce qui a esté demonsté cy-dessus. Donc le composé de $A \& C$ est premier à B . Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entre eux, il ne sera pas comme le premier

au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B . le dis que comme A 3. B 5. C 100. A est à B , ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A & B on ne peut trouver un troisieme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B , ainsi B soit à un autre, c'est à sçavoir à C . Par la 23. prop. 7. A & B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. prop. 7. A mesurera B , & B mesurera C . Mais aussi A mesure soy-mesme; donc A mesure iceux A & B : Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas comme A à B , ainsi B à C . Par mesme raison, il ne sera pas comme B à A , ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 17. PROP. xvii.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C , continuellement proportionnaux,

desquels les extremes A & C soient premiers entr'eux. A 4. B 6. C 9. D 00. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D; & par la 13. prop. 7. A & C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront également B & D; sçavoir est A iceluy B, & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C; & A mesure B, aussi B mesurera C: & par la 11. comm. sent. A mesurera aussi C; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui est absurde. An'est donc pas à B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. I. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on en pourra trouuer vn troisieme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B: Il faut A 4. B 6. D 9. C 36. considerer si à iceux on A 6. B 7. D 00. C 49. peut trouuer vn troisieme nombre proportionnel.

La solution de ceste proposition est aisee. Car il n'y a qu'à considerer si C produict du second
E e ij

nombre B multiplié par soy mesme, peut-estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier A : car s'il peut estre mesuré ou diuisé, comme en la premiere formule, il est euident par la 20. prop. 7. que le quotient sera troisieme nombre proportionnel; sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatriesme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois $A 3. B 6. C 5. E 10. D 30.$ nombres A, B, C ; & il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn quatriesme proportionnel.

La solution de ceste prop. est aussi aisee. Car il faut seulement considerer si D , qui est le produit des second & troisieme nombre $B \& C$ peut estre mesuré par le premier A : s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriesme prop. sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdicte 19. proposit. 7. quatre nombres estans prop. le produict du second & troisieme doit estre egal au produict du premier & quatriesme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres pre-

miers qu'on propose, ils'en trouuera
encores d'autres.

Soit quelconque multitude A...2 B...3 C.....
de nombres premiers A, B, C. D..... E.F
Je dis qu'ils'en trouuera enco- G.....
res d'autres.

Car si on trouue le nombre DE le plus petit de
tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois
nombres A, B, C, par la 38. prop. 7. & à iceluy on ad-
iouste l'vnité EF, le tout DF sera premier ou non:
S'il est premier, on a vn autre nombre premier que
pas vn des proposez: s'il n'est premier, il sera me-
suré par quelque nombre premier, par la 34. propo.
7. Soit donc mesuré par G: il est euident que G ne
peut pas estre vn des trois A, B, C: car s'il estoit
quelqu'un d'iceux, il mesureroit DE, & le tout D
F: Partant par la 12. comm. sent. il mesureroit aus-
si l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Ce qui est ab-
surde. Donc G est autre nombre premier que pas
vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trou-
uer infini autres. Parquoy quelque multitude de
nombres premiers qu'on propose, &c. Ce qu'il fal-
loit demonstrier.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on you-
dra sont adioustez, le tout sera
pair.

Ceste démonstration est aisée: d'autant que par
E c iij

la 6. def. 7. le nombre pair peut estre diuisé en deux parties egales; partant les moictiés de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout: Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la susdicte 6. definition du 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisee: d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. proposit. 9. leur tout sera pair: Et pour-autant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchees feront vn nombre pair, lequel adiousté avec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout sera pair par la susdicte 21. prop. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisee. Car si on

retranche vn nombre impair, tout le reste fera vn nombre pair par la precedente: Et si du restant impair on oste l'vnité; ce qui restera sera pair, lequel adionsté à tout le reste fera vn nombre pair par la 21. prop. 9. Partant il est euident, que si on adionsté l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEOR. 22. PROP. XXI III.

Si d'un nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Ce qui est enident: Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy feroit aussi vn nombre pair par la 21. prop. 9. & partant adionstant l'vnité ostée, le tout seroit impair, ce qui est absurde; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Cela est euident: Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24. prop. 9.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste vn

nombre impair, le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car si le reste estoit impair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 12. proposit. 9. contre l'hypothese.

THOR. 25. PROP. xxvii.

Si d'un nombre impair on oste vn nombre pair, le reste sera impair.

Cecy est aussi aysé à demonstrier: Car si le reste estoit pair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair, par la 21. prop. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 26. PROP. xxviii.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car par les def. du 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au nombre pair multiplié: Et par ainsi le produit fera la somme de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude est en nombre pair, & partant par la 22. prop. 9. le produit sera pair.

SCHOLIE.

On demonstrea en la mesme maniere que si vn nombre pair

multiplie vn nombre pair ; le produict sera aussi pair.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair ; le produict sera impair.

Cela est aussi euident : Car comme en la precedente , le produict sera vne addition de plusieurs nombres impairs , desquels la multitude sera en nombre impair ; & partant par la 23. p. 9. le tout, ou le produict sera impair.

SCHOLIE.

Clavius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suiuaus.

Vn nombre impair mesurant vn nombre pair , il le mesure par vn nombre pair.

A...3 C...2.

B.....6.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Ie dis que C est pair. Car s'il est impair ; B produict de A impair multiplié par C impair , sera impair, par la 29. p. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair, il le mesure par vn nombre impair.

A...3 C.....5

B.....15

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Ie dis que C est impair. Car s'il est pair ; B faict de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contre l'hypothese ; donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair.

A.....15

B.....5 C...3

Soit le nombre impair A , lequel B mesure par C . Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. xxx.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A , qui	$A...3$	$D...4$	$E...2$
mesure le nombre pair B . le	$B.....12$		
dis qu'il mesurera aussi sa moitié C .	$C.....6$		

Car puis que A mesure B , soit par le nombre D ; iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produit seroit aussi impair par la 29. p. 9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiser en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D . Parquoy comme D sera à sa moitié E , ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B , ainsi E sera à C . Mais A mesurant B par D , aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B dénommée par A : donc aussi E sera la partie de C dénommée par le mesme A : & partant A mesurera C , par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair mesure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entre eux, quelque nombre mesurera iceux, & soit D, lequel sera impair, comme nous auons demonstté au Scholie de la 29. p. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair, puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi la moitié B par la prop. precedente. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C, & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc vn nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres *Unité.* A 2. B 4. C 8. D 16. E 32

qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Je dis qu'ils sont tous parement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité, & puisque depuis l'unité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon lequel vn de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. p. 9. lesquels estans tous pairs, il est evident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront parement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la même progression. Mais pour autant que A prochain de l'unité est nombre premier, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la même progression, lesquels estans tous pairs, iceux nombres seront parement pairs seulement. Parquoy tous les nombres qui suivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement parement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair: je dis que A sera parement impair seulement.

Car puisque B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les def. 7. A sera parement impair: Mais qu'il soit seulement parement impair on le prouvera

	A 30.
B 15.	C 2.
D 00.	E 00.

ainſi. S'il eſtoit paremment pair, vn nombre pair comme D le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt faiçt de D en E: mais le meſme A eſt auſſi faiçt de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produiçt de C par B, eſtant egal au produiçt de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E: il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B, qui eſt vn nombre impair: ce qui eſt impoſſible. Donc A eſtoit nombre paremment impair ſeulement. Parquoy ſi la moitié d'un nombre eſt impair, &c. Co qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera paremment pair, & paremment impair.

Ceſte demonſtration eſt aiſée. Car ſa moitié eſtant pair, il ſera meſuré par vn nombre pair ſelon le binaire qui eſt auſſi pair. Et pour-autant qu'il n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diuiſe touſiours en deux egalemant, on viendra à vne moitié impaire auparauant que paruenir iuſques au binaire, & par conſequent il ſera meſuré par vn nombre impair: & par les def. 7. il ſera paremment pair, & paremment impair.

THEOR. 33. PROP. xxxv.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustrait le premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche F G egal au premier A: Et du dernier D l'on retranche KL aussi egal à A: le dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois A, B, C ensemble.

A.....8
B....4 F.....8 G
C.....18
D 9. H 6. I 4. k 8. L

Car si de DL on retranche L I egal à B G, il est evident que KI sera egal à B F, (estant KL egal à F G) & si on retranche L H egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs egaux DL, HL, IL, KL: & en divisant DH sera à HL, comme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est à dire DK) seront à tous les consequens HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, C,) comme l'un des antecedans Ik, est à l'un des consequens K L, ou leurs egaux B F à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, iusques à ce que le tout composé soit nombre premier : iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfait.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit E nombre premier. Je dis que si E est multiplié par le dernier D, que le produit FG sera nombre parfait.

Car si on prend H I double de E ; K double de H I : & L double de K, ainsi des autres ; E, H I, K, L, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D ; & en raison egale A sera à D comme E à L, & par la 19. p. 7. A multiplié par L, sera le produit de D par E, sçauoir FG : mais A estant binaire, FG sera double de L ; ainsi E, H I, K L, FG, seront continuellement proportionnaux : Maintenant de H I soit retranché H M egal à E ; & de FG soit retranché F N, aussi egal à E : par la 35. proposition 9. comme H M est egal à E (d'autant que

Vnité.

A..2

B....4

C.....8

D.....16

E 31.

H 31. M 31. I

K 124.

L 248.

F 31. N 465. G

O 990. P 990.

H I estoit double de E) ainsi NG sera egal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité, & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera egal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que FG a esté faict de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG; & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9, mesurent D, mesureront le mesme FG. Derechef puis que L mesure FG; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double; mesureront le mesme FG: ainsi l'vnité & tous les nombres, A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG. Parquoy si FG ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. il sera nombre parfait estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Que si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits; que D le mesure s'il est possible, selon P: donc D multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produit de E en D. Donc vn mesme nombre est faict de E premier par D 4, & de P second en O 3; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D: & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier par la 31. p. 7. E & P seront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raison par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C
mesure

mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le mesme que B : & d'autant que B, C, D, & E, H I, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produit de B par K, sera egal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est egal à iceluy de P en O. Donc vn mesme nombre sera fait de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P sera à B, ainsi k à O. Mais P estoit le mesme que B : Donc aussi k sera le mesme que O. Ce qui est absurde, car O a esté posé autre que tous ceux cy A, B, C, D, E, H I, k, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, H I, k, L, qui mesurent F G. Iceluy est donc nombre parfait. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

Fin du neuuesme Element.



E L E M E N T

D I X I E S M E.

D E F I N I T I O N S.

1 **C** O M M E N S V R A B L E S grandeurs, sont celles mesurées par vne mesme mesure.

2 I n c o m m e n s u r a b l e s grandeurs, sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diametre & le costé de quelque carré; car icelles n'ont nulle commune mesure, comme sera demonstré à la dernière prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçavoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquées en ce liure; & enseigné par quelles manieres elles peuuent estre trouuées: derechef, les superficies sont dictes incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3 Les lignes droictes commensurables par puissance, sont celles desquelles les

quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Les lignes droictes sont considerées ou selon leur longueur ou selon leur puissance; & en l'une & l'autre sorte elles sont dites cōmensurables & incommens. Aux deux premieres des. Euclide a expliqué qu'elles sont les lignes cōmens. & incommens. considerées selon leurs longitudes, mais en ceste cy, & en la suiuante, il declare qu'elles sont celles dites commens. & incōmens. en puissance. Il dit donc icy que les lignes droites dōs les quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie sont commensurables en puissance: comme par exemple, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds sera dite cōmensurable en puissance à vne autre ligne de 6 pieds, parce que leurs quarrez 9 & 36 peuuent estre mesurés par vne mesme superficie: Ainsi aussi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre $\sqrt{8}$ seront dictes cōmensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par vn mesme espace superficiel: de rechef vne ligne estant $\sqrt{20}$, & vne autre $\sqrt{12}$ seront pareillement dictes commensurables en puissance, pource que leurs quarrez $\sqrt{20}$ & $\sqrt{12}$ sont mesurez par vne mesme superficie $\sqrt{5}$; car elle est deux fois en $\sqrt{20}$, & 5 fois en $\sqrt{12}$.

4 Lignes droictes incōmensurables en puissance, sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Comme par exemple, vne ligne estant de 2 pieds, & vne autre $\sqrt{6}$, icelles deux lignes seront dictes incommens. en puissance, pource qu'il n'y a aucune superficie qui mesure leurs quarrez 4 & $\sqrt{6}$: de mesme $\sqrt{8}$ & $\sqrt{12}$ seront aussi dictes incommensurables en puissance, car nul espace superficiel ne mesure leurs quarrez 8 & $\sqrt{12}$.

Il faut icy noter que toutes lignes (ou nombres) incommensurables en puissance, le sont aussi en longueur, mais non pas au contraire. Ainsi vne ligne de 2 pieds sera bien incommensurable en longueur à vne autre ligne de $\sqrt{8}$. mais non pas en puissance : & 2 qui est incommensurable en puissance à $\sqrt{8}$, l'est aussi en longueur.

5 Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposée, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longueur & puissâce, les autres en puissâce seulemēt. Or vne ligne droicte proposée, est appellée rationelle.

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneüe & déterminée, icelle est appellée rationelle, pource que c'est selon elle que nous raisonnons : & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poserons tousiours d'un de ces nombres absolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

Dounot a estimé que ceste definition ne deuoit auoir lieu; & parant l'a reiectée. Ce que i estime qu'il n'a deub faire, ven qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationelle mentionnée en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationelle, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, sont appellées rationelles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationelle, sont irrationelles.

Si comparant quelque ligne droicte, à la ligne prise pour

rationnelle, & sur laquelle nous ratiocinons, elle est trouuée commensurable à icelle rationnelle, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, telle ligne est aussi dictée rationnelle par Euclide; mais si elle est incommens. à icelle ligne rationnelle proposée, tant en longueur qu'en puissance, ceste dictée ligne est appelée rationnelle par nostre auctor.

8 Le quarré décrit sur vne ligne rationnelle, est appelée rationnel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognüe & déterminée de certaine quantité est dite rationnelle; ainsi aussi le quarré décrit sur icelle ligne, est appelé rationnel, pource qu'iceluy est certain & cognu: & les superficies comparées à iceluy quarré, sont aussi dictées rationnelles, ou bien irrationnelles, selon qu'elles seront trouuées commens. ou incommens. à iceluy quarré rationnel, ainsi qu'il est dit es deux des. suivantes.

9 Les figures commensurables au quarré rationnel, sont aussi rationnelles.

10 Et celles qui sont incommensurables au quarré rationnel, sont irrationnelles & fourdes.

11 Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationnelles, sont irrationnelles & fourdes.

Or vne ligne est dictée pouuoir vne figure, quand le quarré décrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racine ou de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurab. en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarréz d'icelles lignes, peuuent estre mezurez par vne mesme superficie.

Or à ces definitions nous adiousterons (apres Clavius) vne demande, & quelques communes sentences, dont l'usage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excède quelconque grandeur de mesme genre.

COMMUNES SENTENCES.

- 1 Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra , mesure aussi la composée d'icelles.
- 2 Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillement toute grandeur que celle-là mesure.
- 3 Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostée, mesure aussi le reste.

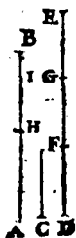
THEOR. I. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du resi-

du plus de la moitié, & en continuant
toufiours ainfi : Il demeurera à la fin
vne grandeur plus petite que la
moindre des deux propofées.

Soient propofées deux grandeurs in-
gales AB & C, eftant C la plus petite : Je
dis que fi on retranche plus de la moitié
de AB, & du refidu encores plus de la
moitié, & en continuant toufiours ainfi,
on trouuera à la fin vn refidu plus petit
que C.

Qu'il ne foit ainfi. Soit la grandeur C
multipliée tant fois qu'elle excède la plus
grande AB, & foit la produite d'icelle multiplication
DE, laquelle fera multipliee de C, & plus grande
que AB : qu'elle foit donc diuifée en parties egales à
C, comme en DF, FG, GE : Item foit ofté de AB
plus de la moitié, fçauoir AH, & du refidu HB plus
de la moitié, fçauoir HI, & en continuant touf-
iours cecy iufques à ce que AB foit diuifée en au-
tant de parties que DE, fçauoir AH, HI, & IB,
comme DE eft diuifée en DF, FG, GE. Pour autant
que DE eft plus grande que AB, & que le retran-
ché DF n'eft pas plus grand que la moitié de DE,
comme le retranché AH, eft plus grand que la moi-
tié de AB, le refte FE fera plus grand que le refte
HB : femblablement fi du plus grand refidu FE, on
oste FG, qui n'eft pas plus que la moitié, & du
plus petit refidu HB on oste plus de la moitié
HI; le refte IB fera plus petit que le refte GE
egal à C : & par confequent IB dernière partie de



A B, sera plus petit que C. Estans donc proposées deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonst. er.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposées on retranche tousiours alternativement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure la grandeur precedente ; telles grandeurs sont incommensurables.

Soient proposées deux grandeurs inegales AB & CD ; si on retranche continuellement & alternativement la plus petite de la plus grande, & que le residu ne mesure jamais la grãeur precedente, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure jamais le plus grand residu ; le dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables : Partant aussi qu'elles aient vne commune mesure, soit donc icelle E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande CD soit retranchée CF egale à AB : Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement, iusques à ce que le reste DE soit plus petit que AB. Donc E commune mesure, mesurera la toute CD & la retranchée CF, egale à AB, ou multiplie d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste DE par la 3. com. sent. Item doit re-



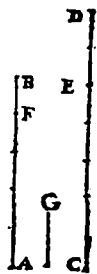
tranchee DF de AB tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par consequent la multiplie AG, par la 4. comm. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. comm. sent. ce qui est absurde. Parrant AB & CD n'auoient point de commune mesure; & par consequent sont incommensurables. Parquoy si de deux grandeurs inegales propoposées, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. I. / PROP. III.

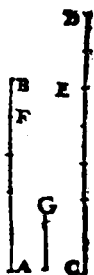
Estans donnees deux grandeurs commensurables, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point: si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranche la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. le dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.

Car puis qu'elle mesure AB, elle



mesurera aussi CE son egale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie quelle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G, (s'il est possible) donc par les comm. sent. G mesurera AB, CD, & le retranché CE egal à AB, & par consequent le reste ED, qui est plus petit; ce qui est impossible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD: Partant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc données deux grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

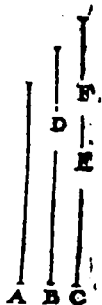
De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande

commune mesure. Soit trouuee D plus grande commune mesure entre A & B par la 3. prop. 10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que A, B, C sont commensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le coroll. de la 3. prop. 10. mais ceste mesme mesure-là mesurera aussi C: donc D & C, seront commens. Soit donc trouuee par la sus-



dicte 3. prop. 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C: donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdict coroll. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: & partant E est la plus grande commune mesure

d'icelles. Parquoy estans données trois grandeurs commensurables. nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

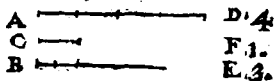
Par cecy est euident que si une grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si F mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans données plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure; & ce mesme corollaire aura aussi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Je dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.



Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C : donc C mesurera A selon quelque nombre, comme selon D : il mesurera aussi B selon quelque autre nombre, comme selon E : ainsi puis que C est autant de fois en A, comme l'unité F est en D, & C en B, comme

En E; les grandeurs A, C, B, seront l'une à l'autre comme les nombres D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. prop. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonst rer.

T H E O R. 4. P R O P. VI.

Si deux grandeurs sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B qui soient l'une à l'autre comme le nombre C est au nombre D:

E	—	F 1.
A	—————	C. 4.
B	—————	D. 3.

Je dis qu'elles seront commensurables.

Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'une d'icelles parties soit egale à E: donc E est à A, ainsi que l'vnité F est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D; donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F mesure D; donc aussi E mesure B mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B; & partant par la premiere deff. de ce liure A & B sont commensurables. Parquoy si deux grandeurs sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

C O R O L L A I R E.

Par ce y est euident qu'estans proposez deux nombres com-

me C & D, & vne ligne droicte comme A qu'il sera aisé de trouver vne autre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C; & on prend vne ligne droicte B, contemant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez au nombre D: alors A sera à B, comme le nombre C au nombre D, ainsi qu'il est manifeste parce qu'il a esté demonsté.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & vne ligne droicte,) trouver vne autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouver vne ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre D; Il faudra trouver ainsi que dessus la ligne B, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D; puis soit trouuee par la 13. p. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B; & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommensurables, ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommensurables A & B; Je dis qu'elles ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Ce qui est manifeste: car si elles estoient entre-elles comme nombre à nombre, elles seroient com-

mesurables par la 6. prop. 10. ce qui est contre l'hypothese, ayans esté posées incommensurables. Parquoy les grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si deux grâdeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Que les grandeurs A & B ne soient entr'elles comme nombre à nombre: $A \text{ —————}$
 $B \text{ —————}$

Je dis qu'elles sont incommensurables.

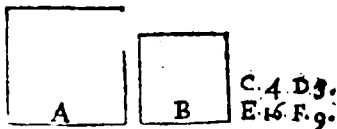
Ce qui est evident: car si elles estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui est contre nostre hypothese, puis qu'elles ont esté posées n'estre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez qui sont entr'eux comme nōbre quarré à nombre quarré, ont les costez cōmensurables en lōgitude. Mais les quarez descrits sur lignes incommensurables en

longitude, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarez n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.

Soient les lignes A & B commensurables en longitude: Je dis que leurs quarez sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.



Car puis que les lignes A & B sont commensurables en longitude, elles seront entr'elles cōme nombre à nombre, par la 5. proposi. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D; & les quarez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F : C'est à sçavoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F : Je dis que les lignes A & B seront commensurables en longitude. Car par la 20. prop. 6. & 11. prop. 8. la raison des quarez aux quarez, est la raison doublee de leurs costez; & partant comme le
costé

costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doubles sont égales. Donc par la 6. prop. 10. A & B sont commensurables en longueur.

Pour la troisieme partie, soient les lignes droites A & B incommensurables en longueur. Je dis que leurs quarrés ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrés de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longueur contre l'hypothese.

Finablement les quarrés de A & B n'estans entre-eux comme nombre quarré à nombre quarré. Je dis qu'elles sont incommensurables en longueur. Car autrement leurs quarrés seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothese. Parquoy les quarrés décrits sur lignes commensurables en longueur, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par les choses cy dessus demonstrees, que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas tousiours en longueur. Que les incommensurables en longueur, ne le sont pas pourtant en puissance: Et qu'icelles incommens. en puissance, le sont aussi en longueur.

Car d'autant que les quarrés d'icelles lignes commens. en longueur sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre: icieux quarrés seront commensurables par la 6. prop. 10. Et par-là les lignes commensurables en longueur le sont aussi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains seulement comme nombre à nombre, sont commensf. en puissance (car leurs quarrez sont commensurables par la 6. pr. 10.) & non en longitude comme il a esté démontré: il appert que les lignes commensurables en puissance ne le sont pas pourtant en longitude, sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Devochepuis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommensf. en longit. & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommensurables en longitude ne le sont pas tousiours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommensf. en puissance; veu que leurs quarrez sont incommensf. par la 8. prop. 10.

Finablement est manifeste que les lignes incommensf. en puissance, le sont aussi en longitude: car si elles estoient commensf. en long. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corol. ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Il est à noter qu'es deux premieres parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longitude; comme si les quarrez de A & B estoient 12 & 3, leurs costez seroient $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, qui sont inexplicables par nombres, toutesfois commensf. Car par la 10. prop. 6. 12 seroit à 3 en raison doublee de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$. Mais 12 est quadruple de 3: Ainsi le costé A sera double du costé B . par la 10. def. 5. Car la double raison doublee est quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & la premiere est commensurable à la seconde, la troisieme sera aussi commensurable à la quatrieme. Què si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisieme sera aussi incommensurable à la quatrieme.

Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: si A est commensurable à B, je dis que C sera aussi commensurable à D.

Car A estant commensurable à B, ils seront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D; Partant C est à D, comme nombre à nombre; & par consequent commensurable par la 6. proposition. 10.

Que si A estoit incommensurable à B. Je dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre; & par consequent incommensurable par la 8. proposition. 10. Si donc quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonst.



L E M M E.

Trouuer deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

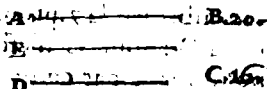
Soit pris quelconque nombre quarré A , & vn autre B non quarré. Je dis qu'ils eux A 16. B 20. nombres A & B sont plans dissemblables.

Car s'ils estoient, plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. prop. 8. & partant A étant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. prop. 8. contre l'hypothese: Donc A, B , ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

P R O B L. 3. P R O P. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationelle proposee, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.

Soit la ligne rationelle proposee A , à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables, l'une seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.



Soient trouuez par le lemme precedent deux nom-

bres B, & C, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Item par le coroll. de la 6. prop. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurab. en puissance seulement: la ligne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuee la ligne E moyëne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee: car puis que par le corol. de la 20. proposit. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A à D, & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté demonstré: le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E, par la 10. proposit. 10. Parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le corol. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Soit A 5. donc la ligne D sera $\sqrt{20}$, laquelle il appert estre incommensurable en longitude à A, mais commensurable en puissance. Mais E étant moyenne prop. entre A 5, & D $\sqrt{20}$, sera $\sqrt{500}$, qui est incommens. tant en longit. que puissance à A 5.

Dounot ayant delassé le lemme precedent, se sert neantmoins d'iceluy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C. Je dis qu'elles sont commensurables entr'elles.

Car puisque A & C sont commens. icelles seroient comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nombre E. Derechef puis que C & B sont com-



D, 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I, 4. K, 6.

mens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G : tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I ; & C à B, comme I à K, par raison egale A sera à B, comme H à K. c'est à dire, comme nombre à nombre : & partant A & B sont commens. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles. Ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'une est commensurable à une troisieme, mais l'autre incommens. icelles grandeurs seront incommens. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, des- A ———
quelles A soit commens. à C; & B in- C ———
commens. à la mesme C. Je dis que A B ———
& B sont incommens. entr'elles. Car si B estoit commens. à A, lequel A est posé aussi commens. à C, par la 12. prop. 10. B & C seroient commens. contre l'hypothese. Donc A & B ne sont commens. Parquoy si de deux grandeurs, l'une est commensurable à une troisieme, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à une tierce, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commensurables A & B, & que A soit incommensurable à la tierce C: Je dis que B & C sont aussi incommensurables.

Autrement, si B est commensurable à C, il sera aussi commensurable à A, par la



12. prop. 10. contre nostre hypothese : donc B est incommensurable à C : Parquoy si de deux grandeurs commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceste prop. le theoreme suivant, vñ le au choses demonstrees en celuy.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommensurables, auxquelles C & D soient commensurables, sçavoir est C à A, & D à B. Je dis que C & D sont incommensurables entr'elles. Car puis que A & C sont posées commensurables, & A incommensurable à B, l'autre C sera aussi incommensurable à B par la 14. prop. 10. De rechef, puis que D & B sont posées commensurables, & B a esté demonstree incommensurable à C; D sera aussi incommensurable à la mesme C par la 14. prop. 10. Ce qui estoit proposé.

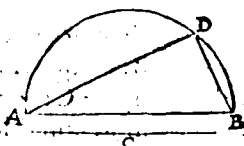


LEMM E.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droictes AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne

C. Soit descript sur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy soit accommodee AD egale à C, par la 1. prop. 4. & soit



mente DB . Je dis que AB peut plus que C du quarré de BD . Car d'autant quel'angle D est au demy cercle, il est droit par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB sera egal aux quarréz de AD , BD : & partant AB pourra plus que AD , c'est à dire que C , du quarré de BD . Ce qui estoit proposé.

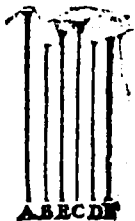
Semblablement estans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient données les deux lignes droictes AD , BD : & il faut trouuer vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posées icelles AD , BD à angle droit D , & tiré AB . Il est euident qu'icelles AB peut AD & BD ; puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB , est egal aux quarréz de AD , BD .

THEOR. 12. PROP. xv.

Si quatre lignes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longueur.

Soient 4. lignes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E, & C plus que D du quarré de F. Je dis que comme A sera commensurable ou incommens. à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F.



Car puis que A, B, C, D, sont proportionnelles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est égal aux quarrés de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrés de D, F: donc aussi les quarrés de B, E, seront au quarré de B, comme les quarrés de D, F, au quarré de D: & en diuisant comme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F à la ligne D; & en changeant comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F, par raison egale comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parpuoy si quatre lignes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grâdeurs commensurables sont iointes, la composée sera commensurable à chacune de ses parties; Et si la composée est commensurable à

vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles.

Soient iointes deux grandeurs commens.



AB & BC : Je dis que la composée AC, est commensurable à AB, & à BC parties d'icelle.

Car puis que AB & BC sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant AB & BC, mesurera aussi la toute AC, par la 1. c. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute AC est commens. à vne de ses parties, comme AB : Je dis qu'icelles parties AB, BC seront commensurables entr'elles. Car si AC & AB, sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste par la 3. comm. sent. Partant le retranché & le reste seront commensurables, d'autant qu'ils ont vne commune mesure. Parquoy si deux grandeurs commensurables sont iointes ensemble, la composée, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que si vne grandeur composée de deux, est commensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC. Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commensurables : donc par la premiere partie AC sera commensurable à chasques partie, AB, BC.

SCHOLIE.

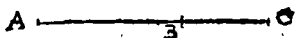
Soit AB γ 18, & BC γ 8, lesquelles sont commens. La

composée AC sera $\sqrt{10}$, laquelle est commens. tant à $\sqrt{18}$, que à $\sqrt{8}$. Car $\sqrt{50}$ est à $\sqrt{18}$, comme 5 à 3; & à $\sqrt{8}$, comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conjoint deux grandeurs incommensurables, la composée sera incommensurable à chacune de ses parties : Et si la composée est incommensurable à l'une de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.

Soient conjointes
deux grandeurs in-



commens. AB & BC : Je dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.

Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à BC : car la commune mesure qui mesurerait AC & le retranché AB, mesurerait aussi le reste BC, par la 3. com. sent. Et partant AB & BC seroient commens. (ce qui est contre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuivra le même inconuenient si on nie que AC, BC soient incommensurables.

Pour la secōde partie: Je dis que si AC & BC, sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurable : La toute AC, seroit aussi commensurable à la partie BC par la 16. p. 10. contre nostre hypothese. Donc AB & BC sont incommens. Par mesme argument

nous démonstrerons que si AC & AB sont incommensurables, que AB & BC sont aussi incommensurables. Parquoy si on conjoint deux grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L A I R E.

Il résulte de ces choses, que si une grandeur composée de deux, est incommensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC composée de AB & BC est incommensurable à AB , elle le sera aussi à BC . Car si AC estoit commensurable à icelle BC , elle le seroit aussi à AB , par le corollaire de la précédente prop. ce qui est contre l'hypothèse. Donc AC & BC ne sont commensurables, mais incommensurables.

S C H O L I E.

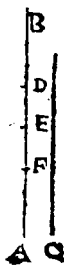
Soit AB 8, & BC $\sqrt{28}$, lesquelles sont incommensurables. La composée AC sera $8 + \sqrt{28}$ incommensurable à chacune d'icelles AB 8, BC $\sqrt{28}$.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on applique un rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties commensurables en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la

plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée; le rectangle diuifera icelle plus grande ligne en parties commensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. sur la plus grande AB soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé. Et soit iceluy rectangle contenu de AD & DB. Je dis que si AD & DB sont commensurables en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude.



Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AB couppée en deux également en E, & soit faicte EF egale à ED: Il est euident que AF sera egale à DB, puis que les toutes AE, EB sont egales, & aussi les retranchées EF, ED. Maintenant puis que AB est couppée en deux également en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB avec le quarré de

ED, seront egaux au quarré de BE, lequel n'estant par l'hypothese que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, sont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD, & DB est le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du seul de FD egal à iceux, par le Scholie de la 4. p. 2. puisque FD est double de ED. Il faut donc demonstter que AB & FD sont commensurables en longueur: Pource que AD & DB estant posées commens. en longueur, la toute AB sera aussi commens. en longueur à sa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à son egale AF, & à routes les deux ioinctes en vne: & par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 16. p. 10. Donc la ligne droite AB peut plus que C, du quarré de FD qui luy est commensurable en longueur.

Pour la seconde partie, sans rien changer à la construction: si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur. Je dis que AD & DB seront aussi commens. en longueur. Car il sera demonstté ainsi que dessus que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a esté posée pouvoir plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: & partant AB sera commens. en longueur à icelle FD. Et puis que AB composée de FD, AF, & DB comme d'une, est commens. en longueur à la partie FD; la mesme AB sera aussi commens. en longueur à l'autre partie composée de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle composée de AF, DB, est aussi commens. en long. à DB, puis qu'elle est double d'icelle: donc puis que chacune di-

celles AB, DB est commensurable en longir. à la composée de AF, DB; aussi AB, DB seront commensurables entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB composée de AD, DB est commensurable en longitude à icelle DB, aussi icelles AD, DB seront commensurables en longitude entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

L'application mentionnée au cōmencement de la demonst. cy dessus se fera bien plus brefuement par le 60. de nos problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

Quant application des nombres soit AB 30, & C 24. donc les segmens AD, & DB, seront 24 & 6, desquels le produit, c'est à dire l'rectangle est 144, qui est egal au quart de 576, quarré de C 24, & defaillant du quarré de DB 6, c'est à dire 36 : & sont icelles parties AD 24, DB 6, commens. en longitude : car l'une est quadruple de l'autre. Ainsi FD, qui peus avec C le quarré de AB, sera 18 : car le quarré de AB est 900, & celuy de C 576 ; & partant reste pour le quarré de FD, 324, dont la racinee quarrée est 18, commensurable en longitude à AB. L'autre partie sera aussi euidente par l'addapcion des nombres cy dessus.

La proposition suivante sera aussi facilement entendue, si on pose AB 12, & C 96 : car les segmens AD, DB, seront 6 + 96. & 6 - 96 ; & FD 96, qui est à 12 incommensurable en longitude, &c.

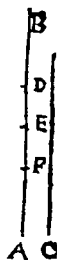
THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude; la plus grâde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de le plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, le rectangle diuifera la plus grande ligne en parties incommensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. p. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée: & soit iceluy rectangle contenu

H h

sous AD, DB incommensurables en longueur. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur. Car ayant construit comme en la precedente prop. nous demonsturerons semblablement que AB peut plus que AC du quarré de FD. Il faut donc demonstrier que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posées incommens. en longueur la toute AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurable en longueur à la composée de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle là : donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en longueur à AB ; la composée de AF, DB sera aussi incommens. en long. à la mesme AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composée de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en long. à la composée de AF, DB ; la mesme AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommensurable en longueur.



Maintenant si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle diuise AB és parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long. Car nous demonsturerons comme deuant (les mesmes choses estans construites) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommensurables en longueur : & puis que AB est composée de FD & de AF, DB ioinctes en vne

icelle AB sera aussi incommens. en longueur à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la composée de AF, DB est commens. en longit. à icelle DB, puis que celle là est double de ceste-cy. Donc puis que AB est incommensurable en longit. à la composée de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à DB, icelles AD, DB seront aussi incommensurables en longueur entr'elles par la 17. p. 10. Parquoy sil y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

L E M M E.

Puis qu'il a esté demonsté que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas tousiours en longueur: il est manifeste que s'il y a quelque ligne commens. en longueur à une proposée rationele: elle doit estre appellée rationele & commensurable à icelle, non seulement en longueur, mais aussi en puissance: car les lignes cōmens. en long. le sont tousiours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droicte commens. en puissance & longueur à l'exposée rationele, elle sera aussi dite rationele commens. en longueur & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommens. en longueur, elle sera aussi dite rationele commens. à icelle en puissance seulement.

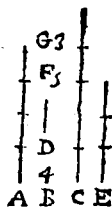
S C H O L I E.

Il appert par ce que dessus, qu'il y a de trois sortes de lignes rationeles commensurab. entr'elles en longueur. Car de deux lignes rationeles commensurables entr'elles en longueur, ou l'une est egale à l'exposée rationele; & partant l'une & l'autre

tre cōmens. en longitude à la rationele: ou l'une ny l'autre n'est egale à l'exposée rationele, & toutesfou cōmens. en longit. à icell: ou finalement l'une & l'autre est commens. à l'exposée rationele en puissance seulement. Or nous trouverons ces trois genres de lignes rationelles en ceste maniere. Soit une rationele proposée *A* divisée en quatre parties egales; c'est à sçavoir en autant qu'il y a d'unitéz au nombre *B*: puis apres estant pris quelque autre nombre *C*, la ligne *D* soit une partie de *A*; & autant de fois que *D* mesure *A*, autant de fois elle mesure quelque ligne *E*: Item autant de fois que l'unité est en *C*, qu'autant de fois la mesme *D* mesure quelque autre ligne *F*. Dont puis que *A* & *E* sont composées de parties egales en nombre, qui sont egales à *D*; elles seront egales. Derc. hif puis que *D* mesure toutes les trois lignes *A*, *E*, *F*, elles seront commens. en longitude; parquoy *E* & *F* sont rationeles commens. en longitude à la rationele *A*: mais elles ont esté démontrées estre aussi commens. entr'elles en longitude. Nous avons donc trouué deux rationeles *E* & *F* commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la ration. exposée *A*, & desquelles une sçavoir est *E*, est egale à *A*.

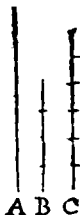


Or maintenant que *D* mesure deux lignes *C* & *E* par deux nombres *F* & *G* differens de *B*, tellement que l'une & l'autre ligne *C* & *E* soit inegale à *A*. Donc comme dessus les trois lignes *A*, *C*, *E*, ayans *D* pour mesure commune, seront commens. en longitude; parquoy *C* & *E* sont rationeles commens. en longitude à la rationele *A*: mais elles le sont aussi entr'elles. Nous avons donc trouué deux rationeles *C* & *E* commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele



proposée A , l'une ny l'autre desquelles n'est égale à icelle A .

Finablement par la 11. p. 10. à l'exposée rationele A soit trouuée la ligne B , incommens. en longueur seulement, laquelle soit couppee en sans de parties égales qu'on voudra, & soit prise C , composée de quelconque nombre d'icelles parties de B : & icelles B & C seront commens. en longueur. Je dis qu'elles sont aussi commens. en puissance seulement à l'exposée rationele A . Car



puis que A & B sont commensurable en puissance; le carré de A sera commens. au carré de B : Mais au mesme carré de B , est aussi commens. le carré de C , pource que B , C estans commens. en longueur, elles le sont aussi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les carrez de A & C , sont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C est commens. en puissance à icelle A . Et pource que des deux lignes B & C commens. en longueur, B est incommens. en longueur à A : par la 14. p. 10. C sera aussi incommens. en longueur à la mesme A . Donc C est commens. à A seulement en puissance. Et pource que B & C , commensurables en puissance à l'exposée rationele A , sont rationeles; elles seront deux rationeles commensurables en longueur entr'elles, mais en puissance seulement à l'exposée rationele A : elles sont donc les deux lignes requises à trouver.

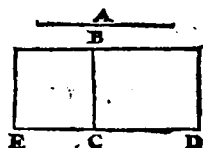
Que si quelqu'un desire trouver tant qu'on voudra de lignes rationeles commensurables en longueur entr'elles, cela se fera ainsi qu'il ensuit: Soit pris quelcôque mesure D , (regardez la dernière figure de la page précédente) & soient composées autant qu'on voudra de lignes A , C , E , d'autant de parties égales à icelle D ; qu'il y a d'unités en autant de nombres inégaux B , F , G : car les lignes A , C , E , ayans la commune mesure D , seront commensurables en longueur.

Or il est aussi evident que toutes lignes rationeles, sont commens. non seulement à vne exposée rationele, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles sont celles qui sont commens. à l'exposée rationele, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12. p. 10. les commensurables à vne mesme, sont aussi commens. entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationeles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en longueur selon quelque vne des manieres cy deuant dites, est rationel.

Soit vne exposée rationele A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationeles commens. en longueur, selon quelque vne des manieres cy dessus dites: le dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur BC on fait le quarré BE, il sera commensurable au quarré de la rationele A par la 3. d. 10. puis que BC est rationele commens. à la rationele exposée A, ou en longueur & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC, ou CE, CD sont commens. en longueur (car BC, CD ont esté posées rationeles commensurables en longueur entre-elles) & par la 1. p. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD seront aussi commens.

tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commensurables au quarré EB; & partant commens.entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationnel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationnel: Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

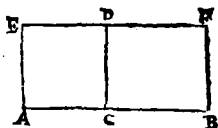
S C H O L I E.

Soit BC 3 & CD 4. donc le rectangle BD sera 12. D'iceuf soit BC $\sqrt{3}$ & CD $\sqrt{12}$: Le rect. BD sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6. Et d'iceuf si BC est $\sqrt{8}$, & CD $\sqrt{18}$: Le rectangle BD sera $\sqrt{144}$, c'est à dire 12. Ainsi iceluy rectangle est rationnel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationnel a l'un des costez rationnel, il aura aussi l'autre costé rationnel: & iceux seront entr'eux commensurables en longitude.

Soit le rectangle rationnel DB ayant le costé CD rationnel: Je dis que BC sera aussi rationnel commensurable en longitude à CD.



Car sur DC, soit fait le quarré AD, lequel sera rationnel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB à CA par la 1. propop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationnaux, & partant commensurables. Donc par la 10 prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront

rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si vn rectangle rationnel a l'un des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD 12: BC sera donc 12. qui est commens. en longitude à 12. Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droite CD 8, l'autre costé BC sera 16, qui est commens. en longitude à CD 8. Car si on diuise 16, par 8 prouendra 2 $\frac{1}{2}$ c'est à dire 2 $\frac{1}{2}$ qui est $\frac{5}{2}$: & partant 16 est à 8. comme 5 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longitude.

L E M M E.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droite incommensurable en longitude seulement à une ligne droite rationele proposée, & icelles seront les requises: car puis qu'elles sont commensurables en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d. 10.

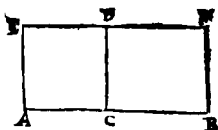
Que si à la ligne trouuée, on en trouue encore une autre, moindre ou plus grande que la proposée rationele, il est manifeste par la 12. prop. 10. que toutes les trois seront commensurables entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

T H O R. 19. P R O P. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commens. en puis-

sance seulement, est irrationnel : & la ligne droicte qui peut iceluy est irrationnelle. Soit icelle appelée Mediale.

Soit le rectangle CF, compris de deux lignes rationnelles DC & BC commensurables en puissance seulement. Je dis que le rectangle est irrationnel : & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationnelle, qui doit estre appelée Mediale.



Car si sur la rationnelle CD on décrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son egale, est à BC, par la 1. propo. 6. Mais DC & BC sont incommens. en longitude : donc par la 10. prop. 10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarré est rationel : donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationnel ; & par la vnziésme la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationnelle : & soit icelle ligne appelée Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationnelles DC, CB commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationnelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationnelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons

icelle estre vne ligne irrationnelle, moyenne proportionnelle entre deux lignes rationnelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationnelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Es faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationnel qu'elle peut, est aussi nommé medial, pour ce qu'il est moyen prop. entre les quarréz d'icelles lignes rationnelles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faille pour sans entendre que tout rectangle medial soit toujours contenu sous deux lignes droictes rationnelles commensurables en puissance seulement, sel qu'est le medial CF: car il en aduient quelques fois autrement, comme se verra cy apres.

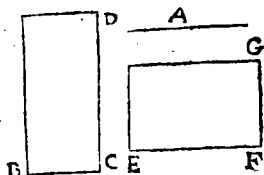
- La ligne DC soit 2, & BC 8. Le rectangle BD sera $\sqrt{32}$, qui est irrationnel; & sera dict medial, mais la ligne pouuant iceluy est $\sqrt{32}$, laquelle on appelle mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'une ligne mediale appliqué sur vne ligne rationnelle, faict l'autre costé rationnel commenl. en puissance seulement à la ligne à laquelle se faict l'application.

Auparauant que venir à ce qui est icy proposé, est à noter que pour appliquer sur vne ligne rationnelle vn rectangle egal au quarré d'une ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne ratio-

nelle, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionnelle, laquelle sera l'autre costé du rectángle: car par la 17. proposi. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectángle des extremes.



Venons maintenant à la demonstration de la proposition.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationnelle BC, faisant le rectángle BD: le dis que BC & CD sont rationnelles commens. en puissance seulement.

Car A estant mediale, elle peut vn rectángle compris de deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit di&e mediale: Soit donc iceluy rectángle EG, contenu sous les rationnelles EF, FG commensurables en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypothese peut aussi le rectángle BD: Iceux rectángles BD, EG seront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les costez reciproques, sçavoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. prop. 6. les quarez d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationnelle, est commens. au quarré de EF, aussi ligne rationnelle: donc par la 10. prop. 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD seront comm. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationnelles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement, il est evident par ce qui a esté demonstré à la 21. prop. 10. Car

si elles estoient commensurables en longueur, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incommensurables en longueur. Parquoy le quarré d'une ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

S C H O L I E.

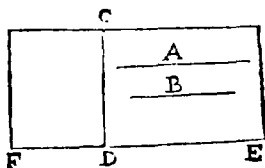
Soit le quarré de A $\sqrt{40}$, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique $\sqrt{40}$, l'autre costé CD sera $\sqrt{10}$. qui est incommens. en longueur à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est $\sqrt{5}$, CD sera $\sqrt{8}$, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit $\sqrt{35}$, & BC $\sqrt{5}$: le quarré de A seroit $\sqrt{35}$: & CD $\sqrt{7}$, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vneline mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Je dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposee la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationelle CD soit appliqué



le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationnelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrés (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront commens. en longitude. Mais la ligne ED est rationelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationelle & incommens. en longitude à la mesme CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 12. propo. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que toute figure commensurable à une figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrés egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelles étant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

S C H O L I E.

Soit $AVV200$, $BVV128$, $CD4$. Donc DE sera $V12\frac{1}{2}$ & $DFV8$ commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DF est commens. en puiff. seulement à CD; & par consequent

le rectangle CF , qui est $\sqrt{128}$, est medial, & la ligne BY $\sqrt{128}$, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMMME 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de celiure, nous le dirons aussi des mediales : sçavoir est que les lignes droictes commens. en long. à vne mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance. Car vniuersellement les lignes droictes commensurables en longueur le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne commens. en puissance & longit. à vne mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en longit. & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à vne mediale, mais incommens. en longit. elle sera aussi dite mediale commens. à icelle en puissance seulement.

LEMMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en longueur : Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C , c'est à sçavoir A en longit. & B en puissance seulement : & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24. prop. 10. Ven donc que A & C sont commens. en longit. & B , C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.



Or il est à noster qu'encore que toute ligne droicte commens. à vne mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuvent donner incommens. en longit. & puissance

ce, comme apparoitra par la 36. prop. de ce liure, où nous enſeignerons auſſi à trouver deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. xxv.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en longueur, eſt auſſi medial.

Soit le rectangle DB, (à la figure de la précédente fol. 487.) compris des deux mediales commensurables en longueur DC & BC : le diſ qu'il eſt medial.

Car ſi ſur la ligne DC on deſcrit le quarré DA, il ſera medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale : & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi AD à DB : mais CD, ou CA ſon egale, eſt commensurable en longueur à BC : Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, ſera commensurable au rectangle DB : & par le corolaire de la 24. propo. 10. iceluy rectangle ſera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

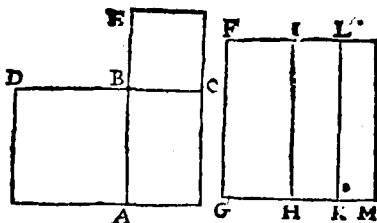
Si les mediales DC, CB commens. en longueur ſont $\sqrt{3}$ & $\sqrt{12}$: le rectangle d'icelles, ſçavoir DB, ſera $\sqrt{36}$, c'eſt à dire 6, qui eſt medial.

THEOR. 23. PROP. xxvi.

Le rectangle compris de deux lignes

mediales commensurables en puissance seulement, est rationel, ou medial.

Soient les deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle A



C : le dis qu'iceluy rectangle est rationel, ou medial.

Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faicts les quarrez AD & CE, lesquels comme estans faicts sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationelle FG, & sur icelle soient descrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. prop. 1. Et d'autant que les quarrez AD, & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationnaux commens. en puissance seulement à FG par la 23 prop. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE sont commensurab. (estans faicts sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commens. mais par la 1. pr. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droicte GH est à la ligne droicte KM: donc par la 10. prop. 10. GH & KM seront commens. en longitude; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH

& KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BE aussi egales, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1. proposi. 6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE : donc comme AD à AC, ainsi AC à CE : & parrant AD, AC, CE sont proportionnaux : & par consequent leurs egaux FH, HL, LM seront aussi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes GH, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles seront donc proportionnelles : & par la 17. prop. 6. le rectangle de GH, KM, sera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a esté demonstté rationel : donc aussi le quarré de HK sera rationel : & par consequent la ligne HK sera aussi rationelle : & par la 6. def. 10. elle sera pareillement commensurable à la rationelle proposée FG, ou à son egale HI, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement : Si en longitude, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est egal, sera rationel par la 20. prop. 10. mais si HK est commensurable en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22. prop. 10. Patquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

S C H O L I E.

Soient les mediales AB & BC, $\sqrt{8}$, & $\sqrt{2}$: (desquelles les puissances sont commensurables, car elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera $\sqrt{16}$, c'est à dire 2, qui est rationel. Mais si AB est $\sqrt{12}$, & BC $\sqrt{3}$, (desquelles les puissances sont commens. étant en raison double.) Le rectangle AC sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, qui est un medial.

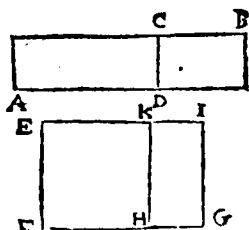
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale, n'est pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationnelle.

Soit la figure mediale AB qui excède le medial AC du rectangle DB : ie dis que DB n'est pas figure rationnelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur une proposée rationnelle EF soient faits les rectangles EG & EH, égaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI sera égal à DB : partant iceux rectangles EG, EH seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationnelle EF, les autres costez FG & FH seront lignes rationnelles commens. en puissance seulement à EF par la 23. prop. 10.

Maintenant si on dit que HI est rationel; estant appliqué sur la rationnelle KH, l'autre costé GH sera rationel commens. en longueur à KH par la 21. prop. 10. mais FH est incommens. en long. à KH, ou



EF: donc par la 14. prop. 10. FH & GH seront incommens. en longueur: mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au carré de GH par la 1. prop. 6. (car ils sont de même hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le carré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le

rectangle de FH & GH par la 14. prop. 10. Or le me-
me quarré de GH est comm. au quarré de FG, (icel-
les lignes GH, FG estans rationelles,) & par la 16. p.
10. les deux quarez de FH & GH, ensemble seront
commens. au quarré de GH : mais iceluy quarré est
incommensurable à deux fois le rectangle de FH &
GH : donc par la 13. prop. 10. les deux quarez de FH
& GH seront ensemble incommens. à deux fois le
rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarez, &
deux fois le rectangle de FH & GH sont egaux au
quarré de FG par la 4. prop. 2. donc par la 17. p. 10. le
quarré de FG sera incommens. aux deux quarez de
FH & GH ensemble : lesquels estans rationaux (car
ils sont faits sur lignes rationelles) il faudra que le
quarré de FG soit irrationel, par la 10. def. 10. & par
consequent la ligne FG irrationelle, laquelle cy
dessus auons monstré estre rationelle. Ce qui est ab-
surde : donc le rectangle HI, ou son egal DB n'estoit
pas rationel. Parquoy vne figure mediale n'est pas
plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

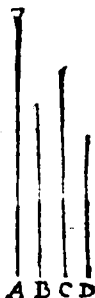
SCHOLIE.

*Soit le rectangle medial ABV 50, & le rectangle ACV
18 : le rectangle restant DB sera V 8, qui est medial. Dere-
chef AB estant V 32, & ACV 20 ; le restant DB sera V
32—V 20, qui n'est pas rationel.*

PROBL. 4. PROP. xxviii.

Trouuer deux mediales commensura-
bles en puissance seulement, compre-
nant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationelles commens. en puissance seulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. propo. 6.) soit trouuee la moyenne proportionnelle C; puis (par la 12. propo. 6.) aux trois A, B, C, soit trouuee la quatriesme proportionnelle D: le dis que C & D sont les deux lignes demandees.



Car puis que C est moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. prop. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale : Item puis que comme A à B, ainsi C à D, mais A est commensurable en puissance seulement à B, aussi sera C à D par la 10. prop. 10. & par la 24. propo. 10. D sera ligne mediale (pour estre commens. en puissance à la mediale C.) Voila donc les deux lignes commens. en puissance seulement qui sont trouuees. Reste à prouuer que leur rectangle est rationel.

D'autant que comme A est à B, ainsi C à D, & en permutant comme A à C ainsi à BD; & comme A à C, ainsi C à B. Pareillement comme C sera à B, ainsi B sera à D par la 11. pr. 5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B est rationel: donc le rectangle compris de C & D est aussi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprennent vn rectangle rationel; ce qu'il falloit faire.

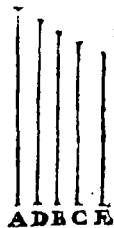
S C H O L I E.

Soit AV 20, & BV 12. donc la moyenne prop. C sera VV 240. & puis que comme A à B , ainsi C à D ; D sera VV 86 $\frac{2}{3}$. Or les puissances de VV 240. & VV 86 $\frac{2}{3}$ sont commens. car elles sont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles est VV 20736, c'est à dire 12, egal au quarré de V 12, qui est aussi 12: & partant iceluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

P R O B L. 5. P R O P. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, B, C , trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 22. prop. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionnelle D : puis par la 12. p. 6. soit fait comme B à C ainsi D à E : Je dis que D & E sont les deux mediales demandees.



Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. proposit. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B : mais comme B à C , ainsi D à E , & B est commens. en puissance seulement à C , aussi par la 10. prop. 10 D sera commens. en puissance seulement à E : Et par la

24. prop. 10. Destant mediale, E sera aussi mediale
commens. en puissance seulement à D.

D'avantage, ie dis que le rectangle des deux me-
diales D & E est aussi medial. Car puis que com-
me B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D com-
me C à E : mais B est à D comme D à A ; partant
comme D est à A, ainsi C est à E ; & par la 16. prop.
6. le rectangle des extremes D & E sera egal au re-
ctangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de
A & C, rationnelles commens. en puissance seule-
ment, est medial par la 22. prop. 10. Donc par le co-
rollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E se-
ra aussi medial. Parquoy nous auons trouué deux
lignes medialles commensurables en puissance seu-
lement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il
falloit faire,

SCHOLIE I.

Soit $A 20$, $B \sqrt{200}$, & $C \sqrt{80}$. Donc la moyenne prop.
D sera $\sqrt{80000}$. Et puis que comme B à C, ainsi D à E ;
icelle E sera $\sqrt{12800}$. Or les puissances de D & E ; sont
commensurables, car elles sont comme 5 à 2 : & le rectangle d'i-
celles est $\sqrt{1024000000}$, c'est à dire $\sqrt{32000}$, egal au re-
ctangle de A & C ; qui est $\sqrt{32000}$.

Or és choses suivantes nous aurons besoin de ce proble-
me cy,

Trouuer deux nombres plans semblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A 6. C 12.
A, B, C, D, c'est à dire que comme A est à B, B 4. D 8.
ainsi C soit à D. Mais A & B se multipliant E 24. F 96.
entr'eux fassent E : Item C & D se multipliant fassent F. Donc
E & F seront nombres plans semblables, puis qu'ils ont les
costez proportionnaux.

Or d'autant qu'il a esté démontré es 28. & 29. p. 9. que si on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, est produit vn nombre pair; mais vn impair, si on multiplie vn impair par vn impair; il appert par quelle maniere peuent estre trouuez deux plans semblables, l'un & l'autre desquels soit pair ou impair; ou vn seul pair, & l'autre impair: Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'un sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là sera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans seront pairs, si chacun a vn costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.

L E M M E I.

Trouuer deux nombres quarréz, tels que le composé d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy- A.....E.....D.....B
dessus dictes deux plans semblables C.....
AB & C, vn chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24. & 26. prop. 9. si on oste d'un pair vn pair, ou bien vn impair d'un impair, le reste est pair; estant osté BD égal à C de AB, le reste AD sera pair; & iceluy AD est sne diuisé en deux egalement en E; le dis que le nombre fait de AB en BD (qui est vn quarré par la 1. prop. 9) avec le quarré du nombre ED, fait vn quarré. Car puis que le nombre AD est diuisé en deux egalement en E, & à iceluy est adiouxté DB; le nombre qui est fait de AB en BD, ensemble avec le quarré du nombre DE, sera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theo. de ceux que nous auons démontré à la 14. prop. 9. Parquoy les deux quarréz, sçauoir celuy fait de AB en BD, & celuy du nombre DE adiouxté ensemble seront vn quarré, sçauoir celuy qui sera produit de BE. Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De ces choses est manifeste que quand AB & C sont semblables, estre trouuez en la mesme maniere les deux nombres quarez des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de AB en BD , est aussi quarré.

Que si les nombres AB & C ne sont prins semblables, l'un & l'autre toutesfois pair, ou impair, seront trouuez en la mesme maniere les deux quarez des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de AB en BD n'est quarré. Car s'il estoit quarré, par la 2. proposir. 9. les nombres AB , BD , c'est à dire AB & C , seroient plans temblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils ont esté posez dissemblables.

SCHOLIE 2.

Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarez, desquels l'excez soit aussi nombre quarré, nous prendrans comme cy-dessus, deux plans semblables, desquels l'un & l'autre soit pair ou impair, sçauoir AB & C , & acheuerons comme il est dict au prochain lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarez, desquels l'excez ne soit quarré, il faudra prendre deux nombres plans dissemblables, & paracheuer comme dessus. Ce qu'on observera plus facilement, diuisant un nombre quarré en deux nombres, l'un desquels soit quarré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12 : ou 36 en 16 & 20 : & ainsi des autres.

L E M M E. 2.

Trouver deux nombres quarez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré.

Soient deux nombres $A..H..I..E..F..G...D.....B$
 plans semblables AB , & $C.....$
 C pairs, ou impairs, & soit
 fait la mesme construction qu'au lemme preced. tellement que
 le quarré fait de la multiplication des nombres semblables
 AB , DB entr'eux, ensemble avec le quarré de DE , soit egal
 au quarré de BE : en apres de DE soit ostée l'unité EF . Donc
 le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE , à cause
 de l'inegalité des costez. Je dis que le nombre composé des
 nombres quarez, desquels l'un est fait de AB en BD , &
 l'autre de DE en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé
 estoit nombre quarré, il sera plus grand, ou egal, ou moindre
 que le quarré de BE : Soit premierelement plus grand; & partant
 le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BE : donc le costé
 d'iceluy sera egal, ou plus grand que le nombre BE : (car il ne
 sera moindre, pource qu'entre BE , BF , nombres differens de
 l'unité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu
 entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF , mais moindre
 que BE) Si on dict qu'il est egal, tellement qu'au quarré de
 BE , soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB en
 BD , & du quarré de DF , puis qu'au mesme quarré de BE , il
 a esté demonstré au lemme precedent, estre egal le nombre
 fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE ; celuy
 fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , sera
 egal à celuy là fait de AB en BD , ensemble avec le quarré
 de DE . Ostant donc le commun fait de AB en DB , le reste
 quarré de DF , sera egal au reste quarré de DE ; & partant le
 costé DF aussi egal au costé DE , la partie au tout: ce qui est
 absurde. Donc le costé du quarré composé des quarez, des-

quels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE . Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI , qui est plus grand que BE . Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE . Mais au precedent lemme le quarré de BE a esté démontré egal au nombre fait de AB en BD , ensemble au quarré de DE : ostant donc le commun nombre fait de AB en BD , restera le quarré de DE , plus grand que le quarré de BE , & partant le costé DE plus grand que le ceste BE , la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, n'est pas plus grand que le costé BE : mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BE .

Soit maintenant si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE , egal au quarré de BE ; & soit posé AH double de l'unité EF . Donc puis que le tout AD est double du tout ED , (car AD a esté divisé en deux également en E) & l'osté AH double de l'osté EF , aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. p. 7. & partant HD est divisé en deux également en F : Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons démontré sur la 14. p. 9. le nombre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF , sera egal au quarré de BE : Mais au mesme quarré de BE , est posé egal le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DE . Donc le nombre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF , est egal à celuy fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE . Ostant donc le commun quarré de DE , restera le nombre fait de HB en BD , egal à celuy

fait de AB en DB . Parquoy puis que HB , AB multiplians le mesme BD , produisent nombres egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produits; HB sera egal à AB , la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , n'est pas egal au quarré de BF .

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , moindre que le quarré de BF ; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF , lequel soit BG , tellement que le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , soit egal au quarré de BG : Soit pris AI double d'iceluy EG . D'où puis que le tout AD est double du tout BD , & l'osté AI double de l'osté EG ; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD ; & partant ID est divisé en deux également en G . Parquoy par le 6. theor. démontré sur la 14. p. 9. le nombre fait de IB en BD ensemble avec le quarré de DG , est egal au quarré de BG . Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF : Donc le nombre fait de IB en BD , ensemble avec le quarré de DG , est egal à celuy fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF . Ostant donc les quarrés de DG & DF , desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD , plus grand que celuy fait de AB en BD , la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DF , n'est pas moindre que le quarré de BF : mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à démontrer.

S C H O L I E. 3.

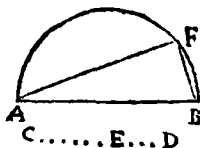
Par cecy nous trouverons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'un ny à l'autre comme

nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedens on trouue deux quarez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, dinisant quelque nombre quarré en deux non quarez: Car ainsi le quarré total ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est dinisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 6. PROP. xxx.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soit proposée la rationele, AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarez CD, CE, l'excez desquels



DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoit descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodée en iceluy AF: & ioin& BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré

de AF comme le nombre CD est au nombre DE, ils seront commensurables par la 6. p. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF aumoins en puissance; mais AB est rationnelle, & par consequent aussi rationnelle AF qui luy est commensurable mais; les quarrés de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF seront incommensurables en longueur: elles seront donc rationnelles commensurables en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. p. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarrés de AF & FB, c'est à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF, du quarré de FB. Et d'autant que comme CD est à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conuersion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB (car ainsi que CD excède DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB, FB sont commensurables en longueur par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationnelles AB, AF commensurables en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commensurable en longueur: ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationnelle AB soit 6 : AF sera $\sqrt{20}$: & partant BF sera 4. commens. en longueur à AB.

La construction & demonstration tant de ceste prop. que de plusieurs autres de ce liure, sont tellement deffectueuses en

l'edition de Donnor, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien, entendu ce que nous auons dictz iusques icy) recognostre facilement les deffauts d'icelle : c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROB. 7. PROP. xxxi.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude.

Soit exposée la rationele AB & soient trouuez (comme il a esté enseigné au lemme 1. de la prop. 19. de ce liure) deux nombres quarez tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarez CE, ED, à fin que le tout CD ne soit à l'un ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré : puis sur AB soit décrit le demy cercle AFB; & par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée la ligne droicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE: & finalement soit menée BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.



Car on prouuera tout aint qu'à la precedente, que AB & AF sont rationeles commensurables en puissance seulement (d'autant que leurs quarrés ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD est à CE, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF: par conuersion de raison comme CD sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CD n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc aussi le quarré de AB, ne sera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF seront incommensurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy est incommensurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

S H O L I E .

Si la rationele AB est 3: AF sera $\sqrt{6}$, & BF 3.

P R O B . 8 . P R O P . XXXII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouvées par la 30. prop.
de ce liure deux lignes rationeles
A & B commensurables en puissance
seulement, & que la plus grande
de A puisse plus que la plus petite

A _____
C _____
B _____
D _____

B du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur : Item par la 13. prop. 6. soit trouvée C moyenne proportionnelle entre A & B ; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouvée la 4. proportionnelle D. Je dis que C & D sont les deux lignes demandées.

Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. prop. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationnel ; & la ligne C pouuant iceluy par la 17. prop. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D ; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D, par la 10. prop. 10. Mais puis que C est mediale ; par la 24. prop. 10. D, sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D : & en permutant comme A sera à C, ainsi B sera à D : mais par la construction comme A est à C, ainsi C est à B : pareillement donc comme C sera à B, ainsi B sera à D : & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. prop. 6. & puis que le quarré de la rationelle B est rationel, le rectangle compris sous C & D qui luy est egal sera aussi rationel. Et ven que comme A est à B, ainsi C à D ; & peut plus que B du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, aussi par la 15. prop. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Nous auons donc trouué C & D, deux
mediales

mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude: ce qu'il falloit faire.

Que si on vouloit que C peust plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommens. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles sont requises par la precedente prop. au lieu qu'icy dessus elles ont esté trouuées par la 30. p. 10. & acheuer le tout comme dessus.

S C H O L I E.

Soit AB, BY 28: le rectangle d'icelles sera $\gamma 1792$, & la ligne CY $\gamma 1792$, qui est mediale. Et puis que comme AB, est à BY 28, ainsi CY $\gamma 1792$ est à D, icelle sera $\gamma 3432$ donc C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rationel 28. & la plus grande C pouuant plus que la moindre D, d'une ligne qui luy est commens. en longitude. Car si du quarré d'icelle C, on oste le quarré de D, restera $\gamma 567$, & seront commens. en longit. les deux mediales $\gamma 1792$ & $\gamma 567$. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit AB, & BY 20: le rectangle d'icelles sera $\gamma 1280$, & la ligne CY $\gamma 1280$, & partant D sera $\gamma 425$: donc C & D sont mediales comprenant vn rationel 20, & C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la

plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouvées trois lignes rationeles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude : (ce

A _____

D _____

B _____

C _____

E _____

qu'on obtiendra trouvant premierement par la 30. p. 10. les deux rationeles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & A soit trouvée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouvée D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit fait comme D à B, ainsi C à E. Je dis que D & E sont les deux lignes demandées.

Car puis que D est moyène prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationnel, & par consequent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulement: donc aussi D & E: & par la 24. p. 10. D est mediale, E le sera aussi. Et derechef puis que comme D à B, ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrêmes D & E sera egal au rectangle des moyènes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationeles commens. en puissance seulement est medial. Donc par le corol. de la 34. p. 10. le rectangle de

D & **E** sera aussi medial. Finablement puis que comme **A** à **C**, ainsi **D** à **E**; & **A** peut plus que **C** du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. p. 10. **D** pourra aussi plus que **E** du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales **D** & **E** commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que si on trouue **A**, **B**, **C** rationeles commens. en puissance seulement, tellement que **B** puisse plus que **C** du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, & on achene de construire comme dessus; on demonstrera semblablement que **D** & **E** sont mediales, commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande **D**, peut plus que **E** du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

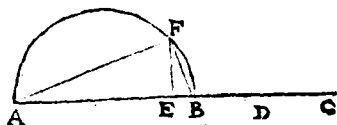
S C H O L I E.

Soit **A** 8, **B** $\sqrt{48}$, & **C** $\sqrt{28}$: le rectangle compris de **A** & **B** sera donc $\sqrt{3072}$. & la ligne droite **D** $\sqrt{3072}$, qui est mediale, & **A** estant à **C**, comme **D** à **E**, icelle sera $\sqrt{588}$. Donc **D** & **E**, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la plus grande **D** peut plus que la moindre **E** du quarré d'une ligne, qui luy est commensurable en longitude. Car si du quarré d'icelle **D**, on oste le quarré de **E**, le reste sera $\sqrt{972}$, qui est commensurable en longitude à icelle **D** $\sqrt{3072}$. Derechef si **A** est 8, **B** $\sqrt{48}$, & **C** $\sqrt{20}$; **D** sera encore $\sqrt{3072}$, mais **E** sera $\sqrt{300}$. Donc **D** & **E** sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande **D**, peut plus que la moindre **E**, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu dicelles, medial.

Soient deux lignes rationeles
cōmensurables en
puissance seule-
ment AB & BC,
& que la plus grã-



de A B puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouuées comme il a esté enseigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppé en deux également CB au point D, soit appliqué un rectangle sur BA egal au quarré de BD, defaillant d'une figure quarrée par la 28. prop. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB : & apres auoir fait le demy cercle sur la ligne BA & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA : le dis qu'icelles lignes sont les requises.

Car puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'une figure quarrée, est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de

DB: car nous auons demonst^ré au scholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC est quadruple du quarré de BD:) les deux lignes AE & EB seront incommens. en longitude par la 19. p. 10. Mais par le scholie de la 13. p. 6. EF est moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a esté demonst^ré à la 11. p. 10. elle sera incommens. en puissance à EA. Mais comme FE à EA, ainsi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA sont incommens. en puissance, par la 10. p. 10. BF & FA seront aussi incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequél quarré de BA est rationel, estant la ligne AB rationele; partant le composé des quarréz de BF & FA, sera aussi rationel. Et d'autant que par l'hypothese le rectangle de AE, EB, est egal au quarré de BD, & qu'il est aussi egal au quarré de la moyenne proport. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de EF sera egal au quarré de BD: partant la ligne EF est egale à BD: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & EF, ou BD son egale, (car par la 8. & 4. prop. 6. AB est à BF comme FA à EF.) Or par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & DC est double du rectangle de AB & BD, (car la base BC est double de la base BD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 22. prop. 10. donc aussi sa moitié rectangle de AB & BD: & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommensurables en puissance, qui sont le composé de leurs quarréz rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

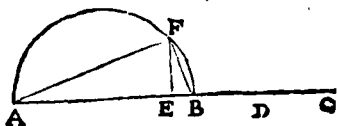
SCHOLIE.

Si AB est 6, & BC $\sqrt{12}$; BD ou EF sera $\sqrt{3}$; & par conséquent AE sera $3 + \sqrt{6}$, & EB $3 - \sqrt{6}$: & puis que le carré de AF est égal aux carrés de AE, EF: icelle AF sera $\sqrt{(18 + \sqrt{216})}$: mais BF sera $\sqrt{(18 - \sqrt{216})}$. Donc icelles AF, FB sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs carrés, sçavoir 36, est rationel, mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est $\sqrt{108}$, est medial.

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui fassent le composé de leurs carrés medial: mais qu'elles comprennent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle rationel,



& que AB puisse plus que BC du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouvées comme il a esté enseigné en la 32. p. 10. & soit acheuée la construction comme en la precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandées.

Car nous demonstrerons ainsi qu'en la prece.

dente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance : & le quarré de BA est medial , estant décrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le composé des deux quarréz de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB,BC (comme il a esté démontré en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD ; & qu'il est rationel par la construction , aussi iceluy rectangle de AB,BD sera rationel. Mais il a esté démontré en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA : & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarréz medial ; mais le rectangle compris d'icelles rationel : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{432}$, & BC $\sqrt{48}$: BD ou EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{108 + 72}$; mais BF est $\sqrt{108 - 72}$: & partant icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarréz , sçauoir est $\sqrt{432}$, est medial : mais le rectangle compris d'icelles , sçauoir est $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, est rationel.

P R O B. 12. P R O P. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarréz medial , & aussi le rectangle d'icelles , medial , &

incommensurable au composé de
leurs quarez.

Soient deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC , comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouuées comme nous auons enseigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la construction comme en la 34. p. 10. le dis que BF & FA sont les lignes demandées.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des quarez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par l'hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est la moitié, sera aussi medial par le corollaire de la 24. p. 16. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté demonstré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longueur à BC , mais à icelle BC est commensurable en longueur la moitié BD : Donc par la 13. p. 10. BD sera aussi incommensurable en longueur à AB , & par la 1. prop. 6. le quarté de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD , c'est à dire incommensurable, par la 10. prop. 10. & par consequent le rectangle de BF , & FA egal au rectangle de AB & BD , sera incommensurable au quarré de BA , c'est à dire au composé des quarez de BF & FA . Nous auons donc trouué deux lignes diuises

AF, BF incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé d'iceux quarez: ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{192}$, & BC $\sqrt{48}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{(48+12)}$, & BF $\sqrt{(48-12)}$: Parquoy icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarez, sçavoir est 192, est medial incommens. à 12, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme est manifeste le suivant.

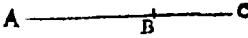
Trouuer deux mediales incommensurables en longitude & puissance.

Car puis que tant le composé des quarez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommens. à ce composé, aussi les lignes pouuant iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incommens. tant en longitude que puissance. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les quarez d'icelles, c'est à dire le composé des quarez des lignes AF, BF, & le rectangle sous icelles AF, BF, seroient commens. Ce qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le composé des lignes AF, BF; & yne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, BF, c'est à dire une moyenne proportionnelle entre AF, BF, seront trouuees deux mediales incommensurables en longitude & puissance.

I N C O M M E N C E N T L E S
sixaines des lignes irrationnelles par la
composition.

THEOR. 25. PROP. xxxvii. Six. I.

Si deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement sont assemblées, la toute sera irrationnelle: & soit icelle appelée Binome.

Soient assemblées deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement  AB & BC, trouuées par le lemme qui precede la 22. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC sont incommens. en longueur par l'hypothese. Donc par la 10. prop. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC sont rationnelles commens. en puissance seulement, leurs quarrés seront commensurables entre-eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 16. prop. 10. & partant par la 14. p. 10. les deux quarrés d'icelles AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectangle &

des deux quarez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré est egal aux quarez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarez de AB & BC, lesquels estans rationnaux, & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. def. 10. & par conséquent la ligne AC irrationelle : icelle sera donc appelée binome. Si donc deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

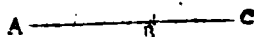
Soit AB 2, & BC 3 : la toute AC sera $2 + \sqrt{3}$. & son quarré est $7 + \sqrt{48}$.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, sont procréées deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles est irrationelle par la 22. prop. de ce livre, laquelle est appelée mediale. Et la composée d'icelles, par la 37. prop. 10. est une irrationelle, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement ; comprenant vn rectangle rationel sont assemblees, la toute sera irrationelle : & soit icelle appelée bimediale premiere.

Soient assembles deux
mediales AB & BC com-
mensurables en puissance
seulement, comprenant



vn rectangle rationel, trouuees par la 28. prop. 10. Je
dis que la toute AC est irrationelle.

Car puisque par la 1. propo. 6. comme AB est à
BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au
quarré de BC; & que AB, BC sont incommensura-
bles en longitude; par la 10. prop. de ce liure, iceluy
rectangle de AB, BC sera aussi incommensurable au
quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC est com-
mensurable à deux fois iceluy; & au quarré de BC est
commens. le composé des quarez d'icelles AB, BC:
(car puisque AB, BC sont commensurables en puis-
sance, leurs quarez seront commensurables; & par-
tent le composé d'iceux quarez sera aussi commen-
surable au quarré de BC par la 16. prop. 10.) Donc le
composé des deux quarez de AB, BC sera incom-
mensurable à deux fois le rectangle compris d'icel-
les lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le
composé d'iceux deux quarez, & rectangles, c'est
à dire le seul quarré de AC, qui lent est egal par la
4. prop. 2. sera aussi incommensurable à deux fois le
rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux
fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable
vn seul rectangle d'icelles AB, BC: donc par la 13.
prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au
rectangle compris sous AB, BC: & iceluy rectangle
estant rationel par l'hypothèse; iceluy quarré de
AC sera irrationel par la 10. def. 10. & pource la li-
gne AC sera aussi irrationelle par la 11. def. 10. Et
icelle ligne soit appelée bimediale premiere. Si
donc deux lignes mediales commensurables en

puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demon-
strer.

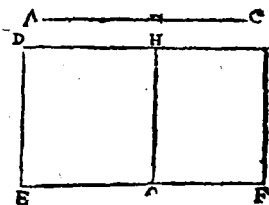
S C H O L I E

Soit $AB\sqrt{5}4$, & $BC\sqrt{2}4$: La toute AC sera $\sqrt{7}4$
 $54 + \sqrt{7}4$, irrationnelle nommée bimédiale première.

THEOR. 27. PROP. xxxix.

Si deux médiales commensurables en
puissance seulement, comprenant vn
rectangle medial sont assemblees, la
toute sera irrationnelle : & soit icelle
appelée bimédiale seconde.

Soient assemblees les
deux médiales AB &
 BC commensurables
en puissance seulement,
comprenant vn rectan-
gle medial, trouuées par
la 29. prop. 10. le dis que
la toute AC est irratio-
nelle.



Car soit vne ligne rationnelle proposée DE , sur la-
quelle soit appliqué le rectangle DF égal au carré
de AC , & le rectangle DG égal au composé des
carrés de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant
que par la 4. prop. 2. le carré de AC , c'est à dire le
rectangle DF , est égal aux deux carrés de AB , BC

ensemble avec deux fois le rectangle de AB, BC ; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC , est medial, par le corol. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC , qui luy est commens. c'est à dire le rectangle HF , sera aussi medial. De-rechef puis que les quarez des mediales AB, BC sont commens. le composé d'iceux, c'est à sçavoir le rectangle DG sera aussi commensurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarez des mediales AB, BC , est medial: Donc par le coroll. de la 24. propo. 10. le rectangle DG sera aussi medial: Ainsi les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE , (car GH est egale à la rationelle DE ,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH , par la 23. proposi. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC , par la 1. propo. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC : & les deux quarez de AB & BC estans commensurables entr'eux, les deux ensemble seront commensurables au seul de BC , par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarez de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationelles seront incommensurables en longitude: elles seront donc commensurables en puissance seulement; (car autrement elles ne seroient rationelles si elles estoient incommensurables,) & par la 37. proposi. 10. la toute composée EF sera irrationelle: & le rectangle DF .

sera irrationnel : car s'il estoit rationnel la ligne DE estant rationnelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationnel, ce qui n'est pas. DF est donc irrationnel : & partant aussi irrationnel son egal quarré de AC ; & par consequent la ligne AC irrationnelle, qui sera appelée bimediale seconde. Si donc deux mediales commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonst^rer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle cemp^ris d'une ligne rationnelle & d'une irrationnelle, est aussi irrationnel. Car il y a esté demonst^ré que le rectangle DF cemp^ris de la rationnelle DE, & irrationnelle EF, ne peut estre rationnel.

SCHOLIE.

Soit ABVV 18, & BCVV 8: La toute AC sera VV 18 + VV 8, qui est irrationnelle, appelée bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adioust ensemble deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarrés soit rationnel ; la toute sera irrationnelle : & soit icelle appelée ligne maieure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, trouuees par la 34. prop. 10. le dis que la toute est irrationnelle.

Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. prop. 10. & partant irrationnel. Mais par l'hypothese le composé des quarez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17. prop. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarez (qui est le quarré de AC par la 4. prop. 2.) sera incommensurable au composé des deux quarez de AB & BC, qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationnel; & son costé AC aussi irrationnel: lequel sera appellé ligne majeure. Parquoy si on adiouste deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{18+\sqrt{216}}$, & $BC\sqrt{18-\sqrt{216}}$: La toute AC sera donc $\sqrt{18+\sqrt{216}} + \sqrt{18-\sqrt{216}}$, qui est irrationnelle nommée ligne majeure.

THEOR. 29. PROP. XII.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs

leurs

leurs quarrez medial, sont assemblees, la toute fera irrationnelle : & soit icelle appellee ligne pouuant vn rationel, & & vn medial.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, telles que demande la propos. & qu'enseigne à trouver la 35. proposition de ce liure. Je dis que la toute AC est irrationnelle.



Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. proposi. 10. le composé des deux quarrez, & des deux rectangles, sçavoir le carré de AC par la 4. prop. 2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel : Ainsi par la 10. def. 10. le carré de AC sera irrationnel : & par consequent la ligne AC aussi irrationnelle : laquelle sera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Soit $AB\sqrt{(\gamma_{108} + \gamma_{72})}$, & $BC\sqrt{(\gamma_{108} - \gamma_{72})}$: La toute AC sera donc $\sqrt{(\gamma_{108} + \gamma_{72})} + \sqrt{(\gamma_{108} - \gamma_{72})}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommensura-

bles en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, sont assemblees; la toute sera irrationnelle: Soit icelle appelée ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, (comme en la figure de la prop. 39. pag. 525.) telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Soit exposée la rationnelle DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. prop. 10. sçauoir que le rectangle DH soit egal au quarré de AC; DG aux deux quarez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté démontré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF seront aussi incommens. en longueur. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationnelle DE, feront les deux autres costez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainsi EG & FG seront rationnelles commens. en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF sera irrationnelle. Mais DE estant rationnelle, le rectangle DF sera irrationnel par le coroll. de la 39. p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, sçauoir AC sera irrationnelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommensurab. en puissance, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

Soit $ABV (\sqrt{48} + \sqrt{14})$ & $BCV (\sqrt{48} - \sqrt{14})$ Donc

la toute AC sera $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24}) + \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}}$.

L E M M E I.

Si vne ligne droicte est coupee en deux inegale-
ment en vn poinct, & derechef en deux inegale-
ment en vn autre poinct, & les parties de l'une des diui-
sions sont inegales aux parties de l'autre diuision,
chacune à la sienne: les quarez des deux lignes de la
plus inegale diuision sont plus grands que les quar-
rez des lignes de la moins inegale.

Soit la ligne droicte AC di-
uisée inegalement en B: & en-
cores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC.
soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à
dire que AE soit plus grande que BC.) Il est dit que les quarez
de AB & BC, sont plus grands que ceux de AE & EC.

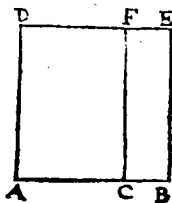
Car si AC est coupee en deux egale-
ment en D; d'autant que
AB, & BC sont plus inegales que CE, AE; & que AB est plus
grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par
la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, avec le quarré de DB, est
egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, avec le
quarré de DE, est aussi egal au quarré de DC: partant le rectan-
gle de AE & EC avec le quarré DF, est egal au rectangle de AB
& BC, avec le quarré de BD. Et en ostant les quarez inegaux
des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeure-
ra plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son
double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB
& BC. Maintenant les deux quarez de AB & BC, & deux
fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par
la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarez de AE &
EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par consequent
les composez des quarez, & rectangles sont egaux entr'eux:
mais les deux rectangles de AB & EC, ont esté demonstrez plus
grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarez
de AB & BC seront plus grands que les deux quarez de AE
& EC: Ce qui estoit proposé.

L E M M E. 2.

Vne figure rationnelle excède vne figure rationnelle, d'une figure rationnelle.

Soient les deux figures rationnelles AE & AF , estant AE plus grande que AF de CE : Je dis que CE est figure rationnelle.

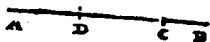
Car AE & AF estant rationnelles, elles seront aussi commens. & par la 16. prop. 10. AF & CE seront commens. entre elles, & par conséquent rationnelles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit le binome AB diuisé en ses noms au point C : tellement que AC, CB ,



soient rationnelles commensurables en puissance seulement, comme veut la 37. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre point, sçauoir est que les lignes soient rationnelles commens. en puissance seulement.

Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au point D . Or il appert que AB n'est couppee en deux également és points C & D . Car AC, CB , ou AD, DB seroient commens. en longueur contre l'hypothese: il faut donc que AD & DB

soient plus grandes ou plus petites que AC & CB , chacune à la sienne : car si elles estoient égales, elles seroient diuisees sur vn. mesme point. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB , par le lemme qui suit la 42. propoſi. 10. le composé des quarrez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarrez de AD & DB : Et d'autant qu'iceux cōposez sont rationaux (car ce sont quarez construits sur lignes rationelles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced. Or est-il que le composé des quarez de AC & CB , avec deux fois le rectangle de AC & CB , est egal au composé des quarrez de AD & DB , avec deux fois le rectangle de AD & DB : (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarez de AC & CB , sont plus grands que les quarez de AD & DB , d'autant les rectangles de AC , CB , soient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a esté demonſtré que l'excez des quarez est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel: (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB , ou AD & DB , sont rationelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre point qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'és cinq sortes de lignes irrationnelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux: car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commens.

en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuvent estre diuisees en leurs noms qu'au point proposé, faut entendre que le contredisant apportant une autre diuision, les parties d'icelles doivent estre inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn point seulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au point C, tellement que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. le dis qu'on ne la peut diuiser en ses noms en vn autre point.

A ——— D — C — B

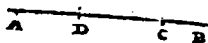
Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonstrerons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB sera autant plus grand que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarez de AD & DB sont plus petits que les quarez de AC & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux par l'hypothese. Donc leurs excez sera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par consequent l'excez des quarez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarez estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, ainsi qu'il appert par la 16. prop. 10. & coroll. de la 24. prop. 10. partant l'ex-

cez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrier.

L E M M E.

Si vne ligne droicte est coupee inegalement, les quarez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB
coupee inegalement en C : Je
dis que les quarez de AC, CB
sont plus grands que deux fois
le rectangle d'icelles AC, CB.



Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. prop. 2. les quarez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) avec le carré de AD : Et partant les deux quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB : ce qui estoit proposé.

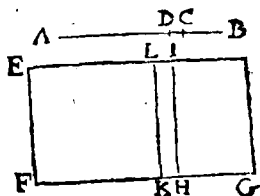
THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la

37. prop. de celiure: le dis
qu'elle ne peut estre diui-
see en ses noms en vn au-
tre point que C.

Car si faire se peut qu'elle
soit encore diuisee en
AD & DB, en sorte que
dessus : & soit vne ligne rationelle proposee EF,
sur laquelle (par la 45. prop. 1. soit construit le rectan-
gle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux
deux quarez de AC, CB: le reste IG sera egal à deux
fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop.
2. le quarré de AB est egal aux deux quarez de AC,
CB, avec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En
la mesme maniere si sur EF on applique EK égal
aux quarez de AD, DB : le reste LG sera egal à
deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant
que les quarez de AC, CB, sont inegaux aux quar-
rez de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK se-
ront aussi inegaux : & partant les lignes FH, FK, se-
ront inegales. Et derechef puis que les quarez de
AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle
de AC, CB par le lemme precedent ; EH sera aus-
si plus grand que IG : & partant EH plus grand que
la moitié de EG : & consequemment la ligne FH
plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous
demonstrerons par mesmes raisons que FK, est
aussi plus grande que la moitié de FG. Donc
les parties FH & HG, sont inegales aux parties
FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que A
C, CB sont mediales, & commensurables en puis-
sance ; les quarez d'icelles seront aussi mediaux
& commensurables, & par la 16. prop. 10. le com-
posé d'iceux sera aussi commensurable à vn cha-



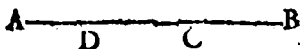
cun d'eux ; lesquels estans mediaux leur composé, c'est à sçavoir le rectangle EH sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. Par mesme raison EK sera démontré medial : parquoy EH, EK appliquez sur la rationele EF, auront les costez FH, FK, rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB est posé medial ; le double d'iceluy, sçavoir est IG, sera aussi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & estant appliqué sur la rationele HI, l'autre costé HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurables en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC, CB : (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré sera incommensurable au rectangle. Mais au quarré de AC est commensurable le composé des quarez de AC, CB ; (car d'autant que AC, CB sont commensurables en puissance, & partant les quarez d'icelles commensurables, le composé d'iceux quarez sera aussi commensurable au quarré de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des quarez de AC, CB, c'est à dire le rectangle EH est incommensurable au double du rectangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG seront incommensurables en longitude. Mais elles ont esté démontrées rationeles : Donc les lignes FH, HG sont rationeles commensurables en puissance seulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG sera binome, & diuisée en

ses noms au poinct H. En la mesme maniere nous demonstrerons aussi FG binome estre diuisée en d'autres noms à vn autre poinct k; ce qui est absurde: car par la 43. p. 10. elle ne peut estre diuisée en ses noms qu'en vn seul poinct. Donc AB bimedixle seconde ne peut estre diuisée en ses noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, est diuisée en ses noms, en vn poinct seulement.

Soit la ligne maieure AB, diuisée en ses noms au poinct C, tellement que AC & BC, soient



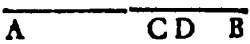
incommensurables en puissance: & le composé de leurs quarez soit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40. p. de ce liure. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car si faire se peut, qu'elle soit diuisée en ses noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que soit le poinct D, nous demonstrerons tout ainsi qu'en la 45. p. de ce liure, que les composez des quarez de AC & BC; & de AD & DB ont vn mesme excez que les doubles rectängles de AC & BC; & de AD & DB. Mais d'autant que les composez quarez sont rationaux par l'hypothese; & par consequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectängles (lesquels sont mediaux par le corol.

de le 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui est contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne maieure AB, ne sera diuisée en ses noms en autre point qu'en C. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, est diuisée en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB,  diuisée en ses n^{os} au point C, en sorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel; & que le composé de leurs quarez soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, cōme veut en la 41. p. 10. le dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C.

Car il s'ensuiuroit mesme absurdité qu'en la precedente prop. sçauoir que si on la diuisoit encor es au point D, il s'ensuyuroit comme là, que l'excez tant des quarez, que des rectangles, seroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux medaux, est diuisée en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne pouvant deux mediaux AB , diuifée en ses noms au poinct C , (comme en la figure mise a la page 536.) en sorte que AC & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, comme veut la 42. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diuifer icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C .

Car si faire se peut, qu'icelle AB soit encore diuifée au poinct D : & sur la rationele proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45. prop. 10. sçauoir est le rectangle EG egal au quarré de AB , & EH egal aux deux quarez de AC & CB : & partant IG , egal au double du rectangle de AC & BC , (comme il a esté demonsté en ladite 45. prop. 10.) & les deux rectangles EH & IG , qui sont mediaux par la susdite demonstration, seront les lignes FH & HG rationeles: mais le composé des quarez de AC & BC est incommensurable au double de leur rectangle: (car par l'hypothese il est incommensurable à iceluy rectangle de AC , CB ,) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommensurables. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. AB sera binome, diuifé en ses noms au poinct H . Que si on veut dire que AB peut encore estre diuifé en ses noms au poinct D : il s'en suyra, cōme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG , diuifé en ses noms au poinct H , se pourroit encore diuifer en ses noms au poinct K , contre la 42. prop. 10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuifée en ses noms qu'au seul poinct C . Ce qu'il falloit demonstter.

SECONNES DEFINITIONS.

Une ligne rationele estant proposée, & le binome divisé en ses noms: lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longueur à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome premier.

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longueur à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome second.

3. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longueur à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome troisieme.

Es lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longueur à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome quatrieme.

5. Mais si le plus petit nom est com-

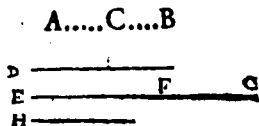
menfurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne est appelée Binome cinquiesme.

6. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée ; la toute soit appelée Binome sixiesme.

Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposée : parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six.3.
Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres quarréz AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29. p. 10.) desquels l'excez



AC ne soit quarré, à fin que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient entr'eux comme quarré à quarré : Soit vne rationele proposée D, à laquelle soit pris EF commensurable en longitude : & icelles D & EF seront rationeles commensurables en longitude. En apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit fait que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG. Je dis que la toute EG est binome premier.

Car puis que les quarez de EF, FG qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC, sont commensurables par la 6. prop. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensurables au moins en puissance : Et d'autant que EF est rationele, aussi FG sera rationele. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarez d'icelles rationeles EF, FG ne sont comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF FG sont incommensurables en longueur par la 9. p. 10. elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG : soit donc du quarré de H, (iceluy quarré sera trouué par le lemme qui suit la 14. p. 10.) Et puis que cōme le nombre AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB est à CB comme nombre quarré à nōbre quarré : donc le quarré de EF sera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF, H sont cōmens. en longueur par la 9. p. 10. Veu donc que EF plus grand nom est commens. en longueur à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commens. en longueur ; EG sera binome premier par la 1. des secondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier : Ce qu'il falloit faire.

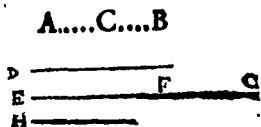
S C H O L I E.

Soit la rationele proposée D 8, & EF 6. faisant dont que.

comme AB 9 est à AC 5, ainsi 6 quarré de EF , soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant la souste EG , sera $6 + \sqrt{20}$, qui est binome premier; car le plus grand nom est commensurable à nombre absolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'un quarré dont la racine est commensurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier sera trouué plus briefuement que dessus, posant quelque nombre pour plus grand nom, & pour le moindre la racine quarré des trois quarts de sa puissance. Ainsi posant 8 pour le plus grand nom, son quarré sera 64, dont le quart soustrais reste 48; & partant 8, $+ \sqrt{48}$ sera binome premier.

PROBL. 14. PROP. L.
Trouuer vn Binom second.

Estans trouuez les deux nombres quarez AB, CB , comme la prop. precedente, & pris FG commensurable en longitude à vne



rationele proposée D : icelles D & FG seront rationeles commensurables: puis apres par le corol. de la 6. p. 10. soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB : ainsi le quarré de FG soit au quarré de EF . Je dis que EG est binome second.

Car on demonstrera premierement tout ainsi qu'en la precedente que EG est binome. Et puis que comme le nombre AC est au nombre AB , ainsi le quarré de FG est au quarré de EF : en changeant comme AB à AC , ainsi le quarré de EF est au quarré de FG . Mais AB est plus grand que AC : Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG ,

& soit du quarré de H. Nous demonſtrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF ſont commenſurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy eſt commens. en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationelle D : & par les ſec. def. EG, ſera binome ſecond. Nous auons donc trouué vn binome ſecond, ainſi qu'il eſtoit requis.

S C H O L I E.

La rationelle propoſée D ſoit 7, & FG 5; faiſant donc que comme AC 5 eſt à AB 9, ainſi 25 quarré de FG ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera $\sqrt{45}$. & partant la ſomme EG ſera $\sqrt{45} + 5$, qui eſt binome ſecond; pour ce que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'un quarré, dont la racine eſt commensurable en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom eſt auſſi commensurable au nombre rationnel propoſé. Or pour trouuer plus breſuiement que deſſus iceluy binome ſecond, il ſaut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adiouſter le tiers, & la racine quarrée de ce qui en viendra ſera le plus grand nom. Ainſi prenant pour le moindre nom 6, ſon quarré eſt 36, dont le tiers luy eſtant adiouſté ſera 48: & partant $\sqrt{48} + 6$ ſera binome ſecond.

P R O B. 15. P R O P. 11.

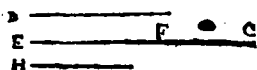
Trouuer vn binome troiſieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. ſoit pris vn autre nombre I qui

M m

ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC; comme nombre carré à nombre carré : (ce qui se fait prenant I nombre non carré prochainement plus grand que AC. Car puis

A.....C....B
I.....



qu'il n'est carré, il ne sera au carré AB, comme nombre carré à nombre carré. Derechef puis qu'il est non carré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'unité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonstré au schole de la 8. p. 8. Ils ne seront donc plans semblables : & partant ne seront entr'eux comme nombres quarez ; & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme I à AB. Ainsi le carré de D, au carré de EF : ainsi les quarez de D, & EF, estans comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables, au moins en puissance. D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est pas à AB, c'est à dire le carré de D au carré de EF, comme nombre carré à nombre carré ; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef soit fait par le susdit corol. que comme AB est à AC ; ainsi le carré de EF soit au carré de FG : & par la 6. prop. 10. iceux quarez de EF, FG, estans comme nombre à nombre, seront commensurables entr'eux : & parant les lignes EF, FG aussi commensurables, au moins en puissance ; & EF estant rationele FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est pas à AC, c'est à dire le carré de EF au carré

de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG seront incommensurables en longueur par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. la route EG sera binome. le dis aussi qu'elle est binome troisieme. Car d'autant, que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré; donc les quarrés de D, & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D, & FG, seront incommensurables en longueur par la 9. p. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonsturerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H sont commensurables en longueur. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy est commensurable en longueur, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longueur à la proposée rationele D, comme il a esté demonstré: partant EG sera binome troisieme par les secondes definitions. Nous avons donc trouué vn binome troisieme. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6: faisant donc que com-
M m ij

me 16, est à AB 9, ainsi 36 quarré de D soit au quarré de EF; icelle EF sera $\sqrt{54}$; & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{30}$: & partant la route EG sera $\sqrt{54} + \sqrt{30}$, qui est binome troiesieme, parce que l'un ny l'autre nom est commensurable en longueur à nombre rationel proposé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré, duquel la racine est commensurable en longueur au plus grand nom. Or pour trouver ce binome plus proprement que dessus, on posera la racine quarrée de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarrée des trois quarts du mesme nombre pour le moindre nom: Ainsi posant pour le plus grand nom $\sqrt{20}$, l'autre nom sera $\sqrt{15}$: & partant $\sqrt{20} + \sqrt{15}$ sera binome troiesieme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatriesime.

Estans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'un ny à l'autre comme nombres quarez: (comme nous auons enseigné au 3.

A.....C...B

scholie de la 29. prop. de ce liure) Soit exposé la rationelle D, & pris EF commensurable en longueur à icelle rationelle D; & par conséquent EF sera aussi rationelle: Et ayant construit le reste comme en la 29. p. 10. Nous demonst. comme la route EG est binome. Remarque que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du qu. de H; & que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré

Soit exposé la rationelle D, & pris EF commensurable en longueur à icelle rationelle D; & par conséquent EF sera aussi rationelle: Et ayant construit le reste comme en la 29. p. 10. Nous demonst. comme la route EG est binome. Remarque que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du qu. de H; & que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré

de EF au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne sera au quarré de H, comme nōbre quarré à nombre quarré: & par la 9. p. 10. les lignes EF & H, sont incommensurables en longueur: parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est incommensurable en longueur, & qu'icelle EF est commensurable en longueur à la rationelle proposée D; EG sera binome quatriesme par les def. secondes. Nous auons donc trouué vn binome quatriesme: Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle exposée D soit 8, & EF 6: faisant donc que comme AB y est AC 6, ainsi le quarré de EF, sçavoir 36, soit au quarré de FG; icelle FG sera trouuée de $\sqrt{24}$: & partant la somme EG sera $6 + \sqrt{24}$, qui est binome quatriesme; pource que le plus grand nom est commensurable en longueur au nombre rationnel proposé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'un quarré dont la racine est incommensurable en longueur à iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus proprement que dessus posant pour le plus grand nom quelque nombre; & pour le moindre la racine quarrée de la moitié du quarré d'iceluy. Ainsi posant 6. pour le plus grand nom, son quarré sera 36, dont la moitié sera 18, & partant $6 + \sqrt{18}$ sera binome quatriesme.

P R O B. 17. P R O P. LIII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la construction comme en la 50. p. on demonstrera comme en ladi-

te so. prop. que EG est binomé. Item que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Et comme en la precedente qu'icelles EF & H sont incommensurables en longueur: & partant par les secondes def. EG est binome cinquième. Nous auons donc trouué vn binome cinquième. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle proposée D soit 7, & FG 6: donc faisant que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de GF, sçauoir est 36, soit au quarré de EF: icelle EF sera trouuée de $\sqrt{54}$: partant la toute EG sera $\sqrt{54} + 6$, qui est binome cinquième: car le moindre nom est commensurable en longit. au nombre rationnel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré dont la racine est incommensurable en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer icel binome soit posé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy estant adioustée au mesme quarré, la racine du tout sera le plus grand nom: Ainsi posant 4 pour le moindre nom, son quarré sera 16, dont la moitié 8 luy estant adioustée ieront 24, dont la racine sera $\sqrt{24}$; & partant $\sqrt{24} + 4$ sera binome cinquième.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome sixième.

Soient exposez deux nombres AC, CB, tellement que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (ce qu'on fera adioustant ensemble deux nombres premiers

entr'eux : Car
par la 30. p. 7.
le total sera
aussi premier à
chacun d'eux;
& partant ne
sera à l'un ny

A.....C...B
I.....

D —————
E ————— F ————— G
H —————

à l'autre. cōme nombre quarré à nombre quarré, par les choses demōstrées à la fin du 8. liure) Et soit pris quelque autre nombre non quarré I, à fin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres soit vne rationelle proposée D: & par le corol. de la 6. p. 10. soit fait que cōme I est à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: & ayāt acheué comme en la 51. p. 10. nous demonstrerons comme là que EG est binome: en apres que D & FG sont incommens. en longueur, & que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstrerons cōme en la 49. p. que par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par consequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. p. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longueur. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy est incommens. en longueur: & l'un ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en longueur à l'exposée rationelle D, par les secondes def. EG sera binome sixiesme. Nous auons donc trouué vn binome sixies. Ce qu'il falloit faire.

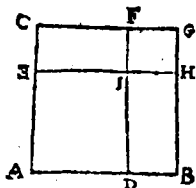
S C H O L I E .

La rationelle proposée D soit 6 : faisant que comme I 6
M m iiii

est à AB^8 , ainsi le quarré de D , c'est à scz auoir 36, au quarré de EF : icelle EF sera trouuée de $\sqrt{36}$: & faisant que comme AB^8 est à AC^3 , ainsi 48 quarré de EE soit au quarré de FG : icelle FG sera trouuée de $\sqrt{30}$: partant la toute EG sera $\sqrt{48} + \sqrt{30}$, qui est binome sixiesme: car l'un & l'autre nom est incommensurable en longitude au nombre rationnel proposé, & le plus grand nom pent plus que le moindre d'un quarré, donc la racine est incommensurable à iceluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que dessus tel binome il ny a qu'à prendre les racines quarrées de deux nombres non quarréz, donc l'un soit double de l'autre: Ainsi posons $\sqrt{12}$ pour le plus grand nom l'autre sera $\sqrt{6}$: & partant $\sqrt{12} + \sqrt{6}$ sera binome sixiesme.

L E M M E.

Les quarréz AI , IG estans conioincts à l'angle I , tellement que les costez DI , IF fassent vne seule ligne droite DF ; & par consequent les costez EI , IH aussi vne seule ligne droite EH , estant acheué le parallelogramme BC . Je dis qu'iceluy est quarré: & EF estre rectangle moyen proportionnel entre les quarréz AI , IG : & EG moyen proportionnel entre les quarréz AG , IG .



Car d'autant que EI est égale à ID , mais HI à IF : la toute EH sera égale à la toute DF . Mais par la 34. p. 1. la ligne EH est égale à l'une & à l'autre d'icelles AB , CG : & DF à AC , BG : & par consequent chacune d'icelles AB , CG est égale à l'une & à l'autre AC , BG : donc le parallelogramme BC est equilateral. Mais par la 29. proposition 1. il est aussi rectangle, & partant quarré. De rechef puis que comme DI est à IF , ainsi EI à IH . Mais par la 1. prop. 6.

comme DI à IF , ainsi AI à EF : & comme EI à IH , ainsi EF à IG : donc comme AI à EF , ainsi EF à IG : & partant E est moyen prop. entre AI , IG . Et finalement ven que cõme AE à EC , ainsi CF à FG , icelles estans egales chacune à la sienne: & en composant comme AC à EC , ainsi CG à FG . Mais cõme AC à CE , ainsi AC à EG : & comme CF à FG ainsi EG à IG par la 1. prop. 6. Donc comme AG à EG , ainsi EG à IG ; & par consequent EG est moyen prop. entre AG , IG .

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce lemme: mais *Clauius* le propose ainsi.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionnel entre les quatre d'icelles. Item le rectangle contenu sous la toute, & vne des parties, est moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Ce qui est la mesme chose que dessus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

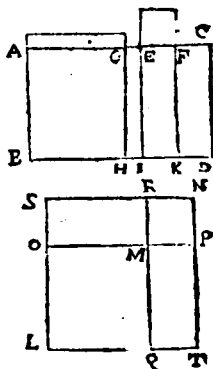
Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome premier, la ligne pouuant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome premier AC : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationnelle appelée binome.

Car d'iceluy binome AC , le plus grand nom soit AE : donc par la def. AE , EC sont rationnelles com-

menf. en puissance seulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longit. & aussi AE sera commens. en longit. à la rationelle proposée AB. Soit coupée EC en deux également en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commens. en long. si sur icelle AE on applique un rectangle égal au quart du quarré de EC, c'est à dire au quarré de EF, & defaillant d'une figure quatrée, il diuifera icelle AE en parties commens. en long.

par la 18. prop. 10. soient donc icelles parties AG, GE: & par les poinçts G, E, F soient menées GH, EI, FK parallèles à icelles AB, CD: puis par la 14. p. 2. soient décrits les quarez LM, MN égaux aux deux rectangles AH, GI, & disposez en sorte que OM, MP fassent une ligne droite: puis soit acheué le rectangle ST, lequel sera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la construction le rectangle de AG, GE est égal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE seront proport. par la 17. prop. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI seront aussi proportionnaux: parquoy EK sera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs égaux quarez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR est aussi moyen prop. entre iceux quarez LM, MN: donc OR, EK seront égaux. Mais par la 43. prop. 1. OR, QP sont égaux: & par la 36. prop. 1. EK est égal à FD: donc QP sera aussi égal à FD: & par consequent tout le quarré LN égal à tout le rectangle

AD: & ainsi la ligne OP peut le rectangle AD: le dis donc qu'icelle OP est binome.

Car puis que AG, GE ont esté demonstrees commens. en longitude, la toute AE sera aussi commens. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE est aussi commensurab. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle A est aussi commens. en long. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB estant rationelle, AG, GE seront aussi rationelles: & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus sous icelles rationelles, seront rationaux: donc aussi rationaux leurs egaux quarrés LM, MN: & par consequent les lignes OM, MP seront aussi rationelles. Et d'autant que AE est incommens. en longitude à EC, mais commens. à AG, & EC à sa moitié EF, par le scholie de la 14. prop. 10. AG, EF seront incommens. en long. parquoy AH, EK qui ont mesme raison que AG, EF par la 1. pr. 6. sont aussi incommens. par la 10. p. 10. & par consequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. prop. 10. les lignes OM, MP sont aussi incommens. en longit. puis que par la 1. p. 6. elles sont en mesme raison que LM, QP. Mais OM, MP, ont esté demonstrees rationelles: & partant elles sont rationelles commens. en puissance seulement: donc la route OP pouvant le rectangle AD est binome par la 37. p. 10. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome premier, &c. Ce qu'il falloit prouver. ●

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC $4 + \sqrt{12}$. Donc le rectangle AD sera $20 + \sqrt{300}$: Et, puis que AE plus grand nom du binome est 4, & EF moitié du plus petit nom EC, est $\sqrt{3}$,

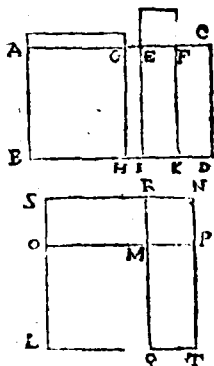
AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera $\sqrt{15}$: Ainsi GI est 5, & MP $\sqrt{5}$. Mais EF est $\sqrt{3}$, & EI egale à AB: donc EK sera $\sqrt{75}$, & son double ED $\sqrt{300}$. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produicte MT $\sqrt{75}$, egal à EK. Mais à iceluy MT est egal MS: donc MS, MT ensemble seront aussi $\sqrt{300}$. Or les quarrés MN 15, MN 5, son ensemble 20: Partant sous le quarré LN est $20 + \sqrt{300}$, & son costé OP ou LT $\sqrt{15} + \sqrt{5}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationnelle AB & du binome second AC: Je dis que (apres avoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationalle appelée bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longit. à la rationnelle AB: Item AG & EG (qu'on prouuera estre commensurable en longueur entr'elles, comme en la precedente, &



par la 16. prop. 10. à leur toute AE) seront par la 14. prop. 10. aussi incommensurables en longueur à icelle AB, laquelle étant rationnelle, icelles AG, GE seront aussi rationnelles : & par conséquent commens. en puissance seulement à icelle rationnelle AB. Donc par la 22. prop. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux : & leurs egaux quarrés LM, MN aussi mediaux : Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longueur à la rationnelle AB, le rectangle ED sera rationnel par la 20. prop. 10. aussi sera sa moitié EK : & par conséquent son egal QP compris des deux mediales OM, MP : & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationnelle AB soit 5, & AC $\sqrt{48+6}$: donc le rectangle AD sera $\sqrt{12000+30}$. Et puis que AE est $\sqrt{48}$, & EC 6 : EF sera 3, & son quarré 9, auquel est antposé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$: parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{675}$, & par conséquent la ligne OM, qui peut iceluy sera $\sqrt{675}$: ainsi GI sera $\sqrt{75}$, & MP $\sqrt{75}$. Or EC est 6 : partant ED double de MS $\sqrt{50625}$, c'est à dire 15, est 30 ; & par conséquent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarrés LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{75}$, & des deux rectangles MS, MT 30, sera $\sqrt{1200+30}$, & son costé OP ou LT $\sqrt{675+75}$, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome troisieme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationelle nommée bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisieme AC (apres avoir construit comme aux predentes.) le dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle appelée bimediale seconde.

Car on prouvera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commensurables en puissance seulement : Item d'autant que AC est binome troisieme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationelle AB; & par la 22. prop. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK : Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. prop. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC $\sqrt{32} + \sqrt{24}$: Dont le rectangle AD sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$. Mais d'autant que AE est

$\sqrt{32}$, & $EC \sqrt{24}$; EF sera $\sqrt{6}$, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE , & partant AG sera $\sqrt{18}$, & $GE \sqrt{2}$. Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{450}$, & $GI \sqrt{50}$; & par consequent la ligne OM est $\sqrt{\sqrt{450}}$, & $MP \sqrt{\sqrt{50}}$. Et puis que El est 5 , & $EC \sqrt{24}$, le rectangle ED sera $\sqrt{600}$, lequel est double de $MT \sqrt{150}$. Donc tout le quarré LN , qui est composé des quarréz $LM \sqrt{450}$, $MN \sqrt{50}$, & des rectangles $MS, MT \sqrt{600}$; sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$; & partant son costé OP est $\sqrt{\sqrt{450} + \sqrt{50}}$, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.

Soit le rectangle AD , compris du binome quatriesme AC & de la rationnelle AB (apres avoir construit & démontré comme en la 55. p.) Je dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne irrationnelle qu'on appelle maieure.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est commensurable en longueur à la rationnelle AB , & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 19. prop. 10. le rectangle deffillant compris sous AG, GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuifera AE en AG & EG incommensurab. en longueur: & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Donc aussi incommens.

leurs egaux quarrez LM, & MN; & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris des rationelles AB, AE, est rationel par la 20. prop. 10. (qui est egal aux quarrez LM, MN). Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. estant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP est ligne majeure. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC 4 + $\sqrt{8}$: Donc le rectangle AD sera 20 + $\sqrt{200}$. Et puis que AE est 4, & E ($\sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle, sçavoir 2, ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE; la ligne AG sera 2 + $\sqrt{2}$, & GE 2 — $\sqrt{2}$: partant le rectangle AH sera 10 + $\sqrt{50}$, & GI 10 — $\sqrt{50}$; & par consequent OM est $\sqrt{(10 + \sqrt{50})}$ & MP $\sqrt{10 - \sqrt{50}}$. Or ED estoit $\sqrt{8}$; donc ED double du rectangle MT $\sqrt{50}$; sera $\sqrt{200}$. La somme des quarrez LM, MN, sera donc 20, à laquelle si on adiouste les plans TMS $\sqrt{200}$, on aura pour tout le quarré LN 20 + $\sqrt{200}$; & partant son costé OP sera $\sqrt{(10 + \sqrt{50}) + (10 - \sqrt{50})}$ ou $\sqrt{(20 + \sqrt{200})}$ qui est ligne majeure.

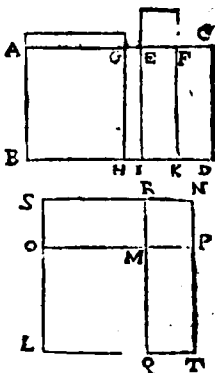
THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome cinquieme, la ligne qui peut iceluy rectan-

gle, est ligne irrationnelle pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome cinquiésme AC; le dis (apres auoir construit & démontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, est ligne irrationnelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquiésme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: & comme en la precedente AG & EG seront incommensurables en longueur: Et les lignes OM, MP seront incommensurables en puissance, & l'egal au composé de leurs quarez, scauoir le rectangle AI, est medial par la 22. proposit. 10. car les lignes AB & AE sont rationelles commensurables en puissance seulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont commensurables en longueur, par la 20. proposit. 10. ED est rationel: aussi sera sa moitié EK, & son egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP est ligne irrationnelle pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & $AC \sqrt{8} + 2$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{200} + 10$. Et d'autant que AE est $\sqrt{8}$, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE , le costé AG sera $\sqrt{2} + 1$; & $GE \sqrt{2} - 1$; & passant le rectangle AH sera $\sqrt{50} + 5$, & la ligne $OM \sqrt{50} + 5$; & $MP \sqrt{50} - 5$, puis que GI est $\sqrt{50} - 5$. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarez LM, MN , est $\sqrt{200}$, à laquelle adionstant les rectangles SMI 10, tout le quarré LN sera $\sqrt{200} + 10$; & par consequent son costé OP , est $\sqrt{(\sqrt{50} + 5) + (\sqrt{50} - 5)}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{200} + 10)}$, qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome sixiesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD , compris de la rationelle AB , & du binome sixiesme AC : (apres auoir construit & demonstté comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD) Je dis qu'icelle OP , est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les

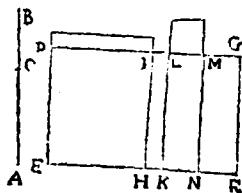
sous le carré LN sera $\sqrt{300 + \sqrt{200}}$; & par conséquent son côté OP sera $\sqrt{(\sqrt{75} + 5) + \sqrt{(\sqrt{75} - 5)}}$ ou bien $\sqrt{(\sqrt{300} + \sqrt{200})}$, qui est ligne pouvant deux mediaux.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six.5.

Le carré d'un binome, appliqué sur une ligne rationnelle, fait l'autre côté binome premier.

Soit le binome AB , le plus grand nom duquel est AC ; & sur la rationnelle DE soit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF égal au carré de AB : le dis que l'autre côté DG est binome premier.

Car sur la même DE soit construit le rectangle DH égal au carré de AC : & sur HI un autre rectangle IK égal au carré de CB : Il est donc évident par la 4. prop. 2. que le reste LF est égal à deux fois le rectangle de AC, CB : & en divisant LG également en M , & en menant MN parallèle à CD , chaque rectangle LN, MF sera égal au rectangle de AC, CB . Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationnelles commens. en puissance seulement; & leurs carrés seront rationaux. & leurs égaux rectangles DH & IK aussi rationaux; & par la 21. propo. 10. les côtés DI & IL seront rationnelles commensurables en longueur à la rationnelle DE , & entr'elles par la 12. proposit. 10. Et par la 16. proposit. 10. la toute DL sera commensurable



en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle sera rationnelle & commens. en longitude à DE rationnelle : Et d'autant que par la 22. prop. 10. le rectangle de AC, CB est medial, son double LF sera aussi medial : & par la 22. prop. 10. Iceluy medial LF estant appliqué sur la rationnelle LK, l'autre costé LG sera aussi rationnel incommens. en longit. à icelle LK, c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles sont rationnelles : elles seront donc commens. en puissance seulement ; & par la 37. prop. 10. DG est binome. Je dis en outre que c'est binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarréz d'icelles AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, IK : & par consequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL sera égal au quarré de LM : Et d'autant que les quarréz de AC, CB sont commens. (car icelles AC, CB sont posees commensurab. en puissance) leurs egaux DH, IK seront aussi commens. Donc aussi commens. en longitude les lignes DI, IL par les 1. propo. 6. & 10. p. 10. Et d'autant que les deux quarréz de AC & CB sont plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui suit la 44. prop. de ce liure : partant DK sera plus grand que LF ; & DL plus grand nom que LG : car icelles lignes sont entr'elles comme Dk à LF, par la 1. prop. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est égal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, & les parties DI, IL sont commens. en longitude : icelle DL peut plus que LG du quarré

d'une ligne qui luy est commun sur. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant esté démontrée commun. en long. à la rationelle DE, par les secondes def. DG sera binome premier. Donc le carré d'un binome appliqué sur une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

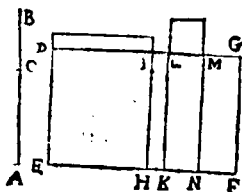
S C H O L I E.

Le binome AB soit $\sqrt{45} + 3$, & la rationelle DE 6. d'aurant que le plus grand nom AC est $\sqrt{45}$, son carré est 45, lequel appliqué sur DE 6, fait l'autre costé DI de $7\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB étant 3, son carré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9. Or le rectangle ACB est $\sqrt{405}$, & son double LF $\sqrt{1620}$. Donc la ligne FG sera $\sqrt{45}$: & par consequens la toute DG sera $9 + \sqrt{45}$, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le carré d'une bimediale premiere, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB divisée en les noms en C, dont le plus grand soit AC, (apres avoir construit comme en la precedente.) Je dis que DG est binome second.



Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38.

prop. 10. AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longueur à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrés sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommensur. en longueur à la rationelle DE : & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG sera binome. le dis d'avantage qu'il est binome premier. Car il se prouvera comme en la precedente, que DL est plus grand nom, & qu'il pent plus que le moindre LG du quarré d'une ligne quiluy est commens. en longueur. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longueur à la rationelle DE : & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'une bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La bimediale AB soit $\sqrt{180} + \sqrt{12}$, & la rationelle DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{108}$, son quarré est 108, lequel estant appliqué sur la rationelle DE 4, le costé DI sera $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. Ainsi aussi le moindre nom estant $\sqrt{12}$, son quarré est 12; & par consequent IL, est $\sqrt{\frac{3}{4}}$; & la toute DL $\sqrt{12}$. Or le rectangle de ACB est 6: & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3.

Donc la somme DG sera $\sqrt{12+3}$, qui est binome second.

THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale seconde, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisieme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Après auoir construit comme en la 61. p.) Je dis que DG est binome troisieme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC, BC sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial; partant les quarez d'icelles AC, CB seront commensurables & mediaux; & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. p. 10. le total DK est commensurable à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. proposit. 10. DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationelle DE, par la 23. propo. 10. son autre costé DL, sera rationel incommensurable en longueur à icelle DE. Derechef puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi; & iceluy LF estant appliqué sur la rationelle LK, son autre costé LG sera rationel incommensurable en longueur à LK: c'est à dire à DE. Donc l'une & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationelle & incommensurable en longueur à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il est euident par la 10. propo. 10. que le

quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurables en longueur.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrés de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrés de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommensurables en longueur par la 10. prop. 10. mais elles sont rationeles, & partant commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'auantage, qu'il est binome troisieme. Car il a esté démontré que les deux noms sont incommensurables en longueur à la rationele DE: Et se prouuera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur: & par les secondes def. DG est binome troisieme. Donc le quarré d'une bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

AB soit $\gamma\gamma 72 + \gamma\gamma 8$, & DE 4. Donc DH sera $\gamma 72$, IK $\gamma 8$, & LN ou MF $\gamma 24$, qui appliquez sur DE; DI sera $\gamma 4\frac{1}{2}$, IL $\gamma\frac{1}{2}$, & LM ou MG $\gamma 1\frac{1}{2}$: & partant la toute DL sera $\gamma 8$, & LG $\gamma 6$. Parquoy la toute DG est $\gamma 8 + \gamma 6$, qui est binome troisieme.

THEOR. 46. PROP. LXIV.
Le quarré d'une ligne maieur appliqué

sur vne ligne rationele, faict l'autre
costé binome quatriesme.

Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construit comme en la 61. p. de celiure) ie dis que DG est binome quatriesme.

Car puis que AB est ligne maieur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel: partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commensurable en longueur à icelle DE par la 21. prop. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommensurable en longueur à DE. Et partant par la 13. prop. 10. les rationeles DL & LG, seront incommensurables en longueur. Donc commens. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommensurables en puissance, leurs quarez seront incommensurables: partant aussi leurs egaux rectangles DH, Ik, & les lignes DL, & IL incommensurables. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du carré de LG, & defaillant d'une figure carrée, lequel diuise icelle DL en parties incommensurables en longueur, par la 19. p. 10. DL, qui est commens.

en longitude à la rationelle DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome quatriesme. Donc le quarré d'une ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}} + \sqrt{10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}}$, & la rationelle DE soit 5. Donc le rectangle DH sera $10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}$: LN ou MF $\sqrt{62\frac{1}{2}}$, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, IL $2 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$, & LM ou MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. Parquoy DL sera 4, & LG $\sqrt{10}$; & par consequent la route DG est $4 + \sqrt{10}$, qui est binome quatriesme.

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouvant vn rationnel & vn medial appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouvant vn rationnel & vn medial AB, diuisée en ses noms au point C, dont le plus grand est AC: (apres auoir construit comme à la 61. prop.) Je dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouvant vn rationnel, & vn medial, AC, CB, par la 41. p. 10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationnel, & le composé de leurs quarrés medial: Partant le rectangle Dk egal au composé d'iceux quarrés est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationnel

commensurable en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangie de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele com. en long. à icelle DE; & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulement, & par la 36. prop. 10. DG sera binome. Je dis de plus, qu'il est binome cinquiésme. Car LG est commensurable en longueur à la rationele DE, & si on prouvera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par les secondes definitions DG est binome cinquiésme. Donc le quarré d'une ligne pouvant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{125+5} + \sqrt{125-5}$, & la rationele DE 5. Donc le rectangle DH sera $\sqrt{125+5}$, IK $\sqrt{125-5}$, & LN, ou MF 10, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $\sqrt{5+1}$, LV $\sqrt{5-1}$, & LM ou MG 2. Parquoy DL sera $\sqrt{20}$, & LG 4, & par consequent la souste DG est $\sqrt{20} + 4$, qui est binome cinquiésme.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouuât deux mediaux appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome sixiésme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (Après auoir construit comme aux precedentes) ie dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrés aussi medial: ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommensurables; & par la 23. p. 10. iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommensurables, seront aussi entr'eux incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. Donc les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: & comme il a esté demonstré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome sixiesme. Parquoy le quarré d'une ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

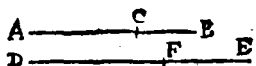
S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{252} + \sqrt{72}$ & $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, IK $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & LN, ou MF 180, qui appliquez à DE,

le costé DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, IL $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou MG $\sqrt{5}$.
 Partant DI est $\sqrt{28}$, & LG $\sqrt{20}$; & par consequent la toute
 DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.
 La ligne commensurable en longueur
 au binome, est aussi binome de mes-
 me ordre.

Soit quelconque bino-
 me AB divisée en ses
 noms au point C, des-
 quels AC est le plus



grand, & CB le moindre: & soit la ligne droite DE
 commensurable en longueur au binome AB. Je dis
 que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.

Car avant fait par la 12. prop. 6. que comme la
 toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchée AC
 soit à la retranchée DF, par la 19. p. 5. le reste CB sera
 au reste FE, cōme la toute AB à la toute DE. Et pource
 AB, DE, sont commensurables en longueur par la
 10. prop. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi com-
 mens. en longueur. Mais par la 37. p. 10. AC, CB,
 sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles.
 Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en
 permutant comme AC sera à CB, ainsi DF à FE.
 Mais AC, CB sont rationeles commensurables en
 puissance seulement; donc aussi DF, FE seront ra-
 tioneles commensurables en puissance seulement.
 Et partant par la 37. prop. 10. DE est binome. Main-
 tenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre
 que AB.

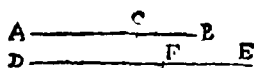
Car si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit communurable en longitude, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est communurable en longitude à la rationelle proposée, aussi sera DF par la 12. prop. 10. veu que l'une & l'autre est communurable en longitude à la mesme AC : Et partant AB, & DE seront binome premier : Si BC est communurable en longitude à la rationelle exposée, aussi sera FE : ainsi AB & DE seront binome second : si AC & BC sont incommens. en longitude à la rationelle, aussi seront DF & FE : & par les def. AB & DE seront binome troisieme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, aussi par la 15. prop. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE seront binome ou quatriesme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre. Donc la ligne communurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne communurable en longitude à une bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisée en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand ; & CB le plus petit, & à icelle AB soit communurable en longitude la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, comme la



route AB, à la route DE : & partant par la 10. p. 10. AC sera commenturable en longueur à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales : donc par la 24. p. 10. DF, FE, commenturables à icelles, sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant comme AC à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont commensurables en puissance seulement, par la 38. prop. 10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10. prop. 10. mais elles sont aussi mediales : & partant par la 38. ou 39. prop. 10. DE sera bimediale. D'auantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'auantage que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22. prop. 6. Le quarré de AC sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'auantage qu'ils ont les costez prop.) Mais le quarré de AC est commenturable au quarré de DF, ainsi par la 10. prop. 10. les rectangles seront aussi commenturables : que si l'un est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que si l'un des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39. prop. 10. Ainsi DE sera bimediale, & en mesme ordre que AB. Parquoy la ligne commensurable en longueur à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commensurable à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur.

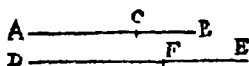
Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms A ——— C ——— B
 en C, & à icelle soit com- D ——— F ——— E
 mensurable DE. Je dis
 qu'icelle DE est aussi ligne maieur.

Car (apres auoir construit comme aux precedentes) AC sera à CB comme DF à FE, & AC commensurable à DF, & CB à FE : mais par la 41. proposit. 10. AC & CB sont incommensurables en puissance ; les lignes DF & FE le seront donc aussi. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont proport. par la 22. p. 6. leurs quarrez seront proportionaux : & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, comme les deux DF & FE sont au seul de FE, & en permutant les deux quarrez de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commensurables leurs quarrez seront aussi commensurables, & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. prop. 10. commensurables aux deux de AC & BC : & seront rationaux comme iceux. Item on prouera comme en la precedente que le rectangle de DE & FE est commensurable au rectangle de AC & BC : lequel estant medial, par la 40. prop. 10. aussi sera celuy de DF & FE, par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE sera ligne maieure. Donc la ligne commens. à vne ligne maieure, est aussi maieure. Ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, & vn medial, est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisée en ses noms en C, & à icelle



soit commensurable la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Car (après telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommensurables en puissance, aussi seront DF & FE. Item que le composé des quarez de AC & BC sera commensurable au composé des quarez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC aussi commensurable au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. p. 10. le composé des quarez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & par ainsi le toute DE sera ligne pouuant vn rationel, & vn medial, par la susdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne

pouuant deux mediaux, est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuifée en ses noms au poinct C, & à icelle soit commens. DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant deux mediaux.

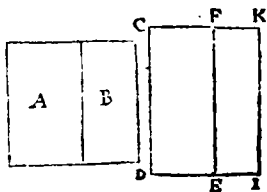
Car (apres auoir construit comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissance: que le composé de leurs quarez est medial, & leur rectagle aussi medial: mais on prouuera aussi comme en la 69. p. que le composé des quarez de AC & BC, est au composé des quarez de DF & FE, comme le carré de CB au carré de FE: & encore comme en la 68. p. que le carré de CB est au carré de EF comme le rectangle de AC & BC, est au rectangle de DF & FE: donc par la 11. p. 5. le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le composé des quarez de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarez de DF & FE est incommens. à leur rectangle, & par la 42. p. 10. DE est ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commens. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 54. PROP. LXXII. six. 7.

Si vne superficie rationele, & vne mediale s'ot iointes; la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimedia-

le premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuāt vn rationel, & vn medial.

Soient ioinctes deux superficies A rationele, & B mediale : ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bi-mediale premiere, ou ligne maieur, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Car premierement les deux superficies ne scauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B : Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A : & sur EF vn autre rectangle FI egal à B, à fin que tout le rectangle CI soit egal aux deux superficies proposées A & B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele communurable en longueur à icelle CD par la 21. p. 10. & aussi FK rationele, mais incommunurable en longueur à la mesme CD par la 23. prop. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK seront incommunurables en longueur; donc communurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. CK sera binome diuisé en ses noms en F. Mais puis que A a esté posée plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI; & partant CF sera plus grande que FK par la 1. p. 6. Parquoy CF sera le plus grand nom du binome Ck. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'une ligne

qui luy est commensurable ou incommensurable en longueur. Si commens. (estant CF commens. en longueur à la rationelle CD) CK sera binome premier par la 1. des secondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CK sera binome quatriesme, par la 4. des secondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne majeure.

Que si la figure A estoit plus petite que B, aussi le rectangle CE seroit plus petit que le rectangle FI; & CF seroit le plus petit nom commens. à la rationelle CD: & par ce moyen CK sera binome second, ou cinquiesme: si binome second, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale premiere. Si binome cinquiesme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouuant vn rationnel & vn medial. Si donc vne superficie rationelle, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

SCHOLIE.

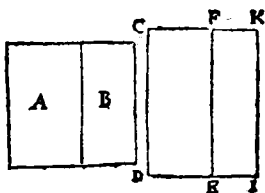
Si la superficie rationelle A est 7, & la mediale BV 48, la ligne pouuant icelles adioustées ensemble sera $2 + \sqrt{3}$, qui est binome premier: si A & B sont 21 & $\sqrt{432}$, la ligne pouuant icelles sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second: mais elle sera $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome troisieme, si A est 14 & B $\sqrt{192}$: mais si A est 6, & B $\sqrt{32}$, elle sera $2 + \sqrt{2}$, qui est binome quatriesme: si A est 3 & B $\sqrt{8}$, elle sera $\sqrt{2} + 1$ qui est binome cinquiesme: & si A est 5, & B $\sqrt{24}$, la ligne pouuant la composée d'icelles sera $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ qui est binome 6: mais si A est 4 & B $\sqrt{18}$, la ligne pouuant la superficie composée d'icelles sera $\sqrt{8} + \sqrt{2}$, qui est mediale premiere: mais si A est 6, & B $\sqrt{12}$, la ligne pouuant la composée d'icelles sera $\sqrt{(6+12)}$ ou $\sqrt{(3+\sqrt{6})} + \sqrt{(3-\sqrt{6})}$: & finalement si A est 2, & B $\sqrt{8}$, la ligne pouuant icelles sera

$\sqrt{y^2+1}$, ou $\sqrt{y^2+1} + \sqrt{y^2-1}$, qui est ligne pouvant un rationnel & un medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont jointes, la ligne qui peut tout le composé est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.

Soient jointes ensemble deux superficies mediales incommens. A & B : Je dis que la ligne droite qui peut le composé d'icelles superficies A & B est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.



Ayant fait sur la rationelle CD pareille construction qu'en la precedente p. les rectangles CE & FI seront mediaux & incommens. Et par la 23. p. 10. CF FK seront rationelles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationelle CD : & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom : Car CF & FK ne scauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longueur : Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur. Si commens. CK est binome troisieme par la 3. d. secondes, (estant les deux noms CF, FK incommens. en longueur à la

rationele CD) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale seconde: Si incommens. par la 6. des secondes def. CK sera binome sixiesme: & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy si deux superficies mediales incommens. sont ioinctes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Si A est $\sqrt{50}$, & B $\sqrt{48}$: la ligne pouuant la composée d'icelles sera $\sqrt{50} + \sqrt{48}$, qui est bimediale seconde: mais si A est $\sqrt{12}$, & B $\sqrt{8}$, ladite ligne pouuant icelles sera $\sqrt{12} + \sqrt{8}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{3}+1)} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)}$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

C O R O L A I R E.

De toutes ces choses on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui suyuent icelle sont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'une ligne mediale, appliqué sur une ligne irrationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à la rationele à laquelle il est appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre costé binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'une bimediale premiere, fait l'autre costé binome second, par la 62. p. 10.

Le quarré d'une bimediale seconde, fait l'autre costé binome troisieme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatrieme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouuant un rationel & un medial fait l'autre costé binome cinquiesme, par la 65. p. 10.

Le carré d'une ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre costé binome sixiesme, par la 66. p. 10.

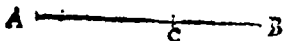
Mais il faut tousiours entendre qu'ils soient appliquez sur une ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationeles sont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES
sixaines des lignes irrationeles par le
retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'une ligne rationele, est retranchée
une ligne rationele commensurable
en puissance seulement à la toute ; le
reste est irrationel : & soit appelé
Residu.

Soit retranchée de la
rationele AB la ratio-
nele AC, en sorte que



AB & AC, soient rationeles commensurables en
puissance seulement : Je dis que le reste CB est irra-
tionel.

Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le quar-
ré de AB est au rectangle de AB & AC : mais AB est
incommensurable en longueur à AC. Donc par la
10. p. 10. Le carré de AB est incommens. au rectan-
gle de AB & BC : Partant aussi à son double : mais

les quarez de AB & AC, sont posez commensur. Donc par la 16. prop. 10. les deux ensemble setont commens. au seul de AB: & partant puis que le quarré de AB est incommensurable au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarez de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels avec le quarré de CB, estans egaux aux deux quarez de AB & AC par la 7. prop. 2. il s'ensuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB, & AC seront incommensurable à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17. prop. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarez de AB & AC) seront incommens. au quarré de CB: Mais iceux quarez de AB, AC, estans rationaux; (car ils sont descrits sur lignes rationelles) le quarré de CB sera irrationel: Partant la ligne CB sera aussi irrationelle appelée Residu. Si donc d'une ligne rationelle est retranché vne ligne rationelle commensurable en puissance seulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

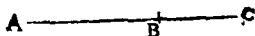
La rationnelle AB soit 2, & AC $\sqrt{3}$: Donc le reste BC sera $2 - \sqrt{3}$. Or en ceste prop. & és 5 suivantes, on Euclide monstre l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si aux lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est irrationel appelé residu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, est retranchée

vne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec la toute vn rectangle rationel, le reste est irrationel: Soit appellé residu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle est retranchée la mediale AB, en sorte que AB & AC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Je dis que le reste BC est irrationel.



Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarrés seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel, vn seul rectangle ayant esté posé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, avec le quarré de BC sont egaux aux quarrés de AB & AC: donc aussi deux fois le rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC seront incommensur. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. prop. 10. le quarré de BC sera incommensur. au double du rectangle AB & AC, mais iceluy double est rationel: donc le quarré de BC sera irrationel; & partant la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial premier.

SCHOLIE.

La mediale AC soit $\sqrt{54}$, & la retranchée AB $\sqrt{24}$: donc le reste BC sera $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale est retranchée
une ligne mediale commens. en puissance
seulement à la toute, comprenant
avec icelle un rectangle medial,
le reste est irrationnel : Soit appelé re-
sidu medial second.

Soit la mediale AB , de
laquelle est retranchée la me-
diale AC , en sorte que AB
& AC soient commens. en puissance seulement,
comprenant un rectangle medial : Je dis que le reste
 CB est irrationnel.

Car puis que les quarez de AB & AC sont com-
mensurab. par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera
aussi commensur. à vn chacun d'eux : & chacun d'i-
ceux estant medial, (pource que les lignes AB , AC
sont posées mediales) aussi le composé d'iceux quar-
rez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme
aussi le double du rectangle de AB , AC puis que le
seul rectangle de AB , AC est posé medial. Veu donc
que par la 7. prop. 2. le composé des quarez de AB ,
 AC , est egal au double du rectangle de AB , AC ,
avec le carré de CB : le composé des quarez de
 AB , AC , qui est medial, excèdera le double du re-
ctangle de AB , AC , qui est aussi medial, du carré de
 CB . Mais par la 27. p. 10. un medial n'excede pas un
medial, d'un rationnel : donc le carré de CB n'est pas

rationnel; & partant il est irrationnel; & la ligne BC sera aussi irrationnelle, qu'on appellera residu medial second. Parquoy si d'une ligne mediale on retranche une ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

La mediale AB soit $\sqrt{18}$, & AC $\sqrt{8}$: donc le reste CB sera $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationnel, le reste sera irrationnel : Soit. appelé ligne mineure.

Soit la ligne droite AC, de laquelle est retranchée AB incommensurable en puissance à la toute AC, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés est rationnel : Je dis que le reste BC est irrationnel.



Car puisque le composé des quarrés de AB, & AC est rationnel, il est incommensurable au rectangle de AC & AB, lequel est medial : partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le composé

des quarez de AB, AC est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le composé d'iceux quarez de AB, AC sera aussi incommens. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy composé est posé rationel, par la 10. def. le quarré de BC est irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

Soit la ligne AC $\sqrt{18 + \sqrt{108}}$, & AB $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$:
le reste BC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{108}} - \sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial, le reste sera irrationel: Soit appelé ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial.

Soit la ligne droite AC, de laquelle est retranchée AB incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel, & le composé de leurs quarez est medial: le dis que le reste BC est irrationel.

• A ————— B — C

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationnel, aussi sera son double, & partant par la 10. def. il sera incommensurable au composé des quarréz de AC & AB, lequel est medial, c'est à dire irrationnel. Mais le composé d'iceux quarréz par la 7. prop. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC: Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle est rationnel, par la 10. definit. le quarré de BC sera rationnel, & la ligne BC irrationnelle, appelée ligne faisant avec vne superficie rationnelle, vn tout medial, ainsi nommée à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté avec vne superficie rationnelle fait vn tout medial, comme il apparoiſtra à la 109. prop. 10. Parquoy si d'une ligne droicte est retranchée, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

Si AC est $\sqrt{216+72}$, & AB $\sqrt{216-72}$; le reste BC sera $\sqrt{216+72}-\sqrt{216-72}$.

THEOR. 61. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droicte, est retrâchée vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs

quarrez aussi medial, le reste est irrationnel : soit appelé ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droite

AB, de laquelle est retranché la ligne AC in-



commensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial : le dis que le rectangle BC est irrationnel.

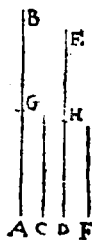
Car puis que par la 7. proposit. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC : iceluy composé des quarrez excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. proposit. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'un rationnel : Donc le quarré de BC n'est pas rationnel ; & partant est irrationnel, & la ligne BC aussi irrationnelle, qu'on appellera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial : ainsi appelée parce que le quarré d'icelle avec vne superficie mediale fait vn tout medial. Parquoy si d'une ligne droite est retranchée vne ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{1(80+V60)}$, & AC $(\sqrt{180}-\sqrt{60})$, le reste CB sera $\sqrt{(\sqrt{180}+\sqrt{60})}-\sqrt{(\sqrt{180}-\sqrt{60})}$.

L E M M E.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F , & que GB excetz d'entre AB & C soit egal à DH excetz d'entre DE & F ; aussi en permutant l'excetz d'entre AB & DE sera egal à l'excetz d'entre C & F . Car puis que GB est l'excetz d'entre AB & C , AG sera egal à C : En la mesme maniere DH sera egal à F . Donc l'excetz d'entre AG & DH sera egal à l'excetz d'entre C & F , puis que ces grandeurs cy sont egales à celles-là, chacune à la sienne, & partant adionstant à AG & DH choses egales GB & HF , l'excetz d'entre les toutes AB , & DE sera toujours egal à l'excetz d'entre C & F . Ce qui estoit proposé.



C O R O L L A I R E.

De ces choses appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles seront aussi en proportion Arithmetique.

T H E O R. 62. P R O P. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'une seule ligne rationelle commens. en puissance seulement à la route.

Soit le residu AB , auquel $A \quad B \quad C \quad D$
conuienne BC , en sorte que
 AB & BC soient rationelles commens. en puissance seulement: le dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car

Car s'il est possible, en soit vne autre BD, s'accordant avec icelle AB, en sorte que AD, & BD soient rationeles commensurables en puissance seulement. Maintenant par la 7. prop. 2. les deux quarréz de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarréz de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en permutant par le lemme precedent, les quarréz excéderont autant les quarréz, que les rectangles excèdent les rectangles: & d'autant que les quarréz sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. prop. 10. vn seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. prop. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationelle commensurable en puissance seulement à la toute. Parquoy au residu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AB, auquel la me

diale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne que BC en la mesme sorte.

A B C D

Car si faire se peut on soit vne autre BD. Maintenant par la 7. proposit. 2. il se prouuera comme en la presed. que l'excez d'entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, est rel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel; & partant l'excez d'entre les quarrez qui sont mediaux (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc à AB n'a peu conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit comment. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.

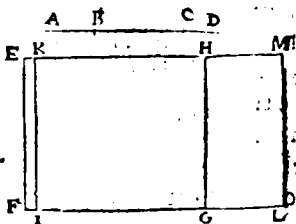
THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conioincte qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant avec icelle vn rectangle

medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut pas cōuenir vne autre ligne que BC, en la mesme sorte.

Car si faire se peut, en soit conioincte vne autre BD en la sorte requise. Et sur la ratione-



le proposee EF, soit appliqué le rectangle EG égal aux deux quarréz de AC, BC; & à la mesme EF soit encore appliqué EI égal au quarré de AB: parquoy par la 7. p. 2. le reste KG sera égal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item sur la mesme rationelle soit encore appliqué le rectangle EL égal aux deux quarréz de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est égal au quarré de AB, aussi KL sera égal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la susdicte 7. p. 2.

Maintenant les quarréz de AC & BC sont mediaux (estans faicts de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial: parrant leurs egaux rectangles EG, & KG serōt mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle EF, auront les autres costez EH, & KH rationaux comm. en puiss. seulement à EF par la 23. p. 10. en apres le quarré de AC estant au rectangle de AC, & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incomm. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incomm. au rectangle de AC & BC: & partāt aussi à son double KG. Item le quarré de BC est cōmens. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG égal à iceux quarréz, sera incommensur. au seul quarré de AC, auquel KG est incommensur. Et par la 14. p. 10. EG, & KG seront incommensur. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. lesquelles estans rationeles seront incōmensur. en puissance seu-

lement : & par la 74. prop. 10. EK sera residu, & KH fa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe à AB, selon le requis) EK se trouuera residu, & KM fa conuenable : ce qui seroit contre la 80. prop. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adijoindre autre conuenable que BC. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel.

Soit la ligne mineure AB,
à laquelle conuienne BC in- 
commensur. en puissance à
la route AC, & faisant le composé de leurs quarez
rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC,
medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut estre adioincte
autre ligne que BC qui fasse le mesme.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre
BD, qui soit pareillement incommensurable en
puissance à la route AD, & faisant le composé des
quarez de AD, BD rationel, & le rectangle com-
pris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouuera
comme en la 80. proposi. 10. qu'il y a meisme ex-
cez entre le composé des quarez de AC, BC, &
le composé des quarez de AD, BD, qu'entre deux

fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui soit la 42. propos. 10. pource que l'un & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. proposit. 10. Car iceux rectangles estans mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adjoûter autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIII.

A la ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne faisant $A \text{---} B \text{---} C \text{---} D$ avec vne superficie rationelle vn tout medial AB, à laquelle s'accorde la ligne BC, incommensurable en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui fassela mesme chose.

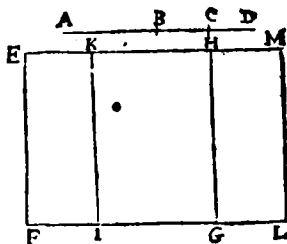
Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez

de AC, & BC, excedent les quarréz de AB & BD d'un meſme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente ſeroit rationel & irrationel, ſi à la ligne AB, on pouuoit enjoindre BD incommenſurable en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial, ſe conioinct vne ſeule ligne incommenſurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarréz auſſi medial.

Soit la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial AB, à laquelle s'accorde BC incommenſur. en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle medial in-



commenſurable au compoſé de leurs quarréz, qui eſt auſſi medial. Je diſ qu'à icelle AB ne peut s'ad-

ioindre autre ligne que BC, qui fasse le proposé.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre B D. Puis soit fait mesme construction qu'en la 82. propos. 10. Donc le composé des quarréz de AC & BC estant medial, & incommensurable à deux fois le rectangle de AC & BC aussi medial, leurs égaux rectangles EG, & KG seront mediaux, & incommensurables : Et par la 23. prop. 10. estans appliquez sur la rationnelle EF leurs autres costez EH, & KH seront lignes rationnelles, & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. commensurables en puissance seulement ; (puis que leurs rectangles sont incommensurables) & par la 74. prop. 10. EK sera residu auquel KM sera convenablement adioustee. Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi convenable à AB & fasse ce qui est proposé.) EK se trouuera residu, & KM se convenable : ainsi le residu Ek n'auroit pas vne seule convenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouoit donc pas adioindre à AB, autre ligne convenable que BC, incommensurable en puissance à la toute AC, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

DEFINITIONS TROISIEMES.

Estant proposée vne ligne rationnelle, & un residu : Lors que la toute composée du residu, & de sa convenable ou adioustee, peut plus que la convenable, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur.

1. Si la toute est commensurable à la rationnelle proposée, le residu soit appelé residu premier.

2. Mais si l'adioustee est commensurable à la rationelle exposée, Soit residu second.

3. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle proposée, Soit residu troisieme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adioustee, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

4. Si la toute est commensurable à la rationelle proposée, Soit residu quatrieme.

5. Mais si l'adioustee est commensurable à la rationelle, Soit residu cinquieme.

6. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle, Soit residu sixieme.

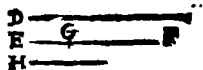
PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn residu premier.

Estant trouuez deux nombres quarez AB, CB, (comme nous auons enseigné au second scholie de la 29. proposi. de ce liure, desquels l'excez AC ne soit quarré, soit exposée la rationnelle D, à la-

quelle EF soit commensurable en longitude; & partant icelle EF sera aussi rationele: puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit fait que comme le

A.....C....B



nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de GF. Je dis que EG est residu premier.

Car puis que les quarez de EF, GF, qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables par la 10. pr. aussi les lignes EF, GF seront commens. au moins en puissance: & EF estant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que AB, AC ne sont entre-eux comme nombres quarez: aussi les quarez de EF, GF ne seront entr'eux comme nombres quarez: & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF sont incommensurables en longitude: elles sont donc rationeles commensurables en puissance seulement, & partant le reste EG sera residu par la 74. prop. 10.

Je dis d'avantage qu'il est residu premier: car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, soit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuersion de raison comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarez: Donc les quarez de EF & H sont comme nombres quarez: & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, & H sont commensurables en longitude. Ainsi la toute EF commensurable en longitude à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy est commensurable en longitude: & partant par la 1. des troisiemes def. EG sera residu

premier. Nous auons donc trouué vn residu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationnelle D soit 9, EF 6 : AB 9, CB 4, & par consequent AC est 5 : faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF , c'est à dire 36, soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partans le reste EG sera 6— $\sqrt{20}$, qui est residu premier.

Or il appert par les def. preced. que Apotome ou residu n'est autre chose que ce qui restet a si de deux nombres posez rationaux commensurables en puissance seulement on soustrait le moindre du plus grand ; ce qui se fait par l'interposition du signe — : & par ainsi il n'y a aucune difference entre le binome & le residu, sinon qu'en celuy-là les deux noms sont conioints par le signe +, & en cestuy-cy, l'un est soustrait de l'autre par le signe —. Parquoy pour promptement trouuer vn residu de quelque espeece que ce soit, il n'y a qu'à trouuer le binome de mesme espeece, ainsi qu'il a esté dit cy deuant, puis au lieu du signe + apposer le signe —. Comme au scholie de la 49. prop. nous auons trouué ce binome premier $8 + \sqrt{48}$; mais en changeant seulement le signe nous auons $8 - \sqrt{48}$, pour residu premier : & ainsi des autres.

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.

Trouuer vn residu deuxiesme.

Estans trouuées deux nombres quarez AB , CB . (comme en la precedente proposition & l'exposée rationelle D , soit prise GF commensu- en longitude à icelle D , laquelle sera aussi rationelle :

$A.....C.....B$

D —————
 E — G ————— F
 H —————

puis soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. prop. 10. Je dis que EG est residu second.

Car puis que les quarez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF seront aussi commensurables au moins en puissance : & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarez de GF, EF, ne sont entr'eux comme nombres quarez, par la 9. prop. 10. GF, EF, seront incommensurables en longueur: donc les rationeles GF, EF, sont commensurable en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste EG est residu.

Je dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF: en changeant cōme AB sera à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF. Maintenant nous demōstrerons cōme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longueur à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adioustée GF, du quarré de H, qui luy est commensurable en longueur, comme aussi à la rationele proposée D : par les troisiemes def. EG sera residu second. Nous auons donc trouué vn residu second, ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La ratiōnelle D soit 9, FG 5. AB 9, CB 4. & par consequent AC 5 : faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF : icelle EF sera $\sqrt{45}$: & partant EG sera $\sqrt{45} - 5$, qui est residu second.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu troisieme.

Ayant trouué les deux nombres quarez AB, CB, comme en la p. 86. soit pris vn autre nombre I, (comme nous auons enseigné en la 51. prop. de ce

A.....C....B

I.....

D _____
E _____ F _____ C
H _____

liure) qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, cōme nombre quarré à nombre quarré : puis estant exposée la rationele D, soit fait que cōme I est à AB, le quarré de D soit au quarré de EG, lesquels quarez par la 6. p. 10. seront commensurables : & partant les lignes D & EG, aussi commensurables au moins en puissance. Donc D estant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommensurables en longueur. De rechercher soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Je dis que EF est residu troisieme.

Car puis que les quarez de EG, GF, estans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront aussi commensurables au moins en puissance. Mais EG estant rationele, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarez de EG, GF, ne sont comme nombres quarez, par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF, seront incommensurables en longueur. Donc

EG, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement : & partant puis que de EG est ostée GF commensurable en puissance à icelle, par la 74. p. 10. le reste EF sera residu.

Je dis qu'il est aussi residu troisieme: Car puis que comme I est à AB, ainsi le carré de D au carré de EG, & comme AB à AC, ainsi le carré de EG au carré de GF, en raison egale comme I sera à AC, ainsi le carré de D au carré de GF. Or les nombres I & AC ne sont comme nombres quarez, ny par consequent aussi les quarez de D & GF: parquoy par la 9. p. 10. les lignes D & GF sont incommensurables en longueur. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF est incommensurable en longueur à la rationele proposée D. Et comme en la 86. prop. on prouuera que EG peut plus que GF du carré de la ligne H, qui luy est commensurable en longueur: Et par les tierces def. EF sera le residu troisiel. qu'il falloit trouuer.

S C H O L I E.

La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre 16, est à AB 9, ainsi le carré de D, (sçauoir 36, soit au carré de EF, & iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF $\sqrt{54}$: Mais faisant que comme AB 9, est à AC 5, ainsi le carré de EF soit au carré de FG, icelle FG sera $\sqrt{30}$, & par consequens EG sera $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn residu quatriesme.

Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. proposition 10. & comme il appartient en la fig. de la 87. propo. fol. 602.) deux nombres AC , CB , tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre AC , CB , comme nombre quarré à nombre quarré : soit proposée la rationelle D , à laquelle soit commensurable en longitude EF , laquelle sera par consequent aussi rationelle. Que si on acheue de construire comme en la 86. proposition, on demonstrera comme làque EG est residu : & d'auantage, ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF , elle pourra plus qu'icelle, soit du quarré de H . Et puis que comme AB est à AC , ainsi le quarré de EF au quarré de GF : par conuersion de raison comme AB à CB , ainsi le quarré de EF au quarré de H . Mais les nombres AB , CB , ne sont comme nombre quarré à nombre quarré : donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H seront incommensurables en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adioustée GF , du quarré de H , qui luy est incommensurable en longitude, & la mesme EF est commensurable en longitude à la rationelle D : partant par la def. EG sera residu quatriesme. Nous auons donc trouué vn Apotomie ou residu quatriesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationelle D soit 2, EF 6; faisant donc que comme AB 9 est à AC 6, ainsi 36 quarré de EF soit au quarré de FG . icelle sera $\sqrt{24}$, & par consequent le reste EG sera $6 - \sqrt{24}$ qui est residu quatriesme.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouuer vn residu cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. precedente, soit fait mesme construction qu'en la 87. prop. puis soit demonstree comme en icelle 87. prop. que EG est residu. Je dis qu'il est aussi residu 5. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86. proposition, nous demonsturerons par conuersion de raison que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H seront incommensurables en longueur: & la conuenable GF commensurable en longueur à la rationelle D. Parquoy par les def. troisiemes EG sera residu cinquiesme. Nous ayons donc trouué vn residu cinquiesme. Ce qu'il falloit faire

S C H O L I E.

La rationelle D soit 9, FG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF $\sqrt{54}$; & le reste EG, $\sqrt{54}-6$, qui est residu cinquiesme.

PROB. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn residu sixiesme.

Estans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. & exposé la rationelle D, soit

acheuée la cō-
struction com-
me en la 88. p.
Nous demon-
strerons com-
me là, que D
& EG sont in-

A.....C.....B

I.....

D _____

E _____ F _____ G

H _____

commensurables en longitude, & que EF est residu: puis que D & FG seront aussi incommensurables en longitude, & partant l'une & l'autre d'icelles EG, FG est incommensurable en longitude à la rationelle proposée D. Maintenant BG peut plus que FG du carré de la ligne H, laquelle nous démontrerons comme en la 89. prop. estre incommensurable en longitude à icelle EG. Parquoy par la dernière des 3. def. EF sera residu sixiesme. Nous auons donc trouué vn residu sixiesme. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle D soit 9; & soit fait que comme I 9 est à AB 12, ainsi 81 carré de D soit au carré de EF; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle sera $\sqrt{108}$; & faisant que comme AB est à AC 7, ainsi 108 soit au carré de FG; icelle FG sera $\sqrt{63}$, & par consequent le reste EG sera $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, qui est residu sixiesme.

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les fix residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut tranuer pour exemple le residu premier: soit trouué par la 49. p 10. le binome premier AD duquel le plus grand nom est AC, & le moindre CD;

puis soit coupé de AC la ligne CB égale à CD. Je dis que AB est residu premier. Car d'auant que AC, CD sont ratio-
nelles



neles commensurables en puissance seulement ; aussi AC , BC seront rationeles commensurables en puissance seulement : Donc par la 74. p. 10. AB est residu. Et pource que AC pensa plus que CD , ou CB du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, & AC est commensurable en longueur à la rationele proposée par la def. du binome premier, AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la mesme maniere seront trouvez tous les autres residus, sçavoir est le 2. si du second binome nous osons le moindre nom du plus grand, &c,

Ainsi ayant trouué le binome premier AD $9 + \sqrt{45}$, si du plus grand nom AC 9, on ôte le moindre nom, restera le residu AB de $9 - \sqrt{45}$. & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

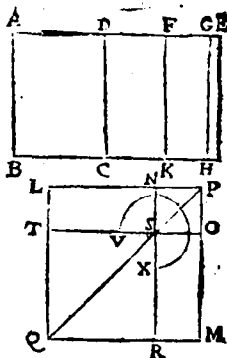
Soit le rectangle AC compris de la rationele AB , & du residu premier AD : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AD soit sa conuenable DE , laquelle soit couppee en deux également au point F , & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé, & egal au quart du quarré de DE , qui est le quarré de FE , soit iceluy rectangle compris sous AG, GE : en apres soient menées les lignes Fk, GH, EI paralleles à AB , qui rencontrent la ligne BC prolongée en k, H & I , puis soit fait le

quarré LM égal au rectangle AH, & le quarré NO égal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrés LM, NO, par la 26. p. 6. seront au long d'un même diamètre, lequel soit PQ: soient continuées les lignes NS, OS, à fin d'acheuer le gnomon VX.

Maintenant FE est moyenne pr. entre AG & GE, par la 17. p. 6. car par l'hypothese le quarré de EF est égal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p. 6. le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE; il le sera aussi entre leurs égaux quarrés LM & NO. Mais par le lemme de la 54. p. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrés: Donc KE, ou DK son égal, sera égal au rectangle LO. Et par consequent KG à LS, (estant HE égal à NO) Iceluy GK sera aussi égal à SM: ainsi le rectangle DH sera égal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est égal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera égal au quarré TR. Maintenant ie dis que la ligne TS. qui peut le rectangle AC est residu.

Car puisque AD est residu premier, & DE la conuenable: les deux lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longueur à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustée DE, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: Et par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longit. & par la 16. p. 10. ils seront commens. en longit. à la totale AE, laquelle



estant commensurable en longit. à la rationele AB , par la 12. pr. 10. AE , AG , GE , AB seront toutes rationeles commens. en longueur : & par la 20. p. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & par consequent leurs egaux quarrés LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

Parcillemeut les deux lignes DF & FE estans egales, & commens. elles le seront aussi à leur toute DE , par la 16. p. 10. laquelle DE estant rationele, DF , & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement à AB , comme leur toute DE ; & par la 22. p. 10. leurs rectangles CF & KE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial KE , partant aussi medial, & incommens. au quarré rationel NO . Et par la 1. p. 6. & 10 p. 10. leurs cossez TO & SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. TS est residu. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

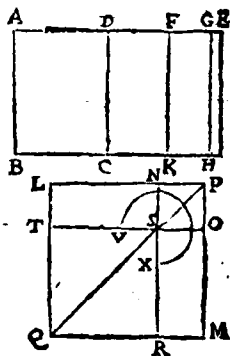
La rationele AB soit 8, & AD 9 — $\sqrt{45}$: DE est donc 7 45, & sa moitié DF 11 45 : mais AG sera 7 1/2, & GE 1 1/2. Donc le rectangle BE est 72, AH 60, HE 12, CF 720, & AC 72 — $\sqrt{2880}$, & le rectangle de AG , GE est 11 1/4. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12 : & partant la ligne LP est $\sqrt{60}$, & NP $\sqrt{12}$: & par consequent LN , ou TS sera $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, qui est residu ; & son quarré TR est 72 — $\sqrt{2880}$, egal au rectangle AC .

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu second AD. Je dis (après avoir construit comme en la precedente, & démontré comme là que le rectangle AC est egal au carré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE la conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE étant commensurable en longueur à la rationelle AB; & AE peut plus que DE du carré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, & par la 18. prop. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commensurables en longueur, & par la 16. prop. 6. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. pro. 10. icelle totale étant commensurable en longueur à la rationelle AB, aussi seront AG, & GE qui sont rationelles (car elles sont commensurables à leur totale qui est rationelle) commensurables en puissance seulement à la rationelle AB, & par la 22.



p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux ; partant mediaux leurs egaux quarrrez LM & NO, & & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel : partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longitude : (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. prop. 10.) & par la 75. prop. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, ADV 45—5 : DE est donc 5, & sa moitié DF 2 $\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est 6 $\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31 \frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1 \frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{20}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31 \frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{500}$: de laquelle estant ostée SO, restera TS $\sqrt{500} - \sqrt{20}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720} - \sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est autant : car multipliant AB 4 par ADV 45—5, viendra aussi $\sqrt{720} - \sqrt{20}$. Donc ST residu medial premier pent le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu troisieme, la ligne pouuant iceluy rectangle,

est residu medial second.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu troisieme AD: (apres avoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC,) comme nous auons demonsté en la susdite p.) est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB: mais AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longit. & par la 18. p. 10. AG & GE seront commens. en longitude, & à leur totale AE par la 16. p. 10. Et seront rationeles comme icelle; mais AE est commens. en puissance seulement à la rationele AB, & par la 14. p. 10. AG & GE seront commens. en puissance seulement à AB: Et par la 22. p. 10. les rectangles AH & HE seront medians: donc aussi mediaux leurs egaux quarez LM & NO, & leurs costez TQ & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant incommens. en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF estant rationele comme sa double DE, le rectangle KE sera medial, partant aussi medial son egal LO, compris des deux mediales commensurables en puissance seulement TO & SO: (car leurs quarez sont commensurables) estans leurs egaux rectangles commensurables, & ne scauroient estre commensurables en longitude, car il faudroit par la 1. p. 6. & 10. p. 10. que LO & NO fussent aussi commensurables, & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE, (ce qui n'est pas,) & par la 76. p. 10. TS est residu medial second. Si donc

vn rectangle est compris d'une ligne rationele, &c
Ce qu'il falloit demonstrier

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, & $AD \sqrt{54} - \sqrt{30}$; donc DE est $\sqrt{30}$: & sa moitié $DF \sqrt{7\frac{1}{2}}$ son quarré $7\frac{1}{2}$, lequel estant appliqué sur la ligne $AE \sqrt{54}$, & defaillant d'une figure quarrée, les costez du rect. appliqué, sçavoir AG , GE , seront $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, & $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $\sqrt{864} - \sqrt{480}$, $BE \sqrt{864}$, $CE \sqrt{480}$, $AH \sqrt{600}$, $DK \sqrt{120}$, & $HE \sqrt{24}$. Mais le quarré LM estant egal à AH , il sera aussi $\sqrt{600}$, NO egal à $HE \sqrt{24}$: & passant les costez d'iceux quarréz, sçavoir TO , SO sont $\sqrt{\sqrt{600}}$, $\sqrt{\sqrt{24}}$: & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{600} - \sqrt{\sqrt{24}}}$, & son quarré $TR \sqrt{864} - \sqrt{480}$, egal au rectangle AC .

THEOR. 71. PROP. xcv.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne mineure.

Soit le rectangle AC cõpris de la rationele AB , & du residu quatriesme AD (apres avoir cõstruit comme en la 92. prop. 10. & demonsté comme là que la ligne TS peut le rectangle AC .) Je dis qu'icelle ligne TS est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles cõmens. en puissance seulement, & AE qui est cõmens.

en longitude à la rationelle AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude : & par la 19. prop. 10. AG & GE seront incommensurables en longitude : partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommens. aussi seront donc leurs egaux quarréz LM & NO : partant les lignes TO & SO seront incommensurables en puissance : Mais A E estant communurable en longitude à la rationelle AB, par la 20. prop. 10. le rectangle AI sera rationel : partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarréz LM & NO.

Parcillemeut DE estant communurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. prop. 10. aussi sera sa moitié KE : & par conséquent son egal LM sera aussi medial : partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarréz estant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 6, AD 9— $\sqrt{54}$: donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarré $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & d'ff. illans d'une figure quarrée, les costez AG, GE seröt $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$, & $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54 - \sqrt{1944}$, BE 54, AH $27 + \sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $27 - \sqrt{243}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, sera aussi $27 + \sqrt{243}$, & NO egal à HE $27 - \sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{27 + \sqrt{243}}$, & $\sqrt{27 - \sqrt{243}}$: & par conséquent TS est $\sqrt{27 + \sqrt{243}} - \sqrt{27 - \sqrt{243}}$, & son quarré TR $54 - \sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. xcvi.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu cinquieme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu cinquieme AD: (apres auoir construit comme en la 92. pro. 10. & demonstree comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). le dis que icelle TS est ligne faisant avec vne superficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD est residu cinquieme, & DE sa conuenable, les lignes AE, & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, & DE est commensur. en longueur à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par la 19. propo. 10. les lignes AG & GE sont incommens. en longueur: & comme en la precedente TO & SO seront incommens. en puissance. Mais AE estant incommensurable en longueur à la rationelle AB, le rectangle AI sera medial par la 22. propos. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrés LM, & NO.

Pareillement DE estant commens. en longueur à la rationelle AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommensur. en puissance

TO & SO, desquelles le composé de leurs quarez fait vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS sera ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{54}$ — 6: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarré 9, auquel estant egal le rectangle de AGE: AG sera $\sqrt{13\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}}$, & GE $\sqrt{13\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC sera $\sqrt{864} - 24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216} - \sqrt{72}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, NO $\sqrt{216} - \sqrt{72}$, & leurs costez TO, SO. $\sqrt{\sqrt{216} + 72}$, & $\sqrt{\sqrt{216} - 72}$, & par consequent TS est $\sqrt{(\sqrt{216} + \sqrt{72}) - (\sqrt{216} - \sqrt{72})}$, & son quarré TR sera $\sqrt{864} - 24$.

THEOR. 73. PROP. XCII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu sixiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu sixiesme AD (apres avoir construit comme en la 92. prop. 10.) le dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, comme il a esté demostre en la susdicte prop.) est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Carpuis que AD est residu sixiesme, & DE sa conuenable, AE & DE sont rationelles commenturab. en puissance seulement entr'elles, & à la rationelle AB; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude: Et par la 19. prop. 10. AG & GE seront incommensurab. en longitude: Et comme en la 95. prop. 10. TO & SO seront incommens. en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AI estant medial, le composé de leurs egaux quarez LM & NO, sera aussi medial: Item DE estant commens. en puissance seulement à AB rationelle, par la 22. propo. 10. le rectangle CE sera medial: aussi sera donc sa moitié KE, & son egal LO. Et AE, DE estans incommens. en longitude, par la 1. prop. 6. & 10. propo. 10. les rectangles AI, CE, seront incommensur. & puis que CE est commens. à sa moitié KE, par la 14. prop. 10. KE sera incommens. à AI: Et partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incomm. en puissance, est incommens. au composé des quarez d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reste TS sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

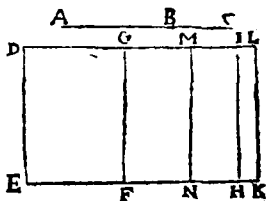
La rationelle AB soit 6, AD $\sqrt{108}$ — $\sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié DE $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{27}$ — $\sqrt{11\frac{1}{4}}$, GE $\sqrt{27}$ — $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais le rectangle AC sera $\sqrt{3888}$ — $\sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$, & HE $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$

405, NO $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO , seront $\sqrt{\sqrt{972 + \sqrt{405}}}$, & $\sqrt{\sqrt{972 - \sqrt{405}}}$: & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{972 + \sqrt{405}}} - \sqrt{\sqrt{972 - \sqrt{405}}}$, & son quarré TR $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PRO. XCVIII. Six. §.

Le quarré d'un residu appliqué sur vne rationnelle, faict l'autre costé residu premier.

Soit le residu AB , & BC sa conuenable, tellement que AC, BC soient rationnelles commens. en puissance seulement : & sur la rationnelle DE soit appliqué le rectangle DF égal au quarré de AB . Ie dis que l'autre costé DG est residu premier.



Car sur la mesme rationnelle DE soit appliqué le rectangle DH égal au quarré de AC : & sur IH vn autre rectangle IK égal au quarré de BC , tellement que le total DK est égal au composé des quarréz de AC, BC ; lequel estant égal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB , ensemble avec le quarré de AB , si on oste le quarré de AB & le rectangle DF ; restera GK égal à deux fois le rectangle de AC, CB : partant GL estant couppee en deux également en M , & tiré MN parallele à DE : MK sera égal au rectangle de AC, CB . Et pource que AC, CB sont rationnelles, leurs quarréz seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. prop. 10. le composé

d'iceux quarez est commens. à vn chacun d'eux : & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationnel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, par la 21. prop. 10. DL sera rationelle commens. en longit. à icelle DE. Derechef puis que AC, CB sont rationnelles commensur. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial : & iceluy estant appliqué à la rationelle GF, par la 23. prop. 10. GL sera rationelle incommens. en longueur à GF, ou DE : Et puis que DK rationnel, & GK medial, c'est à dire irrationnel, sont incommens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longueur. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationnelles, elles seront commensur. en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste DG sera aussi residu. Je dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK : DH, MK, IK seront continuellement proportionaux : & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. prop. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. prop. 2. Et puis que les quarez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de GL, & de faillant d'une figure quaree, par la 18. prop. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur : & par la 1. des 3. def. DG

sera residu premier. Parquoy le quarré d'un residu appliqué sur vne rationnelle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

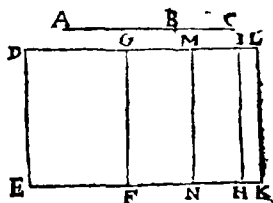
SCHOLIE.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & $BC \sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationnelle DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB , qui est $72 - \sqrt{2880}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, $IL 1\frac{1}{2}$, $DL 9$, & $GI \sqrt{45}$, & $GM \sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rect. DK sera 72, $DH 60$, $IK 12$, $GN \sqrt{720}$, $GK \sqrt{2880}$. & $DF 72 - \sqrt{2880}$.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB , duquel la convenable soit BC , tellement que AC, BC , soient mediales commensur. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la ration-



le DE soit appliqué le rectangle DE égal au quarré de AB . Je dis que l'autre costé DG est residu second.

Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK , soient égaux aux quar-

rez de AC, BC, & ok double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant mk égal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement; les quarréz d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, Ik, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. proposit. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationnelle commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double Gk sera aussi rationel: & par la 21. prop. 10. GL sera rationnelle commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles Dk, & Gk estans incomm. (car l'un est rationel, & l'autre medial) les rationelles DL & GL seront commensurab. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la route DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second. Parquoy le quarré d'un residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Le residu medial premier AB soit $\sqrt{500} - \sqrt{20}$, & BC $\sqrt{20}$: la route AC sera donc $\sqrt{500}$: & estant appliqué sur la rationelle DE 4, le quarré de AC, qui est 500, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est 20, IL sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: ainsi la route DL sera $\sqrt{45}$. De rechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10. l'autre costé GM

sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL5: parquoy DG sera $\sqrt{45}$ —5, qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'un residu medial second, appliqué sur vne ligne rationnelle, faict l'autre costé residu troisieme.

Soit le residu medial second AB, auquel conviengne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationnelle DE, soit appliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre costé DG est residu troisieme.

Car (ayant construit comme en la 98. prop. 10.) on demonstrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationnelle DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi sera son double Gk, & par la 23. prop. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationnelle DE: Et puis que AC, BC sont incommens. en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double Gk; Mais le quarré de AC est aussi commens. au quarré de BC: (pource qu'iceux quarez sont décrits sur lignes commensur. en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarez, c'est à dire Dk, sera aussi commens. au quarré de AC, auquel est incommens. Gk, parquoy par la 13. prop. 10. Dk sera

Dk sera incommens. à GK, & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant même raison que DK, Gk seront incommens. en long. Mais estans rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. BG sera residu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouvera comme en la 98. prop. 10. que DL peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commensurab. en longitude: Et par les tierces des. DG est residu troisieme. Parquoy le quarré d'un residu medial second, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

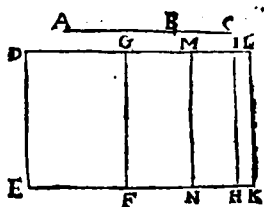
Le residu medial second AB soit $\sqrt{600} - \sqrt{24}$, & BC $\sqrt{24}$: la toute AC sera donc $\sqrt{600}$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est $\sqrt{600}$, l'autre costé DI sera $\sqrt{37\frac{1}{2}}$; mais appliquant sur la même DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre costé IL sera $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & passant la toute DL sera $\sqrt{54}$: & si derechef on applique sur la même DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{120}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, & son double GL $\sqrt{30}$: parquoy DG est $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'une ligne mineure, appliqué sur une ligne rationelle, faict l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC convienne, en sorte que AC, BC, soient incommensurab. en

puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel, & le quarré d'icelle AB soit appliqué sur la rationelle DE: ie dis que l'autre costé DG est residu quatriesme.



Car (aores auoir construit comme en la 98. propos. 10.) le rectangle DK sera rationel, & GK medial, par le discours des precedentes; & par la 21. propos. 10. DL sera rationele commenf. en longit. à la rationele DE; & GL, par la 23. propos. 10. sera rationele commenf. en puissance seulement à icelle rationelle DE: & puis que Dk est rationel, & Gk medial, ils sont incomm. & par la 10. propos. 10. les lignes DL, GL qui sont en mesme raison que Dk, GK, seront incommensur. en longitude. Mais elles sont rationelles, elles seront donc commenf. en puissance seulement: & par la 74. propos. 10. DG sera residu.

D'auantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes AC, BC sont incommensur. en puissance, leurs quarréz seront incommenf. Aussi incommenf. leurs egaux rectangles DH, IK, & par consequent incommenf. les lignes DI, IL, costez du rectangle defaillant d'une figure quarrée egale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a esté demonsté en la 98. propos. 10. & par la 19. propos. 10. DL (qui est commenf. en longitude à la rationelle DE,) peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommenf. en longitude: & par les tierces definitions DG est residu quatriesme. Donc le quarré d'une ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonsté.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{27 + \sqrt{243}} - \sqrt{27 - \sqrt{243}}$ & $BC \sqrt{27 - \sqrt{243}}$: la toise AC sera donc $\sqrt{27 + \sqrt{243}}$, le quarré de laquelle appliqué sur la rationelle DE 6, l'autre costé DI sera $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{3}{4}}$: mais étant appliqué sur la mesme DE , le rectangle Ik , égal au quarré de BC , qui est $27 - \sqrt{243}$, l'autre costé IL sera $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{3}{4}}$: & partant la toise DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN égal au rectangle de ACB , qui est $\sqrt{486}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, & son double $GL \sqrt{54}$: & partant DG est $9 - \sqrt{54}$, qui est residu quatriesme.

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec vne superficie rationelle, vn tout medial ; appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé residu cinquiesme.

Soit la ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial AB , de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle DE : le dis que l'autre costé DG est residu cinquiesme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. prop. to.) AB étant ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial, & BC sa conuenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de

leurs quarrez medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. prop. 10. DL sera rationele incommensur. en longitude à la rationele DE : & par la 21. propos. 10. GL sera aussi rationele, mais commens. en longit. à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK estans incomm. (car l'un est rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longitude. Mais icelles sont rationeles : elles sont donc commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu. Mais GL estant commensur. en longitude à la rationelle DE, & si comme en la precedente on prouuera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude : & partant par les tierces def. DG est residu cinquiésme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{216} + \sqrt{72}) - \sqrt{(\sqrt{216} - \sqrt{72})}}$, & BC $\sqrt{(\sqrt{216} - \sqrt{72})}$; la toute AC sera donc $\sqrt{(\sqrt{216} + \sqrt{72})}$, le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE 4, & l'autre costé DI sera $13\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{216} - \sqrt{72}$, l'autre costé IL sera $13\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: Que si à la mesme rationele on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui est 12, l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6 : Parquoy DG sera $\sqrt{54} - 6$, qui est residu cinquiésme.

THEOR. 79. PRO. CIII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant avec une superficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationelle DE: Je dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB estant ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, & BC la conuenable à icelle AB, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrés aussi medial: partant les deux rectangles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. prop. 10. DL, GL seront rationelles incommens. en longit. entr'elles, & à la rationelle DE; & par consequent commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. 10. BG sera residu. Mais on peut prouuer comme en la 101. p. 10. que la route DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{972 + 405} - \sqrt{972}$

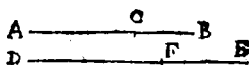
R r iiij

$\sqrt{405}$, & $BC \sqrt{V 972 - \sqrt{405}}$: donc la couse AC sera $\sqrt{V 972 + \sqrt{405}}$; au quarré de laquelle soit egal le rectangle DH , appliqué sur la rationelle DE 6 : l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27 + \sqrt{11\frac{1}{2}}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC , qui est $\sqrt{972 - \sqrt{405}}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{27 - \sqrt{11\frac{1}{2}}}$: & partant la couse DL sera $\sqrt{108}$: Si derechef on applique sur la mesme rationelle le rectangle ML , ou GN , egal au rectangle de ACB , qui est $\sqrt{567}$ l'autre costé GM sera $\sqrt{11\frac{1}{2}}$, & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108 - \sqrt{63}}$, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PRQP. CIIII. Six. 6.

La ligne commensurable en longueur à un residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC , auquel soit comm. en long. la ligne droite DF . Je dis que DF est residu de mesme ordre que AC .



Car CB soit la convenable au residu AC , tellement que AB , CB soient rationeles commensur. en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit fait que comme AC est à DF , ainsi CB soit à FE . Donc par la 12. p. 5. la toute AB sera à la toute DE , comme AC à DF , ou CB à FE : & par la 10. prop. 10. comme AC est commensurable en longueur à DF , ainsi AB à DE , & BC à FE . Et en permutant comme AB à BC , ainsi DE à FE . Maintenant comme AB & BC sont ra-

tioneles, aussi seront DE & FE : (car elles sont commensurables à icelles, par la 10. prop. 10.) Mais AB & BC sont commensur. en puissance seulement : partant DE & FE seront aussi rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 74. propo. 10. DF est residu.

Ie dis d'avantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du carré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longueur : si commensurable, aussi DE pourra plus que FE de mesme façon par la 15. propos. 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AB est commens. en long. à vne ligne rationele proposée, aussi DE qui luy est commens. en longueur sera commens. en longueur à la mesme rationelle proposée par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF seront residus premiers : Que si BC est commensur. en longueur à la rationele, aussi sera FE : & AC, DF seront residus seconds : si AB & BC sont incommensurables en longueur à la rationelle, aussi seront DE & FE ; & AC, DF seront residus troisiemes. Que si AB peut plus que BC du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. prop. 10. & si AB est commensurable en longueur à la rationelle, aussi sera DE : & AC, DF seront residus quatriemes. Si BC est commensurable en longueur à la rationele, aussi sera FE : & AC, DF seront residus cinquiemes. Si AB & BC sont incommensur. en longueur à la rationele, aussi seront DE & FE : partant AC & DF seront residus sixiemes : par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC. Parquoy la ligne commens. en longueur a vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

SCHOLIE.

Le residu AC soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & DF $\sqrt{15} - \sqrt{3}$, lesquelles sont commens. en longueur, l'une estant double de l'autre, & la conuenable CB soit $\sqrt{12}$: Donc la toute AB est $\sqrt{60}$: & puis que comme AC est à DF, ainsi CB $\sqrt{12}$ est à FE; icelle FE sera $\sqrt{3}$: & la toute DE $\sqrt{15}$, commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC: ie dis que icelle DF est aussi residu medial, & de mesme ordre que AC.

Car ayant fait meime construction qu'en la preced. prop. AB & BC seront comm. à DE, EF lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. prop. 10. DE & FE seront mediales commens. en puissance seulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. p. 10. DF est residu medial: ie dis d'auantage qu'il est de mesme ordre que AC.

Car le quarré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1. p. 6. Mais le quarré de AB est commensur. au quarré de DE, estant AB & DE commens. & par la propos. 10. les deux rectangles seront aussi commens. Que com-

me l'un sera rationel ou medial, aussi l'autre sera rationel ou medial: partant si les rectangles sont rationaux, AC & DF seront residus mediaux premiers: si les rectangles sont mediaux, AC & DF seront residus mediaux seconds. Donc la ligne commens. à vn residu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

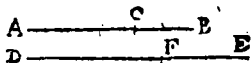
S C H O L I E.

Le residu medial AC soit $\sqrt{500} - \sqrt{20}$, & DF $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$: BC sera $\sqrt{20}$, & la toute AB $\sqrt{500}$; mais FE sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$, & la toute DE $\sqrt{31\frac{1}{4}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commensurable à vne ligne mineure, est aussi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commensurable à la ligne mineure AC: le dis qu'icelle DF est aussi ligne



mineure. Car CB estant conuenable à icelle AC, & fait mesme construction qu'en la 104. prop. 10. AB & BC seront incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel. Mais cōme AB à CB, ainsi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE & FE serōt incommens. en puissance. Item puis que comme AB à BC, ainsi DE à FE, par la 22. prop. 6. leurs quarez seront proportionaux, & en composant comme le composé des quarez de AB, BC sera au quarré de BC, ainsi le composé des quarez de DE, FE, sera au quarré de FE; & en permutant comme le composé des quar-

rez de AB, BC sera au composé des quarez de DE, FE, ainsi le quarré de CB sera au quarré de FE : lesquels quarez de CB & FE sont commensurables : (car les lignes BC & FE sont commensurables comme AC & DF, ainsi qu'il a esté démontré à la 104. prop. 10.) & partant par la 10. prop. 10. le composé des quarez de AB & BC, (lequel est rationel) sera commensurable au composé des quarez de DE & FE, lequel sera aussi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, le quarré de AB est au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE au rectangle de DE & FE, & en permutant come le quarré, au quarré ainsi le rectangle au rectangle : c'est à dire commens. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. pr. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celui de DE & FE sera aussi medial. partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure. Donc la ligne commensurable à vne ligne mineure est aussi ligne mineure. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC,

faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, Je dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et estant fait mesme construction qu'en la 104. p. on demonstrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE sont incommens. en puissance; & que le composé des quarez de AB, CB est commens. au composé des quarez de DE, FE. Mais celuy là-est medial: aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. De-rechef comme nous auons demonstré en la 105. p. le rectangle de AB, CB est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc cestuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant avec superficie rationele vn tout medial. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensur. à la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant avec vne superficie mediale vn tout medial: Je dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

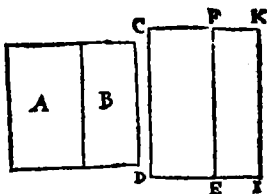
Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB, CB soient incommensurables en puissance, & fassent le composé de leurs quarrés medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au composé de leurs quarrés : & ayant fait semblable construction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop que les lignes DE, FE, sont incommensurable, en puissance, & que le composé des quarrés de AB & BC, est communurable au composé des quarrés de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, est communurable au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB & CB, est medial, & incommensurable au composé des quarrés de AB & CB, aussi medial : partant par le scholie de la 14. p. 10. le rectangle de DE & EF, sera medial, & incommens. au composé des quarrés de DE & FE aussi medial : & DF sera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial. Donc la ligne communurable à la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonst. er.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une superficie rationelle, est retranchée vne superficie mediale : la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationelle AB, de laquelle soit retranchée la mediale A : le dis que la ligne qui peut le reste, B est residu, ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi: Sur
vne rationele proposée
CD soit décrit le re-
ctangle CE égal à A, &
FI égal à B. Il est euidēt
que CI sera rationel, &
par la 21. p. 10. son autre



costé Ck sera rationel commensurable en longitu-
de à CD. Item par la 23. prop. 10. CD estant medial,
CF sera rationele commensurable en puissance seu-
lement à CD, & par la 13. prop. 10. CK & CF seront
rationeles commensurables en puissance seulement:
& partant par la 74. p. 10. Fk sera residu. Maintenant
CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy
est commensurable ou incommensurable en longit.
Si commensurable Fk sera residu premier: & la li-
gne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu
par la 92. prop. 10. Si incommensurable CK est residu
quatriesme: & la ligne qui peut le rectangle FI, ou
(ou son egal B) est ligne mineure par la 95. pr. 10.
Parquoy si d'une superficie rationele, est retranché
vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demon-
strer.

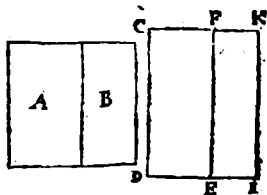
S C H O L I E.

Si le rectangle rationel AB est 32, le medial A $\sqrt{320}$, &
la ligne rationele CD 6, sur laquelle est décrit le rectangle
CE égal à A, & FI égal à B: les costez CF; & FK, seront
 $\sqrt{8\frac{2}{3}}$, & $5\frac{1}{3} - \sqrt{8\frac{2}{3}}$: & partant la couse CK sera $5\frac{1}{3}$: & le
rectangle CI 32, duquel ostans CE, qui est $\sqrt{320}$, le reste
rectangle FI sera $32 - \sqrt{320}$: & la ligne ponnant iceluy
sera $\sqrt{(16 + \sqrt{176})} - \sqrt{(16 - \sqrt{176})}$, qui est ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. cv.

Si d'une superficie mediale est retranchée une superficie rationele, la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit comme dessus la superficie mediale AB , de laquelle soit retranchée la rationele A . Je dis que la ligne qui peut le reste B , (apres avoir construit comme en la précédente) ou son egal FI , est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.



Car puis que la superficie totale AB est mediale aussi la totale CI est mediale, & par la 23. p. 10. le costé CK est rationel comme. en puissance seulement à la rationele CD . Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE , & par la 21. p. 10. CF sera rationele commensurable en longitude à la rationele CD : & par la 13. pr. 10. Ck & CF seront rationeles commensurables en puissance seulement; & partant par la 74. p. 10. FK sera aussi residu. Mais à cause que Ck peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longitude, Fk sera residu second,

ou residu cinquieme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93. prop. 10. si residu cinquieme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial par la 96. p. 10. Parquoy si d'une superficie mediale est retranchée vne superficie rationele, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{800}$, & la rationele A 12; le reste B sera $\sqrt{800}-12$, & la ligne pouvant iceluy sera $\sqrt{(\sqrt{200}+\sqrt{164})-(\sqrt{200}-\sqrt{164})}$, qui est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

T H E O R. 87. P R O P. CXI.

Si d'une superficie mediale, est retranchée vne superficie mediale incommensurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la superficie mediale A, incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Car ayant fait mesme construction qu'aux precedentes, les rectang. CI, CE seront mediaux & incomm-

mesurables entr'eux ; & par la 23. prop. 10. les lignes Ck , CF seront rationeles incommensurables en longitude à CD. Et puis que CI, CE sont incommensurab. les rationeles ex, cf, qui sont en mesme raison que CI, CE, seront aussi incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. & par consequent elles sont seulement commensurables en puissance: Donc FK sera residu par la 74. prop. 10. & FC sa conuenable. Maintenant Ck peut plus que Fk, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude : si commensurable, FK sera residu troisieme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B (est residu medial second, par la 94. prop. 10. Si incommens. FK sera residu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, par la 97. p. 10. Si donc d'une superficie mediale est retranché une superficie mediale incommensurable à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{279}$, & A $\sqrt{40}$: la superficie restante B sera $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: & la ligne pouvant icelle sera $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} + \sqrt{19\frac{3}{4}}) - (\sqrt{69\frac{3}{4}} - \sqrt{19\frac{3}{4}})}$, qui est appelée ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

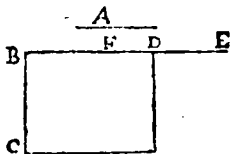
THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appelée residu , n'est pas la mesme que Binome.

Soit

Soit le residu A. Je dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.

Car soit la rationele proposée BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD



egal au quarré du residu A : par la 98. prop. 10. BD sera residu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE ; BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement : & BE commens. en longitude à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome ; BD sera binome premier, par la 61. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au poinct F ; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commensurables en puissance seulement , & BF commensurable en longitude à la rationele BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, seront commensurables en longitude. Veu donc que la route BE est commensurable en longitude à la partie BF. par le corol. de la 16. prop. 10. l'autre partie FE sera aussi commensurable en longitude à BE : partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longitude à BE, & par la 14. prop. 10. FE, DE sont rationeles commensurables en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. FD est residu, & par consequent irrationele ; ce qui est absurde : car elle a esté prouuée tantost rationele : donc le residu A, sera differend du binome. Parquoy la ligne appelée residu n'est pas la mesme que binome. Ce qu'il falloit demonstret.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appel-

Si

léc residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suivantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisieme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriesme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, fait l'autre costé residu cinquiesme, par la 102. prop. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, fait l'autre costé residu sixiesme, par la 103. p. 10.

Puis donc que sous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuent seront aussi differentes. Mais les quarréz des binomes, & des cinq lignes irrationeles suivantes, estans appliquez sur vne ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq suivantes sont differences du residu, & des cinq suivantes.

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy deuant dictes sont treize: sçavoir celles-cy.

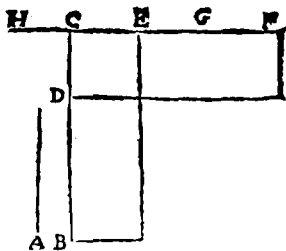
1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne maieure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
7. Ligne pouuant deux mediaux.

8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

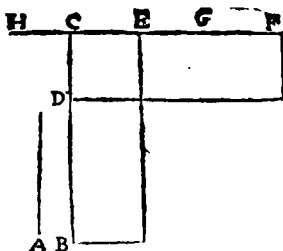
Le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du binome: en outre le residu est de mesme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD: & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Je dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.



Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle DE aussi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DE, seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçavoir que co-

me BC à DC, ainsi CF à CE, & en diuisant cōme BD, à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD: donc aussi FE sera plus grande que EC. Maintenant de EF soit retrāchée EG égale à EC,



& soit fait cōme FG à GE, ainsi EC à CH par la 12. p. 6. & en composant comme FE à EG (ou EC son égale) ainsi EH à CH, & par la 12. prop. 5. les deux antecedents FEH seront aux deux consequents ECH, comme l'un des antecedens EH à l'un des consequens CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, seront continuellement proportioneles en la raison de FE à EC, ou BD à DC: & par la 12. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BD est commens. au quarré de DC, (car iceux quarrés sont commensurables, puis que BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi que le quarré de EH, sera commens. au quarré de CH: & par le corol. de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH sera commens. en lōgitude à la troisieme proportionele FH, & par la 16. p. 10. CH & CF seront commens. en lōgitude. Et d'autant que le rectangle DF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele: CF sera aussi ligne rationele cōmen. en lōgitude à CD, par la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationele commens. en lōgitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB sont rationeles commens. en puissance seulement, aussi CH, EH, seront rationeles commens. en puissance seulement: & partant par la 74. prop. 10. CE sera residu: duquel les noms EH, CH sont proportionaux, & commens.

aux noms BD, DC, du binome BC : Car il a esté démontré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH; & partant en permutant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté démontrées commens. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouver que le residu est de mesme ordre que le binome : Or les noms de l'un estans proportionnaux, & commens. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longitude : le plus grand nom du residu pourra plus de mesme : Que si le plus grand nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus grand du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus petit du residu ; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele : semblablement l'un ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele par la 14. p. 10. & partant ils seront binome, & residu troisieme : & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur un binome, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

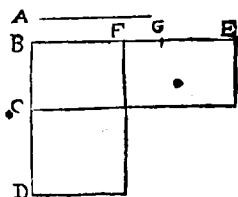
Si la rationele A est 8, le binome BC 9 + $\sqrt{45}$. tellement que BD soit 9, & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A estant appliqué sur BC, l'autre costé du rectangle CE sera $16 - \sqrt{142\frac{2}{3}}$, qui est residu : & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{1}{43}}$, & EF $\sqrt{460\frac{4}{5}} - 16$. Mais EG estant

egale à CE, est $16 - \sqrt{142\frac{2}{5}}$; GF $\sqrt{1115\frac{1}{5}} - 32$: & d'autant que comme FG est à GE, ainsi EC à CH, icelle sera $\sqrt{142\frac{2}{5}}$, & EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportionaux aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele, estant appliqué sur vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC, auquel cōtienne CD, & sur BC soit décrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Je dis que l'autre costé BE sera binome tel que demande la proposition.



Car sur BD, soit décrit le rectangle DF egal au mesme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront egaux, & ayans les costez reciproques par la 14. p. 6. BD sera à BC comme BE à BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, comme BE à FE. Maintenant soit coupée EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi EG à GF: veu donc que comme la toute BE est à la

toute FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF retranchée de FE, aussi par la 19. p. 5. le reste BG sera au reste EG, comme la toute à la toute, c'est à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & partant EG est moyenne proportionnelle entre BG & GF. Parquoy cōme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 29. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi commensurables en puissance seulement: & partant les quarez d'icelles BG, GE sont commensurables, & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarez, sont commensurables en longueur par la mesme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF seront aussi commensurables en longueur. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, est rationel; par la 21. prop. 10. BF sera aussi rationele commensurable en longueur à BD. Donc par la 12. prop. 10. BG sera aussi rationele commens. en longueur à la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté démontrées commens. en puissance seulement, & BG rationele, GE sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 37. p. 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté démontré que comme BD à CD, ainsi BG à GE: & partant en permutant comme BD à BG, ainsi CD à GE: mais BD a esté démontré commensurable en longueur à BG: donc aussi CD sera commens. en longueur à GE, par la 10. p. 10. reste

Car soit vne rationelle proposee G , le quarré de laquelle estant appliqué sur le binome CB , face le rectangle CH . Donc par la 113. prop. 10. l'autre costé BH sera residu, duquel les noms HI , BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD , DB , sçauoir est que comme HI à BI , ainsi CD à DB , & partant ainsi CE à AE : & en permutant comme la toute HI à la toute CE , ainsi la retranchée BI à la retranchée AE ; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC , comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commensur. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'une & l'autre est commensurable avec CD : donc aussi BH , AC seront commensur. en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH , & AC , ils seront aussi commensur. Mais HC , egal au quarré de la rationelle G , est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB , sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste qu'un rectangle rationel, peut estre compris de lignes irrationeles.

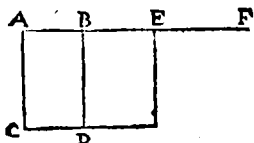
S C H O L I E.

Si le residu AC est $4 - \sqrt{8\frac{2}{3}}$, tellement que les noms d'iceluy CE , & AE soient 4 , & $\sqrt{8\frac{2}{3}}$, mais le binome BC soit $9 + \sqrt{45}$, le rectangle AB sera 16 , qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4 , & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8 , le rectangle CH sera 64 , & le costé

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationnelles, toutes differentes des deuant dites.

Soit la ligne mediale AB : ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationnelles toutes differentes des deuant dictes.



Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationnelle, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle sera irrationnel par le coroll. de la 39. prop. 10. & par la 11. deff. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationnelle, soit icelle BE ; laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationnelle comme AC, fait l'autre costé AB medial : Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationnel : & la ligne qui le peut, aussi irrationnelle : & soit EF, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationnelle, ne faict l'autre costé tel que BE : & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.

S C H O L I E .

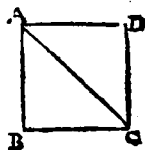
Si la mediale AB est $\sqrt{142\frac{2}{5}}$, & la rationnelle AC 2 ; le rectan-

gle AD sera $\sqrt{V} 32$, & la ligne BE qui pent iceluy sera $\sqrt{V} 32$: Ainfi le rectangle DE sera $\sqrt{V} 512$, & la ligne EF qui pent iceluy sera $\sqrt{V} 512$, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longueur au costé.

Soit le quarré $ABCD$, duquel AC soit diagonale. Je dis que la diagonale AC est incommens. en longueur au costé AB .



Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB : mais toute grandeur double d'une autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au quarré de AB , comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons démontré au corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. prop. 10. la diagonale AC , & le costé AB , sont incommens. en longueur. Donc au quarré, la diagonale est incommens. en longueur au costé. Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$, c'est à dire incommens. en longueur.

Fin du dixiesme Element.



E L E M E N T

VNZIESME.

DEFINITIONS.

1.  Olide, est ce qui a longueur, largeur & profondeur: Mais les termes d'un solide, sont superficies.
2. Vne ligne droicte est perpendiculairement esleuee sur vn plan, quand toutes les lignes constituées sur iceluy plan & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.
3. Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'une ligne droite à un plan est l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droite menée au plan de l'inclinante, par le point auquel tombe une perpendiculaire tirée du sommet d'icelle inclinante sur le dit plan.

5. Un plan est incliné sur un plan, quand les lignes menées sur l'un & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers un même point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les unes aux autres : & l'inclination d'iceux plans, est l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

6. Un plan est dit estre semblablement incliné à un plan, lors que les susdicts angles d'inclination sont égaux entr'eux.

7. Plans parallèles, sont ceux lesquels estans continuez ne se rencontrent point.

8. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, égales en nombre.

9. Solides égaux, & semblables, sont

ceux qui sont compris de semblables superficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle solide, c'est la rencontre de plus de deux angles plans en vn mesme poinct, estans iceux constituez sur plans differens.

11. Pyramide, est vn solide compris de plusieurs plans, se rencótrans en vn mesme poinct, & ayans vn autre plan pour base.

12. Prisme, est vn solide compris de plans, desquels deux qui sont opposez sont egaux, semblables & parallels, & les autres sont parallelogrammes.

13. Sphere, est vne figure comprise par le demy cercle, lors que son diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là d'où il estoit party.

14. L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la sphere, est celuy mesme que du demy cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne lig.dr. laquelle passant par le centre d'icelle, est terminee à la superficie de la sphere.

17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors quel vn des costez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, le triangle faict vn tour à l'entour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé, comprenant l'angle droit, le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

19. Mais le cercle descript par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne, est la base du cone.

20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallelogramme rectangle, lors que l'un des costez demeurant immobile, le parallelogramme faict vn tour à l'entour d'iceluy costé.

21. L'axe du cylindre, est icelle ligne

immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La base du cylindre, est le cercle décrit par l'autre costé, qui avec l'axe du cylindre comprend l'angle droict.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarez.

25. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide compris de huit triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pantagones egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les opposez sont parallels.

30. Vne figure solide, est dicte inscrite

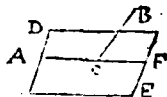
en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont construits, ou és angles, ou és costez, ou finalement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

31. Mais vne figure solide, est dictée circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle est descrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Vne partie d'une ligne droite ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est evident que ACB ne sera pas ligne droite, comme il est requis.



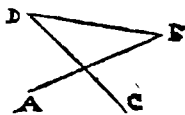
THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se coupent l'une

Tc

l'autre, elles seront sur vn mesme plan:
Et tout triang. est en vn mesme plan.

Soient deux lignes droictes
AB & CD se coupans l'une
l'autre au point E; & en EB,
ED soient pris quelconques
pointes B & D, & soit tiree la ligne droicte BD, afin
de faire le triangle EBD. Je dis que les deux lignes
droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan:
Item que le triangle EBD est pareillement en vn
seul plan.

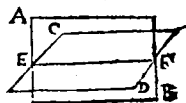


Car d'autant que les lignes droictes AB, CD s'en-
tre coupent en E; BE, DE feront vn angle au point
E: & par la definition de l'angle plan conuerrie, & 1.
p. 11. elles seront en vn mesme plan. Et par la mesme
raison la ligne droicte BD faisant deux angles avec
icelles deux lignes BE, DE, sera aussi au mesme plan:
Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan.
Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont
en vn mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente
qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sça-
uoir est en celuy auquel nous auons demonstree estre
le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droictes se
coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demon-
strer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur
commune section sera vne ligne droi-
cte.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD , & les termes de leur commune section, soient les points E, F . Je dis que icelle commune section est vne ligne droite.



Car puis que les points E, F , sont communs à tous les deux plans, d'un point à l'autre soit menée vne ligne droite sur le plan AB ; item de mesmes points soit menée vne ligne droite sur le plan CD : Je dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'une seule ligne droite, sçavoir E & F : car si elles estoient differentes, il s'ensuiuroit que deux lignes droites auroient leurs extremittez communes; ce qui est impossible, car elles enfermeroient vne espace, contre la 12. comm. sent. La ligne droite EF est donc sur l'un & l'autre plan, & partant leur commune section. Parquoy si deux plans se couppent l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

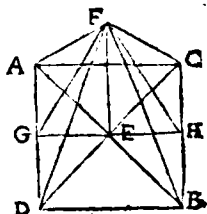
THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes se couppans l'une l'autre, & au point de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droite, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes droictes AB & CD , se couppans l'une l'autre au point E , & d'iceluy point de section E , soit esleuee la perpendiculaire EF à cha-

cunes d'icelles : ie dis qu'elle est aussi perpendiculaire à leur plan.

Car soient posees egales AE , EB , CE & ED , & soient tirees les lignes AD , BC , & par le point E soit menee la ligne droite GH couppant les lignes AD , BC , és points G & H : Item du point en l'air F soient tirees les lignes FA , FG , FD , FB , FH & FC . D'autant que les costez EA , ED du triangle AED , sont egaux aux costez EB , EC du triangle BEC , chacun au sien, & les angles AED , BEC contenus par iceux costez aussi egaux par la 15. propos. 1. les bases AD , BC seront pareillement egales, par la 4. propos. 1. Derechef puis que les angles AEG , BEH sont egaux par la 15. propos. 1. les deux angles AEG , EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH , EBH du triangle BHE , & le costé AE est egal au costé BE : donc par la 26. propos. 1. les deux costez AG , GE , seront egaux aux deux costez BH , HE . Et puis que les deux costez FE , EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE , EB du triangle FEB , & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçavoir droicts par l'hypothese, par la 4. propos. 1. les bases EA , EB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD , FC . D'avantage veu que les costez FA , AD du triangle FAD , sont egaux aux costez FB , BC du trian. FBC , & la base FC , egale à la base FD , par la 8. p. 1. les angles FAD , FBC seront aussi egaux : Parquoy les costez FA , AG du trian. FAG , estans egaux aux costez FB , BH , du triangle FBH , les bases FG , FH , seront pareillement egales par la 41. propos. 1. Et finalement puis que les costez FE , EG , du triangle $FE G$,



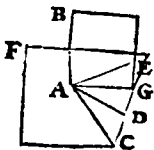
sont egaux aux costez EF, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8. p. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 11.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE, par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d. 11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes se couppent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes seront en vn mesme plan.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.



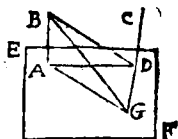
Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. proposit. 11. soient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. propof. 11. & soient toutes

deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au point A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperront, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC; & partant par la 3. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droicts: mais par hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droicts: par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout: ce qui est impossible: Donc AE n'estoit pas esleuee en l'air, ains estoit au mesme plan que AC & AD. Parquoy si vne ligne droicte rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes sont esleues perpendiculairement sur vn mesme plan, elles seront paralleles.

Soient deux lignes droictes AB CD esleues perpendiculairement sur vn mesme plan EF, & aux points A & D. Je dis qu'elles sont paralleles entr'elles.



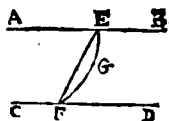
Car si des susdicts points A & D, du plan EF, on meine la ligne droicte AD, les deux angles BAD & CDA seront droicts par la 2. def. 11. partant si les deux lignes BA & CD sont en mesme plan, elles seront paralleles par la 18. prop. 1.

Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du poinct D, soit menee DG perpendiculaire à AD par la 11. prop. 1. & soit posée icelle DG égale à AB, & soient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG égaux, & AD commun, & l'angle droit BAD égal à l'angle GDA aussi droit, par la 4. prop. 1. la base BD sera égale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG égaux, & les deux autres AG & BD aussi égaux, & la base BG commune à tous les deux triangles par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG seront égaux. Mais l'angle BAG est droit par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droit: il est donc euident que GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. prop. 11. icelles trois lignes seront en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. prop. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AB & CD seront en vn mesme plan. Parquoy si deux lignes droictes sont esleues perpendiculairement sur vn mesme plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes sont paralleles, & del'vne à l'autre on mene vne ligne droicte, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'une à l'autre soit menee la ligne droicte EF. Je dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CD.



Car si elles n'est au mesme plan, ains en vn autre: que celuy cy coupe cestuy-là és poinçts E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droicte par la 3. prop. 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroient vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte EF n'est pas en vn autre plan que celuy auquel sont les paralleles AB, CD. Parquoy si deux lignes droictes sont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

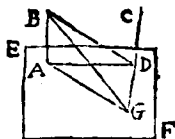
Cette mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pourueu qu'elles soient en vn mesme plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, desquelles l'une soit à angles droicts à quelque plan: aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

Soiēt deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'une d'icelle AB soit esleuee perpendiculairement sur le plan EF. Je dis que l'autre CD est aussi esleuee perpendiculairement sur le mesme plan EF.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faite
mesme construction qu'en la 6.
p. 11. & comme il a esté demon-
stré, les deux angles BAG &
 GDB seront droicts, & par la
4. prop. 11. GD sera esleuée per-
pendiculairement sur le plan des lignes AD & BD :

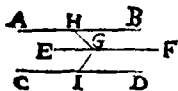


mais par la precedente prop. les deux lignes AB &
 AD sont au mesme plan de AB & CD : car elles
sont paralleles par l'hypothese: il s'ensuit donc que
 GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne
 CD : Ainsi l'angle CDG sera droit. Mais l'angle
 ADC est aussi droit par la 29. prop. 1. estans AB
& CD paralleles: & par la 4. prop. 11. CD sera
perpendiculaire au plan de GD & AD , c'est à dire
au plan EF . Parquoy s'il y a deux lignes droictes pa-
ralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. 1X.

Les lignes droictes paralleles à vne mes-
me, lesquelles ne sont à vn mesme
plan qu'icelle, sont aussi paralleles
entr'elles.

Soient les lignes droictes AB ,
 CD , paralleles à la ligne EF , &
ne soient en vn mesme plan qu'i-
celle. Je dis que AB , CD , sont
aussi paralleles entr'elles.



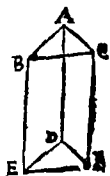
Soit pris en EF quelconque point G , duquel
soient tirées à icelle EF deux perpendiculaires, sça.

voir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G : elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles : & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI : aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. p. 11. Par mesme raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI : & partant par la 6. p. 11. AB, CD estans perpendiculaires à vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. x.

Si deux lignes droictes s'entretouchás, sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.

Soient deux lignes droictes AB & AC se touchans en A, lesquelles soient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF se touchant en D : & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Je dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles sont egaux.



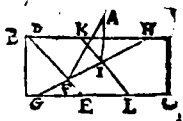
Qu'ainsi ne soit. Soient prises egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF ; & soient menées les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Premièrement AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi

egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par la mesme raison AD, & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la 9. prop. 11. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles: & par la 33. prop. 1. BC & EF seront egales & paralleles: Ainsi les deux triangles ABC, & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles BAC, EDF seront egaux. Ce qu'il falloit demonst. rer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'un poinct donné en haut, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy poinct.

Soit le poinct A esleué en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy poinct A. Au plan BC, soit menée comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. prop. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. prop. 1. Et à icelle GH soit tirée de A la perpendiculaire AI, par la 12. prop. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.



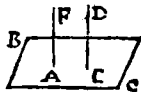
Car au plan BC, estant tirée par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH par la construction: & partant aussi perpendiculaire au plan tiré par FA, FH par la 4. p. 11. pareillemēt KI sera per-

pendiculaire au mesme plan par la 8. prop. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en vn mesme plan que FA , FH , & touche la ligne KI en I , l'angle KIA sera droit par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI , IF . Donc par la 4. prop. 11. AI sera perpendiculaire au plan où sont les lignes KI , IF , sçavoir au plan BC . Nous auons donc d'un point donné en l'air abaissé vne perpendiculaire au plan d'au dessous d'iceluy point: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'un point donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC , & le point donné en iceluy soit A : Il faut d'iceluy point A esleuer vne ligne perpendiculaire au plan donné BC .

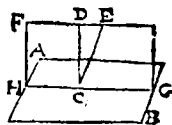


Soit pris en l'air comme on voudra le point D , & d'iceluy soit menée sur le plan BC , la perpendiculaire DE , par la precedente prop. laquelle rencontrant le plan BC au point A , on aura fait ce qui estoit requis: Mais si elle ne rencontre iceluy point A , mais quelque autre point E , dudict point A soit menée AF parallele à ED , par la 31. prop. 1. il est euident que par la 8. prop. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuée sur le plan BC , ainsi qu'il estoit requis.

T H E O R. II. P R O P. XIII.

D'un mesme plan, & d'un mesme point
d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'un
mesme costé, deux lignes perpendi-
culaires.

Soit donné quelque plan comme AB, & le point en iceluy C: ie dis que du point C, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.

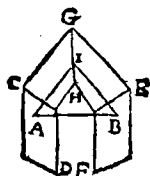


Autrement, s'il est impossible: du point C, soient esleuées en l'air les deux perpendiculaires. CD & CE, elles seront en vn mesme plan, par la 2. prop. II. & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB, au point C, n'est point parallele à iceluy AB: partant estans continuez ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droicte: soit icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seroient droicts & egaux, la partie au tout: ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 12. P R O P. XIV.

Si vne ligne droicte est perpendiculaire
à deux plans, iceux plans seront pa-
rallèles.

Soit la ligne droite AB , perpendiculaire à chacun des plans CD & EF : ie dis qu'iceux plans sont parallèles entr'eux.

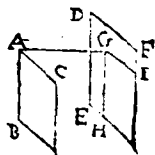


Autrement s'ils n'estoient parallèles, estans continuez ils se rencontreroient, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. prop. 11. soit icelle GH , en laquelle soit pris comme on voudra le point I , & soient d'iceluy menées les lignes IA , IB és plans GCD , GEF . Maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD , GEF , au triangle AIB les angles IAB & IBA , seront droits, contre la 17. prop. 1. donc les deux plans CD , EF ne se rencontreront point, ains seront parallèles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont parallèles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan : les plans passans par icelles, seront aussi parallèles.

Soient les deux lignes AB & BC , se touchans au point A , parallèles à deux autres lignes DE , DF , s'entretouchans en D , & ne soient en vn mesme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par



icelles AB, AC est parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

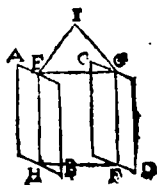
Car par la 31. prop. 11. de A soit tirée sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G : puis par la 31. prop. 1. au plan EF, soient tirées de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH sont paralleles à DE, icelles AB, GH seront paralleles entr'elles, par la 9. prop. 11. & partant par la 29. prop. 1. les angles BAG, AGH sont egaux à deux droicts. Mais AGH est droict, par la 3. def. 11. Donc BAG sera aussi droict. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droict. Parquoy veu que la ligne GA est perpendiculaire aux deux AB, AC ; par la 4. prop. 11. elle sera aussi perpendiculaire à leur plan BC : Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 14. prop. 11. les plans BC, seront paralleles. Parquoy si deux lignes droictes s'entretouchās sont paralleles à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont coupez par vn autre plan ; les lignes de commune section seront paralleles.

Soient les deux plans parallels AB & CD, coupez par le troisieme plan EF : le dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçavoir HE & GF) sont paralleles.

Autrement, si elles n'estoient pa-

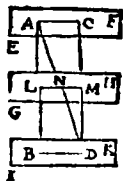


ralleles, estans continuées, elles se rencontreroient comme au poinct I : Mais d'autant qu'iceux plans AB, CD sont parallels, estans continuez ils ne se rencontreront iamais : il faudroit donc que les lignes HEI, FGI (lesquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors, ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HE & GF estans continuées ne se rencontrent point, & partant sont paralleles: Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont couppees par plusieurs plans parallels, elles seront couppees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, traversans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont couppees par iceux plans es poincts A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont couppees proportionnellement, c'est à dire que les segmens d'icelles interceps entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.



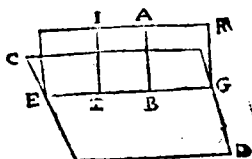
Car es plans EF, IK, soient menées les lignes droictes AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel soient menées les lignes LN, NM, au mesme plan GH : & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. sera en vn mesme plan : semblablement le triangle ADC en vn seul plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK sont coupeez par le plan

plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la 16. prop. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. prop. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droictes sont couppees par plusieurs plans parallels, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Je dis que tous les plans menez de la ligne AB, qu'elle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.



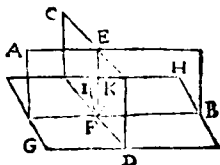
Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, couppant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF soit menée HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posée perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpendiculaire au mesme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant par la 2. def. 11. aussi perpendiculaire à la com-

munne section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirées au plan EF parallèles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 5. def. 11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecourent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE : ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.



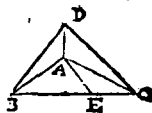
Car si elle n'est perpendiculaire au plan GH : puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte: soit icelle FB ; & du point F pris en icelle soit menée FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 4. def. 11. conuertie, elle sera

perpendiculaire au plan GH. Tout de mesme le plan CD estant perpendiculaire au plan GH, si à leur commune section DF, & du point F, on leue la perpendiculaire FK sur le plan CD, elle sera aussi par la mesme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'un mesme point esleuées perpendiculairement sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13. p. 11. Donc du point F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan GH, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FE. Parquoy si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Je dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands que le troisi. BAC.



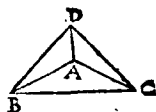
Car si on dict que BAC soit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit fait BAE égal à DAB par la 23. p. 1. & soient faites egales les deux lignes AD, AE: puis apres au mesme plan soit menée par E la ligne droite BC, couppant les lignes

Vu ij

AB, AC, en B & C: & soient tirées les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD sont egaux aux deux costez A B & A E, & leurs angles egaux: la base DB sera egale à la base BE, par la 4.^{p.} 1. Item puis que l'on pose l'angle-BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est égal à l'un d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD: mais les deux costez EA & AC sont egaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24.^{p.} 1. la base EC sera plus grande que la base DC: & BD estant egale à BE, il est evident que au triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres: ce qui est contre la 20.^{p.} 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'en suyura par le mesme discours que BC est egale à BD & CD: ce qui contreuient tousiours à la 20.^{p.} 1. Il est donc plus petit que les deux autres. Parquoy si un angle solide est compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T H E O R. 19. P R O P. XXI.
Tous les angles plans d'un angle solide,
sont plus petits que quatre angles droits.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Je dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre angles droits.



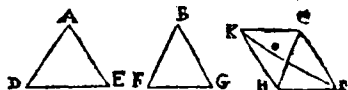
Car estans tirées les trois lignes droictes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D,

desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçavoir B, sous ABC, ABD, CBD: & C sous ACB, ACD, BCD: & D sous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 11. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisieme BCD, & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisieme BCD: Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC: & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts: (car iceux trois angles valent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux six angles avec les trois qui font l'angle solide A, valent six droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) & qu'iceux six angles sont plus grands que deux droicts; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts: Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux, egales; il se peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plans A, B, C, cōtenus des lignes egales A D, A E,



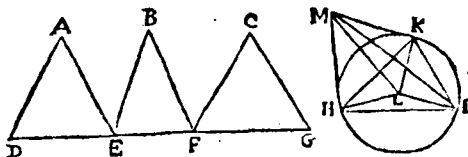
BF, BG, CH & CI: deux desquels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Je dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conjoignent icellès lignes egales, peut estre constitué vn triangle.

Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra sont plus grands que le troisiésme : qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à HCI, on adioute HCK egal à FBG par la 23. p. 1. & ayant fait Ck egal à B G : on tire Ik & Hk; l'angle ICK estant plus grand que le troisiésme A, la baste Ik par la 24. p. 1. sera plus grande que la baste DE : (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, Hk qui par la 20. p. 1. sont plus grandes qu'icelles Ik, seront plus grandes que la troisiésme DE. Et par mesme discours on monstrea toujours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisiésme : Parant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit à demonstrier.

PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plás, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans ABC, moindres que quatre droiëts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.



Soient posées egales les six lignes droiëtes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soutenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit fait le triangle Hlk, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel soit circonscrit du cercle Hlk par la 5. p. 4. & du centre L soient menées les trois lignes LH, LI, LK : & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'vn des costez d'iceux angles plans : puis soient menées les lignes HM, IM, kM : Je dis que HlMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, Lk estans egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, kM, seront egales, d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez

d'iceux angles plans : puis les trois bases HI, IK, KH estans egales aux bases des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faisant l'angle solide au poinct M , seront egaux aux trois donnez A, B, C . Nous auons donc faiçt vn angle solide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si quelqu'un obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas tousiours estre retranchée, en sorte que son quarré avec le quarré de LH soient egaux au quarré de l'un des costez des angles donnez : comme par exemple, si celuy costé estoit egal ou plus petit que HL . Je dis que cela n'arrive iamais, non pas seulement qu'il soit egal à HL : Car si HL & IL estoient egaux à AD & AE : & la base HI egale à la base DE , par la 8. p. 1. (& ainsi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L seroient egaux aux trois angles A, B, C , chacun au sien : ce qui est enidemment faux : Car tousiours par hypotese les trois angles A, B, C , sont plus petits que quatre droictz ; & par le coroll. de la 15. p. 1. les trois au poinct L sont egaux à quatre droictz.

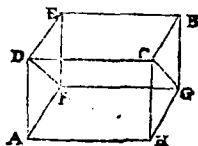
T H E O R. 21. P R O P. XXIV.

Si vn solide est compris de plans parallels ; les plans opposez d'icelles seront parallogrammes semblables, & egaux.

Soit le solide AB compris de six plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB : Je dis que les plans opposez sont parallelogrammes semblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB sont parallels,

estans coupez par les plans AE & HB ; les lignes de commune section AD, FE sont paralleles : Item H C & GB, par la 16. prop. 11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de commune section AF & DE : Item GH & BC sont paralleles : partant AE & HB sont parallelogrammes. Par le mesme discours AG, DB ; AC, FB, le prouueront estre parallelogrammes. Je dis maintenant que les parallelogrammes opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, sont paralleles aux lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en opposez ; par la 10. prop. 11. les angles DAF, CHG, seront egaux : par mesme raison les autres angles du parallelogramme AE, seront egaux aux autres angles du parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC les costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogr. AG ; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux : & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG : veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG, du triangle HCG, & les angles DAF, CHG aussi egaux ; par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux : lesquels estans moitez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogram. seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrela les autres parallelogrames opposez AG, DB ; AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc vn solide est

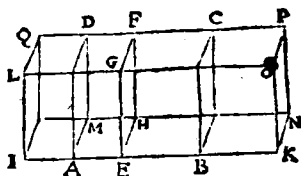


compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. xxv.

Si vn ſolide parallelipede eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez; les ſolides coupez ſeront l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soit le ſolide parallelipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux oppoſez AD & BC, & faiſant deux ſolides AF & EC: ie diſ qu'iceux ſolides ſeront



l'un à l'autre, comme la baſe AH à la baſe BH.

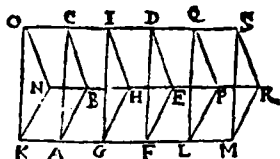
Qu'il ne ſoit ainſi: la ligne AB eſtant prolongee de part & d'autre, ſoient faiſtes egales AI à AE, & BK à BE; & ſoient accomplis les parallelogrammes IM & BN: Item les ſolides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, ſont egales, les parallelogr. IM, AH ſeront auſſi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans oppoſez LD, GD ſeront ſemblables & egaux: Item AL, AG ſemblables & egaux à MQ, MF, plans oppoſez; & ainſi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le ſolide AQ eſt egal au ſolide AF. Par le meſme diſcours le ſolide BP ſera egal au ſolide FB: partant le ſolide IF eſt autant multiplie du ſolide AF, comme la baſe IH eſt multiplie de la baſe AH: Item le ſolide EP eſt autant multiplie du ſolide EC, comme la baſe EN eſt multiplie de la baſe

BH : & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC : desquelles de la premiere & troisieme, (sçavoir de la base AH & du solide AF.) on a pris les equemultiplices HI base, & IF solide : Item de la seconde & quatrieme, (sçavoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monsté estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prises : & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF au solide EC. Parquoy si vn solide parallelipede est coupé par vn plan parallel aux plans opposés, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Ceste propos. se peut accommoder à tous prismes : Car si quelconque prisme est coupé par vn plan parallel aux plans opposés ; sont ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car

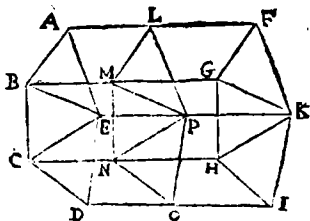
soit premierement le prisme ABCDEF, duquel les plans opposés sont les triangles ABC, DEF ; & soit iceluy coupé par le plan GHI parallel aux plans opposés. Je dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABCIHG est au solide



FEDIHG. Car soit imaginé le prisme $ABCDEF$ estre prolongé de part & d'autre, tant qu'on voudra; & de AF prolongée soient prises Ak égale à GF , & FL , LM égales à FG : En apres par les points G , L , M , soient entendus les plans KNO , LPQ , MRS parallèles aux plans ABC , GHI , FED . Donc puis que les plans parallèles ABC , GHI , sont coupezz par le plan AI ; leurs communes sections AC , GI , seront parallèles par la 16 prop. 11. Mais à cause que AD est parallelog., AG , CI seront aussi parallèles. Donc AI est parallelog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH , CH estre parallelog. Et pource que les costez AC , AB , du triangle ABC , sont égaux aux costez GI , GH , du triangle GHI , (car par la 34. prop. 1. AC est égal à GI , & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC , HGI sont aussi égaux; (pource que les lignes AB , AC sont parallèles aux lignes GH , GI , & en divers plans) par la 4. prop. 1. les triangles ABC , GHI sont égaux entr'eux, & equiangle: Parquoy par la 4. prop. 6. les costez d'alentour les angles égaux, seront proportionnaux; & partant ces deux triangles seront semblables. Donc le solide $ABCIHG$, contenu des deux plans opposez ABC , GHI égaux, & semblables, & des parallelog. AI , IB , GB , est vn prisme. Par mesme raison $ABCONK$, $GHIDEF$, $DEFLPQ$, & $LPQSRM$ seront prismes: Et pource que les parallelogrâmes AI , KC sont égaux & semblables, comme aussi AH , KB ; & CH , OB ; tous les plans du prisme $ABCIHG$, seront égaux & semblables à tous les plans du prisme $ABCONK$. Parquoy par la 9. def. 11. les prismes $ABCIHG$, $ABCONK$ sont égaux. Par mesme raison les prismes $GHIDEF$, $DEFLPQ$, $LPQSRM$ seront égaux. Partant le prisme $KNOIHG$ sera autant multiple du prisme $ABCIHG$, que la base KI , de la base AI ; & le prisme $GHISRM$ autant multiplié du prisme $GHIDEF$, que la base GS de la base GD . Et pource que si la base KI , (multipliée de la base AI premiere gran-

deur) est égale à la base GS , (multiplie de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme $KNOIHG$, (multiple du prisme $ABCIHG$ 3. grandeur) est égal au prisme $GHISRM$, (multiple du prisme $GHIDEF$ 4. grandeur :) Mais si la base KI est plus grande que la base GS , aussi le prisme est plus grand que le prisme ; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication : par la 6. d. 5. comme la base AI première grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme $ABCIHG$ 3. grandeur sera au prisme $GHIDEF$ 4. grandeur. En la même manière on démontrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE , & comme la base GH est à la base EI . Ce qui estoit proposé.

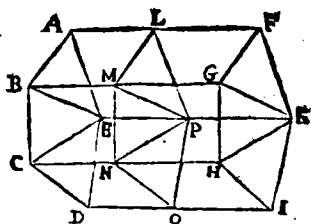
Soit maintenant le prisme $ABCDEFGH$, duquel les plans opposés sont polygones, c'est à savoir pentagones, & soit coupé par le plan $LMNOP$. Je dis derechef, que comme la base CM est à la base NG ,



ainsi est le solide $ABCELMNOP$, au solide $LMNOPFGHIK$. Car si les plans opposés parallèles sont refonds en triangles ; aussi le prisme sera refond en autant de prismes qu'il y aura de triangles es plans opposés. Parquoy comme la base BP sera à la base MK , ainsi le prisme $ABEPML$ sera au prisme $LMKGE$, par les choses démontrées cy dessus. En la même manière, comme la base CP est à la base NK , ainsi le prisme $BCEPMN$ sera au prisme $MNPkGH$; & le prisme $CDEPNO$ au prisme $NOkHI$. Mais par la 1. prop. 6, comme BP est à MK ; & CP à NK , ainsi est la ligne EP à la ligne PK , c'est à dire comme CN est à NH , & comme CN est à NH , ainsi est CM à NG . Donc les prismes $ABEPML$,

V N Z I E S M E

BCEPMN, **CDEPNO**, ont mesme raison aux prismes
LMPKGF, **MNP**
GH, NOPKHI, que
CM à **NG**; & partant
ont la mesme entre-
eux. Mais par la 12.
prop. 5. comme vn seul
est à vn seul, ainsi sont
les trois aux trois. Donc
comme le prisme **BC**
EPMN sera au prisme **MNP**
KGH, c'est à dire comme la
base **CM** à la base **NG**, ainsi le prisme **ABCELMNOP**
composé des trois sera au prisme **LMNOPFGHIK** composé
des trois. Ce qui estoit proposé. Il y aura mesme demonstration
en quelconque autre prisme.



COROLLAIRE.

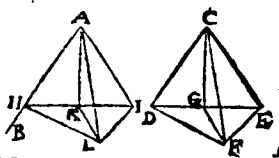
De cety resulte que si quelconque prisme est couppe par vn
plan parallel aux plans opposez, que la section est vne figure
egale & semblable aux plans opposez. Car il a esté demonstré
au premier prisme que le triangle **GHI** est egal, & semblable
au triangle **ABC**, & partant au triangle **DEF**: Et il y a mes-
me demonstration en tous. Le mesme se doit entendre des pa-
rallélipipedes.

P R O B L. 4. P R O P. xxvi.

Sur vne ligne droicte, & à vn point
donné en icelle, constituer vn angle
solide egal à vn angle solide donné.

Soit la ligne droicte donnée **AB**, & le point en

icelle A ; & il faut construire sur icelle AB, & au point A, vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.



Soit tirée de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. p. 11. & soient menées les lignes DF, FE, EG, GD, CG : en apres soit prise AH égale à CD : & par la 23. propof. 1. soit fait l'angle HAI égal à l'angle DCE : & la ligne AI égale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, soit fait l'angle HAK égal à l'angle DCG : & la ligne AK égale à la ligne CG : puis par la 12. prop. 11. de K soit tirée au plan auquel sont les trois AH, Ak, AI, la perpendiculaire kL : laquelle soit posée égale à FG, & soit menée la ligne AL. Je dis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est égal à l'angle solide donné C.

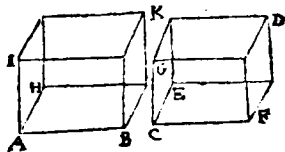
Car estans menées les lignes HK, kI, IL, LH : veu que les costez AH, Ak du triangle AHK, sont égaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG égaux par la construction : les bases Hk, DG seront égales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles égaux HAI, DCE, estans ostez les angles égaux HAK, DCG, demeurent égaux les angles kAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes égales, par la 4. prop. 1. les bases KI, GE, seront aussi égales. Les costez KH, KI sont aussi égaux aux costez GD, GF, & les angles HKI, DGL droits : donc par la mesme 4. prop. 1. les bases HL, DF, seront égales. Parquoy puis que les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi égaux aux costez CD, CF du triangle CDF : (car les costez AK,

KL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprenant angles droicts : partant les bases AL, CF sont egales par la 4. p. 1. les angles HAL DCF seront pareillement egaux par la 8. p. 1. Finalement, pource que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droicts ; par la 4. prop. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8. p. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composant l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composant l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C : ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. xxvii.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn solide parallelipede semblable, & semblablement posé à vn solide parallelipede donné.

Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallelipede sēblable, & semblablement posé au parallelipede donné CD.



Sur la ligne AB & au point A, soit fait vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. prop. 11. le quel
soit

soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH: & par la 12. proposi. 6. soit fait comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH: & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant paracheuez les parallelogr. BH, HI, BI, Bk, kI, kH. le disque le solide AK est semblable & semblablement posé au solide CD donné.

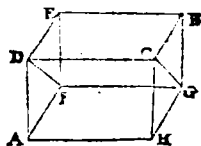
Car ils ont autant de superficies planes l'un comme l'autre: & d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI égal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelogr. FG: par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelog. du solide Ak sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide Ak sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD: & partant par la 8. definition de ce liure les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez. Nous auons donc sur vne ligne droite donnée, décrit vn parallelipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. xxviii.

Si vn solide parallelipede est couppé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez, il sera couppé en deux egalement.

Soit le solide parallelipede A B couppé par vn
Xx

plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Je dis qu'il est couppé en deux également.



Car il est euident par la 34. prop. i que les triangles ADF, EFD, sont egaux : item les deux CGH & GCB ; & le plan AG egal & semblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. II. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont compris de parallelogrammes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9. def. de ce liure iceux prismes sont egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelipede AB ; iceluy sera couppé en deux également par le plan DCGF. Sidonc vn solide parallelipede est couppé par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

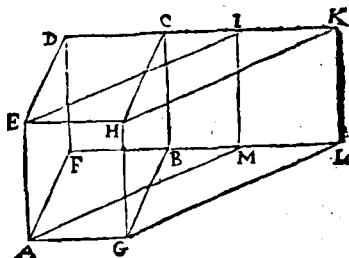
THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipedes ayans mesme base, & mesme hauteur, & desquels les plans opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipedes ABCDEFGH, ALKIEHGM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur, ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes Dk & FL : ie dis qu'i-

ceux deux solides parallelipipedes sont egaux entr'eux.

Ceste demonstration est facile à iceluy qui a bien conceu celle de la 35. prop. 1. Car ce que celle-là prouue des parallelogrâmes par les triangles



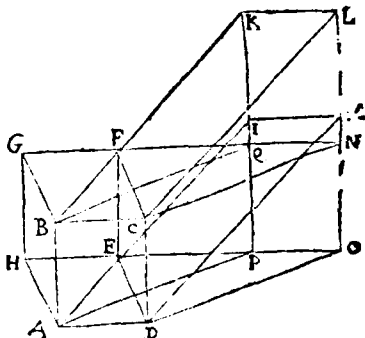
egaux, ausquels on oste & adiouste: ceste-cy le prouue des parallelipipedes par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKGH, seront montrez egaux par la 24. prop. 11. parce que les plans opposez des parallelipipedes sont semblables, & egaux: & d'iceux sont faiçts les prismes. Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

T H E O R. 25. P R O P. xxx.

Les solides parallelipipedes cōstituez sur mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plans opposez à leur base ne sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient deux solides parallelipipedes ABCDEF GH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base

ABCD, & de
mesme hauteur
(c'est à dire que
leurs plans oppo-
sez, & parallels à
leur base ABCD,
sçauoir GE & KM
soient en vn mes-
me plan, lequel
soit parallele à la
base AC) : ie dis
qu'ils sont egaux



encores
que les plans GE & KM opposez à leur base commune
AC, ne soient entre mesmes lignes droictes.

Car puis que les plans GE & KM sont en vn mes-
me plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droi-
ctes : il est certain que deux costez de l'un estans
continuez, couperont deux costez de l'autre aussi
continuez. Soient donc les costez GF, HE continuez
vers N & D : Item KI, LM vers P & O : elles se coup-
peront donc aux pointz Q, N, P, O, faisant vn pa-
rallelogramme, (d'autant que les lignes continuees
sont paralleles) lequel sera egal à la base plane AC :
Car par la 34. prop. 1. les lignes QP & NO estans
egales à GH, FE, elles le seront aussi à BA & CB :
item PO & QN estans egales à IM & KL, elles le
seront aussi à BC & AD : & apres auoir mené les
quatre lignes AP, DO, BQ, CN : il est manifeste que
les deux solides AF, AN, sont sur mesme base, & de
mesme hauteur ; (car ils sont entre mesmes plans)
& les plans HF, PN opposez à la base AC, entre
mesmes lignes droictes, & par la 29. prop. 11. ils sont
egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estans sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes ligne droictes) & par la 1. commune sentence le solide AF sera egal au solide AL. Parquoy les solides parallelipipedes constituez sur mesme base, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

S C H O L I E.

On conuertira sans ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'un est plus haut, si d'iceluy on coupe vn parallelipede de mesme hauteur que l'autre, le couppé & l'autre seront egaux, par la 29. ou 30. propos. 1. & puis que cest autre est posé egal au tout, le couppé sera egal au tout. Ce qui est absurde.

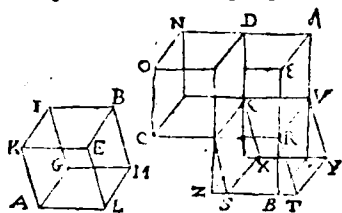
THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipipedes A B, CD constituez sur bases egales AE & CF, & de mesme hauteur A G, C H. Je dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit: leurs hauteurs sont perpendi-

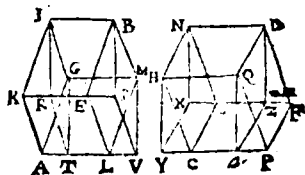
culaires, ou non : Soient premierement perpen-
culaires : & apres
auoir continué CP
iusques à R, & faict
PR égale à KE, au
plan de OP prolongé,
soit faict l'angle
RPS egal à l'angle
AKE, & faict PS éga-



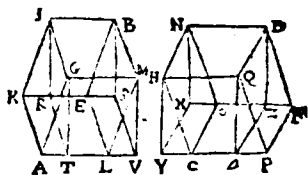
le à KA : puis soit acheué le parallelogramme PT,
sur lequel soit construit le parallelepiped QSTV
à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis
que les costez PR, PS sont egaux aux costez Ek,
kA, & les angles RPS, EkA egaux, les parallelo-
grammes PT, kL seront egaux & semblables. De-
rechef puis que les costez PQ, PS sont egaux aux
costez KI, kA, & les angles QPS, IkA droicts par
la 2. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ sont posees
perpendiculaires aux plans AE, PT : aussi les paral-
lelogrammes QS, AI, seront egaux, & semblables.
Par mesme raison, d'autant que les costez PR, PQ
sont egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ,
EkI droicts par la mesme 2. def. 11. pareillement les
parallelogrammes PV, KB seront egaux & sembla-
bles. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS,
PV, du parallelepiped QSTV sont egaux & sembla-
bles aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la
24. p. 11. tât ceux-là que ceux-cy seront egaux & sem-
blables à leurs autres parallelogrammes opposez : &
partant par la 9. definit. de ce liure les paralleli-
pedes AB, SV seront egaux entr'eux. Maintenant
que TP, TS prolongees se rencontrent en Z : &
DQ, YX. en A, & soit acheué le parallelepiped ZV.
Item que DN, V prolongees se rencontrent en D,

& OF, BR, en ϵ , & soit acheué le parallelipede DR. Donc puis que les parallelipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & sont en mesme hauteur, & que les plans SY, ZY, opposez à la base, sont entre mesmes lignes droictes ZT, AY: iceux solides seront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipede SV est egal au parallelipede AB: donc le parallelipede ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. prop. 1. les parallelogrammes PT, PB sont egaux, & PT egal à AE, aussi PB sera egal au mesme AE, c'est à dire à CF (car AE, CF sont posees bases egales): & par la 7. prop. 5. comme CF sera à P ϵ , ainsi PB sera à P ϵ : & par la 25. prop. 11. comme la base CF est à la base P ϵ , ainsi le solide CD est au solide P δ , puis que le parallelipede C δ est couppe par le plan PD parallel aux plans opposez CN, R δ : Par la mesme raison comme PB est à P ϵ , ainsi le solide ZV au solide P δ , pource que le parallepipede DB est couppe par le plan PV parallel aux plans opposez. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipedes CD, ZV seront egaux, puis qu'ils ont mesme raison au solide P δ , sçavoir est la mesme qu'ont les bases CF, PB, à la base P ϵ . Parquoy puis que le parallelipede ZV a esté demonstté egal au parallepipede AB: les parallelip. AB & CD seront pareillement egaux: ce qui estoit proposé.

Maintenant, si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires, sur les bases AE, CF, soient tirees des points (apres auoir continué les lignes AL, KE & BC, FO, tant qu'il sera



de besoin) G, I, B, M,
& H, N, D, Q, & sur
les plans d'au-dessous
d'iceux points les per-
pédiculaires GT, IR,
BS, MV, & HY, NX,
DZ, Q₄, par la 11. p. 11.
& soient tirées RT,



SV, XY, Z₄. Il est évident par ce qui a esté démon-
stré cy dessus que le solide TB est égal au solide YD,
car ils sont sur bases égales GB, HD : & de même
hauteur : Mais par la 29. prop. 1. le solide TB est égal
au solide AB ; & le solide YD égal au solide CD : donc
le solide AB sera égal au solide CD. Parquoy les so-
lides parallelepipèdes estans sur bases égales, &c. Ce
qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

On convertira ceste 31. prop. en ceste manière.

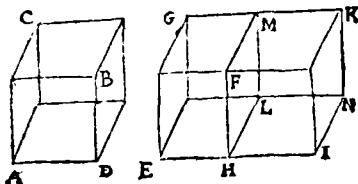
Les solides parallelepipèdes égaux, constituez sur
bases égales, sont en même hauteur : & les solides
parallelepipèdes égaux, qui sont en même hauteur,
sont sur bases égales, s'ils n'ont vne même base.

Car si on croit l'un plus haut que l'autre : si on coupe du plus
haut un parall. pip. de même hauteur que l'autre : par la
31. prop. 11. le coupé sera égal à l'autre, auquel est aussi posé
égal le tout : parquoy le coupé sera aussi égal au tout : ce qui
est absurde. Que si les parall. pip. estans de même hauteur,
on croit que la base de l'un soit plus grande que la base de l'autre :
si on coupe d'icelle base vne égale à l'autre, & sur icelle
coupée on entend estre un parallelepipède de même hauteur,
nous démonstrerons en la même manière, la partie estre égale
au tout : ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les solides parallelipedes de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallelipedes de mesme hauteur $ABCD, EFGH$, desquels les bases soient AB, EF , le dis que le solide est au solide comme la base à la base.



Car si sur la ligne HF , (apres avoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallelogramme FI egal au parallelogramme AB : puis on achève le solide $IFKL$; iceluy estant de mesme hauteur que le solide $ABCD$, & sur base egale, il luy sera egal par la 31. prop. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le solide $IFKL$ est au solide $EFGH$, ainsi le solide $ABCD$ au mesme solide $EFGH$. Mais par la 25. prop. 11. le solide $IFKL$ est au solide $EFGH$, comme la base FI , c'est à dire AB à la base EF : Donc aussi le solide $ABCD$, sera au solide $EFGH$, comme la base AB à la base EF . Parquoy les solides parallelipedes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouver.

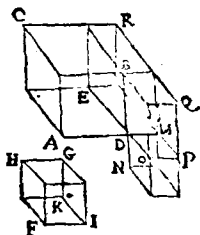
S C H O L I E.

La converse: si les solides parallelipedes sont en-

tr'eux comme leurs bases ; ils seront en mesme hauteur. Car si l'une des hauteurs est plus grande que l'autre, de la plus grande en soit couppée une egale à la moindre, & puis soit tiré un plan parallel à la base ; & par la 32. prop. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelepipede sera au parallelepipede couppé : mais ainsi il estoit aussi au parallelepipede total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 5. ce qui est absurde.

THEOR. 28. PROP. XXXIII.
 Les semblables solides parallelepipedes,
 sont l'un à l'autre en raison triplée de
 leurs costez homologues.

Soient deux semblables parallelepipedes $ABCD EFGHIK$ constituez sur les bases semblables AE, FK , esquelles les costez homologues sont AD, FI . Je dis que le parallelepipede $ABCDE$ est au parallelepipede $F G H I K$ en raison triplée des costez homologues AD, FI .



Qu'ainsi ne soit : soit prolongé AD vers M , tellement que DM soit egale à FI , ou HG . Item BD vers N , en sorte que DN soit egale à LI ou Gk : Item ED vers O , tellement que DO soit egale à kl ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO , soit acheué le parallelepipede NMP . Il est donc evident que les deux parallelepipedes FG, NP sont semblables & egaux, puis qu'ils sont composez de plans qui ont les angles egaux, &

les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construits les parallelipipedes $BM O Q$, & $EB R M$. D'autant que les parallelipipedes $AB C D$, $F G H I$, sont semblables, comme $A D$ est à $F I$, c'est à dire à $D M$, ainsi $D E$ à $K I$, c'est à dire à $D O$; & $B D$ à $L I$, c'est à dire à $D N$. Mais par la 1. p. 6. comme $A D$ à $D M$, ainsi est le parallelog. $A E$, au parallelog. $E M$; & comme $E D$ à $D O$, ainsi le parallelog. $E M$ à $D P$; & comme $B D$ à $D N$, ainsi le parallelogramme $B M$ à $M N$. Donc comme $A E$ sera à $E M$, ainsi $E M$ à $D P$, & $B M$ à $M N$. Mais par la 32. p. 11. comme la base $A E$ à la base $E M$, ainsi est le parallelip. $A E C B$ au parallelip. $E M R B$: & comme la base $E M$ est à la base $D P$, ainsi le parallelipede $E M R B$ est au parallelip. $D P B Q$: & comme la base $B M$ est à la base $M N$, ainsi le parallelipede de $D P B Q$ au parallelipede $N P$. Parquoy comme le parallelipede $A E C B$ sera au parallelipede $E M R B$, ainsi le parallelipede $E M R B$ sera au parallelipede $D P B Q$; & le parallelipede $D P B Q$ au parallelipede $N P$: Partant les quatre quantitez $A E C B$, $E M R B$, $D P B Q$, $N P$ sont continuellement proportioneles: & par la 10. def. 5. la premiere $A E C B$ sera à la 4. $N P$, c'est à dire à $F G$, en raison triplée de la premiere $A E C B$ à la seconde $F M R B$. Mais par la 32. prop. 11. comme $A E C B$ est à $E M R B$, ainsi la base $A E$, est à la base $E M$; & par la 1. prop. 6. comme $A E$ est à $E M$, ainsi $A D$ est à $D M$, c'est à dire à $F I$. Donc par la 11. pr. 5. $A E C D$ sera à $E M R B$ comme $A D$ à $F I$: partant la raison triplée de $A E C D$ à $E M R B$, sera la même que $A D$ à $F I$; & par consequent $A E C D$ estant à $F G$ en raison triplée de $A E C D$ à $E M R B$; il sera aussi en raison triplée de $A D$ à $F I$. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

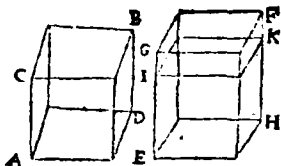
COROLLAIRE.

Parcecy est evident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportionales, comme la premiere est à la quatriesme, ainsi le parallelipede descript sur la premiere, est au parallelipede semblable, & semblablement descript sur la seconde. Puis que tant le parallelipede est au parallelip. que la premiere ligne à la quarte en raison triplée de la raison de la premiere ligne à la seconde, sçavoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les egaux solides parallelipedes, ont les bases & les hauteurs reciproques:
Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient egaux les parallelipedes ABCD, EFGH sur les bases AD, EH. Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques,



c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.

Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que si les bases AD & EH sont egales, (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egales. Soient donc les bases inegales, sçavoir AD plus grande que DH. Je dis que la hauteur EG doit

estre plus grande que CA : car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 31. prop. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre comme leurs bases ; partant AB plus grand que EF , & nous les auons posez egaux : La hauteur EG sera donc plus grande que CA , & d'icelle soit retranchée EI egale à CA , & d'iceluy point I soit imaginé que le plan IK parallele à EH , coupe le parallelepiped. EF : Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'un comme l'autre au solide EK , par la 7. prop. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'un à l'autre comme la base AD à la base EH , par la 32. prop. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH . Or comme le parallelepiped. EF est au parallelepiped. EK , ainsi la base GL à la base IL , par la 25. prop. 11. & icelle base GL est à la base IL , comme la ligne EG est à la ligne EI , par la 1. prop. 6. & partant par la 11. prop. 5. le solide EF est au solide EK , comme EG à EI . Mais le solide EF est aussi au solide EK , comme la base AD à la base EH : Donc par la 11. prop. 5. comme la base AD à la base EH , ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI , ou à son egale AC .

Pour la seconde partie, si AD base est à EH base, comme EG hauteur est à AC hauteur. Je dis que les deux solides AB , & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est evident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posées en mesme raison ; & partant par la 31. prop. 11. les parallelepipedes AB , EF seront pareillement egaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC , soit retranchée d'icelle EI , egale à AC , & par I soit tiré le plan IK , parallele à la base EH . Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH ,

ainsi le solide AB est au solide Ek, puis que leurs hauteurs sont egales : Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK : (car ils sont de mesme hauteur,) donc cōme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au mesme solide Ek, puis que par l'hypothese AD est à EH comme EG à AC ou EI : partant par la 9. prop. 5. les solides AB, EF seront egaux. Donc les egaux solides parallelipedes, ont les bases, & les hauteurs reciproques, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des solides doivent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, les y faudroit reduire, comme nous auons faict à la fin de la 31 prop. de celiure.

Or toutes les choses que nous auons demonstrees és 6. precedentes propositions, sçauoir és 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, observant les susdites hypotheses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, & constituez sur vne mesme base, ou sur bases egales, on appose deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront faicts deux parallelipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesme, ou bases egales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. prop. 11. seront egaux iceux parallelipedes; & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçauoir les moitiez d'iceux parallelip.

Derechef si aux deux prismes susuits de mesme hauteur, & constituez sur diuerses bases, on adioinct deux autres prismes egaux, & semblables à iceux, seront faicts derechef deux parallelipedes de mesme hauteur : Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelipede sera au parallelip. comme la base à la

base ; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçavoir la moitié de l'un des parallelip. à la moitié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, sçavoir est la moitié d'une base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

D'auantage, si à iceux deux prismes semblables, on adiouste deux autres prismes egaux & semblables à eux seront constitués deux parallelip. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplée des costez homologues. Donc aussi par la 15. p. 5. les prismes, sçavoir est les moitiés d'iceux, auront la raison triplée de mesmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

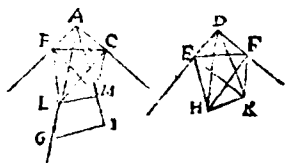
Finablement, si aux deux susdits prismes egaux, on adiouste deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront constitués deux parallelip. egaux de mesme hauteur que les prismes : Parquoy par la 34. p. 11. puis que les bases, & les hauteurs des parallelip. sont reciproques, & les bases des prismes sôt les mesmes, ou les triangles moitiés d'icelles, ayant mesme raison par la 15. p. 5. Aussi les bases & hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. xxxv.

S'il y a deux angles plans egaux, aux sommets desquels soient leuées en l'air deux lignes droictes faisant angles egaux avec les costez des angles premierement posez, chacun au sien ; & d'un poinct pris au haut de chacune des deux lignes sont menées des lignes perpendiculaires sur les plans

esquels sont les angles premierement posez , & des poinçts où tombent icelles perpendiculaires sont tirées des lignes droictes vers les sommets des angles premierement posez : Les angles que font icelles lignes, avec les leuées en l'air sont egaux entr'eux.

Soient les deux angles plans egaux BAC , EDF , du sommet desquels A & D , soient leuées en l'air les lignes droites AG , DH ,



tellement que l'angle BAG est egal à l'angle EDH : & l'angle CAG egal à l'angle FDH : & des poinçts G & H prisés lignes AG , DH , soient tirées aux plans esquels sont les angles BAC , EDF , les perpendiculaires GI , HK , tombantes és poinçts I , K , desquels soient menées les lignes IA , DK . Je dis que les angles GAI , HDK , sont egaux entr'eux.

Car si les deux lignes AG , DH sont inegales, de la plus grande AG , soit retranchée AL egale à DH ; & de L au plan du triangle AGI , soit tirée LM parallele à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. II. puis que GI est perpendiculaire à iceluy plan. Soient aussi tirez des poinçts M , K , les lignes MB , MC , KE , KF , perpendiculaires aux lignes AB , AC , DE , DF ; & soient menées les lignes BC , BL , LC , EF , EH , HF . Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC ,

B A C, elle le sera aussi
à la ligne AM tirée au
même plan par la 2. d.

11. passant par la 47.

prop. 1. le carré de

AL sera égal aux quar-

rez de AM, ML : mais par la même prop. le carré

de AM est égal aux quarréz de AC, CM, puis que

l'angle $\widehat{ACM}$ est droit par la construction. Donc le

quarré de A L est egal aux quartez de A C, C M, M L:

Et par la 47. prop. 1. le carré de CL est égal aux

quarrez de CM, ML, puis que par la 2.d. de ce liure,

l'angle CML est droit. Donc le carré de AL est

egal aux quarezz de AC, CL : & partant par la 48. p.

1. l'angle ACL est droit. D'erechef, puis que par là

47. p.1. le carré de AL est egal aux carrez de A M;

ML : & le quarré de AM est egal aux quarréz de AB.

BM, l'angle ABM étant droit par la construction:

le carré de AL est égal aux carrés de AB, BM,

ML: mais le carré de BL est égal à ceux quarréz de

B.M, M.L, pource que l'angle BML est droit par la

2. def. 11. Donc le carré de AL est égal aux quarrz

de AB, BL : & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL

fera droit. On démontrera en la même manière

que les angles DFH, DEH sont aussi droits. Main-

tenant puis que les angles ABL, LAB , du triangle

ABL sont égaux aux angles DEH, HDE, du triangle

DE H, & les costez AL, DH aussi egaux, par la 26.

prop. 1. les autres costez A B, BL seront pareille-

ment egaux aux autres costez D E, E H. Par mesme

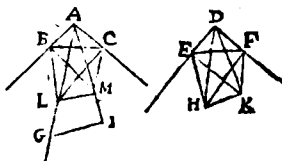
raison seront egaux les costez A G, CL, aux costez

DF, FH. Parquoy les costez AB, AC du triangle

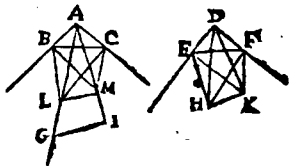
A B C, estans egaux aux costez DE, DF du triangle

DEF, & les angles BAC, EDF aussi égaux, par la 4.

Yy



prop. 1. les bases BC , EF , seront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC , ACB egaux aux angles DEF , DFE . Mais tous



les angles ABM , ACM , sont egaux à tous les angles DEK , DFK , puis qu'ils sont tous droicts : Donc aussi les autres angles BMC , MCB seront egaux aux autres angles KEF , KFE ; & partant puis que les costez BC , EF , ont esté demonstrez egaux; les costez BM , CM , seront egaux aux costez EK , FK , par la 26. prop. 1. veu donc que les costez AC , CM , du triangle ACM sont egaux aux costez DF , FK du triangle DFK . & les angles ACM , DFK sont droicts, par la 24. prop. 1. les bases AM , DK seront egales. Et puis que BL , EH ont esté demonstrees egales, leurs quarréz seront aussi egaux : Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL est egal aux quarréz de BM , ML , & le quarré de EH aux quarréz de EK , KH , pource que les angles BML , EKH sont droicts, par la 2. def. 11. Donc les quarréz de BM , ML seront egaux aux quarréz de EK , KH : & partant estans ostez les quarréz de BM , EK , qui sont egaux, les lignes BM , EK , ayant esté demonstrees egales; resteront egaux les quarréz de LM , HK , & partant les lignes LM , HK seront egales. Parquoy veu que les costez AL , AM du triangle ALM , sont egaux aux costez DH , Dk du triangle DHk , & la base LM egale à la base Hk ; les angles LAM , HDK seront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, aux sommets desquels soiét leuees en haut deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

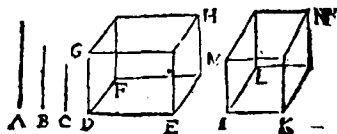
C O R O L A I R E.

Parquoy s'il y a deux angles plans égaux, & les sommets desquels soient eslevés en l'air des lignes droictes égales, lesquelles avec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles égaux, chacun au sien; les perpendiculaires tirées des points extrêmes d'icelles lignes eslevées en l'air, sur les plans des angles premierement posez, seront égales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC , EDF , sont posez égaux, & les lignes égales AL , DH eslevées en haut constituent les angles égaux LAB , HDE ; Item LAC , HDF ; il a esté démontré que les perpendiculaires LM , HK , sont égales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

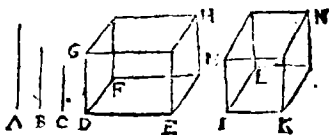
Si trois lignes droictes sont proportionnelles; le solide parallelepipedé compris d'icelles trois lignes, est égal au solide parallelepipedé compris de la moyenne, pourueu qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soiét trois lignes continuellement proportionnelles A , B , C : & soit constitué vn angle solide D , de trois



quelconques angles plans EDF , EDG , FDG , tellement que la ligne DE soit égale à A . & DG à B , & DF égale à C : & soit accompli le parallelepipedé DH

en apres par la 26.
p. 11. sur la ligne Ik
egale à B, & au
point I soit fait
l'angle solide I des
trois angles plans



KIL, kIM, & kIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG:
tellement que les lignes Ik, IL, IM soient egales à la
moyenne B; & soit fait le parallelepiped de IN. Je
dis que les solides DH, IN sont egaux.

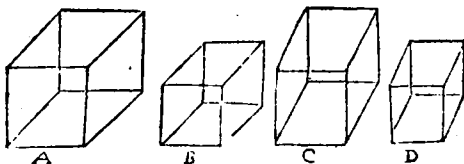
Car puis que comme DE est à Ik, ainsi IL à DF:
(car DE est egale à A; IK, IL à B; & DF à C), & les
angles EDF, kIL egaux; les parallelog. EF, kL seront
egaux par la 14. p. 6. pource qu'ils ont les costez au
long des angles egaux reciproques. Et d'autant
qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, kIL
sont esleuez en l'air les lignes egales DG, IM, les-
quelles avec les lignes des angles premierement po-
sez comprennent angles egaux, vn chacun au sien: les
perpendiculaires tirees de G, M, sur les plans des ba-
ses EF, kL; (sçavoir est les hauteurs des parallelip.
DH, IN) seront egales entr'elles par le corollaire de
la preced. prop. Parquoy par la 31. p. 11. les parallelip.
DH, IN, seront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les
bases EF, kL egales, & pareillement les hauteurs
egales. Parquoy si trois lignes droictes sont propor-
tionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 32. PROP. xxxvii.

Si quatre lignes droictes sont propor-
tionnelles, les solides parallelepipedes
semblables, & semblablement descrits
sur icelles, seront proportionaux: Et

si iceux quatre semblables solides parallelipipedes sont proportionaux ; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez , seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles , comme A, B, C, D : & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Je dis qu'iceux solides sont proportionaux.



Car puis que le solide A est semblable au solide B : par la 33. p. 11. ils seront l'un à l'autre en raison triplée de la ligne A à la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplée de C à D : mais la raison de A à B, est cōme de C à D par l'hypothèse. Donc la raison triplée de A à B, sera semblable à la raison triplée de C à D ; & partant par la 11. p. 5. le solide A sera au solide B, cōme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplée de la ligne A à la ligne B : Item le solide C au solide D, en raison tri-

plée de C à D : mais le solide A est au solide B comme le solide C au solide D : partant leur raison triplée sera semblable ; & par conséquent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportioneles. Parquoy si quatre lignes droictes sont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Nous adiousterous icy cest autre theoreme.

Si quatre lignes droictes sont continuellement proportioneles : le parallelipede compris sous le quarré de l'une des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyēne proportion. plus prochaine de la premiere extreme prise.

Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Je dis que le parallelipede compris sous le quarré de l'extreme A, & sous le quarré de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

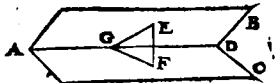
Car puis que par le corol. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D : les bases avec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallelipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy ; & la base du cube est le quarré de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc par la 34. p. 11. le parallelipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le parallelip. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré de l'autre extreme A, sera demonstrier egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculaire-

mét sur vn autre plan, & d'un poinct de l'un d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre, elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan AB, esleué perpendiculairement sur le plan AC, leur ligne de cõmune section AD;



& du poinct E pris en AB on laisse tomber vne perpendiculaire sur le plan AC : ie dis qu'elle tombera sur la commune section AD.

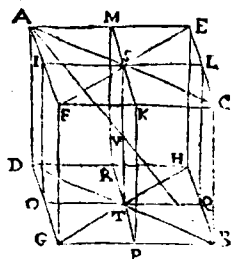
Autrement qu'elle tombe au poinct F, du plan AC, s'il est possible : & par la 12. prop. 1. du poinct F sur la ligne AD soit menée la perpendiculaire FG; & la ligne GE faisant le triangle GFE. Or si la ligne EF est perpendiculaire au plan AC, elle le sera aussi à la ligne FG : & icelle FG estant perpendiculaire à la commune section AD, elle le sera pareillement au plan AB : & par consequent à la ligne GE : partant au triangle GFE, les deux angles sur la ligne GF seroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E sur le plan AC ne tombera pas hors la commune section AD, mais elle tombera en icelle. Parquoy si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'un so-

lide parallelepiped, sont coupeez en deux egalement ; & on meine des plans par les sections : la ligne de commune section d'iceux plans, & le diamette du solide parallelepiped, se couperont en deux egalement.

Soit le parallelepiped AB; les plans opposez AC, BD, desquels tous les costez soiēt coupeez en deux egalement es poinçts I, K, L, M, O, P, Q, R, par lesquels soient imaginez passer les plans IQ, KR, se couppans l'un l'autre en la ligne ST : & soit



menée la diagonale AB : Je dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entre coupent en deux egalement.

Car estans tirées les lignes SA, SC, TD, TB : soient considerez les deux triangles BQT, DOT, desquels les deux costez BQ, QT sont egaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moitez des lignes droictes egales BH, DG : & par la 34. p. 1. QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP, puis que P, Q, PO sont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. prop. 1. est egal à l'interne DOT : partant par la 4. prop. 1. les bates BT, DT seront aussi egales : & les angles BTQ, DTO pareillement egaux : Et par la 19. prop. 1. les angles BTO, DTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi BTO, DTO sont egaux à deux droicts : & partant par la 14. p. 1. BT,

DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demonstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioingnent les extremittez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par consequent AS, BT moitiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront avec icelles en vn mesme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecouperont en vn poinct, sçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. prop. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouperont en deux egalelement au poinct V. Parquoy si les costez des plans opposez d'un solide parallelipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E :

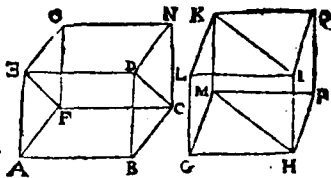
Par cery est euident qu'en tout parallelipede, tous les diametres s'entrecouperont en deux egalelement en vn seul poinct, sçauoir est au poinct V, auquel ils diuisent en deux egalelement la ligne ST. Est aussi manifeste que tout plan qui coupe le parallelipede en deux egalelement passe par le centre d'iceluy, sçauoir par V.

T H E O R. 35. P R O P. XL.

Deux prismes de mesmes hauteur sont

egaux, si la base de l'un triangulaire n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEF, GHikLM; & que celui-là ait pour base le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM base du prisme GHikLM. Je dis qu'iceux prismes sont egaux.



Car si on les accomplit pour estre solides parallelipedes AN, GQ, la base GN sera egale à la base BF: & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. prop. 11. les plans diagonaux CD EF, Hl kM les diuiseront en deux egaleement, & partant les prismes donnez au commencement estans les moitez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnziesme Element.



E L E M E N T

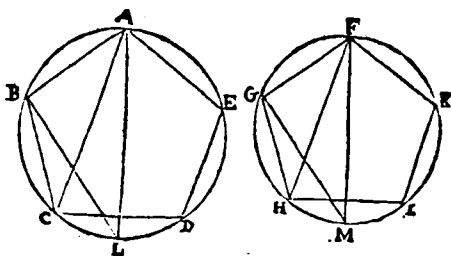
D O V Z I E S M E.

T H E O R. i. P R O P. I.



Es polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'un à l'autre comme les quarréz descrits des diametres des cercles.

Soient
deux po-
lygones
sembla-
bles AB
CDE &
FGHIK,
inscrits
dans les
cercles,



desquels les diametres sont AL, FM. Je dis qu'iceux polygones sont l'un à l'autre comme les quarréz des diametres AL, FM.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes AC, FH, item BL, & GM. D'autant que les pentagones sont semblables, AB est à BC, comme FG à GH. & l'angle ABC, egal à l'angle FGH; par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG. Mais ils sont chacun egaux, l'un à l'angle L, l'autre à l'angle M, par la 21. prop. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG.) Ainsi l'angle L sera egal à l'angle M: & par la 31. p. 3. les angles ABL, FGM estans droicts dans les demy cercles, & egaux, les triangles ABL, FGM seront equiangles: (car le troisieme sera egal au troisieme, par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG; & en permutant comme. AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. p. 6. comme le pentagone décrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL au quarré de FM. Parquoy les polygones semblables inscrits aux cercles, &c. Ce qui estoit à prouver.

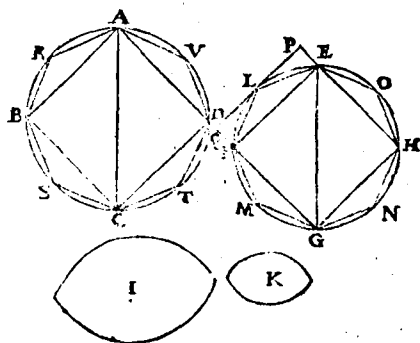
T H E O R. 2. P R O P. II.

Les cercles sont l'un à l'autre, comme les quarrez décrits de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, décrits sur les deux diametres AC & EG: le dis qu'ils sont l'un à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG; c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC, au quarré EG, ainsi le cercle ABCD

à quelque figure quatriefme proportion. (comme I) qu'icelle figure I est egale au cercle E F G H.

Autremēt elle sera plus petite ou plus grande.



Qu'elle soit premierement plus petite, s'il est possible : & soit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K : Soit donc dans iceluy cercle EFGH décrit le quarré EFGH, qui est plus grand que la moitié du cercle : (d'autāt que le quarré de EG, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petite, que k, nous auons ce que nous demandons : Sinon soit couppé l'arc EF en deux egalemēt au point L, & les trois autres arcs semblablement es points M, N, O : & soient tirees les lignes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, & OE, afin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inscrit dans le cercle : Il est euident que dans les quatre sections egales, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, est plus de la moitié de sa section : (car le triangle isoscele FLE est la moitié du rectangle FP de mēme hauteur, & sur mēme base FE, par la 41. prop. 1. lequel rectangle est

plus grand que le segment FLE). Soient maintenant les huit petites figures restantes plus petites que la figure K , que si cela n'estoit, il faudroit toujours couper les arcs derniers, & toujours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent, & soustraire toujours plus de la moitié de chacune section, sçauoir son triangle Isoscele: Il est certain qu'à la fin les dernières portions seront plus petites que la figure k . Mais pour abreger soient les deuant dictes huit sections restantes plus petites que la figure k : Il est euident que l'octogone $ELFMGNHO$ sera plus grand que la figure I , puis que les deux I & k sont egales au cercle $EFGH$. Soit pareillement inscrit vn octogone semblable au cercle $ABCD$, ce qui est facile: car il n'y a qu'à couper en deux egaleement les deux demy cercles ABC , ADC , en B & D ; puis les circonferences AB , BC , CD , AD aussi en deux egaleement en R , S , T , V ; & avant tiré les lignes droictes AR , RB , BS , SC , CT , TD , DV , & VA ; il est euident que la figure inscrite sera semblable à la figure octogone descrite au cercle $EFGH$. Maintenant par la 1. prop. 12. l'octogone $ARBSCTDV$ sera à l'octogone $ELFMGNHO$, comme le quarré de AC est au quarré de EG : mais comme le quarré de AC est au quarré de EG , ainsi le cercle $ABCD$ est à la figure I : & par la 11. propos. 5. comme le poligone $ARBSCTDV$ sera au poligone $ELFMGNHO$, ainsi le cercle $ABCD$ sera à la figure I . Mais le poligone $ARBSCTDV$ est moindre que le cercle $ABCD$: Donc par la 14. propos. 5. le polygone $ELFMGNHO$ sera aussi moindre que la figure I : Mais il a aussi esté demonsté plus

grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

On prouvera aussi qu'elle ne peut estre plus grande: Autrement s'il est possible, puis que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I: aussi en changeant la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC: mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme κ : & par la 14. prop. 5. comme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure κ : & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD sera à la figure κ , comme le quarré de AC est au quarré de EG: ce qui contrevient à la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous avons démontré que l'un des cercles estant à une figure, en la raison des quarrés des diamètres, qu'icelle figure ne pouvoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure I ne pouvoit estre plus grande que le cercle EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle estoit donc égale à iceluy. Parquoy les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres: ce qu'il falloit prouver.

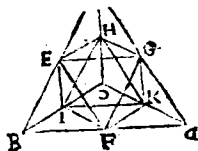
C R O L L A I R E.

Par ces choses est evident que le cercle est au cercle comme le polygone décrit en celuy-là est au polygone semblable décrit en cestuy-cy. Puis que par la 2. prop. 12. tant le cercle est au cercle, que par la 1. prop. 12. le polygone est au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté démontré.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD, ayât la baie triangulaire ABD, & le sommet au point C : le dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale : & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié de la pyramide donnee.



Qu'il ne soit ainsi. Soient coupez en deux également, tous les costez des plans d'icelle pyramide, à sçavoir les trois de la base ABD aux points E, F, G, & les trois hypoténuses AC, BC, DC aux trois points H, I, K, & soient menees les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premièrement la base ABD est diuisee en trois figures ; au quadrangle BEGF ; & les deux triangles DGF, & EAG, lesquels sont semblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les costez d'iceluy sont coupez proportionnellement, & par la 2. prop. 6. la ligne EG est parallele à BD, & FE à AD. Partant l'angle A estant commun aux deux triangles BAD,

BAD & EAG, l'angle extérieur GEA sera égal à l'opposé intérieur DBA, par la 29. p. 1. Et par la 32. p. 1. le troisième sera égal au troisième, & par la 4. prop. 6. & 1. def. 6. les deux triangles BAD & EAG seront semblables. Par le même discours le triangle FGD, sera semblable au triangle BAD, & par la 21. prop. 6. les deux triangles EAG, FGD, seront semblables entr'eux, & égaux, d'autant que leurs costez sont égaux. Quant au quadrangle BEGF; il est évident par la 41. prop. 1. qu'il est double du triangle FGD. (car il est sur base égale, & entre mêmes parallèles) Il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est divisée aux deux pyramides AEGH & HICK égales & semblables; & aux deux prismes, l'un EHGFI B, duquel la base est le quadrangle BEGF, l'autre HICK FDG, duquel la base est le triangle FGD: & pour autant qu'ils sont de même hauteur, sçavoir de la hauteur du point H, ou du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire, ils seront égaux par la 40. prop. 11.

Or que les pyramides AEHG, & HICK soient semblables, on le prouve en cette sorte: d'autant que les costez AC, DC du triangle ACD ont été coupez en deux également, par la 2. prop. 6. HK, AD, sont parallèles, & l'angle extérieur CHK est égal à son opposé intérieur HAG par la 29. prop. 1. Et AHG à HCK, & par la 32. prop. 1. le troisième sera égal au troisième; & partant par la 4. prop. 6. les triangles equiangles CHK & HAG seront semblables entr'eux, & au triangle ACD par la 21. p. 6. ils seront aussi égaux entr'eux, estans les lignes CH & HA égales. Par les mêmes raisons les triangles ICH, & EHA seront égaux, & semblables entr'eux, &

au triangle ACB. Item le triangle Ikh se prouera facilement equiangle, & semblable au triangle ABD, (car ayans leurs costez parallels se touchans en diuers plans ils ferōt angles egaux) partant aussi semblable au triangle GAE, & egal à iceluy par les 21. & 22. p. 6. Car HK est egal à GD, & GD à GA: & par la mesme raison kCI & BCD seront semblables à GH E, & KCI egal à iceluy: & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables; & les deux petites AEHG, HICK seront egales, estans faictes de plans egaux.

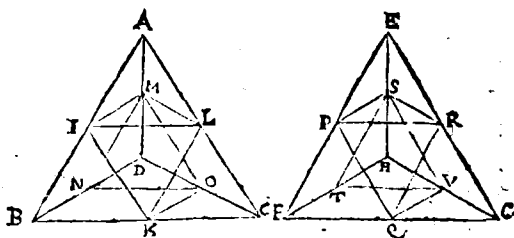
Que les deux prismes EHGFIB, & HIKFDG soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'un d'iceux EHGFIB, ayant base quadrangulaire BEGF double du triangle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie: Et par consequent les deux prismes ensemble, seront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD: donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant base triangulaire peut estre diuisee en deux pyramides egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, & chacune d'icelles est diuisee en deux autres pyramides semblables entr'elles, & à la route, & en deux prismes egaux; & les pyramides de la diuision sont tousiours subdiuisees de mesme façon: commela base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre; ainsi aussi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdiuision d'icelle pyramide, seront à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient sur les bases triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de mesme hauteur, desquelles chacune soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyramides egales entr'elles & semblables à la route, sçauoit est en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux prismes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de mesme façon soient entendies chacune des pyramides AILM, MNOD; EPRS, STVH estre diuisees; & en continuant tousiours de mesme façon,

Ie dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faicts en la pyramide ABCD à tous les prismes faicts en la pyramide EFGH.



Car puis que comme BC à Ck, ainsi FG à GQ; pource que l'une & l'autre ligne est diuisee en deux egalement, & les triangles ABC, LkC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG, RQG, par le coroll. de la 4. propos. 6, pareillement par la 22. prop. 6. comme le triangle ABC au triangle LkC, ainsi le triangle EFG, au triangle RQG: & en permutant comme ABC à EFG, ainsi LkC à RQG. Mais comme LkC à RQG, ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerons incontinent: & partant ainsi aussi le prisme IBkLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux-là: Et comme vn seul prisme, sçauoir IBkLMN est à vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBkLMN, CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. prop. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstresons en la mesme maniere deux prismes es pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyramide

$ABCD$, estre aux deux prismes és pyramides $EPRS$, $STVH$, faictes en la pyramide $EFGH$, comme sont les bases AIL , MNO de ces pyramides là aux bases EPR , STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases-là sont à celles-cy, ainsi la base LkC , qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG , qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG . Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG , ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide $ABCD$, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide $EFGH$: & partant aussi comme les prismes de la pyramide $ABCD$ seront aux prismes de la pyramide $EFGH$, ainsi seront les prismes tant de la pyramide $AILM$, aux prismes de la pyramide $EPRS$, que les prismes de la pyramide $MNOD$, aux prismes de la pyramide $STVH$; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. proposi. 5. comme les deux prismes de la pyramide $ABCD$ sont aux deux prismes de la pyramide $EFGH$, ainsi tous les prismes estans és pyramides $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. ensemble, sont à tous les prismes estans és pyramides $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là; pareillement comme la base ABC est à la base EFG , ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide $ABCD$, à tous les prismes en la pyramide $EFGH$: Parquoy s'il y a deux pyramides de mesme hauteur, ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

L E M M E.

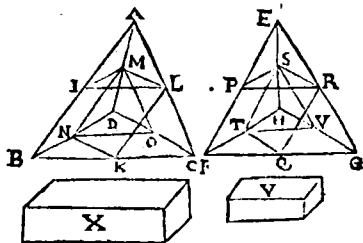
Or que comme LKC est à RQG , ainsi le prisme $CKLMNO$ soit au prisme $GQRSTV$, nous le démonstrerons ainsi. Soient imaginées tomber des sommets D, H , des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG , lesquelles seront les hauteurs égales des pyramides $ABCDEF GH$. Donc puis que les plans parallèles ABC, MNO coupent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droictes, sçavoir DC & la perpendiculaire tombant de D ; & DC est couppee en deux également en O : pareillement la perpendiculaire tombant de D , sera couppee en deux également au point an quel elle rencontre le plan MNO . Par la mesme raison la perpendiculaire tombant de H , sera couppee en deux également par le plan STV . Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posees égales, leurs moitiex, sçavoir est les hauteurs des prismes, seront aussi égales: & partant les prismes $CKLMNO, GQRSTV$ estans d'égales hauteurs, seront entr'eux, csmme les bases LKC, RQG , par les choses que nous auons demonstrees sur la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de mesme hauteur $ABCD, EFGH$, desquelles les bases sont les triangles ABC, EFG . Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.

Autrement soit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme la base ABC à la base EFG , ainsi la pyramide $ABCD$ à quelque solide, cōme X : ie



dis qu'iceluy solide X est egal à la pyramide $EFGH$, autrement il sera plus petit ou plus grand: & soit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du solide Y . Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y , soient egaux à la pyramide $EFGH$. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux prismes egaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que si de la pyramide $EFGH$, on retranche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes $PFQ RST$, $G QRSTV$, & de chacune pyramide restante $EPRS$, $STVH$, encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y : ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide $EFGH$, seront plus grands que le solide X , puis que le reste est plus petit que le solide Y . Pareillement soient retranchez autant de fois deux prismes de la pyramide $ABCD$, cōme on en a retranché de la pyramide $EFGH$: il est euident par ce qui a esté démontré en la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ seront à tous les prismes retranchez de la pyramide $EFGH$:

Mais nous auons posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auons tantost prouuez estre plus grands, en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH: partant icelle hypothese est fausse, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; & puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X, en permutant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide, comme Y: Et par la 14. prop. 5. d'aurant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y: & par la 11. propos. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons demonstté que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, scauoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la

base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egale à iceluy solide X; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de même hauteur, ayans bases triangulaires, sont entr'elles comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Par la conuerse; Si les pyramides triangulaires sont entre-elles comme leurs bases : elles seront de même hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, soit coupée d'icelle une egale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la base, soient tirées des lignes droictes : & comme la base sera à la base, ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituée : mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. prop. 5. la pyramide constituée sera egale à toute la pyramide, la partie au tout : ce qui est absurde.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que les pyramides de même hauteur constituées sur même, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles : puis qu'elles sont en même raison que leurs bases, lesquelles sont posées egales, ou une seule & même.

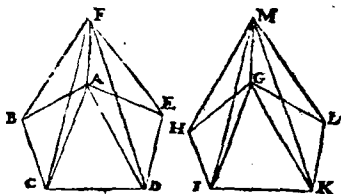
Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituées sur une même ou egales bases, sont de même hauteur. Et que les pyramides egales, & ayans même hauteur, ont les bases egales, si elles ne sont une même : lesquelles deux choses nous demonstrerons par la premiere partie du corol. par le même argument dont nous

*avons vſé en demonſtrant la conuerſe des 30. & 31. p. 11. ſe
tant ſur la hauteur, que ſur la baſe couppee eſt conſtituée vne
autre pyramide, &c.*

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans
baſes poligones, ſont l'une à l'autre
comme leurs baſes.

Soit la pyramide
A B C D E F de
meſme hauteur
que la pyramide
G H I K L M deſ-
quelles les baſes
A B C D E &
G H I K L ſont po-



ligones : le diſ que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi
la pyramide eſt à la pyramide.

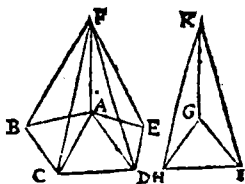
Car les baſes eſtans reduictes en triangles ABC,
ACD, ADE ; GHI, GIK, GKL : ſoit imaginé ſur
chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur
que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. com-
me la baſe ABC eſt à la baſe ACD, ainſi la pyramide
A B C F eſt à la pyramide A C D F ; en compoſant
comme la baſe A B C D ſera à la baſe A C D, ainſi la
pyramide A B C D F ſera à la pyramide A C D F : Mais
derechef, par la 5. prop. 12. comme la baſe A C D eſt
à la baſe A D E, ainſi la pyramide A C D F eſt à la py-
ramide A D E F : Donc en reſon egale comme la
baſe A B C D eſt à la baſe A D E, ainſi la pyramide
A B C D F eſt à la pyramide A D E F : & partant en

composant comme la base $A B C D E$ est à la base $A D E$, ainsi la pyramide $A B C D E F$ est à la pyramide $A D E F$. Par semblable argument sera démontré que comme la base $G H I K L$ est à la base $G K L$, ainsi la pyramide $G H I K L M$ est à la pyramide $G k L M$; & en changeant comme la base $G k L$ est à la base $G H I k L$, ainsi la pyramide de $G k L M$ est à la pyramide $G H I K L M$. Derechef puis que par la 5. prop. 12. comme la base $A D E$ est à la base $G K L$, ainsi la pyramide $A D E F$ est à la pyramide $G k L M$; les 4. bases $A B C D E$, $A D E$, $G K L$, $G H I k L$, seront ées mêmes raisons que les 4. pyramides $A B C D E F$, $A D E F$, $G k L M$, $G H I k L M$: Parquoy en raison égale commela base $A B C D E$ est à la base $G H I k L$, ainsi la pyramide $A B C D E F$ est à la pyramide $G H I k L M$. Donc les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, sont entr'elles comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouver.

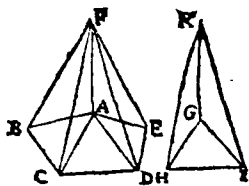
S C H O L I E.

Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la démonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez égaux en nombre : toutesfois nous démonstrerons aussi le

mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'une desquelles contient plus de costez que la base de l'autre. Car soient premierement deux pyramides de mesme hauteur $A B C D E F$, $G H I K$, la base de l'une desquelles soit polygone



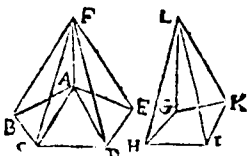
ſçavoir eſt pentagone, & de l'autre triangulaire. Je dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe: Car le pentagone eſtant reſoud en triangles, auſſi la pyramide ſera diuiſſée en pyramides egales en nombre. Et pour ce que par



la 5. p. 12. comme la baſe ABC premiere quantité eſt à la baſe GHI, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF 3. quantité eſt à la pyramide GHIK 4. quantité. Et en la meſme maniere, comme la baſe ACD, 5. quantité eſt à la baſe GHI 2. quantité, ainſi la pyramide ACDF 6. quantité, eſt à la pyramide GHIK 4. quantité: par la 24. prop. 5. comme la baſe ABCD 1 & 5 quantitez enſemble, ſera à la baſe GHI ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF 3. quantité avec la 6. ſera à la pyramide GHIK 4. quantité. Derechef puis que comme la baſe ABCD eſt à la baſe GHI, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonſtrer: & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ADE 5. quantité, eſt à la baſe GHI 2. quantité, ainſi la pyramide ADEF 6. quantité eſt à la pyramide GHIK 4. quantité: par la meſme 24. prop. 5. la baſe ABCDE ſera à la baſe GHI, comme la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: ce qui eſtoit propoſé. En la meſme maniere faudroit ſouſſours proceder ſ'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe du polygone. Or puis que comme il a eſté demonſtré, la baſe du polygone ABCDE eſt à la baſe triangulaire GHI, ainſi que la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIK: pareillement en changeant, comme la baſe GHI ſera à la baſe ABCDE, ainſi la pyramide GHIK ſera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, deſquelles l'une à la baſe polygone, & l'autre triangulaire, ſont ſouſſours comme leurs baſes, de quelque part où l'on commence: Car encore que la

demonstration commence au polygone & à sa pyramide, cōme appert par la demonstration, toutesfois en changeant il est permis prendre le commencement au triangle & à sa pyramide, comme il a esté dict.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKL$, desquelles les bases sont polygones, & sōt plus de costez en vne base qu'en l'autre: Je dis derechef que la pyram. est à la pyramide, cōme la base est à la base. Car estant resoud le polygone $ABCDE$ és triangles ABC , ACD , ADE : la pyram. sera divisée en autāt de pyramides. Et d'autāt que cōme la base triangulaire ABC , premiere quantité, est à la base polygone $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCF$ troisieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité; & comme la base ACD 5. quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: aussi par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere quantité avec la 5. sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ troisieme quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité. Derechef puis que comme la base $ABCD$ premiere quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ tierce quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: & aussi que comme la base ADE quinte quantité, est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ sixieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ quatre quantité: pareillement par la 24. prop. 5. comme la base $ABCDE$ premiere quantité avec la quinte, sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDEF$ tierce quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.



Or nous conuertirons sans ceste 6. prop. que celle demon-
strée en ce scholie, en ceste maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles
 sont entr'elles comme leurs bases, sont en mesme
 hauteur.

Ce qu'on démontrera en la mesme maniere, que les choses
dictes au scholie de la 5. pr. de ce liure, ont esté démontrées.

COROLLAIRE.

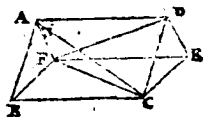
Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, con-
 situées sur bases égales multilatères, ou sur vne mesme, estre
 égales entr'elles; puis qu'elles ont mesme raison que leurs
 bases, lesquelles sont posées égales, ou vne mesme.

Derechef est euident que les pyramides multilatères éga-
 les, & construites sur bases égales, ou sur vne mesme, ont
 mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires égales,
 & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases égales, si elles ne
 sont vne mesme. Ce qui se peut démontrer comme nous
 auons dict au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois
 pyramides égales, ayans bases trian-
 gulaires.

Soit le prisme ABCDEF
 duquel les deux triangles
 opposites ABF, DCE sont
 égaux & semblables. Je dis
 qu'iceluy prisme peut estre
 diuisé en trois pyramides égales, ayans bases trian-
 gulaires.



Car si des trois parallelogrammes d'iceluy prisme,
 on meinc les trois diametres AC, CF, FD, il est eu-

dent que le prisme sera diuisé en trois pyramides: monstons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC, couppant le parallelogramme ABCD en deux également, les triangles ABC, ADC sont egaux: Partant la pyramide ABCF, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pyramide ADCF, ayant pour base le triangle ADC, par la 5. prop. 12. Car icelles pyramides sont de mesme hauteur, sçauoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan ABCD. Par mesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, constituées sur les bases egales ADF, EFD, & sous mesme hauteur, sçauoir de la perpendiculaire menée du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC; puis que l'une & l'autre est continuée des 4. plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles. Parquoy tous prismes peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'une pyramide est la tierce partie d'un prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

S C H O L I E.

Nous adiousterons icy la demonstration d'une autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables: ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelcōques bases, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux prismes de mesme

hauteur $ABCDEFGHIK$,

$LMNOPQRS$, desquels les

bases sont figures mutilate-

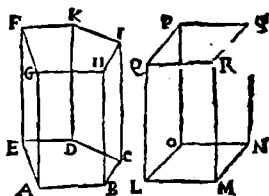
res. Le dis que comme la base

$ABCDE$ est à la base $LMNO$,

ainsi est le prisme au prisme.

Car si de tous les angles de

chaque base on tire des lignes droictes à un point du plan supérieur, qui est opposé à la base, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme: Et partans par le corollaire cy dessus, chaque pyramide sera la troisieme partie de son prisme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme: Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté démontré à la 6. prop. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & constituez sur mesme base, ou sur bases egales, quelles qu'elles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont une mesme, ou bien sont egales.

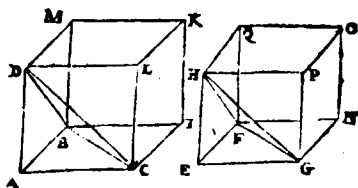
Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, constituez sur une mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur: Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on démontrera en la mesme maniere qu'a esté démontré la conuerse de la 31. p. 11.

THEOR.

T H E O R. 8. P R O P. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient les deux pyramides semblables $ABCD$ & $EFGH$, ayans bases triangulaires, ABC & EFG : ie dis qu'elles sont en



raison triplée des costez de mesme raison AC & EG .

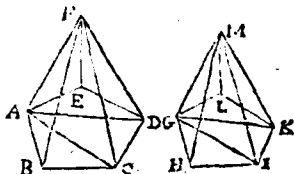
Qu'ainsi ne soit. Soient acheuez les parallelepipedes AK & EO . D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD , AB , AC , seront proportionnaux aux trois costez EH , EF , EG , & l'angle solide A egal à l'angle solide E , par la def. des solides semblables: & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. prop. 11. les deux solides AK & EO seront semblables, ayans les trois costez AB , AD , AC , proportionnaux aux trois costez EF , EH , EG ; & les opposez seront aussi proportionaux; & par consequent les six plans proportionaux aux six plans: Mais les 2. solides AK & EO , estans semblables, ils seront en raison triplée de leurs costez homologues AC , & EG , par la 33. proposition 11. Et comme le solide AK est au solide EO , ainsi la pyramide

ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide , d'autant que par la 28. prop. 11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux , & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7. prop. 12.) & partant par la 11. prop. 5. les pyramides sont aussi en raison triplée des costez de mesme raison AC, & EG. Donc les pyramides semblables ayans bases triangulaires sont en raison triplée de leurs costez homologues. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient les pyramides semblables ABCDEF, GHKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Je dis qu'icelles pyramides sont en raison triplée des costez ho-



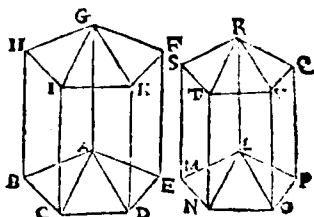
mologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD : GI, GK : par la 20. prop. 6. les bases semblables seront diuisées en nombre egal de triangles semblables, (sçauoir est que les triangles ABC, ACD, ADE, seront semblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides sont semblables, les triangles AFB, GMH, sont semblables, & l'angle FAB égal à l'angle MGH ; & comme FA sera à AB, ainsi MG sera à GH : mais comme AB à AC, ainsi GH à GI, à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : donc en

raison egale, comme FA sera à AC , ainsi MG sera à GI .
 Derechef puis que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH :
 à cause de la similitude des triangles ABC , GHI : & comme
 GB à CF , ainsi IH à IM , puis que à cause de la similitude
 des pyramides, les triangles BCF , HIM , sont semblables:
 aussi par raison egale, comme AC sera à CF , ainsi GI sera
 à IM : & partant puis que comme FA à AC , ainsi MG à
 GI ; & comme AC à CF , ainsi GI à IM : pareillement en
 raison egale, comme FA sera à FC , ainsi MG à MI . Par-
 quoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC , GMI , seront
 equiangles, & partant semblables. Mais les triangles AFB ,
 BFC , ABC sont aussi semblables aux triangles GMI ,
 HMI , GHI . Donc par la 8. def. 11. les pyramides $ABCF$,
 $CHIM$, sont semblables. Par mesme raison seront semblables
 les pyramides $ACDF$, $GIKM$: Item $ADEF$, $GKLM$. Par-
 quoy par la 8. p. 12. les pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$,
 seront aux pyramides $GHIM$, $CIKM$, $GKLM$, chacune à
 la sienne, en raison triplée des costez homologues AB , CD ,
 DE , à GH , IK , KL , chacun au sien. Veu donc qu'à cause de
 la similitude des bases $ABCDE$, $GHIKL$, il y a vne seule
 & mesme raison de AB , CD , DE à GH , IK , KL : aussi les
 pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, auront aux pyramides
 $GHIM$, $GIKM$, $GKLM$, vne seule & mesme raison, c'est à sçau-
 voir triplee. Et par la 12. p. 5. comme vne seule pyramide
 $ABCF$ est à vne seule pyramide $GHIM$, ainsi toutes les
 pyramides, sçavoir est la pyramide $ABCDEF$, est à toutes
 les pyramides, sçavoir est à la totale $GHIKLM$. Parquoy
 puis que par la 8. prop. 12. la pyramide $ABEF$ est à la py-
 ramide $GHIM$ en raison triplée des costez homologues AB ,
 GH ; aussi la pyramide $ABCDEF$ sera à la pyramide
 $GHIKLM$ en la raison triplée des mesmes costez homolo-
 gues AB , GH . Ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison

triptée de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables $AB CDEFGHIK$, $LMNO PQRSTV$: Je dis qu'ils sont en raison triplée des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC , AD ,



LN , LO ; par la 20. prop. 6. les triangles ABC , CAD , DEA , seront semblables aux triangles LMN , LNO , OPL . Semblablement si des angles G & R , on tire les lignes GI , GK , RT , RV ; les triangles GHI , GK , GKF , seront aussi semblables aux triangles RST , RTV , RVQ , & aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sont semblables. Et d'autant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH , NS sont semblables; comme CI sera à CB , ainsi TN sera à NM : mais comme BC est à CA , ainsi NM est à NL , à cause de la similitude des triangles. Donc par raison egale, comme CI sera à CA , ainsi TN à NL . Derechef pource que l'angle solide N , est egal à l'angle solide C , à cause de la similitude des prismes, si celui-cy est superposé à l'autre l'angle MNO conuendra à l'angle BCD , & l'angle TNM à l'angle ICB , & l'angle TNO à l'angle ICD . Mais aussi la ligne droite NL conuient à la ligne CA , pource que les angles LMN , BCA sont egaux. Donc les angles ICA , TNL sont egaux & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont est é demonstrez proportionaux, les parallelogrammes CG , NR , seront semblables. Mais aussi les parallelogrammes CH , HA , sont semblables aux parallelogrammes NS , SL , & les triangles ABC , GHI , aux triangles LMN , RST . Donc les prismes $ABCEIGH$, $LMNTRS$, sont semblables, par la 8. def. 11. On demon-

strera en la mēme maniere que les prismes $CDAGIK$, $NOLTDV$, sont sēblables, cōme aussi les prismes $AEDKGF$, $LPOVRQ$. Parquoy les prismes $ABCIGH$, $CDAGIK$, $AEDKGF$, par les choses demonstrées à la 34. p. 11. sont aux prismes $LMNTRS$, $NOLRTV$, $LPOVRQ$, chacun au sien, en raison triplée des costez homologues BC , CD , DE , à MN , NO , OP ; chacun au sien. Et partant en la mēme maniere que nous auons demonstré cy dessus des pyramides multangles, on demonstrera que les prismes $ABCDEFGHIK$, $LMNOPQRSTV$, sont en raison triplée des costez homologues BC , MN .

De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Car cecy est manifeste par la demonstration du preced. corol.

Se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appere par la demonstration de ce scholie.

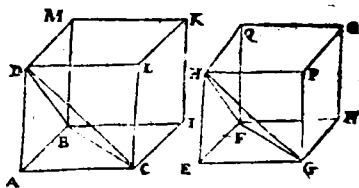
THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans bases triangulaires, leurs hauteurs sont reciproques aux bases : Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

Soient les deux pyramides egales $ABCD$, & $EFGH$, ayans bases triangulaires : ie dis que les bases d'icelles sont reciproques à leurs hauteurs, c'est à

dire que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la hauteur du point H à la hauteur du point D.

Qu'il ne soit ainsi. Soient ache-

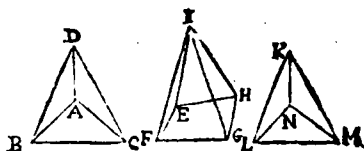


uez les parallelepipèdes AK, EO, & comme en la precedente, il sera evident que chacun d'iceux parallelepipèdes sera sextuple de sa pyramide. Et les deux pyramides estans egales, iceux solides AK, EO, seront egaux: & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi la base EN à la base AI) Mais comme EN à AI, ainsi sa moitié le triangle EFG, à la moitié de AI, sçavoir le triangle ABC; & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du point D est à la hauteur du point H, comme le triangle EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est evident comme cy dessus que la hauteur du point D, sera à la hauteur du point H, comme la base EN, à la base AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC): ainsi les parallelepipèdes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34. prop. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales; sçavoir les pyramides ABCD, & EFGH: Parquoy des pyramides egales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides des-

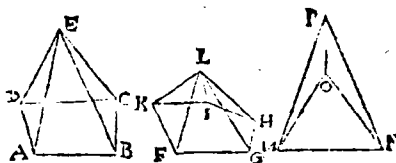


quelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premiere-ment deux pyramides egales, l'une desquelles $ABCD$ ait la base triangulaire, mais l'autre $EFGHI$ ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la base non triangulaire $EFGH$; puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide $KLMN$, de mesme hauteur que la pyramide $EFGHI$. Or d'autant que les pyramides $EFGHI$, $KLMN$, ont les bases egales, & mesme hauteur; elles seront egales, par les choses demonstrees au scholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide $EFGHI$ a esté posée egale à la pyramide $ABCD$; donc aussi les pyramides $ABCD$, $KLMN$ seront egales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangulaires, par la 9. p. 12. comme la base ABC sera à la base KLM , on à son egale $EFGH$, ainsi la hauteur de la pyram. $KLMN$, c'est à dire la hauteur de la pyram. $EFGH$, sera à la hauteur de la pyram. $ABCD$: & patraît des pyram. egales $ABCD$, $EFGHI$, les bases & hauteurs s'ont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient reciproques. Je dis qu'icelles pyramides sont egales. Car demeurant la mesme construction faite cy dessus; puis que la base ABC est posée estre à la base $EFGH$, comme la hauteur de la pyramide $EFGHI$ est à la hauteur de la pyramide $ABCD$; aussi la base ABC sera à la base KLM , comme la hauteur de la pyramide $KLMN$ sera à la hauteur de la pyramide $ABCD$. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides $ABCD$, $KLMN$, sont egales. Mais comme nous

avons démontré au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide $kLMN$ est égale à la pyramide $EFGHI$: donc aussi la pyramide $ABCD$ sera égale à la pyramide $EFGHI$. Ce qui estoit proposé.

Soyent maintenant les pyramides égales $ABCDE$, $FGHikL$, ayant bases multangulaires. Soit fait



derechef le triangle MNO , égal à la base $ABCD$; & la pyramide $MNOP$ de mesme hauteur que la pyramide $ABCDE$. Donc par les choses démontrées au scholie de la 6. prop. 11. la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $ABCDE$: laquelle a été posée égale à la pyramide $FGHikL$: donc aussi la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $FGHikL$. Parquoy comme nous avons démontré cy dessus , ainsi que la base MNO , c'est à dire la base $ABCD$, sera à la base $FGHik$, ainsi la hauteur de la pyramide $FGHikL$ sera à la hauteur de la pyramide $MNOP$, c'est à dire à la hauteur de la pyramide $ABCDE$: Et partant des pyramides égales $ABCDE$, $FGHikL$, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles pyramides : on démontrera comme dessus qu'elles sont égales.

Or tout ce que nous avons démontré cy dessus peut aussi convenir à quelque prisme. Car si les prismes estoient égaux , aussi les pyramides de mesme hauteur qu'iceux , ayant les mesmes bases , seront égales , puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. p. 12. elles sont les tierces parties , ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme

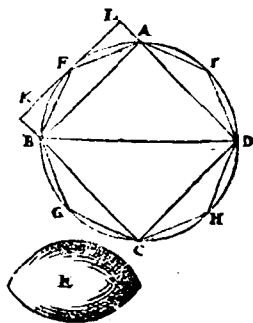
prop. Parquoy comme nous auons demonst^ré n'agu^res, les bases & hauteurs d'icelles pyramides seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mesmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.

Derechef, si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques, les bases & hauteurs des pyramides ayans mesmes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoy, comme il a esté demonst^ré, les pyramides sont egales; & partant aussi les prismes, puis que d'icelles pyramides ils sont triples, ou sc^qualteres. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 10. PROP. X.

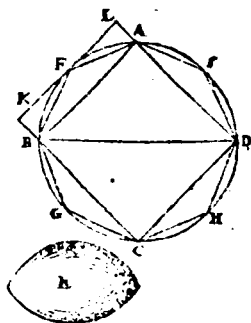
Tout cone est la troisieme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de mesme hauteur, & ayans vne mesme base, sçauoir le cercle ABCD: le dis que le cylindre est triple du cone.



Autrement il sera plus grand, ou plus petit que lo triple d'iceluy cone. Soit premierem^t plus grand s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si du cylindre, ayât pour base le cercle ABCD, est retranché le solide E, le reste sera triple du cone,

ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenant dans le cercle soit inscrit le quarré ABCD, diuisé en deux triangles par la diagonale BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'i-



ceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encores plus grands que le solide E, sur les bases d'iceux segmens soient faicts les quatre triangles Isoceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, dont la base est le cercle ABCD. Il est euident qu'iceux triangles Isoceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre; & par consequent qu'iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huit petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1. prop. 10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abreger soient iceux huit petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colombe composee de ces six prismes, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui

a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de sa pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisant la colonne, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme poligone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible; sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisieme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Iloscelle en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: ce qui doit arriuer par la 1. prop. 16. Soient donc pour abreger iceux huit petits segmens plus petits que le solide E: il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que

d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi rescinde est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colonne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base: Partant icelle colonne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il soit egal. Parquoy tout cone est la troisieme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur. Ce qui estoit à demonstret.

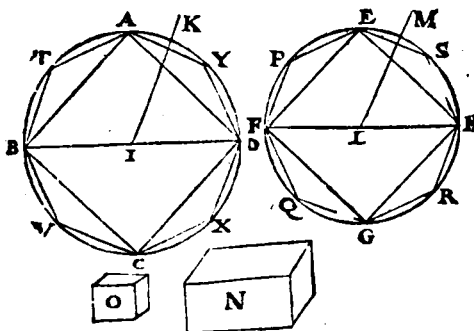
T H E O R. II. P R O P. XI.

Les cones, & les cylindres de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH; les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Je dis que comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; c'est à dire que si on imagine que comme le cercle est au cercle, ainsi le cone BK soit à quelque autre solide, comme N: qu'iceluy solide N sera egal au cone FM.

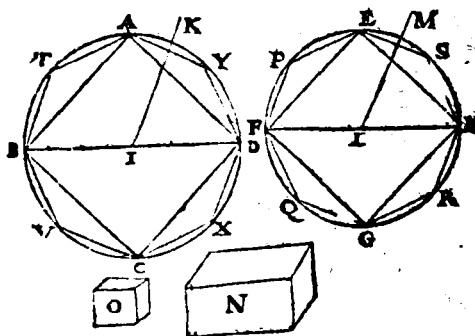
Autrement, il sera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide O: ainsi les deux solides N & O seront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, soit retranché plus

de la moitié, ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant pour baſe le quarré FGH E: & du reſidu encores plus de la moitié, ſçauoir



quatre pyramides de meſme hauteur que le cone, ayans pour baſe les quatre triangles iſoſceles EPF, FQG, FQH, GRH, HSE, en continuant toujours iuſques à ce que par la 1. propoſ. 10. le reſidu ſoit plus petit que le ſolide O: & ſoit iceluy reſidu pour abreger les huitſ petits ſegmens: il ſ'enſuit que la pyramide FM de meſme hauteur que le cone FM, & ayant pour baſe l'octogone EPFQGRHS, ſera plus grande que le ſolide N. Dans le cercle ABCD, ſoit inſcrit vn polygone ſemblable au polygone inſcrit dans la baſe circulaire EFGH, & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre eſſeuee vne pyramide de meſme hauteur que le cone Bk. Or par le corol. de la 2. propoſ. 12. comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le polygone TVXY eſt au polygone PQRS: mais comme le cercle ABCD au cercle EFGH, ainſi le cone Bk eſt au ſolide N, & par la 6. p. 12. comme le polygone au polygone, ainſi la pyramide

à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXD Yk sera à la pyramide EPFQGRHSM, comme le cone BK au solide N. Mais la pyramide ATBVCXDYG est plus petit que le cone BK, la partie que le tout: Donc aussi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM sera moindre que le solide N. Mais elle a été démontrée aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel, il nous a conduit à absurdité.



Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en permutant comme le solide N au cone BK, ainsi le cercle EFGH au cercle ABCD: & comme iceluy solide N au cone BK, soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O: Et par la 14. prop. 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM, aussi le cone BK sera plus grand que le solide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le solide N est au cone BK: par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi

le cone FM au solide O, plus petit que le cone BK: ce que tantost nous auons monstté estre impossible. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base ABCD estre à la base EFGH, ainsi que le cone ABCDk au solide N: & par la 7. proposit. 5. comme le cone ABCDk est au solide N, ainsi est le mesme cone ABCDk au cone EFGHM: pareillement comme la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDk sera au cone EFGHM.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur: d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. prop. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstter.

C O R O L L A I R E.

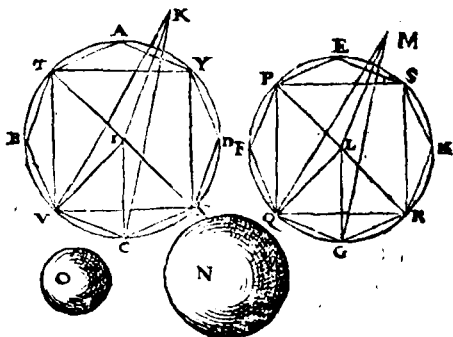
De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constitués sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi égaux.

T H E O R. 12. P R O P. XII.

Les cones, & les cylindres semblables,
sont l'un à l'autre en raison triplee des

diametres de leurs bases.

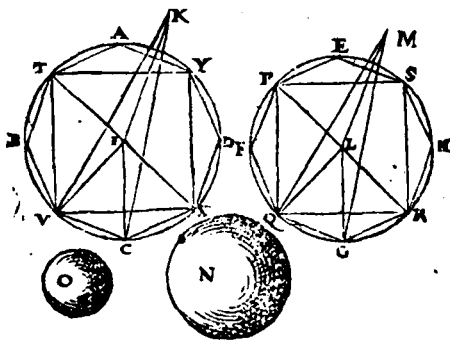
Soient semblables cônes & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'eux soient IK, LM; & les diametres des bases TV, PR,



PR. Je dis que le cone duquel la base est le cercle ABCD, mais le sommet K, est au cone ayant pour base le cercle EFGH, & pour sommet le point M, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme à N, en raison triplee du diametre Tk au diametre PR. Je dis que le solide N est egal au cone EFGHM.

Autrement, il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçavoir de la quantité du solide O : Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EFGHM : & comme en la precedente soit faite detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. prop. 10. les restes (c'est à sçavoir pour abreger les huit petits segmens, qui sont à l'entour de

de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est evident qu'icelle pyramide à la base poligone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme poligone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY: & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides V CIk, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICK est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur

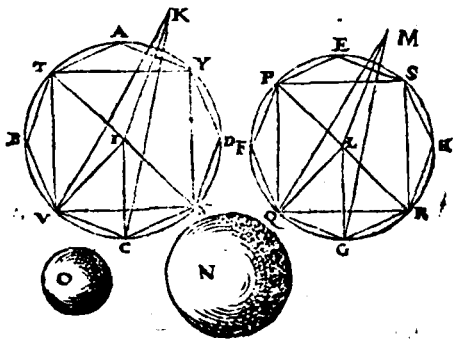


quelatotale.) Le mesme se peut dire quel'autre pyramide totale EPFOGRHSM est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que latotale. Mais d'autant que les cones Bk & FM sont semblables par

Bbb

la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe Ik est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe Ik, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droicts angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIk sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L: (ayans chacun la huitiesme partie de sa circonference pour base) & partant par la 6. propos. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles: partant semblables: Item VC est à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QI; & en raison egale VC sera à VK, comme QG à GM: Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5. propos. 6. les triangles VIK, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la def. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QLGM, seront semblables: Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçavoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouvera les sept autres pyramides de la totale ATBVCDYK, proportionnelles à vne chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. prop. 5. les routes

seront aux toutes , comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM , en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL , ou bien du diametre TX , au diametre PR ; puis que comme VI est à QL , ainsi TX est à PR , par la 15. prop. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N , aussi en raison triplee des deux diametres TX , PR : Et parrant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide N , comme la pyramide $TBVCXDYK$ à la pyramide $EPFQG RHSM$. Parquoy puis que le cone BK , est plus grand que la pyramide BK , le tout que la partie , aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM : & il a esté demonsté estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM , puis que le posant tel il nous a conduit à l'absurdité.



Soit donc maintenant le solide N , plus grand que le cone $EFGHM$, s'il est possible. D'autant qu'on a posé que le cone $ABCDK$ est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR , & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee

des mesmes diametres, comme nous auons demon-
stré par la 11. prop. 5. comme le cone Bk sera au soli-
de N, ainsi la pyramide Bk à la pyramide FM : & en
permutant comme N au cone Bk, ainsi la pyramide
FM à la pyramide Bk. Parquoy puis que par le co-
rol. de la 8. prop. 12. la pyramide FM est à la pyramide
Bk en raison triplee des costez homologues QG à
VG: c'est à dire du diametre PR au diametre TX: pa-
reillement le solide N sera au cone BK en raison tri-
plee des mesmes diametres PR à TX. Soit posé
que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au
solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O
en raison triplee du diametre PR au diametre TX.
Et puis que le solide N a esté posé plus grand que le
cone FM: par la 14. prop. 5. le cone BK sera aussi plus
grand que O. Parquoy le cone FM sera au solide
O moindre que le cone Bk, en raison triplee du
diametre TR au diametre TX: ce qu'il est absurde.
Car il a esté démontré cy dessus qu'un cone ne peut
estre à un solide moindre qu'un autre cone, en rai-
son triplee des diametres des bases d'iceux cones.
Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit
que le cone EFGHM: il est donc egal. Parquoy
par la 7. proposit. 5. le cone ABCDK à mesme rai-
son au cone EFGHM qu'au solide N. Et partant puis
qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison
triplee des diametres TX & PR: le cone ABCDK
sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des
mesmes diametres.

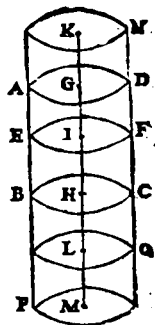
Ceste preuue se doit aussi entendre des cylin-
dres semblables: car leurs cones estans en raison
triplee des diametres, par la 15. propo. 5. les cylin-
dres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'un à
l'autre en raison triplee de leurs diametres. Donc les

cones, & les cylindres semblables font l'un à l'autre en raison triplee des diametres de leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre est couppe par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre, les segmens du cylindre font l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppe par le plan EF, parallel aux deux plans opposez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. le dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH.



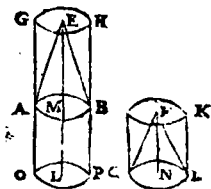
Qu'il ne soit ainsi : apres auoir continue l'axe GH de part & d'autre, soit faicte Gk egale à GI : & de l'autre costé HL, LM egales à IH : Et soit imaginé le cylindre ABCD, continue d'un costé iusques au point k, & de l'autre iusques au point M. Il est euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales : & par le corol. de la 11. propos. 12. les deux qui ont les axes egaux Gk, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont egaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux : Ainsi il est euident que l'axe Ik est

autant multipliee del'axe IG, que le cylindre EN, est multipliee du cylindre ED: Pareillement que l'axe IM est autant multipliee del'axe IH, que le cylindre PF, est multipliee du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multipliee de IG premiere grandeur) est egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multipliee de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multipliee du cylindre ED troisieme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multipliee du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelconque multiplication: & partant par la 6. def. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy si vn cylindre est couppe par vn plan parallel aux plans opposez d'iceluy cylindre, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans bases egales, sont l'un à l'autre, comme leurs hauteurs.

Soient sur bases egales AB, CD, les deux cones ABE, CDE; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDE, & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.



Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, jusques au point L, & soit faicte ML, egale à FN; &

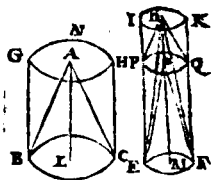
soit imaginé le cylindre AH cōtinué iusques au plan OP parallél à AB , & passant par le poin^t L . Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre $OPGH$, étant parallél aux deux plans opposéz OP , GH par la 13. prop. 12. les cylindres AH , AP , seront l'un à l'autre comme les axes EM & ML : Mais ML est égal à FN , & la base AB égale à la base CD : Donc par le corol. de la 11. p. 12. le cylindre AP sera au cylindre Ck : Partant comme EM sera à NF , ainsi le cylindre AH au cylindre Ck . Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cônes ABF , CDE , sont tierces parties des cylindres AH , Ck ; ils auront mesme raison qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF , comme la hauteur ME à la hauteur NF . Donc les cones & cylindres constituez sur bases égales, sont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 15. PROP. xv.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases:
Et les cones & cylindres sont egaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.

Soient egaux les cones ABC , DEF ; & les egaux cylindres $BGHC$, $EIKF$, desquels les bases soient BC , EF ; leurs axes ou hauteurs AL , DM . Je dis que les bases sont reciproques aux hauteurs; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF , ainsi la hauteur DM à la hauteur AL .

Car premierement si DM est egale à AL ; les cylindres estans egaux , il est evident par la 11. prop. 12. que la base sera egale à la base. Que si MD est plus grande que AL, soit retranchée MO egale à AL ; Et soit couppe le cylindre EK, par le plan PQ, pa-



rallel à EF, & passant par le point O. Donc par la 14. prop. 12. le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. & 11. prop. 5. le cylindre BH egal à iceluy EK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO : & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. prop. 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.

Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, sont reciproques ; si on construit deux cones sous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

Maintenant, soient les bases reciproques aux hauteurs : Je dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construit comme dessus, puis que la base BC, est à la base EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO son egale : Et par la 11. prop. 12. comme la base BC, à la base EF, ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ : Item par la 14. propo. 12. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainsi le cylindre EK au cylindre EQ : par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront mesme

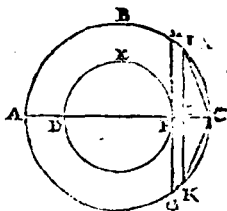
raison au troisieme EQ, l'un comme l'autre : Et par
la 9. p. 5. ils seront egaux.

Quant aux cones qui ont aussi leurs bases & hauteurs reciproques, ils seront par le mesme discours demonstrez egaux. Ce qui est toutesfois assez evident, puis qu'ils sont par la 10. p. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. I: PROP. XVI.

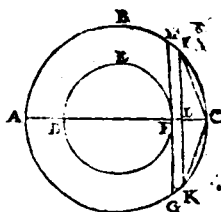
Deux cercles inegaux estans à l'entour d'un mesme centre; inscrire au plus grand cercle vn polygone equilatéral, ayant le nombre des costez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles in-
gaux ABC , & DEF , tous
deux sur vn mesme centre:
Il faut dans le plus grand
 ABC , inscrire vn polygone
equilateral, duquel les co-
stés soient nombre pair, &
ne touchent point la cir-
conference du plus petit cercle DEF .



Soit mené par le centre d'iceux cercles le diamètre commun AC, coupant le petit cercle au point F: Et d'iceluy point soit menée Hfk perpendiculaire au diamètre DF, rencontrant la circonférence du

grand cercle aux points H
& G : & laquelle touchera
le cercle DEF en F par le
corpl. de la 16. prop. 3. Item
soit couppee la demy cir-
conference ABC en deux
egalement ; Et la moitié
encores en deux egalemēt,



en continuant tousiours iusques à ce qu'on vienne
à vn arc plus petit que l'arc HG : ce qui est possible
par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC,
& soit tirée la ligne droište subtendante IC. Je dis
qu'icelle ligne droište IC est vn costé du polyg. re-
quis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'i-
celuy ont tousiours esté diuisez par moitié iusques à
l'arc IC : il est euident qu'iceluy arc est contenu pre-
cisément certain nombre de fois en la circonference
du cercle, & en nombre pair ; & par consequent que
la ligne droište IC sera certain nombre de fois ega-
lement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair.
Partant sera décrit dans le cercle ABC vn polygo-
ne equilateral & de costez pair. Et qu'il ne touche le
cercle DEB, on le demonstre ainsi : De I soit menée
IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L.
D'autant que les angles HFC, ILF sont droiſts,
les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. pro-
posit. 1. Parquoy puis que la ligne droište GH tou-
che le cercle DEF au seul point F ; la ligne droište
IK sera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut
iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra
avec la ligne droište GH : Donc à plus forte raison
la ligne droište IC, qui est moindre & plus esloignée
d'iceluy cercle que Ik, ne le touchera pas ; ny par-
tant aussi les autres costez du polygone inscrit, puis

qu'ils sont eganx à IC , & par consequent egaleme^{nt} distans du centre d'iceluy cercle par la 14. prop. 3. Parquoy deux cercles inegaux estans à l'entour d'un mesme centre, nous auons inscrit au plus grand d'iceux vn polygone equilateral, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

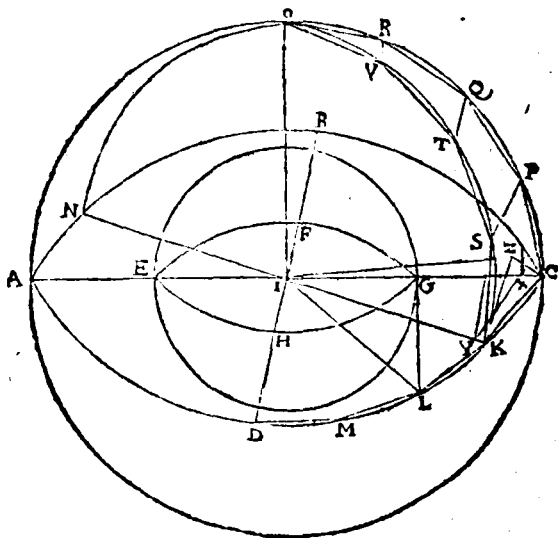
De cecy est manifeste, que si à l'extremité du costé du polygone inscrit, lequel conuient avec le diametre, on tire vne ligne perpendiculaire à iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais que elle tombera toute dehors. Car telle est la ligne IK , laquelle du point I extreme du costé IC conuenant avec le diametre AC , est tirée perpendiculairement sur iceluy diametre AC , & a esté demonst^ré qu'elle ne touche pas le cercle DEF .

P R O B L. 2. P R O P. XVII.

Deux spheres inegales estans sur vn mesme centre ; inscrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la superficie de la petite sphere.

Soient les deux spheres inegales $ABCD$, $EFGH$, à l'entour d'un mesme centre I : & il faut dans la plus grande $ABCD$ inscrire vn solide polyedre ou de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de la moindre sphere $EFGH$.

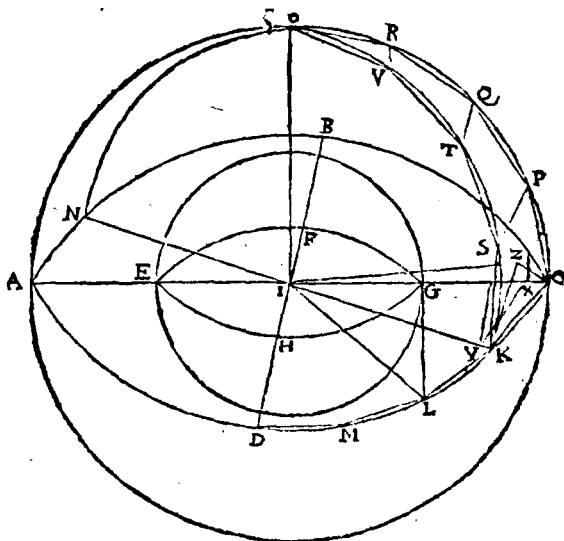
Soient les deux spheres couppees par quelque plan passant par le centre I : il est euident par la def. de la sphere, (qui est faicte par la circondu^{on} du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grâds de toute la sphere : d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puisque le plan coupnant passe par le centre de la



sphere: soient donc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFKH : & soient leurs diametres AC & BD se coupans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFKH, par la 16. prop. 12. duquel les costez de la quarte CD, soient Ck, K L,

LM, MD : Et soit menée la ligne k I, continuée iusques au poinct N : Item par la 12. pr. 11. du centre I soit menée IO perpendiculaire sur le plan des cercles AB CD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O: Pareillement, par les lignes AC, IO, & Nk, OI, soit tirez les plans AOC, NOK. Ils feront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC, NOK, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I:) Et d'autant que la ligne IO est esleuée perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, seront par la 18. prop. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK sont egaux (ayans les diametres egaux), aussi leurs moitez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, OK: Partât autât qu'il y aura de costez du polygone en la quarte CD, on en pourra inscrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & kS, ST, TV, VO: & soient menées les lignes SP, TQ, VR: Item des poincts P & S soient menées par la 11. prop. 11. les perpendiculaires PX, SY: par la 38. prop. 11. elles tomberont sur les lignes IC, Ik, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOk esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menée la ligne XY. Mainténât puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales: les angles PXC, SYk droicts, & les angles PCX, SKY egaux: car ils insistent sur les pe-spheres egales AOP, NOS: les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SKK, & au costé SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Par-

quoy puis que les deux diametres AC , Nk sont
 egaux : & les legmens XC , Yk aussi egaux ; les leg-
 mens AX , NY seront pareillement egaux : partant
 comme IX est à XC , ainsi IY est à Yk : & par la 2. p.
 6. YX sera parallele à kC . Item les deux perpendi-
 culaires PX , SY estans egaux, sont aussi paralleles par
 la 6. p. 11. & par la 33. prop. 1. SP , YX , seront egaux



& paralleles : & par la 9. prop. 11, SP & kC seront
 paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au
 mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatre
 Ck, SP , est en vn mesme plan. Par mesme discours
 on monstrera aussi que les quadrilateres $EPVQ$, &
 le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en
 vn mesme plan. Que si des poin&ts O, P, R, S, T, V , on
 imagine des lignes menées vers le centre I , on se re-

presentera vne figure solide, comprise entre OC & Ok, composée de quatre pyramides, desquelles le sômet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR: Et si on construit pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur Ck: Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn polyedre en la sphere donnée.

Je dis d'auantage, qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on mene la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC: Je dis qu'elle sera plus grande que IG demy diametre de la petite sphere.

Car ayant pour l'inscription du polygone tiré du point G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que Ck costé d'iceluy polygone inscrit, soit tirée IL; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 2. d. 11. les angles IZC, IZk sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarréz de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarréz de IZ, ZK: Parquoy les quarréz des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarréz de IZ, CZ, seront egaux aux quarréz de IZ, ZK: ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarréz de CZ, KZ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy si du centre Z, & de l'interuale de l'une d'icelles, on décrit vn cercle, il circonscrira la quadrilaterre CKSP: duquel les trois costez Ck, CP, kS qui soustiennent arcs egaux de cercles egaux estans egaux, & l'autre costé SP plus petit; (car les triang. ICK, IXT estans semblables, & le costé IC plus grand que le

costé IX, aussi le costé Ck sera plus grand que le costé XI, qui a esté démontré egal à SP) il est euidont que l'angle CZK sera plus grand qu'un droit; & par consequent le plus grand du triangle CZk: & par la 19. prop. 1. Ck sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, sera aussi plus grande que CZ; & par consequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarez de IG & GL, sont egaux aux quarez de IZ, CZ, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grand que le quarré de CZ; le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG; & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CkSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du polyedre inscrit en la grande sphere ne touchent pas la petite sphere EFGH. Donc estans données deuz spheres inegales à l'entour d'un mesme centre, nous auons inscrit en la plus grande un polyedre, qui ne touche par la superficie de la petite sphere. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

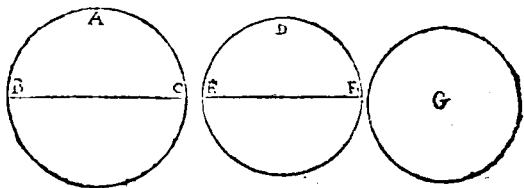
Des choses cy dessus démontrées resulse que si en un autre sphere on inscrit un polyedre semblable au polyedre cy dessus décrit, qu'iceux polyedres seront en raison triplée des diametres des spheres, auxquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'un comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'un comme l'autre, ayant toutes le
dém-

demy diametre de leur sphere pour vn de leurs costez : Par-
tant prises vne à vne, elles seront en raison triplée des co-
stex homologues, sçavoir est des demy diametres des spha-
res, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les routes aux routes,
pareillemēt en raison triplée des mesmes demy diametres, par
la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplée des diametres en-
siers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison
triplée de leurs diametres.

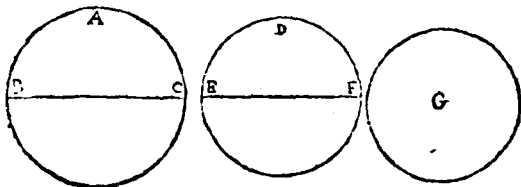
Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles
les diametres sont BC, EF. Je dis qu'elles sont l'une
à l'autre en raison triplée du diametre BC, au diame-



tre EF : C'est à dire que si on imagine que comme
la raison triplée de BC à EF, ainsi la sphere BAC, à
quelque autre sphere, comme G : icelle sera egale
à la sphere DEF.

Autrement, elle sera plus grande ou plus petite.
Soit premierement la sphere G, plus petite que la
sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra estre en-
fermée dans icelle, si on les met toutes deux sur vn
Ccc

mesme centre : Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. pr. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillemēt inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera à celui-là, en raison triplée du diametre BC au diametre EF : mais en telle raison, la sphere BAC est posée estre à la sphere G, & par la 11. pr. 5. comme la sphere BAC à la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere BAC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere BAC, est plus grande



que son polyedre, n'estant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la sphere G est plus grande que le polyedre de la sphere DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplée des diametres BC & EF, à vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible : Et puis qu'on a posé que comme la sphere ABC à la sphere G, ainsi la raison triplée du diametre BC au diametre EF, en changeant la sphere G sera à la sphere BAC, en raison triplée du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G à la sphere BAC, ainsi la sphere DEF, à vne quatriesme proportionelle : la-

quelle sera plus petite que BAC par la 14. prop. 5. d'autant que G est polée plus grande que DEF: Et partât icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC: Et si par la 11. pr. 5. la sphere DEF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplée du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonstté estre impossible. Donc la sphere G, n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale: & par consequent les spheres sont l'une à l'autre en raison triplée de leurs diametres. Ce qu'il falloit demonstter.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'une sphere est à une sphere, comme le polyedre descrit dans celle-là, est au polyedre semblable descrit en ceste cy: pource que tant les spheres que les polyedres sont en raison triplée des diametres d'icelles spheres, comme il a esté demonstté.

Fin du douziesme Element.



E L E M E N T

T R E Z I E S M E.

T H E O R. I. P R O P. I.



S I VNE ligne droite est coup-
pée en la moyenne & extre-
me raison : le quarré de la
moiçtié de la toute , & du
plus grand segment comme d'une seule
ligne, est quintuple du quarré de la moi-
çtié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB, coupée en la moyenne
& extreme raison au point C, à laquelle on adiouste
AD, ligne egale à la moiçtié de la totale AB : ie dis
que le quarré de DC est quintuple du quarré de
DA.

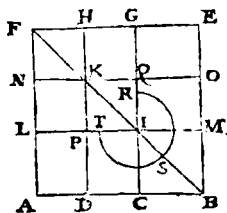
Car soit descript sur CD le quarré CE, & tiré le
diametre DF; puis soit menée AG parallele à DE,
coupant le diametre DF en H, par lequel point
soit tirée Ik parallele à CD. En apres ayant prolon-
gé GA, & accompli le quarré AM, soit produicte

d'une ligne droite est quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droite est couppee en la moyenne & extreme raison ; le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grād segment, cōme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segmēt.

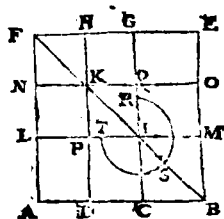
Soit la ligne droite AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C, de laquelle le plus grād segment AC est couppe en deux egalemēt en D : ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand, sçauoir de BD, est quintuple du quarré de DC, moitié du grand segment AC.



Qu'il ne soit ainli : sur AB soit descrit le quarré AE, & ayant mené son diametre BF, des points C & D soient menées CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF es points I & k, par lesquels soient menées LM, NO peralleles à AB, lesquels couppent CG, DH en P & Q : Et par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO seront quarrés des lignes AC, CD, DB : ie dis donc que le quarré DO est quintuple du quarré PQ.

Car puis que comme AB à AC, ainli AC à CB, par

la 17. prop. 5. le rectangle des extremes AB & CB (ſçavoir AM) eſt egal au quarré de la moyenne AC, ſçavoir LG, lequel eſtant par le ſcholie de la 4. pr. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM ſera auſſi

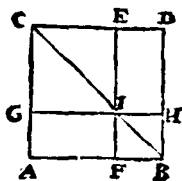


quadruple de PQ: mais AP & DI eſſans ſur baſes egales, ſont egaux par la 1. prop. 6. Et DI eſtant egal à IO, par la 43. prop. 1. le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: ainſi il eſt evident que le quarré DO, eſt quintuple du quarré PQ: Si donc vne ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si vne ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du plus grand ſegment.

Soit la ligne droite AB, coupée en la moyenne & extreme raiſon au point F; ie diſ que le quarré de la toute AB, & le quarré de FB plus petit ſegment, ſont triples du quarré de AF plus grand ſegment.

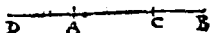


Car soit décrit sur AB le quarré AD , auquel estant tiré le diametre BC , soit menée de F la ligne EF parallele à AC , couppant BC en I , par lequel soit menée GH parallele à AB . Par le corol. de la 4. prop. 2. les parallelogrammes GE , FH ieront-quarrez des lignes AF , FB : Et puis que comme AB est à AF , ainsi AF est à FB , par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB , FB , sçauoir AH est egal au quarré de la moyenne AF , sçauoir GE . Ven donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH , sera egal au double du quarré GE : & partant adioustant le quarré GE ; AD quarré de AB , avec FH quarré de FB , sera triple de GE quarré de AC . Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adioust directement le plus grād segment; la toute compoſée, sera couppée en la moyenne & extreme raison, & la toute simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne droicte AB ,
couppée en la moyenne &
extreme raison au point C ,
& à icelle on adioust direc-



tement AD egal à AC grand segment: ie dis que

DB est aussi couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & que la toute donnee AB est le plus grand segment.

Car puis que comme AB est à AC, c'est à dire A D, ainsi AC est à CB; en changeant comme DA sera à AB, ainsi BC à AC: & en composant comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire à AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & le plus grand segment est la ligne AB proposee au commencement. Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele est couppee en la moyenne & extreme raison: l'un & l'autre segment est ligne irrationele, appellée residu.

Soit la ligne rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C: ie dis que AC & BC sont irrationeles & residus.



Car si au plus grand segment AC on adiouste directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de la ligne DA, il est à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. prop. 10. les quarez de DC, DA seront commensurables, & par consequent les lignes DC, DA, sont aussi commen-

rables, au moins en puissance. Or AD est rationelle, puis qu'elle est moitié d'une rationelle AB; Donc aussi DC sera rationelle. Et d'autant que les quarrés de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le coroll. de la 24. propos. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longitude, par la 9. propos. 10. & partant rationelles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationelle on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74. propos. 10. le reste AC sera irrationelle, appelée résidu.

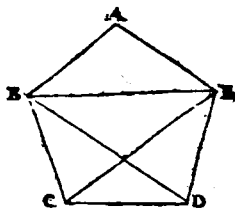
Derechef AB estant couppee en la moyenne & eutreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. propos. 6. Or le quarré du résidu AC appliqué sur la rationelle AB, doit faire l'autre costé CB résidu premier, par la 98. propos. 10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationelles appelées résidus. Si donc une ligne droite rationelle est couppee en la moyenne & eutreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, duquel trois angles pris comme on voudra sont egaux, sçavoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car estans tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes substendantes BE, BD, CE, elles seront egales par la 4. prop. 1. (estans tous les costez egaux.) Item les deux triangles DBC & DEC, ayans les trois costez egaux



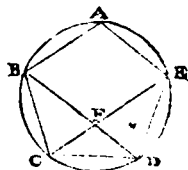
aux trois costez, chacun au sien, les deux angles DBC & DEC seront egaux par la 8. proposit. 1. Item BAE estant Isolele, les deux angles sur la base BE, seront egaux par la 6. proposit. 1. Pareillement les deux triangles CBE & DEB, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, ils auront l'angle CEB egal à l'angle DBE, par la 8. prop. 1. Partant le total angle B est egal au total angle E. Mais d'autant que CBE est triangle Isolele, & que BAE à les trois costez egaux au trois costez du triangle DEC chacun au sien, l'angle ABE sera egal à l'angle DCE par la 8. prop. 1. Parquoy le total C sera egal à l'angle total B, & par la 1. commune sentence ils seront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone sera equiangle. Ce qui estoit à demonstrier.

T H E O R. 8. P R O P. V I I I.

Si deux lignes droictes subtendent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre: icelles subtendantes se couperont l'une l'autre en la moyenne & extre-

me raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à vn costé du pentagone.

Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subrendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F. Je dis qu'elles seront ainsi coupees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux à quelconque costé du pentagone.



Car ayant descrit par la 14. propos. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. propos. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCE sont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF est egal au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26. prop. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par

la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. prop. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstret que CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Parquoy si deux lignes droictes subtendent deux angles d'un pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Donnot a traduit ceste proposition ainsi.

Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux aux costez du pentagone.

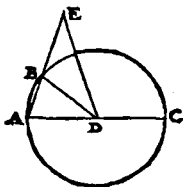
Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit vniuersellement vraye: Car il est euident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C & D, ou de l'angle B aux angles D & E, &c. Icelles lignes droictes ne se couperont point.

T H E O R. 9. P R O P. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le

plus grand segment est le costé de l'hexagone.

Dans le cercle A B C soit inscrit le costé du decagone A B, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone B E qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que B E soit egale au demy diametre du cercle, (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le coroll. de la 15. p. 4.) le dis que A E est couppee en la moyenne & extreme raison, & que B E costé de l'hexagone est le plus grand segment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre A C, & tiré les lignes D B, D E : l'arc A B estant la 10. partie de la peripherie du cercle, sera la 5. de l'arc A C : & partant l'arc B C sera quadruple d'iceluy A B : Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle B D C sera quadruple de l'angle A D B : & par la 32. propos. 1. B D C estant exterieur, il vaudra les deux D A B, D B A : lesquels estans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle A B D est isoscele l'un ou l'autre sera double de A D B : mais l'un d'iceux D B A estant exterieur, est egal aux deux opposez interieurement D E B & B D E, (lesquels sont egaux, estant le triangle D B E isoscele, pource que D B demy diametre, & B E sont egaux par la construction) ainsi l'angle D B A sera double de l'angle E : lequel par ce moyen sera egal à l'angle A D B : ainsi les deux triangle A E D, A D B seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E

egal à l'angle ADB , par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers : & par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD , ou BE est à AB : partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B : & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Donc la ligne droicte composée du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

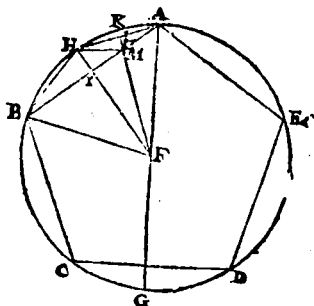
De cecy est euident que le costé de l'hexagone est auz couppe en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on coupe une partie egale à AB : comme la toute AE sera à la toute BE , ainsi la retranchée BE sera à la retranchée de BE , c'est à dire à AB : & partant par la 19. propos. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchée à la retranchée. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le plus grand segment sera AB costé du decagone.

THEOR. 10. PROP. x.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle $ABCDE$, duquel le centre est F , soit inscrit

inſcrit vn pentagone equilateral, vn coſté duquel eſt AB. le diſ que le quarré d'ice-luy coſté AB eſt egal aux deux quarréz des coſtez de l'hexagone, & du decagone inſcrit au meſme cercle.



Car ayât tiré le diametre AFG, & ioinct FB, ſoit couppé l'arc AB en deux également par la ligne FH, laquelle coupe auſſi la ligne AB en I; & ſoient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH ſera coſté du decagone, & FB coſté de l'hexagone: En apres ſoit couppé l'arc AH en deux également en K, par la ligne FK, laquelle coupe auſſi la ligne AH en L, & la ligne AB au point M, auquel ſoit menée la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH ſont egaux, auſſi ſeront egaux les angles AFH, BFH, par la 27. propoſit. 3. Parquoy les coſtez AF, FB eſtans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la baſe AI ſera egale à la baſe BI, par la 4. propoſit. 1. & les angles AIF, BIF auſſi egaux, & partant droicts. Par meſme raiſon ſeront egales les lig. AL, HL, & les angles ALF, HLF droicts. Or ſi des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oſte arcs egaux ABC, AED, reſteront egaux les arcs CG, CD, & partant l'arc CG ſera moitié de l'arc CGD. Mais auſſi l'arc AH eſt moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD ſont egaux, les arcs AH, CG moitié d'iceux, ſeront auſſi egaux: & partant l'arc AH eſtant double de l'arc HK, auſſi le ſera CG. Et puis que

les arcs AB, BC sont égaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont equimultiples, sçavoir est doubles, des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK : & par conséquent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. proposition. 6. Mais par la 20. prop. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB : donc les angles BFM, FAB seront égaux, & partant l'angle ABF étant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers, par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB iera à BF, ainsi BF à BM : & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera egal au carré de BF. Derechef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont égaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi égaux, sçavoir droicts, par la 4. prop. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront égaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est egal à l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont égaux : Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA : & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM égaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. proposition. 6. comme AB sera à AH, ainsi AH à AM : & par la 17. proposition. 6. le rectangle de AB, AM sera egal au carré de AH. Mais il a esté démontré que le rectangle de AB, BM, est egal au carré de BF : donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensemble, sont égaux aux deux carrez de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont égaux au carré de AB : donc le carré

de AB costé du pentagone est egal aux deux quarréz des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouuer.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'une ligne droite tirée du centre, & laquelle diuise en deux également vn arc, diuise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux également, & à angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux également l'arc que le costé opposé à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé opposé, & à angles droicts. Car il a esté démontré que le diametre AG tiré du point A, diuise en deux également l'arc CD, lequel le costé opposé CD subtend: Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux également & à angles droicts iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

T H E O R. II. P R O P. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrational: appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral A B C D E, inscrit dans le cercle A B C D E, duquel le diametre est rationel: ie dis que AB costé du pentagone est irrational, appellé ligne mineure.

la 1. prop. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & CK moitié de la toute CA, sera quintuple au quarré de Ck moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, étant FL quart de IB : donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL, au quarré de FL ; c'est à dire en raison doublee de KL à FL : dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionnelle entre BL & FL : Partant par la mesme raison doublee de la 10. definit. 5. & 20. proposition du 6. le quarré de BL sera au quarré de KL, comme BL à FL : c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL : Partant iceux quarrés seront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8.) Parquoy par la 9. prop. 10. les lignes BL & KL, seront commensurables en puissance seulement : desquelles BL étant rationelle, BL & KL seront rationelles commensurables en puissance seulement ; & par la 74. prop. 10. BK sera résidu. Maintenant que la ligne BL puisse plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL est rationelle commens. en longitude à la rationelle proposee BF : (car elles sont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy est incommensurable en longitude ; (car la puissance de la ligne BL étant quintuple de la puissance de la ligne KL, le quarré de N, qui reste apres auoir osté le quarré de KL de celuy de BL ; sera au quarré de BL comme 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré : & partant par la 9. proposition 10. BL qui peut plus que KL du quarré de la ligne N, est incommensurable en longitude à icelle

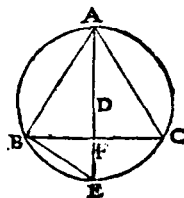
N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera résidu quatriefme.

Finaleme[n]t pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droit, duquel est tirée Ak perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droite AB peut la superficie contenuë de la rationele BH, & du résidu 4. BK: par la 95. proposit. 10. icelle AB sera ligne mineure. Parquoy si dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Je dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.



Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. propos. de celiure, l'arc BC en deux également en E; & aussi la ligne droite BC en deux également & à angles droicts: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixies-

me partie : partant estant tirée la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15. prop. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale, au demy diametre, par le scholie de la 4. prop. 2. & par la 47. prop. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE: il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

CROLLAIRE.

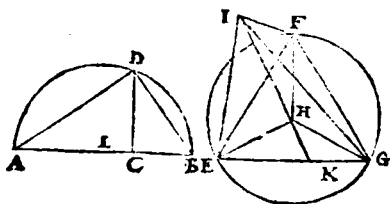
Il s'ensuit de ce que dessus que le quarré du diametre d'un cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquiterce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté demonsté que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD; posant le quarré de AB 3. le quarré de AD sera 1; & le quarré de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4. à 3.

Et pource que par le corol. de la 8. p. 6. comme AE est à AB, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'un angle sur vn costé; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4. à 3. On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE est coupé en deux également en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE; si on pose iceluy quarré de AB estre 12. le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1. par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egal, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est coupée en deux également en F.

P R O B L E M E I. P R O P. XIII.

Dans vne sphere donnee , inscrire vne pyramide equilaterale : & monstrier que le quarré du diametre d'icelle sphere , est en raison sesquialtere au quarré du costé d'icelle pyramide.

Soit la ligne AB, diametre de la sphere donnee, diuisee en C, de sorte que AC soit double de BC : Et apres auoir descrit sur AB le de-



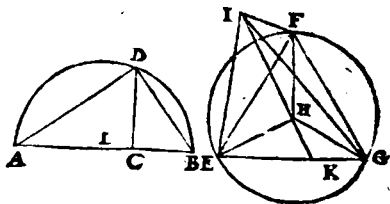
my cercle ADB, leué la moyenne proportionelle CD, & mené les lignes DA & DB : Soit descrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD : & apres auoir inscrit en iceluy le triang. equilateral EFG, du centre H soit leuee la perpendiculaire HI par la 12. prop. 11. laquelle soit egale à AC : puis soient mencees les lignes IE, IF, IG. Je dis premiere-ment que la pyramide EFGI est equilaterale : puis qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diametre est AB : & que le quarré du diametre AB, est en raison sesquialtere au quarré du costé EG.

Que la pyramide soit equilaterale: il appert en premier lieu que le triangle EFG, est equilateral: Ité que

les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. prop. 1. le quarré d'une chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la base AD sera egale à la base EI par la 4. pr. 1. En la mesme maniere sera demonsté AD estre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC, est double du quarré de CD (car ils sont l'un à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. pr. 6. estans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportionnelles) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarré de CD, ou de son egale HE: Mais par la 12. prop. 13. le quarré de EF est aussi triple du quarré de HE; Partant EF, & AD sont egales: & par la 1. commune sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD est aussi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI; FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par consequent la pyramide EFGI, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere, ayant pour diametre AB, il appert: Soit continuée la ligne perpendiculaire IH par dessous la base de la pyramide iusques en k: Et soit faicte Ik egale à AB, & soit imaginé estre posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide: sçavoir le poinct A, au poinct I; le poinct B au poinct k: & puis que AC & BC sont egales à IH, & HK; & HG egale à DC, faisant angle droit avec IH, aussi bien que leurs egales AC & CD, il est evident que le poinct D, du demy cercle tombera sur le poinct G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy cercle faict vne revolution, il

touchera les
deux autres
angles de la
pyramide E
& F; (estans
les lignes HE,
HF, HG éga-
les) ainsi la
pyramide est
inscrite en la sphere donnée.



Finablement que le quarré du diametre AB, soit sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert: Car puis que AB est triple de BC; & AC double de la mesme BC; A B sera en raison sesquialtere à A C. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de A D en raison sesquialtere. Nous auons donc inscrit vne pyramide equilaterale dans vne sphere donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidia. du cercle descript à l'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diametre de la sphere, a esté demonstté sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6. parties, selles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de

9. telles parties que le quarré de AB contiendra; le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE , puis que la raison des quarez est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tirée au centre de la Sphère au plan de la base de la pyramide est la sixiesme partie du diametre de la sphère, & la tierce partie du semidia. Car L soit le centre du demy cercle ADB : L sera pareillement le centre de la sphère. Je dis que la ligne LC , (qui est la perpend. tirée du centre de la sphère à la base EFG : puis que AC est égale à HI , & partant le point C , le mesme que H , ainsi aussi L est le mesme que le centre de la sphère.) est la 6. partie du diametre de la sphère, sçavoir est de AB , & la tierce partie du semid. AL . Car puis que AC est double de CB , de telles 4 parties qu'est AC , 2 telles sera CB : & partant 6 telles sera la toute AB , & 3 le semidia. AL . Parquoy si AC est 4, & AL 5; LC sera 1 : & partant LC sera la sixiesme partie de AB , & la tierce de AL .

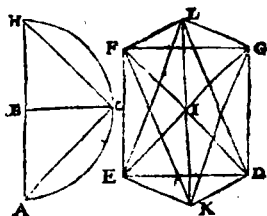
Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphère. Car HI est la mesme que AC , laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarré d'iceluy diametre le quarré de la hauteur de la pyramide en sera 4. Car la raison de 9 à 4, est la raison doublée de 3 à 2.

PROBL. 2. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn octaedre : Et monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaedre.

Soit le diametre de la sphere dōnée AH, coup-
pé en deux également
au point B : & apres
auoir construit le demy
cercle ACH ; leuë la
perpendiculaire BC, &
mené les lignes CA,



CH, lesquelles seront egales entr'elles par la 4. prop.
1. sur la ligne DE egale à l'une d'icelles AC, CH, soit
construit le quarré DEFG, dans lequel soient me-
nées les deux diagonales DF, GE se couppans au
point I, duquel point par la 12. prop. 11. soit esleuëe
la ligne IL, perpendiculairement sur le quarré GE;
laquelle soit aussi continuée perpendiculairement
par dessous iceluy plan, & soit icelle IK, laquelle
soit faicte egale à AB ; & IL aussi à AB : Item des
points L & K, soient menées aux angles du quarré
les lignes LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG.

Je dis maintenant que la figure solide DLFK, est
environnée de huit triangles equilateraux ; & que
c'est vn octaedre. Car le quarré DEFG, ayant les
costez egaux à AC ; Il est euident que les diagonales
EG, FD seront egales à AH : partant leurs moities à
AB. Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à
AB : & par consequent elles seront egales à une
chacune d'icelles demy diagonales ; & par la 4. p. 1.
les huit lignes ID, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG, se-
ront toutes egales entr'elles : & aux quatre du quar-
ré DEFG par la mesme 4. prop. 1. (estans les demy
diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en
constituant des angles droicts au point I, milieu du
quarré). Et puis que tous les costez sont egaux, tous
les triangles seront equilateraux, sçavoir les quatre

au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct L : & quatre autres au dessous du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au poinct k : ainsi le solide DLFK compris de huit triangles equilateraux, sera octaedre.

le dis d'avantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est evident que la ligne LK, est egale au diametre AH, & que l'angle LDk est droit : (d'autant que les deux lignes LI, ID estans egales; les angles sur la base LD seront egaux, & demy droits, pource que l'angle LID est droit : Et par mesme raison l'angle IDk est demy droit; & partant le total LDk sera droit.) Partant le demy cercle ayant pour diametre Lk, & faisant vne revolution à l'entour de l'octaedre il touchera le poinct D : Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont egaux à l'angle D.

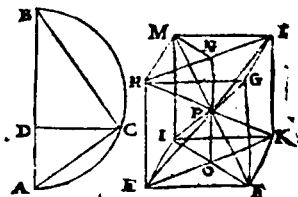
Finablement, il est evident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou Lk, est egal aux deux quarrés de LD, Dk, lesquels sont egaux; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'iceux costez de l'octaedre. Nous auons donc inscrit vn octaedre dans vne sphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. xv.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn cube: & monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quar-

ré duicosté d'celuy cube.

Soit le diametre de
 • la sphere donnée AB,
 lequel soit couppé au
 point D, en sorte
 que BD soit double
 de AD, c'est à dire que
 AB soit triple d'icelle
 AD : Puis, apres auoir
 construit le demy cercle ABC, leué la perpendicu-
 laire DC, & mené les deux lignes AC, & BC : sur EF
 egale à BC, soit fait le quarré EFGH, sur lequel
 soient esleuées par la 12. pr. 11. les quatre lignes per-
 pendiculaires EI, EK, GL, HM, qu'on fera egales
 à EF : puis soient menées les quatre lignes IK, KL,
 LM, MI. D'autant que les lignes EI, Fk sont per-
 pendiculaires au plan EFGH : elles seront paralle-
 les par la 6. pr. 11. Mais elles sont aussi egales : donc
 par la 33. prop. 1. EF, Ik seront pareillement egales
 & paralleles ; & partant EFkI est vn parallelogram-
 me ayant les quatre costez egaux. Mais il a aussi
 par la 34. prop. 1. les 4. angles droicts, puis que les
 angles EI k, FkI sont opposez aux droicts KFE, IEF :
 donc EFkI est quarré. Par mesme raison FkLG,
 GLMH, HMIE seront quarez : & partant IxLM
 sera aussi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il est egal
 & semblable au quarré oppose EFGH : Car EL est
 vn solide parallelepiped : pource que par la 15. prop.
 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, estans
 tirez par lignes paralleles qui s'entretouchent.
 Parquoy EL sera vn cube : lequel ie dis estre inscrip-
 tible en la sphere donnée. Car ayant mené les dia-
 metres E x, FI, HL, GM, des plans opposez EFkI,



H G L M, soient imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans E k L H, F I M G, lesquels par la 28. prop. 11. couperont le cube en deux egalelement, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le point P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entre couperont aussi en deux egalelement : & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir N O, passera par le mesme centre P. Mais il est evident qu'iceux plans E K L H, F I M G sont rectangles egaux : & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre E L : il est evident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube : laquelle ie dis estre egale à celle du diametre A B. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de E k est egal aux quarrés des lignes egales E F, F k, & partant double du quarré de E F, ou de k L : les quarrés de E k, k L seront triples du quarré de k L. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de E L est egal aux quarrés de E k, K L : donc aussi le quarré de E L sera triple du quarré de k L, c'est à dire du quarré de A C : duquel est aussi triple le quarré de A B (car par le corol. de la 8. prop. 6. A B, A C, A D sont prop. & partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme A B est à A D, ainsi le quarré de A B sera au quarré de A C : Veu donc que A B est triple de A D, aussi le quarré de A B sera triple du quarré de A C.) Parquoy les quarrés de E L, A B sont egaux : & par consequent les lignes E L, A B, diametres des spheres : comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstté que le quarré du diametre

EL est triple du quarré du costé du cube KL. Parquoy nous auons faict tout ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarréz du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarréz de AC, BC costez du cube, & du tetraedre.

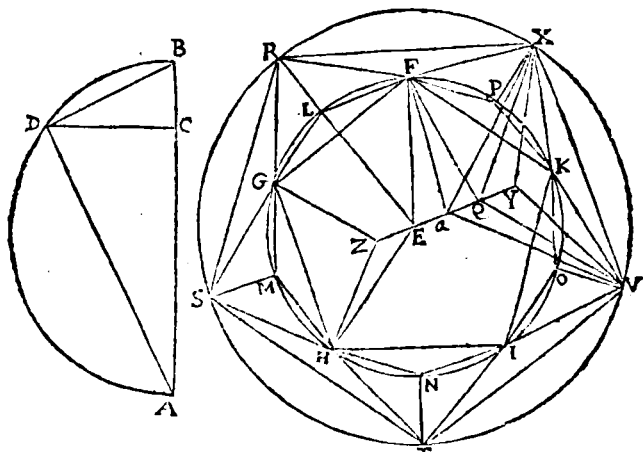
Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux également au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarréz opposez, se coupent en deux également au mesme centre de la sphere.

P R O B L. 4. P R O P. xvi.

Dans vne sphere dōnee, inscrire vn ico-
saedre: Et monstrier que son costé est
ligne irrationele, appelée ligne mi-
neure.

Soit le diametre de la sphere donnée AB, lequel soit diuisé, au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir coustruit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB, du centre E, & interual EF, egale à BD, soit faict vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHik, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en coupant en deux également l'arc
d'un

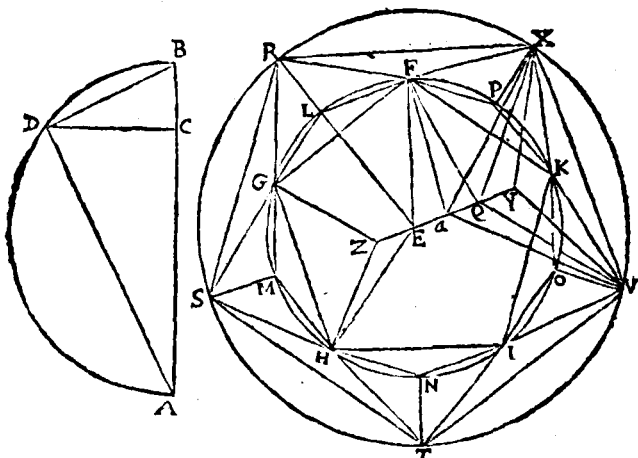
d'un chacun costé du pentagone.) Et après par la 12. prop. 11. du centre E, & des points L, M, N, O, P, soient levées les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHIX, lesquelles soient posées égales à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront parallèles entr'elles : & partant les lignes droictes conioignant icelles, scauoir



EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV, EP, QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auons tirées pour euitier confusion) seront égales & parallèles entr'elles, par la 33. prop. 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont égales au semidiamètre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront égales tant entr'elles qu'à iceluy demy diamètre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. pr. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallèle au plan FGHIX tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallèle au mesme plan FGHIX, tiré par les lignes EM, EN; mais que le

E e e

plan tiré par les lignes QR , QS conuient avec le plan mené par les lignes QS , QT , en la ligne droicte QS ; il est euident par les choses demonstrees à la 16. p. 11. que ces deux plans en font vn seul. On demonstera en la mesme maniere, que le plan tiré par QT , QV , avec celuy-cy en fait vn seul, & aussi celuy tiré par QV , QX , & par QX , QR : tellement donc que les li-



gnes QR , QS , QT , QV , QX sont en vn mesme plan; & partant si de Q & de l'internale QR , on décrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres points S , T , V , X , & sera egal au cercle $FGHIK$. Soient tirées les lig. droictes RS , ST , TV , VX , XR . Et d'autant que LR , PX sont egales & paralleles; si on imagine estre tirée vne ligne droicte LP ; aussi par la 33. p. 1. LP , RX seront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la 5. partie du cercle $FGHIK$, sçauoir

deux 5. parties LF, FP: Donc aussi RX, prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous concluons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirées des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHik, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, V k, X k, X F. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'exagone du cercle FGHik; & LF est costé du decagone par la 10. prop. 13. le quarré du costé du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarez de LR, LF. Mais le quarré de FR, par la 47. prop. 1. est egal à iceux quarez de LR, LF. Donc le quarré de FR est egal au quarré du costé du pentagone; & par consequent la ligne R F sera egale à LP costé du pentagone, ou à F G, c'est à dire à R X. Par la mesme raison, les autres lignes R G, S G, &c. seront egales aux autres costez de chaque pentagone: & partant les 10. triangles R E X, R F G, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, V k, VKX, X k F, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QY, EZ soient egales au costé du decagone, & soient tirées les lignes v Q, v.Y, xQ, x Y, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX est semy-diametre du cercle RSTVX, c'est à dire costé de l'exagone, & QY est costé du decagone de mesme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de xv costé du pentagone, sera egal aux quarez de QX, QY. Mais par la 47. proposition 1. à iceux quarez de QX, QY, est aussi egal le quarré de xy (car

l'angle XQY est droit, étant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallèles.) Donc le carré de XY est égal au carré de XV ; & partant la ligne XY égale à la ligne XV . Par mesme raison XV sera démontrée égale à VY ; & partant le triangle VYX est équilateral. Par mesme maniere, (estant tirées les lignes RY, SY, TY , lesquelles ne sont tirées pour euiter confusion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV , seront démontrés équilateraux, & égaux au triangle VYX , c'est à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs costez sont égaux aux costez du pentag. Par semblable argument sera prouvé que le triangle GZH est équilateral; côme aussi les 4. autres triang. HZI, IZk, kXF, FZG , (desquels toutesfois nous n'auons aussi tiré les lignes, à fin d'euiter la confusion) tous lesquels seront égaux aux 15. precedans. Ven donc que tous ces 20. triangles sont équilateraux, & égaux, & qu'ils se conioignent les uns aux autres par lignes droictes; sera constitué d'iceux un Icosaedre: lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnée, de laquelle le diametre est AB . Car ayant coupé en deux également EQ en a , & tiré les lignes aF, aX, aV , les costez aQ, QV du triangle aQV seront égaux aux costez aQ, QX du triangle aQX , (car QV, QX , sont semy-diametres du cercle $RSTVX$) & les angles aQV, aQX sont droicts: & partant par la 4. p. 1. les bases aV, aX seront égales. Par la mesme raison, si on tire des lignes de a & Q à R, S, T , les lignes aR, aS, aT seront démontrées égales entr'elles, & à icelle aV, aX . Et puis que les costez aQ, QX du triangle aQX , sont égaux costez aE, EF du triangle aEF , (pource que QX, EF s'ont demy diametres de cercles égaux, & EQ est coupée en deux éga-

lement en a ,) & les angles a QX, a EF sont aussi
 egaux, sçavoir droicts; par la 4. prop. 1. les bases a
 X, a F, seront aussi egales. Par mesme raison, si de a
 & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on de-
 monstrera les lignes a G, a H, a I, a K, estre egales
 à icelles a X: & partant les dix lignes droictes tirées
 de a aux dix angles F, G, H, I, k, R, S, T, V, X, sont
 egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à
 dire costé de l'exagone du cercle.FGHK; & EZ
 costé du decagone du mesme cercle; par la 9. prop.
 13. QZ sera diuisée en la moyenne & extreme rai-
 son en E, & le plus grand segment sera QE. Par-
 quoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ sera quintu-
 ple du quarré de E a . Mais le quarré de a F est aussi
 quintuple du mesme quarré de E a : Car le quarré
 de EF estant quadruple du quarré de E a par le scho-
 lie de la 4. prop. 2. pource que EF est pouble de E a ;
 les quarez de EF, E a , sont le quintuple du quarré
 de E a . Mais par la 47. prop. 1. le quarré de a F est egal
 à iceux quarez de EF, E a : donc aussi le quarré d'i-
 celle a F sera quintuple d'iceluy quarré de E a .) Donc
 les quarez de a Z, a F, sont egaux: & par conse-
 quent les lignes a Z, a F seront egales. Et puis que
 a E, a Q, & EZ, QY sont egales, aussi a Z, a Y seront
 egales; & routes les lignes droictes tirées de a , à
 tous les angles de l'iscosaedre pareillement egales.
 Parquoy la sphere descrite à l'entour du diametre
 ZY, passera par tous les angles de l'iscosaedre. Car
 d'autant que par la 15. prop. 5. comme a Z est à a E,
 ainsi YZ à QE, & partant par la 22. prop. 6. comme
 le quarré de a Z est au quarré de a E, ainsi le quarré
 de YZ au quarré de QE, & que le quarré de a Z a
 esté démontré quintuple du quarré de a E: pareil-
 lment le quarré YZ sera quintuple du quarré de

QE, c'est à dire du quarré de DB son egale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du même quarré de BD : car AB, BD, BC estans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. pr. 6. & partant AB estant quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarez de YZ, AB sont egaux ; & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descrites à l'entour d'icelles seront egales.

Je dis finablement que le costé de l'icosaedre est ligne irrationele, appellée ligne mineure : ce qui est evident par la 11. prop. 13. estant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele commensurable en puissance à la posée rationele AB, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc faict ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone, décrit en vn mesme cercle.

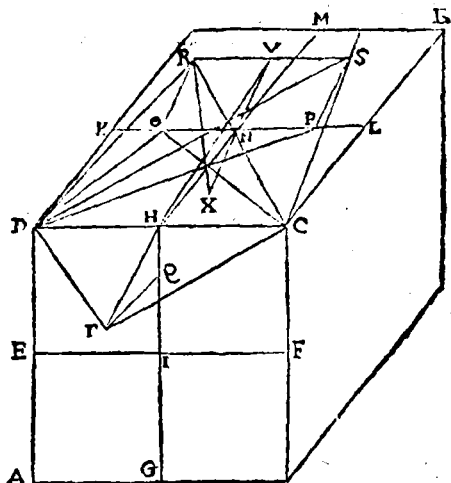
Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

PROL. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnée , inscrire vn

dodecaedre: Et mōstrer que son costé
est ligne irrationele, appelee residu.

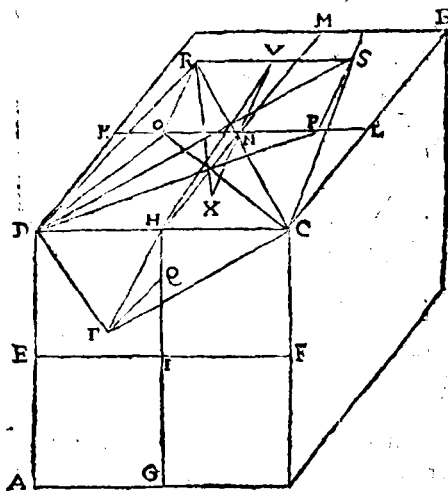
Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plā^s exterieurs
AC, & DB, se rencontrans à droits angles à la ligne
de commune section DC : & d'iceux plans tous les



costez soient coupez en deux egale^{ment}, sçavoir
AC, par les deux lignes EF, GH se couppans au
point I; & DB, par les lignes kL & HM se coup-
pans au point N. Item, soient les trois lignes kN,
NL, HI couppees en la moyenne & extremite^{raison}
aux points O, P, Q, desquelles les plus grands seg-
mens soient ON, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11.
soient leuees les deux lignes OR, PS perpendicu-
laires au plā DB: mais QR au plan AC, lesquelles soiēt
posees egales aux trois segmens ON, NP, IQ. Puis
soiēt menées les lig. DR, RS, DT, CS, CT. le dis que

DRSCT est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equiangle.

Car soient menées les lignes DO, DP, DS : & d'autant que KN est couppee en la moyenne & extreme raison au poin^t O, & que ON est le plus grand segmēt, par la 4. p. 13. les deux quarez de KN, kO seront triples du quarré de ON : Et KN estant egale à kD & ON à OR, les deux quarez de kD, & kO, ou par la 47. prop. 1. le seul de DO, est triple du



quarré de OR : & le quarré de DR, qui est egal à tous les deux, par la 47. prop. 1. sera quadruple du seul de RO : Et d'autant que RS est double de RO, son quarré, par le scholie de la 4. prop. 2. sera aussi quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré de DR : Parrant les lignes DR, RS seront egales. Par mesme discours on mōstrera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD. tant entr'eux qu'aux deux DR, RS : donc le pentagone est equilateral.

Je dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit mence NV, parallele à OR : Item les deux TH & HV. Je dis qu'icelles deux lignes se rencontrent directement, & font vne seule ligne droicte THV. Car pour autant que HI est coupee en la moyenne & extreme raison au poinct Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HV est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont composez à vn angle H, tellement que les costez homologues sont parallels par la 6. prop. 11. sçauoir HN & TQ, qui sont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui sont à angles droicts sur le plan DB: par la 32. prop. 6. THV sera vne seule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone DR SCT est en vn mesme plan.

Je dis encores qu'il est equiangle: Car puis que kN est coupee en moyenne & extreme raison, estât ON plus grand segment, par la 5. prop. 13. en adioustant kN à NP, egale au plus grand segment ON; la route BP sera coupee en la moyēne & extreme raisō au poinct N, & sera KN le plus grand segment: & partant par la 4. propos. 13. les quarez de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, (ou de son egale KD.) & en adioustant le quarré de KD avec les deux de KP & PS, iceux trois quarez seront quadruples du seul de kD (ou par la 47. propos. 1. au lieu des deux de kP & kD, le seul de DP avec celui de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarré de kD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. p. 2. estant DC double de kD: partant les deux lig. DC & DS seront egales:

Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles $DC T$, $DS R$ auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien : Et par la 8. propos. 1. l'angle au point R sera egal à l'angle au point T . Et semblablement nous monstrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC : ainsi trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. prop. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & sur DC l'un des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon un pentagone, sur chacun des vnze costez restans, on trouuera vne figure solide environnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. sera dodecaedre.

Je dis d'anantage qu'il est inscriptible en la sphere donnee. Car si on prolonge VN , qui est perpendic. sur le centre du quarré DB : il appert par la 39. prop. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux egaleement: qu'elle la coupe donc au point X , auquel point sera le centre de la sphere environnant le cube par le coroll. de la 15. prop. 13. & NX est egale au demy costé du cube: Soit menee la ligne RX . Or nous auons tantost monstré par la 4. prop. 13. que les quarrés de KP & NP sont triples du quarré de KN : Mais VX est egale à KP ; & RV à NP : (car NX est egale à KN : & VN à NP). Partant les deux quarrés de RV , XV , ou le seul de RX , par la 74. prop. 1. est triple du quarré de KN : Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscripte au cube, est triple du quarré du costé d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre est triple au quarré du demy costé. Or KN est le demy costé du cube: Partant RX sera le demy diametre de la sphere circōscrite au cube AB , duquel le centre est X . Par

mesme discours nous monstrerons que du point X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, sont egales au demy diametre de la sphere circonscripte au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscripte au cube & au dodecaedre.

Je dis finalement que le costé du dodecaedre est ligne irrationele appelee residu. Car d'autant que les deux demy costez du cube KN, NL sont chacun coupeez en la moyenne & extreme raison : par la 15. prop. 5. toute la ligne kL sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçavoir à OP , comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, sçavoir à la composee de KO & PL . Parquoy si kL costé du cube est coupee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP . Mais la route kL ainsi conppée est rationele : (car son quarré est commensurable au quarré du diametre de la sphere, lequel est posé rationel : puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13) Donc par la 6. p. 13. le plus grand segment OP , c'est à dire RS costé du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appelee residu. Nous auons donc faict tout ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le costé d'un cube estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en vne mesme sphere.

Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droite subtendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant couppée en la moyenne & extreme raison, par la 8. prop. 13. le plus grand segment est costé

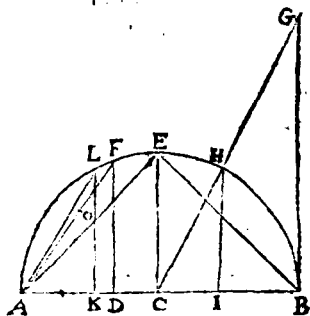
d'un pentagone : & partans par la 5. prop. 13. la ligne droite compoſce d'icelle, c'eſt à dire du coſté du cube, & du plus grand ſegment, c'eſt à dire du coſté du dodecaedre, eſt ſemblablement diuiſee, & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, mais le plus grand eſt coſté du cube : Il ſ'enſuit que ſi vne ligne droite eſt coupee en la moyenne & extrême raiſon, & que le moindre ſegment ſoit coſté du dodecaedre : le plus grand ſegment ſera coſté du cube inſcris en la meſme ſphere.

PROB. 6. PROP. XVIII.

Le diametre d'une ſphere eſtant donné ; trouuer les coſtez des cinq figures inſcrites en icelle ; & les comparer entr'eux.

Soit le diametre d'une ſphere donnée AB : & il faut premièrement trouuer les coſtez des cinq figures inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diuiſé le diametre AB en deux parties égales au point C ; mais au point D, tellement que AD ſoit la tierce partie de AB ; puis ayant deſcrit ſur AB vn demy cercle, ſoient eſſeues les perpendiculaires CE, DF ; & tiré les lignes AE, AF ; BE, BF.



D'autant qu'on par le corol. de la 8. prop. 6. BF eſt

moyenne proportionele entre AB, BD ; par le coroll. de la 20. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi le carré de AB au carré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere : (car par construction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2) Donc aussi le carré de AB est au carré de BD, en raison sesquialtere : & partant puis que par la 13. propos. 13. le carré du diamètre de la sphere est en raison sesquialtere au carré du costé de la pyramide equilaterale ou tetraedre : BF sera le costé du tetraedre inscrit en la sphere du diamètre AB.

Derechef puis que par le mesme coroll. de la 8. p. 6. AE est moyenne prop. entre AB, AC : & partant comme AB est à AC ainsi le carré de AB au carré de AE par le coroll. de la 20. prop. 6. & AB est double de AC : aussi le carré de AB sera double du carré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le carré du diamètre de la sphere est double du costé de l'octaedre, AE sera costé de l'octaedre inscrit en la sphere du diamètre AB.

Et pour autant que par les mesmes coroll. de la 8. propos. & 20. prop. 6. le carré de AB est au carré de AF, comme AB à AD, & que par la construction AB est triple de AD, le carré de AB sera triple du carré de AF. Parquoy veu que par la 15. p. 13. le carré du diamètre de la sphere est triple du carré du costé du cube, AF sera le costé du cube inscrit en la sphere du diamètre AB.

Et d'autant que AF est costé du cube, soit iceluy coupé en la moyenne & extreme raison au point O, duquel le plus grand segment soit AO : iceluy (par le coroll. de la 17. prop. 13.) sera le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-là mesme qui a pour diamètre AB.

quant au costé de l'icosaedre, soit leuée la perpendiculaire BG égale à AB : & apres avoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy poinct soit menée HI perpendic. à AB par la 12. prop. 1. Or BG estant égale à AB, elle sera double de BC : & partant par la 4. prop. 6. HI sera double de IC : (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts : le tiers G sera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI sera quadruple du quarré de IC : & partant le quarré de HC (ou de son égale AC) qui par la 47. prop. 1. est égal à tous les deux, sera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitié, DC sera le demy tiers : & partant AC sera triple de DC ; & son quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'est que quintuple du quarré de CI : donc la ligne CI sera plus grande que DC. Soit prise CK égale à CI, & apres avoir leuée la perpendiculaire kL, soit menée la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC est quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarré de Ik (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. propo. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite à l'icosaedre est quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonscrit à 5. costez de l'icosaedre : donc CK sera semidia. c'est à dire costé de l'hexag. d'iceluy cercle, lequel costé de l'hexagone avec deux fois le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le coroll. de la mesme 16. prop. 13. Il faut donc que Ak, & IB lignes égales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle,

dans lequel KI est le costé de l'hexagone. Mais KI & kL sont egales : (car KL est egale à IH , pour estre en mesme distance du centre C , laquelle estant double de CI sera egale à KI .) Partant KL sera costé de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL sera le costé du pentagone inscrit au mesme cercle. Donc il sera aussi le costé de l'Icosaedre, par la 16. prop. 13.

Nous auons donc trouué les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne mesme sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonsté que le quarré du diametre de la sphere est sesquialtere au quarré du costé de la pyramide : mais double de celui du costé de l'octaedre, & triple du quarré du costé du cube ; il est euident que le quarré du diametre de la sphere estant 6. celui du costé du tetraedre sera 4. celui du costé de l'octaedre 3. & celui du costé du cube 2. Partant le quarré du costé de la pyramide est sesquiterce au quarré de l'octaedre : mais double de celui du costé du cube. Item le quarré du costé de l'octaedre est sesquialtere à celui du costé du cube. Parquoy les quarez des costez d'icelles trois figures, & celui du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre : & partant par la 6. prop. 10. Iceluy diametre de la sphere, & costez d'icelles figures sont lignes commens. & rationeles, pource que le diametre est posé rationel. Mais les susdits quarez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainsi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (sçauoir le diametre de la sphere, le costé de la pyramide, le costé de l'octaedre, & celui du cube,) sont incommens. en longitude par la 9. propos. 10.

& partant elles sont rationeles commensurables en puissance seulement.

Et quant aux costez de l'icosaedre, & dodecaedre: pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est euident que ils sont incommensur. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi: d'autant qu'il a esté demonstté cy dessus que le quarré de AB est triple du quarré de AF : mais quintuple du quarré de kI , c'est à dire de KL son egale; trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de kL . Et puis que AF est couppee en la moyenne & extreme raison en O , & AO est le plus grand segment, il est euident par la 1. p. 6. que le rectangle compris de AF , AO sera plus grand que le rectangle de AF , OF : & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF , OF : Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarré de AF , par la 2. prop. 2. & au double du rectangle de AF , OF , est egal le double du quarré de AO : (car par la 17. prop. 6. le simple rectangle de AF , OF est egal au simple quarré de AO .) Donc aussi le quarré de AF sera plus grand que deux fois le quarré de AO : & par consequent trois quarrez de AF , ou cinq quarrez de KL leurs egaux, seront aussi plus grands que 6. quarrez de AO . Parquoy vn seul quarré de kL sera plus grand qu'un seul quarré de AO : & par consequent la ligne kL sera plus grande que AO : Partant AL qui est plus grande qu'icelle kL , sera beaucoup plus grande que la mesme AO costé du dodecaedre. Nous auons donc faict ce qui estoit propolé.

S C H O L I E.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on n'en pent

peut trouuer d'autres comprises de superficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, on deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouuant constituer vn angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaèdre: de cinq, l'angle de l'icosaèdre: de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide: car iceux sont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'un angle solide, doiuent estre plus petits que quatre angles droicts par la 21. prop. 11. Partant on ne pourra constituer vn angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droicts est composé l'angle solide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle solide: car ce seroit tousiours contrenuoir à la 21. prop. 11. l'angle solide du dodecaèdre est compris de trois pentagones equiangl. De quatre pentagones, il sera impossible: estans iceux plus grands que quatre droicts. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuyuroit absurdité. Partant il est euident qu'oultre les cinq figures regulieres cy dessus declarées, on n'en trouuera point d'autres,

Fin du trezième Element.

FFF



E L E M E N T

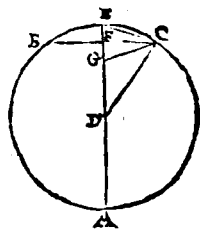
QVATORZIESME.

THEOR. I. PROP. I.



A ligne droicte perpendiculaire menee du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

Soit dans le cercle ABC, le costé du pentagone BC, & du centre D soit menee la ligne DF, tombant perpendiculairement sur iceluy costé BC; & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E, elle coupera l'arc BEC en deux également, comme la ligne BC par la 3. propos. 3. ainsi estant tiree la ligne EC, elle sera le



coûté du decagone, & DE coûté de l'hexagone. Je dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux coûtés ensemble EC & DE.

Qu'il ne soit ainsi, Après auoir pris FG egale à FE, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquiesme partie de la circonference du cercle, EC sa moitié sera la cinquiesme partie de la demy circonference ACE : Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. prop. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. prop. 3. lequel par ce moyen sera double à CDE : mais par la 4. prop. 1. la base CE est egale à la base CG : & par la 5. propos. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux : & FGC sera double de GDC : & iceluy FGC estant par la 32. prop. 1. egal à tous les deux opposez interieuremēt, les deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux : & par la 6. prop. 1. GC & GD seront egales ; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble : & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF : & par consequent icelle DF perpendiculairement tirée du centre sur le coûté du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, coûtés de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droicte perpendiculaire menée du centre vers le coûté du pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

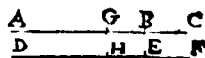
T H E O R. 2. P R O P. 11.

S'il y a deux lignes droictes coupees en

Fff ij

la moyenne & extreme raison; elles
seront semblablement coupees.

Soient les deux lignes AB &
DE coupees en la moyenne
& extreme raison aux points
G & H: leurs plus grands seg-
mens soient AG & DH. Je dis



qu'icelles lignes sont semblablement coupees:
c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à
DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainsi DH
à HE, &c.

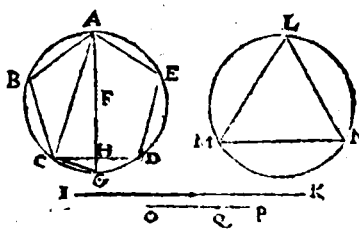
Car par la 17. prop. 6. comme le rectangle de AB,
& GB, sera egal au quarré de AG, ainsi le rectangle
de DE & HE sera egal au quarré de DH: & partant
quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré
de AG, comme quatre fois le rectangle de DE &
HE au quarré de DH: & en composant (apres auoir
adiouste directement BC egale à BG; & EF ega-
le à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB
avec le quarré de AG (ou par la 8. propos. 1. le
seul quarré de AC) est au quarré de AG, comme
quatre fois le rectangle de DE & HE, avec le quarré
de DH, (ou le seul quarré de DF) est au quarré de
DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG,
ainsi DF à DH: Et en composant comme la compo-
see de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG,
ainsi la composee de DF, DH, c'est à dire la double
de DE, est à DH: & en permutant. comme la double
de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH: Et par
la 15. prop. 5. comme la double de AB est à la double
de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE,
ainsi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainsi sera

aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis que l'une & l'autre raison est comme AB à DE : & en permutant comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE : & ainsi selon toutes les autres manieres d'argumenter és proportions, on démontrera toutes lignes, & parties d'icelles estre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes coupees en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

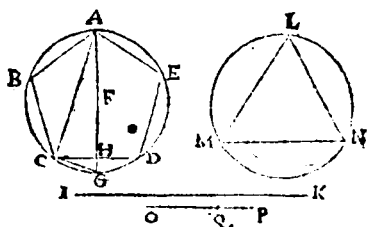
Auparauant que d'expliquer ceste prop. il conuient démonstrer que le quarré du costé du pentagone avec le quarré de la ligne qui soustient vn angle



d'iceluy, est quintuple du quarré demy diametre du cercle dans lequel est inscrit iceluy pentagone.

Soit le costé du pentagone inscrit dans vn cercle CD, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en

deux également,
tant l'arc CGD
que le costé CD,
par le corol. de
la 10. prop. 13. Je
dis que les deux
quarrez de CA
& CD sont en-
semble quintuples du quarré de FG.



Car si on meine CG, ce sera le costé du decagone;
& par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de AG,
sera quadruple du quarré du demy diamètre FG; &
par consequent les deux de AC, CG, qui par la 47.
prop. 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi
quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois
de AC, CG, & GF, seront ensemble quintuples du
seul de GF: Mais les deux de CG, & GF, costez de l'he-
xagone & decagone sont ensemble egaux aux quar-
re de CD costé du pentagone, par la 10. propos. 13.
partant les deux quarrez de AC & CD sont quin-
tuples du quarré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diamètre de la
sphere comprenant le dodecaedre & l'icosaedre;
& d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone AFCDE,
& le l'icosaedre soit le triangle equilateral LMN:
ie dis qu'un mesme cercle circonscrit le pentago-
ne ABCDE, & le triangle LMN; c'est à dire que les
cercles ABCDE, LMN, qui les circonscrivent
sont egaux.

Car estant tirée AC subtendante de l'angle du
pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la
mesme sphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & soit
exposée la ligne droicte OP, telle que le quarré de
Ik diamètre de la sphere, soit quintuple du quarré

d'icelle OP : laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'Icosaedre par le corol. de la 16. prop. 13. soit icelle OP coupee en la moyenne & extrême raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou semi-diametre, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. proposit. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB : Donc par la 2. proposit. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB sera au plus grand segment OQ : partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP : (pource que le quarré de Ik diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube, par la 15. propo. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le corol. de la 16. prop. 13. ML costé du triangle de l'Icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demi-diametre: & partant puis que par la 10. proposit. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML, seront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ: ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC, estans quintuples du quarré du demi-diametre FA, (comme nous auons demonstté au

commencement de ceste proposition) trois quarez de AB, & AC seront egaux à quinze quarez du demy diametre FA. Mais cinq quarez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML est triple du quarré du demy diametre, par la 12. proposit. du 13.) Donc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux sera egal à vn quarré, & le demy-diametre au demy-diametre, & par conséquent les cercles ABCDE, LMN seront egaux. Donc vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

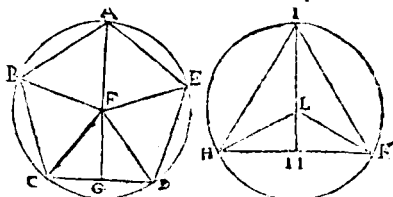
THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du centre du cercle circonscriptuant le pentagone du dodecaedre, on mene vne ligne droicte perpendiculaire sur vn costé d'iceluy pētagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, sont egaux à toute la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonscriptuant vn pētagone d'un dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tirée FG perpendiculairement sur le costé CD. Iedis que trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire FG & costé CD, sont egaux à la superficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il est évident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chaque pentagone a cinq pareils triangles que CFD, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroient le double: Donc trente rectangles de FG, & CD, leur seront egaux.

Nous démontreros semblablement, que si vn triangle equilateral, comme Hlk, est inscrit en vn cer-



cle, du centre duquel L, on tire sur le costé Hk la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, seront egaux à la superficie de l'Icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK; & chacun d'iceux se diuise en trois egaux entr'eux, & semblables & egaux à HLK, qui sont en tout soixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK, par la 41. p. 1. Et par consequent soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles: Donc trente rectangles de LM & Hk seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre. Si donc du centre du cercle circonscrivant le pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

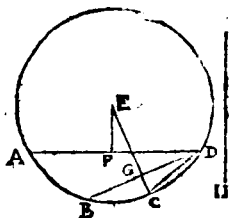
C O R O L L A I R E.

De cecy resulte, par la 15. prop. 5. que comme vn seul rectangle de FG & CD, est à vn seul rectangle de LM & Hk, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre; ainsi le costé du cube est au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Dans le cercle donné A BCD soit pris AD le costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monsté estre possible par la 2. prop. 14. qu'un mesme cercle



comprend & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy costé du pentagone BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG: & icelle EG estant prolongee iusques à la circonferance, elle couppera l'arc BCD en deux egalemment en C: & estant tiree la ligne droiste CD, ce sera le costé du decagone: & finalement soit exposee la ligne droiste H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Je dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'icosaedre.

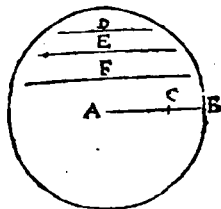
Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle;

la composée d'iceux costez, sera couppee en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle composée est EG; & par le corol. la 12. prop. 12. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF: Et partant puis que par la 15. prop. 5. les routes sont aux routes, comme les moitez aux moitez: il est euident que la moitié EG estant couppee en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment: (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la route.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H costé du cube estant aussi couppe en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la route H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la route EG sera à EF son plus grand segment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF: aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celui de H, EF) est au mesme rectangle compris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre: pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre. Ce qu'il falloit prouver.

THÉOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison; comme les deux quarrez de la toute & du plus grand segment, sont aux deux quarrez de la toute & du plus petit segment, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB , soit couppé en la moyenne & extreme raison en C , le plus grand segment soit AC , lequel sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le corol. de la 9. prop. 13 Item soient prises trois lignes, D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, & F costé du cube: Je dis que le quarré de F , est au quarré de E , comme les deux quarrez de AB & AC sont aux deux quarrez de AB & CB .



Car D étant le costé du pentagone, & E costé du triangle tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment,

par le corol. de la 17. prop. 13. Donc E estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy-diametre AB par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarréz de AB & CB sont triples du quarré de AC: Ainsi le quarré de E, est au quarré de AB, comme les 2. quarréz de AB, CB sont au quarré de AC: Et en permutant le quarré de E, sera aux deux quarréz de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB est à son plus grand segment AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarréz de AB & CB, ainsi le quarré de F, au quarré de D: & en permutant comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarréz de AB & CB, sont au quarré de D, costé du pentagone: lequel par la 10. prop. 13. est egal aux deux quarréz de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en vn mesme cercle; & par consequent le quarré de F costé du cube est à E costé de l'Icosaedre, comme les deux quarréz de AB & AC, sont aux deux quarréz de AB, & CB. Si donc vne ligne droiſte est coupée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le costé du cube est au costé de

l'icosaedre, ainsi le dodecaedre est à l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Ceste demonstration est facile, les precedentes estans bien entendues : car puisque par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre sont inscrits dans vn mesme cercle : il est evident qu'iceux triangle & pentagone seront equidistans du centre de la sphere. Parquoy si on diuise le dodecaedre & l'icosaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'un que de l'autre solide seront de mesme hauteur : Et par les 5. & 6. prop. 12. elles seront l'une à l'autre, comme leurs bases ; c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icosaedre, comme douze pentagones à vingt triangles : C'est à dire que comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre, ainsi tout le dodecaedre à tout l'icosaedre. Mais par la 5. prop. 14. icelles superficies sont l'une à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaedre : donc par la 11. prop. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaedre, ainsi le dodecaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouuer.

Fin du quatorziesme Element.



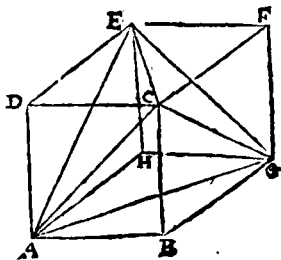
E L E M E N T

QVINZIESME.

PROBL. I. PROP. I.

DAns vn cube donné, inscrire vne pyramide.

Soit le cube donné AF , dans lequel il faut inscrire vne pyramide. Soient menez les diagonales AE, EC, EG , & des extrémités d'icelles A, C, G , soient aussi menez les diagonales AG, AC, GC : Toutes lesquelles diagonales sont égales entr'elles, parce que les six quar-



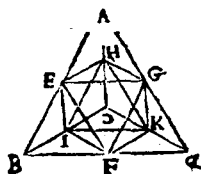
rez dans lesquelles elles sont menez sont égaux par la définition du cube : Partant les quatre triangles composez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG , sont équilatéraux, & égaux entr'eux: & partant par la pyramide $AEGC$ constituée d'iceux triangles est inscrite au cube donné AF , par la 30. deff. II. Car tous

les angles d'icelle pyramide sont colloquez és angles d'iceluy cube AF. Nous auons donc inscrit vne pyramide dans le cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. II. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inscrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee A BCD, dans laquelle il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez tous les costez d'icelle pyramide en deux également aux poinçs E, F, G, H, I, k: Et soient menees les lignes EF, FG, GE, HI, Ik, kH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes lesquelles lignes sont egales entr'elles par la 4. prop. 1. estant toutes les lignes couppees egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGkI a les quatre costez egaux, & les quatre triangles EHI, IHk, KHG, GHE, commençans sur iceluy quadrilatere, & finissans au poinçt H, sont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au dessous du quadrilatere, & finissans au poinçt F, sont aussi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4. precedans. Parquoy la figure EIKGHF composez d'iceux 8. triangles est vn octaedre, par la 26. def. 11. & par la 30. def. 11. il est inscrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les costez d'icelle pyramide. Nous auons donc fait ce qui estoit requis.

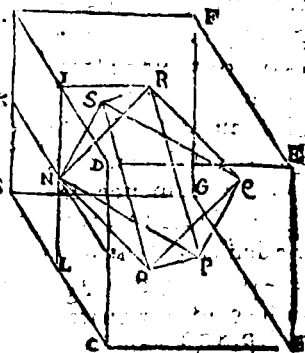


PROBL:

PROB. 3. PROP. III.

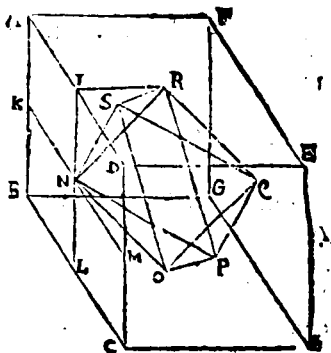
Dans vn cube donné, inscrire vn octaèdre.

Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inscrire vn octaèdre. Soient coupez en deux également les costez du quarré AC, es poinçts I, k, L, M, & soient menées les deux lignes IL, KM, s'entre-couppans en N, lequel poinçt sera le centre du quarré A



C, comme il appert par la demonstration de la 8. p. 4. Par la même manière seront trouvez les centres des 5. autres quarrés du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R, S : Donc toutes les lignes droictes tirées d'iceux centres à chaque poinçt de la section des costez de leurs quarrés, telles que sont NI, Nk, NL, NM, NR, &c. seront égales aux moitez d'iceux costez, comme il appert par la susdicte demonstration de la 8. prop. 4. Item soient tirées les quatre lignes droictes NP, PQ, QS, SN, lesquelles seront toutes égales, par la 4. prop. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez égaux à deux costez, & vn angle égal à vn angle: Il est évident que icelles quatre lignes feront aussi vn quarré qui est au milieu de l'octaèdre. Or des quatre angles d'iceluy quarré soient menées les quatre lignes NR, PR, QR, SR, vers le poinçt R, lesquelles comme il

a esté dit cy dessus seront toutes egales tant entre elles qu'aux quatre precedentes, & seront les quatre triangles equilateraux NRP , PRQ , QRS , NRS : Item des mesmes quatre angles au dessous du quarré vers le centre D , soient aussi menees les



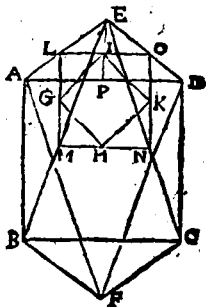
lignes NO , PO , QO , SO , qui seront egales comme dessus, & seront quatre autres triangles equilateraux NOP , POQ , QOS , NOS , lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers. Parquoy le solide $NOPQRS$ composé d'iceux 8, triangles equilateraux & egaux entr'eux est octaedre inscrit au cube donné, par les 26. & 30. def. 11. Nous auons donc inscrit vn octaedre dans vn cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PRORL. 4. PROP. III.

Dans vn octaedre donné, inscrire vn cube.

Soit donné l'octaedre $ABCDEF$, dans lequel il faut inscrire vn cube. Des quatre triangles AEB , BEC , CED , AED , qui se terminent au point E , soient pris les centres G , H , I , k , & soient menees les lignes GH , HK , kI , GI : Il est euident que $GHIK$ sera quarré. Car si d'iceux quatre centres on meine les lignes droictes

LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à son costé du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils sont semblables aux triangles equilateraux cy dessus par le corol. de la 4. prop. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les costez communs; & par consequent les quatre bases LM, MN, NO, LO sont egales. Item si de E par le centre I on meine EP: elle diuîsera l'angle E en deux egaleme: & par consequent LI sera egale à IO, c'est à dire que LO sera

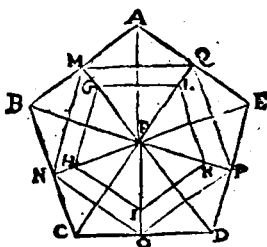


coupee en deux egaleme au centre I: Par mesme raison LM, MN, NO seront aussi coupez en deux egaleme aux centres G, H, K. Ainsi les 4. triangles GLI, IOK, GMH, HNK sont isosceles rectangles. (Car par la 10. prop. 11. les angles des points L, M, N, O, sont egaux aux droicts du quarré ABCD.) parquoy les 4. bases GL, IK, GH, HK seront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI est quarré. Que si semblablement des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres estans tous conioincts par lignes droictes, seront descrits encores 5. quarez, lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy le cube composé d'iceux 6. quarez sera inscrit dans l'octaedre donné, puisque les angles d'iceluy touchent les bases de l'octaedre; & par ainsi nous auons faict ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. v.

Dans vn icosaedre donné, descrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on construit l'icosaedre, sur lequel soit vne des douze pyramides pentagonales de l'icosaedre, ayant pour sommet le point F, auquel s'assemblent les 5. triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & soit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux points G, H, I, K, L, & d'iceux soient menees les lignes HG, GL, Lk, kI, IH: Item de F par iceux centres, soient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ. lesquelles couperont en deux egalelement les costez AB, BC, CD, DE, EA, comme il appart par le coroll. de la 10. prop. 13. & partant estant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il est euident par la 4. prop. 1. qu'elles seront egales; & que par la 8. prop. 1. les angles qu'elles soustiennent au point F sont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL sont aussi egales (car ce sont demy diametres de cerceles circonscrivans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, kL, LG seront pareillement egales, & les angles de dessus icelles aussi egaux, par la 4. prop. 1. Parquoy le pentagone GHIKL est equilateral & equi-angle: & il se prouuera aisément comme à la 17. p.



13. qu'il est aussi en vn mesme plan. Que si semblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres 11. pyramides de l'icosaedre, seront aussi descrits des pentagones equaliteraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des costez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icosaedre, puis que les 20. angles touchent les vingt bases de l'icosaedre : Nous auons donc inscrit vn dodecaedre, dans vn Icosaedre donné. Ce qu'il falloit faire.

Fin du quinziésme & dernier Element.

Prinilege du Roy.



O V Y S par la grace de Dieu Roy de France & de Nauarre. A noz amez & fcaux Conseillers les gens tenans nos Cours de Parlement, Preuost de Paris, Bailly de Rouën, Seneschaux de Lyon, Thouloze, Bordeaux, & Poictou, & à tous nos autres officiers qu'il appartiendra, Salut. Nostre cher & bien amé **JEAN ANTOINE IOALIN**, marchand Libraire en nostre bonne ville de Paris, Nous a faict remonstrier qu'il auroit faict achapt de la coppie des quinze liures, *des Elemens d'Euclide*, traduiète en François par M. D. **HENRION**, Professeur és Mathematiques, & par luy commentés & enrichis, tant en la matiere que és figures, le tout tres-necessaire à tous ceux qui font profession des sciences Mathematiques, lequel ledit **IOALIN** desireroit faire imprimer, & d'autant qu'il y conuient faire de grands frais, tant à cause des diuers chiffres & caracteres, que grand nombre de figures, & qu'il pourroit estre priué & frustré de son labeur par quelque Libraire & Imprimeur, s'il n'auoit sur ce nos lettres à ce necessaires, humblement reque-

rant icelles. A ces causes inclinans libe-
ralement à la requeste dudit exposant,
Nous luy auons de nos graces spéciales don-
né & octroyé, donnons & octroyons par ces
presentes, congé & permission de faire im-
primer, en telle marge, volume & chara-
ctere que bon luy semblera le susdict liure,
durant le temps & espace de neuf ans, à
commencer du iour & d'acte qu'il sera acheué
d'imprimer, faisans deffences à tous autres
Imprimeurs & Libraires de nostre royaume,
& à toutes autres personnes de quelque qua-
lité & condition qu'ils soient, d'imprimer ou
faire imprimer, alterer ny extraire aucune
chose dudit liure, d'achepter, vendre, ny distri-
buer aucune induë impression d'iceluy, sur
peine de deux mil liures d'amende, applica-
ble moitié aux pauvres, & l'autre moitié au-
dit I O A L I N, & de confiscation des liures &
exemplaires qui se trouueront d'autre im-
pression, que celle qu'aura faicte ledit I O A-
L I N, & de tous despens, dommages & inte-
rests, à la charge de mettre en nostre Biblio-
theque des Cordeliers à Paris, deux exem-
plaires dudit liure. Voulans en outre, qu'en
exposant au commencement ou à la fin du-
dit liure vn extraict des presentes, elles soient
renuës pour bien signifiées, nonobstât quel-
conques lettres à ce contraires. Car tel est

nostre plaisir. **DONNE** à Paris le 27. iour de
Ianvier, l'an de grace mil six cens vingt-vn,
& de nostre regne le vnzième.

Par le Roy en son Conseil.

D A M O N T.

Ceste seconde Edition a esté acheuée
d'imprimer, le sixiesme Mars 1621.

Par Fleury Bourriquant.