

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

LES
QUINZE LIVRES
DES ELEMENTS
D'EUCLIDE.

Traduits de Latin en François:

Par D. HENRION *Mathématicien.*

SECONDE EDITION, L

Reueüë, corrigée & augmentée. 1689



A PARIS,
Chez JEAN ANTHOINE IOALLIN, dans
la cour du Palais, entre les deux grandes
portes, proche la barrière du Tresor.

M. DC. XXI.
Avec Privilège du Roy.





A MESSIRE CHARLES
DESCOUBLEAU, MARQUIS
de Sourdy, & d'Alluie, Comte de la
Chapelle Belloüin, Baron d'Auneau,
& Mondoubleau; Seigneur de Ioüy,
Montrichard, la tour d'Argy, & au-
tres lieux: Conseiller du Roy en ses
Conseils d'Estat & Priué; & Capitai-
ne de cinquante hommes d'Armes
d'ordonnances de sa Majesté.

ONSEIGNEUR,

M Il y a quelques années que j'employay mes
heures de loisir à la traduction des Ele-
mens tant de la Geometrie d'Euclide, que des Spheri-
ques de Theodose, en intètion de les mettre au iour, es-
clairez de vostre illustre nom, m'assurant que l'appro-
bation que vous feriez d'icelles traductions leur ser-
uiroit de touche, comme ces Elemens seruent de guide
aux amateurs de la diuine Mathematique: car tout
ainsi que ceux là travailleroient en vain, qui vou-
droient paruenir au but d'une vraye demonstration

E P I S T R E.

par quelque voye contraire à celle desdicts Elements ; de mesme ceux aussi se monstrent temeraires & ridicules, qui se voudroient ingerer de contrarier à ce que vous auriez approuué, veu qu'outre le solide iugement dont la nature vous a doué, & la grande cognoissance que vous avez, non seulement des choses concernant la milice, mais aussi en toutes les sciences liberales, & principalement en la Mathématique ; vous avez esté si bien instruit és bonnes lettres, que vous pouvez voir & entendre les plus graves autheurs en leurs vrayes sources & langage naturel. Or suivant ma premiere resolution, ie vous presentay ma traduction des Spheriques de Theodose, & non celle des Elements d'Euclide, à raison qu'elle fut imprimée en mon absence ; mais maintenant qu'elle est prestée de voir le iour pour la deuxiesme fois, beaucoup mieux estoffée, & polie qu'en l'Édition precedente, ie la vous offre, Monseigneur, avec ceste assurance que vous la receurez en vostre sauvegarde & protection, d'un aussi gracieux visage & liberal accueil, que d'une deuote humilité & respectueuse obeissance le sacrifice vous en est fait par

Vostre tres-humble & tres-
obeissant seruiteur.

D. HENRION.



D. HENRION.

A V LECTEUR.



*L*y a dix ou vnze ans, que voyant que personne n'auoit encore traduit en nostre langue, tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public, m'excita d'entreprendre cette traduction: Mais com-

me ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preuenue de Monsieur Dounot: ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein, me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'une iuste translation: Mais voyant en lisant ladite traduction, que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Auteur en plusieurs endroicts, & mesme introduit de nouvelles demonstrations vicieuses & erronnées: cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres: & neantmoins i'usay de quelque surseance, esperant que par vne seconde impression, ledit Dounot pourroit émander la premie-

re: Mais en l'année 1613. Voyant qu'iceluy *Donnot* auoit fait faire ladite seconde impression, & en icelle corrigé peu de fautes, & mesmes qu'il y en auoit de nouvelles, cela me fit lors resoudre à mettre en lumiere cette mienne translation, pour le soulagement des François amateurs des disciplines Mathematiques: Elle fut donc imprimée en l'année 1614, mais si à la hâte, que ie n'eus le loisir d'en mettre la coppie au net, ny mesme d'en voir aucune épreuue, m'estant fié de ce, à quelque vn qui s'en acquita si mal, que l'impression estant faite i'y trouuay tât de fautes, que ie fus long temps en doute si ie la deuois aduoüer, & recognoistre l'ouurage pour mien, mais en fin ie le laissé aller au iour, m'estât persuadé que les beneuolles Lecteurs excuseroient ces fautes, & suppléeroient aux manquemens qu'ils y trouueroient, iusques à ce que le temps me peut permettre d'en faire faire vne autre impression plus correcte. Ayant donc eu quelque loisir, ie me suis mis à reuoir, corriger, & augmenter en diuers lieux cette mienne traduction d'*Euclide*, & icelle fait mettre sous la presse; à l'impression de laquelle i'apporteray tel soing & diligence, que i'espere la garantir non seulement de toutes les fautes qui s'esloient glissées en la premiere impression, mais aussi l'exempter de beaucoup d'autres qui y pourroient de nouveau arriuer. Or voicy comme ie me suis comporté en cette traduction d'*Euclide*: Premièrement ie me suis efforcé de rendre les demonstrations des Anciens, & principalement de *Theon*, lesquelles *Proclus* assure estre d'*Euclide*,

quelquesfois plus briefues, autant que la matiere l'a peu permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant où il y auoit de la superfluité, & éclaircissant où il y auoit trop de briefueté, suivant en ce Commandinus & Clavius: voire mesme en quelques endroicts où i'estimois les demonstrations de Theon trop longues & embrouillées, ie les ay totalement delassées pour en prendre d'autres, non seulement plus briefues, mais aussi claires & intelligibles. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroicts plusieurs Problemes & Theoremes vtils & dignes d'estre sçeus, lesquels i'ay tiré de diuers bons Auteurs. D'auantage i'ay tasché d'éclaircir les plus obscures definitions d'Euclide, qui à faute d'estre bien prises, en ont fait chopper plusieurs, comme l'a tres-bien remarqué Clavius. Et d'autant que les doctes Commandinus, Schewin & Dibuadins ont estimé que le dixième livre de ces Elements (lequel est tenu par plusieurs fort difficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y ioignant les nombres, ie les ay adioustés aux endroicts plus difficiles & obscurs, me seruant du travail des susdits Auteurs. Finalement voyant que chacun n'entendoit pas les operations des nombres radicaux & sourds, comme estans éloignées de celles de l'Arithmetique vulgaire, lesquelles neantmoins sont necessaires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales; en la premiere impression i'auois fait vn sommaire & abrégé de l'Algebre, lequel nous auons retranché en cette. À cause qu'il grossissoit par trop ce volume, &

aussi qu'il estoit inutile à beaucoup : Neantmoins afin de contenter ceux qui le desireront voir, nous avons ioinct ce sommaire d'Algebre, avec plusieurs autres traictez de Mathematiques, recueillis en un volume intitulé, Collection Mathematique, lequel a esté depuis peu mis en lumiere à mon grand regret, attendu qu'entre tous ces diuers traictez, il y en a trois qui ont esté imprimés à mon desceu, sur quelques copies tirées d'aucuns de mes disciples, aussi bien que certaines leçons d'Horlogeographie qu'on a mise à la fin d'un autre traicté de ce mesme subject, fait par un nommé P. de Floutrieres. Voila donc mon travail ; reçois-le (amy Lecteur) attendant que ie te puisse bailler le second volume de mes memoires Mathematiques, & quelques autres œuvres de plus grande estude que cette traduction.

Maintenant parce que ces Elemens d'Euclide seruent d'entrée à toutes les autres disciplines Mathematiques, i'ay estimé qu'il seroit bon auparavant que nous venions à les interpreter, de reciter succinctement, (comme ont fait Commandin & Clavius) d'où les disciplines Mathematiques ont pris leur nom: quelle est leur diuision: par qui elles ont esté premierement inuentées: & qui sont ceux par qui elles ont esté depuis augmentées: combien grande est leur excellence, & vtilité, & telles autres choses qui conuiennent à nostre subject.

*Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté
ainsi appellées.*

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la qualité pour leur objet, ont pris leur nō de la diction Grecque *μαθημα* ou bien *μαθηματις*, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens, estimans que les ames raisonnables estoient contenues en vn nombre certain & déterminé, & qu'elles passioient d'un corps en vn autre (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) témoignent que ces disciplines mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles, nous acquerons le ressouvenir & la reminiscence de cette science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faussement) estoit informée & instruite auparavant qu'elle fust entrée dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts Mathematiques obtiennent le nōm de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedēt tousiours de certains principes cogneus auparavant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amènent pour confirmer ce qu'elles veulent mōstrer, les choses qui n'ont pas esté assez expliquées ny demōstrées auparavant.

Diuisiō des disciplines Mathematiques.

Les Pythagoriens, lesquels ont esté suivis presque

de tous les Mathematiciens, & de plusieurs Philosophes, ont diuisé toutes les disciplines Mathematiques en quatre parties, sçauoir Arithmetique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur object, est ou discrete, sou laquelle tous les nōbres sōt cōpris, ou continuë, sou laquelle sont comprises toutes les grandeurs, & que l'vne & l'autre partie est considerée, tant selon soy, qu'en comparaison d'vne autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'vne & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmetique traicte de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant soigneusement toutes les proprieté & passions des nombres. La Musique traicte de la mesme quantité discrete, ou bien d'un nōbre cōparé avec vn autre, entend qu'elle cōsidere les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quātité cōtinuë, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finalement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'un continuel mouuement. Or à ces quatre sciences Mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & la Geometrie sont appellées pures; mais la musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traictant en quelque maniere que ce soit de la quantité, telle qu'est la Perspective, la Geographie, & autres semblables, peuuent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles dépendent.

Quelques anciens Geometres diuisent les disciplines Mathematiques d'vne autre maniere: car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement es

choses intellectibles séparées de toutes matieres, & aucunes és choses sensibles, de telle sorte qu'elles touchent la matiere subiecte aux sens: du premier genre, ils establiſſent deux premieres & principales ſciences, l'Arithmetique, & la Geometrie: Mais au dernier genre, ils en conſtituēt ſix, Aſtologie, Optique, Geodeſie, Canonique, ou Muſique, Suputatrice & Mechanique. Ils diſent que l'Aſtologie, eſt vne ſcience qui diſcours des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celeſtes; & de leurs diſtances à la terre, & d'autres choses ſemblables: Et derechef de ceſte ſcience, ils en conſtituent trois parties: La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimension des heures, par la poſition des Gnomons: La metheoroſcopique, laquelle enſeigne la difference des éléuatiōs; trouue les diſtances des Aſtres, & enſeigne pluſieurs autres & diuers Theoremes Aſtologiques: Et la Dioptrique, laquelle diſcerne par inſtrumens Dioptriques les diſtances des planettes, & autres eſtoilles. Ils diſent que l'Optique eſt engendrée de la Geometrie, pour ce qu'elle ſe ſert de rayons viſuels, comme de lignes & d'angles qui ſont conſtituez d'iceux rayons: Or elle eſt diuiſée en trois parties: en l'Optique, qui eſt le nom general, Catoptrique, & Scenographie, ou comme quelques-vns aiment mieux Sciagraphie. L'Optique ou perspective, rend la cauſe des apparences, leſquelles ont de couſtume ſe preſenter à nous, autrement qu'elles ne ſont, à cauſe des diuerſes ſituations, & diſtances des choses qui tombent ſous la veüe, comme de la coincidance de paralleles, & de l'aſpect des quarréz, comme ſi c'eſtoient cercles: La Catoptrique ou ſpeculaire vniuerſelle, a diuerſes reſractions pour ſon objet: Et la Sciagra-

phie, ou Designatrice des ombres, monstre par quelle maniere se peut faire, que les choses qui paroissent es images, semblent plaisantes & non difformes pour les distances & hauteurs des choses designees. Ils appellent Geodæsie la science, laquelle mesure les choses qui consistent en quantité, comme les ras & monceaux des choses materielles, ainsi que les Cones; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle fait, non pas par lignes droictes intellectuelles, comme de la Geometrie, mais seulement par les sensuelles. Cette Geodæsie, comme la Geometrie est diuisée en la partie qui mesure les plans; & en celle qui mesure les solides. Or quelques-vns, entre lesquels est Pediaſimus, comme rapporte Clavius au commencement du sixième liure de sa Geometrie pratique, disent que Geodæsie n'est que cette partie de Geometrie, laquelle enseigne à partir ou diuiser les superficies: comme s'il falloit partir vn champ ou piece de terre, ou autre superficie entre diuerses personnes, cela seroit proprement appellé Geodæsie. Ces anciens là appellent Canonique ou Musique, la science qui considere les raisons apparentes des accords des sōs, & qui se sert par tout de l'aide des sēs, & laquelle cōme dit Platon, sēble auoir preferé les oreilles à l'entēdement. La Supputatrice quāt à eux, est la mesme que ce que nous appellōs Arithmetique pratique: Car elle considere les nōbres, non pas es choses intellectuelles, mais cōme es choses sēsuelles. Et finalement la mechanique, laquelle cōsiste en la connoissance des choses sensuelles & conjointes à la matiere, ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il y en a vne qui est effectrice des instrumens de guerre, tels que l'on dit qu'Archimede en auoit construit, pour faire resistance à ceux qui auoient assiegé tant

par mer que par terre la ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle enseigne à construire certains instrumens, qui par le moyen des vents, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibe & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par diuers moyens imitent les cōvolutions & mouuemens des choses animées, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit. Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellées centropōderantes. Et finalement il y en a vne qui est appellée effectrice des Spheres, à l'imitation des circōvolutions celestes, telle qu'Archimede en a aussi fabriqué: Et pour dire en vn mot, toute science est mechanique, laquelle a la force de mouuoir la matiere. Or voila comme les Anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Les histoires tesmoignent, que toutes les disciplines Mathematiques ont tiré leur origine de diuers Auteurs, voire mesme que chacunes de ces sciences n'ont pas acquis vne perfection dès le commencement, mais qu'elles ont procedé peu à peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers inuenteurs de l'Arith. ont esté les Pheniciens, à cause de leurs traffics & commerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleusement, & esclaircie de diuers Problemes & Theoremes. Quant à la Musique plusieurs historiens ont laissé par escrit, qu'elle a esté premierement inuentee par Mercure, laquelle

phie, ou Designatrice des ombres, monstre par que
 le maniere se peut faire, que les choses qui paroissent
 sentés images, semblent plaisantes & non difformes
 pour les distances & hauteurs des choses designées.
 Ils appellent Geodæsie la science, laquelle mesure les
 choses qui consistent en quantité, comme les ras &
 monceaux des choses materielles, ainsi que les Co-
 nes; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle
 fait, non pas par lignes droictes intellectuelles, com-
 me de la Geometrie, mais seulement par les sensuel-
 les. Cette Geodæsie, comme la Geometrie est diui-
 sée en la partie qui mesure les plans; & en celle qui
 mesure les solides. Or quelques-vns, entre lesquels
 est Pediaſimus, comme rapporte Clavius au com-
 mencement du sixième liure de sa Geometrie practi-
 que, disent que Geodæsie n'est que cette partie de
 Geometrie, laquelle enseigne à partir ou diuiser les
 superficies: comme s'il falloit partir vn champ ou
 piece de terre, ou autre superficie entre diuerses per-
 sonnes, cela seroit proprement appellé Geodæsie.
 Ces anciens là appellent Canonique ou Musique, la
 science qui considere les raisons apparentes des ac-
 cords des sōs, & qui se sert par tout de l'aide des sēs,
 & laquelle cōme dit Platon, sēble auoir preferé les
 oreilles à l'entēdement. La Supputatrice quāt à eux,
 est la mesme que ce que nous appellōs Arithmetique
 pratique: Car elle considere les nōbres, non pas és
 choses intellectuelles, mais cōme és choses sēsuelles.
 Et finalement la mechanique, laquelle cōsiste en la co-
 gnoissance des choses sensuelles & conjointes à la
 matiere, ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il
 y en a vne qui est effectrice des instrumens de guer-
 re, tels que l'on dit qu'Archimede en auoit construit,
 pour faire resistance à ceux qui auoient assiegé tant

par mer que par terre la ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle enseigne à construire certains instrumens, qui par le moyen des vents, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibie & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par diuers moyens imitent les cōuolutions & mouuemens des choses animées, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit. Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellées centropōderantes. Et finalement il y en a vne qui est appelée effectrice des Spheres, à l'imitation des circōuolutions celestes, telle qu'Archimede en a aussi fabriqué: Et pour dire en vn mot, toute science est mechanique, laquelle a la force de mouoir la matiere. Or voila comme les Anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Les histoires tesmoignent, que routes les disciplines Mathematiques ont tiré leur origine de diuers Auteurs, voire mesme que chacunes de ces sciences n'ont pas acquis vne perfection dès le commencement, mais qu'elles ont procedé peu à peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers inuenteurs de l'Arith. ont esté les Pheniciens, à cause de leurs traffics & commerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleusement, & esclaircie de diuers Problemes & Theoremes. Quant à la Musique plusieurs historiens ont laissé par escrit, qu'elle a esté premierement inuentee par Mercure, laquelle

depuis il communiqua & apprit à Orphee Musicien fort estimé, & Orphee à Thamyre & à Linus; & Linus à Hercules; & ainsi par succession continuelle d'autres Musiciens excellens, de temps en temps elle est paruenüe iusqu'à nous. Mais la Geometrie, selon Procle a esté trouuee par les Egyptiens, & a tiré son origine du mesurage des terres labourables: car comme l'inondation du fleuve du Nil confondoit & gastoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoistre l'estendue des siennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs esprits à la maniere de mesurer les terres, afin que par ce moyen on rendist à chacun le sien: Laquelle maniere de mesurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, si est-ce toutesfois que de là elle prit son nom de Geometrie, qui signifie autant que l'art de mesurer la terre. Or peu à peu la Geometrie commença à estre plus polie, & non contente de ses limites, elle s'appliqua aussi à mesurer les corps celestes, & enseigna les principes de l'Astronomie, de l'Optique, & de plusieurs autres disciplines qui dependent d'icelle, comme des racines. L'on dit que Thales Mile sien la transféra d'Egypte en Grece, & depuis plusieurs Philosophes & renommez Mathematiciens l'ont enrichie & embellie de plusieurs demonstrations: entre lesquels ceux-cy sont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras, Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theaterus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentin, Euclide, Serenus, Hypsicles Alexandrin, Archimede Syracusien, Appolonius Pergæus, Theodose Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexan-

drin, Ptolomee, Eutocius Ascalonite, Pappus, Proclus, & plusieurs autres innombrables, lesquels il seroit long de rapporter. Finalement, plusieurs estiment que l'Astronomie a esté premierement inventée par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré son origine, que de ses espaules il auoit soustenu le ciel, à cause de l'excellente cognoissance qu'il auoit de l'Astronomie. Les autres estiment que par longue obseruation les Chaldéens ont inuéré la science des astres. D'autres font les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceste science. Les autres les Assyriens. Et finalement les autres estiment que ceste gloire & louange doit estre deferee aux Babyloniens. Or en ceste sciēce, comme elle est tres-excellente, aussi y a-il eu plusieurs Autheurs excellents qui y ont traouillé, lesquels nous ne rapporterons icy pour briefueté. Ces quatre principales disciplines Mathematiques ayans esté inventées, toutes autres qui traictent de la quantité en quelque sorte que ce soit, ont esté facilement deriuées d'icelles, tout ainsi que petits ruisseaux d'une fontaine.

L'excellence des sciences Mathematiques.

D'autant que les disciplines Mathematiques traictent des choses, lesquelles sont considérées sans aucune matiere sensible, encore qu'elles ne soient naturellement sans matiere, il est euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphysique, & la science naturelle, si nous cōsiderons leur sujet, comme Procle le prouue fort bien. Car le sujet de la Metaphysique est separé de toute matiere, tant intellectuelle que sensuelle : mais le sujet de la Physique est conioinct à la matiere sensible, d'où vient

que puis que le sujet des disciplines Mathematiques est consideré hors de toute matiere sensuelle, mais non hors de toute matiere intelligible: il est evident qu'il est moyen entre ces deux-là. Mais s'il faut estimer l'excellence d'une science par la certitude des demonstrations desquelles elle use, sans doute les disciplines Mathematiques tiennent le premier lieu entre toutes: Car elles demonstrent toutes choses desquelles elles entreprennent la dispute, par des raisons tres-fermes, & les confirment de telle sorte, qu'elles engendrent veritablement une science en l'esprit de ses auditeurs, & oste tous les doutes: ce qu'à peine pouvons-nous attribuer aux autres sciences, veu qu'en icelles souvent l'entendement est en suspend & en incertitude par la multitude des opinions, & diuersité des aduis sur la verité des conclusions: ce que tesmoignent ouvertement tant de sectes des Peripateticiens, (afin que ie laisse tous les autres Philosophes à part) lesquelles ayant pris leur origine d'Aristote, comme les ruisseaux de leur source ou fontaine, sont tellement en discord, & entr'elles, & quelquesfois avec leur auteur mesme Aristote, qu'on ignore tout a fait ce que veut dire Aristote: d'où vient qu'une partie suit les interpretes Grecs, comme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philosophes qu'ils appellent Reaux, (tous lesquels se vantent d'estre Peripateticiens) laquelle diuersité ie n'estime pas que personne ignore combien est esloignée des demonstrations Mathematiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent aujourdhuy la mesme pureté de la verité, la certitude des choses, la force & fermeté des de-

monstrations qu'elles ont eu par tant de siècles precedens. A cecy se rapporte ce que Platon dit en son dialogue du souverain bien, que ceste science là est la plus digne, & la plus excellente, laquelle est la plus amatrice de sincerité & verité. Veu donc que les disciplines Math. desirant, ayment, & cultivent si soigneusement la verité, que non seulement elles n'admettent rien qui soit faux, mais mesme rien qui soit seulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonstrations tres-certaines, il n'y a point de doute qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres sciences.

Diverses utilitez des disciplines Mathematiques.

Les disciplines Mathematiques ne doivent pas estre seulement estimées vtils, mais aussi fort necessaires, tant pour apprendre les autres arts par faitement, que pour bien instituer & gouverner la chose publique : Car comme enseigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entrée à la Metaphysique, si ce n'est par les Mathematiques. Car si des choses sensibles, lesquelles le Physicien considere, nous voulons esleuer nostre entendement sans aucun milien, aux choses du tout separées de la matiere sensible, lesquelles le Metaphysicien considere, nous nous aveuglons nous-mesmes, tout ainsi qu'il arrive à celuy qui de quelque lieu tenebreux, où il a esté long temps, vient tout soudain paroistre en vne grande lumiere. C'est pourquoy auparavant que l'entendement monte, des choses Physiques qui sont conjoinctes à la matiere subiecte aux sens, aux choses Metaphysiques qui en sont separées, il est necessaire de peur d'estre esblouy de leur clarté, qu'il

soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerées par les Mathematiciens, afin qu'il les puisse plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon assure que les Mathematiques eleuent l'esprit, & le subtilisent, pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'vtilitez pour bien entendre les saintes Escritures, Sainct Augustin, saint Hierosme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entendues de plusieurs par l'ignorance des nombres, pource qu'elles ont esté couchées dans l'Ecriture mystiquemēt. Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement vtils aux Theologiens. Et Sainct Basile est grandement loué par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien versé en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquérir parfaitement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. I'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droit sont proposez pour guide, pour bien & sainement philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples Mathematiques. pour ceste raison principalemēt, afin que les choses qui semblent estre enuolopees de grandes difficultez fussent rendues plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques; d'où vient qu'an-

ciennement la frequentation du college de Platon estoit interdite à ceux qui n'estoient pas bien versezés disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son *Timee*, il appelle les Mathematiques le chemin de toutes vrayes eruditions : voire mesme il dit en son *Philebe*, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Mathemat. Je pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages, tant de Platon, qu'autres Philosophes excellents, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneuës, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'utilité & necessité de l'Arithmetique, non seulement à ceux qui s'employent au commerce, mais presque à toutes sortes de personnes ? Qui ne void l'utilité de la Geometrie ; puis que c'est elle qui conduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens : l'Ingenieur en la construction des forteresses, en l'invention des machines, tant offensives, que deffensives : puis que c'est elle (dis-je) qui montre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs ; la diuision des terres, à prendre, & représenter le plan des villes, ou autres lieux : à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes ; à diuiser & compasser en vn champ les espaces pour camper vne armée ; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon quelle figure ou forme, il doit ranger son armée, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est ? Bref, qui ne void combien l'Astrologie est vtile, puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons ? Et qui est-ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller és contrées lointaines, voir le nouveau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons

de ces quartiers là ? Et comment l'Hystorien rapportera-il la scituation des climats, les grandeurs, diametres, & circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie ? Que dirons-nous plus ? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tres-vtile à Iosephe, Sacrificateur des Iuifs, lors qu'à la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armée Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres luy sauua la vie ? La mesme vtilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb, grand Admiral de l'Océan Occidental, sous Dom Fernand, Roy de Castille, premier explorateur du nouueau monde: Car estant parueniu pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & là perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillée, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans de celle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouuoir tous vaincre & saccager: Mais ledit Colomb cognoissant par l'Astrologie qu'une nuit prochaine, il se feroit vne grande Eclypse de Lune, il dit à quelques-vns des habitans, que s'il ne luy vendoient des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang ; & pour tesmoignage que cela aduiendroit ainsi, ils verroient en vn tel iour, & à vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant adueniu ainsi, lesdits habitans ignorans l'Astrologie, adioustèrent foy aux menaces dudit Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adiouterons encore icy, que Hieron
Roy

Roy de Syracuse, ayant fait bâtir vne nauires pour enuoyer à Ptolomée Roy d'egypte, d'vne telle grâdeur, que tous les Syracusiens ensemble ne la pouuoient remuer de sa place. Vn seul Archimede par le moyen de la Geometrie, fist que le Roy seul, sans aucune peine la remua de son lieu, dont le Roy & tous les Syracusiens furent grandement émerueillez. Qui est donc celuy qui ne doine desirer les disciplines Mathematiques sur toutes les autres sciences. Mais qu'elles sont non seulement agreables, mais aussi tres-vtiles & necessaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne sont pas bien d'accord, qui a esté Euclide, qui a composé ces Elemens, & en quel temps il auez. Car plusieurs pensent que c'a esté vn Philosophe de la ville de Megare, disciple de Socrates, qui institua la secte appellée par luy Megarique. Mais si nous croyons Proclus, Auteur excellent, & autres anciens, nostre Euclide a esté depuis celuy de Megare, & a flory au temps de Ptolomée premier, lequel commença à regner en Egypte après la mort d'Alexandre, la 115. Olimpiade, & l'an 319. auparauant la natiuité de nostre Seigneur, comme le rapporte Iean Lucide: Ce qui est plus vray semblable, d'autant que Diogenes Laërtius rapportant tous les oeuvres d'Euclide Megarien, il ne fait aucune mention de cét admirable volume des Elemens Geometriques, par lequel nostre Euclide s'est acquis vne renommée & gloire immortelle. C'est pourquoy nostre Euclide tres-subtil Geometrien, est bien autre que ce Megarien là, d'autant qu'estant tres-bien versé en la doctrine des Academicques, il

appliqua son esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent, que par le commun consentement de tous, il a obtenu le premier lieu entre les Mathematiciens. Or il a écrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donneez; l'œuvre des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tres-subtil des diuisions des superficies, attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Dée, & de Federic Commandin. Pareillement il a écrit les Elemēs Coniques, comme dit Proclus, lesquels toutesfois ne sont pas encore paruenus jusques à nous, & autres petits traictez semblables. Mais principalement il a tissé ce volume des Elemens Geometriques, qui par le consentement de tous, ne sera iamais assez loué, avec vn ordre si admirable, & l'a rempli d'une si grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont écrit de semblables Elemens, (car comme dit Proclus, il y en a plusieurs qui en ont composé) qui l'ait égalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'un qui l'ait surpassé, auquel volume comme il a fait paroistre la grande subtilité de son esprit, ainsi il n'a pas estimé qu'il fallut mettre au jour toutes les choses qui touchent la Geometrie, mais seulement les choses qui luy ont semblé vtils & necessaires pour tous, lesquelles il a confirmées & fortifiées d'argumens & raisons tres-fermes & tres-solides. Or l'on peut recognoistre clairement, tant des choses que nous auons déjà representées, que de ce que nous dirons encores presentement, combien est grande l'vtilité & excellence de ces

Elemens Geometriques d'Euclide, & consequem-
ment de toute la Geometrie. Ces Elemens sont
 ainsi appelez, d'autant que nous ne pouuons sans
 cela entreprendre aucunes œuvres Mathematiques,
 tant s'en faut que nous en puissions retirer aucun
 fruit: Car tous les Autheurs des Mathematiques,
 comme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodo-
 se &c. se seruent en leurs demonstrations de ces E-
 lemens d'Euclide, comme de principes certains, &
 desquels les demonstrations estoient déjà il y auoit
 long temps recogneuës & tenuës pour constantes
 & asseurées de tout le monde. Parquoy il est ne-
 cessaire que celuy qui desire sçauoir, & se rendre
 familiere quelconque partie des Mathematiques,
 apprenne auparauant ces Elemens Geometriques.
 Car d'iceux Elemens, comme d'une fontaine plan-
 tureuse, est produite la dimension des latitudes, lon-
 gitudes, altitudes & profondeurs: la diuision des ter-
 res, montagnes, & illes: l'observation des astres du
 ciel, qui se fait par les instrumens: la composition
 des horologes scioteriques: la force des machines:
 la raison des pois: & cette diuersité d'apparences
 qu'on voit es miroirs, es peintures, es eaux, & en l'air
 diuers semēt illuminé. Par le moyen dis-je de ces Ele-
 mens, a esté trouué le milieu & centre de toute cer-
 te machine du monde; & ont esté trouuez les po-
 les, à l'entour desquels il se tourne continuellement:
 & a esté recherchée & trouuée la figure & quantité
 de toute la terre. Par la force de cette seule science
 est monstrée & demonstrée la conuersion de tout le
 ciel, & des astres: leur leuer & coucher: leur approche-
 ment & éloignement: leur ascension & descention;
 la varieté du iour & de la nuit, & des temps entou-
 re l'année, par toute la scituation des endroits de la

terre. Pareillemēt les conjōctiōs des Planettes, leurs oppositiōs, & diuers aspects, sōt cogneus si facilēmēt que les Mathematiciens peuuent dire leurs lieux au ciel, & predire asseurēmēt les Eclipses, soit de Soleil, soit de la Lune, auparauāt qu'elles aduiēnēt, pour si long tēps qu'il leur plaist. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuvre de Dieu perceptible aux yeux de nostre entēdement.

La diuision de Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie est diuisée en la contemplation des plans, qui est appellée du mot general Geometrie; & en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellent par vn nom propre & peculiar la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerselle se propose ce but, qu'elle constituē ou les plans, ou les solides, ou bien estans constituez, elle les compare entr'eux, ou les diuise. Or nostre Euclide voulant laisser vne parfaicte cognoissance en ces Elemens des choses Geometriques, il traite des plans aux six premiers liures; & aux cinq derniers, il dispute fort subtilement des solides, & recherche leurs proprietēz les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appelez corps Platoniques, ne pouuoient estre traiteez parfaicement sans la cognoissance des lignes cōmensurables, & incommensur. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enseignemens requis pour l'intelligence, & dimēsiō des magnitudes, il a mis son dixième liure deuant sa Stereometrie, auquel il discoure subtilement de ces sortes de lignes là: Et qui plus est, Eu-

diſe ſçachant que ce traité des lignes commenſurables & incommenſurables ne ſe peut bien faire ſans la cognoiſſance des nombres; deuant le dixième liure, il traite des paſſions ou proprietez des nombres, és trois-liures qui le precedent. C'eſt pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze liures, (deſquels les treize premiers ſont attribuez de tous à Euclide ſans aucun contredit, mais les deux derniers ſont attribuez à Hypſicle Alexandrin) ſe pourra à bon droit diuiſer en quatre parties; tellement que la premiere partie contenuë és fix premiers liures, traite des plans: la ſeconde comprenant les trois liures ſuyuans recherche les paſſions des nombres: La troiſième partie, laquelle le dixième liure conſtituë ſeul, traite des lignes commenſurables & incommenſurables. Et finalement la quatrieme partie contenuë aux cinq autres liures, comprend la ſciëce des corps ou ſolides. La premiere partie ſe diuiſe derechef en trois: Car aux quatre premiers liures, il eſt traité des plans abſolument, en recherchant leur égalité & inégalité; mais au cinquième liure, il eſt traité en general des proportions des magnitudes: & au ſixième, ſont examinées les proportions des figures planes.

Que c'eſt que Probleme, Theoreme, propoſition, Lemme, Coroll. & Scholie, entre les Mathematiciens.

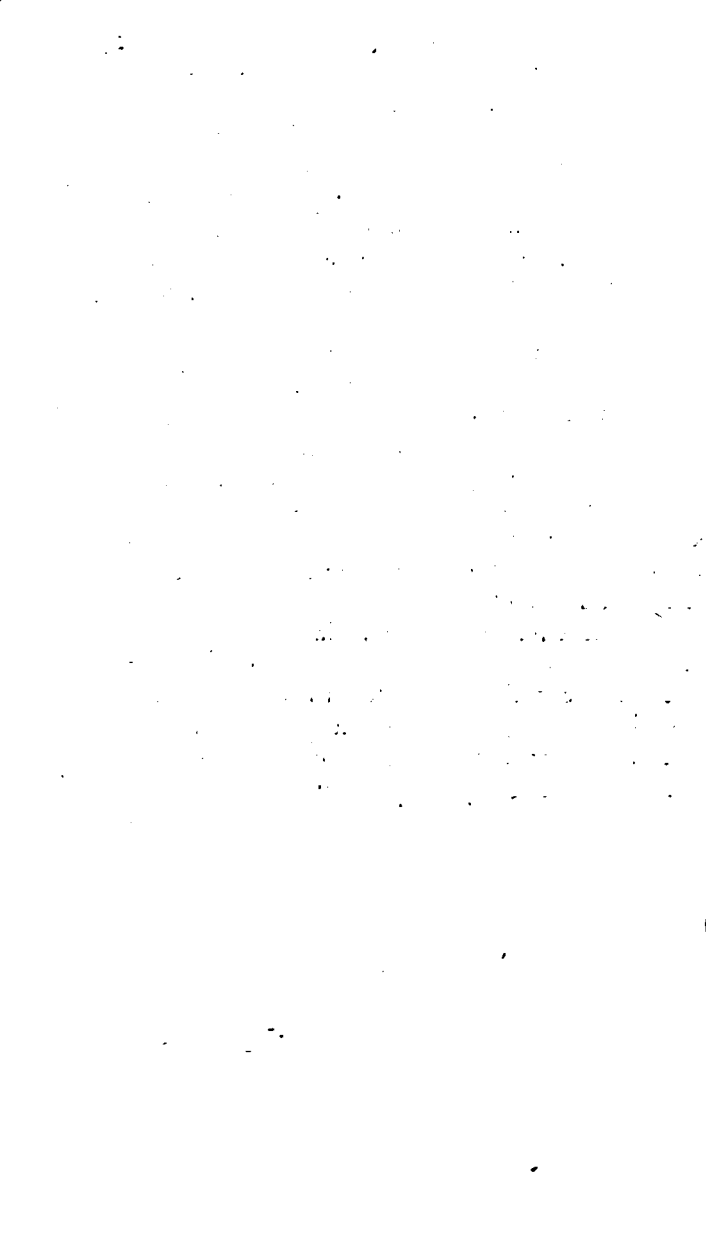
Toute demonſtration de Mathematiques, eſt diuiſée par les Anciens Auteurs, en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, cette demonſtration qui comande & enſeigne à conſtruire quelque choſe: Et Theoreme, la demonſtration laquel-

le recherche seulement, quelque passion ou propriété d'une ou plusieurs quantitez ensemble : Bref les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affections & proprietiez des choses déjà faites & construites : Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appelez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant necessaire à leur demonstration, ils le prennent & prouvent auparavant que venir à leur dite demonstration principale, afin de la faire plus euidente & briefve. Mais ce que nous appellons Corollaire, est vne consequence que nous tirons de ce qui a esté demonstré en quelque proposition. Et finalement, ce qu'on nomme Scholie, est vne annotation qu'on fait seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veux que toute doctrine & discipline est engendrée d'une cognoissance precedente, comme le témoigne Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedez, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes ; les disciplines Mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedez, elles confirment leurs Problemes & Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitions, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traitant de la science, estans trompez par l'ambiguité

des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou demandes, qui sont choses si claires & evidentes en cette science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement del'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au troisiéme genre sont referez les Axiomes, ou communes notions de l'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & evidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, ausquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & evidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subje&t de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes, qu'on pourroit nommer en François Avant-propos. Nous viendrons donc maintenant à l'exposition des principes d'Euclide.





ELEMENT

PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



Es Physiciens disent que le point est le moindre objet de la veüe: & iceluy peut estre décrit avec ancre ou autre chose. Mais les Mathematiciens reiectant ceste definition, disent que le point est vn objet de l'intelle& si subtil qu'il ne peut estre diuisé en aucunes parties: Et iceluy ne se peut escrire, mais seulement entendre & imaginer: bien est vray que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous seruons du point Phisique. Le point n'a donc aucunes des dimensions geometriques; c'est à dire, qu'il n'a ny lon-

gueur, largeur, ny espaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est vne longueur sans largeur.

Après le point vient la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou coulement du point en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide; puis que le point du coulement duquel elle est produite n'en a aucune; & par conséquent la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë a seulement vne dimension, sçauoir est longueur: car n'ayant aucune largeur, elle sera aussi necessairement sans espaisseur.

3. Les extremittez des lignes, ce sont points.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à vn point & acheuent aussi à vn point: Car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres sortes de lignes, auxquelles on ne peut assigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, est celle qui est également comprise entre ses points.

Les Mathematiciens ont diuerses sortes de lignes; mais Eucl. ne traicte icy que des deux plus simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire: en ceste definition il parle de la droicte, laquelle est le plus court chemin d'un point iusques à l'autre: ou

comme dit Archimede, c'est la plus courte d'entre les extremittez.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Après la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë, & qui a vne seule dimension, Euclide definit la superficie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimensions : scauoir est, longueur & largeur; & comme la ligne est produite par le flux ou coullement du point, ainsi la ligne se mouuant en trauers, produit la superficie.

6. Les extremittez de la superficie, ce sont lignes.

Il faut icy entendre des superficies bornées, & terminées par lignes droictes : car il y a bien plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la superficie spherique, qui circuit & environne vn corps entierement rond & spherique. Comme donc la ligne terminée commence à vn point, & finit à vn autre point, ainsi aussi la superficie terminée commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7. Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes.

Ceste definition de la superficie plane se rapporte à celle de la ligne droicte : Car comme celle-cy est

la plus courte d'entre ses extremittez, ainsi aussi la superficie plane est celle qui est la plus courte d'entre ses limites ou extremittez, tellement qu'il n'y a aucun endroit d'icelle superficie qui soit plus esleué ou abbaislé que sesdites extremittez. Mais toutes superficies esquelles il y a des endroits les vns plus esleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'est la superficie interieure d'une voulte ou arcade, ou bien l'exterieure d'un globe, ou d'une colomne ronde, & aussi d'un cone, &c. sont appellées superficies courbes: & icelles sont de plusieurs sortes, c'est à sçauoir conuexe, comme la superficie exterieure d'une sphere, ou d'une colomne ronde; & concave, comme la superficie interieure d'une voulte ou arcade.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en vn plan non directement.

9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droictes, l'angle sera appellé rectiligne.

Quand deux lignes constituées en quelque superficie plane, concurrent en vn point d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes, s'appelle angle plan. Or tout angle plan est fait, ou de deux lignes droictes, & alors il se nomme rectiligne: ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curviligne: ou bien d'une ligne droicte, & d'une courbe, & alors il

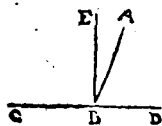
s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Donnor, & pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la premiere impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il estoit necessaire qu'estas continuées du point de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy, dont l'ensuiuroit que deux cercles s'entretouchant en vn plan, ou qu'une ligne droite touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p. 3. & comme l'a aussi bien demonsté Clavius sur la mesme proposition, où il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennēt encore ceste opinion, se mocquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droite touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'atouchemēt. Or la grandeur d'un angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

10. Quand vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre esgaux entr'eux, les angles sont droicts; & la ligne tombante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

11. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Si une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, ne s'incline pas d'avantage d'un côté que de l'autre, mais fait égale inclination, & par conséquent deux angles égaux entr'eux, chacun d'iceux est appelé angle droit, & la ligne ainsi tombante, perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe. Mais quand ceste ligne tombante s'incline plus d'un côté que de l'autre, elle fait deux angles inégaux entr'eux, dont le plus grand est appelé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en un plan concurrent plus de deux lignes en un même point, & par conséquent constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour éviter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu montre le point, auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extremes signifient les commencemens d'icelles lignes, qui font iceluy angle: Comme pour exemple en ceste figure où les lignes AB & EB concurrent au point B de la ligne CD: & EB est autant inclinée vers CB qu'à DB, mais AB panche vers la partie DB. Pour donc exprimer ces angles, nous disons que les deux CBE, & DBE sont droits, puis que la ligne EB tombant sur CD ne panche d'un côté ny d'autre, comme fait AB; & par conséquent icelle EB est perpendiculaire à CD: Mais que l'angle ABC, qui est plus grand que le droit EBC, est obtus; & ABD, qui est moindre que le droit DBE, est aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de cognoître facilement les



angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extremitez des lignes; les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dictée figure; ains seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux points, n'est pas dite figure: mais toutes superficies & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le cercle, l'Ellipse, & la sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle est vne figure plane, contenüe par vne seule ligne qu'on appelle circonference; vers laquelle toutes les lignes droictes menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales.

16. Et ce point là est appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, est vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le diuise en deux egalement.
18. Demy cercle, est vne figure comprise du diametre, & moitié de la circonference.

Toutes ces definitions sont aisées: car le cercle, sa circonference, son centre, son diametre, & le demy cercle declarez en icelles definitions, sont toutes choses cognues, voire aux plus ignorans.

19. Portion ou segment de cercle, est vne figure comprise d'une ligne droicte, & de partie de la circonference.

Ceste definition est repetée au troisieme liure, auquel lieu elle conuient mieux qu'en cestuy-cy.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droictes.
21. Figure de trois costez, est celle qui est comprise de trois lignes droictes.

23. Figu-

22. Figure de quatre costez ; est celle qui est comprise de quatre lignes droictes.
23. Figures multilataires ou de plusieurs costez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes est infiny : Les Geometres les nomment, tantost par le nombre de leurs costez, tantost par le nombre de leurs angles.

24. Or des figures de trois costez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.
25. Triangle Ifoſcele, qui a deux costez egaux seulement.
26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.
27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.
28. Ambligone, qui a vn angle obtus.
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.
30. Mais des figures de quatre costez,

celle qui a les quatre costez egaux,
& les quatre angles droicts s'appel-
le quarré.

31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les co-
stез egaux.
32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.
33. Rhomboide, qui a les angles, & aus-
si les costez opposez egaux en-
tr'eux, sans estre equilateral, ny rectangle.
34. Toute autre figure de quatre co-
stез, est appelée trapeze.
35. Lignes droictes paralleles, sont cel-
les qui estant sur vn mesme plan, &
prolongées de part & d'autre ne se
rencontrent iamais.

Icy finissent les definitions du premier liure d'Eu-
clide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est sou-
uent parlé de parallelogramme, lequel Euclide n'a
point desiny, nous adjousterons icy sa definition.

36. Parallelogramme, est vne figure

quadrilatere quia les costez oppo-
sez parallels ou equidistans.

Telle figure est tousiours l'une de ces quatre :
Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboide.

P E T I T I O N S O V demandes.

1. D'un point donné à vn autre point, mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnee & terminee.
3. Descrire vn cercle de quelque centre & interual que ce soit.

Euclide ne se sert en ces Elemens cy que de deux sortes de lignes simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire; la description desquelles estant fort facile, il demande qu'il luy soit permis de descire, ou de s'imaginer des lignes droictes de telle longueur qu'il voudra : Pareillement des cercles de tel diametre qu'il voudra, sans qu'il soit contrainct de demonstrez que cela est possible.

C O M M U N E S S E N T E N C E S.

1. Les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.

2. Si à choses egales, on adjouste choses egales, les tous sont esgaux.
3. Si de choses egales, on oste choses egales, les restes sont egaux.
4. Si à choses inegales, on adjouste choses egales, les tous sont inegaux.
5. Si de choses inegales, on oste choses egales, les restes sont inegaux.
6. Les choses doubles d'une autre sont egales entr'elles.
7. Les choses qui sont moitez d'une mesme, ou de choses egales, sont egales entr'elles.

Est aussi manifeste que les choses triples d'une mesme, ou quadruples, ou quintuples, &c. sont aussi egales entr'elles. Pareillement que les choses qui sont tierces parties d'une mesme, ou quart, &c. sont aussi egales entr'elles.

8. Les choses qui conviennent entr'elles, sont egales entr'elles.

C'est à dire, que deux grandeurs seront egales, si estant posees l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'adjustent entr'elles: comme deux lignes droictes, seront dictes estre egales, si l'une estant posee sur l'autre, celle qui est po-

ſee deſſus ſ'adjuſte à tout l'autre, tellement qu'elle
 ne l'excede, ny ne ſoit excedee d'icelle. Ainſi auſſi
 deux angles rectilignes ſeront egaux, quand le ſom-
 met de l'un, eſtant poſé ſur le ſommet de l'autre,
 l'un n'excede l'autre, c'eſt à dire que les lignes de
 l'un tombent ſur celles de l'autre: car par ainſi les
 inclinations des lignes ſeront eſgales. Ainſi auſſi
 deux ſuperficiés ſeront egales, quand l'une eſtant
 poſée ſur l'autre, elle n'eſt excedee, ny n'eſt excedee
 par icelle, mais ſ'adjuſtent totalement entr'elles. Or
 Donnott dit que conuenir, c'eſt auoir les extremités
 ſur les extremités: ce qui n'eſt pas vray en toutes
 grandeurs; Car pour exemple, vne ligne droite peut
 bien auoir les extremités ſur les extremités d'une li-
 gne courbe, laquelle neantmoins ne luy ſera egle.
 Ainſi auſſi vne ligne courbe peut bien auoir ſes ex-
 tremitez ſur les extremités d'une autre ligne cour-
 be, laquelle ne luy ſera pas pouſtant egle. Or il eſt
 manifeſte que de ceſt axiome on peut bien conuer-
 tir & prendre pour principe, *que les lignes droictes ega-
 les conuenient.* Pareillement, *que les angles rectilignes
 egaux conuenient.* Semblablement, *Que les ſuperficiés
 planes egales & ſemblables conuenient.* On peut bien en-
 core tirer quelques autres conuerſes de cet axiome:
 mais de le vouloir conuertir vniuerſellement (com-
 me quelques-uns) c'eſt ſe moquer, veu que ſi on
 trouue vne ligne courbe egle à vne droicté, elles ne
 conuiendront pas pouſtant: & auſſi qu'à tout angle
 rectiligne, il ſ'en peut bailler vn arc d'une ligne egal; les-
 quels neantmoins ne conuiendront iamais: voire
 meſme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quel-
 conque autre figure rectiligne: lesquelz pouſtant ne
 peuvent iamais conuenir. Ce qu'a bien recogneu
 Donnott en cet endroit, & neantmoins il conuertit

uniuersellement ce principe au scholie de la 4. p. 1.
concluant ainsi : Car c'est vne necessité geometrique que
les choses egales conuiennent, & que celles qui conuiennent
soient egales.

9. Le tout est plus grand que sa partie.
10. Tous les angles droicts sont egaux
entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & pren-
dre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn
angle droict, est aussi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant sur
deux autres lignes droictes, faict
les angles interieurs d'vn mesme
costé plus petits que deux
droicts ; icelles deux lignes estans
continuees à l'infiny, se rencon-
treront du costé où les angles
sont plus petits que deux droicts.
12. Deux lignes droictes n'enferment
pas vn espace.



ELEMENT

PREMIER.

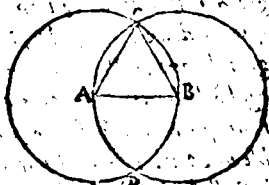
PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.



O I. r la ligne droicte donnee AB; sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervalle de AB, soit descrite le cercle BCD: Item du centre B, & de l'intervalle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és points C & D, de l'un desquels, sçavoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: le dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

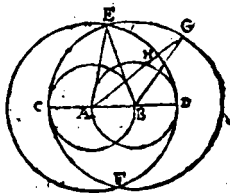


Car le costé AC, est egal au costé AB par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le

costé BA est egal au costé BC. Donc par la 1. com. sent. les costez CA & CB seront egaux, estant chacun egal à AB : & partant le triangle ABC descript sur AB, est equilateral; qui ost ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur une ligne droite donnée un triangle Isoscelle, & un Scale-ne, ce que nous ferons aussi en ceste maniere. Soit une ligne droite donnée AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient escripts deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'autre vers les circonferences jusques en C & D: puis du centre A & internele AD soit descript le cercle DEF: Item du centre B, & internele BC, le cercle CEF, couppant le premier es points E & F, de l'un ou l'autre desquels, qui est de E, soient menees aux points A & B, les deux lignes AE, EB: le dis que le triangle AEB, fait sur la ligne donnée AB, est Isoscelle, qui est que les deux costez AE, EB, sont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15. def. AE, est egal à la ligne AD, & icelle AD est double de AB, d'autant que BA, DB sont egales entr'elles; aussi AE sera double de AB. Derechef parce que BE est egal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE sera double d'icelle AB. Ven donc que l'un & l'autre costé AE, BE est double de la mesme AB, ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grãde que la ligne AB. Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant si du point A, on tire la ligne droite AG, à la circonferance EGF, qui ne soit la mesme que AE ou AD, couppant la circonferance EHD en H, & de



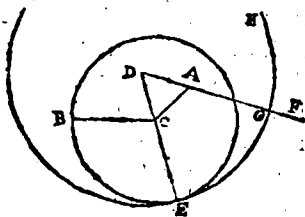
On mène à B la ligne droite GB, sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB, lequel se dit estre scalene. Car par la 15. definition, tant AH, AD que BG BC sont egales. Mais AD, BC sont doubles de AB; d'icelle seront aussi doubles AH, BG; & partant plus grandes qu'icelle AB. Ven donc que AG est plus grande que AH, ou que BG, le triangle AGB sera scalene.

P R O B. 2. P R O P. II.

D'un point donné, mener vne ligne droite egale à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné A, & la ligne droite donnée BC; & il faut du point A, mener vne ligne droite egale à icelle donnée BC.

De l'un ou l'autre extreme de la ligne donnée BC, sçavoir est de C, comme centre, & de l'intervalle de CB, soit décrit le cercle BE: puis du point donné A, au centre C, soit menée la ligne droite AC (sinon que le point A fut donné en la ligne BC) sur laquelle AC par la precedente proposition soit décrit le triangle equilateral ADC; & soit continué le costé DC, jusques à ce qu'il rencontre la circonférence en E, mais le costé DA tant qu'on voudra en F. En apres du centre D, & de l'intervalle de la ligne droite DE, soit décrit le cercle EGH coupant la ligne DF:



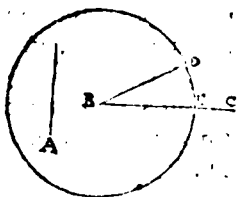
en G: le dis que la ligne AG qui est menée du point donné A, est égale à la ligne droite donnée bc .

Car DG & DE sont égales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste DA & DC qui sont égales, estant DAC triangle equilateral; les restes CE & AG seront aussi égales par la troisiéme com. sent. Mais CB est égale à CE, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc AG sera égale à CB, par ce que les choses égales à vne sont égales entr'elles. Nous auons donc du point donné A mené la ligne AG égale à la ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estés données, oster de la plus grande, vne ligne droite égale à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & BC, desquelles bc est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne égale à A. A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne BC, sçauoir est au point B, soit posée par la precedente prop. la ligne BD égale à la moindre A: puis du centre B, & de l'intervalle BD soit décrit vn cercle coupant BC en E: le dis que la ligne BE est égale à A. Car d'autant que par la quinziéme definition, les lignes BD, BE sont égales, & par la construction BD est égale à



A; par la premiere commu. sent. BE sera aussi egale à A . Nous auons donc osté de BC , la ligne BE & egale à A , ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Cette construction a esté rasenuë par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Dounot qui l'a changée: car à l'extreme de la moindre ligne, il en pose vne egale à la plus grande; quoy faisant il aduiens que d'icelle plus grande ligne donnée, il n'en coupe pas vne egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'une egale à icelle.

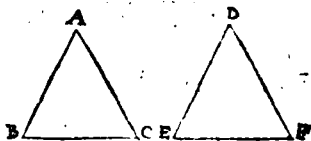
THEOREME I. PROP. III.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera egale à la base; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF , desquels le costé AB soit egal au costé DE , & AC à DF , & l'angle A egal à l'angle D :

Je dis que la base BC sera egale à la base EF , & l'angle B egal à l'angle E , & l'angle C à l'angle F .

& le triangle ABC egal au triangle DEF .



Qu'il ne soit ainsi : si on entend le point D estre posé sur le point A, & que D E tombe sur A B, aussi D F tombera sur A C; autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez A B & A C sont egaux aux costez D E & D F, chacun au sien, ils conuiendront par la huitième commune sentence conuertie, & partant les extremittez E & F, tomberont sur les extremittez B & C. Ainsi les deux bases B C & E F conuiendront, & seront egales par la mesme huitième commune sentence. Et le triangle D E F conuiendra avec le triangle A B C, & l'angle B conuiendra avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F : partant egaux. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

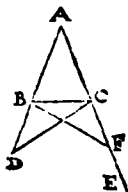
Nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generale, estans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques; si est-ce toutesfois que cela n'aduiert pas en toutes propositions, comme on peut voir en nostre traité des triangles spheriques, c'est pourquoy nous estendrons toutes ces propositions seulement aux triangles rectilignes, encorés qu'Euclide ne les specifice.

THEOR. 2. PROP. V.

Les triangles Ifofceles, ont les angles sur la base egaux : & les costez egaux

estans continuez, les angles extérieurs sous la base sont egaux.

Soit le triangle Iſoscele ABC : le dis que les angles ABC , & ACB , sur la base BC , sont egaux.



Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC , costez egaux iusques en D & E : & soit fait AF egale à AD par la troisieme proposition, & soient menées les lignes BF & CD . Les deux triangles ADC , & AFB , ayans l'angle A commun, ont les deux costez AD & AC egaux aux deux costez AF & AB , chacun au sien; & par la quatrieme proposition, la base BF sera egale à la base CD , & l'angle ABF egal à l'angle ACD , & l'angle D egal à l'angle F . Item les triangles DCB , & FCB , ayant l'angle D egal à l'angle F , & les deux costez DB , & DC egaux aux deux costez CF & FB : (car BF a esté prouué tantost egal à DC ; & AD , AF estans egaux; & AB , AC aussi egaux; les restes BD , & CE seront aussi egaux) par la quatrieme proposition la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien : ſçauoir l'angle BCD , sera egal à l'angle CBF . Et qui des angles egaux ABF & ACD , oste les angles egaux CBF , & BCD ; les demeurans ABC , & ACB , seront egaux.

Pour la ſeconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles extérieurs sous la base BC , sont egaux, ſçauoir DBC à ECB , elle a esté ſuffiſamment demonſtrée, lors qu'on a prouué que les triangles DBC , & ECB , auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Iſosceles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

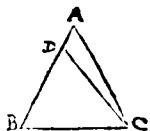
Cette proposition est aussi vraie és triangles equilateraux: Car les deux costez AB , AC du triangle ABC estans egaux entr'eux, ou l'autre costé CB , est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arrive au triangle Isocele; Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC , sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux; comme il appert par la demonstration cy dessus.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles seront aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle ABC , duquel les deux angles ABC , & ACB sur la base BC sont egaux: Je dis que les deux costez AB & AC qui soustendent les angles egaux sont aussi egaux.

Autrement soit AB plus grand que AC , s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie égale à C par la troisiéme proposition: soit icelle BD égale à AC , & soit menée la ligne DC : ainsi les triangles DBC , & ACB , ont les deux costez BD & BC egaux aux deux costez AC , & CB , & l'angle B egal à l'angle ACB , & par la quatriéme proposition ils



seront egaux ; ce qui est impossible : car l'un est partie de l'autre. Donc les costez AB , & AC n'estoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

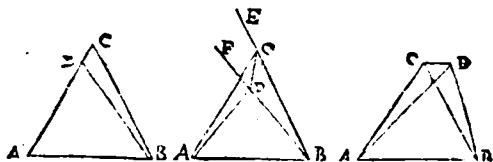
Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle equiangle, c'est à dire qui a tous les angles egaux, est equilateral: Car par ce qui a esté icy demonstté, les angles ABC , ACB estés egaux, les deux costez AB , AC , seront pareillemēt egaux: Mais si les deux angles A & B estoient encore egaux, aussi les costez CA , CB subtendans iceux angles, seroient aussi egaux: & partant tous les trois costez AB , AC , BC egaux entr'eux, puis que les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.

T H E O R. 4. P R O P. VII.

Si des extremittez de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droictes, se rencontrant à vn poinct ; des mesmes extremittez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de mesme part, se rencontrant à vn autre poinct.

Soit la ligne AB , des extremittez de laquelle soient menées les deux lignes droictes, Ac & CB se rencontrant au poinct C : Je dis que des mesmes extremittez A & B , de la mesme part que c , on ne peut mener deux autres lignes droictes egales à icelles

AC, BC, chacune à la sienne, qui se rencontrent à vn autre point que c ; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC, & de l'extremité B, la ligne BD égale à BC, il ne peut estre que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.



Car si faire se peut que le point de rencontre D tombe ailleurs qu'au point C : ou iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC ; ou dans le triangle A c b ; ou hors iceluy.

Premierement iceluy point de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC : car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçauoir est la partie au tout : ce qui est absurde ; partant la rencontre D, ne se fera point sur AC ; ny sur BC, à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC : & apres auoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera isoscele, & par la cinquième proposition les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE ; & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE. De sechef puis que les lignes BC, BD,

BD , sont posées égales, le triangle $CD B$ doit estre Isoscele; & partant les angles $CD F$ & $DC E$ sous la base DC seront égaux par la cinquième proposition. Mais il a esté démontré que l'angle $CD F$ est beaucoup moindre que l'angle $DC B$: donc le mesme angle $CD F$ est moindre que l'angle $DC E$, & aussi égal à iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D , hors iceluy triangle $AC B$, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD , il s'ensuiura que les deux triangles ADC & $BC D$ seront Isosceles; & partant qu'ils auront les angles sur la base CD égaux: sçauoir est ACD à ADC , & $BC D$ à BDC . Mais iceluy BDC est plus grand que ADC : donc aussi BCD est plus grand que ACD ; c'est à dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC , ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C : Parquoy si des extremittez de quelque ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonst.

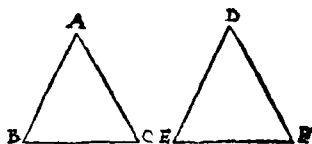
SCHOLIE.

Donnot a traduit ceste proposition ainsi. Si deux lignes droictes menées des extremittez d'une autre ligne droicte se rencontrent en un poinct, & des mesmes extremittez on en mene deux autres égales aux deux premieres, elles se rencontreront au mesme poinct, pourueu que chacune soit du costé de son égale. Ce qui est fort esloigné de l'intention d'Euclide: car il ne dit pas que les deux lignes se rencontreront (chose qui est euidentement fausse, veu qu'infinites lignes peuvent estre menées, comme dis est, lesquelles ne se rencontreront pas) mais bien que si elles se rencontrent, ce sera au mesme poinct que les premieres.

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base egale à la base; ils auront aussi l'angle egal, compris d'iceux costez egaux.

Soient deux triangles ABC , DEF , desquels le costé AB , est egal à DE ; AC à DF , & la base BC à la base EF : Je dis que les angles A & D compris d'iceux costez egaux, sont egaux.



Car puis que la base BC est egale à la

base EF ; si on entéd icelles estre posées l'une sur l'autre, elles cōuiendront tōbant le point E sur le point B ; & F sur C : & par la 7. prop. les deux lignes ED & FD , qui sont egaux à BA & CA , se rencōtreron au point A , & cōuiendront avec icelles lignes BA & CA : partant conuiendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. comm. sent. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

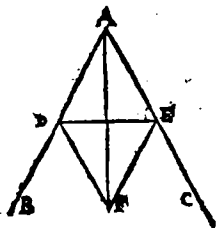
Puis que la base EF conuiens avec la base BC , & les costez DE , DF conuiennens aussi avec les costez AB , AC ; il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D ; mais qu'also l'angle E est egal à l'angle B , & l'angle F , egal à l'angle C , & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Couper en deux également vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC , lequel il faut couper en deux également ; c'est à dire en deux angles egaux entr'eux.

Soit de AB & AC retranché deux parties egales AD & AE : & apres auoir mené la ligne DE , sur icelle soit décrit le triangle equilateral DEF par la premiere prop. & soit menée la ligne AF : le dis que icelle ligne coupe l'angle BAC en deux également.



Car les lignes AD & AF du triangle DAF estans egales aux deux lignes AE & AF du triangle EAF , & la base DF egale à la base EF , (estant DFE triangle equilateral) par la 8. proposition, l'angle DAF sera egal à l'angle EAF : & partant l'angle BAC est coupé en deux également. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la pratique de ceste propost. en nostre Geometrie pratique Prob. 5. Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi couper vn angle rectiligne en quatre parties egales, en huit, en seize, en trente-deux, & ainsi consecutiuement, en procedant toujours par augmentastion double.

D ij

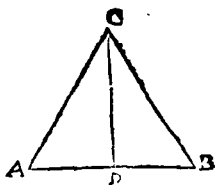
*Car apres qu'un angle rectiligne est couppe en deux egale-
ment, si on diuise derechef chascune partie en deux egale-
ments, on aura quatre angles egaux. Que si on coupe derechef chacun d'e-
ux en deux egale-ments, nous aurons huit angles egaux, &
ainsi consequemment.*

PROBL. 5. PROP. X.

Coupper en deux egale-ment vne ligne
droicte donnee & terminee.

Soit la ligne droicte donnee & terminee AB : la-
quelle il faut coupper en deux egale-ment.

Soit sur icelle ligne con-
struit le triangle equilateral
 ACB par la 1. propos. & par la
precedente prop. soit l'angle
 C couppe en deux egale-ment
par la ligne CD : le dis que CD
coupe AB en deux egale-
ment en D .



Car puis que les angles du poinct C sont egaux, &
le triangle ACB est equilateral, les deux triangles
 ACD , & BCD , ont deux costez egaux à deux costez,
chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi
egaux; partant par la 4. prop. la base AD sera egale à la
base DB . Donc AB est couppee en deux egale-ment en
 D . Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

*Nous auons enseigné la pratique de cette proposition en no-
stre Geometrie pratique Prob. 1. Or il appert par ce que des-
sus qu'on peut aussi coupper vne ligne droite finie en quatre*

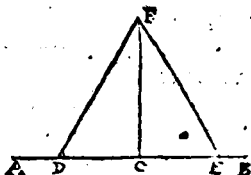
parties egales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droite terminée en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement que mechantiquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnée, & d'un point en icelle, esleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnée AB , & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB .

Soient du point C prises les deux lignes egales CD & CE par la troisieme proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DEF , & de C à F soit menée la ligne CF : le dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandée.



Car les triangles DFC & CFE ayans deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, sçauoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF egale à la base EF , à cause que le triangle DEF est equilateral; par la huitième proposi. les angles au point C , contenus des costez egaux, seront egaux: & partant par la dixième definition, ils sont dix droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB , ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E .

La pratique, tant de cette proposition que de la suivante enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. où l'apprenny trouuera soulagement à quelque doute qui luy peuent arriner en la pratique de ceste proposition.

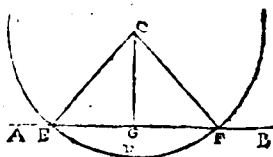
PROBL. 7. PROP. XII.

Abaïsser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminée, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droicte donnée & interminée AB , & le point hors icelle C , duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB .

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D ; puis du centre C , & intervalle CD , soit descrite le cercle EDF , couppant la ligne AB es points E & F ; puis par la 10. prop. soit couppée EF en deux egalem. au point G , & soit menée la ligne CG , laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB .

Car estans tirées les lignes droictes CE , CF ; les deux costez EG & GC du triangle EGC , seront egaux aux deux costez FG , & GC du triangle FGC , yn chacun au sien, & la base CE est egale à la base CF , estans icelles tirées du centre C vers la circonférence, & par la 8. prop. les angles du point G seront



egaux; & partât par la 10. definit. ils seront droicts, & la ligne CG perpendicul. à AB. Ce qu'il falloit faire.

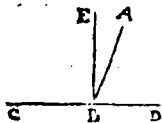
SCHOLIE.

Au lieu de prendre le point D, de l'autre costé de la ligne AB, Donnons dit qu'on le prenne à l'adventure dans icelle AB, & que descrivant vn cercle du centre C & intervalle CD, il couppera la ligne AB: coqui n'est pas vniuersellement vray, car il est manifeste que si le point D estoit pris d'adventure en G, le cercle ne coupperoit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le point D ne doibt donc estre pris à l'adventure dans la ligne AB, comme veut Donnott.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles; ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD, fait les angles CBA, & DBA: le dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.



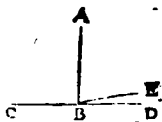
Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droicts par la 10. deff. Si elle ne l'est pas, soit leuée la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droicts par la susdite definition: mais les deux angles CBA & DBA ensembles, occupent autant

d'espace qu'iceux angles droicts CBE , DBE , & contiennent avec eux: Donc par la 8. commune sentence CBA & DBA seront egaux à deux droicts. Parquoy si vne ligne droicte tombante sur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à l'extremité d'une ligne droicte se rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles egaux à deux droicts; icelles lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne AB à l'extremité de laquelle B se rencontrent deux autres lignes droictes CB & DB , faisant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: le dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que $CB D$ est vne ligne droicte.



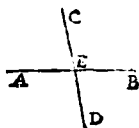
Autrement, si $CB D$ n'est ligne droicte, soit continuée CB directement, tant qu'il sera de besoin: ce qui sera adiousté à CB directement, ou bien tombera au dessous de BD , ou au dessus: soit au dessus, & soit CBE , ligné droicte; les deux angles ABC , & ABE , seront donc egaux à deux droicts par la 13. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droicts, & par la 10. com. s'ent. tous les angles droicts sont egaux entr'eux: donc par la premiere commune sentence, ces deux angles ABC , & ABD seront egaux aux deux ABC , & ABE .

Parquoy ostant l'angle commun ABC , les restans ABD , & ABE , seront egaux, le tout à la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte CB , estant prolongee, elle ne tombera pas au dessus de BD : mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité: donc CB , & DB , se rencontrent directement. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB , & CD , se coupans l'une l'autre au point E : Je dis que les angles opposez au sommet AEC , & DEB , sont egaux.



Car d'autant que sur AB , tombe la ligne CE , les angles AEC , & BEC , sont egaux à deux droicts par la 13. proposition. Item pour la mesme raison CEB , & DEB , seront egaux à deux droicts: parrant les deux AEC , & CEB , sont egaux aux deux CEB & DEB . Que si on oste le commun CEB , le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB . Le mesme se peut dire des deux AED , & CEB . Parquoy si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

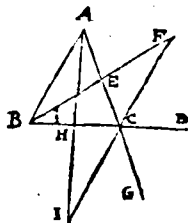
Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes

s'entrecoupant, font au point de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'un seul & mesme point, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E on meine tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituez au point E, en plusieurs parties : toutes lesquelles prises ensemble seront egales aux quatre angles d'iceluy point, c'est à dire à quatre droicts.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'un triangle estant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des opposez interieurement.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D. Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé interieur BAC, ou que ABC, autre opposé interieur.



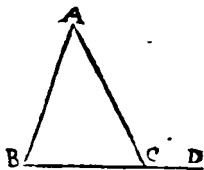
Qu'ainsi ne soit: Apres auoir couppe AC en deux egalemēt en E, soit menée la ligne BE continuée iusques en F, & soient faites BE & EF egales, & soit mennee FC. Les deux triangles AEB, & CEF, auront les deux costez AE & EB egaux aux deux costez CE & EF par la construction, & par la precedente proposition l'angle AEB est egal à l'angle CEF: donc par la quatriesme proposition les bates AB, & EC seront egales; & les autres angles egaux, chacun au sien: & partāt l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF,

qui n'est que partie de l'angle ACD , lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé BAC . Que si le costé AC est prolongé en G , & BC coupé en deux également en H , & on tire la ligne AH , tellement que HI soit égale à AH , & soit menée CI : On démontrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG , est plus grand que l'interne & opposé ABC . Mais par la proposition précédente à iceluy BCG , est égal l'externe ACD : donc iceluy ACD , est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC . Parquoy en tout triangle vn costé estant prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils soient pris.

• Soit le triangle ABC : Je dis que les deux angles B , & ACB , sont plus petits que deux droicts: Item les deux B , & ACB : item les deux A , & B .

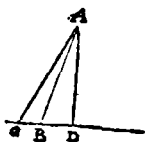


Car apres auoir continué le costé BC , iusques en D ; Il est euident par la 16. proposition que l'angle extérieur ACD , est plus grand que l'opposé intérieur B . Mais les deux ACD , & BCA , sont égaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant ABC , & BCA , sont plus petits que deux droicts. On démontrera pareillement que les angles A & ACB : Item les angles A & B , en prolongeant

vn autre costé, sont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'un mesme poinct on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur une ligne droite. Car si faire se peut, soient menées de *A* sur la ligne droite *BD*, les deux perpendic. *AD*, *AB*. Donc au triangle *ABD*, les deux angles internes *ABD*, *ADB*, seront egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible : Car il a esté demonst. icy-dessus que deux angles d'un triangle sont moindres que deux angles droicts.



Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté demonst. que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droicts, il est necessaire que s'il y en a vn droit ou obtus, celuy qu'on vaudra des deux autres, soit aigu : car autrement en vn triangle seroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'ensuit encore de ceste prop. que si une ligne droite, *AB*, fait avec une autre ligne droite *CD*, angles inegaux, sçavoir est *ABD*, aigu, & *ABC*, obtus, & de quelconque poinct d'icelle *AB*, on tire une perpendiculaire sur *CD*, comme *AD* : icelle perpendiculaire *AD*, tombera de la part de l'angle aigu *ABD*. Car qu'elle tombe, s'il est possible, du costé de l'angle obtus *ABC*. Donc au triangle *ABC*, les deux angles *ABC*, *ACB*, obtus & droit, sont plus grands que deux droicts ; mais aussi moindres que deux droicts par ce-

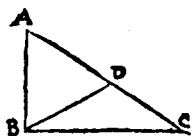
ſe prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tirée de *A*, ne tombera donc pas du coſté de l'angle obtus, & partant tombera du coſté de l'angle aigu.

Eſt encore manifeſte par ceſte prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de deſſus la baſe d'un triangle Iſoſcele, ſont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils ſoient, d'un triangle equilateral, & les deux de deſſus la baſe d'un Iſoſcele ſont égaux entr'eux par la 5. prop. & ſans ces deux cy enſemble, que ces deux là, ſont moindres que deux droicts par ceſte propoſition, chacun d'eux ſera moindre qu'un droict, c'eſt à dire aigu: car ſ'il eſtoit droict ou obtus, ſous les deux enſemble ſeroient, ou égaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVII.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle:

Soit le triangle donné *ABC*, duquel le coſté *AC* eſt plus grand que le coſté *AB*. Je diſ que l'angle *ABC*, eſt plus grãd que l'angle *ACB*.



Qu'il ne ſoit ainſi: Puis que *AC* eſt plus grand que *AB*, ſoit d'iceluy retranché *AD*, égal à *AB*, & ſoit mené *BD*. Le triangle *ABD*, eſt Iſoſcele, & par la 5. prop. les deux angles *ABD*, & *ADB*, ſur la baſe *BD*, ſeront égaux. Or l'angle extérieur *ADB*, eſt plus grand que l'oppoſé intérieur *C*, par la 16. propoſ. Mais *ABC*, eſtant plus grand que *ABD*, il ſera auſſi plus grand que ſon égal *ADB*: & à plus forte raiſon *ABC*, ſera plus grand que *C*. Par meſme

raison, si on pose le costé AC, plus grand que le costé BC; on démontrera l'angle ABC estre plus grand que l'angle BAC, sçavoir est, si de CA on coupe vne ligne egale à CB, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, soustient le plus grand angle: Ce qu'il falloit demonstrier.

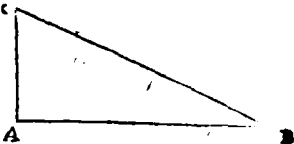
COROLLAIRE.

Il est donc manifeste par ceste demonstration que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inegaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC qui soustient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB, qui soustient un moindre angle C.



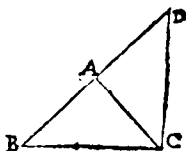
Autrement, il sera egal, ou plus petit. Il ne peut estre egal, d'autant que le triangle seroit isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C, seroient egaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi estre plus petit, d'autant que par la 18. pro. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par mesme railon on prouuera le costé BC, estre plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, estre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé: Ce qu'il falloit demonstrier.

Il s'ensuit de ceste proposition, que si de quelcōque poinct on tire sur une ligne droicte tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toujours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux costez de quelle façon qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisieme.

Soit le triangle A B C. Je dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçavoir est A B, & A C, sont plus grands ensemble que le troisieme B C.

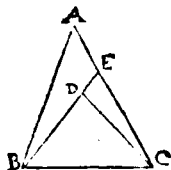


Qu'il ne soit ainsi : apres auoir prolongé B A iusques en D, & fait A D egal à A C, soit menée la ligne D C. Le triangle D A C. sera Isoscele, & par la cinquiesme propos. les deux angles A D C & A C D sur la base D C, seront egaux. Mais D C B est plus grād que D C A : aussi sera-il plus grand que son egal A D C : & partant par la 19. prop. B D sera plus grand costé que B C. Mais B D est egal aux deux costez A C & B A : donc iceux A C & B A seront plus grāds que B C. On demonstrea en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grands que l'autre. Parquoy deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre : Ce qu'il falloit demonstrea.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremittez d'un costé de quel-
que triangle, on mene deux lignes
droictes se rencontrans au dedans
d'iceluy ; icelles seront plus petites
que les deux autres costez du trian-
gle, mais elles feront un plus grand
angle.

Soit le triangle ABC , & des
extremittez du costé BC , soient
menées interieurement deux li-
gnes, BD , CD , se rencontrans
au point D : Je dis qu'icelles li-
gnes sont plus petites que BA ,
& CA : Mais que l'angle D , est
plus grand que l'angle A .



Qu'ainsi ne soit, soit continuée BD , iusques au
point E . Donc par la 20. proposition les deux co-
stés BA , & AE , du triangle BAE , seront plus grâds
que le troisieme BE . Que si à BA , & AE , plus
grands que BE , on adjouste chose commune EC ,
les touts CE , EB seront tousiours plus petits que les
touts CE , EA , AB , c'est à dire CA , AB . Pareillement
les deux costés CE , & ED , du triangle CED , sont
plus grands que le troisieme CD , auxquels si on ad-
jouste chose egale, sçavoir DB ; les touts CE , ED ,
 DB , ou CE , EB seront tousiours plus grands que
les touts CD , & DB . Mais il a esté demonsté que
 CA ,

CA, AB sont plus grands que CE, EB : donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

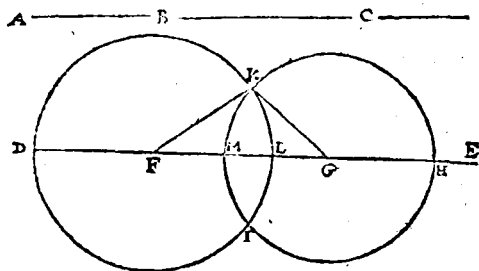
Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle D est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est extérieur au triangle CED, il sera plus grand que son opposé intérieurement CED par la 16. prop. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé intérieurement A : donc à plus forte raison D sera plus grand que A. Si d'oc des extremités d'un costé de quelque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes, egales à trois autres donnees : mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles soient prises, soient plus grâdes que l'autre : D'autant que de tout triangle, les deux costez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, desquel-
les deux de quelle façon qu'elles soient prises sont plus grandes que la troisieme: car autrement d'icelles on ne pourroit pas constituer vn triangle comme il appert de la 20. pr. en laquelle il a esté demonst-
ré que de tout triangle deux costez sont tousiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle d'icelles, ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droicte, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchée DF, egale à A; & puis du reste soit prise FG egale à B, & GH egale à C: & soit descript vn cercle du centre F & interval FD: Item vn autre cercle du



centre G, & interval GH, coupant le premier cercle au point K, duquel soient menees les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG sont egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

Car FD, FK estans egales par la deff. du cercle: item GK & GH; il est euident que les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH lesquelles estans egales aux donnees, aussi les costez du triangle seront egaux aux lignes donnees. Nous auons donc fait vn triangle de trois lignes droictes, egales aux trois lignes droictes donnees A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

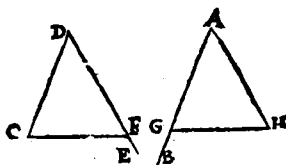
SCHOLIE.

La pratique tant de ce prob. que du suiuant, est enseignee en nostre Geometrie pratique, Prob. 11. & 4.

PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnee, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB : & le poinct en icelle A , sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné CDE .



Ayant pris és lignes CD, DE quelcōques poincts C & F , soit menee la ligne CF : & sur AB soit construit par la prop. precedente le triangle AGH , ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDF , sçauoir est les deux costez GA, HA , aux deux costez CD, FD , & la base GH à la base CF . Il est euident par la 8. prop. que l'angle A sera egal à l'angle D donné. Nous auons donc fait sur AB l'angle GAH egal à vn donné CDE , ainsi qu'il estoit requis.

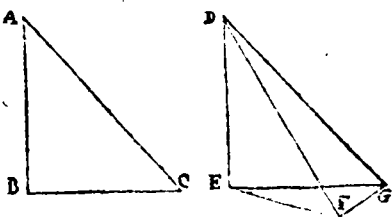
THEOR. 15. PROP. XXIII.

Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle cōtenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les deux costez AB ,

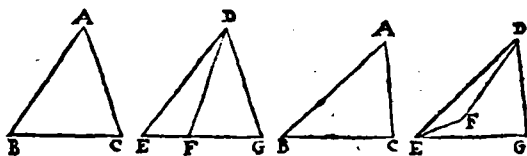
AC sont egaux aux deux costez DE , DF , chacun au sien: mais l'angle A est plus grand que l'angle EDF . Je dis

que la base BC est plus grande que la base EF .



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE , & au point D , soit fait par la precedente prop. l'angle EDG egal à l'angle A ; (& la ligne droite DG tombera hors le triangle DEF , puisque l'angle EDF a esté posé moindre que l'angle A) & soit posée DG , egale à DF , c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG , laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF , ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF , & soit tirée la ligne FG : D'autant que les deux costez AB , AC , sont egaux aux deux costez DE , DG , vn chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction: la base BC sera egale à la base EG , par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF , DG , sont egaux entr'eux: les angles DFG , DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF : donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le mesme angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le mesme angle EGF . Donc au triangle EFG , le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a esté démontré que EG est egale à BC : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui estoit proposé.

Maintenant que EG tombe sur icelle EF : d'au-



tant que comme dessus la base EG, sera egale à la base BC par la 4. prop. & EG est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : ce qui estoit proposé.

En troisieme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que les deux DG EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF : donc EG est plus grãde que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

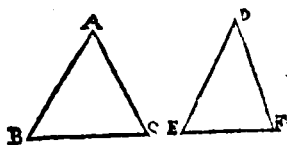
THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les deux costez AB & AC , sont egaux aux deux DE & DF , chacun au sien : Mais la base BC est plus grande que la base EF .

Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D .

Autrement il sera egal, ou plus petit. Mais il ne peut estre egal : d'autant que par la 4. proposition, les bases



BC & EF seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peut estre plus petit; d'autant que par la vingt-quatriesme proposition la base BC seroit plus petite que la base EF ; & elle a esté posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D , puis qu'il ne peut estre egal, ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

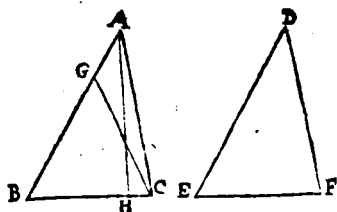
THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçavoir est, ou celui aux extremittez duquel sont les angles egaux, ou

bien celuy qui soustient l'un d'iceux angles egaux : ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF , desquels les angles B , & ACB , sont egaux aux deux E , & F , chacun au sien, &

soit premierement le costé BC , aux extremittez duquel sont les angles B , & ACB , egal au costé EF , aux extremittez duquel sont les angles E & F . Je dis que les deux autres costez

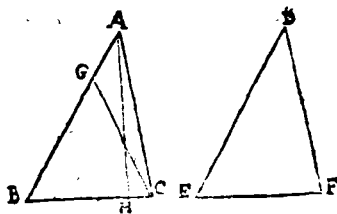


AB , AC , sont egaux aux deux autres costez DE , DF , chacun au sien, sçavoir est AB à DE , & AC à DF . Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D .

Car si AB n'est egal à DE , soit AB plus grand, duquel soit retranché BG egal à DE : puis soit tirée la ligne droite CG . Donc puis que les costez BC , BG , sont egaux aux costez EF , DE , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E , par la 4. prop. la base CG sera egal à la base FD , & les autres angles egaux

aux autres angles, chacun au sien, c'est à sçavoir que l'angle $B C G$ sera egal à l'angle F , auquel est aussi egal l'angle $A C B$ par l'hypotese. Partant les deux angles ACB

& $G C B$ seroient egaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé $A B$ n'estoit pas inegal au costé DE , mais egal. Parquoy veu que les



costez AB, BC sont egaux aux costez DE, EF , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E ; la base AC sera egale à la base DF , & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D , par la 4. prop. de ce liure. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant egaux deux autres costez, sçavoir est AB à DE soustendans angles egaux ACB & F . Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont egaux aux deux autres costez DF, EF , chacun au sien, c'est à dire AC à DF , & BC à EF : & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D . Car si le costé BC n'est egal au costé EF , soit le plus grand BC , duquel soit coupé BH egal à EF , puis tiré la ligne AH . Donc puis que les costez AB, BH sont egaux aux costez DE, EF , vn chacun au sien, & l'angle B est egal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera egal à l'angle F . Mais par l'hypothese l'angle ACB est aussi egal à l'angle F . Donc l'angle AHB sera aussi egal à l'angle ACB , l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde: car il est plus grand par

la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains egal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux costez DE, EF, chacun au sien, & par la 4. proposition, l'angle B estant egal à l'angle E, les bates AC, DF, seront egales, & les autres angles BAC & D aussi egaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

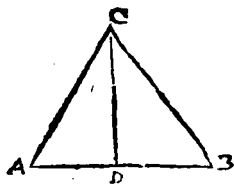
SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez vtils & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou isoscele, estant menée vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egaleement, ou l'angle ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle coupe l'angle en deux egaleement, elle couppera aussi la base en deux egaleement: Mais si elle coupe en deux egaleement la base, elle couppera pareillement l'angle en deux egaleement. Et au contraire estant tirée vne ligne droicte perpendiculaire à la base, elle diuise en deux egaleement, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez egaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuise premierement l'angle C en deux egaleement. Je dis qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la diuise en deux egaleement. Car puis que les deux costez AC, CD, sont egaux aux deux costez BC, CD,

Et les angles qu'ils contiennent aussi egaux, par la quatrième proposition, les bases AD , BD seront aussi égales, Et les angles au point D egaux, Et partant droicts.



Que si la ligne droite CD diuise en deux également la ligne AB : ie dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB , Et que l'angle C est couppe en deux également. Car puis que les deux costez AD , BD sont egaux aux deux costez BD , DC , Et la base AC egale la base BC , par la 8. prop. les angles du point D seront egaux Et partant droicts, Et la ligne CD perpendiculaire, Et par le corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi egaux.

Maintenant soit la ligne droite CD perpend. à AB : ie dis qu'elle coupe aussi la base BA , Et l'angle C en deux également. Car par la 5. pro. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont egaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , vn chacun au sien, Et le costé C D opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26. propos. les autres costez AD , BD seront aussi egaux, Et les autres angles à C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

Le second Theoreme est tel.

Le triangle auquel vne ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, diuise ou la base ou l'angle en deux également, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est diuisée en deux également, l'angle sera aussi diuisé en deux également: Mais si l'angle est diuisé en deux également, aussi sera la base diuisée en deux également.

Au mesme triangle ABC , soit CD perpendiculaire à la base AB , Et la diuise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, Et les angles à C aussi egaux. Car par

que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçavoir droicts, par la 4. propos. les bases AC, BC , & les angles à E seront pareillement egaux.

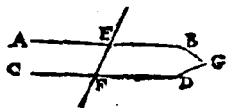
Maintenant que la perpendiculaire CD coupe en deux également l'angle C : ie dis que les costez AC, BC ; & les lignes AD, BD sont egaux: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux costez AC, BC , & les costez AD, BD seront egaux: Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes fait les angles opposez alternatiuement egaux; icelles deux lignes seront paralleles entre-elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD , sur lesquelles tombant la ligne droicte EF fait les angles BEF , & EFC alternatiuement egaux. Ie dis que AB & CD sont paralleles.

Car si elles ne sont paralleles, estans continuées, elles se rencontreront. Que si elles se rencontroient comme au point G , elles feroient vn triangle avec le costé EF , & l'angle extérieur CFE seroit plus grand que l'opposé intérieur FEB , par la seizième proposition; ce

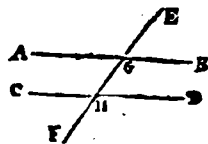


qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes A & C D ne se rencontreront iamais; & par la 25. de icelles lignes seront paralleles entr'elles. Par quoy vne ligne droicte tombante sur deux lignes droictes &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, fait l'angle exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé; ou bien les deux interieurs de mesme costé, egaux à deux droictes icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes A B & C D, sur lesquelles tombant vne autre ligne droicte E F, elle fait l'angle exterieur E G A egal à G H C son opposé interieur de mesme costé. Je dis que A B & C D sont paralleles entre-elles.



Car puis que l'angle G H C est posé egal à l'angle E G A, auquel est aussi egal l'angle B G H par la quinzième proposition, les angles alternes B G H, G H C, seront egaux par la premiere commune sentence: partant les lignes A B, C D seront paralleles par la proposition precedente. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux an-

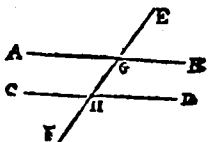
gles intérieurs de mesme costé AGH , & CHG sont égaux à deux droicts, que aussi AB & CD seront paralleles. Car par la trezième proposition, les deux angles GHC & GHD sont égaux à deux droicts; partant aussi égaux aux deux AGH & GHC . Que si d'iceux angles égaux, on oste le commun GH , les demeurans AGH & GHD se trouueront alternativement égaux, & par la vingr-septième proposition AB & CD seront paralleles. Si donc vne ligne droite tombant sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droite tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles opposez alternativement égaux; & l'exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé égaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD , (en la figure de la precedente proposition) sur lesquelles tombe la ligne droite EF . Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternativement sont égaux. Autrement s'ils ne sont égaux, l'un sera plus grand, ou plus petit que l'autre: Soit donc AGH plus petit s'il est possible, que GHD : & si à iceux angles inégaux on a adjousté chose

comm. ſçauoir l'angle GHC , les deux AGH & GHC ſeront plus petits que les deux GHC & GHD , lesquels par la 13. propoſit. eſtans egaux à deux droicts, AEN & GHC ſeront plus petits que deux droicts, & par la penultième, com.



ſent. les deux lig. AB & CD ne ſont point paralleles: ce qui eſt cõtre noſtre hypothèſe. Dõc il falloit que l'ang. AGH fuſt egal à l'ang. GHD ſon alterne oppoſé.

Pour la ſeconde partie. Je diſ que l'angle extérieur EGB eſt egal à ſon oppoſé intérieur de meſme coſté GHD : ce qui eſt manifeſte par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, ſçauoir que les angles AGH & GHD eſtoient egaux, eſtant auſſi EGB egal à AGH par la 15. propoſ. & par la 1. com. ſentence EGB & GHD ſeront egaux: eſtans tous deux egaux au meſme AGB .

Pour la troiſième partie: je diſ que les deux intérieurs de meſme coſté AGH & GHC ſont egaux à deux droicts: car ſ'il eſtoit autrement les lignes AB & CD ne ſeroient paralleles par la penultième commune ſentence, contre l'hypothèſe. Si donc vne ligne droite tombe ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

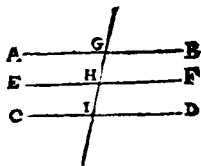
Les lignes droictes paralleles à vne meſme ligne droite, ſont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB , CD paralleles à vne meſme ligne droite EF . Je diſ que AB & CD ſont

paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB , EF , CD , sont posées en vn mesme plan, soit tirée la ligne droite CHI , qui les coupe toutes trois, sçauoir

est AB en G ; EF en H ; & CD en I . Et puis que AB est posée parallele à EF , les angles alternes AGH , GHE , seront egaux entr'eux par la precedente proposition. Dere-



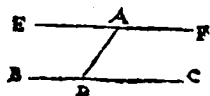
chef, puis que CD est aussi posée parallele à la mesme EF , l'angle DIH sera aussi egal au mesme angle GHE , c'est à sçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DIH seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralleles entr'elles, par la vingt-septième proposition. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droite sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 10. PROP. XXXI.

D'un poinct donné, mener vne ligne droite parallele à vne ligne droite donnée.

Soit le poinct donné A , duquel faut mener vne ligne parallele à la donnée BC .

Soit menée la ligne AD faisant avec BC l'ang. ADC , & sur



icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallèle à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront parallèles entr'elles par la vingt-septième proposition. Nous auons donc d'un point donné A, mené une ligne droite EF parallèle à une droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

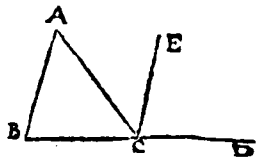
SCHOLIE.

Il est manifeste par ceste construction, que le point donné doit estre tellement situé hors la ligne donnée, qu'icelle estant continuée ne conuienne avec iceluy. Quant à la pratique de ceste proposition, nous l'auons enseignée en nos Memoires Mathématiques, Probl. 6. de la Geometrie pratique.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Entout triangle, l'un des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez intérieurs : & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont égaux à deux droicts.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé jusques en D. Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux opposez intérieurs A & B.



Qu'il

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mene CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les paralleles AB, EC , par la 29. pro. les angles BAC , & ACE , seront alternativement egaux: item l'exterieur ECD sera egal à son opposé interieur ABC . Partant il est manifeste que le total ACD , est egal aux deux $A \& B$, opposez interieurement.

Pour la seconde partie, que les trois angles $A, B \& C$ interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droicts, il est evident, estant ACD egal aux deux $A \& B$. Mais $ACD \& ACB$, sont ensemble egaux à deux droicts par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs $A, B \& ACB$, seront aussi egaux à deux angl. droicts. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

De ceste proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droicts sont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne: & ce par deux manieres, dont la premiere est celle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il celle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois un droict, c'est à dire à deux droicts: Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois deux droicts, sçavoir est à quatre droicts: Mais ceux de la troisieme figure, sont egaux à deux fois trois droicts, c'est à dire à six droicts; & ainsi des autres. Or le lieu qu'occupent chascune figure rectiligne entre les figures rectili-

gnes, est monstré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas vne superficie, & par consequent ne cōstituent vne figure: mais sont requises au moins trois lignes droictes pour construire vne figure rectiligne; d'où vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste vn: ainsi la figure ayans douze costez, ou douze angles, sera la dixième figure, puis que deux estans ostez de douze, restent dix: & ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenüe de douze costez, est la dixième, elle aura aussi douze angles equiuallens à vingt angles droicts, c'est à sçauoir à deux fois dix angles droicts: Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenüe de dix costez, equiuallent à seize angles droicts, puis qu'icelle figure est la huitième en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantième en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou de costez, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera diuisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux: le Pentagone en trois; &c. Ven donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposée, & sous

les angles de quelcōque triangle sont egaux à deux droicts; il est manifeste



que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont e-

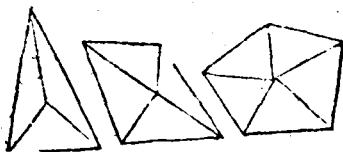
gaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'est le nombre des triangles esquels elle se dinise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure est quantième en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est ven manifestement es figures cy deuant proposées.

Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre estans ostez, qu'il y a en icelles d'angles, ou de costez.

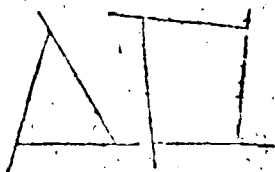
C'est à dire, que les angles de chaque triangle sont egaux à deux fois trois droicts, quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droicts: Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, sçavoir est vingt angles droicts, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chaque triangle par la trenie-deuxième prop. sont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles, sont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: & pariant si on oste ces angles là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le point pris estans ostez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais

tous ces angles là d'alentour le point pris, sont seulement egaux à quatre droicts, ainsi que nous l'auons colligé de la quinzième proposition. Parquoy les angles de quel-



conque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.

Or il appert de ce que dessus, que si chascun costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers une mesme part, tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la treizième proposition, les angles intérieurs pris avec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles intérieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons monstté cy dessus parant les exterieurs sont tousiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles intérieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droicts: comme il appert en ceste figure.



Mais par la trente-deuxième proposition, les internes seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls exterieurs seront egaux à quatre droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs & les intérieurs ensemble, sont egaux à huit droicts. Mais les intérieurs seuls sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstté: les exterieurs seuls seront donc aussi egaux

à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuvent estre
 vues es figures appostées cy deuant. Il y a la mesme raison
 en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.

COROLLAIRE.

Il resulte de ceste trente-deuxième proposition, que les
 trois angles de quelconque triangle pris ensemble, sont egaux
 aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble.
 Pour ce que tant ces trois là, que ces trois cy, sont egaux à
 deux droicts: D'où vient que si deux angles d'un triangle
 sont egaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième de
 l'un sera aussi egal au troisième de l'autre, & les triangles se-
 ront equiangles.

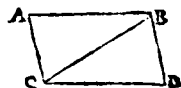
Il appert aussi que tout triangle Isocele, duquel l'angle
 compris par les costez egaux, est droict, à chacun des autres
 angles demy droicts. Car les deux restans ensemble font un
 droict, puis que par la trente-deuxième proposition, les trois
 sont egaux à deux droicts: & le troisième est posé droict.
 Parquoy puis que par la cinquième proposition les deux re-
 stans sont egaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droict.
 Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun
 des autres seroit moindre qu'un demy droict. Car les deux
 restans ensemble seront moindre qu'un droict, &c. Finale-
 ment si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plus
 grand qu'un demy droict. Pour ce que les deux restans en-
 semble, seront plus grand qu'un droict, &c.

Il est pareillement manifeste, que chascun angle d'un trian-
 gle equilateral, est les deux tierces parties d'un droict, ou la
 tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, aus-
 quels sont egaux les trois angles d'un triangle equilateral,
 diuisez en trois angles egaux, font les deux tierces parties
 d'un droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de mesme part, sont aussi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB , & CD , qui conjoignent de mesme part deux autres lignes AC & BD egales & paralleles. Je dis que AB , & CD , sont aussi egales & paralleles.



Qu'il ne soit ainsi : soit menée la diagonale BC . Icelle tombant sur les deux paralleles AC , & BD , fera les angles ACB & CBD alternativement egaux par la vingt-neufième proposition. Item AC , & BD estant egales, les deux triangles CAB & CBD , auront deux costez egaux à deux costez chacun sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, & par la 4. prop. la base AB sera egale à la base CD , & l'angle ABC sera egal alternativement à l'angle DCB , & par la 27. prop. icelles lignes egales AB , & CD seront aussi paralleles. Donc les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les costez, &

les angles opposez, sont egaux entre-eux ; & la diagonalle le coupe en deux egalement.

Soit le parallelogramme $ABCD$, en la figure de la proposition precedente. Je dis que le costé AB est egal à son oppose CD ; & aussi le costé AC egal au costé BD : Item que l'angle A est egal à son angle oppose D , & encore l'angle ABD egal à l'angle ACD : finalement qu'iceluy parallelograme $ABCD$, est coupé en deux egalement par la diagonalle BC .

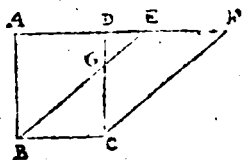
Car puis que la figure quadrilataire $ABCD$ est vn parallelogramme, le costé AB sera parallele au costé CD , & AC à BD , & par la 29. proposition, l'angle ABC sera alternatiuement egal à BCD . Item l'angle ACB alternatiuement egal à l'angle CBD . Ainsi les deux triangles BAC , & DCB auront les angles ABC , & BCA , egaux aux angles BCD & CBD , chacun au sien, & le costé BC commun à tous les deux susdits triangles : Et partant par la 26. prop. les autres costez AB & AC , seront egaux aux autres costez CD & BD , chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'angle D . Et si, il est euident que les deux angles du point B ensemble, seront egaux aux deux ensemble du point C . Encores par la 4. prop. les triangles ABC , & CDB , seront egaux ; & partant le parallelogramme $ABCD$ est coupé en deux egalement par la diagonalle BC . Donc en tout parallelogramme les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. xxxv.

Les parallelogrammes constituez sur
mesme base, & entre mesmes paralle-
les, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes ABCD, & BCFE,
tous deux sur mesme base BC, & entre mesmes pa-
ralleles AF, & BC. Je dis
qu'ils sont egaux.

Car par la trente-quatrié-
me proposition les costez
opposez des parallelo-
grammes estans egaux, AD
& BC seront egaux. Item
BC, & EF; & partant AD, &
EF egaux, auxquels si on ad-

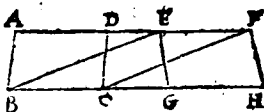


jouste la ligne commune DE; AE sera egale à DF.
Item AB est egale à DC, lesquelles estans paralle-
les, l'angle extérieur CDE sera égal à l'opposé in-
terieur EAB: & par la quatrième proposition les
triangles BAE, & CDF seront egaux: desquels si
on oste le triangle commun GDE, les demeurans
trapezes BADG, & CGEF, seront egaux: aus-
quels si on adiouste le triangle commun BGC, le
parallelogramme ABCD sera égal au parallelogram-
me BCFE: Donc les parallelogrammes constituez
sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont
egaux entr'eux: Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases égales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes ABCD, & EFGH, avans les bases BC, & GH égales, & entre les mesmes paralleles AF, & BH. Je dis qu'ils sont egaux.

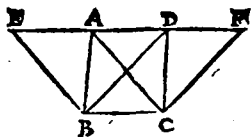


Qu'il ne soit ainsi : soient menées les deux lignes BE, CF; d'autant que BC est posée égale à GH, & que par la 34. prop. la mesme GH est égale à son opposée EF; les deux lignes BC, EF, seront égales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les conjoignent, seront aussi égales & paralleles par la 33. prop. & par conséquent BEFC sera un parallelogramme constitué sur mesme base, & entre mesmes paralleles que le parallelogram. ABCD; & par la 35. prop. ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH, estant sur mesme base EF, avec iceluy, & entre mesmes paralleles AF, BH: Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH, seront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC , & BDC , tous deux constituez sur la mesme base BC , & entre mesmes paralleles EF , & BC . Je dis qu'ils sont e-



gaux entr'eux. Car si on mene BE parallele à CA , & CF parallele à BD , seront accõplis les parallelog. $AEB C$, & $BCFD$, lesquels seront egaux par la 35. prop. Mais les triangles donnez ABC , & DBC , sont moitez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont coupeez en deux egale-ment par les diagonales AB, DC : donc aussi les trian-gles ABC & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouver.

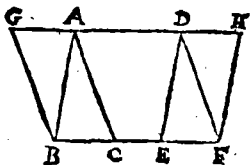
THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases ega-les, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF , constituez sur

bases egales BC , & EF , & entre mesmes paralleles GH , & BF . Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car apres avoir mené BG parallele à CA , & FH parallele à DE par la 31. prop. les deux parallelogram. $ACBG$, $DEFH$, estans constituez sur bases egales, & entre mesmes paralle-

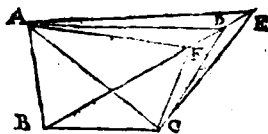


les, seront egaux par la 36. prop. aussi egales seront leurs moitez, sçavoir les triangles proposez ABC , & DEF par la 34. prop. estans les parallelogrammes coupez en deux egalement par les diagonales BA , & DF . Donc les triangles constituez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 29. PROP. XXXIX.

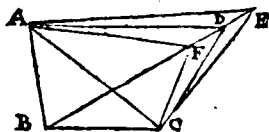
Les triangles egaux constituez sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC , & BCD constituez sur mesme base BC , & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mes-



mes paralleles, c'est à dire que si on mène la ligne AD , elle sera parallele à BC .

Autrement du point A, on en pourra mener vne autre qui sera parallele à B C (si A D ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou bien au dessus de A D, ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle A E, s'il est possible : & apres auoir continué B D iusques en E, & mené E C. Les deux triangles B A C, & B E C par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront egaux. Mais par l'hypothese B A C, & B D C sont aussi egaux; partant B E C, & B D C seroient aussi egaux, la partie au tout; donc A E parallele ne pouuoit tomber par dessus A D. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallele A F au dessous de A D : car ayant mené C F, il s'ensuiura que les triangles B F C, & B D C sont egaux, ce qui ne peut estre : Donc du point A on ne menera point d'autre ligne que A D parallele à B C. Parquoy les triangles egaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.



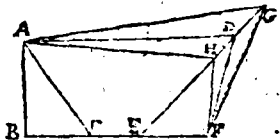
THEOR. 30. PROPOS. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales B C, & E F, & de mesme

part. Iedis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles; c'est à dire, que si on mene vne ligne droite de A en D, qu'icelle sera parallele à BF.

Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc pre-



mierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux, par la 1. com. sent. la partie au tout, ce qui est impossible: Partant la parallele menee du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuira si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF, & EDF se trouueroient egaux: donc du point A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux construez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 31. PROP. XLI.

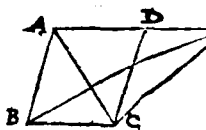
Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la mesme

PREMIER

C, que le triangle BCE, & tous deux en
es paralleles AE, & BC. Je dis que le para
ne est double du trian-

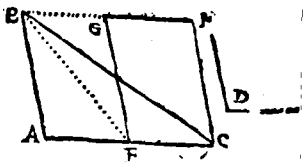
Car si on mene la diagonal-
le AC, le triangle ABC fera
la moitié du parallelogramme
ABCD par la 34. prop. lequel
fera egal au triangle BEC par la 37. prop. par
le parallelogramme qui est double de l'un, sera au
double de l'autre. Si donc vn parallelogramme
vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il fa
loit prouuer.



PROB. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn
triangle donné, ayant vn angle ega
à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle don-
né ABC, auquel il
faut faire vn paralle-
logramme egal, ayant
vn angle egal à l'an-
gle donné D.



Soit la base du tria-
gle AC coupee en
deux également en E, & fait l'angle CEG egal
l'angle D par la 23. proposition. Puis par la 31. prop.
soit menee de B, la ligne BF parallele à AC, laquel-
le coupe EG en G. De rechef de C soit menee CF
parallele à EG, rencontrant BF en F : & sera consti-

tué vn parallelogramme EGFC, lequel ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la prop. precedente, duquel est aussi double le triangle ABC iceluy estant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. prop. le parallelograme EGFC, & le triangle ABC seront donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallelogramme a l'angle CEG egal au donné D par la construction, nous auons construit vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E .

Pelletier adionste icy la conuerse de ceste proposition, qui est telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Et d'autant que nous auons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques, Prob. 14. nous n'en ferons icy repetition.

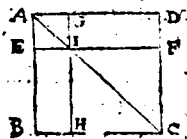
THEOR. 32. PROBL. XLIII.

En tout parallelogramme, les suppléments des parallelogrammes qui sont sur le diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelograme ABCD, son diametre AC,

à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEIG & IHCF. Je dis que les parallelogrammes GIFD & EBHI, qu'on appelle suppléments, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, sont egaux entr'eux : Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes



ABHI, ADFI. Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEI, AGI, partant si on les oste des trapezes, demeureront egaux les suppléments EBHI, GIFD : donc en tout parallelogramme les suppléments, &c. Ce qui estoit à prouver.

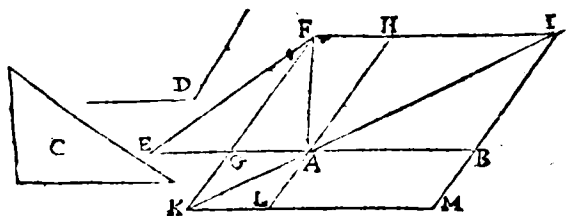
PROBL. 12 PROP. XLIII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn parallelogramme egal à vn triangle donne, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donne.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donne C, & l'angle rectiligne donne D. Il faut sur AB descrire vn parallelogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donne D.

Soit prolongee la ligne donnee AB iusques en E, tellement que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22. prop. le triangle AFE, ayant les costez egaux
aux

aux costez d'adix triangle donné C, lequel luy to.



aussi egal par le corol. de la 8. prop. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallelograme AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D : & apres avoir continué la ligne FH iusques en I, tellement que HI soit egale à AB, soit menée IA iusques à ce qu'elle rencontre FG prolongée en K : ce qui doit arriuer, n'estant IA parallele à FG, par la 11. com. sent. puis du point K, soit menée KM parallele à GB, iusques à ce qu'elle rencontre IB tirée en M : & finalement soit prolongée HA iusques à ce qu'elle rencontre KM en L le dis que le parallelogramme ABML est le requis.

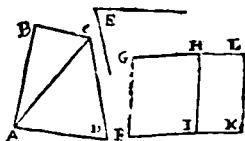
Cac il est constitué sur la ligne droicte donnée AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est egal à l'angle GAH, qui a esté fait egal à l'angle D : Finalement il est egal au triangle donné C, puis que par la 45. propos. il est egal au parallelogramme AHFG, lequel a esté fait egal au triangle AFE, ou C. Nous auons donc décrit sur la ligne donnée vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

Nous avons enseigné la pratique de ce Prob. en nos Mémoires Mathem. Prob. 15. & le conuerse d'iceluy au Probleme 16. C'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnee ABCD, & l'angle donné E. Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait vn angle egal au donné E.



Soit resoluë la figure rectiligne donnee en triangles, sçauoir est menant la ligne AC : puis par la 42. prop. soit fait le parallelogramme FGHI egal au triangle ADC, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item sur HI soit fait le parallelogramme HIKL. egal au triangle ABC, ayant vn angle HIK egal au donné E : & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E ; & ces deux parallelogr. ensemble en font vn seul. Car d'autant que chacun

des angles GFI , HIK est egal à l'angle donné E , ils le seront aussi entr'eux : auxquels si on adjoûste l'angle commun FIH , les deux angles GFI , HIF , qui sont egaux à deux droicts par la 29. prop. estant FH , parallelogramme ; seront egaux aux deux angles HIK , HIF , lesquels partant seront egaux à deux droicts , & par la 14. prop. les deux lignes FI , KI , se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI , HLK estans egaux par la 34. pr. car ils sont opposez à angles egaux GFI , HIK : Si à iceux on adjoûste l'angle commun IHL , par le mesme discours que cy-dessus, les deux lignes GH & LH se rencontreront directement : ainsi FK & GL estans lignes droictes , & conjoignant de mesme part les egales & paralleles FG & KL ; elles seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. & partant $FGLK$ sera parallelog. ; lequel nous avons construit egal à la figure rectiligne donnée $ABCD$, & fait l'angle F egal au donné E , ainsi qu'il estoit requis.

S C H O L I E.

S'il y eust en dauantage de triangles en la figure donnee, il eust fallu construire sur KL vn troisieme parallelogr. egal au troisieme triangle : puis sur le costé oppose à KL , vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle iusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera tousiours la mesme que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or Pellesier adjoûste icy vn Prob. tres-veil, qui est, Qu'estans données deux figures rectilignes inegales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre. Mais d'autant que nous l'auons enseigné en suite de celuy cy dessus, en nostre Geometrie pratique, Prob. 18. nous n'en ferons icy repetition.

COROLLAIRE.

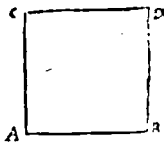
Il est manifeste par les choses dictes cy-dessus, comme descrira sur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné. Car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee, nous eussions par la precedente prop. décrit sur icelle le parallelogramme FGH I; puis sur la mesme ligne FG, ou plustost sur vne egale à icelle HI, parallelogramme HIKL; & ainsi consecutiuement s'il y auoit dauantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

PROBL. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut descrire vn quarré. Du point A, soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. la quelle soit faicte egale à AB, & apres auoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC par 31. propos. ie dis que le quadrilatere ABDC est quarré.

Car d'autant que par la construction il est parallelogramme: les costez, & les angles opposez sont egaux par la 34. prop. partant le costé AB est egal à CD, & AC à BD: mais AC estant egal à AB par la construction; il est euident que les quatre costez sont egaux entr'eux. Item l'angle A estant droict par la construction, aussi son opposé D sera



droict. Et la ligne AC tombât sur les deux lignes parallèles AB, CD, les deux angles intérieurs A & C sont égaux à deux droicts par la 29 prop. Mais l'angle A est droict : donc l'angle C sera aussi droict : partant aussi droict son opposé B : ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droicts : & par la def. du quarré, la figure AD sera quarrée. Nous auons donc décrit vn quarré sur la ligne droicte donnée. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné la pratique de ceste prop. en nostre Geometrie pratique. Prob. 12.

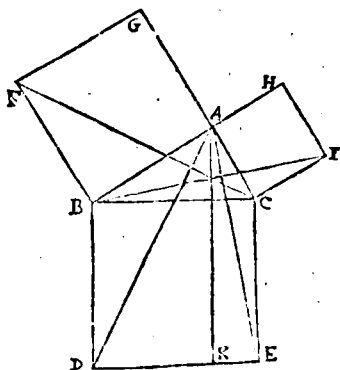
Proclus demontre icy : Que les quarez de lignes égales sont égaux : & que de quarez égaux, les lignes sont égales. Ce qui est aisé à prouuer par la superposition d'un quarré sur l'autre : Car les lignes estans égales si l'une est posée dessus l'autre, elles conuendront entr'elles ; & les angles estans aussi égaux, c'est à sçauoir droicts, ils conuendront pareillemens entr'eux : & partant tout le quarré conuendra à tout le quarré. Que si les quarez sont égaux, ils conuiennent entr'eux, à cause de l'égalité des angles : Donc aussi les lignes ; autrement vn quarré seroit plus grand que l'autre. Nous auons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle cy qui est breue & facile.

THEO. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est égal aux deux quarez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC , sur les costez duquel soient descrits les trois quarréz $BCDE$, $ABFG$, AHI . Je dis que le quarré $BCED$ descrit sur le costé BC , qui soustient l'angle droit BAC , est egal aux deux quarréz $ABFG$ & AHI descrits sur les deux autres costez AB & AC .

Car soit menee la ligne AK parallele à BD , ou à CE , & tirees les lignes AD , AE , CF , BI . Et d'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au point A sont droicts, les lignes droictes AB , AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droite: Itē CA , AG par la 14. prop. Derechef puis que les angles ABF , CBD



sont egaux, car ils sont droicts, si on leur adiouste le commun ABC , le total $FB C$ sera egal au total ABD . Le triangle ABD a donc les deux costez AB , BD , egaux aux deux costez FB , BC du triangle CBF , chacun au sien, & les angles ABD , CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. prop. les triangles ABD , CBF seront egaux. Mais le quarré AF est double du triangle $FB C$ par la 41. prop. car ils sont sur mesme base BF , & entre mesmes paralleles BF , GC ; il sera donc aussi double de son egal ABD : duquel le parallelog. BK est aussi double par

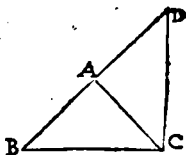
la mesme 41. prop. & par consequent le quarré AF sera egal au parallelog. BK : car les choses doubles d'une mesme sont egales entr'elles. Par mesme discours on prouuera que le parallelog. CK est egal au quarré AI : partant les deux ensemble BK, & CK seront egaux aux deux quarréz ensemble AF, & AI. Donc le quarré BE qui est composé d'iceux parallelog. BK, CK sera aussi egal aux mesmes quarréz AF, AI : parquoy aux triangles rectangles, le quarré du costé, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des costez d'un triangle, est egal aux quarréz des deux autres costez, le triangle sera rectangle.

Soit le triangle donné ABC, & soit le quarré du costé BC egal aux deux quarréz des deux autres costez BA, & AC. Je dis que l'angle BAC est droit.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & fait A D egale à AB, soit menee CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarréz de CA, & AD, lesquels sont egaux aux quarréz de BA, & AC, estans leurs lignes egales.



Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallèles les angles internes E & H sont égaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese: l'angle H sera donc aussi droict: & par la 34. p. 1. leurs opposez G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallelog. estre contenu sous deux lignes droictes, qui comprennent vn seul angle droict; tellement que le parallelog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH: ou sous les deux EF, FG: ou sous FG, GH: ou finalement sous GH, HE: ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'un parallelograme rectangle: sçauoir l'une comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur: & par le mouuement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se menue en trauers, tellement qu'elle face tousiours angle droict avec icelle EH, iusques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F, au poinct G: sera décrit tout le parallelog. rectangle EFGH. Le mesme sera fait, si on pose EH se mouuoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que si EF est de 5. pieds, & l'autre costé EH de trois: si on multiplie vn nombre par l'autre, sera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tous le parallelogramme. Pareillement au rectangle ABCD, le costé AB étant de 3. pieds, & le costé AD aussi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy dessus.

Et est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suivans, Euclide appelle les parallelog. rectangles, simplement rectangles: ce que obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tousiours entendre parallelogramme rectangle.

2. En tout parallelogramme, l'un des parallelogramme descrits à l'entour du diametre, avec les deux supplemés, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme ABCD, (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée de la diagonale BC; & EF parallele à AC couppant la diagonale en I; & par iceluy point I soit menée GH parallele à AB: & le parallelogramme sera diuisé en 4. parallelog. deux desquels EG, & HF sont dictés estre descrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez supplemens. Or la figure composée d'iceux supplemens & de l'un ou l'autre des parallelogrammes: d'alentour la diagonale, sera dicté gnomon, comme la figure FACHDI, ou EDBAGI.

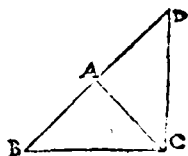
THEOR. I. PROPOS. 41.

Si de deux lignes droictes l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes, est égal au rectangle de la non coupée, & d'une chacune partie de celle qui est coupée.

Soient deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupée à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C,

& par la 1. com. sent. le quarré de B C sera egal au quarré de C D : partant la ligne C B egale à C D. Donc les triangles B A C, & C A D auront deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & la base egale à la base, & par la 8. prop.

l'angle B A C sera egal à l'angle droit C A D : partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstter.



Fin du premier Element.





ELEMENT

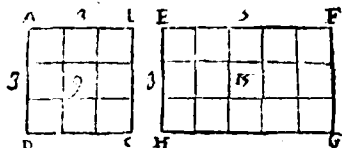
SECON D

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, est dit estre cõpris des deux lignes droictes qui font l'angle droict.

La esté dit en la 36. deff. 1. que c'est que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre sortes: mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par consequent il y a seulement le carré, comme $ABCD$, & le carré long comme $EFGH$, qui soient rectangles: car il n'y a que ces deux parallelogrammes qui ayent les ang. droicts.

Est icy à noter, qu'en tout parallelogramme si un seul angle est donné droict, il est nécessaire que les trois autres soient aussi



droicts: comme si l'angle E du parallelogramme $EFGH$ est droict: ie dis que les trois autres F, G, H , sont aussi droicts.

Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallèles les angles internes E & H sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese: l'angle H sera donc aussi droict: & par la 34. p. 1. leurs oppoſez G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallelog. estre contenu ſous deux lignes droictes, qui comprennent vn ſeul angle droict; tellement que le parallelog. rectangle EFGH, ſera dict estre contenu ſous les deux lignes droictes EF, EH: ou ſous les deux EF, FG: ou ſous FG, GH: ou finalement ſous GH, HE: ainſi deux lignes expriment toute la magnitude d'un parallelogramme rectangle: ſçavoir l'une comme EF, ou HG, ſa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, ſa largeur: & par le mouuement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, ſe fait iceluy parallelogramme. Car ſi l'eſprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, ſe menue en trauers, tellement qu'elle ſace touſiours angle droict avec icelle EH, iuſques à ce que le point E paruienne au point H, & le point F, au point G: ſera deſcrit tout le parallelog. rectangle EFGH. Le meſme ſera fait, ſi on poſe EH ſe mouuoir en trauers, ſelon la ligne EF. D'où aduient que ſi EF eſt de 5. pieds, & l'autre coſté EH de trois: ſi on multiplie vn nombre par l'autre, ſera produit 15. pieds quarez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme. Pareillement au rectangle ABCD, le coſté AB eſtant de 3. pieds, & le coſté AD auſſi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, ſeront produits neuf pieds quarez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monſtre la figure cy deſſus.

Et eſt icy à noter, qu'en ce ſecond liure, & es autres ſuiuans, Euclide appelle les parallelog. rectangles, ſimplement rectangles: ce que obſeruent auſſi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut touſiours entendre parallelogramme rectangle.

2. En tout parallelogramme, l'un des parallelogramme descrits a l'entour du diametre, avec les deux suppléments, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme ABCD, (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée de la diagonale BC; & EF parallele à AC coupant la diagonale en I; & par iceluy point I soit menée GH parallele à AB: & le parallelogramme sera diuisé en 4. parallelog. deux desquels EG, & HF sont dictés estre descrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez suppléments. Or la figure composée d'iceux suppléments & de l'un ou l'autre des parallelogrammes: d'alentour la diagonale, sera dicté Gnomon, comme la figure FACHDI, ou EDBAGI.

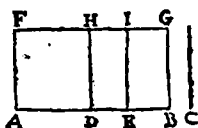
THEOR. I. PROPOS. 41.

Si de deux lignes droictes l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes, est egal au rectangle de la non coupée, & d'une chacune partie de celle qui est coupée.

Soient deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupée à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C,

sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'une chacune partie de A B.

Qu'il ne soit ainsi: Qu'on mène A F perpendiculaire à A B par la 11. propo. 1. laquelle soit faite egale à C, & du point F soit menée F G parallele à A B; & B G parallele à A F par la 31.



prop. 1. Il est evident que le rectangle A G sera compris des deux lignes données A B & C, puis que A F est egale à C. Item soient menées les deux lignes D H, & E I paralleles à A F par la 31. prop. 1. Donc les trois parallelogrammes A H, D I, E G, seront rectangles compris des lignes A F, D H, E I, & des trois segmens A D, D E, E B, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conviennent au rectangle A G, compris des lignes données: & par la 8. commune sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

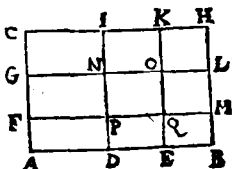
Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second livre, nous l'avons appliqué & démontré en nombres au Scholie de la 14. prop. 9.

Commandin demonstre icy deux autres Theoremes qui ensuivent.

S'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit couppée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chaque segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droictes A B, A C contenant un angle

droict A : & AB soit couppee és poinçts D & E , mais AC és poinçts F & G . Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC , est egal aux rectangles compris de chascunes parties AD, DE, EB & d'un chacun segment AF, FG, GC , c'est à dire egal aux rectangles contenus de AD, AF ; AD, FG ; AD, GC ; DE, AF ; DE, FG ; DE, GC ; EB, AF ; EB, FG ; EB, GC . Car estant accõ-

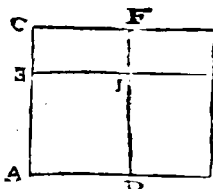


ply le rectangle AH , soient tirées DI, EK paralleles à AC : Item FM, GL paralleles à AB , qui couperont les premieres és poinçts P, Q, N, O . Ven donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF : & FN sous AD, FG : & GI sous AD, GC , (pource que par la 34. propoſit. 1. les lignes FP, GN sont egales à icelle AD .) Item que les rectangles DQ, PO, NK , sont contenus sous DE, AF ; DE, FG ; DE, GC : (car DP, PN, NI sont egales à icelles AF, FG, GC , & PQ, NO , à icelle DE , par la 34. propoſit. 1.) Et par meſme raiſon les rectangles EM, QL, OH , sont compris sous EB, AF ; EB, FG ; EB, GC . Il est euident que le rectangle contenu sous AB, AC , est egal aux rectangles compris sous chascunes parties AD, DE, EB , & un chacun des ſegmens AF, FG, GC : ce qui eſtoit propoſé.

S'il y a deux lignes droictes couppees comme on voudra; le rectangle compris sous icelles, avec celui compris sous vne partie de l'une d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les lignes totales & les iudites parties reciproquement, avec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC , faiſant l'angle droict A , leſquelles soient couppees comme on voudra en D & E . Je dis que le rectangle compris sous AB, AC , avec celui compris sous les parties AD, EC , est egal aux rectangles con-

tenus sous $AB, EC: AC, AD: DB, AE$. Car ayant accompli le rectangle AG , soit menée DE parallèle à AC ; & EH à AB , s'entrecouppans en I . Veu donc que le rectangle AG est égal aux rectangles EG, AI, DH : si on leur adionste le commun rectangle EF : les rectangles AG, EF , qui sont compris sous toutes AB, AC , & les parties AD, EC , seront égaux aux rectangles EG, AF, DH , compris sous $AB, EC: AC, AD: DB, AE$: ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

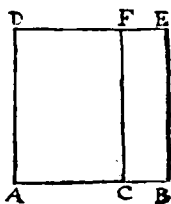
Par ce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit coupée comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera égal au rectangle compris sous l'une totale, & un segmen de l'autre, & aux deux rectangles conuenus de l'autre segmen de ceste-cy, & d'un chacun segmen de celle-là. Car le rectangle AG , qui est compris des deux toutes AB, AC est égal au rectangle EG , conuenu de la toute EH , c'est à dire AB , & du segmen EC , & aux deux rectang. AI, DH , compris de l'autre segmen AE , & des segmens AD, DB : Iceluy rectangle AG , est aussi égal aux trois rectangles AH, EF, IG . Pareillement aux trois AF, DH, IG , comme aussi aux trois autres DG, AI, EF .

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droite est cōpée comme on voudra : les rectangles compris

de la toute & d'une chascune partie,
sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite AB, coup-
pée en deux parties telles qu'on
voudra au point C. Je dis que le
rectangle de la toute AB & de la
partie AC, avec le rectangle de la
toute AB, & de l'autre partie CB,
sont egaux au quarré de la toute
AB.



Qu'il ne soit ainsi. Sur AB soit décrit le quarré
AE; puis de C soit menée CF parallèle à AD, la-
quelle CF sera égale à icelle AD, c'est à dire à AB:
car icelles AD, AB sont égales par la def. du quarré.
Il est donc evident que les deux rectangles AF, &
CE, sont compris de la toute AB, ou son égale CF, &
des deux parties AC & CB; & si ils conviennent avec
le quarré AE, & par conséquent luy sont egaux. Si
donc une ligne droite est coupée comme on vou-
dra, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

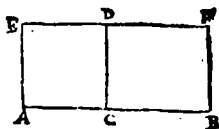
S C H O L I E.

Encore qu'en ce theoreme Euclide propose d'une ligne di-
visée en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la
mesme maniere sera démontré le mesme, si la ligne est di-
visée en tant de parties qu'on voudra. Sera aussi démontré
comme dessus que si une ligne droite est coupée en tant de
parties qu'on voudra: le quarré de la toute est egal aux re-
ctangles contenus sous chascun segment & un chascun
segment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premiere-ment prise.

Soit la ligne droicte AB couppée à l'aduenture au poinct C . le dis que le rectangle compris de la totale AB , & de l'une ou l'autre partie, comme AC , est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC , & CB , & au quarré de la partie AC , laquelle auoit esté premiere-ment prise.



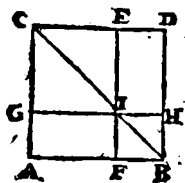
Qu'il ne soit ainsi: Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. prop. 1. Item soit menée BF parallele à CD par la 31. p. 1. rencontrant ED , prolongée en F . Il est donc euident que AD est le quarré de AC ; & CF le rectangle de AC & CB ; (car CD est egal à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de AB & AC , partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD , & le rectangle CF ensemble, conuiennent avec le rectangle AF ; & par consequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte est couppée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR.

THEO. 4. PROP. IIIL.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra; le quarré de la toute est egal aux deux quarrez des deux parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnee AB, coupee comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrez descrits sur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB, sont egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit descrit le quarré AD; & apres auoir mené la diagonalle BC: & du point F, la ligne droicte FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy point I soit mennee GH parallele à AB, le tout par la 31. pr. 1. ie dis premierement que HF, & EG sont quarrez.

Car desia il apert qu'ils sont parallelogrammes, estans descrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele. & par la 5. pr. 1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle exterior FIB egal à l'opposé interieur ACB par la 29. propos. 1. lequel estant egal à ABC par

H

la 1. com. sent. ABC & FIB seront égaux, & par la 6. pr. 1. les deux costez BF & FI seront égaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HFI , aura les quatre costez égaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBI estant droit, les trois autres seront aussi droits, comme nous auons demonstté à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont descrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droits, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles, & égaux entr'eux par la 43. propos. 1. & sont compris des deux parties AF , FB , estant EI égale à AF , & HI , IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB , lesquels avec les deux quarrés FH & GE conuiennent avec le quarré total AD , & par la 8. comm. sent. ils luy seront égaux. Si donc vne ligne droite est couppee comme on voudra, le quarré de la route est égal, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par ce que dessus, que les parallelogrammes descrits à l'entour de la diagonale d'un quarré, sont quarrés. Es aussi que la diagonale coupe en deux également les angles du quarré.

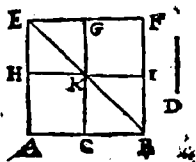
SCHOLIE.

Clavius demonstre en ce lieu le theoreme suivant.

Si vne ligne droite est double d'une autre, le quarré de celle-là est quadruple du quarré de ceste-

ey: & si vn quarré est quadruple d'un autre quarré: le costé de celuy-là est double du costé de cestuy-cy.

Soient deux lignes droictes AB & D , desquelles AB est double de D . le dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D . Car ayant divisé AB en deux également en C , si on fait telle construction qu'en ceste 4. prop. il est evident que les



4. parallelogrammes AK , CI , HG , & KF , seront quarrés & égaux entr'eux. Mais le quarré AE est égal à iceux quatre quarrés: donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC , c'est à dire de D , qui luy est égal: car AB est double de l'une & de l'autre.

Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D . le dis que AB est double de D . Car AB estant coupée en deux également en C , le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC , comme il a esté démontré cy dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D : donc les quarrés des lignes AC & D sont égaux, & parant icelles lignes AC & D aussi égales. Mais AB est double de AC , donc aussi double de D .

THEOR. 5. PROP. V.

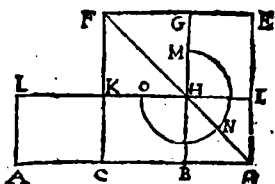
Si vne ligne droicte est coupée en deux parties égales, & en deux inégales: le rectangle des deux parties inégales, avec le quarré de la section du milieu, sont égaux au quarré de la moitié de la toute.

aussi le rectangle AH , & le quarré KC seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. Parquoy si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & on luy adjouste directement quelque autre ligne droicte : le rectangle de la toute & de l'adjoustee comme d'une, & de l'adjoustée, avec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'adjoustee comme d'une.

Soit la ligne droicte AB coupee en deux egalement au point C ; & à icelle soit adjoustee directement BD . Je dis que le rectangle compris de la totale AD , & de l'adjoustee BD , avec le quarré de la moitié CB , est egal au quarré de la ligne CD .

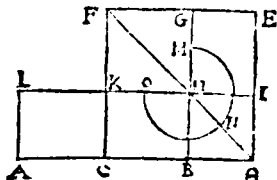


Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit descrit le quarré CE avec sa diagonale DF , & apres avoir mené BG parallele à DE , laquelle coupera la diagonale au point H : par iceluy point H soit menée KL parallele à AD par la 31. propos. 1.

Item AL parallele à DI , rencontrant IL en L .

Premierement le rectangle AI est compris de la route & adioustee comme d'une AD , & de l'adioustee DI (car icelle DI est egale à l'adioustee BD , estant BI quarré par le corol. de la 4. p. de ce liure.) Item KG , qui est quarré par le mesme corol. est faict sur HK egal à la moitié CB par la 34. prop. 1. le dis donc que le rectangle AI , & le quarré KG sont egaux au quarré CE .

Car les deux suppléments CH , & HE ests egaux par la 43. prop. 1. Item les deux rectangles AK , & CH aussi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur



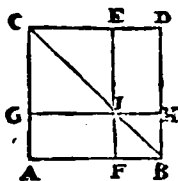
bases egales, & entre mesmes paralleles, & par la 1. com. sent. AK sera egal à HE , & en adioustant à chacun d'iceux le rectangle commun CI , le Gnomon MNO sera egal au rectangle AI . Mais iceluy Gnomon avec le quarré KG sont egaux au quarré CE : donc le rectangle AI avec le quarré KG sera egal au mesme quarré CE . Parquoy si vne ligne droite est coupee en deux parties egales, & on luy adioustee directement quelque autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra: le quarré de la route & le quarré de l'une des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, &

deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premiere-ment prise.

Soit la ligne $A B$ couppee comme on voudra au poinct F . Je dis que les deux quarez de la totale $A B$, & de la partie $A F$, sont egaux au quarré de l'autre partie $F B$, & au rectangle deux fois, de $A B$, $A F$.



Qu'il ne soit ainsi : sur $A B$ soit descrit le quarré $A D$ avec la diagonale $B C$, & apres avoir mené du poinct F , $F E$ parallele à $A C$, laquelle coupera la diagonale $B C$ au poinct I : d'iceluy poinct soit mennee $G H$ parallele à $A B$ par la 31. prop. 1. Donc $F H$ & $G E$ seront quarez par le cor. de la 4. pr. de ce lieu. & puis que par la 34. pr. 1. $G I$ est egale à $A F$; $G E$ sera quarré du segm. $A F$. Derechef pour ce que $A C$ est egale à $A B$, le rectangle $A E$ sera cōpris sous la toute $A B$, & le segm. $A F$. Par mesme raison le rectangle $G D$ sera compris sous les mesmes lignes $A B$, $A F$: (car $C D$, $C G$ sont egales à $A B$, $A F$, à cause des quarez $A D$, $G E$.) Veu donc que les rectangles $A E$, $I D$, avec le quarré $F H$ sont esgaulx au quarré $A D$; si on leur appose le commun quarré $E G$, les quarez $A D$, $E G$ seront egaulx aux rectangles $A E$, $G D$, (chacun desquels est compris de la toute $A B$ & de la partie $A F$) avec le quarré $F H$: parquoy si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

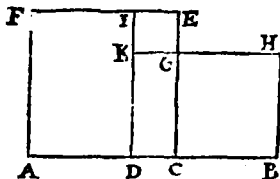
Commandin demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

H iij

Si vne ligne droicte est coupee en deux parties inegales; les quarez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droicte AB coupee en deux parties inegales, AC, CB , desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarez des parties AC, CB , sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB , & au quarré de DC .

Car soient construits les quarez AE, CH , & mené DI parallele à CE : puis prolongé HG iusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or



d'autant que les lignes BC, AD sont egales, leur adionstant la commune DC , la toute AC , c'est à dire CE , sera égale à la toute DB . Mais CG est aussi égale à CB : donc aussi le reste GE sera egal au reste DC : & partant puis qu'aussi IE est égale à DC par la 34. prop. 1. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC . Et d'autant que les rectangles AI, DH sont contenus sous les parties AC, CB ; (car AC est égale à l'une & à l'autre ligne AF, DB : CB à l'une & à l'autre AD, BH .) Il est manifeste que les quarez AE, CH , des parties AC, CB sont egaux aux rectangles AI, DH , qui sont contenus sous les parties AC, CB , & à l'IG quarré de l'excez DC : Ce qui estoit proposé.

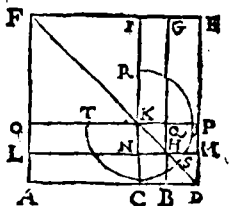
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra: quatre fois le rectan-

gle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'un ou l'autre segment, savoir BC, c'est à dire de AB, & BD, (si apres avoir prolongé la ligne AB, on fait BD egal à BC) avec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD composée de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne soit ainsi : sur AD soit fait le quarré AE avec sa diagonale FD, & des deux points B & C, soient menées BG & CI parallèles à DE. Item des points H & K, auxquels elles coupent la diagonale FD, soient menées LM & OP parallèles à AD, par la 31. p. 1. lesquelles coupent les premières parallèles en N, & Q.



Premierement par ce qui resulte de la 4. p. de ce liure, les rectangles OI, NQ, BM, au long de la diagonale seront quarrés. Item d'autant que CB est egal à BD; CH, & BM, seront egaux, & quarrés: (estant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrés; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrés, & egaux: & par la 43. p. 1. les deux suppléments. LK & KG seront aussi egaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est egal à AN; & KG à QE: & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi egaux entr'eux.

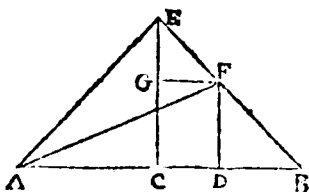
Mais comme aux precedentes il est evident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH , (egale à BD) qui est vn des quatre rectangles avec vn des quatre petits quarez egaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarez faisant le Gnomon RST , seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD , lequel Gnomon avec le quarré de OK , (egale à AC par la 34. p. 1.) sçauoir est OI , conuiennent avec le quarré AE ; & partant par la 8. com. sent. ils luy seront egaux : Si donc vne ligne droite est couppée comme on voudra, quatre fois le rectang. &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & en deux inegales : les quarez des parties inegales seront doubles des quarez de la moitié, & de la section du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppée en deux egalemment au poinct C , & en deux inegalement en D . Le dis que les quarez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi : au poinct C soit leuée la perpendiculaire CE , qu'on fera egale à CA ;



& apres auoir mené AE, & BE, soit leuée la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel point soit menée FG parallele à AB, couppant CE en G : & finalement soit menée AF.

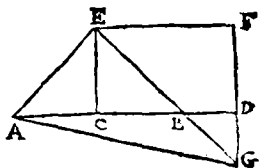
Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Iſoſceles, & feront les angles sur les bases AE, & EB egaux par la 5. p. 1. ſçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ECB droit pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droit, & DBF demy droit, aussi par la 32. p. 1. DFB sera demy droit, & par la 6. p. 1. les costez DB, & DF, du triangle BDF, seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera demonſtré que les costez GF, GE du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est euident que l'angle AEB sera droit, estant composé des deux demy droicts AEC, BEC.

Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE. le quarré de AE, costé qui ſoutient l'angle droit, est double du quarré de AC, estant egal à tous les deux de AC, & CE. Par mesme discours, le quarré de EF est double du quarré de GF, ou CD son eg. par la 34. p. 1. partant les deux quarréz de AE & EF, seront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF estant egal aux deux de AE, & EF par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC, & CD. Mais par la mesme 47. p. 1. le quarré de AF, est egal aux deux de AD, & DF, ou DB son egale: donc les deux quarréz de AD & DB seront doubles des deux de AC, & CD. Si donc vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & en deux inegales; les quarréz des parties inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer,

THEO. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & on luy adjouste directement quelque autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'adjousteée comme d'une, & le quarré de l'adjousteée, sont doubles des quarez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adiousteée comme d'une.

Soit la ligne droite AB couppée en deux egalemēt au point C, à laquelle soit adiousteée directement BD. Je dis que les quarez de AD & BD, sont doubles des quarez de AC, & CD.



Qu'ainsi ne soit, au point C soit leuée la perpendiculaire CE par la 11. p. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, soient menées par la 31. p. 1. EF parallele à CD, & DF à CE se rencontrant en F, & soient continuées EB, & FD iusques à ce qu'elles se coupent au point G. Finalement soit tirée la ligne AG.

Premierement puis que AC & CE sont egaux, aussi par la 5. p. 1. les angles EAC, & CEA sont egaux & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ACE droit. Par mesme discours, les angles CBE & BEC se-

ront aussi demy droicts, & l'angle AE droit, estant composé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBG sera egal à CBE , & demy droit; & les deux lignes CD & EF estans paralleles, par la 29. p. 1. l'angle interieur de mesme costé BEF sera aussi demy droit; & l'angle F estant droit par la 34. p. 1. car il est opposé à vn droit, BGD sera demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF , & BDG seront isosceles rectangles; & ce parallelograme rectangle.

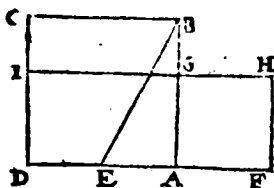
Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE , costé qui soustient l'angle droit C , est egal aux deux quarez des deux autres costez AC , CE ; partant double du quarré de AC . Par mesme discours EG se trouuera double du quarré de EF , ou de CD , qui luy est egale par la 34. p. 1. ainsi les deux quarez de AE , & EG , ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. p. 1. sera double des deux de AC & CD . Mais par la mesme 47. p. 1. il est egal au deux quarez de AD & DG , ou BD son egal; & par consequent les deux quarez de AD & BD , seront doubles des deux de AC & DC . Si donc vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & on luy adjouste directement quelque autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. I. PROP. XI.

Coupper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre.

Soit la ligne droite donnée AB , laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Après auoir cōstruit sur icelle AB le quarré AC , soit diuisée AD en deux également au



poinct E , & après auoir mené EB , & prolongé EA vers F , tellement que EF soit égale à EB , sur AF soit fait le quarré AH ; & soit continuée HG iusques en I . Je dis que la ligne AB est couppée au poinct G , en sorte que le rectangle CG compris de BC égale à BA , & de BG partie de BA , est égal au quarré de l'autre partie AG , sçauoir à GF .

Car la ligne AD estant couppée en deux également en E , & on luy adiouste directement AF , le quarré de la moitié & de l'adionstée comme d'une, sçauoir EF , ou de son égale EB , est égal au rectangle de DF, AF , & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB est égal aux deux de BA , & AE par la 47. p. 1. ainsi les deux quarrés de BA , & AE seront égaux au rectangle de DF, AF , & au quarré de AE : ostans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB , sçauoir AC , & le rectangle de DF, AF , sçauoir FI , seront égaux, desquels AC & FI , si on oste le rectangle commun AI , le demeurant quarré FG , sera égal au demeurant rectangle GC . Parquoy nous auons couppé la ligne droite AB en G , tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB , est égal au quarré de l'autre partie AG : Ce qu'il falloit faire.

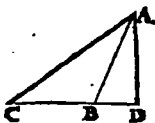
SCHOLIE.

Nous avons enseigné en nos *memoires Mathematiques* Prob. 72. à couper une ligne droite, non seulement comme enseigne icy *Euclide*, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du carré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au carré, selon quelconque raison donnée.

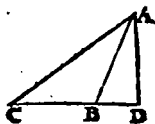
THEOR. II. PROPOS. XII.

Aux triangles ambligones, le carré du costé qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les quarrés des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du costé contenant l'angle obtus, sçavoir celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire, & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le costé CB iusques en D, & du poin^t A soit menée la perpendiculaire AD par la 12. p. 1. le dis que le carré du costé AC qui soustient l'angle



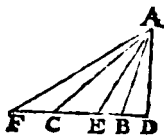
obtus ABC, est plus grand que les quarez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, sçauoit CB, qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire; c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarez des costez AB, BC, avec deux fois le rectangle de CB, BD.



Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est coupée en B, le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD, par la 4. p. de ce liure: Ad-ioustant donc le commun quarré de AD, les deux quarez de CD, DA, seront egaux aux trois quarez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Mais par la 47. p. 1. le quarré de AC est egal aux quarez de CD, DA: donc aussi le quarré de AC sera egal aux trois quarez de CB, BD, DA, & au rectangle cōpris deux fois sous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB est egal aux quarez de BD, DA; le quarré de AC sera egal aux quarez de CB, AB, & à deux fois le rectangle de CB, BD. Parquoy aux triangles ambliques, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tirée de A; doieue tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a prisiy Euclide, nous le demonstresons ainsi: Soit le triangle ABC



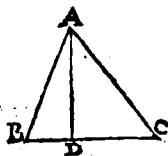
qut

ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de E. Je dis que la perpendiculaire de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF : derechef au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB seront plus grands que deux droicts : ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'un des costez qui font l'angle aigu, sçavoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Je dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C,



est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AC, & CB de deux fois le rectangle de BC & CD : sçavoir BC, l'un des

costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & iceluy angle aigu C.

Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de celiure, ausquels si on adjouste le quarré commun de AD, les trois quarez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarez de AD, DC par la 47. propos. 1. Donc les deux quarez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD ; en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarez de AC, BC : ce qui estoit proposé à prouver. On démontrera en la mesme manière que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'Euclide propose ce theoreme des triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. ou 32. prop. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera toujours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration : ce qui est

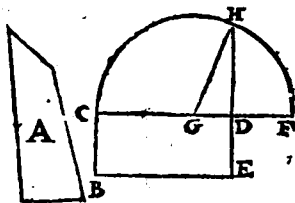
aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit. Ce qui est absurde.

PROBL. 2. PROP. XIII.

Faire vn quarré egal à vne figure re-
ctiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premiere-
ment fait le paral-
lelogramme B D
egal à la figure A;
& ayant vn angle
droict par la 45.
propof. 1. puis soit
prolongé le costé



C D iusques en F, & fait D F egale à D E: & apres
auoir couppé C F en deux egalelement au poinct G,
& d'iceluy poinct G & interualle G C ou G F, des-
crit le demy cercle C H F, soit continuée E D ius-
ques en H en la circonference du demy cercle. Ie
dis que le quarré de D H est egal à la figure recti-
ligne A.

Car puisque C F est coupee en deux egalelement
au poinct G & en deux inegalelement au poinct D,
le rectangle de C D & D F, sçauoir B D, avec le
quarré de la section du milieu G D, est egal au quar-
ré de la moitié G F par la 5. propof. de ce liure, ou
de son egale G H, lequel est egal aux deux quar-
rez de G D & D H par la 47. propof. 1. Que si on

oste le quarré commun de GD , le demeurant quarré de DH , se trouuera egal au demeurant rectangle BD : & par consequent à la figure rectiligne donnee A . Nous auons donc trouué le costé d'un quarré egal à vne figure rectiligne donnee A . Ce qu'il falloit faire.

Fin du second Element.





ELEMENT

TROISIÈME.

DEFINITIONS.

CERCLES égaux, sont ceux desquels les diamètres sont égaux, ou desquels les lignes droictes menées du centre à la circonférence, sont égales.

2. Vne ligne droicte est dictée toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

4. Les lignes droictes sont dictées estre également distantes du centre.

lors que les perpendiculaires tirees du centre sur icelles, sont egales. Mais celle qui est plus esloignee du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5. Segment ou portion de cercle, qu'on la plupart appellent aussi section, est une figure comprise d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

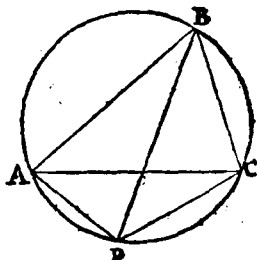
6. L'angle du segment, est celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

7. Un angle se dit estre en la portion, lors que sur vn point pris en la circonference, sont menees deux lignes droictes des deux extremittez de la ligne qui sert de base à la portion, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit estre ou s'appuyer sur icelle.

Euclide definit es trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA , contenu sous la ligne droite AC , & la circonference ABC s'appelle angle de la

portion. En la 7. def. il dit, que si à quelque point B , prins en la circonference d'une portion ABC , sont menees deux lignes droictes AB , CB , des extremitex de la ligne droictte AC qui sert de base à la section, l'angle rectiligne ABC , sera dit estre en la portion ou segment ABC : Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la portion ADC : mais l'angle BAC , est dit estre en la portion BAC .



Et en la 8. def. Euclide dit qu'estant pris quelque point B , en la circonference du cercle $ABCD$, si on tire d'iceluy les lignes droictes BA , BC aux deux extremes A & C , de la circonference ADC , laquelle prennent icelles lignes BA , BC ; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonference ADC : Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonference AD : & l'angle BAD , sur la circonference BCD : mais l'angle BAC sur la circonference BC .

9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes ambrassant quelque circonference, & faisant angle au centre du cercle.

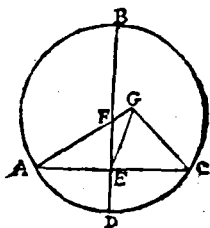
10. Semblables portions de cercle, sont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. I. PROPOS. I.

Trouuer le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné A B C, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tirée en iceluy la ligne droite A C comme que ce soit, laquelle par la 10. & 11. prop. 1. soit couppee en deux également, & à droicts angles par la ligne B D, le terminant à la periphèrèe en points B & D : & icelle B D estant couppee en deux également en F. Je dis que F est le centre du cercle proposé.



Car en icelle ligne droite B D, vn autre point que F ne sera pas le cètre, veu que tout autre point la diuise inégalement. Si donc le point F n'est le centre : le point G hors la ligne B D soit le centre (s'il est possible) duquel soient menees les trois lignes droictes G A, G E, & G C : d'autant que si G estoit le centre, par la déf. du cercle A G & G C seront égales : mais A E & E C sont aussi égales, & G E commune : donc les deux triangles G E A & G E C, ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la base A G égale à la base C G, & par la 8. prop. 1. les angles A E G & C E G seront égaux : & partant droicts, & la ligne E G perpendiculaire par la 10. déf. 1. Mais l'angle B E A par la construction est droit, & tous les angles droicts sont égaux par la 10. com. sent. donc les deux angles A E G & B E A seroient égaux, sçauoir le tout à la partie ; ce

qui est absurde. Donc le point G n'est pas le centre. Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre point hors la ligne BD . Partant le point F sera le centre du cercle ABC , requis à trouuer.

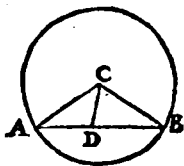
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si au cercle vne ligne droite coupe vne autre ligne droite en deux egalement, & à angles droits; le centre du cercle sera en icelles coupante. Car il a esté demonstéré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au point F milieu de la ligne BD , laquelle coupe la ligne AC en deux egalement, & à angles droits en E .

THEOR. I. PROP. II.

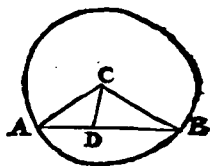
Si en la circonference d'un cercle, on prend deux points comme on voudra; la ligne droite menée de point à autre, tombera d'as le cercle.

En la circonference du cercle AB , dont le centre est C , soient pris deux points tels qu'on voudra A & B . Je dis que la ligne droite AB menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.



Car soit prins en icelle ligne droite AB quelconque point comme D , entre ses extremes A & B ; puis du centre C , soient menées les lignes

droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC, seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. p. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puisque CA est tirée du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra iusques à icelle circonference; & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstté de tout autre poinct pris. Donc toute la ligne droicte AB tombe dans le cercle: Ce qu'il falloit prouuer.



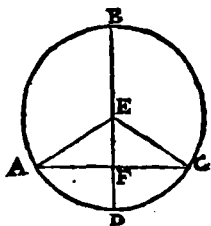
COROLLAIRE.

De cecy est manifesté, qu'une ligne droicte touchant un cercle, le touche seulement à un poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothesis.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle, quelque ligne droicte passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droicte, ne passant point par le centre; elle la coupera à droicts angles: & si elle la coupe à droicts angles, elle la coupera aussi en deux également.

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux également la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre; ie dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.



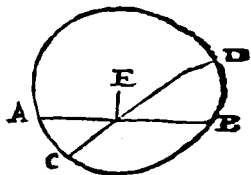
Car estans menées les deux lignes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. p. 1. les deux angles au point F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

Ie dis pareillement que si BD coupe AC à angl. droicts au point F; qu'elle la coupera aussi en deux également. Car les deux angles au point F estans droicts, ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. p. 1. estant AEC triangle Isocele, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. p. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 3. PROP. II. II.

Si dans le cercle, deux lignes droictes ne passans point par le centre, s'entre-coupent; elles ne se couperont point l'une l'autre en deux également.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes AB & CD s'entrecoupans au point F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est coupée inegalement. Car du centre E estant menée la ligne EF; si icelles lignes AB, CD se coupent en deux egalelement au point F, EF les couperait au mesme point aussi en deux egalelement, & à droict angles par la prop. preced. & les angles AFE, EFB seront droits, & egaux à CFE, EFD aussi droits, & egaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux egalelement. Parquoy si dans le cercle deux lignes droictes ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

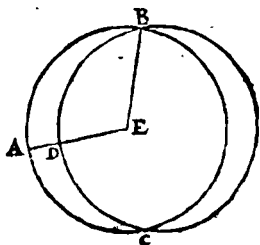


THEOR. 4. PROP. v.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne scauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droictes: sca-



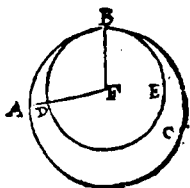
voir EB à la section B : Mais EA couppans l'une & l'autre circonference en A & D . Donc puis que E est posé centre du cercle BCD , la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15.d.1. De-rechef, puis que E est aussi posé centre du cercle ABC , la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB , & par la 1.com.sent. ED , EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre

Soient les deux cercles ABC , & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B . Je dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun F , & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB : sçauoir est FB à l'atouchement B ; & FA , couppât l'un & l'autre cercle en D , A ; il est euidât que la mesme absurdité aduiendra qu'en la precedente; sçauoir que FA , FD , seroient egales la partie au tout: donc F ne pouoit estre centre cômun des cercles s'entre touchans interieurement en B . Ce qu'il falloit demonstrier.



SCHOLIE.

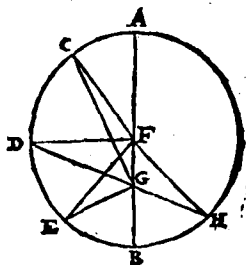
Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touche ~~au~~ seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent ~~en~~ par dehors, il appert assez que leurs centres sont diuers : *ve.* qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est ~~considéré~~ au milieu de son cercle. Ce que Dounot pouuoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale, comme il a fait ~~Et~~ contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroicts de ce liure, soit ou en changeant les mots dont il a vsé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adjoûtant : Comme pour exemple, en la prop. iuinante, au lieu qu'il y a selon Euclide qui est menée par le centre, Dounot luy fait dire, qui coupe le centre : *chose absurde,* puis que par les def. le centre du cercle est un poinct lequel est induisible : Il fait encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots, Desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra. Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adjoûté une à la demonstration : sçavoir est celle qu'il fait la tierce. Item il a retranché les deux dernieres parties de la 31. p. de ce mesme liure,

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque poinct qui ne soit pas le centre, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droictes en la circonferéce; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste : Mais des autres tousiours la plus proche de celle

qui est menée par le centre, est plus grande que la plus esloignée : Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy poinct de part & d'autre du diametre, sont egales.

Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelque poinct G outre le centre, & d'iceluy poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference. le dis en premier



lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menées à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE : le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. p. 1. Mais les lignes droictes GF, FC sont egales aux lignes droictes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grāde que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grāde que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisieme DF par la 20. p. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par mes-

me raison, GB sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonférence.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la même raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit d'auantage de tirées de G à la circonférence. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont égaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle CFC plus grand que l'angle DFG : & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour même raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

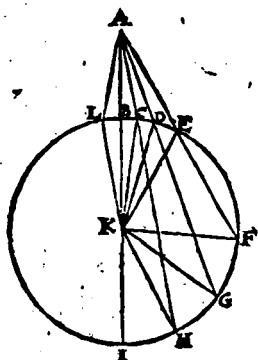
Finalement, ayant fait l'angle BFH égal à l'angle BFE, & tiré GH : ie dis que les lignes GE, GH, sont égales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonférence aucune autre égale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont égaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi égaux : les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre, du diamètre, sont égales entr'elles : Et il est euident qu'on ne pourra tirer du point G une autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH ; & par ce qui a esté monstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelle GE, GH. Donc du point G à la circonférence se peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui soient égales entr'elles. Parquoy si au diamètre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR.

THEOR. 7. PROPOS. VIII.

Sion prend quelque poinct hors le cer-
de, & d'iceluy soient menées quel-
ques lignes droictes dans iceluy cer-
de, desquelles l'une passe par le
centre, & les autres où l'on voudra:
celle qui passe par le centre sera la
plus grande de toutes celles qui se-
ront menées dans la circonference
concaue. Quant aux autres, tousiours
la plus proche de celle qui passe par
le centre est plus grande que la plus
esloignée. Mais de celles qui tombent
en la circonference conuexe, la plus
petite est celle qui est comprise entre
le poinct & le diametre: Quant aux
autres, la plus esloignée de la plus pe-
tite est plus grande que celle qui en
est plus proche; & n'y a que deux li-
gnes droictes qui puissent tomber
egales de part & d'autre de la plus
petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droictes AF, AG, AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. le disque AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes: puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grande que AG qui en est plus esloignée:



Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire: le disque AB comprise entre le point A & la circonference convexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle: puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus esloignée: Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Finablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K estans menées aux points C, D, E, F, G, H; les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH: Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui

tombent du point A dans le cercle.

Puis après, d'autant que les costez Ak , & kH du triangle $A KH$ sont egaux aux costez Ak , KG du triangle AKG , chacun au sien, & l'angle AkH plus grand que l'angle AKG ; la base AH sera plus grande que la base AG , par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF ; item AG plus grande que AF . Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus estoignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne Ak est moindre que les deux Ac , Ck ; si on oste les egales Ak , Ck , demeurera encore AB moindre que AC . Par semblable raison AB sera plus petite que AD , & que AE . Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonférence conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes Ac , Ck , des extremittez du costé Ak ; icelles Ac , Ck seront moindres que AD , Dk par la 21. p. 1. desquelles si on oste les egales Ck , Dk , restera encore AC moindre que AD . Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE : Item AD moindre que AE . Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB , est moindre que la plus esloignée.

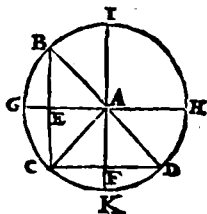
Finablement, soit fait l'angle AkL egal à l'angle AkC , & soit menée la ligne AL . D'autant que les costez Ak , Kc du triangle AkC , sont egaux aux costez Ak , KL du triangle AkL ; & les angles AkC , AkL aussi egaux, les lignes droictes AC , AL de part & d'autre de la moindre AB , seront egales entr'elles par la 4. p. 1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il euidant; car si on en

mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AB; & par ce qui a esté demonsté cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy si on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque poinct au dedans d'un cercle, & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, vers la circonference, le poinct pris est le centre du cercle.

Soit pris le poinct A au cercle BCD, & d'iceluy poinct tombent à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC, AD. Je dis que le poinct pris A est le centre du cercle.



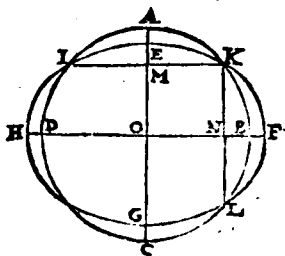
Qu'il ne soit ainsi: soient menées les lignes BC & CD, & apres les auoir coupé en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, soient menées les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez,

chacun au sien ; & les bases AB , AC aussi egales, les deux angles au poinct E seront egaux ; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. de ce liure le centre du cercle sera en la ligne droicte GAH ; puis qu'elle diuise la ligne droicte BC en deux egaleement, & à angles droicts en E . Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte KI . Il faut donc que ce soit à leur commune section A , n'y ayant poinct d'autre poinct commun. Parquoy si on prend quelque poinct dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEO. 9. PROP. X.

Vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

Soient les deux cercles $ABCD$ & $EFGH$, se couppans aux trois poincts I , K & L , s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droictes IK , & KL , lesquelles soient couppees en deux egaleement aux poincts M & N



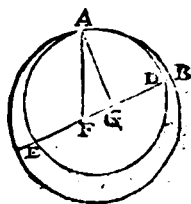
par la 10. p. 1. & soient menées les lignes MC , & NH à droicts angles sur IK , & KL . Il faudra par le corol. de la 1. p. de ce liure que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC ; ils seront aussi en la ligne FH : Ce sera donc au poinct de la com-

mune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. de ce liure. Donc les cercles ABCD & EFGH ne se pouuoient pas couper en plus de deux poinçts: Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 10. PROP. XI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, & l'on prend les centres d'iceux; ayant ioinçt iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE se touchans interieurement au poinçt A; & F, soit le centre du cercle ABC, & G le centre du cercle ADE, lesquels centres sont necessairement diuers, puis que par la 6. p. de ce liure deux cercles s'entre-touchant au dedans, ne peuvent auoir vn mesme centre. Le dis que la ligne droicte menée d'un centre à l'autre, & produicte, tombera sur le poinçt de l'attouchement A. Car si elle n'y tombe, qu'elle coupe l'un & l'autre cercle és poinçts B, D, E, C; & de l'attouchement A, aux centres F & G, soient menées les lignes droictes AF, AG. D'autant que par la 20. p. 1. les deux costez AG, FG du triangle AFG, sont plus grands que le coste FA; & FA est egale à la ligne FB, (pource que F a esté pose centre du cer-

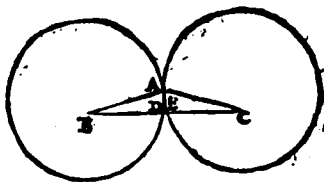


de ABC) aussi AG, GF seront plus grandes que FB: estant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA est egale à GD, (car G a esté posé centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte conjoignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droicte mencee d'un centre à l'autre, passera par l'attouchement.

Soient deux cercles se touchans au point A, desquels les centres soient B, & C. Je dis que si d'un centre à l'autre on mène une ligne droicte, qu'icelle passera par le point d'attouchement A.



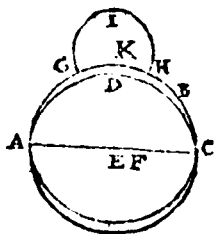
Autrement, in s'ensuiura absurdité: car si icelle ligne ne passe par le point d'attouchement, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçavoir aux points D & E, & du point d'attouchement A soient menées les deux lignes AB, & AC, lesquelles par

la 20. p. 1. seront plus grandes que BC , & par la def. du cercle, il s'en suit que BD , estant egale à BA , & CE à CA , que les deux lignes BD & CE , seroient plus grandes que BC , la partie que le tout. La ligne droicte meneé d'un centre à l'autre, passera donc par l'attouchement. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC , & ADC se touchans interieurement aux deux points A & C , s'il est possible ; & d'autant qu'ils ne peuvent auoir vn mesme centre par la 6. p. de ce liure, soient les deux centres diuers E & F , par lesquels estât



tirée la ligne droicte EF , & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és points d'attouchement A & C par la 11. p. de ce mesme liure : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes EA & EC soient egales. Item FA , & FC . Mais FA est plus grande que EA . Partant FC sera aussi plus grande que EC , la partie que le tout : ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

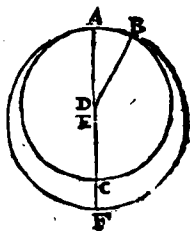
Pareillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point : car si le cercle HIG , le centre duquel est K , pouuoit toucher le cercle ABC en deux points, sçauoir en H & G , il faudroit que la ligne droite menée par les deux centres E & K passast par les deux points d'attouchement H & G , par la proposition precedente, ce qui est impossible : ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Clautius demonstre en celien le theoreme suiuant.

Si au demy diametre d'un cercle produict, on prend vn point outre le centre; le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extreme du semi-diametre, & tombera tout dehors le mesme cercle.

Soit le cercle ABC , duquel le centre est D , & au demy diametre AD prolongé, soit prins quelconque point E , duquel & de l'intervalle EA soit descript le cercle AF , lequel ie dis toucher le cercle ABC au seul point A . Car ou le point E est dans le cercle ABC , ou dehors. S'il est dedans : d'autant que AE est plus grand que AD , c'est à dire que DC , & à plus forte raison que $EC : EF$ qui est egale à EA sera aussi plus grande que EC : & partans le point F est hors le cercle ABC , & le cercle AF hors le mesme cercle pres du point F . Iceluy point F tombera beaucoup d'auantage



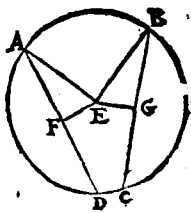
hors le cercle ABC , si E est hors le mesme cercle ABC . Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle ABC , tellement qu'il le touche au seul point A , que le cercle AF coupe ou touche le cercle ABC , en vn autre point B , si faire se peut, & soit tirée la ligne DB . Veu donc qu'au diametre du cercle AF est pris le point D , outre le centre E , DA sera la plus petite de toutes les lignes tombantes de D , par la 7. p. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA , DB tombant du centre D en la circonference d'un mesme cercle ABC , sont egales. Donc le cercle AF ne coupe ou touche le cercle ABC en vn autre point que A , mais tombe tout dehors iceluy: ce qui estoit proposé.

Que si au semi-diametre non produit, on prend vn point entre le centre, le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit point extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE , du cercle AE , on prend le point D , duquel & de l'interualle DA on descript le cercle ABC , iceluy tombera totalement dans AE , & le touchera au seul point A . Car puis qu'il a esté demonsté cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-touchent au seul point A : & par ainsi appert ce qui estoit proposé.

THEO. 13. PROP. XIII.

Dans vn cercle, les lignes droictes egales, sont egalement distantes du centre: & les egalement distantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle $A B C D$, duquel le centre est E , soient deux lignes droictes egales $A D$, & $B C$. le dis qu'elles seront également distantes du centre E .



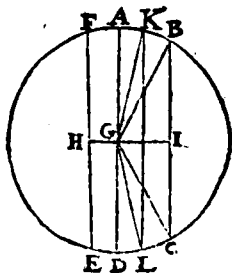
Qu'ainsi ne soit, par la 12. p. 1. du centre E soient menees les deux lignes $E F$, $E G$, perpendiculaires aux deux lignes $A D$, $B C$: puis soient tirees les deux $A E$, & $B E$. Or les deux lignes $A D$, & $B C$ estans coupees en angles droicts par les perpendiculaires $E F$, & $E G$, elles seront aussi coupees en deux également par la 3. p. 3. & partant $A F$ sera egale à $B G$. Pareillement $A E$ estant egale à $B E$ par la def. du cercle, & le quarré de $A E$ estant egal aux deux quarrés de $A F$, $F E$, par la 47. p. 1. & son egal quarré de $B E$ estant aussi egal aux deux quarrés de $B G$, $G E$, les deux quarrés de $A F$, $F E$ seront egaux aux deux quarrés de $B G$, $G E$. Mais le quarré de $A F$ est egal au quarré de $B G$, & par consequent le quarré de $F E$ est egal au quarré de $G E$. Parquoy la ligne $F E$ sera egale à la ligne $G E$, & par la 4. def. du 3. $A D$, & $B C$ seront également distantes du centre du cercle proposé.

Quant à la seconde partie. le dis que si $A D$, $B C$ sont également distantes du centre E , qu'elles seront egales; car ayant construit comme dessus, les perpendiculaires $E F$ & $E G$ seront egales par la 4. def. de celiure, & couperont $A D$, $B C$ en deux également par la 3. p. de ce mesme liure, & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus, $A F$ se trouuera egale à $B G$, & par consequent aussi leurs doubles $A D$, & $B C$ seront egales. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui estoit à demonstrez.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle , la plus grande ligne est le diamettre : quant aux autres toujours la plus proche du centre est plus grande que la plus esloignée.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G, soit le diamettre A D, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais B C la plus esloignée. Je dis que de toutes ces lignes A D est la plus grande, & que FE est plus grande que B C.



Car soient tirees du centre G les lignes droictes GH, GI perpendiculaires aux lignes droictes FE, BC : & pource que BC est plus esloignée du centre que FE ; la perpendiculaire GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de celiure. Soit donc couppe d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menee KML perpendiculaire à GI, & soient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes droictes KL, FE seront egalemēt distātes du cētre par la 4. def. de celiure, & par tant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que KL

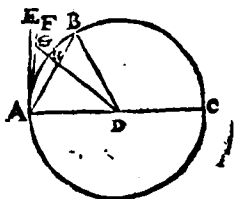
par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre A D; iceluy diametre A D sera aussi plus grand que K L ou F E. Par mesme raison A D sera demonstree plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL, & GBC, les costez GK, GL, GB, GC, sont esgaux par la definition du cercle, & l'angle GKL est plus grand que BGC, & par la 24. p. 1. la base K L, ou son egale F E, sera plus grande que la base B C, & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 15. PROP. XVI.

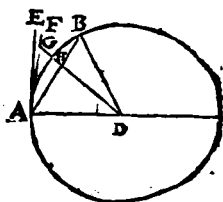
Si à l'extremité du diametre d'un cercle, on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle, & entre icelle perpendiculaire & la circonferen-
ce ne tombera pas vne autre ligne droite, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle A B C, soit le centre D, le diametre A C, sur l'extremité duquel A soit leuee la ligne perpendiculaire A E, par la 11. p. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne A E tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que A B,

estant tirée DB, les deux angles DAB, DBA, seront égaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droit par la construction; DBA sera donc aussi droit: ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la



perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la même raison elle ne tombera pas aussi en la conférence, mais dehors, comme est A E.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB, vne autre ligne droicte. Car s'il est possible que quelque ligne droicte y tombe comme AF, de D soit menez sur icelle la perpendiculaire DG, couppant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles DAG, DGA, sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & par la construction DGA est droict, l'angle DAG sera moindre qu'un droict, & partant la ligne DA, ou son egale DH, sera plus grande que DG, par la 19. p. 1. la partie que le tout: ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.

Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BA C contenu du diam. AC, & de la circonférence AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celui qui reste BAE contenu de la ligne droite AE, & de la circonférence AB, est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque CAE est angle droit divisé par la seule circonférence AB, & qu'entre icelle circonférence A B & la ligne droite AE, ne peut

tomber vne autre ligne droite; l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droite, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite; ny par consequent l'angle BAC ne sera augmenté par aucune ligne droite. Si d'oc à l'extremité du diametre d'un cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

COROLLAIRE.

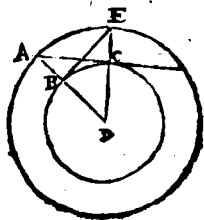
Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn seul point. Car il a esté démontré qu'elle tombe hors le cercle: parquoy elle le touche seulement au point extreme du diametre. Parquoy s'il estoit requis tirer vne ligne droite par le point A donné en la circonférence du cercle, laquelle touche le cercle en A , nous tirerions de A au centre D la ligne droite AD , & sur icelle seroit éléue la perpendiculaire AE , laquelle touchera le cercle en A , comme il a esté démontré.

PROBL. 2. PROP. XVIII.

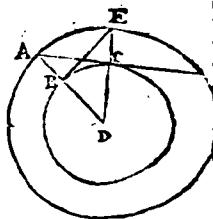
D'un point donné, mener vne ligne droite qui touche vn cercle donné.

Soit le point donné A , duquel il faut mener vne ligne droite qui touche le cercle donné BC , dont le centre est D .

Soit menée la ligne AD coupant le cercle BC en B : puis du centre D , & interuale



DA, soit décrit le cercle AE.
 Et apres auoir leué la perpen-
 diculaire BE au bout du demy
 diametre BD par la 11. p. 1.
 Soit menee la ligne ED cou-
 pāt le cercle BC au poinct C,
 & du poinct donné A, à iceluy
 poinct C, soit menee la ligne
 AC, ie dis qu'elle touche le cercle au poinct C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deu-
 costez esgaulx, & l'angle D commun, la base AC se-
 ra egale à la base EB, & l'angle droit ACD egal
 l'angle EBD, qui sera aussi droit. Et par le corol. d
 la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC
 au seul poinct C. Nous auōs donc du poinct donné A
 mené la ligne droicte AC, qui touche le cercle don-
 né au poinct C : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

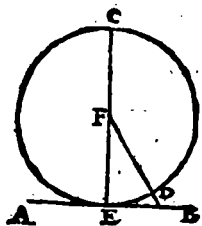
*Nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique, Prob. 20
 vne autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.*

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cer-
 cle, & du centre à l'attouchement on
 meine vne ligne droicte, elle sera per-
 pendiculaire à la touchante.

Soit

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point E , & d'iceluy point soit menee la ligne droite EC passant par le centre F . Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .

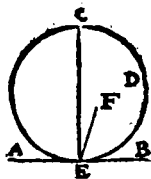


Car si elle ne l'est, soit menee FE perpendiculaire à AB , couppant la circonférence en D . Veu donc qu'au triangle FEF les deux angles FEF , FGE sont moindres que deux droits par la 17. p. 1. & FGE est droit par la construction, FEF sera moindre qu'un droit; & par la 19. p. 1. la ligne FE , ou FD ion egale, sera plus grande que FG , la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB . Parquoy si vne ligne droite touche vn cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droite touche vn cercle; & au point de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire, en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE au point E : & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC . Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire.



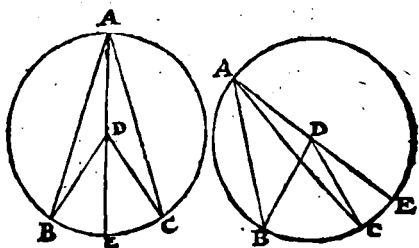
Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F , s'il est possible, & d'iceluy

point soit menez la ligne EF au point de l'attouchement E , elle sera aussi perpendiculaire à AB par la prop. preced. ce qui est impossible : car les deux angles AEC , AEF , seroient droicts, & egaux, la partie au tout : partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne EC , ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.

Dans le cercle ABG , soient les deux angles, sçauoir BAC en la circō-



ference, & BDC au centre, ayant mesme circonference BC , pour base. Je dis que BDC sera double de BAC .

Car premierement si les lignes droictes AB , AC encloient les lignes DB , DC , comme en la premiere figure ; par le centre D estant menez la ligne droicte AD E ; & les lignes DA , DB & DC

estant égales, les deux triangles ADB , & ADC seront Ifoſceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles égaux ſur les baſes AB & AC . Mais l'angle extérieur BDE par la 32. p. 1. eſt égal aux deux angles intérieurs DAB , & DBA , qui ſont égaux: partant il ſera auſſi double du ſeul DAB : par meſme diſcours EDC ſe trouuera double de DAC , & par conſequent les deux enſemble BDC ſeront doubles des deux enſemble BAC .

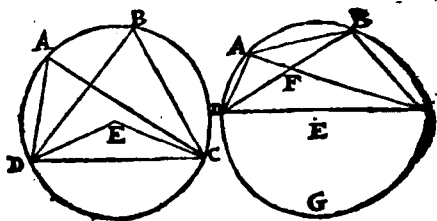
Que ſi l'angle de la circonſerence A eſt comme en la ſeconde figure, il ſ'enſuiura toujours le meſme, ſçauoir que BDC ſera double de BAC .

Car apres auoir mené la ligne ADE , tout ainſi comme cy deſſus par la 32. p. 1. l'angle extérieur BDE ſera égal aux deux oppoſez intérieurs ABD , DAB , & double du ſeul DAB eſtant le triangle Iſoſcele: par meſme diſcours CDE ſera double de CAD , & par les com. ſent. Si de BDE double de BAE on oſte CDE , double de CAE , le demeurant BDC ſera double du demeurant BAC . Parquoy dans le cercle l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonſerence, &c. Ce qu'il falloir prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui ſont en vne meſme portion, ſont égaux entr'eux.

Toute
portion
de cer-
cle, est
ou plus
grande
ou plus
petite



que le demy cercle. Soit donc premierement a cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande portion D A B C, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on meine les deux lignes E D, & E C, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference D A C par la propos. precedente: & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'une mesme, sont egaux entr'elles, ainsi les angles A & B seront egaux entr'eux.

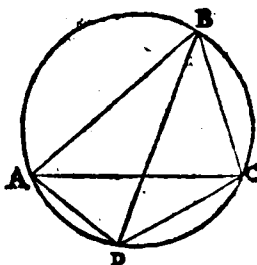
Soit maintenant vne portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles D A C, D B C estans en la mesme portion DABC sont egaux.

Car si on meine la ligne AB, il se fera vne portion B G A plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonsté cy dessus les deux angles A D B & B C A, qui sont en vne mesme portion A G B seront egaux; pareillement au deux triangles D A F, & C B F les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonsté à la 32. p. 1. le troisieme angle D A F sera egal au troisieme angle C B F. D'oc au cercle les angles qui sont en vne mesme portion sont egaux entr'eux: ce qui estoit à prouuer.

PROBL. 20. PRO. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle $ABCD$. Je dis que les angles opposez ABC, ADC ; item BAD, BCD , sont aussi egaux à deux droits.



Car si on mene les deux lignes $AC, \& BD$, les deux angles $ACD, \& ABD$ estans en vne mesme portion $ABCD$, seront egaux par la prop. precedente. Pareillement $DBC, \& CAD$, estans en vne mesme portion $DABC$, seront egaux: donc les deux angles sous le point B , seront egaux aux deux $DAC, \& DCA$, lesquels avec les deux du point D , sont egaux à deux droits par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le point B avec les deux sous le point D : c'est à dire le total ABC , avec le total ADC , seront egaux à deux droits. Nous demonst rerons en la mesme maniere, que les deux angles BAD, BCD , sont egaux à deux droits. Car de rechef les deux angles ABD, ACD , sont egaux. Item les deux BCA, BDA ; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB , lesquels avec BAD sont egaux à deux droits par la 32. p. 1. Donc aussi

les deux BCD , BAD , seront égaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre costez inscrites au cercle, ont les angles opposez égaux à deux angles droicts. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC , & ADC sur la ligne droicte AC , & de mesme costé. Il est evident qu'elles ABC s'entre-couperont seulement es points A & C , puis que par la 10. prop. de ce liure vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux points; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menee la ligne droicte CB couppant les circonférences en D & B , & tirées les deux lignes droictes BA , & DA : par la definition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront égaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle extérieur ADC doit estre plus grand que l'opposé intérieur B . Donc les deux portions ABC , & ADC estans semblables, & inegales, ne se pouuoient mettre sur vne mesme ligne



droi&te A C, & de meſme part. Ce qu'il falloit de-
monſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Semblables portions de cercles eſtans
conſtituées ſur lignes droi&tes egales,
ſont egales entr'elles.

Soient deux por-
tions de cercles ſem-
blables ABC & DEF
conſtituees ſur li-
gnes droi&tes egales



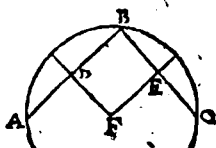
A C, & D F. Je diſ qu'icelles portions ſont egales
entr'elles.

Autrement, ſi elles eſtoient inegales, il ſ'enſui-
vroit que deux portions ſemblables & inegales
pourroient eſtre poſees ſur lignes droi&tes egales
ou bien ſur vne meſme, contre la prop. precedente
donc les deux portions ABC & DEF conſtituez ſur
lignes droi&tes egales, ſeront egales : Ce qu'il falloit
prouver.

PROB. 3. PRO. XXV.

La portion d'un cercle eſtant don-
nee, deſcrire le cercle duquel elle eſt
portion.

Soit vne portion de cercle ABC , de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.



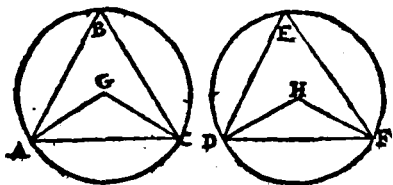
En la circonférence d'icelle portio soient pris comme on voudra les trois poinçts A , B , C , & après auoir mené les deux lignes droictes AB & BC , & icelles couppees en deux également en D & E par la 10. p. 1. d'iceux poinçts soient leuees par la 11. p. 1. les perpendiculaires DF , & EF , se rencontrans au poinçt F : (or elles se doiuent rencontrer, pour ce que si on menoit la ligne droicte DE , seroient faits deux angles EDF , DEF , moindre que deux droits. Je dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. prop. de celiure le centre sera à la ligne DF : Il sera aussi en EF : ce sera donc au poinçt F , qui leur est commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portio: Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonférences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonférences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & les angles d'iceux egaux, sçavoir aux circonferences, B egal à E; & aux centres, G egal à H. Je dis que les circonferences AC, & DF, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.



Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirées du centre à la circonferance seront egales par la 1. def. de ce liure. Ainsi ayant tiré les deux lignes droictes AC, DF, les deux triangles AGC, & DHF, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H; & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF. Pareillement l'angle B étant egal à l'angle E, la portion ABC sera semblable à la portion DEF, par la 10. def. de ce liure, & par la 24. prop. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste portions egales, sçavoir ABC & DEF; le demeurant AC sera egal au demeurant DF: ainsi les angles egaux s'appuyeron sur circonferences egales AC, DF. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouver,

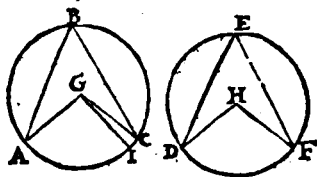
S C H O L I E.

Ce qu'Euclide dit en ceste proposition, & aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre en mesme cercle; c'est à dire qu'en vn mesme cercle les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car tousiours la mesme demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux aura aussi lieu en vn mesme cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF soient les angles ABC, &



DEF tous deux en la circonferance. Item AGC & DHF au centre; ie dis premierement que les angles G & H seront egaux.

; Autrement, l'un d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, il faudra par la 23. p. 1. sur AG faire l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales: ce qui est

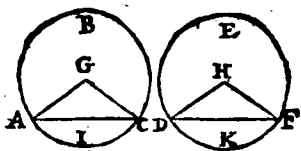
contre nostre hypothese; car nous auions posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales contre la 8. commune sentence. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal.

L'egalité des angles du centre estant prouuée, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitié d'iceux par la 20. proposition de celiure. Donc aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonférences egales sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales, prennent circonférences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Soiēt les deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les cētres soiēt G & H, & dās iceux deux lignes droictes egales AG &



DF. Ie dis que les circonférences qu'elles couppent sont egales, sçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

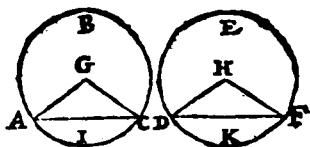
Qu'il ne soit ainsi; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la premiere def. de ce liure, estans les cercles egaux

& la ligne droite AC estant égale à la ligne droite DF, les deux triangles AGC, & DHF auront les trois costez égaux aux trois costez, chacun à son sien : & par la 8. p. 1. l'angle G sera égal à l'angle H, & par la 26. prop. de ce livre ils s'appuyent dessus circonférences égales AIC, DKF; & qui de cercles égaux oste icelles circonférences égales, resteront les circonférences ABC, DEF, aussi égales. Donc aux cercles égaux, les lignes droites égales prennent circonférences égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles égaux, les circonférences égales, soutiennent lignes droites égales.

Es cercles égaux ABC & DEF, desquels les centres sont G, & H, soient les circonférences ABC, DEF égales, souten-



duës des lignes droites AC & DF. Je dis qu'icelles soutendantes sont égales.

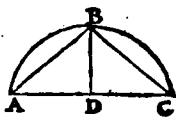
Qu'ainsi ne soit; des centres G & H soient menées les lignes droites GA, GC, HD, HF. Or d'autant que l'on pose les circonférences ABC, DEF égales, les angles G & H qui s'appuyent dessus circonférences égales, seront égaux par la 27. prop. de ce livre : pareillement les costez GA & GC, estans égaux aux costez HD & HF par la 1. def. la base AC

sera egale à la base DF par la 4. p. 1. Donc aux cercles egaux, les circonferences egales soustendent lignes droictes egales : ce qui estoit à prouuer.

PROB. 24. PROP XXX.

Coupper vne circonference donnée en deux egalemēt.

Soit la circonference donnée ABC , laquelle il faut coupper en deux egalemēt.



Soit menée la ligne droicte AC , laquelle soit couppée en deux egalemēt au point D , duquel point soit esleuée la perpédiculaire DB par la 11. p. 1. Je dis que la circonference ABC est couppée en deux egalemēt en B .

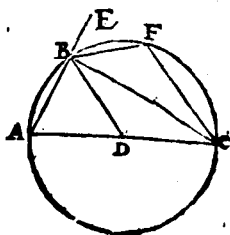
Qu'il ne soit ain si : il faut mener les lignes droictes AB & BC ; & pour autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB , sont egaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB , & les deux angles au point D egaux ; par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base BC , & par la 28. p. de ce liure les circonferences AB & BC seront egales. Nous auons donc couppé la circonference donnée en deux egalemēt. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit : & celui qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un

droict: Mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droict. Et d'avantage, l'angle de la plus grande portion, est bien plus grand qu'un droict: mais l'angle de la plus petite portion est plus petit qu'un droict.

Au cercle ABC, duquel D est centre, & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC: & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC, mais en la moindre portion BIC, l'angle CFB. Je dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, est droict.



Car apres avoir mené la ligne BD, & continué AB iusques en E; il est evident que les triangles ABD & CBD sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçavoir BAD à ABD, & CBD à BCD; & partant les deux ensemble ABD CBD seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au point B, faisant le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. ABC & CBE seront tous deux angles droicts.

Je dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est en la plus grande portion CAB, est plus petit qu'un droict: ce qui est aisé à prouver par la 32. p. 1. d'au-

tant que l'angle ABC, estant droit, les deux autres ensemble ne vaudrôt qu'un droit; & partant l'angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Je dis tiercemēt, que l'angle BFC, qui est en la petite portion CFB, est plus grand qu'un droit: car par la 22. prop. de ce liure la figure de quatre costés ABFC inscrite au cercle, a les deux angles opposez egaux à deux droits; sçauoir A & F. Mais nous auons prouué A estre plus petit qu'un droit; par consequent F sera plus grand.

Je dis en quatriesme lien, que l'angle de la plus grande portion, compris de la ligne droite BC, & de la periphèrè BAC, est plus grand qu'un angle droit: ce qui est euident, car l'angle droit rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finablement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droite BC & de la circonferènce BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF, est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE. Donc au cercle l'angle qui est au demy cercle est droit, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

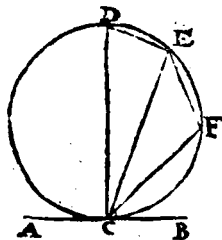
C O R O L L A I R E.

De ce que dessus, est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres, est droit.

T H E O R. 28. P R O P. xxxii.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'atouchement on meine quelque ligne droite couppant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point C , & d'iceluy point soit menée CE , coupant le cercle en deux portions inégales. Je dis que l'angle ECB , est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande portion CDE ,



& que ECA est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite portion CFE .

Qu'il ne soit ainsi, apres avoir mené par le centre le diametre CD , soient menées les lignes DE , EF , FC . Maintenant par la proposition precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont égaux à un droit, c'est à dire à DCB , lequel est droit par la 18. prop. de ce liure; desquels si on oste l'angle commun ECD , le demeurant ECB sera égal au demeurant D . Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle $CFED$, aura les angles opposez F & D , égaux à deux droits: c'est à dire aux deux ECA , ECB , desquels si on oste choses égales, c'est à sçavoir les angles D & ECB égaux, les demeurans F & ECA seront égaux.

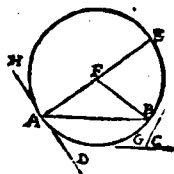
Que si la ligne coupant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la proposition precedente. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

P R O B L.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnée, descrire la portion d'un cercle capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB , & l'angle rectiligne C : il faut sur icelle ligne descrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C .



Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. p. 1. & au point A soit levée AE perpendiculaire à AD ; puis sur la ligne AB , & au point B , soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. p. 1. tirant la ligne BF iusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au point F : donc par la 6. p. 1. les costez FA , FB , seront egaux: Partant le cercle décrit du centre F & interual FA , passera aussi par le point B ; & apres auoir mené la ligne droicte BE , ie dis que l'angle E , qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C . Car d'autant que la ligne droicte AE passe par le centre F , & qu'à icelle, DA est perpendiculaire; par le corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A . Parquoy par la preced. prop. l'angle BAD , qui est egal à l'angle C , sera egal à l'angle E , décrit dans la portion AEB ; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C : ainsi nous auons décrit vne portion de cercle sur la ligne donnée AB , capable d'un angle egal à vn angle donné C .

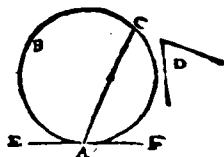
Que si l'angle donné eust esté obtus, comme G, il eust fallu construire l'angle BAH égal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour décrire le cercle AEBI, & par la prop. précédente la plus petite portion AIB eust compris vn angle égal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droit, ne falloit que décrire vn demy cercle sur la ligne donnée. Or nous auons donc construit sur la ligne donné AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, oster vne portion capable d'un angle égal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC; duquel il faut oster vne portion capable d'un angle rectiligne égal à l'angle donné D.



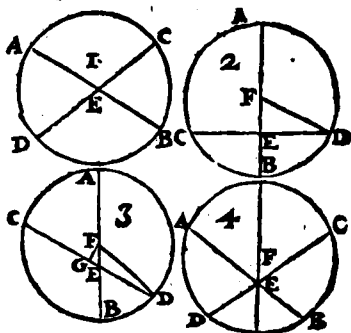
Soit menée la ligne droite EF touchant le cercle en A:

puis par la 23. p. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A l'angle rectiligne FAC égal au donné D, faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux portions. Je dis que tout angle qui sera fait en la portion ABC, sera égal au donné D. Car il sera égal à l'angle FAC par la 32. prop. de ce liure, lequel est égal à D par la construction. Nous auons donc du cercle donné ABC coupé vne portion, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 29. PROP. xxxv.

Si dans vn cercle, deux lignes droictes se couppent l'une l'autre; le rectangle contenu des deux pieces de l'une, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

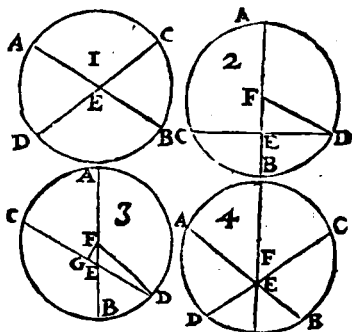
Soient deux lignes droictes AB , CD dans le cercle $ACBD$, s'entre coupant en E . Je dis que le rectangle compris des deux pieces AE & EB , est egal au rectangle cōtenu des des deux pieces CE & ED .



Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passioient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seule AB , passe par le centre F , & diuise DC en deux egalement, comme en la 2. figure; elle la diuise aussi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD , il est euident par la 5. p. 2. que le rectangle de AE & EB avec le quarré de EF , seront egaux au quarré de FB , ou FD , (car la ligne AB est couppée en deux egalement au point F ,

& en deux inegalement en E) & par la 47. p. 1. le quarré de FD estât egal aux deux quarréz de FE & ED, en ostant le quarré cõmun de FE, le demeurant rectâgle de AE & EB, se trouuera



egal au quarré de ED, comme il a esté demonsté à la 14. p. 2. ou au rectangle de CE, ED.

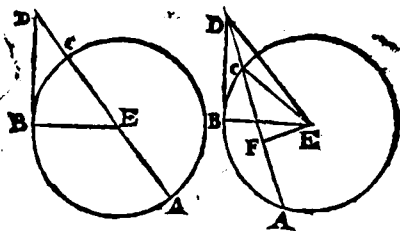
Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisiésme figure) diuise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuiura la mesme chose. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD : pourautant que AB est couppee en deux également en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG & GE par la 47. p. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. p. 1. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarréz de FG & GE, sera egal aux deux quarréz de FG, & GD : & partant en ostant le quarré commun de FG, le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Par mesme discours, & par la mesme 5. p. 2. le quarré de GD est egal au rectangle de CE & ED, & quarré de GE ; en ostant donc le quarré cõmun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouuera egal au rectangle de CE & ED.

Que si ny l'une ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuiura le mesme : car si on mei-

ne le diametre HI , passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH , sera egal au rectangle de CE & ED , comme cy dessus a esté dit; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com.sent. les deux rectangles de AE & EB ; item de CE & ED , seront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes s'entrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

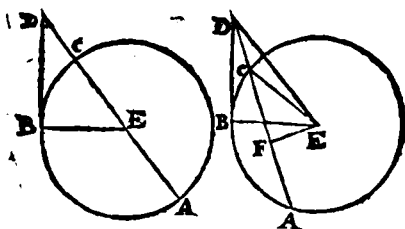
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle, on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Hors le cercle ABC soit pris le point D , duquel soit menée la ligne DA , coupant le cercle en C , &c.

la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la toute AD, & de la partie CD prise entre le point donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante B D.



Qu'il ne soit ainsi : du centre E au point d'attachement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce liure sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour-autant que la ligne AC est coupée en deux également au point E, & à icelle est adjoustée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD avec le quarré de CE, ou BE son egal, est egal au quarré de DE par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrier en ceste sorte : du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux également par la 3. prop. de ce liure. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, avec le quarré de CF, sera egal au quarré de DE, auxquelles choses egales si on adjoust le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux quarrés de CF & FE, ou le seul de

CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarréz de DF & FE, ou au seul de DF par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarréz egaux de CE. & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prēd quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'un poinct pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes coupant le cercle; les rectangles compris souz chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles, sera egal au quarré de la ligne touchante.

Appert aussi que deux lignes droictes tirées d'un mesme poinct, & touchant le cercle, sont egales entr'elles puis que le quarré de chacune d'icelles, sera egal au rectangle de la ligne tirée du mesme poinct & coupant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

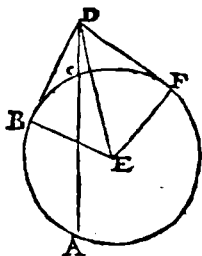
Est aussi evident que d'un mesme poinct pris hors le cercle, peuvent estre seulement tirées deux lignes droictes qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles; & partant du poinct D pourroient estre menées plus de deux lignes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. proposition de ce troisieme livre.

THEOR. 31. PROP. xxxvii.

Si dehors le cercle, on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre

l'atteint : Si le rectangle compris de toute la coupée, & de la partie prise entre le point & la circonférence conuexe, est égal au carré de celle qui atteint ; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle $A B C$ soit pris le point D , & d'iceluy soit menée la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C , & la ligne DB qui atteint le cercle au point B ; & soit le rectangle de la route AD & de la partie CD , égal au carré de DB . Je dis que DB touche le cercle en B .



Car du point D , estant menée la ligne DF touchant le cercle au point F , & du centre E les lignes EB, ED, EF , par la proposition précédente, le carré de DF sera égal au rectangle de AD & CD . Mais par l'hypothèse le carré de DB , est aussi égal à iceluy rectangle : & partant les carrés, & les lignes DF & DB , seront égales. Item EF & EB , sont aussi égales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme : ainsi les deux triangles DBE , & DFE ayans les trois costez égaux aux trois costez, chacun au sien, les angles B & F , seront égaux par la 8. p. 1. & F estant droit par la 15. prop. de ce liure, aussi B sera droit ; & par le coroll. de la 16. prop. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin du troisieme Element.



ELEMENT

Q V A T R I E S M E.

D E F I N I T I O N S.

Vne figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi vne figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chacun costé de la circonscrite touche vn chacun angle de l'inscrite.

3 Mais vne figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la cir-

conference du cercle.

4. Et vne figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5. Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit estre circonscrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est descrit.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodée dans le cercle, quand les extremittez d'icelle sont en la circonference du cercle.

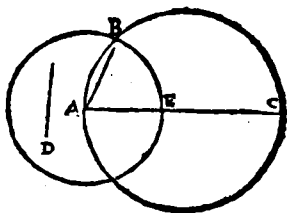
Toutes ces definitions sont si claires & faciles à entendre, qu'il n'est besoin d'en donner autre explication.

PROBL. I. PROPOS. I.

Au cercle donné, accommoder vne

ligne droicte egale à vne ligne droicte
donnee , laquelle ne soit pas plus gran-
de que le diametre du cercle.

Soit le cercle don-
né ABC , dans le-
quel il faut accom-
moder vne ligne
droicte egale à la
ligne droicte don-
nee D , qui n'est
pas plus grande
que AC diametre
d'iceluy cercle.



Soit du diametre
 AC coupee AE
portion egale à la
ligne D . En apres du centre A , & interval AE soit des-
crit le cercle BE couppant le cercle donne au point
 B , & soit menee la ligne droicte AB . le dis que AB
est egale à D .

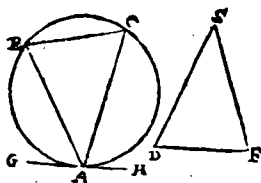
Car par la def. du cercle, AB & AE sont egales, &
par la construction, icelle AE est egale à D , & par la
1. com. sent. AB & D seront egales. Nous auons donc
accommodé au cercle donne vne ligne droicte, &c.
Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donne, inscrire vn
triangle equiangle à vn triangle donne.

Soit le cercle donné $A B C$, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné $D S F$.

Soit menée la ligne $G H$, qui touche le cercle au point A , auquel point soient faicts les deux angles $G A B$ egal à l'angle D , & $H A C$ egal à l'angle F ,



par la 23. p. 1. Puis soit menée $B C$. Je dis que le triangle inscrit $A B C$ est equiangle au donné $D S F$.

Car puis que la ligne $A B$ coupe le cercle en deux portions, l'angle C en la grande portion sera egal à l'angle del'attouchement $G A B$, & par conséquent à l'angle D par la 31. p. 3. & par la mesme raison, la ligne $A C$ coupant le cercle, l'angle B se trouuera aussi egal à l'angle F , & par la 32. p. 1. le troisieme A sera aussi egal l'angle S , & par consequent les triangles seront equiangles. Au cercle donné nous auons donc décrit vn triagle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

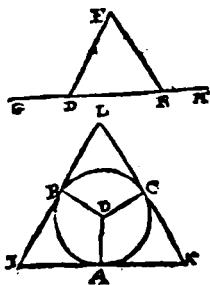
P R O B. 3. P R O P. III.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné $A B C$, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné $D E F$.

Soit prolongé le costé $D F$ de part & d'autre ius-

ques en G & H, & du centre D, soit menée à l'adventure la ligne D A, sur laquelle au point D, soient construits les deux angles ADB égal à EDG, & ADC, égal à l'angle H F E par la 23. p. 1. & aux trois lignes D A, D B, D C, soient menées les trois lignes perpendiculaires I K, I L, K L, lesquelles toucheront le cercle és points A, B, C, par le corol. de la 16. p. 3. & icelles se rencontrant aux trois points I, k, L, feront le triangle I K L, lequel ie dis estre le triangle demandé.



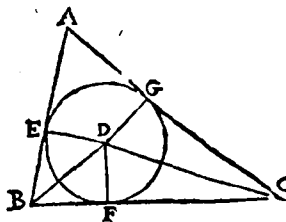
Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puis que tous les costez d'iceluy le touchent és points A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1;) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par la construction ADB est egal à CDE; donc l'angle I sera egal à l'angle E D F. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle D F E. Et par la 32. p. 1. le troisieme L sera egal au troisieme E; ainsi les triangles circonscrit I K L, & donné DEF, seront equiangles: Parquoy nous auons faict ce qui estoit requis.

P R O B. 4. P R O P. I I I I.

Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les deux angles B & C coupez en deux également par la 9. p. 1. par les deux lignes B D & C D, se rencontrans au point D : Item d'ice-



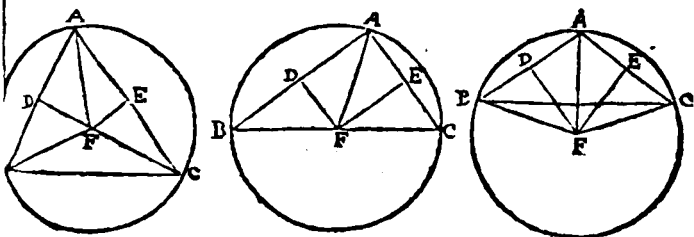
luy point D de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & de centre D, & interualle DE soit descrire le cercle EFG. Le disqu'iceluy cercle est inscrit au triagle dōné ABC.

Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal l'angle DFB, qui est pareillement droit, & le total B estant couppé en deux également, les deux DE & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG sera prouuera egal à DF, & par la 1. com. sent. les trois lignes DE, DF, DG, seront egales: ainsi le cercle EFG descript de l'interualle DE, sera aussi del'interualle de deux autres: & partant il passera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le coro. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'un triangle donné, de-
crire un cercle.

Soit le triangle donné ABC , à l'entour duquel il
faut décrire un cercle.



Soient couppez également les deux costez AB au
point D , & AC au point E par la 10. p. 1. & par
la 11. p. 1. d'iceux points D , & E , soient leuees les
perpendiculaires DF , EF , se rencontrans au point F ,
lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC , ou
hors le triangle : & apres auoir mené les trois lignes
 FA , FB , FC , les deux triangles ADF , BDF , auront les
costez AD , BD egaux, & DF commun, & les deux an-
gles au point D egaux pour estre droicts : donc les
bases AF , BF , seront egaux par la 4. p. 1. Par mesme
discours AF , CF , seront aussi egaux : & par la 1. com-
sent. les trois lignes FA , FB , FC , seront egaux : & par-
tant le cercle décrit de F & interuale FA , passera aussi
par les points B & C . Nous auons donc décrit un
cercle à l'entour du triangle donné ABC : ce qu'il fal-
loit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus: car ils sont tous en vne grande section de cercle: mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit: si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre section de cercle.

Et au contraire, est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy: mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit: & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droite: car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel faudra descrire vn cercle, comme est enseigné en ce Prob. Cely se pratique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique, Prob. 21.

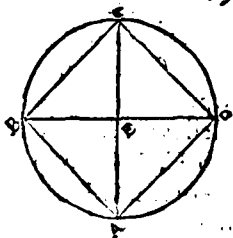
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné ABC , dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres AC & BD se couppans

couppans au centre E en angles droicts, & soient menez les quatre lignes A B, B C, D C & D A. Je dis que A B C D est quarré Inscrit au cercle donné.



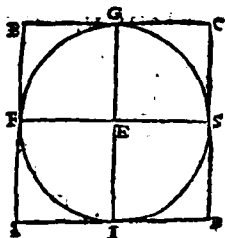
Car d'autant que les quatre angles au poinct E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs auxquels ils insistent, seront egaux par la 26. p. 3. & partant les lignes droictes soustendans iceux seront aussi egales par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatere A B C D seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts, par la 31. p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle; donc le quadrilatere A B C D est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 7. PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn quarré.

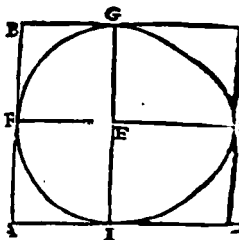
Soit le cercle donné F G S I, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres F S & G I se couppans au centre E à droicts angles, & sur les poincts G & I, soient menez les deux lignes B C, A D paralleles à



N

FS: Ité par les deux poinçts F & S soient menees les deux lignes AB, DC parallèles à GI par la 31. p. 1. icelles quatre lignes parallèles se rēcōtrans aux poinçts A, B, C, D. Je dis que le quadrilatere A B C D est le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux à l'un ou l'autre des deux diametres FS & GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la meme 34. p. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinçt E, chacun à son opposé d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais iceux estans droiçts, aussi les quatre A, B, C, D, seront chacun droiçt, & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droiçts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poinçts F, G, S, I, par le corol. de la 16. p. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'un cercle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 8. PRO. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la figure cy dessus) dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient coupez en deux egaleme les quatre costez aux poinçts F, G, S, I, & apres auoir mené les deux lignes F S & GI s'entre coupans au poinçt E,

d'iceluy poinct E, & interuale E F, si on décrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33. p. 1. IG sera egale & parallele à AB : & FS à B C; ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre, parallelogrammes, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez-opposez egaux, ainsi AF & I E seront egaux: Item FE, & AI; FB & E G; ID & ES : mais toutes icelles moitez des costez du quarré sont egales, partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales, & comme elles touchent le quarré aux poincts F, G, S, I, aussi le cercle décrit de l'interuale de l'une d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poincts, par le corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auõs donc décrit vn cercle dans le quarré donné ABCD : Ce qu'il falloit faire.

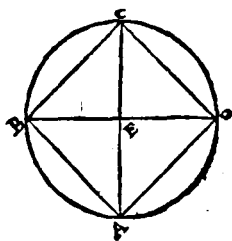
PRO. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, à l'entour duquel il faut décrire vn cercle.

Soient menees les deux diagonales A C & B D, s'entrecoupons au poinct E; puis du centre E, & de l'interuale E A, soit décrit le cercle A D C B.

Je dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il tou-
N ij



chera les quatre angles du quarré donné **A B C D**.

Car le costé **A B** estant egal au costé **A D**, triangle **B A D** sera Ifofcelle : & par la 5. p. 1. les angles **A B D** & **A D B**, sur la base **B D** seront egaux & seront chacun demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle **B A D** droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstons que tous les autres angles des poinçts **A, B, C, D**, seront aussi demy droicts & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle **A E D** les deux angles **E A D** & **E D A** seront egaux, & par consequent les lignes droictes **E A**, **E D** aussi egales par la 6. p. 1. & par mesme discours **E D** sera egalé à **E C**, & **E C** à **E B**; comme aussi **E B** à **E A**: & partant les quatre lignes droictes **E A**, **E D**, **E C**, **E B**, estans egales, il est aisé de conclurre comme aux precedentes, que le cercle décrit du centre **E**, & de l'interualle de l'une d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné **A B C D**. Nous auons donc d'escriit vn cercle à l'entour d'un quarré donné: ce qu'il falloit faire.

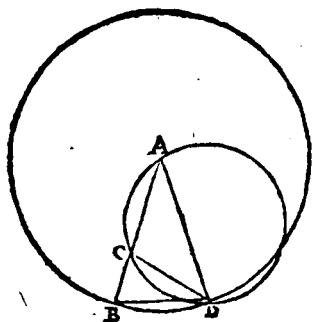
S C H O L I E.

Nous auons enseigné en nostre Geometrie la pratique & construction presque de tous les probl. de ce quatriesme, liure: c'est pourquoy nous n'en dirons icy autre chose.

THEOR. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Ifofcelle, ayant vn chacun des angles de la base pouble del'autre.

Soit la ligne AB couppee en C , comme enseigne la 11. p. 2. & du centre A , & intervalle AB soit descript vn cercle, dans lequel soit accommodée la ligne DB egale à AC ; & apres soit menee la ligne AD . Je dis que ABD est le triangle Isocele demandé.



Car apres avoir mené CD , si à l'entour du triangle ACD , on descript le cercle ACD , comme il a esté enseigné cy dessus; puis que la ligne AB à esté couppee en C , comme enseigne la 11. p. 2. le rectangle de AB & BC , sera egal au quarré de CA , ou de son egale DB ; & par la 37. p. 3. la ligne DB touchera le cercle en D , & l'angle CAD sera egal à l'angle CDB par la 32. p. 3. & si à iceux on adiouste l'angle commun ADC , les tous seront egaux; sçavoir le total ADB , aux deux CAD & ADC : mais l'angle extérieur DCB , est aussi egal aux deux CAD & ADC , par la 32. p. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB , ou à son egal ABD par la 5. p. 1. (car le triangle est Isocele) & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isocele, & le costé DC egal à DB : partant aussi egal à CA ; & le triangle DCA estant Isocele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. p. 1. & l'angle extérieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A : aussi sera ton egal B , & partât aussi son autre egal AD B : voila donc ABD

triangle Iſoſcele, ayant les angles de la baſe doubles du troiſieſme : Ce qu'il falloir faire.

COROLLAIRE.

Pour ce que les trois angles du triangle ABD , ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à 5 cinquiemes de deux droicts: Il eſt evident que l'angle A eſt la 5 partie de deux droicts, & chacun des autres B & D , les deux cinquiemes parties: item A eſtre les deux quintes d'un droict: chacun B & D les 4 quintes, puis que tous les trois ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à 10 quintes d'un droict.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit conſtruire un triangle Iſoſcele, ayant un chacun des angles de la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme faiſt icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnée, nous l'avons enſigné (apres Pappus & Clavius) en noſtre Geometrie pratique Prob. 37, & Scholie du 126.

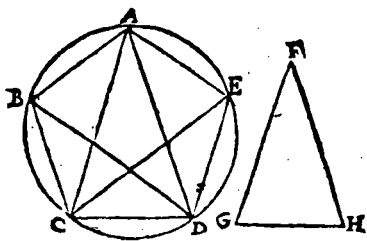
PRO. II. PROP. XI.

Dans un cercle donné, deſcrire un pentagone equiangle, & equilatéral.

Soit le cercle donné à $ABCDE$, dans le quel il faut inſcrire le pentagone demandé.

Dans iceluy cercle il faut inſcrire le triangle ACD equiangle au triagle FGH , lequel ait eſté cōſtruit ſelō le requis de la precedente propoſition, & apres

auoir mené les deux lignes droictes CE & DB, couppât les deux angles ACD & ADC, en deux également par la 9.p.1. soient menées les lignes droictes CB, BA, AE, ED. Je dis



que ABCDE, est le pentagone inscrit equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH a esté construit selon le precepte de la precedente proposition, les deux angles sur la base GH, seront doubles du troisieme F, & par consequent le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisieme A, lesquels estans coupez en deux également par les lignes droictes CE & DB, & les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE sont egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour bases; mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29.p.3. donc tous les cinq costez estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi sera-il bien aisé de prouuer qu'il est equiangle par la 27. prop. 3. d'autant que chacun angle est soustenu de circonferences egales, sçauoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux. Nous auons donc décrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cery il s'ensuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquiesmes parties de deux droictz, ou bien les 6 quints d'un droict. Car puis que les trois angles BAC , CAD , DAE sont egaux par le 27. propos. 3. & CAD est le quint de deux droictz, ou les deux quints d'un droict; le total BAE , qui est composé de ces trois sera les trois quints de deux angles droictz, ou bien les six quints d'un droict.

S C H O L I E.

Clavius enseigne en ce lieu cy deux manieres pour descrire vn pentagone equilateral, & equiangle sur vne ligne droicte donnee & terminee, la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

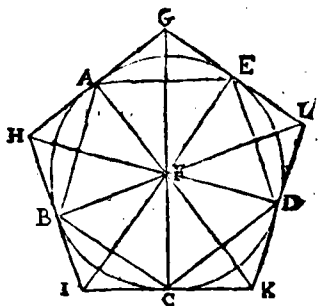
P R O B. 12. P R O P. XII.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné $ABCDE$, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demandé.

Dans iceluy soit descript le pentagone $ABCDE$ par la precedente, & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA , FB , FC , FD , FE , soient me-

nées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. pr. 1. se rencontrent aux cinq points G, H, I, K, L (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux



droits, estans parties des angles droits GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droites AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Je dis que GHIKL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidentement circonscrit, puis que par le coroll. de la 16. prop. 3. les lignes GH, HI, IK, KL, LG touchent le cercle es points A, B, C, D, E: en apres si on mene les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droits par la 47. pr. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarréz de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarréz de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarréz de FA, FE sont egaux: (estans descrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux, & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux; & partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours aussi AFB egal à AFE par la 27. prop. 3. car ils ont egales circon-

ferences pour bases) sera double de $A F H$, & par consequent $A F G$ & $A F H$ seront egaux: Donc les triangles AGF , AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 6. prop. 1. AG sera egale à AH . Par mesme discours GE & EL se trouueront egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costéz egaux; & partant le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monsté que les angles des triangles AGF , EGF sont egaux: sçauoir est, les angles AGF , EGF : Item AGF , AHF : & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le point G , seront egaux aux deux angles sous le point H , & ainsi des autres; partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous auons donc descrit à l'entour d'un cercle donné un pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

P R O B. 13. P R O P. XIII.

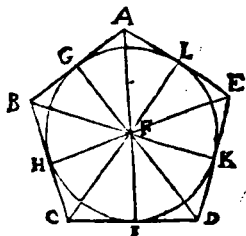
Dans un pentagone equiangle, & equilateral, descrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral $ABCDE$, dans lequel il faut inscrire un cercle.

Soient coupez en deux egalelement chacun des angles A , & B , par les lignes AF & BF par la 9. prop. 1. se rencontrans au point F , & par la 12. propos. 1. du point F soient menées les perpendiculaires FG ,

FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interuale FG soit descript le cercle GHKL. Le dis que c'est le cercle demandé.

Car puisque par la construction les deux angles sous le poinct A sont egaux, ayant esté le total couppe en deux egale-ment, & l'angle droict G egal à l'angle droict L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF,



par la 26. p. 1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AG à AL & FG à FL: par mesme discours FH, FI, FK, se trouueront egales: & partant le cercle descript de F & interuale FG, passe par les poincts G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16. p. 3. le cercle GHKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

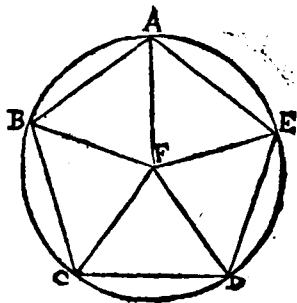
PROBL. 14. PROP. XIII.

Al'entour d'un pentagone equiangle,
& equilateral, descrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.

Soient coupees les cinq angles A, B, C, D, E, en deux egale-ment par la 9. p. 1. avec les lignes AF, BF, CF,

FD, & f'erer cōtrans au point F, & d'iceluy point F, & interuale de l'vne d'icelles cinq lignes, soit descrit le cercle A B C D E. Je dis qu'il sera circonscrit au Pentagone.



Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy a esté couppé en deux également, les deux angles sur la bāse BA seront egaux, & par la 6. p. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux : & par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, ainsi des autres ; & par la 1. commune sentence il est evident qu'icelles cinq lignes seront egales entr'elles, & que partant le cercle descrit de l'interuale de l'vne d'icelles, passera par les extremittez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pantagone donné. Parquoy nous auons descrit vn cercle à l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral : Ce qu'il falloit faire.

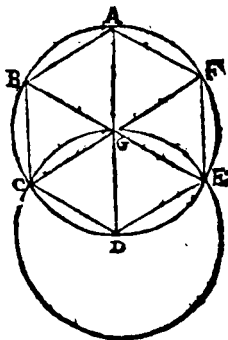
PROB. 15. PROP. xv.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné A B C D E F, dont le centre est G; dans lequel cercle il faut inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, & du centre D & inter-

uale D G , soit décrit vn autre cercle G C E coupant le donné aux poin&ts C & E , desquels poin&ts soient menées les deux lignes C G F , E G B : finalement soient menées les lignes droictes AB , BC , CD , DE , EF , FA. le dis que ABCDEF est l'hexagone demandé.



Car il est evident, n demonstrent comme en la 1. p. 1. que les deux triangles CDG , DEG sont equilateraux , & par le corol. de la 5. p. ils seront aussi chacun equiangles , & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts , & l'angle AGB par la 15. p. 1. vaudra le tiers de deux angles droicts : ainsi par la 13. & 15. p. 1. tous les angles au poin&t G , seront egaux , valant chacun vn tiers de deux angles droicts ; partant les six bases AB , BC , CD , DE , EF , FA , seront egales , & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone sera equilateral , & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux , les deux du poin&t A seront egaux aux deux du poin&t B ; & ainsi des autres. Nous auons donc décrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle , & equilateral : ce qu'il falloit faire.

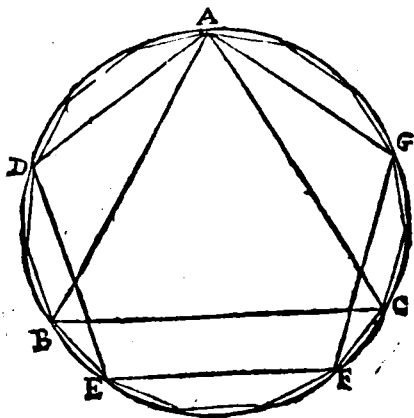
COROLLAIRE.

Par cery est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle : car le costé de l'hexagone DC , est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné , deſcrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inſcrire vn quindecagone equiangle, & equilateral.

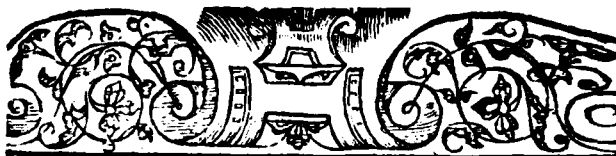


Soit premierement deſcrit dans iceluy le triangle equilateral A B C par la 2. prop. de ce liure; les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisee en trois egalement par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inſcrit le pentagone A D E F G par la 11. prop. de ce liure, ayant l'un des angles sur le point A. Je dis que ayant mené la ligne droite B E, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD, cinquiésme partie de la circonference; partant doit contenir trois costez du quindecagone; & les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq: donc l'arc BE sera la quinziesme partie de toute la circonference; partant la ligne droicte BE sera le costé du quindec. & si par la 1. prop. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelles BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, c'est à sçauoir composez de 13 arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poinçts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & d'auantage nous descrirons & circonscriurons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode praticquée au pentagone.

Fin du quatriésme Element.



E L E M E N T

C I N Q V I E S M E .

D E F I N I T I O N S .



PARTIE, est vne grandeur tirée d'une plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grãde.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure vne autre plus grande, elle est dictée partie d'icelle, comme *A* qui est contenu 3 fois en *B*, est dis partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux sortes de *A. B. C.* parties: car il y en a vne qui mesure son tout; 3. 9. 7. comme *A*, lequel repeté 3 fois constituë son tout *B*: & l'autre sorte ne mesure pas son tout; mais prise ie ne sçay combien de fois excède iceluy, ou deffaut au mesme, comme *A*, lequel estant pris 3 fois excède *C*, mais estant pris seulement 2 fois, il est excédé par le mesme *C*: Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquante; de ceste-là seulement parle icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout; & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

2. Multiplie, est vne grandeur plus
grands

grande qu'une plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si *A* est mesurée par *B* moindre grandeur qu'icelle *A*, elle est dite multipliee de *B*: Ainsi aussi *C*, qui est mesurée 4 fois par *D*, est dite multipliee d'icelle *D*.

A 12. *B* 4.

C 20. *D* 5.

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire qu'une moindre est contenue autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes-là sont dites equemultipliees d'icelles moindres. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de mesme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale; telle comparaison est appelée raison, & par quelqu'uns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne, & la superficie, ny le nombre & la ligne, ne sont pas quantitez de mesme genre. Semblablement si on compare une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire



selon que l'une est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dictée raison, pource qu'elle n'est pas faicte selon la quantité.

Oriaçoit que la raison se trouue proprement és seules quantitez, si est-ce toutesfoi que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, comme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les monumens, les pois, & les puissances, sont aussi dictes auoir raison, si l'habitude d'iceux est considérée, selon la quantité, comme quand nous disons vn temps estre plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps estre egaux, &c. celle habitude sera dite raison, pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referée à vne autre, est dictée par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dictée consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B; A est dict antecedant de la raison, & B consequent: Que si au contraire B est comparé à A; B sera appellé antecedant, & A consequent.

A.	B.
8.	10.

Or ceste raison definie par Euclide, est diuisée en raison rationnelle, & irrationnelle.

La rationnelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10. pieds à vne autre de 5. pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10. & 5. Mais l'irrationnelle, est ceste raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'un quarre au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonsté par Euclide, en la dernière prop. du 10. liure.

Autres disent que la raison ou proportion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire qui ont vne commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par vne mesme commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20. pieds à vne autre de 8. pieds: car vne ligne de 4. pieds ou de 2. est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonale, & de plusieurs autres lignes dont est traitté au 10. livre.

Ceste raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité, est quand deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10 à 10; vne ligne de 12. pieds à vne autre ligne de 12. pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, cōme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 9; celle d'une ligne de 7. pieds à vne autre de 15. pieds, &c.

Ceste raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dictée raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à vne de 4. &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7. pieds à 9. s'appelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9. pieds à vne autre de 12. pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité majeure, est diuisée en 5. genres, sçavoir raison multiple, superparticuliere, super-

partiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premieres desquelles sont simples, & le deux dernieres composées d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois précisément : & ceste raison contient sous soy diuerses especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre deux fois précisément, elle est dite double : si trois fois, triple : si 4, quadruple : si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4, est dite quintuple, pource que 20 contient 4. cinq fois ; & la raison d'une ligne de 18 pieds à une autre de 3 pieds est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité contient la moindre une fois, & en outre une partie aliquote d'icelle moindre : & ceste raison a diuerses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité ; est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3 à 2 en laquelle 3 maiene quantité contient la moindre 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle ; si elle est tierce partie, sesquiterce : si une quarte partie, sesquiquarte : si une cinquieme partie, sesquiquinte, &c. commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'icelle : & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée une raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, une fois & $\frac{2}{3}$ d'icelui : si $\frac{3}{4}$ sera constitué une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36.

Et ainsi des autres, le nom d'icelles commençant tousiours par super, Et prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, Et le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois, Et encore vne partie aliquote d'icelle: ceste-cy est composée de la premiere Et de la deuxiesme; Et tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait celle-cy. Car si la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, Et encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceste raison sera appellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois Et $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{1}{3}$ d'icelle, comme d'une ligne de 7 pieds à vne de 3 pieds, ceste raison s'appellera double sesquiterce: Et la raison de 29 à 7, s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29, 7 est contenu 4 fois Et $\frac{1}{7}$ d'iceluy, Et ainsi des autres.

La raison multiple superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois, Et plusieurs parties aliquotes d'icelle: ceste raison est composée de la premiere Et troisieme; Et tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait celle-cy; comme si la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, Et encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, ceste raison sera appellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3: mais si elle la contient 3 fois, Et encore $\frac{3}{4}$ d'icelle, elle s'appellera triple supertripartiente quarte, comme est la raison de 15 à 4: si elle la contient 4 fois Et encore $\frac{4}{7}$ d'icelle, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7; Et ainsi des autres.

Or tout ce qui a esté dit cy dessus des 5 especes de raison rationnelle d'inegalité majeure, se doit aussi entendre des 5 especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours

apposer ceste syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Pour ce que les denominateurs des raisons rationnelles cy dessus exposées sont utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denomment. Nous appelons denominateur le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'une quantité à l'autre : comme le denominateur de la raison quintuple est 5, pour ce que ce nombre là monstre que la quantité majeure contient 5 fois la mineure. Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$, pour ce qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre une fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle : & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme j'estime, Euclide au 6. livre, & autres Mathématiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle ; car il denomme, comme nous auons dit, combien une quantité est en une autre avec laquelle elle est conférée, ainsi qu'il appert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unités, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominateur de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, auquel le numérateur est toujours l'unité : mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsexuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouver le denominateur de quelconque raison multiple ou sub-

multiple, puis que la prolacion monstre le denominateur de la raison, comme il est euident par les exemples proposez cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'vnité avec la partie aliquote que la maieure quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominateur de la raison sesquialtere est $1\frac{1}{2}$: de la sesquiterce, $1\frac{2}{3}$, &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolacion d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est vn nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquialtere, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsesquiterce, est $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote ; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsesquisepiesme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsesquineufiesme est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raison superpartiente, est vne vnité avec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quartes est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$, & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolacion de la raison exhibe le propre denominateur, comme il appert és exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est vn nombre rompu, duquel le numera-

teur est moindre que le denominateur, d'autant d'unité que la plus grande quantité contient de parties aliquotes par dessus la moindre. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{3}$: celui de subsuperquadrupartiente quinze, est $\frac{5}{3}$, &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numérateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison, auquel si on adjoûte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{3}$, pource que le numérateur de ceste fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est adjoûté le nombre 3, des trois parties, à fin de faire 8, denominateur de la fraction: mais le denominateur de la raison subsuperquadrupartiente neufiesme est $\frac{9}{3}$: & ainsi des autres.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier, denommant la multiple raison, avec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiesme est $3\frac{1}{7}$: mais celui de la raison quadruple sesquiquinte est $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pource que la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme se voit es exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numérateur est le nombre denommant les parties aliquotes obtenues en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte est $\frac{4}{3}$: de subquintuple sesquiseptiesme, $\frac{7}{5}$, &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numérateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy estant multiplié

par le denominateur de la raison multiple, si on adiouste 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction comme il est manifeste par les exemples cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple superpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obsenue en icelle, avec les parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de la moindre. Comme le denominateur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$: de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme appert es exemples cy dessus: & le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est vne fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{2}{3}$: de subquadruple supertripartiente quintes, est $\frac{3}{5}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le demoniateur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit adiouste le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert es exemples posés cy dessus.

Finablement le denominateur de la raison d'egalité est toujours l'unité, pource que les quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'une contient l'autre vne fois precisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles

est dictée raison, ainsi la comparaison de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dictée proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, .

l'habitude d'entre ces raisons sera dictée A. B. C. D. proportion. Or ceste proportion est cōtinue 8. 12. 18. 27.

ou discrete: la continuë est celle de laquelle

les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedant & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dict, que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, mais consequent de la quantité A. Mais proportion discrete ou non continuë, est celle en laquelle chascque quantité entre moyenne est prinse seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent, mais seulement antecedant ou consequent: comme quand on dict que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'une à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent excéder l'une l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste-cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, à fin qu'elles soient dites auoir raison, sçavoir est que l'une ou l'autre d'icelles estant multipliée, elle s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré, & le diametre constituent un triangle isoscele, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus

grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'est à dire pris 4, fois, excède la circonference: car toute la circonference, comme il est demonsté par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'une septiesme partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de ceste def. qu'une ligne finie n'aura raison à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que soit multipliée la ligne finie, elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il appert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dites estre en mesme raison, la premiere à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, quand les equemultiplices de la premiere & troisieme, aux equemultiplices de la seconde & quatrieme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egales, ou excèdent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre respondent.

Ayant esté dit par Euclide, que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites auoir raison l'une à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour estre en mesme raison. Sçauoir est que les equemultiplices de la premiere & troisieme grandeur excèdent, soient egales

ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme, en quelque multiplication que soient prises icelles equemultiplices; comme appert en ces quatre quantitez *A, B, C, D*, où les equemultiplices de *A* & *C*, premiere & tierce sont *E* & *F*, & les equemultiplices de *B* & *D*, seconde & quatriesme quantitez sont *G*, & *H*; tellement qu'il se voit qu'ayant multiplié *A*, & *C*, par un mesme nombre; & *B*, & *D* par quelconque mesme nombre; si

A. B. C. D.

6. 3. 4. 2.

E. G. F. H.

24. 15. 16. 10.

30. 30. 20. 20.

12. 21. 8. 14.

la multiplie *E* excede la multiplie *G* qui luy correspond, aussi la multiplie *F* excede la multiplie *H*; si elle est egale, l'autre sera aussi egale; si elle defaut, aussi sera l'autre, & ce en quelque multiplication qu'on prenne les equemultiplices: & partant il y a mesme raison de *A* premiere quantité à *B* seconde, que de *C* troisieme à *D* 4.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisieme à la quatriesme, il s'ensuit que les equemultiplices de la premiere & troisieme excedent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme, engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y mesme raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quatriesme, il s'ensuira que les equemultiplices de la premiere & troisieme n'excéderont, ne seront egales, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, à fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en mesme

raison sont appellées proportionnelles.

Comme si des grandeurs $A, B, C,$ A. B. C. D.
D, il y a mesme raison de A à B , que 12. 8. 6. 4.
de C à D , icelles grandeurs sont dites
proportionnelles.

Et les grandeurs $E, F, G,$ lesquelles E. F. G.
sont en proportion continue, sont aussi 12. 6. 3.
dites continuellement proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celui de la premiere grandeur excède celui de la seconde, & le multiplie de la troisieme n'excede celui de la quatrieme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4 grandeurs, à fin que la premiere soit dite avoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4. disant qu'ayant pris les equemultiplices de la 1. & de la 3, & les equemultiplices de la 2. & 4. si la multiplie de la premiere excède la multiplie de la 2. mais la multiplie de la 3. A. B. C. D.
 n'excede la multiplie de la 4. il y aura plus 6. 2. 4. 3.
 grande raison de la premiere à la seconde, que E. G. F. H.
 de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple 12. 6. 8. 9.
 icy posé, auquel sont prises $E, & F,$ doubles
 de $A & C,$ 1. & 3. grandeurs, mais $G & H$ triples de $B & D$
 2. & 4. grandeurs: & pource que E multiplie de A 1. est plus
 grande que G multiplie de B 2. & F multiplie de C 3. n'est pas
 plus grande que H multiplie de D 4. la raison de A 1. gran-
 deur à B 2. est dite plus grande que la raison de C 3. à D 4.

Or à fin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est nécessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excèdent, soient égales, ou defaillens, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur soit dictée auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la premiere grandeur excède celle de la deuxiesme : & la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une autre, que d'une troisieme à une quatriesme. il suffira de demonstrier que selon quelque multiplication, la multiplie de la premiere grandeur excédant celle de la seconde, la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme.

Et conuertissant ceste 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiesme, que de la troisieme à la quatriesme, la multiplie de la premiere excédant celle de la deuxiesme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multiplie de la troisieme n'excede celle de la quatriesme.

Que si au contraire d'icelle def. la multiplie de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multiplie de la 3. excède celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons : il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais en fait quatre au moins, si elle est proportion discrete.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisieme la raison doublée de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre, la premiere est dite estre à la quatrieme, en raison triplée de la premiere à la seconde: & tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit acheuée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite auoir à la 3. quantité C, la raison doublée de celle de A à la secunde B, pour ce qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B, sçauoir est la raison de A à

B, & celle de B à C, tellement que la raison de A à C prèd par ce moyen la raison doublée de A à B, c'est à dire posée deux

fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4. D, est dictée triplée de celle de A à B, pour ce qu'entre A & D se trouuent trois raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B: c'est à sçauoir la raison de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raison de A à D encloist par ce moyen la raison triplée de A à B, c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E, est dictée quadruplée de la raison de A à B; pour ce qu'entre A & E sont encloses 4. raisons qui sont egales à celle de A à B, &c.

Donnant a retranché de ceste def. ces mots: Et tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit finie.

II Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire quasi plusieurs quantitez A. B. C. D. sont proportionnelles, comme A, B, C, 4. 2. 6. 3. D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C soit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chasque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D. Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G, sont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E, & H, seront dictes homologues ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dict homologue au terme I: & aussi G à K: ainsi les costez des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. & es suivantes, aucuns moyens d'argumenter es proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dict donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C est à D; on vient à conclure qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant

A. B. C. D.
4. 6. 2. 3.

dans

dans C, que du consequent B au consequent D: & ceste maniere d'argumenter se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en permutant, comme A sera à C, ainsi B à D. Or il est necessaire qu'en ceste maniere d'argumenter, les quatre grandeurs soient de mesme genre. Car le nombre A estant au nombre B, comme vne superficie E est à vne superficie F; de vouloir inferer cōme a fait Donnōt en plusieurs endroits, & notamment es 17. p. 5; 29. 48 & 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A est à la superficie E, comme le nōbre B à la superficie F, c'est se moquer; puis qu'il n'y a nulle raison du nombre à la superficie, comme il appert par les 3 & 5. def. Ceste maniere d'argumenter est demonstrée en la 16. p. de ce liure.

13. Raison inuerse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecédant pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequēt.

Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous insererons que par raison inuerse, comme B est à A, ainsi D est à C, c'est à dire les consequens aux antecédans. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent presques ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C. Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

A. B. C. D.

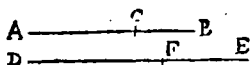
4. 6. 2. 3.

Ceste def. a esté tellement traduite par Donnōt, que le sens d'Euclide n'y peut estre reconnu.

14 Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedant avec le consequent, comme vne seule chose, pour

le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB , comme DF à FE : & on vient à conclure que la toute AB est à CB , comme la toute DE à



FE ; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB , est au mesme consequent CB , comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est à iceluy consequent FE : ceste maniere d'argumenter sera dictée composition de raison : & se prononce ainsi : comme AC est à CB , ainsi DF à FE : donc en composant AB sera à CB , comme DE à FE : laquelle sorte d'argumentation sera démontré en la 18. p. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuuent estre adjustez deux autres : le premier peut-estre dict composition conuerse de raison : sçauoir quand on prend l'antecedent & consequent comme vn seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB , comme DF à FE ; & nous inferons, donc comme $A B$ composée de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant $A C$, ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF : laquelle argumentation nous démonstrerons estre valide sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut-estre dit composition contraire de raison ; c'est à sçauoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme vn seul. Comme si AC est à CB , ainsi que DF à FE , & nous inferons par composition contraire de raison : donc comme AC l'antecedant sera à la toute AB , composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE , composée de l'antecedant & du consequent. Nous démonstrerons sur la 18. p. de ce liure que ceste forme d'argumentation est valable

15. Diuision de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB , (soit veüe la precedente figure) que de DE à FE : donc aussi AC , excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent sera à CB consequent, comme DF excex par lequel l'antecedant excede le consequent, sera à FE consequent. Or les auteurs coucluent ordinairement avec ceste raison ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en diuisant AC sera aussi à CB , comme DF à FE . Ce qui sera demonsté en la 17. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter en peuvent aussi estre adjoustez deux autres: le premier peut estre appellé diuision conuerse de raison, c'est à sçauoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent. Comme si AB est à CB , comme DE à FE , & nous inferons: donc aussi par diuision conuerse de raison, comme CB consequent sera à AC , excex par lequel l'antecedant surmonte le consequent, ainsi FE consequent sera à DF , excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent: laquelle maniere d'argumentation nous demōstrerons pouuoir estre sur la 17. p. 5. Il est manifeste, qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par diuision de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conseré à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB , comme DF à DE : Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB , excex par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à FE , excex par lequel le

consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonst rerons sur la 17. p. de ce liure.

Il est evident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuerfion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , (soit venue la figure de la 14. def.) ainsi DE à FE : & on vient à conclure que AB antecedant sera aussi à AC , excez par lequel il surmonte le consequent, comme DE antecedant sera à DF , excez par lequel l'antecedant excede le consequent, cela sera dit conuerfion de raison. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : Donc par conuerfion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au coroll. de la 19. p. de ce liure. Ceste 16. def. a esté retranchée par Dounot.

17. Raison egalle, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autremét, c'est lors qu'on préd les extremes par la soustractiō des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D ; & autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B , comme E à F ; & B à C , comme F à G ; & C à D comme G à H : si on infere que comme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H , premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumentation est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçavoir est, quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre; & quand l'ordre est peruersty: Euclide explique és deux def. suivantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.

$A. B. C. D.$
 $2. 4. 8. 16.$
 $E. F. G. H.$
 $3. 6. 12. 24.$

18 Proportion ordonnée, est quand l'antecedant est au consequent, comme l'antecedant est au consequent de l'autre: & ainsi que l'un des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auons posé A estre à B , cōme E à F ; & B à C , comme F à G , & C à D , cōme G à H : Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres; & partant ceste proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalité, la proportion d'ordre estant obseruée, soit bon, il sera demonsté en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublée est quād trois grandeurs estans d'un costé, & autant

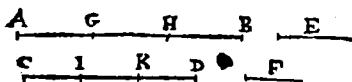
d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiesme à la sixiesme, & comme la seconde à la troisiemesme; ainsi la quatriemesme à la cinquiesme.

Comme si *A* est à *B*, ainsi que *E* est à *F*;
 & comme *B* est à *C*, ainsi *D* à *E*: ceste proportion *A. B. C.*
 sera dictée troublée ou perturbée, d'autant qu'un 12. 8. 4.
 mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison *D. E. F.*
 des premieres grandeurs entr'elles, qu'elles secon- 12. 6. 4.
 des aussi entr'elles. Car les premieres quantitez, la
 premiere est comparée à la seconde, & ceste-cy à la 3: mais les
 secondes quantitez la 2 est comparée à la 3, & la premiere à
 la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison egale,
 la proportion troublée estant gardée, soit bon, il sera demon-
 stré en 23. p. de ce livre.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autât d'autres grâ-
 deurs, chacune à la sienne; comme
 l'une sera multiplice de l'une, ainsi les
 toutes seront multiplices des toutes.

Soient tant de
 grâdeurs qu'on
 voudra *AB* &
CD, equemul-



tiplices d'autant d'autres grandeurs *E* & *F*. Je dis que
 les grandeurs *AB* & *CD* ensemble, seront autant
 multiplices de *E* & *F* ensemble, comme *AB* est de
E, ou *CD* de *F*.

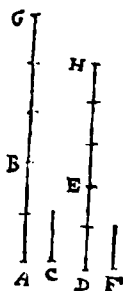
Car puis que AB est multipliee de E ; E mesurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la mesure donc trois fois, & soit icelle AB couppée en trois parties egales, AG , GH , HB , qui seront chacune egale à E . Le mesme se peut dire de la grandeur CD , laquelle on coupera aussi en trois parties egales, CI , IK , KD , estant chacune d'icelles egale à F : mais qui a choses egales, sçauoir à AG & E , adjouste choses egales, sçauoir CI & F , les routes AG , CI ensemble, seront egales aux toutes E & F ensemble. Par mesme raison GH & IK ensemble, seront egales à icelles E & F ensemble; pareillement HB & KD , aux mesmes E & F . Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB , egales à E ; & en CD egales à F ; autant y en a-il en AB & CD prises ensemble, qui sont egales à E & F prises ensemble: Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F , comme la seule AB est triple de la seule E , ou la seule CD de la seule F . S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, que la troisieme de la quarte; & la cinquiesme autant multipliee de la seconde, que la sixiesme de la quarte; la composée de la premiere &

cinquiesme, sera autant multiplie de la seconde, comme la composée de la troisieme & sixiesme, de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplie de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F: & soit la 5. BG autant multiplie de la 2. C, comme la 6. EH, de la 4. F: le dis que la 1. & 5. ensemble AB & BG, seront autant multiplie de la 2. C comme la 3. & 6. DE & EH ensemble, le seront de la 4. F.



Car puis que AB est autant multiplie de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par mesme raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG composée de la premiere & 5. est autant multiplie de la seconde C, comme DH composée de la 3. & 6. l'est de la 4. F. Parquoy si la premiere est autant multiplie de la seconde, que la troisieme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 3. PROP. III.

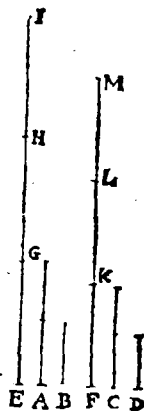
Si la premiere est autant multiplie de la seconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des equimultiples

de la premiere, & troisieme: la multi-
 plice de la premiere sera aussi autāt mul-
 tiplice de la seconde, que la multi-
 plice de la tiercele sera de la quarte.

Soit A autāt multi-
 plice de B, com-
 me C l'est de D; & de la 1. & 3. A, C,
 soient prises les equemultiplices E,
 & F. le dis que E sera autant multi-
 plices de B, que F de D.

Car puis que E est autant multi-
 plice de A, que F l'est de C: E con-
 tiendra autant de parties egales à A,
 comme F de parties egales à C.
 Soit donc E divisée en EG, GH, &
 HI, chacune egale à A: Item F di-
 visée en FK, KL & LM, chacune
 egale à C: & d'autant que EG &
 & FK sont egales à A & C, lesquel-
 les sont equemultiplices de B & D
 par l'hypothese, aussi EG & FK
 seront equemultiplices des memes

B & D. Par mesme raison GH & KL: item HI &
 LM, seront equemultiplices d'icelles B & D. Veu
 donc que EG premiere grandeur est autant multi-
 plice de la seconde B, que FK 3. l'est de D 4. item
 GH 5. autant multi-
 plice de la mesme seconde B, que
 KL 6. de la 4. D; aussi EH composée de la 1. & 5. se-
 ra autant multi-
 plice de la 2. B, que FL composée
 de la 3. & 6. l'est de la 4. D, par la precedente prop.
 Derechef puis que EH premiere grandeur est autant
 multi-
 plice de la seconde B que FL 3. l'est de D 4. &



HI 5. est aussi autant multiplie de la seconde B, que L M 6 l'est de la 4. D:EI composee de la 1. & 5. sera aussi autant multiplie de la 2 B, que F M composee de la 3 & 6 l'est de D 4. par la 2. prop. de ce liure. Si donc la premiere est autant multiplie de la seconde, &c. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 4. PROP. III.

Si la premiere est à la seconde, en mesme raisó que la tierce à la quarte: aussi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront mesme raison aux equemultiplices de la secóde & quarte, en quelque multiplicatió que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrerespondent.

Soit A à B en mesme raison que C à D, & soiét prises E & F equemultiplices de A premiere & C 3: itē G & H equemultiplices de B 2. & D 4. seló quelque multiplication que ce soit. Je dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere est autant multiplie de A 2. que F 3. l'est de C 4. & I, k sont



prinſes equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce ; auſſi par la 3. prop. de ce liure I & K, ſeront equemultiplices de A & C, ſeconde & quarte. Par meſme raiſon L & M, ſeront auſſi equemultiplices de B & D : & puis que A eſt à B cōme C à D : & d'icelles A & C, 1 & 3 ont eſté demōſtrées I & K equemultiplices, mais de B & D, 2 & 3 autres equemultiplices L & M : par la conuerſe de la 6 def. de ce liure, ſi I deſſaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K deſſaudra, ſera egale, ou plus grāde que M, ſelon quelconques multiplications qu'icelles equemultiplices ſoient priſes. Et pour autant que I & k, ſont equemultiplices de E & F ; pareillement L & M de G & H, par la meſme 6 def. il y aura meſme raiſon de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

C O R O L L A I R E.

Par cecy eſt manifeſte la preuue de la raiſon inuerſe, qu'Eucclide a expliquee en la 13. def. de ce liure, ſçavoir eſt, que ſi 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, c'eſt à dire que E eſtans à G comme F à H, auſſi en changeant G ſera à E comme H à F. Car puis qu'il a eſté demonſtré que ſi I deſaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K deſaudra, ſera egale, ou plus grande que M : ſelon quelconques multiples. Il appert auſſi que ſi L deſaut, eſt egale, ou plus grande que I, auſſi M deſaudra, ſera egale, ou plus grande que K, ſelon quelconques multiplications : Et partant par la 6 def. il y aura meſme raiſon de G à E que de H à F.

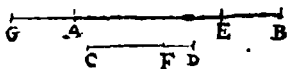
T H E O R. 5. P R O P. V.

Si vne grandeur eſt autant multipliee

d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée: aussi le reste sera autant multiplie du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB , autant multiplie de la toute CD , comme la retranchée AE , de la retranchée CF . Je dis que le reste EB sera autant multiplie du reste FD , que la toute AB est de la toute CD .

Car AG étant faite autant multiplie de FD , comme AE est de CF , ou comme la toute



te AB est de la toute de CD : d'autant que AE , AG sont equemultiples de CF , FD : par la 1. prop. de ce liure la toute GE , sera autant multiplie de la toute CD , comme AE de CF : Mais aussi AB , estoit autāt multiplie de CD comme AE de CF : donc GE , AB , sont equemultiples de CD , & partant egales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce qui est de commun AE , demeureront egales GA , EB ; & partant seront equemultiples de FD , puis que GA a esté posée multiplie d'icelle FD , & autant comme AB de CD : donc aussi le reste EB sera autant multiplie du reste FD , que la toute AB l'est de la toute CD . Parquoy si vne grandeur est autant multiplie d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

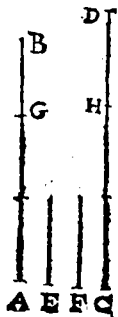
THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultiples

de deux autres grandeurs , & d'icelles on retranche des equemultiplices; ou les restes seront egaux aux mesmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs $A B, C D$, equemultiplices des grandeurs E, F , & les retranchees $A G, C H$ aussi equemultiplices des mesmes E, F . Je dis que les restes $G B, H D$, seront ou egales aux mesmes E, F , ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que $A B$ & $C D$, sont equemultiplices de E & F ; en $A B$ il y aura autāt de grandeurs egales à E comme en $C D$ de grandeurs egales à F . Pareillement d'autant que la retranchee $A G$ est autant multipliee de E , que la retranchee $C H$ l'est de F ; $A G$ contiendra autant de grandeurs egales à E , que $C H$ de grandeurs egales à F , par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales multitudes de grandeurs $A B$ & $C D$,

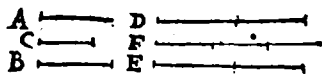


on oste egales multitudes de grādeurs $A G, C H$, les multitudes demeurantes $G B, H D$ seront egales: c'est à dire que $G B$ contiendra autant de fois E , comme $H D$ contiendra F ; ou bien si $G B$ est egale à E , aussi $H D$ sera egale à F : & par ainsi iceux restes $G B, H D$ seront egales à E & F , chacune à la sienne, ou bien serōt equimultiplices d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont equimultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales : ont mesme raison à vne mesme : & ceste - cy aura mesme raison aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle soit. C. Je dis



que A & B ont mesme raison l'une que l'autre à C; & que C aura mesme raison à A que à B.

Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E equemultiples de A premiere, & B tierce, soit aussi pris F quelconque multiple de C, seconde & quarte: donc pour autant que D est autant multiple de A, que E est multiple de B; & que A & B sont posées egales: aussi D & E seront egales par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, egale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, egale, ou plus petite que la mesme F, & par la susdite def. de ce liure, il y aura telle raison de A à C, comme de B a la mesme C.

Quant à l'autre partie, elle se prouue tout de mesme par la susdite def. en prenant les mesmes equemultiples, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inuerse. Car puis qu'il a esté démontré que A est à C comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le corol. de la 4. prop. de ce liure. Donc les grandeurs egales ont mesme raison à vne mesme, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande

a plus grande raison à vne mesme, que la plus petite: & vne mesme a plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales A B & C, desquelles A B est la plus grande, & vne troisieme que'elle quelle soit D. Je dis que A B a plus grande raison à la troisieme D, que non pas C: item, que D a plus grande raison à C, qu'à A B.



Qu'il ne soit ainsi: soit entenduë A B, premiere grandeur, D seconde, C tierce, & D quatre. D'autant que A B est plus grande que C, soit retranchée A E egale à icelle C, & soient trouuées lesequemultiplices, à sçauoir F G de B E, & G H de E A, en sorte que F G & G H soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux F G, G H, sont equemultiplices des deux B E, E A, par la 1. prop. de ce liure, la toute H F sera autant multipliee de la toute A B, comme H G de A E, ou de C son egale: Maintenant soit prise I k aussi multipliee de D, en sorte qu'elle soit plus petite que H F, mais plus grande que H G: (ce qui est facile, d'autant que D est plus petite que ny F G, ny G H: si bié qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'õ ait ce que l'õ cherche.) D'autât que F H, G H sont equemultiplices de A B premiere, & C troisieme, si I k est prise pour l'equemultiplice, tant de D secõde, que

D quatriesme, il est evident que HF multiplie de AB premiere, estant plus grande que Ik multiplie de D secõde, HG multiplie de C tierce, n'est pas plus grande que Ik multiplie de D quarte: & partant par la huiſtiesme def. de ce liure il y aura plus grande raison de AB à D , que de C à la mesme D .

Quant à la secõde partie: d'autant que Ik multiplie de la premiere D , (car il faut maintenant poser D premiere & troisieme, C secõde, & AB quatrieme) est plus grande que HG multiplie de la seconde C ; & IK multiplie de la troisieme D , est moindre que FH multiplie de AB quatrieme: Il y aura plus grande raison de D à C , que de D à AB par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grãdeurs inegales, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme, sont egales entr'elles: & celles là aussi sont egales, auxquelles vne mesme grandeur a mesme raison.

Soient premierement deux grandeurs A & B , lesquelles ont mesme raison l'une que l'autre à la troisieme C . Je dis qu'elles sont egales entr'elles.

Car si elles n'estoient egales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raison



à C .

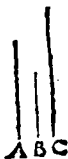
a C, que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C a vne mesme raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi egales entr'elles: Car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la mesme 8. prop. à icelle plus petite, C'auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme grandeur sont egales entr'elles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 10. PROPOS. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle à laquelle la mesme a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à C soit plus grande que de B à la mesme C. Je dis que A sera plus grande que B. Item si C a plus grande raison à B que non pas à A: Je dis que B sera plus petite que A.



Autrement, pour la premiere partie; si A n'estoit plus grande que B, elle seroit egale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales elles auroient mesme raison l'une que l'autre

Q

à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui seroit cōtre l'hypothese: si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce mesme liure, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny egale à B; & par consequent sera plus grande.

Quant à la seconde parrie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus grande, ce qui est impossible: car si A & B estoient egales, C auroit mesme raison à l'une qu'à l'autre par la susdicte 7. prop. de ce liure: ce qui est contre nostre hypothese: si aussi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la susdicte 8. prop. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F: Je dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi; de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelconques equemultiplices, G, H, I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si G multiplie de A, est egale, plus grande, ou plus petite que k multiplie de B: aussi H multiplie de C, sera egale, plus grande, ou plus

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

petite que L multiplie de D. Item puis que comme C à D, ainsi E à F, si H multiplie de C est egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplie de D, aussi I multiplie de E sera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplie de F : Parquoy si G multiplie de A premiere est plus grande, egale, ou plus petite que K multiplie de B seconde, aussi I multiplie de E tierce, sera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplie de F quarte; & par la susdite 6. def. comme A sera à B, ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de mesme à vne sont aussi de mesme entr'elles: Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR 12. PROP. XII.

Sitant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles: comme l'une des antecédâtes sera à l'une des conséquentes, ainsi toutes les antecédantes seront à toutes les conséquentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir que A soit à B comme C est à D, & E à F: Je dis que comme l'une des antecédantes est à vne des conséquentes, sçavoir est A à B, ainsi toutes les antecédantes ensemble A, C, E, seront à toutes les conséquentes ensemble B, D, F.

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I; item de B, D, F, les equemultiplices k, L, M, toutes les trois multiples ensemble G, H, I, seront autant multiples des trois ensemble A, C, E, comme la seule G est multiple de la seule A par la premiere prop. de ce liure. Pareillement par la mesme raison toutes les trois k, L, M ensemble, seront autant multiples des trois B, D, F ensemble, comme k sera multiple de B. Parrant puisque A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G multiple de A premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que k multi-

G _____	H _____	I _____
A _____	C _____	E _____
B _____	D _____	F _____
k _____	L _____	M _____

plice de B seconde, aussi H multiple de D troisieme, sera plus grande, egale, ou plus petite que L, multiple de D quatriesme, par la conuersé de la 6. def. de ce liure, & ainsi des deux autres: Parrant si G est plus grande, egale, ou plus petite que k, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, egal ou plus petit que le composé des trois k, L, M. Donc par la mesme 6. def. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble: Parquoy si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 13 PRO. XIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquieme à la sixiesme: aussi la premie-

re aura plus grande raison à la seconde, que la cinquième à la sixième.

Soit A première à B seconde (en la précédente figure) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquième à F sixième. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A première à B seconde, que de E cinquième à F sixième.

Car estans prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & de B, D, F, aussi les equemultiplices K, L, M; pour- autant que A est à B, comme C à D, si G multiplie de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B, aussi par la conuerse de la 6. def. de' ce liure, H multiplie de C, sera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C première à D seconde, que de E tierce à F quatriesme, si H multiplie de C, est plus grande que L multiplie de D, il n'est pas necessaire que I multiplie de E excède M multiplie de F, par la 8. def. de ce liure cōuertie: donc aussi si G excède K, il n'est pas necessaire que I excède M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la première est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquième E à la sixième F: aussi la première A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquième E, à la sixième F.

Q. iij

Car si la raison de C à D est moindre que celle de E a F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde estant plus grande que celle de C tierce a D quarte, si I excède M, il n'est pas nécessaire que H excède L, car quelquesfois elle defaut, ou est egale a icelle par la 8. def. de ce livre conuertie. Mais si H defaut, ou est egale a L, aussi G defaudra, ou sera egale a K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre a D 2. comme A 3. a B 4. Parquoy si I excède M, il n'est pas nécessaire que G excède K: & par une par la susdicté 8 def. il y aura plus grande raison de E a F, que de A a B, c'est à dire que la raison de A a B sera moindre que de E a F, ce qui estoit proposé.

En la mesme maniere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la premiere a la seconde, que de la tierce a la quarte: mais la tierce a plus grande raison a la quarte, que la cinquieme a la sixiesme; pareillemens la premiere aura beaucoup plus grande raison a la seconde, que la cinquieme a la sixiesme.

Que si la premiere a moindre raison a la seconde que la tierce a la quarte, & la tierce a moindre raison a la quatriesme que la cinquieme a la sixiesme; aussi la premiere aura beaucoup moindre raison a la seconde, que la cinquieme a la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte, & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C est à D, & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C troisieme: le dis que B seconde sera aussi plus grande, egale ou plus petite que D quatrieme.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raison de A à B, que de C à la mesme B, par la 8. prop. de ce liure, & par consequent plus grande raison de C à D, que de C à B, estant icelle la mesme raison que de A à B, & par la 10. prop. de ce mesme liure B sera plus grande que D.

Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce mesme liure A sera à B, comme C à B; & puis que les raisons de C à D, & C à B, sont les mesmes que de A à B, les raisons de C à D, & de C à B, seront de mesme entr'elles par la 11. prop. de ce liure, & partant par la 9. prop. B & D seront egales.

Finablement soit A moindre que C, & par la susdite 8. prop. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D; & par consequent plus grande raison de A à B, que de A à D, puis qu'il y a mesme raison de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce mesme liure B sera moindre que D. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

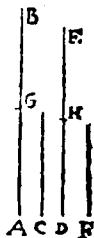
Que si la seconde est plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: aussi la premiere sera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puisque A est a B comme C a D, en changeant B sera a A comme D a C par le corol. de la 4. p. de ce liure. Donc si B est plus grande, ou egale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la susdite 14. prop.

Or Euclide n'a pas démontré que si la premiere est plus grande, égale, ou plus petite que la seconde: aussi la tierce sera plus grande, égale, ou moindre que la quarte, pour ce que cela est evident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neanmoins démontrer apres Commandin: mais d'autant que sa démonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de diuers genres.

THEOR. 15. PRO. xv.

Les grandeurs sont entr'elles, comme
sont leurs equemultiplices entr'elles.

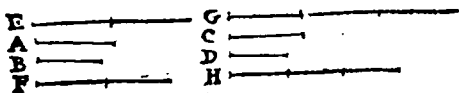
Soit A B autant multiplie de C comme D E est multiplie de F. Je dis que A B sera à D E, comme C à F. Car puis que A B & D E sont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en A B, autant de parties égales à C, comme D E contient de parties égales à F: soit donc diuisee A B és parties A G, G B égales à C, & D E és parties D H, H E égales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de A B, sera à vne chacune partie de D E, comme C est à F, & par la 12. prop. toutes les antecedentes A B, seront à toutes les consequentes D E, comme A G l'une des antecedentes, est à D H, l'une des consequentes, c'est à dire comme C à F, puis que c'est la mesme raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles comme sont leurs equemultiplices entr'elles: Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles ; elles le seront aussi estans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.



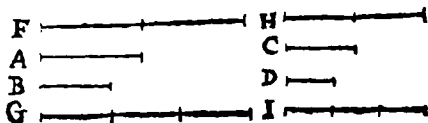
Car si on prend E & F equemultiples de A & B ; item G & H equemultiples de C & D ; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D ; & par consequent E estant à F, & C à D, en mesme raison que A à B, elles sont de mesme entr'elles par la 11. prop. de ce liure. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mesmes que de C à D, elles seront aussi de mesme entr'elles par la susdite 11. prop. c'est à dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte : parquoy par la 14. prop. de ce mesme liure si E premiere est plus grande, egale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, egale, ou moindre que H quatriesme, en quelconque multiplication que soient prises lesequemultiples ; & par la 6. def. d'icelny cinquieme liure A sera à C, comme B à D (puisque E & F sont equemultiples de A premiere, & B

troisiesme; & G & H equemultiplices de C seconde & D 4. & celles-là defaillent, sont egales, ou excèdent celles-cy, &c.) Parquoy si quatre grâdeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estant permu-
tées: Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Or la demonstration de ceste proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B estoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre; aussi les equemultiplices E & F seroient d'un genre, c'est à sçavoir duquel sont A & B; & les equemultiplices G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui auquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E estre plus grande, egale ou, moindre que G; & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce livre. La raison permutee a donc seulement lieu quand les quatre grandeurs sont d'un mesme genre: Ce que Donnот n'a pas recognu, puis qu'il ysurpe icelle, les grandeurs estans de diuers genres, en plusieurs propositions, tant de celiure que du 10.

Ledit Donnот a aussi reiecté ceste demonstration des anciens, & au lieu d'icelle s'est imaginé la suivante. Soit A à B comme C est à D. Je dis aussi, que A sera alternatiue-



ment à C comme B est à D. Car si on prend F & H equemultiplices de A & C: item G & I equemultipli-

cet de B & D, par la 4. p. 5. F, G, H, I, seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F sera plus grande, egale, ou plus petite que G; aussi H sera plus grande, egale, ou plus petite que I: (ce qui ne se peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la premiere F estant plus grande, &c. que H 3. la seconde G seroit plus grande, &c. que I 4. mais bien pouvoit-il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) Et par la 6. def. 5. A sera à C comme B à D: ce qui est euidentement faux: car pour estre A à C comme B à D, il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiplies de A premiere & B troisieme; item H & I multiplies de C 2. & D 4. fussent equemultiplies, & elles ne le sont pas. Dounor n'a pas donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant sa pretenduë demonstration de ceste 16. proposition doit estre rejetée, & celle des anciens suiue.

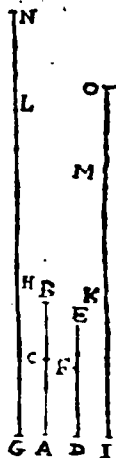
THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles diuisées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB, CB, & DE, F E proportionnelles, c'est à dire que A B soit à C B comme D E à F E. Je dis que les mesmes grandeurs diuisées sont aussi proportionnelles, c'est à dire que comme A C est à C B, ainsi D F est à F E.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE soient prises les equemultiplies GH, HL, IK, KM, chacune à chacune,

& par la 1. prop. de ce liure G L sera autant multi-
 plice de AB, que GH de AC, c'est à dire comme IK
 de DF. Mais icelle IK est autant multipliee de DF,
 que IM de DE par la mesme 1. prop. donc GL, IM
 sont equemultiplices de AB, DE. Derechef soient
 prises LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour
 autant que H L premiere est autant
 multipliee de CB seconde, que K M
 tierce de la quarte FE, & LN cinques-
 me autant multipliee de CB seconde,
 que M O sixiesme de la quarte FE, par
 la 2. prop. de ce mesme liure, HN sera
 autant multipliee de CB seconde, que
 KO de FE quatriesme. Et puisque AB
 est à CB, comme DE à FE: & ont esté
 prises GL, IM equemultiplices de AB,
 DE, mais HN, KO de CB, FE, par la 6.
 def. conuertie si GL multipliee de AB
 premiere excède, est egale, ou moindre
 que H N multipliee de CB seconde,
 aussi IM, multipliee de DE tierce ex-
 cedera, sera egale, ou moindre, que KO
 multipliee de FE quarte: ostant donc les choses
 communes HL, KM, si GH excède LN, aussi IK ex-
 cedera MO; & si egale, egale; & si moindre, moin-
 dre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiplices
 de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO eque-
 multiplices de CB seconde & FE quarte, & il a esté
 demonstré (en quelconque multiplication qu'ayent
 esté prises icelles equemultiplices) que les eque-
 multiplices de la premiere & troisieme excedent,
 sont egales, ou moindres, que les equemultiplices
 de la seconde & quatriesme, par la susdite 6. def. de ce
 cinquesme liure AC sera à CB, comme D F à FE: ce



qui estoit proposé. Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles, icelles diuïsées seront aussi proportionnelles : Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerse de la raison diuïsée: c'est à dire que si AB est à CB, comme DE à FE, aussi CB sera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainsi DE à FE, en diuisant par la 17. p. 5. comme AC sera à CB, ainsi DE à FE: & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere, sera demonstéré ce moyen là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appelé conuerse diuision de raison: c'est à dire que si AC est à AB, comme DF à DE: aussi AC sera à CB, ainsi que DF à FE. Car puis que AC est à AB comme DF à DE: en changeant, comme AB sera à AC, ainsi DE à DF: donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB à AC, ainsi FE à DF: & en changeant de rechef, comme AC à CB, ainsi DF à FE: ce qui estoit à demonstrier.

THEO. 18. P R O P. XVIII.

Si les grandeurs diuïsées sont proportionnelles; icelles composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuïsées AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Je dis qu'en composant, AC est à CB, comme DF à EF.

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est pas à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible: & en diuisant par la precedente proposition, DG sera à GF, comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF: donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere est plus grande que DE troisieme: donc par la 14. proposition de ce mesme liure GF seconde sera aussi plus grande que EF quatrieme, la partie que le tout; ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.



Par mesme discours on demonstrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, en mesme raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs diuisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Donnot s'estant licentié de changer la 17. p. a la 18. a aussi rejetté ceste demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non: & celle qu'il a mise au lieu d'icelle a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il usurpe la raison permistée, laquelle nous

auons monſtré au ſibolie de la 16. p. 5. ne pouuoir conuenir que aux grandeurs de meſme genre : & partant doit eſtre preferée la demonſtration uniuerſelle des anciens à la particulière de Dounot.

Nous demonſtrerons icy ces deux moyens là d'argumenter eſ proportions, leſquels nous auons deſcrits en la 14. def. de ce liure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerſe compoſition de raiſon : ſoit comme AB à BC ainſi DE à EF. Je diſ, que comme AC eſt à AB, ainſi DE à DE. Car puis que comme AB eſt à BC, ainſi DE à EF, en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE : donc en compoſant par la 18. prop. cy deſſus, comme AC ſera à AB, ainſi DE à DE : ce qu'il falloit prouuer.

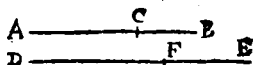
Quant à l'autre moyen que nous auons appellé contraire compoſition de raiſon : ſoit derechef comme AB à BC, ainſi DE à EF : Je diſ que par le contraire de compoſition de raiſon, comme AB à AC, ainſi DE à DF. Car puis que comme AB eſt à BC, ainſi DE à EF, en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE : donc auſſi en compoſant par la meſme prop. comme AC ſera à AB, ainſi DE à DE : & partant en changeant derechef, comme AB ſera à AC, ainſi DE ſera à DF : ce qui eſtoit propoſé à prouuer.

THEO. 19. PROP. XIX.

Sile tout eſt au tout, comme le reſtranché au reſtranché ; le reſte ſera auſſi au reſte, comme le tout eſt au tout.

Soit à la toute AB, la toute DE, comme le reſtranché AC, au reſtranché DF. Je diſ que le reſte CB eſt auſſi au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puisque AB est à DE,
comme AC à DF, aussi en
permutant par la 16. prop.
de ce liure AB sera AC, com-
me DE à DF; & par la 17.



prop. de ce mesme liure, en diuisant comme CB sera
à AC, ainsi FE sera à DF: parquoy en permutant
derechef par la susdicte 16. prop. CB sera à FE, com-
me AC à DF, c'est à dire comme la toute AB à la
toute DE, puisque AB, DE, & AC, DF, ont esté
posées en mesme raison. Parquoy si le tout est au
tout comme le retranché au retranché, &c. Cé qu'il
falloit demonstrier.

SCHOLIE.

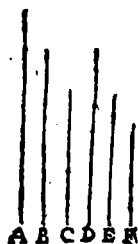
*Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter. Es pro-
portions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit
comme AB à CB, ainsi DE à FE. Le du par conuersion de
raison, AB estre aussi à AC, comme DE à DF. Car puisque
comme AB à CB, ainsi DE, à FE en diuisant par la 17.
prop. de ce liure, comme AC à CB, ainsi DF à FE: donc
aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF: &
partant en composant par la 18. prop. de ce cinquieme
liure, comme AB à AC, ainsi DE à DF; ce qui estoit proposé.*

THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois
d'un autre, estans prises de deux en
deux, sont en mesme raison, & qu'en
raison egale la premiere soit plus
grande

grande que la troisieme , aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme , & si egale , egale ; si plus petite , plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F : & que A premiere soit plus grande que C troisieme. Je dis que D quatrieme sera aussi plus grande que F sixieme.



Car puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquieme liure. Mais comme A à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E : (car puisque B est à C, comme E à F, en changeant comme C sera à B, ainsi F à E) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E, que de F à E, & par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est egale à C ; ie dis aussi que D sera egale à F. Car puisque A est egale à C, par la 7. prop. de ce liure, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E : & par la 11. p. 5. D sera à E, comme C à B : & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E ; & parant D & F seront egales par la 9. prop. de ce mesme liure.

En troisieme lieu, si A est moindre que C ; ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B,

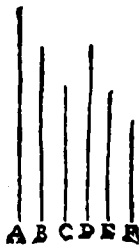
R

que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E; il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquieme livre. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E : & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grâdeurs d'un costé, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme; aussi la 4^e sera plus grande que la sixieme, & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C. & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison, estant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale,



plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grãde que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. prop. de ce liure Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquiesme liure. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouver comme en la precedente, si A est egale, ou plus perite que C; D estre aussi egale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 22. PROP. XXII.

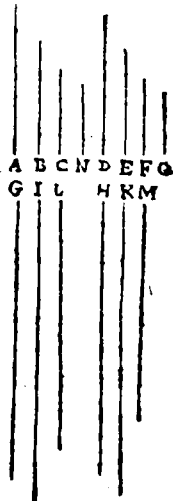
S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estans prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raison egale comme A à C, ainsi D à F.

Car estans prises G, H equemultiplices de A, D: item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M equemultiplices de C, F: puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiplie de A premiere

R. ij

sera à I multiplie de B deuxième,
comme H multiplie de D troi-
siesme à K multiplie de E qua-
triesme par la 4. prop. de ce cin-
quiesme liure. Par mesme raison I
sera à L, comme K à M. Veu donc
que les trois grandeurs G, I, L, &
les trois autres H, K, M, estans
prises de deux en deux sont en
mesme raison, par la 20. p. 5. si G
excede L, aussi H excedera M; & si
egale, egale; & si plus petite, plus
petite: & partant puisque G, H,
equemultiplices de A & D defail-
lent, sont egales, ou excèdent L,
M, equemultiplices quelconques
de C & F, par la 6. def. A sera à C,
comme D à F: ce qu'il falloit
prouuer.



Maintenât soient plus de trois grâdeurs, tellement
que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que A est
encore à N comme D à O. Car puisque nous ve-
nons de demonstrier que A est à C, comme D à F; &
on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura trois
grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquels
sont pris de deux en deux en mesme raison. Donc
comme il a esté demonstéré es trois grandeurs cy des-
sus, A sera derechef à N, comme D à O. En la mes-
me maniere sera demonstéré en tant de grandeurs
qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on
voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Le tres-dofte Steuin en la 19. def. de fes prob. geomet. explique vne forte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le fuyant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune foit couppée en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles: la compofée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, fera à la compofée des parties restantes, en mefme raifon que la compofée, d'autant de parties de la posterieure grandeur, fera à la compofée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie là, est auffi couppée en deux autres parties proportionnelles à ces deux là: les totales grandeurs feront auffi couppées proportionnellement.



Soit vne grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB ; & vne autre grandeur GH , couppée en autans de parties que AB , fçavoir est és cinq GI, IK, KL, LM, MH , proportionnelles à celle-là de AB . Je dis que AD compofée des deux parties AC, CD , est à DB compofée des trois parties restantes, comme GK compofée des deux parties GI, IK , est à KH compofée des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD , ainsi GI est à IK , en composant par la 18. proposition de ce liure AD sera à CD , comme GK à IK . Mais comme CD à DE , ainsi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce mefme liure en raifon egale, comme AD sera à DE , ainsi GK sera à KL .

Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE , comme HM à ML , aussi en composant BE sera à FE , comme HL à ML . Mais FE est à ED , comme ML à LK : donc en raison egale, BE sera à ED , comme HL à LK ; & en composant, BD sera à ED , comme HK à LK , & en changeant, DE à DB , comme KL à KH . Parquoy puis qu'il a esté demonstté que AD est à DE , comme GK à LK , & DE est à DB , comme KL à KH , par la susdite 22. p. 5. en raison egale comme AD sera à DB , ainsi GK sera à KH .

Nous demonstterons en la mesme maniere, que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH . Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC , ainsi HI à LI : & en changeant, comme CD sera à CB , ainsi IK sera à IH . Ven donc que comme AC est à CD , ainsi GI est à IK , & comme CD à CB , ainsi IK à IH : en raison egale, comme AC sera à CB , ainsi GI sera à IH .

Par mesme raison, coïne AF sera à EB , ainsi GM sera à MH : Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme AF sera à EF , ainsi GM sera à LM , par les susdites 18, & 22. prop. de celix. Mais aussi comme EF est à FB , ainsi LM à MH : Donc en raison egale, comme AF est à FB , ainsi GM est à MH , & ainsi des autres: appert donc ce qui estoit premierement proposé.

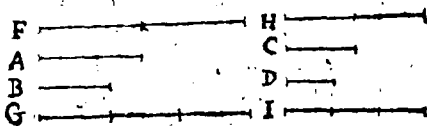
Maintenant soit coupée, (comme pour exemple) la troisieme partie DE en deux quelconques parties DN , NE ; & aussi la troisieme KL en deux parties KO , OL proportionnelles à celle-là. Je dis que comme AN à NB , ainsi GO à OH . Car en changeant, comme EN sera à ND , ainsi LO à OK : & en composant par la 18. p. 5. comme ED sera à DN , ainsi LK à KO . Parquoy puisque comme CD est à DE ; ainsi IK à KL : & comme DE à DN , ainsi KL à KO : par la 22. p. 5. en raison egale, comme CD sera à

DN, ainsi Ik à KO : donc les parties AC, CD, DN, sont proportionnelles aux parties GI, Ik, KO. Derezchef pour ce qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi ML à LK : & en composant, comme DE à NE, ainsi KL à OL, en raison égale, comme FE sera à EN, ainsi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM : & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB, sont proportionnelles à toutes les parties GI, Ik, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté démontré en la premiere partie, AN sera à NB, comme GO à OH : appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

Calvins demonstre encore en ce lieu cyle theoreme suynant.

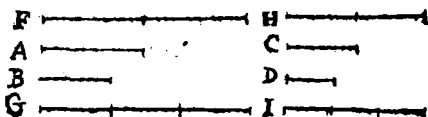
Si la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte : les equemultiplices de la premiere & troisieme auront aussi vne mesme raison à la seconde & quatriesme. Item les equemultiplices de la seconde & quatriesme auront vne mesme raison à la premiere & troisieme. Et au contraire, la seconde & quatriesme auront vne mesme raison aux equemultiplices de la premiere & troisieme. Item la premiere & troisieme auront vne mesme raison aux equemultiplices de la deuxiesme & quatriesme.

Soit A à B comme C à D, & soient F, H, equemultiplices



de A, C : item G, I, equemultiplices de B, D. Je dis que F est à B, comme H à D : item que G est à A, comme I à C. Et au contraire que B est à F comme D à H : item A à G, comme C

21. Car puisque F est autant multiplie de A , que H l'est de C , comme F est à A , ainsi H à C , & par l'hypothese A est à B , comme C à D ; donc en raison egale par la 22. p. 5. comme F sera à B , ainsi H sera à D . Derechef, pource que G est à B , comme I à D , & comme B à A , ainsi D à C : (car puisque A est à B comme à C à D par l'hypothese, en changeant comme B à A , ainsi D à C) en raison egale, comme G sera à A , ainsi I à C par la susdite 22. p. 5.



Maintenant pource que B est à A , comme D à C par raison innerse: & comme A à F , ainsi C à H : en raison egale, comme B sera à F , ainsi D à H . Derechef puis que A est à B , comme C à D : & comme B est à G , ainsi D à I ; en raison egale, comme A sera à G , ainsi C à I , par ladicte 22. p. 5. ce qui est: est proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'augmenter, dont les Geometres s'aident souuent, principalement Arithmedes, Apolonius Pegeus, & autres: sçavoir est comme A à B , ainsi C est à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A est à B , ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D : Item comme A est à B , ainsi C à D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B , sçavoir est à G ; ainsi aussi C sera au double, triple, ou au quadruple, &c. de D , sçavoir est à I .

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée: icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison, étant la proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que A sera à C, comme D à F.

Car étant prises G, H, I, equemultiples de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiples de C, E, F. Par la 15. p. de ce livre, comme A sera à B, ainsi G à H, puisque G, H, sont equemultiples d'icelles A, B. Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdicte 15. p. 5. pource que L, M, sont equemultiples d'icelles E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puisque comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. p. 5. comme H multiplie de la première B, sera à K multiplie de la seconde C. ainsi I multiplie de la troisième D, sera à L multiplie de la quatrième E: donc les trois grandeurs G

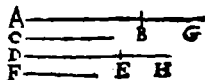


H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a esté demonstté que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, egale, ou moindre que k, aussi I sera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à C, ainsi sera D à F. Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublée &c. Ce qu'il falloit demonstter.

THEOR. 24. PROP. XXIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, & la cinquieme à la seconde, comme la sixieme à la quatrieme; la composee de la premiere & cinquieme, sera à la seconde, comme la composee de la troisieme & sixieme, sera à la quatrieme.

Soit la premiere AB à la seconde C, comme la troisieme DE est à la quatrieme F; & la cinquieme BG à la deuxieme C, comme la sixieme EH à la quatrieme F. Je dis que la toute AG, sera à C, comme la toute DH à F.



Car puis que comme BG à C, ainsi EH à F, aussi en changeant, comme C sera à B G, ainsi F à EH. Veu donc que AB est à C, comme DE à F, & C à B G, comme F à EH, en raison egale, AB sera à B G, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en composant, comme la toute AG sera à BG, ainsi la toute DH sera à EH, par la 18. prop. d'iceluy 5. liure : & derechef puis que AG est à BG, comme DH à FH, & BG à C, comme EH à F, en raison egale, AG sera à C, comme DH à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, &c. Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 25. PROP. xxv.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Je dis que la plus grande & la plus petite AB & F ensemble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retranche CH egale à E : AG sera à CH, comme E à F, c'est à dire comme AB à CD. Et puis que la toute AB est à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce liure, comme la toute AB sera à la toute CD, ainsi le reste GB sera au reste HD : Parquoy iceluy reste GB sera plus



grand que le reste HD, comme la toute AB est plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E sont egales, si on adioust à icelles, les grandeurs egales F & CH, c'est à sçauoir, F à icelle AG, & CH à E, viendront AG & F ensemble, egales à E & CH ensemble. Et adioustant à ces choses egales, les inegales GB, & HD, seront faictes AB & ensemble plus grandes que GE & CD ensemble, puis que GB est plus grande que HD. Parquoy si quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

Fin du cinquiesme Element.





ELEMENT

SIXIESME.

DEFINITIONS.



SEMBLABLES figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'vne & en l'autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'vne des figures, & le second & troisieme en l'autre ; icelles figures seront dites reciproques.

3. Vne ligne droicte est dite estre diui-

see en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

- 4 La hauteur d'une chacune figure, est la perpend. tiree du sommet à la base.
- 5 Vne raison est dite estre composee de raisons, quand les quantités des raisons multipliees entr'elles font quelque raison.

C'est à dire que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliees entr'elles, produisent quelque quantité de raison: icelle raison est dite estre composée de celles là. Or la quantité d'une raison est le denominateur d'icelle: tellement que la quantité de la raison triple est 3: mais de la subtriple, c'est $\frac{2}{3}$, &c. Ainsi la raison trigecuple se dit estre composee des double, triuple, & quintuple. Car les denominateurs d'icelles, sçavoir est 2, 3, & 5, multipliés entr'eux produisent 30. denominateur d'icelle raison trigecuple. Pareillement la raison double se dit estre composee de la sesquialtere, & de la sesquiterce, pource que les denominateurs d'icelle, sçavoir est $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ estans multipliés entr'eux produisent 2 denominateur de la raison double. Parquoy estant posees tant de grandes que l'on voudra par ordre, la raison des extremes sera composee des raisons des moyennes: comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double, & C à D en raison superbipartiente tierce: il est euidens que multipliant le denominateur de la raison de A à B, par celui de B à C, sçavoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3. & par là

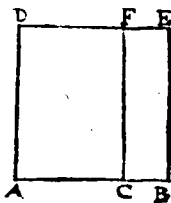
A. B. C. D.
30. 20. 10. 6.

A est à C en raison triple, & multipliant 3 par le denuminateur de la raison de C à D prouviennent 5, & partant A est à D en raison quinsuple.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, sauent les 27, 28. & 29. propo. de ce liure, que plusieurs du 10. adionnent icy ceste def.

6. Vn parallelogramme appliqué selon quelque ligne droicte, est dict defaillir d'un parallelogramme, lors qu'il ne peut occuper entieremēt la ligne; mais excéder, quād il occupe vne plus grande ligne que celle selon laquelle il est appliqué; en telle sorte toutesfois que le parallelogr. deffaillant, ou excédāt ait vne mesme hauteur que le parallelogramme appliqué, & constitué avec iceluy vn seul parallelogramme.

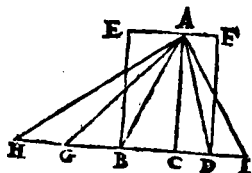
Comme le parallelogramme AF appliqué selon la ligne AB, est dit defaillir du parallelogramme CE, lequel est appellé defaut: Mais le parallelogramme AE appliqué selon la ligne AC, est dict excéder du parallelogramme CE, lequel est dict l'excez.



THEOR. I. PRO. I.

Les triangles, & les parallelogrammes de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de même hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE ,



CF de même hauteur, les bases desquels soient les mêmes BC , CD . Je dis premierement que le triangle ABC , est au triangle ACD , comme la base BC , est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC , pour seconde la base CD , pour troisieme le triangle ABC , pour quatrieme le triangle ACD ; les equemultiplices de la premiere & troisieme seront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatrieme, ainsi que le requiert la 6. definition du 5. liure.

Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres avoir couppe BG & GH , egales à BC d'un costé; item DI , egale à CD de l'autre, soient menées les lignes AG , AH , AI . Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC , ABG , AGH , estans sur bases egales & entre mêmes paralleles, seront egaux: aussi par les mêmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC , autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC . Pareillement autant de fois que CI contiendra CD , autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD . Que si la base CH est egale à CI , le triangle ACH sera egal au triangle ACI , par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. def. 5. cōme la base BC , à la base CD , ainsi le triangle ABC , sera au triangle ACD : ce qui estoit

estoit à demonstrier pour la premiere partie.

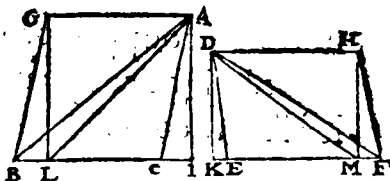
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE , CF ; le mesme se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC , ACD par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entend des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases: Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Comme au dñ adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont egales, ou vne mesme, sont entr'eux comme leurs hauteurs,

Soient deux triangles ABC , DEF ; & les parallelogrammes $AGBC$, $DEFE$, ayans les



bases BC , EF egales. Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , & le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFE$, comme la hauteur AI est à la hauteur DK . Car si on prend les lignes IL , KM egales aux bases BC , EF , & on tire les lignes LA , MD ; le triangle ALI sera egal au triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils sont sur bases egales LI , BC , & entre mesmes paralleles AG , IB : Par mesme raison le triangle DKM sera egal au triangle DEF . Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC sera à DEF , ainsi ALI sera à DKM . Mais par la 1. p. 6. comme ALI est à DKM , ainsi AI à DK . (car si AI , DK sont posées les bases, les lignes droictes egales LI , KM seront

les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF , comme AI à DK .

Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC est à DEF , ainsi le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$: (car iceux parallelogrammes sont doubles des triâgles par la 41. p. 1.) aussi $AGBC$ sera à $DEFH$, comme AI à DK . Le m s'en suivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une mesme base.

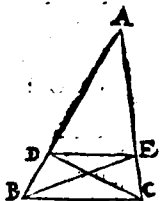
THEOR. 2. PROP. II.

Si dans vn triangle on meine vne ligne parallele à l'un de ses costez; elle coupera les autres costez du triangle proportionnellement: & si les costez sont coupez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ABC , dans lequel soit menée DE parallele à BC , couppant les deux autres costez AB & AC aux points D & E . Je dis que AD sera à DB , comme AE est à EC .

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triâgles DEB & EDC , estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux; & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme ADB . Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB , & DEA estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre cōme la base BD à la base DA : & par la

mesme proposition, le triangle CD est de mesme hauteur qu'iceluy triangle EDA , ils seront l'un à l'autre comme CB est à EA : & partant par la 11. p. 5. BD sera à DA , comme CB à EA : (puis que ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA , & du triangle CDE au mesme triangle DEA .) Ce qui estoit proposé.



Pour la seconde partie: ie dis que si DB est à DA , comme CB à EA , qu'aussi DE sera parallele à BC .

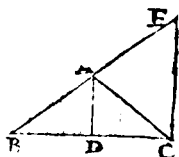
Car les triangles DEB & DEA , seront par la 1. p. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA . Item les deux autres CDE , EDA , seront aussi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA , comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA : & par la 9. p. 5. les deux triangles BED , & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE , par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles: & partant DE sera parallele à BC . Parquoy si l'on meine vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle, icelle coupera les autres costez d'iceluy triangle proportionnellement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est couppé en deux egaleement par vne ligne droite, laquelle coupe aussi la base; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'un à

l'autre comme les autres costez : la ligne droicte tiree du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD. Je dis qu'il y a mesme raison de BD à DC, comme de AB à AC.



Qu'il ne soit ainsi: apres avoir du point C mené CE parallele à DA, soit continuee BA directement iusqu'à ce qu'elle rencontre CE: (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE s'ont moindres que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal à son alterne ACE par la 29. p. 1. Et si l'exterieur DAB sera egal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD estans egaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront egaux: & partant par la 6. p. 1. les costez AB & AC seront egaux. Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD à DC, (estant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie: je dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droicte AD.

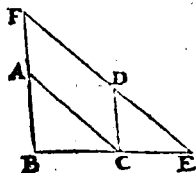
Car apres avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC seront egaux; & par-

tant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACB , seront aussi égaux; & par la 29. p. 1. ils s'ont égaux, l'un à DAB , & l'autre à DAC , lesquels par ce moyen seront aussi égaux; ce qui estoit proposé. Parquoy si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, laquelle coupe la base, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triangles equiangles, les costez qui sont au log des angles égaux, sont proportionaux, & les costez qui soustiennét les angles égaux, sont de-mesme raisó.

Soient deux triangles ABC, DCE , equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal à l'angle DCE , & l'angle ACB à l'angle E , & le troisieme au troisieme. Je dis que comme AB à BC , ainsi DC à CE , & comme BC à CA , ainsi CE à ED , & finalement comme AB à AC , ainsi DC à DE . Car ainsi les costez d'autour les angles égaux, sont les proportionaux, & les costez homologues, sont ceux-là qui soustiennent les angles égaux, c'est à dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles égaux.



Soient constituez les costez BC, CE selon une ligne droite, tellement que l'angle externe DCE soit egal à l'interne ABC , & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC : & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal à l'angle ACB , aussi les angles B & E seront,

moindres que deux droicts : & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennēt en F. Il est euident que l'angle extérieur ECD, estāt, par l'hypothese egal à son opposé intérieur CBA; DC sera parallele à EB par la 28. p.1. Pareillement l'angle extérieur ACB estant egal à son opposé intérieur DEC, aussi par la mesme 28. p.1. CA, & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p.1. il aura les angles, & les costez opposēz egaux. Mais AC estant parallele à EF, par la 2. p.6. AB sera à AF, ou CD sont egale, comme BC à CE, & en permutant par la 16. p.5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD estant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son egale, sera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.

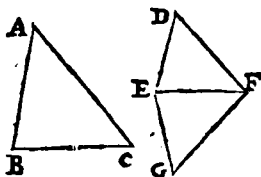
Veudonc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison egale AB sera à AC, cōme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison seront subtenus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA comme EF à FD, & encore AB à AC

comme DE à DF. Je dis
que les triangles sont e-
quiangles, ſçauoir l'an-
gle A eſtre egal à l'angle
D, & l'angle B à l'angle
E, & l'angle C à l'angle
F; car ainſi les angles e-
gaux regardent les coſtez de meſme raiſon.

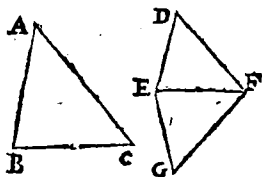


Qu'il ne ſoit ainſi: ſur la ligne EF, & aux deux poinçts
E & F ſoient conſtruits les deux angles FEG egal à
B, & EFG egal à C, & conuiennēt les lignes EG, FG en G:
par la 32. p. 1. le troiſieſme angle G ſera egal au tiers
A: & partant les triangles ABC, GEF ſont equian-
gles: parquoy comme AB à BC, ainſi GE à EF par la
4. p. 6. Mais comme AB à BC, ainſi a eſte poté DE à
EF: donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainſi DE à la
meſme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE ſeront ega-
les. Et d'autant que par la propoſition precedente,
comme BC à CA, ainſi EF à FG: & par l'hypothèſe
comme BC à CA, ainſi EF à FD: par la 11. p. 5. comme
EF ſera à FG, ainſi la meſme EF ſera à FD: & par la
9. p. 5. FG, FD ſeront egales. Veu donc que les coſtez
EG, FG du triangle GEF ſont egaux aux coſtez DE,
DF du triangle DEF, chacun au ſien, & la baſe EF
commune, les angles G & D ſeront egaux par la 8. p.
1. & partant par la 4. p. 1. les autres ang'les GEF, GFE
ſeront auſſi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au
ſien. Parquoy l'angle G eſtant egal à l'angle A, auſſi
l'angle D ſera egal au meſme angle A: & ainſi l'an-
gle DEF ſera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'an-
gle C. Si donc deux triangles ont les coſtez propor-
tionnaux, ils ſeront equiangles, &c. Ce qu'il falloir
prouuer.

THEOR 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux: ils seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE à EF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.



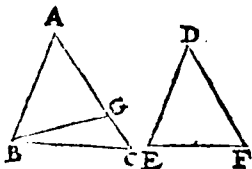
Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit comme en la proposition precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egales; & les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au point E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & partant seront equiangles. Mais l'un d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

Parquoy si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'un autre angle, proportionnaux, estans les troisièmes angles de mesme espeece : Iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alentour l'angle ABC,

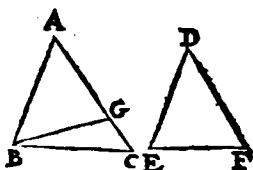


proportionnaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espeece, c'est à dire aigus, droicts, ou obtus, & soient premierement aigus. Je dis que les triangles sont equiangles, sçauoir les angles ABC & E à l'entour desquels sont les costez proportionnaux, & les angles C & F estre egaux.

Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E, si egal, aussi par la precedente les triangles seront equian-

gles: Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. le troisieme angle AGB, sera egal au troisieme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BC, ainsi la mesme AB sera à BG; & partant par la 9. p. 5. BG, BC seront egales & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront egaux, & tous deux aigus, & par cō-

sequent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droits: Mais l'angle



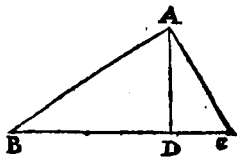
ABG a esté démontré egal à l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera egal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroient moindres que deux droits, mais egaux, ou plus grands que deux droits: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que 2. droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisieme C sera aussi egal au tiers F. Si donc deux triangles ont un angle egal à un angle, & les costez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle re-

Et angle on tire vne perpendiculaire sur la base; les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que



les triangles ABD & ADC, sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par consequent semblables.

Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & egal à l'angle droit BAC, du triangle total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisieme angle BAD, est egal au troisieme ACB: & partant les deux triangles BAD & BAC, seront equiangles; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA; & comme BC à CA, ainsi BA à AD; & partant par la 1. def. de celiure les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours on prouuera que les deux triangles BAC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle C estant commun à tous les deux, & l'angle droit egal à l'angle droit, le troisieme CAD sera egal au troisieme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA est à CD; & comme CA à AB, ainsi CD à DA, & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même manière les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puis-que les angles au point D sont droicts, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont esté démontréz égaux; & partant par la 4. p. 6. comme BD à DA, ainsi DA à DC; & cōme DA à AB, ainsi DC à CA; & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'un triangle rectangle on tire vne perpendiculaire sur la base, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cery est manifeste que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base: & chacun des costez comprenant l'angle droict, estre aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

Car il a esté démontré que comme BD est à DA, ainsi DA à DC; & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC: item que comme CB est à BA, ainsi BA à BD; & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB, & BD: finalement que comme BC à CA ainsi CA à CD, & partant CA estre moyenne proportionnelle entre BC & CD.

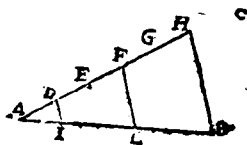
PROB. I. PROP. IX.

D'une ligne droicte donnée, oster la partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oster la cinquième partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droicte AC, fai-

tant angle avec AB , & en icelle AC , soient prises à l'aduanture cinq parties egales; (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH ;



& apres auoir mené la ligne BH , du point D soit menée DI , parallele à HB : Je dis que AI est la cinquieme partie de AB .

Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallele au côté HB , par la 2. p. 6. comme HD sera à BA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. p. 5. comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquieme partie de la ligne droite AB , laquelle auoit esté demandée.

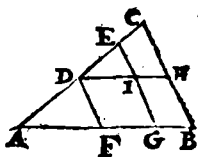
SCHOLIE.

Que si de AB il falloit ôter plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiemes, il est euident par ce qui a esté démontré qu'estant tirée la ligne FL parallele à HB , le segment AL sera les trois cinquiemes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquiemes de AH .

PROBL. 2. PROP. X.

Couper semblablement vne ligne droite donnée non coupée, à vne autre ligne droite donnée & coupée.

Soient données les lignes droictes AB AC , desquelles AC est coupée en D & E : & il faut couper AB en parties semblables, & proportionnelles à celles de AC .



Soient accommodées icelles lignes données en sorte qu'elles fassent l'angle BAC ; & apres avoir mené BC , de D & E , soient menées DF , EG , paralleles à icelles BC par la 31. p. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement coupée en F & G , comme est coupée AC en D & E . Car par la 2. p. 6. comme AD est à DE , ainsi AF à FG . Que si on tire DH parallele à AB coupant EG en I . Derechef par la susdite 2. p. 6. comme DE sera à EC , ainsi DI à IH , c'est à dire ainsi, FG à GB , pource que par la 34. p. 1. FG est egale à DI , & GB à IH . Parquoy les parties FG , GB seront aussi proportionnelles aux parties DE , EC . Les trois parties AF , FG , GB , sont donc proportionnelles aux trois parties AD , DE , EC : & partant AB est coupée semblablement à AC , ainsi qu'il falloit faire.

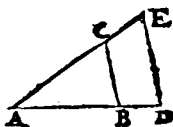
PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, trouver vne troisieme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC , ausquelles il faut trouver vne troisieme proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en vn angle CAB ,

& apres auoir prolongé AB iusques en D, soit faicte BD egale à AC; & apres auoir mené CB, du point D, soit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE



est la troisieme proportionnelle, c'est à dire que comme AB est à AC, ainsi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE la ligne droite BC est parallele au costé DE, par la 2. p. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB est à BD, ainsi la mesme AB est à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB est à AC, ainsi à AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troisieme proportionnelle: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes données; trouuer la quatrieme proportionnelle.

Soient les trois lignes données (en la precedente figure) AB, BD, AC, ausquelles il faut trouuer la quatrieme proportionnelle.

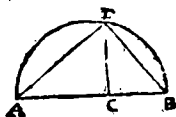
Soient disposées les deux premieres AB, BD, selon vne ligne droite AD; & la troisieme AC face avec la premiere AB vn angle A: puis apres soit menée BC, & de D, la ligne DE parallele à icelle BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE est la 4. proportionnelle requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD, ainsi AC est à CE. Nous auons donc

trouué vne quatriesme ligne proportionnelle à trois données : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouver vne moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes droictes données AC & CB , entre lesquelles il faut trouver vne moyenne proportionnelle.



Soient icelles disposées en vne ligne droicté AB , sur laquelle soit descript vn demy cercle ADB ; & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD : le dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.

Car estans menées les deux lignes AD & BD , l'angle ADB dans le demy cercle sera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB , est tirée DC perpendiculaire à la base AB , par le corol. de la 8. p. 6. CD sera moyenne proportionnelle entre AC , CB . Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre les deux lignes données: Ce qu'il falloit faire,

SCHOLIE.

De cecy est euident qu'une ligne droicté tirée perpendiculairement de quelconque poinct au diametre d'un cercle, iusques à la circonférence, est moyenne proportionnelle entre

les

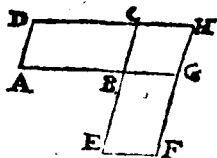
les segmens du diametre faictz par icelle perpendiculaire. Car de quelconque point pris au diametre AB , estant leue vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne prop. entre les deux segmens du diametre AB .

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à vn angle : les costez au long des angles egaux, sont reciproques: & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

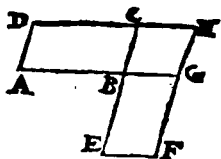
Soient deux parallelogrammes egaux $ABCD$, & $BEFG$, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : le dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques : c'est à dire que AB est à BG , comme EB à BC .

Car les parallelogrammes AC , BF , estans disposez de telle façon que AB & BC , facent vne ligne droicte, soient prolongez DC , FG , iusques à ce qu'il se rencontrent en H . Puis donc que les deux parallelogrammes AC , FG , sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogramme BH , par la 7. p. 5. Mais la raison du parallelo-



gramme AC à EH , est par la 1. p. 6. comme celle de la base AB à la base EG . Item celle des parallelogrammes EG , EH , est comme celle de EH à BC ; & partant par la 11. p. 5. comme AB à BC , ainsi EH à BC . Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie; si AB est à BG , comme EB à BC , & que les angles ABC & EBG soient égaux: Je dis que les parallelogrammes AC & EG , seront aussi égaux.

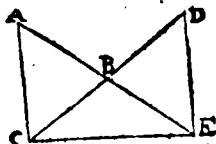


Car demeurant la mesme construction, on prouuera par la 1. p. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC , au parallelogramme BH , que de la base AB à la base BG : pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG , au parallelogramme BH , que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables: donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG , au troisieme BH seront semblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils seront égaux. Parquoy des parallelogrammes égaux, qui ont vn angle égal; les costez au long, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 10. PROP. xv.

Les triangles égaux ayans vn angle égal à vn angle, ont les costez au long des angles égaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle égal à vn angle, & les costez au long des angles égaux reciproques, sont aussi égaux.

Soient deux triangles égaux ABC & DBE , ayans les angles au point B égaux. Je dis que les costez qui sont au long des angles égaux, sont reciproques : c'est à



dire que comme AB est à BE , ainsi DB sera à BC .

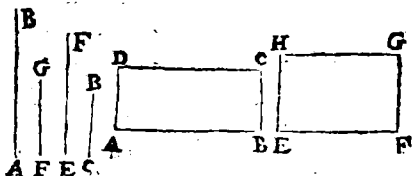
Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit menée la ligne CE . Pour-autant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC , au triangle ECB , (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE ; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB , comme DB est à BC ; & partant par la 11. p. 5. AB sera à BE , comme DB à BC . Ce qui a esté proposé.

Pour la seconde partie, elle se prouuera comme en la precedente, en retrogradant par la 1. p. 6 : 11. p. 5. & 9. p. 5. Donc les triangles égaux ayans vn angle égal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, est égal à celuy des moyennes : & si le rectangle compris des extremes, est égal au rectangle compris des moyennes : les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes proportionnelles AB, FG, EF, BC, sçavoir est que AB soit à FG, comme EF à BC, & soit le rectangle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EFGH compris sous les moyennes EF, FG. Je dis que les rectangles AC, EG, sont egaux.



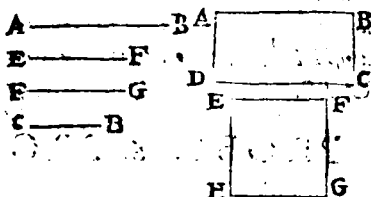
Car puis que les angles droicts B & F sont egaux; & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC; les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

Quant à la seconde partie; soient les rectangles AC, EG egaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles; c'est à dire que comme AB est à FG, ainsi EF est à BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, sçavoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. sçavoir est que comme AB est à FG ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.
Si trois lignes droictes sont proportion-

nelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré fait de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré décrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes proportionnelles AB , EF , BC ; & soit le rectangle $ABCD$ compris sous les extremes AB , BC , & le quarré



de la moyenne EF soit $EFGH$. Je dis que le rectangle AC est egal au quarré EG .

Car étant prise FG egale à EF , les quatre lignes AB , EF , FG , BC , seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF , FG , à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedente prop. le rectangle AC compris des deux extremes AB , BC est egal au quarré EG , c'est à dire au rectangle des moyennes EF , FG . Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie; le rectangle AC soit egal au quarré EG . Je dis que comme AB est à EF ainsi EF à BC . Car puisque les rectangles AC , EG sont egaux, par la 16. p. 6. comme AB sera à FE , ainsi FG à BC ; mais par la 7. p. 5. cōme FG est à EC , ainsi E F egale à icelle FG , est à la même BC ; & partant

cōme AB est à EF , ainsi EF est à BC . Si donc trois lignes droictes sont proportionnelles, le rectangle compris des extrêmes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

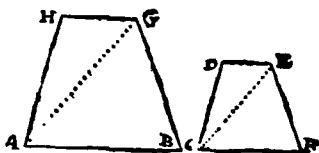
COROLLAIRE.

Il est manifeste par la dernière partie de ce theoreme, qu'une ligne droicte est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent un rectangle egal au carré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC est egal au carré de EF , il a esté demonsté, que comme AB à EF , ainsi EF à BC ; & partant EF est moyenne prop. entre AB & BC .

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droicte donnée AB , sur laquelle il faut construire vne figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée $CDEF$.



Soit divisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CE : & apres avoir par la 23. p. 1. décrit sur la ligne AB , & aux points A & B , les deux angles BAG , ABG , egaux, l'un à l'angle

FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il est evident par la 32. p. 1. que le troisieme sera egal au troisieme, & les triangles CEF, AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux points A & G, soient descrits les deux angles HAG, & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au sien : aussi par la 32. p. 1. le troisieme H sera egal au troisieme D, & les triangles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux : ainsi l'angle D estant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G ; les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles : & pour autant qu'elles sont composees de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux, proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG, & comme CE à CD, ainsi AG à AH ; & en raison egale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH ; ainsi les costez aux long des angles egaux FCD, BAH, seront aussi proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites. Nous avons donc fait ce qui estoit requis.

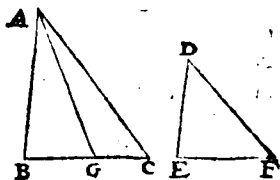
Que si la figure donnee avoit plus de 4. costez, il la faudroit diviser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à

l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison BC & EF: c'est à dire que si à BC & EF on trouue la troisieme



me proportionnelle BG; le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisieme proportionnelle BG: car telle est la raison doublee par la 10. def. 5.

Car estant tiree la ligne AG; d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC, ainsi DE est à EF; en permutant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF, auront les costez au l'og des angles egaux 2 & 2, reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront egaux entr'eux; & partât cōme le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le mesme triangle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. p. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG, estans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublee de BC à EF par la 10. def. 5. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison dou-

blée du costé BC au costé EF. Donc les triangles semblables sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs costez de mesme raison : ce qu'il falloit démonstrer.

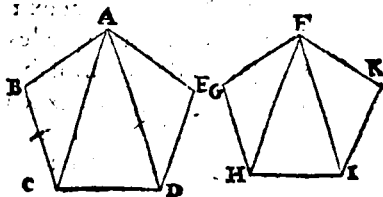
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la troisieme, ainsi le triangle descript sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté démontré que comme BC est à EG; ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14. PROP. XX.

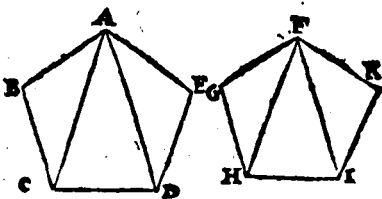
Les polygones semblables peuvent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionaux à leur tout: & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs costez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables ABCD E, & FGHIK, le dis premierement qu'ils peuvent estre diuisez en nō-



bre egal de triangles semblables.

Car apres avoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est evident que l'une des figures est diuisée en au-



tant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal à l'angle G, & cōme BA sera à BC, ainsi GF sera à GH, & par la 6. p. de ce liure les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. prop. de ce mesme liure, ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG: mais BC est à CD comme GH à HI: car ce sont costez de figures semblables: donc en raison egale par la 22. p. 5. AC sera à CD, comme FH, à HI: & d'autant que les angles BCD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; iceux estans ostez, les restans ACD, FHI, seront pareillement egaux; & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD & FHI, seront equiangles, & par consequent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tour. Car les trois triangles de l'une des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la prop. preced. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH: aussi en la mesme raison doublée seront les triangles

ACD, FHI: & le troisieme AED estant au troisieme FKI en raison doublée de AD à FI, qui est la mesme que de AC à FH, estans costez de triangles semblables; aussi les triangles AED, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH: & par la 12. p. s. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triégles de l'un d'iceux, à son respondât de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone, en raison doublée des costez CD & HI: car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure $\pi\epsilon\kappa$, comme l'un des triangles de l'une ACD, est à l'un des triangles de l'autre FHI, lesquels par la prop. precedente sont en raison doublée de CD à HI, par la 11. p. s. le polygone sera au polygone, en raison doublée des costez de mesme raison CD & HI. Parquoy les polygones semblables peuvent estre diuisés en nombre egal de triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'estans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi sera le polygone descript sur la premiere au polygone semblable, & semblable descript sur la seconde; puis qu'il a esté demonstrez que les polygones sont entr'eux en raison doublée de leurs costez de mesme raison, c'est à dire comme le costé du premier a une troisieme proportionnelle ausdits costez de mesme raison.

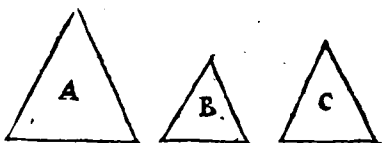
T H E O R. 15. P R O P. XXI.

Les figures rectilignes semblables à vne, sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure A semblable à la figure B, & la figure C semblable aussi à la mesme B: Je dis que A & C

seront semblables entr'elles:

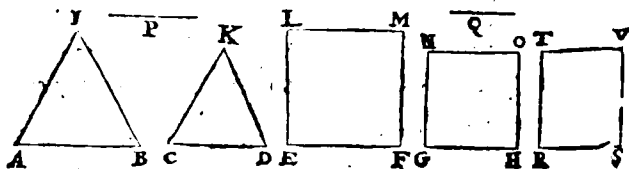
Car d'autant
que chacune
d'icelles A & C
est semblable
à B, elle a les
angles égaux



aux angles de B par la 1. def. 6. & partant par la 1. com.
sent, les angles de A, seront aussi égaux aux angles de
C; & par la 4. p. 6. A & C auront les costez au long
des angles égaux proportionnaux: & par la 1. def. 6.
elles seront semblables: donc les figures rectilignes
semblables à vne sont aussi semblables entr'elles: ce
qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 16. PROP. xxii.

Si quatre lignes sont proportionnelles;
les figures rectilignes semblables, &
semblablement descrites sur icelles,
seront proportionnelles: & si icelles
figures ainsi descrites sont propor-
tionnelles, icelles lignes seront aussi
proportionnelles.



Soient quatre lignes proportionnelles AB, CD,

EF, GH; & sur AB & CD soient constituées deux quelconques rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement décrits: item sur EF & GH deux autres quelconques rectilignes semblables & semblablement décrits EFML, GHON. Je dis premierement que ces 4. rectilignes sont proportionnaux, c'est à dire que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi: aux deux lignes AB & CD, soit trouuée P troisieme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF & GH, soit trouuée Q aussi troisieme proportionnelle: & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH. Item CD à P: comme GH à Q: en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement décrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont décrites, seront aussi proportionnelles.

Car soit trouué RS 4. proportionnelle aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS décrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM, & semblablement posé par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. preced. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté demonsté cy dessus, le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, comme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par

la 9. p. 5. RV , GO seroient égaux : lesquels estant semblables & semblablement décrits, consistent nécessairement (comme nous démontrerons incontinent) sur lignes droictes égales RS , GH . Parquoy par la 7. p. 5. comme EF sera à RS , ainsi EF sera à GH . Mais par l'hypothese EF est à RS , comme AB à CD : donc par la 11. p. 5. comme AB sera à CD , ainsi aussi EF sera à GH : Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

LE M M E.

Or que les rectilignes égaux semblables & semblablement décrits, tels que sont GO , RV , consistent sur lignes droictes égales, on le prouvera aussi. Si les lignes GH , RS peuvent estre inégales, soit GH la plus grande : & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO , ainsi RS à SV : & GH ayant esté posée plus grande que RS , par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV ; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV ; puis que cestuy-cy peut estre constitué dans celuy-là : ce qui est absurde, ayant esté posé égaux. Les lignes GH , RS ne sont donc pas inégales, mais égales : ce qui estoit proposé.

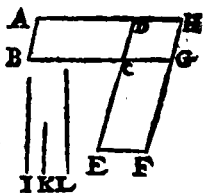
SCHOLIE.

Il est evident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les rectilignes semblables, & semblablement décrits sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus démontré. V'en donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celuy décrit sur la 3. est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'un à l'autre en la raison compoſee de celles de leurs coſtez.

Soient deux parallelogrammes equiangles $ABCD$, & EFG , ayans les deux angles B CD , ECG egaux: le diſ que la raison de l'un à l'autre eſt compoſee de celles de leurs coſtez, ſçauoir eſt compoſee de la raison que BC a à CG , & de celle que DC a à CE .



Car ayant diſpoſé les deux parallelogrammes, en ſorte que BC & CG , ſe puiſſent rencontrer directement, & ne faſſent qu'une ligne droite, comme auſſi DC , CE une autre ligne droite, ſoit paracheué le parallelogramme $DCGH$; & ſoit priſe quelconque ligne droite I ; puis aux 3. BC , CG & I , ſoit trouué la 4. prop. K . Item aux 3. DC , CE , & K , la 4. prop. L . Veu donc que par la 1. p. 6. comme BC eſt à CG , ainſi AC à DG ; & comme BC à CG ; ainſi auſſi I eſt à K par l'hypothèſe: pareillement comme AC ſera à DG , ainſi ſera I à K par la 11. p. 5. Le meſme ſe peut dire de DC à CE , qu'ils ſont l'un à l'autre comme K à L , par la 1. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raison egale, comme AC ſera à CE , ainſi I ſera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L eſt compoſee de la raison de BC à CG , & de celle de DC à CE par la 5. def. de celinre. D'où auſſi d'icelles raisons eſt compoſee la raison

du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes equiangles sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs costez: Ce qu'il falloit prouver.

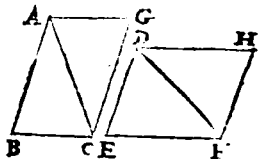
SCHOLIE.

Il est facile à colliger de ceste demonstration comment on compose vne raison de deux ou de d'auantage. Car des raisons de BC à EG, & DC à CE a esté composée la raison de I à L. Que s'il faut composer vne raison de trois autres proposées, ayant trouué celle composée de deux, d'icelle & de la troisieme nous en composerons vne autre en la mesme maniere, laquelle sera composée de trois: & ainsi consequemment des autres.

Clavius demonstre en ce lieu-cy (apres Commandin) quelques autres propositions assez utiles: c'est pourquoy nous les joindrons aussi icy.

Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, sont en raison composée des costez comprenant l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle B egal à l'angle E: Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des costez

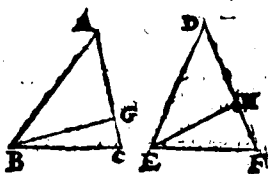


comprenant les angles B & E. Car ayant acheué les parallelogrammes BG, EH, ils seront equiangles; & passant par la 23. p. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs costez. Veü donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiés par la 34. p. 1. sont en la mesme raison qu'iceux par la 15. p. 5. aussi iceux triangles seront l'un à l'autre en icelle raison composée des costez.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, sont l'un

l'un à l'autre, en la même raison que les rectangles compris sous les costez qui contiennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC , DEF ayans l'angle A égal à l'angle D . Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , EF . Car estans tirées sur AC , DF , les perpendiculaires BG , EH ; les triangles ABG , DEH seront equiangles, comme appert par le corol. de la 32. p. 1. donc par la 4. p. 6. comme GB est à BA , ainsi HE à ED . Mais par la 1. p. 6. comme GB est à BA , ainsi le rectangle de BG , AC , au rectangle de BA , AC , pour ce que posant GB , BA , bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une mesure, sc. avoir AC . Semblablement comme HE à ED , ainsi est le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF . Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG , AC est au rectangle de AB , AC , comme le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF ; & en permutant le rectangle de BG , AC , sera au rectangle de EH , DF , comme le rectangle de AB , AC au rectangle de DE , DF . Mais le rectangle de BG , AC , est au rectangle de EH , DF , ainsi que le triangle ABC , au triangle DEF par la 15. p. 5. pour ce que ces triangles sont moitieux d'iceux rectangles par la 41. p. 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC , DF ; & mesmes hauteurs BG , EH ; & parant entre mesmes parallèles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , DF : ce qui estoit proposé.



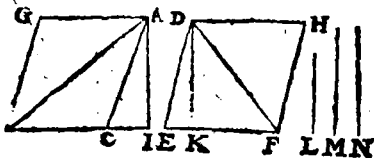
COROLLAIRE.

De ceq. résulte que les parallelogrammes equiangles sont

aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

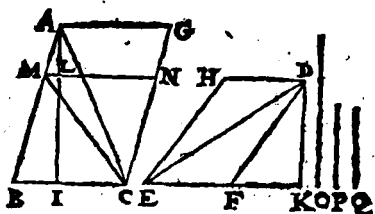
Soient les triangles ABC , DEF ;
& les parallelogrammes CG , EH ,
les hauteurs d'iceux soient AI ,



DK . Je dis que la raison d'iceux triangles, & parallelogrammes, est composee de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases, ou aussi egales, ou megalles: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M ; & comme AI à DK , ainsi M à N , lesquelles seront egales, puis que AI , DK , sont posees egales: & passant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M , c'est à dire comme BC à EF . Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC au triangle DEF ; & le parallelogramme CG au parallelogramme EH : Donc par la 11. p. 5. comme L sera à N , ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M , c'est à dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est à dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallelogramme CG au parallelogramme EH , est aussi composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI , DK inegales, & AI la plus grande, mais les bases BC , EF , ou egales, ou aussi inegales. Soit fait comme AI à DK , ainsi O à P ; & comme BC à EF , ainsi P à Q : & ayant couppe IL egale à DK ,

par L fait tirer M
 N parallèle à BC ,
 & joindre CM .
 D'autant que le
 triangle ABC est
 au triangle MBC ;
 & le parallélogr-
 ame BG au pa-
 rallélog. BN , cō-



mela hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui luy est égale,
 c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1. p. 6. &
 comme le triangle est MBC au triangle DEF , & le pa-
 rallélogramme BN au parallélogramme FH , ainsi est la
 base BC à la base EF , (pource qu'ils sont de mesme hauteur)
 c'est à dire ainsi P à Q : en raison égale ABC sera à DEF , &
 BG à FH , comme O à Q . Parquoy puis que la raison de O à Q
 est composée de la raison de O à P , c'est à dire de AI à DK , &
 de la raison de P à Q , c'est à dire de la base BC à la base EF : la
 raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallé-
 gramme BG au parallélogramme FH , sera composée des mes-
 mes raisons. Ce qui estoit proposé.

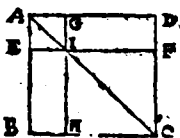
On peut demonstrier en la mesme maniere, que le triangle
 DEF , qui à la moindre hauteur, est au triangle ABC , & le
 parallélogramme FH au parallélogramme CG en la raison com-
 posée de celle de la base EF à la base BC , & de celle de la hau-
 teur DK à la hauteur AI ; & ce en faisant que comme EF à BC
 ainsi Q à P ; & puis comme DK à AI , ainsi P à O ; & sous le
 reste comme dessus. Appert donc ce qui estoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIIN.

En tout parallélogramme; les parallé-
 logram. qui sont à l'entour du diame-
 tre, ayans vn angle commun au total,

sont semblables entr'eux, & au total

Soit le parallelogramme ABCD, duquel le diametre est AC: Je dis que les deux parallelogrammes GE & FH descrits sur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs avec le total, sont semblables entr'eux, & au total ABCD.



Car d'autant que les lignes AD, EF, BC, sont paralleles, sur lesquelles tombent AC & GH, elles feront les angles alternativement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles AIG & ICF, seront equiangles entr'eux, & au total ACD, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux, proportionaux. Le mesme se peut dire des trois autres triangles AIE, ICH & ACB, lesquels sont egaux aux trois premiers, chacun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelogramme EG, ayant les costez AE & EI proportionaux à AB & BC, costez du parallelogramme BD, & aux costez IH & HC du parallelogramme FH, &c. Il est evident par la 1. def. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, seront semblables entr'eux, & au tout BD. Donc en tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre. &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. 7. PROP. XIV.

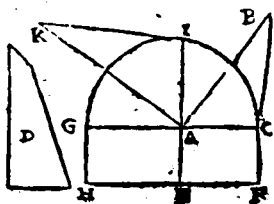
Descrire vne figure rectiligne, semblable à vne donnee, & egale à vne autre proposee.

Soient deux figures rectilignes ABC & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC, soit fait le rectangle ACFE

egal à la figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit GE rectangle egal à la figure donnee D, le tout par les 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posée à la figure ACB, par la 18. p. 6. Je dis qu'elle sera aussi egale à la figure donnee D.

Car puisque par la construction le rectangle GE est egal à D, & AF à ABC, & que par la 1. p. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Pareillement que les deux figures semblables ABC & AKI, sont l'une à l'autre en raison doublee de AC à AI, par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. sçauoir comme CA à la 3. proport. AG, aussi par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB étant egal à AF, aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D ; & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous auons donc descrit vne figure rectiligne semblable à vne autre donnée, & egale à vne proposée : Ce qu'il falloit faire.

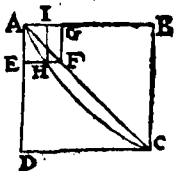


THEO. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelogramme on oste vn

parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun avec le tout; l'osté sera avec le tout sur vn mesme diametre.

Soit le parallelogramme AB CD, duquel on retranche AEF G parallelogramme qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun avec le total: le dis qu'ils sont sur mesme diametre AFC.

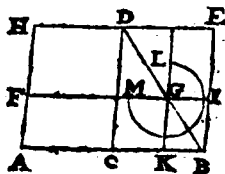


Autrement, s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre AHC, qui ne soit commun à tous les deux parallelogrammes, ains coupe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à A E, par la 31. p. 1. donc le parallelogramme IE estant sur vn mesme diametre avec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total, GE est aussi semblable par hypothese; & partant par la 21. p. 6. G E & IE seront semblables, & par la 1. def. 6. AE sera à EF, comme AE à EH: mais AE estant egale à soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p. 5. que EF 2. fust egale à EH 4. le tout à la partie, ce qui est absurde: donc les parallelogrammes BD & GE, total & re-tranché, estoient sur mesme diametre: car il aduiendra tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de BD passe par quelconque autre poinct, soit du costé EF ou FG, du parallelogramme re-tranché GE. Si donc d'un parallelogramme on oste vn parallelogramme, &c. ce qu'il falloit demonstres

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle de parallelogrammes semblables & semblablement posés à vn autre descrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaillant.

Soit la ligne AB coupée en deux également en C, & sur CB moitié d'icelle, soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si donc on accomplit tout le



parallelogramme A B E H, le parallelogramme A D estant sur la moitié A C, appliqué selon la ligne A B, sera defaillant du parallelogramme CE, & semblable à iceluy CE. Je dis que de tous les parallelogrammes appliquez sur icelle ligne A B, & defaillans d'une figure semblable à CE, le plus grand est AD, qui est descrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car estans pris au diametre BD quelcōque poinct G, & tirées par iceluy poinct les lignes droictes FG, & G, paralleles aux lignes droictes AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. p. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. p. 1. les complemens CG, GE, sont egaux, si on leur adioustekl commun, aussi CI, KE seront egaux. Mais CI, CF estans sur bases egales, sont pareillement egaux par la 36. p. 1. donc aussi CF, KE seront egaux, & leur adioustant CG commun, le parallelogramme AG sera egal au gnomon LM. Parquoy puisque CE est plus grand qu'iceluy gnomon, LM; (car CE outre le gnomon contient encore le parallelogr. DG) aussi AD qui est egal à CE par la 36. p. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du mesme parallelogramme DG. Et en la mesme maniere sera demonstté que AD est plus grand que tous autres parallelogrammes, qui seront appliquez selon la mesme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

PROB. 8. PROP. xxviii.

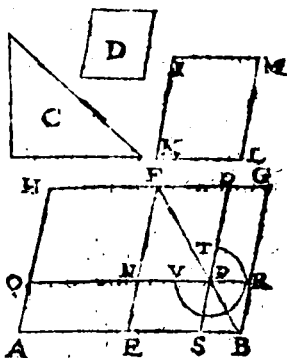
Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'un parallelogramme semblable à vn autre donné; mais il faut

que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant coupé AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGH semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. p. 6. & soit accompli le parallelogramme A H G B.

Maintenant, si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est appliqué sur AB, & defaut du parallelogramme EG. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C, (cette egalité ou inegalité, & excez sera cogneue par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. soit réduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG: & veu que EG

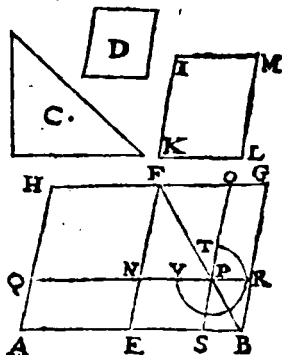


est plus grand que KM , il est evident que les costez EF , FG seront aussi plus grands que les costez KI , IM ; parquoy d'iceux EF , FG soient coupez FN , FO , egaux à iceux KI , IM , à fin qu'estant accomply le parallelogramme $NFOP$, il soit egal à KM , & semblable & semblablement posé au mesme KM ; & partant aussi à EG ; & par consequent qu'estant tiré le diametre BF , iceux parallelog. EG , NO , soient au long d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres avoir continué les costez NP OP , tant qu'il sera de besoin: le dis que AN est le parallelogramme demandé.

Car il est defaillant du parallelogramme SR , lequel par la 24. p. 6. est semblable à EG , partant aussi à D . Item puis que IL est l'excez par lequel EG excède C , & qu'à iceluy excez est egal NO . Il est evident que le gnomon TV sera egal à la figure C . Mais il est aussi egal à AP , comme il a esté prouvé à la precedente: donc aussi AP sera egal à C , & defaudra à la ligne donnée AB du parallelogramme SR semblable au donné D . Nous auons donc sur vne ligne droicte donnée appliqué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

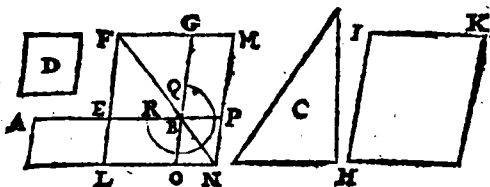
PROB. 9. PROP. xxix.

Sur vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à



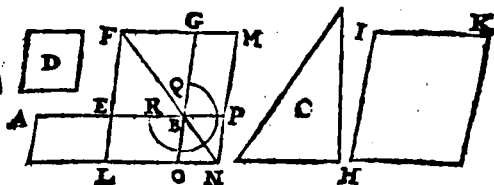
vne figure rectiligne donnée, excédant d'un parallélogramme semblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut descrire un parallélogramme égal au rectiligne donné C, mais excédant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme donné D.



Soit coupée en deux également AB au point E, & sur la moitié EB soit descript le parallélogramme EFGH semblable & semblablement posé à D par la 18. p. 6. En apres soit descript le parallélogramme HK égal aux deux figures C & EG, & semblable & semblablement posé à EG par la 25. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallélogrammes HK, EG, cōme HI à IK, ainsi EF à FG; & par consequent HK estant plus grand que EG, aussi les costez HI, IK seront plus grands que les costez EF, FG: estans donc prolongez les costez FE, FG, tellement que FL, FM, soient égales aux lignes IH, IK, & acheué le parallélog. LFMN, il sera semblable & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. LM, EG,

seront au long d'un mesme diametre, qui soit FN. Maintenant estans prolongez AB, GB iusques en P & O; & acheué le parallelogramme LA; le parallelogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Je dis donc que le parallelogramme AN est egal au rectiligne C: Car puisque par la 36. p. 1. AL, EO sont egaux, & par la 43. p. 1. EO est egal au complement BM, aussi



AL sera egal à iceluy BM; leur adjoustant donc LP commun, AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C: (car puisque HK, c'est à dire LM est egal au rectiligne C & à EG ensemble: si on oste EG commun, resteront le gnomon QR & le rectiligne C egaux) donc aussi AN sera egal au rectiligne C. A la ligne droite AB nous auons donc appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à vn autre donné D: ce qu'il falloit faire.

P R O B. 10. P R O P. XXX.

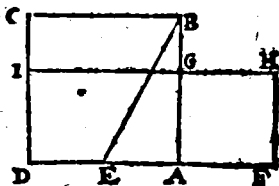
Couper vne ligne droite donnée en la moyenne & extrême raison.

Soit la ligne droicte donnée AB , laquelle il faut couper en la moyenne & extrême raison.

Soit donc icelle coupée au point G , de de telle façon que le quarré de la partie AG

soit egal au rectangle de la route AB , & de la partie GB , comme il a esté enseigné en la 11. p. 2. Je dis que AB sera coupée en la moyenne & extrême raison au point G .

Car puis que le quarré de AG est egal au rectangle de AB & GB , les trois lignes AB , AG & GB , seront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la route AB sera au plus grand segment AG , comme AG , au plus petit segment GB ; & par la 3. d. 6. AB est coupée en G , en la moyenne & extrême raison. Ce qu'il falloit faire.

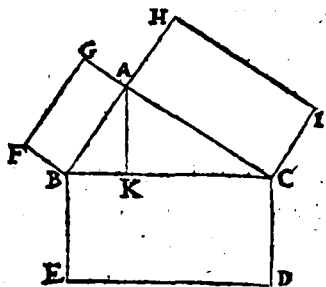


THEO. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droict, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC , ayant l'angle BAC , droict. Je dis que la figure descrite sur le costé BC , qui

soutient l'angle droit, est égale aux deux autres figures semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez AB, & AC.

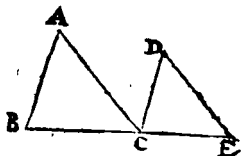


Car si du point A, qui fait l'angle droit, on mène la perpendiculaire Ak, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entr'eux, & au total : ainsi les trois triangles BAK, CAK & ABC seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des costez de mesme raison AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI estans semblables & semblablement posées, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs costez de mesme raison AB, BC, CA, qui sont les mesmes costez des triangles, & par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux; c'est à dire que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. p. 5. comme le composé des triangles BAK, CAK, sera au triangle ABC, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, sera au rectiligne BD : mais le triangle BAC, est égal aux deux autres : donc la figure BD descrite sur BC, sera aussi égale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demon-

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont disposés faisant vn angle, tellement que les costez de mesme raison soient parallelz; les deux autres costez se rencontreront directement.

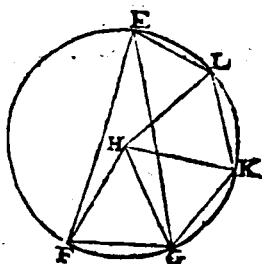
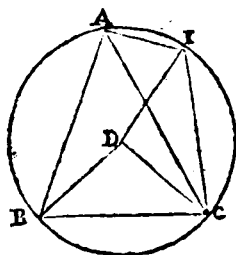
Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les costez BA & AC proportionaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: ie dis que BC & CE se rencontreront directement.



Car BA & CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD: ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6 les deux triangles seront equiangles: donc l'angle ACD, estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est euident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement: Si donc deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. xxxiii.

Aux cercles egaux , les angles tant aux centres qu'aux circonferences , sont entr'eux , comme les circonferences qui les soustiennent. Les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.



Soient deux cercles egaux ABC & EFG , desquels les centres sont D & H ; & soient les deux angles aux centres BDC & FHG , ou en la circonferance BAC & FEG : ie dis que comme la circonferance BC est à la circonferance FG , ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG , & l'angle BAC à l'angle FEG .

Qu'il ne soit ainsi: soient pris les deux arcs GK & KL egaux à FG : item CI egal à BC , & soient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE : les trois angles FHG , GHK & KHL sont egaux entr'eux, par la 27. p. 3. ainsi l'arc $FGKL$ est autant multiplie de l'arc FG , comme l'angle FHL l'est de FHG : & par le mesme discours, l'arc BCI est autant multiplie de l'arc

l'arc BC, comme l'angle BDI, l'est de BDC: partant si l'arc BCI est égal à l'arc FGLK, l'angle BDI sera égal à l'angle FHL par la 27. p. 3. si plus grand, plus grand, si plus petit, plus petit; & par ainsi BCI, BDI, estans equemultiplices de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. comme l'arc BC à l'arc FG, ainsi l'angle BDC à l'angle FHG: le mesme discours est des angles en la circonference.

Pour la seconde partie. le dis aussi, que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est à l'arc FG.

Car on prouvera aisément (demeurant la mesme construction) que les deux arcs BC, CI estans egaux que leurs cordes seront egales, & les deux portions egales: mais les deux triangles BDC, CDI sont aussi egaux par la 4. p. 1. leur adjoustant donc les deux segmens egaux; par les communes sentences, les deux secteurs BDC, CDI seront egaux, & l'arc BCI sera autant multiplie de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC: & par mesme discours, l'arc FGLK sera autant multiplie de l'arc FG, que le secteur FHL le sera du secteur FHG; la conclusion est aisée par la 6. def. 5. cōme en la premiere partie. Parquoy aux cercles egaux, les angles tant aux centres qu'aux circonférences, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E .

De cecy s'ensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre a la mesme raison quel arc à l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils seront aussi entre-eux en la mesme raison:

Il est aussi evident que comme, vn angle au centre, est à quatre angles droits, ainsi est l'arc soustendant iceluy angle, à toute la circonference, & au contraire que comme quatre angles droits sont à vn angle au centre, ainsi toute la circonference est à l'arc soustendant iceluy angle.

Car comme vn angle au centre est à vn angle droit au centre, ainsi l'arc qui soustient iceluy angle, est au quadrant qui soustient l'angle droit par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est à sçauoir à 4. angles droits, ainsi l'arc soustendant iceluy angle, sera au quadruple du quadrant, sçauoir est à toute la circonference, par les choses que nous auons demonstrees à la fin du scholie de la 22. p. 5. puis apres d'autant qu'un angle au centre est à quatre angles droits, comme l'arc qui soustient iceluy angle, est à toute la circonference; aussi en permutant comme quatre angles droits seront à vn angle au centre, ainsi toute la circonference sera à l'arc soustendant l'angle du centre: ce qui a esté proposé.

Fin du sixiesme Element.



E L E M E N T

S E P T I E S M E.

D E F I N I T I O N S.



V N I T E', est selon laquelle
vne chacune chose de celles
qui sont, est appelée vne.

Euclide ayant traité és 6. livres precedents de la premiere partie de Geometrie, sçavoir est de celle là qui considere les plans, au parauant que venir à l'autre partie, laquelle traite des solides; il explique en ce septiesme liure & és deux suivans les proprietéx & affectiôns des nombres, pour puis apres traiter au 10. liures des lignes commensurables & incommensurables, nécessaires pour auoir entiere & parfaite cognoissance des proprietéx des solides. Euclide definit donc icy que c'est que vnité, & dit que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme vne: & est à noter que tout ainsi que en la Geometrie le point n'a aucune partie, aussi és nombres l'vnité (selon l'auteur) ne reçoit aucune diuision.

2. **N** o m b r e, est vne multitude composée de plusieurs vnitez.

C'est à dire qu'estans assemblées plusieurs unisex ensemble, leur aggregé s'appelle nombre.

3. partie est vn petit nombre tiré d'un plus grand, lors que le petit mesure le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un nombre en mesure un plus grand, il est dict partie d'iceluy: & ceste partie est appelée aliquotte; tellement que 2 est dit partie aliquotte de 4; & se nomme $\frac{2}{4}$; & 5, est dict $\frac{5}{15}$ de 15, pource que 5 mesure 15 par 3: ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{4}{28}$, &c.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6. est dict parties de 9: Car il ne le mesure pas précisément, mais est 2 parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12. est parties de 16, sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'un & l'autre nombre, est 3 fois en 12, & 4 fois en 16: aussi 15 est parties de 24, sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, & 8 fois en 24. &c.

5. Mais un grand nombre est dit multiple d'un petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'un plus grand, ains seulement de celuy là qu'il mesure précisément; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiple, ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux là qui le peuvent précisément mesurer: tellement que de deux nombres inegaux, si le petit mesure précisément le grand, ce moindre est dit partie du grand, mais celuy cy est aussi dit multiple de celly là: Ainsi 4 est bien dit

partiede 12, mais aussi iceluy 12. est dit multiplie de 4. Pareillement 30. est dit multiplie tant de 5 que de 6, qui sont partie d'iceluy, puis que l'un & l'autre le mesure.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre diuisé en deux egalemment.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 10, 30, sont appellez nombres pairs, pource que chacun d'eux peut estre diuisé en deux egalemment, c'est à dire en deux parties egales.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut estre diuisé en deux egalemment: ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, sont nommez impairs, pource qu'ils ne peuvent estre diuiser en deux egalemment.

8. Nombre paremment pair, est celuy qu'un nombre pair mesure par un nombre pair.

Comme 32, lequel 8 mesure par 4 est dict nombre paremment pair.

9. Et paremment impair, est celuy qu'un nombre impair mesure par un nombre pair.

Comme 42, lequel 7 mesure par 6, est dit nombre paremment impair.

10. Mais nombre impairement impair, est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15, lequel est mesuré de 5 par 3, est dit nombre impairement impair.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule vunité.

C'est à dire, que si vn nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par l'vnité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux cy 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Car la seule vunité mesure iceux.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux là, qui n'ont autre commune mesure que l'vnité.

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres composez entre-eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'vnité.

15. Vn nōbre est dit multiplier vn nōbre, lors qu'il en est procrée vn autre, qui est autant de fois composé deceluy qui est multiplié qu'il y a d'vnitez au multipliāt.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé plan, & les multipliers sont les costez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nōbres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé solide, & les multipliers sont les costez d'iceluy.

18. Nombre quarré, est celuy qui est également egal : ou bien c'est le produit de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, est celuy qui est également egal : ou bien c'est le produit de trois nombres egaux.

20. Les nombres sont proportionnaux, lors que le premier est autât multiplie, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, côme le troisiem. du quatriem.

Selon ceste vulgaire def. d'Euclide, ne sont point compris les nombres prop. ceux qui sont en raison superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Car en toutes ces proportions, le premier nombre n'est pas autans multiplié du second, que le 3. du 4. ny aussi mesme partie, ou parties : Mais le premier contient autans le 2, que le troisieme le quatriem; & en outre une mesme partie, ou parties d'iceluy : comme il est evident par les choses que nous auons enseignées à la 3. d. 5. C'est pourquoy Clavius (& à bon droit) a estimé que ceste vulgaire def. d'Euclide a esté corrompue, puis qu'elle est manquée & imparfaite : laquelle imperfection Donnos a encore augmentée en sa traduction, en ostant equemultiplie, tellement que selon sadicte traduction, on ne peut pas conclure que les nombres qui sont en raison multiple soient proportionnaux, comme veut la vulgaire definition. Pour donc rendre ceste 20. def. generale à tous genres de proportions, comme a fait Clavius, nous la poserons telle qu'il s'ensuit.

Les nōbres sont proportionnaux, lors que le premier est autāt multiple, ou bien mesme partie, ou mesmes parties du second que le troisieme du quatriesime. Ou bien quant le premier contient egaleme[n]t le second, & le troisieme le quatriesime, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy. Ainsi ces nombres 6. 2. 9. 3. sont proportionnaux, puis que le premier est autāt multiplie du second, que le 3. l'est du 4. c'est à sçavoir triple: Item ceux-cy 4. 12. 3. 9; car le premier est la mesme partie du second, que le 3. du 4. sçavoir est le tiers: item ceux-cy 6. 8. 9. 12. pource que le premier est mesmes parties du second que le 3. du 4. Sont aussi proportionnaux ces nombres cy 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. Car au premier exemple, le premier & 3. nombre contient vne seule fois le 2 & 4, & en outre vne mesme partie, sçavoir est $\frac{1}{2}$: mais au second, vne seule fois, & en outre mesme parties, sçavoir est les $\frac{1}{4}$: & au 3. deux fois, & encores vne mesme partie, c'est à sçavoir $\frac{1}{2}$: & au dernier, deux fois, & encores mesmes parties, sçavoir est les $\frac{1}{2}$. Que si le premier nombre n'est autāt multiplie ou mesme partie, ou parties du second que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne autāt de fois le second, que le 3. contient le 4. & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy, les nombres proposez ne pourront estre appelez proportionnaux. Parquoy si 4. nombres sont posez proportionnaux, il est necessaire d'accorder que le premier est autāt multiple, &c.

Or Euclide definit seulement les nombres proportionnaux, qui ont vne mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est evident que le premier estāt egal au second, aussi le 3. doit estre egal au 4. afin que les nombres soient dictz proporz.

Or de ceste def. resulte apertement, que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme, & au contraire qu'un nombre a aussi mesme raison à deux egaux: item que les nombres ayant mesme raison à vn mesme, ou ausquels vn mesme nōbre,

a mesme raison, sont egaux. Car puis que les nombres egaux sont, ou eue multiplies, ou mesme partie, ou mesmes parties d'un mesme nombre; ou contiennent egalement vn mesme nombre, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'un mesme nombre est ou eue multiplies, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceux: il est euident par ceste definition que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme nombre, ou vn mesme à des egaux. Ce qui a esté demonsté en toutes grandeurs à la 7. p. 5.

De rechef, pource que les nombres ayans mesme raison à vn mesme nombre, sont ou eue multiplies d'iceluy, ou mesme partie, ou parties; ou bien ils le contiennent egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que vn mesme nombre ayant mesme raison à quelqu'un, est ou eue multiplies d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme nombre, ou ausquels vn mesme nombre à mesme raison, sont egaux entre eux. Ce qui a aussi esté demonsté en toutes sortes de grandeurs en la 7. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à vn mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'un mesme nombre a plus grande raison à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celui qui a plus grande raison à vn mesme, est le plus grand: & celuy auquel vn mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires, & euidentes, si ceste def. est bien entendue. Cery a aussi esté demonsté és grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

41. Les nombres semblables plans, ou so-

lides, sont ceux qui ont les costez proportionnaux.

Comme 24. & 6. sont nombres plans semblables, pource que 6. & 4. costez de cestuy-là sont proportionnaux à 3. & 2. costez de celuy-cy: ainsi aussi 192. & 24. sont nombres solides semblables, pource que 8. 6. 4. costez de cestuy-là sont prop. à 4. 3. 2. costez de celuy-cy. Et est à noter que ces nombres plans, & solides semblables peuvent bien estre compris sous des costez non proportionnaux, mais toutes fois nous ne les considerons icy qu'entend qu'ils sont contenus sous leurs costez proportionnaux.

22. Nombre parfait, est celuy qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6 est dict nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy, sçavoir 1. 2. 3. prises ensemble, luy sont egales. Ainsi aussi 28. duquel les parties aliquotes, sçavoir est 1. 2. 4. 7. 14. estans prises ensemble, luy sont egales; sera dict nombre parfait.

COMMUNES SENTENCES.

1. **L**Es nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'un mesme nombre, sont egaux entr'eux.

2. Et ceux desquels un mesme nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont egaux, sont aussi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui sont vne mesme partie, ou mesmes parties de nombres e-

gaux, ou d'un mesme, sont egaux entre eux.

4. Et ceux desquels un mesme nombre, ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties: s'ont aussi egaux entr'eux.

5. L'unité mesure tout nombre par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire par le mesme nombre.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'unité.

7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelque'un, le multiplié mesurera le produit par le multiplié: mais le multiplié par le mesme multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre; aussi celui par lequel il le mesure; mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre, multiplie celui par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produit celui lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou

d'avantage, mesure aussi le composé d'eux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraiet tousiours alternativement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure jamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux;

Soient deux nombres inegaux AB & CD, si on soustraiet continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure jamais le plus grand, iusques à ce qu'on ait pris l'vnité: Je dis qu'iceux nombres AB, & CD seront premiers entr'eux.

A..... 5F.. 2G. 1B
C... 3H.. 2D
E.. 2

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront cōposez, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par

quelque nombre : soit iceluy E commune mesure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustraiët de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustraiët de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, unité. Puis donc que E mesure le tout CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG: mais il mesure aussi FB; E mesurera donc pareillement l'unité rest. nre GB, sçauoir le tout la partie : ce qui est impossible. Done AB & CD ne peuuent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'unité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce liure. Si donc de deux nombres inegaux proposez on soustraiët tousiours alternatiuement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Corollarium ayant demonstté la conuerse de ceste proposition à la suivante.

Estans proposez deux nombres composez entre eux, si on soustraiët tousiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra iusques à l'unité.

Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'unité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstté en la prop. 7. dessus: & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognissons facilement s'ils sont premiers en-

si'eux ou non. Car estant faicte la soustraction, comme dit est, son paruiet iusques à l'vnité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on n'y paruient, ils seront composez.

PROBL. I. PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure de deux nombres proposez non premiers entr'eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit soustrait le plus petit C D, tât de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose comme EB, icy luy soit osté de CD, tellement qu'il resté encore FD; & ainsi soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la preced. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Qu'ainsi ne soit. Je dis en premier lieu que FD mesure AB, & CD: Car mesurant EB, il mesure aussi CF; par la 11. com. sent. & d'autant qu'il se mesure soy-mesme, par la 10. com. sent. il mesure le tout CD: Pareillement il mesurera AE; & puis qu'il mesure aussi EB, il mesurera le tout AB; ainsi il mesure tous les deux AB, & CD.

Je dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD. Autrement soit vn plus grand nombre, sçauoir G, qui mesure tous les deux nombres AB & CD s'il est possible: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AE, & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB; & par consequent il mesurera CF. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste FD, sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est la plus grande commune mesure d'iceux AB, & CD.

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure. Nous auons donc trouué la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonstre que si G mesure AB & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

S C H O L I E.

Par les choses cy-dessus dictes, nous cognoissons facilement si trois ou d auantage de nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car soient les trois nombres A, B, C. Premièrement donc soit ven par ce qui est dit à la 1. prop. si les A..... 12
deux nombres A & B sont premiers en- B..... 9
tr'eux, ou non: Que s'ils sont premiers, il est C..... 6
euidēt que les trois nombres A, B, C, ne serōt D... 3

composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouuee par la 2. prop, leur plus grande commune mesure D ; que si elle mesure aussi le nombre C , il est manifeste que les trois nombres A, B, C sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure,

Que si D plus grande commune mesure de A & B , ne mesure C ; C & D seront premieres entr'eux, ou non: S'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C , ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils estoient composez, ils auroient vne commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B , par le corol. de ceste prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C , seront composez entr'eux. Car estant trouuee par la 2. p. 7. E plus grande commune mesure de C & D ; iceluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy ven que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C ; & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit propose.

En la mesme maniere sera cogneu si d'auantage de nombres que trois sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra esprouner premierement trois: si cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres proposez.

PROB. 2. PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux.

Soient

Soient trois nombres non A.....12 D....4.
 premiers entr'eux A,B,C, des- B.....8 E...2
 quels il faut trouuer la plus C.....6 F...3
 grande commune mesure.

Soit tiree la plus grande commune mesure des deux A & B, par la precedente prop. sçauoir D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: Car si vn plus grand nombre que D mesure A, B, C; par le corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, plus grande mesure de A, & B; sçauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le susdict corol. de la 2. prop. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure de C & D. Il est euident par la 11. comm. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D, lequel mesure B & A. Je dis d'auantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçauoir F s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le mesme corol. de la 2. propo. & par la mesme raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçauoir le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres A, B, C, & partant iceluy nombre E sera la plus grande commune mesure d'iceux trois nombres A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus grande commune mesure de tous nombres proposez non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

En la mesme maniere, est ens donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure, & aura aussi lieu le mesme corol.

THEOR. 2. PROP. IIII.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'est à dire que de deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux, A.....6
desquels A soit le plus grand. Je dis que le B...3
plus petit B, est ou partie aliquote, ou ali- B...4
quante de A. B.....5

Car ou B mesure A, ou nō. S'il le mesure, il est partie aliquote par la 3. def. de ce liure: s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombre composez, ou premiers: si composez, ils auront vne commune mesure par la 14. def. de ce mesme liure: si premiers, ils auront l'vnité pour commune mesure par la 12. deff ainsi B contiendra certain nombre d'vnitez semblables aux vnitez qui sont en A. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est

telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A est telle partie de BC, que D est de EF. Je dis que A & D ensemble, sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Soit donc BC diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC; EF se diuifera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF: & d'autant que BG est égal à A, & EH à D; si à choses egales on adiouste choses egales, sçauoir A & BG, à D & EH; A & D ensemble, seront egaux à BG & EH ensemble: le mesme se dira de A, GC; D & HF: & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble: Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. vi.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le

tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F, desquels le premier AB A...3 G...3 B contient autant de parties du second C, que le troisieme DE est C.....9 du quatrieme F. Je dis que AB, & D....4 H....4 E F.....12 DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

Car pour autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F ; estans AB & DE divisez en parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. precedente AG & DH ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul ; ainsi AB & DE ensemble, seront telles parties de C, & F ensemble, que AB est de C : Parquoy si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché ; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle A....4 E...2 B
partie du nombre CD, G....4 C.....8 F....4 D
que le retranché AE est du retranché CF. Je dis que
le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout
AB est du tout CD.

Car estant pris le nombre GC, en sorte que tel-
le partie qu'est le retranché AE du retranché CF,
telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. pro-
pos. les deux nombres AE & EB ensemble seront
telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est
AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout C
D: & partant puisque le nombre AB est telle partie
du nombre CF que de CD: iceux nombres G.F,
CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en
ostant donc le nombre commun CF, les demeurans
GC & FD seront egaux: & partant le reste EB se-
ra telle partie du reste FD, que de GC: c'est à dire
que le tout AB du tout CD puisque EB a esté po-
sé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hy-
pothèse est la mesme que AB de CD. Si donc vn
nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce
qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

*Commandin a demonstté aussi en cest endroit le theoreme
suivant.*

Si vn nombre est autant multiplie d'un autre
nombre que le retranché du retranché; aussi le reste
sera autant multiplie du reste, que le tout du tout.

Sois le nombre AB autant multiplie
du nombre CD, que le retranché AE A.....6 E....4 B
du retranché CF: Je dis aussi que le reste C...3 F...2 D

EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puisque AB, AE sont equemultiplie de CD, CF, par le contraire le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce que estoit proposé à démonstrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché: aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront egaux: parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de

FD, que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart ; aussi en permutant le premier sera telle partie, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soit A telle partie de BC, que D A...3
est de EF. Je dis qu'en permutant, B...3 G...3 C
A sera telle partie, ou contiendra D....4
telles parties de D, que BC de EF, E....4 H....4 F
pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF,
chacun au sien, car ainsi se doit entendre ceste prop.

Qu'ainsi ne soit : d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF ; BC contiendra autant de parties egales à A que EF d'egales à D : soit donc diuisé le nombre BC en parties BG, GC egales à A ; & le nombre EF en parties EH, HF egales à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. proposition de ce liure, A est partie de D, ou contient parties d'iceluy, & consequemment tous les autres BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG est egale à GC, & EH à HF ; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. proposit. BG, GC ensemble, c'est à dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF

ensembles, sçauoir EF, que ag de EH, c'est à dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, que le tiers du quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contiét telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB, C, A...2 G...2 B
DE, & F, dequels AB contienne C.....6
telles parties de C, que DE de F. D.....5 H.....5 E
Je dis qu'en permutant, AB sera F.....15
telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyen-
nant que AB & C soient plus petits que DE & F,
chacun au sien, car ceste prop. aussi bien que la pre-
cedente le doit ainsi entendre.

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C; & DE en DH, HE parties de F; AB sera diuisé en autâc de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: Dôc en permutant par la 9. prop. de ce 7. liure, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB ensemble, sçauoir est le premier nombre AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est à dire du troisiéme nombre DE, que AG de DH, c'est à dire que le second nombre C du quart F: Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du se-

cond, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD , $A....4E...2B$
comme le retranché AE est au re- $C.....6F...3D$
tranché CF : ie dis que le reste EB
sera au reste FD , comme le tout AB au tout CD .

Car puis que AB est à CD , comme AE à CF ; AB estant plus petit nombre que CD , il sera telle ou telles parties d'iceluy CD , que AE de CF , & par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD , que le tout du tout: & partant par la 20. def. conuertie le reste EB sera au reste FD , comme le tout AB au tout CD . Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Or combien que nous ayons posé le nombre AB estre plus petit que le nombre CD , si est-ce toutesfois que la demonstration, auroit aussi lieu si AB estoit plus grand que CD . Car ou iceluy nombre CD mesurerait AB , ou il ne le mesurerait pas. Que CD mesure donc premierement AB ;

*& d'autant que comme AB est à CD , $A.....8E.....6B$
ainsi AE est à CF , par la 20. def. $C....4F...3D$*

AB, AE , seront equemultiplies de CD, CF , c'est à dire que CD sera telle partie de AB , que CF de AE ; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi mesme partie de EB , que le tout CD du tout AB : donc par le contraire AB, EB , seront equemultiplies d'icelles CD, FD : & par la 20.

def. convertie comme le tout AB sera au tout CD , ainsi le reste EB sera au reste FD .

Maintenant que CD ne mesure pas AB : $A.....6E...3B$
 de rechef puisque cõme AB est à CD , ainsi $C....4F...2D$
 AE est à CF , telles parties que CD est de
 AB , telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def.
 & par la 7. & 8. prop. le reste FD sera mesmes parties du
 reste EB , que le tout CD du tout AB : donc par la mesme def.
 convertie le reste EB sera au reste FD , comme le tout AB sera
 au tout CD . Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 10. P R O P. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra
 sont proportionnaux; comme l'un
 des antecedans sera à l'un des conse-
 quens, ainsi tous les antecedans seront
 à tous les consequens.

Soient tant de nombres $A.....6$ $C....4$ $E...2$
 qu'on voudra proportion- $B.....9$ $D.....6$ $F...3$
 naux $A, B; C, D; E, F$; c'est
 à sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B , que de C à D ,
 & que de E à F . Je dis que tous les antecedans A, C ,
 E , ensemble, seront à tous les consequens B, D, F ,
 ensemble, comme A l'un des antecedans à B l'un
 des consequens.

Car puis que les susdits nombres sont propor-
 tionnaux, & A, C, E , sont moindres que B, D, F ; par
 la 20. def. A sera telles parties de B , que C de D , & E
 de F ; & par la 5. ou 6. prop. de ce mesme liure A & C
 ensemble seront telle, ou telles parties de B & D en-
 semble.

semble, que A de B, ou B de F. Derechef puis que A, C ensemble comme vn seul, est telle partie, ou parties de B, D, ensemble comme vn seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B : parquoy par la susdite 20. def. conuertie tous les antecedans A, C, E ensemble, auront mesme raison à tous les consequens B, D, F ensemble, que A à B : Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionaux, comme l'un des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

Encore que ceste prop. aussi bien que la precedente & suivante ayent plusieurs cas, si est-ce toutesfois qu'Euclide s'est contenté de les demonstrier en vn seul, apres lequel il est asé de conclure des autres, comme il est manifeste par ce que nous auons demonstté au Scholio precedent, c'est pourquoy nous ne nous arresterons d'auantage sur ces deux propositions.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionaux : aussi en permutant ils seront proportionaux.

Soient quatre nombres proportionaux A, B, C, D, sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D :
 Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

A.....	6
B.....	9
C.....	8
D.....	12

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A estant plus petit que s, & c que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. conuertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un costé, & autant d'un autre, qui se prennent deux à deux, & en mesme raison; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soiét d'une part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & A.....9 D.....6
 autant d'autre part D, E, F, & B.....6 E....4
 que de deux en deux il y ait telle C...3. F..2
 raison de A à B, que de D à E, &
 de B à C que de E à F. Je dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A sera à D, ainsi B à E: semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en permutant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison

que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstté) & partant en permutant, comme A sera à C, ainsi D sera à F: ce qu'il falloit prouuer.

L E M M E.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstre-
rons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E
plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Dere-
chef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle,
ou telles parties de C, que E de B: parquoy F sera aussi telle
ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def.
conuertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les
raisons des nombres qui sont de mesme à vne, sont aussi de
mesme entr'elles

S C H O L I E.

Ce Lemme respond à la 11. p. 5. Donnott se sert d'icelle 11. p.
5. & d'autres prop. du mesme liure pour appuyer les demon-
strations des 7. 8. & 9. liures: mais il est euident qu'Eu-
clide a voulu distinguer le nombre d'avec la grandeur, puis
que plusieurs propositions demonstrees és grandeurs au 5.
liure, sont derechef demonstrees en nombres és 7. 8. & 9.
liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations
des prop. de ceux cy sur celles de celuy-là.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si l'vnité mesure quelque nombre au-
tant de fois qu'un tiers mesure vn

quart ; aussi en permutant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois BC, que D mesure EF : le dis qu'en permutant BC mesurera EF, comme A mesure D.

A..1

B..1 G..1 H..1 C

D..2

E..2 I..2 K..2 F

Car par l'hypothese BC estant diuisé par l'vnité A, & EF par la partie D, icelle partie D sera autant de fois en EF, comme A en BC, & chacune partie de EF sera egale à D, comme chacune de BC à l'vnité A: donc l'vnité BG est à la partie EI, comme GH à Ik, & HC à KF: & partant par la 12. prop. tous les antecedants BC seront à tous les consequents EF, comme BG à EI, ou leur egaux A à D: Parquoy si l'vnité mesure quelque nombre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produicts seront egaux entr'eux,

Soient deux nombres A & B ; & que A multipliant B produise C ; & B multipliant A produise D: le dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B sera autant dans C, que l'vnité est en A par la 15. def. de

ce 7. liure, & par la 15. prop. en permutant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois dedans D, qu'il ya d'vnité en B par la mesme 15. def. & nous auons prouué que A estoit autant en C. que l'vnité en B : donc A est autant en C qu'en D; & partant par la com. sent. C & D seront egaux entr'eux : Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

Vnité.

A...3 B....4
C.....12
D.....12

THEOR. 15. PROP XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E : le dis que les deux produicts D & E sont entr'eux, comme B à C.

Vnité.

A...2
B...3 C....4
D.....6
E.....8

Car par la 15. def. B multiplié par A est autant de fois dans son produict D, que l'vnité est en A; & C dans son produict E, comme la mesme vnité en A : par consequent il y aura telle raison tant de B à D, que de C à E, comme de l'vnité à A. Parquoy par le Lemme de la 14. p. 7. B sera à D, comme C à E; & en permutant par la 13. p. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E : donc vn nombre multipliant deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les produicts seront entr'eux, en mesme raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, A...3 B....4
 multiplians C, & soient les deux C..2
 produicts D & E. Je dis qu'i- D.....6 E.....8
 ceux D & E seront l'un à l'autre
 comme A est à B.

Car puiſque A multipliant C produict D, auſſi C multipliant A produira le meſme D par la 16. prop. & par la meſme raiſon, puiſque B multipliant C produict E, auſſi C multipliant B produira le meſme E: ainſi A & B multipliant C, c'eſt comme ſi C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produicts D, E, ſeront l'un à l'autre comme A eſt à B par la prop. preced. Parquoy deux nombres en multipliant vn autre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

S C H O L I E.

Clavius a accommodé (apres Campanus) tant ceſte prop. que la precedente à tant de nombres qu'on vouldra; en ceſte ſorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on vouldra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produicts ſeront entr'eux en meſmes raiſons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou eſtans multiplié par iceux, ſoient produicts les nombres E, F, G. Je
dis

dis que E, F, G, sont en- $A...3$
tr'eux comme les nom- $B...2 \quad C...3 \quad D...4$
bres multipliez ou mul- $E.....6 \quad F.....9 \quad G.....12$
tiplians B, C, D ; c'est à
dire que comme B est à C, ainsi E à F ; & comme C à D, ainsi
F à G. Car puis que E, F sont produits de A multiplians B,
C ; ou de B, C, multipliez par A, comme B sera à C. ainsi E
sera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F,
G, sont produits de A en C, D, ou de C, D par A, aussi com-
me C sera à D, ainsi F sera à G, & ainsi des autres. Appert
donc ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportion-
naux , le produit du premier &
quart, sera egal au produit du se-
cond & tiers Et si le produit du pre-
mier & quart, est egal au produit
du second & tiers , iceux quatre
nombres sont proportionnaux.

Soient quatre nombres pro- $A.....6 \quad B....4$
portionnaux A, B, C, D, & que le $C...3 \quad D...2$
premier A multiplié par le der- $E.....12$
nier D produise E, & le second $F.....12$
B par le tiers C produise F. le $G.....18$
dis que E & F sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A par C, & le pro-
duit soit G : d'autant que A multiplié par C & D,
produit G & E, il y aura telle raison de G à E, que
de C à D, par la prop. preced. Pareillement d'au-

tant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G estant à E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la 14. prop. comme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres egaux, ainsi que nous auons dit en la 20. def.

Pour la seconde partie; soit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié C: Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produict de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront mesme raison à G, comme nous auons dit en la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la precedente prop. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17. prop. & Partant par le lemme de la 14. prop. A sera à B, comme C à D: Si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. xx.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produict des extrêmes est egal au produict du milieu: & si le produict des extrêmes est egal à celuy du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Ceste proposition est aisée à demonstrier: car en posant le nombre du milieu deux fois, afin qu'il y

ait 4 nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient egaux; par la precedente le produit du premier & quart, sera egal au produit du second & tiers, c'est à dire au produit du second par soy mesme, &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux, mesurent egaleement les nombres qui ont la mesme raison, sçavoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

Soient deux nombres les plus petits en leur raison $A \& B$, & deux autres nombres plus grands $C \& D$ en mesme raison qu'iceux $A \& B$: Je dis que de mesme façon que A mesure C , aussi B mesure D .

Car puisque iceux A, B, C, D , sont proportionnaux, ils le seront aussi en permutant par la 13. prop. A sera donc à C comme B à D ; & $A, \& B$ plus petits que $C \& D$, & par la 20. def. ils seront mesme partie ou parties d'iceux $C \& D$. Or ils ne peuvent estre parties: car il est evident qu'ils ne seroient les plus petits nombres de leur raison; ce qui est contre l'hypothese. Donc A est mesme partie de C , que B de D ; & partant A mesure C , autant de fois que B mesure D : Parquoy les plus petits nombres de tous ceux

qui ont vne mesme raison, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un costé, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en mesme raison, la proportion estant troublée, en raison egale, ils seront proportionnaux.

Soient trois nombres d'un A....4 D.....12
costé A, B, C, & trois d'un autre B...3 E.....8
D, E, F, & qu'en proportion troublée A soit à B, comme E à F, & B à C comme D à E : Je dis qu'en raison egale A sera à C, comme D à F.

Car A estant à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera egal au produit de B multiplié par E, par la 19. prop. Item B estant à C, comme D à E; le mesme produit de B multiplié par E, sera egal au produit de C multiplié par D, par la mesme prop. & partant le produit de A par F, sera egal au produit de C par D, & par la susdite 19. prop. il y aura telle raison de A à C, comme de D à F : Parquoy s'il y a trois nombres d'un costé, & autant d'un autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

D'autant que de six moyens d'argumenter és proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonstrez au 5.

lière, il en demonstre en celuy-cy seulement deux en nombres; Il ne sera hors de propos de demonstrier aussi en nombres les 4. autres moyens, comme ont fait plusieurs Interpretes.

I.

Si quatre nombres sont proportionnaux; par raison inuerse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D . Je dis qu'en $A.....6.C...3$ changeant comme B à A , ainsi D à C . Car $B...4$ $D...2$ puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. prop. comme A sera à C , ainsi B à D . Recherche puis que B est à D comme A à C , par la mesme prop. B sera à A comme D à C . Ce qui estoit proposé.

II.

Si les nombres composez sont proportionnaux; iceux diuisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à FE . Je dis $A.....6.C...3$; B qu' aussi en diuisant, comme AC à CB , $D...4$ $F...2$ E ainsi DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme le tout AB est au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF , comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui estoit proposé.

Par la mesme maniere nous demonstrerons comme au liure 5. la diuision conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB , ainsi DE à FE ; Je dis que, par diuision conuerse de raison, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE ; en diuisant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE .
 Je dis par diuision contraire de raison, que comme AC est
 à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB ,
 ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC ,
 ainsi DE à DF . Donc en diuisant comme CB à AC , ainsi
 FE à DF : & en changeant comme AC sera à CB , ainsi
 DF à FE . Ce qui estoit proposé.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionnaux : iceux
 composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je $A.....6B...3C$
 dis qu'en composant comme AC est à BC , $D....4E..2F$
 ainsi DF à EF . Car puis que comme AB
 à BC , ainsi DE à EF , en permutant par la 13. prop. comme AB
 à DE , ainsi BC à EF ; & partant par la 12. prop. comme AB
 BC , ensemble à DE , EF ensemble, c'est dire la toute AC à la
 toute DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop.
 comme AC à BC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous demonstrierons icy comme au 5. liure
 la composition conuerse & contraire de raison. Car soit pre-
 mierement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par compo-
 sition conuerse de raison, que comme AC est à AB , ainsi DF à
 DE . Car veu que AB est à BC , comme DE à EF : en changeant
 comme BC , sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant comme
 AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit de rechef AB à BC , comme DE à EF . Je
 dis que par composition contraire de raison, comme AB est
 à AC , ainsi DE à DF : car puisque comme AB à BC , ainsi
 DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à
 DE . Donc en composant comme AC à AB , ainsi DF à DE , &
 en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF .

IIII.

Si les nombres composez sont proportionnaux ; ils

le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB à CB , ainsi DE à FE . $A.....6C...3B$
 Je dis que par conuersion de raison, com- $D....4F...2E$
 me AB est à AC , ainsi DE à DF . Car puis
 que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13.
 prop. comme le tout AB sera au tout DE , ainsi le retranché
 CB sera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme
 le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC au reste DF . Donc
 en permutant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Ce qui
 estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXI II.

Les nombres premiers entr'eux, sont les
 plus petits de tous ceux qui ont la
 mesme raison avec iceux.

Soient deux nombres pre- $A.....6B.....5$
 miers entr'eux A & B . Je dis $C....D...E..$
 qu'ils sont les plus petits de
 tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la
 mesme raison, s'il est possible, par la 21. prop. ils me-
 sureront A & B , l'un comme l'autre : qu'ils les me-
 surent donc par le nombre E . Donc E iera commu-
 ne mesure des nombres A & E : ainsi ils ne seroient
 point premiers entr'eux, mais composez contre
 l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous
 ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les
 nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit
 prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux. A.....6 D... C.. B....5 E...

Autrement ; ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux s'il est possible ; sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D, & B par les vnitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com.sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres ; ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison : ce qui est contre nostre hypothese : A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouuer,

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entre eux, celuy qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre A.....6 B....5 C...3 D..

desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous-deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

Soient deux nombres A & B,
tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est premier à C.

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçauoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produira D par la 9. com. sent, comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux; E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente; & par la 25. proposit. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & par-

tant ils mesureront également F & B, qui sont en la même raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. prop. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, ce qui est absurde, & contre l'hypothese. D sera donc premier à C. Partant si deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A...3 B...4
A & B, & que l'un ou l'autre d'i- C.....9 D...3
ceux sçavoir est A, multiplié par soy produise C. le
que B & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D, égal à A; B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B, par la 16. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au mesme B. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produit de A multiplié par B, & F produit de C multiplié par D: Je dis que E, & F sont premiers entr'eux.

Car A & B estans premiers à C, leur produit E sera aussi premier au mesme C par la 26. prop. Par le mesme discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers à E, leur produit F sera aussi premier à E par la mesme 26. prop. Si donc deux nombres sont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 27. P R O P. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chacun par soy, leurs produits seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produits sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencement, les produits sont encores premiers entr'eux; & tousiours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par soy-mesme produise C, mais B multiplié aussi par soy produise D. Je dis que C & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F.

Je dis que E & F seront premiers entr'eux.

A...2

B...3

C....4

D.....9

E.....8

F.....27

G 16

H 81.

Car par la 27. prop. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier à B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté démontré que C est aussi premier à D: parquoy l'un & l'autre nombre A, C, sera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produict de A en C, sera premier à F, produict de B par D.

Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par la mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre; & partant par la 28. prop. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 28. PROP. xxx.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble, le produict sera premier à chacun d'eux: & si le produict est premier à quel qu'un d'i-

ceux deux nombres, ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB & BC : Je dis que le composé des deux AC , sera premier à chacun d'iceux AB, BC .

Car si AC, AB ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible: si donc D mesure le tout AC , & la partie AB ; il mesurera aussi le reste BC , par la 12. com. sent. ainsi AB & BC ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Parquoy AC sera premier à AB : on démontrera par la mesme maniere que AC est aussi premier à BC .

Secondement, si le tout AC est premier à AB ou à BC . Je dis que iceux AB & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC , par la 10. com. sent. Ainsi AC ne seroit premier à AB , & BC , ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il s'ensuit de cecy, que si un nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB ; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste prop. Donc aussi AC sera premier à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé,

THEOR. 29. PROP. xxxi.

Tout nombre premier, est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne mesure le nombre B: le dis que A....., B..... & C....
A & B sont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le sont, ils aurōt vne commune mesure autre que l'vnité; laquelle soit C, s'il est possible. Or C ne peut estre egal à A puis que nous auons posé que A ne mesure pas B: & par ainsi A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne seroit premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers entr'eux: donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 30. PROP. xxxii.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produict, il mesurera aussi l'un d'iceux deux nombres posez au commencement.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication desquels soit produict C, & que D nombre premier mesure iceluy C. le dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

Autrement, s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il me-

sure C par le nombre E : Si A...4 B.....6
 donc D ne mesure A, par la C.....24
 prop. preced. il sera premier D...3 E.....8
 à iceluy, & par la 13. prop. ils seront les plus petits de
 leur raison. Mais pour-autant que D par E fait C,
 aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A se-
 ra à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesure-
 ront également E & B, c'est à dire que A mesurera
 E; & D mesurera B. En la mesme maniere sera de-
 monstré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A.
 Si donc deux nombres se multiplient l'un l'autre,
 &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 31. PROP. xxxiii.

Tout nombre composé est mesuré par
 quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il A.....8
 sera mesuré par quelque nōbre premier. B....4

Car puis qu'il est composé, il sera me- C..2
 suré de quelque nombre par la 13. deff. & soit de B,
 lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop.
 est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par
 vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou
 non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure
 A, aussi C mesurera A par la 11. com sent. Mais si C
 est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et
 pource qu'un nombre ne se diminue infiniment,
 nous viendrons finablement à quelque nombre que
 nul autre ne mesurera; & partant à vn nombre pre-
 mier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera
 aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé
 est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il
 falloit prouuer.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Je dis qu'i- A.....5
celuy. est ou nombre premier, ou que A.....6
quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la precedente prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

PROB. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de
nombres qu'on voudra A, A.....6 B....4 C.....8
B, C : & il faut trouuer les D..2
plus petits en la mesme E...3 F..2 G....4
raison. H.. I.. K... L..

Le dicts nombres A, B,
C sont ou nombres premiers, ou nombres composés : s'il sont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composés, soit trouué D plus grande commune mesure d'i-
ceux

ceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est euident qu'iceux E, F, G sont és mesmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C par la 9. com. sent. & par ce que nous auons demonstré à la 18. prop. E, F, G, auront la mesme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K les plus petits nombres ayans mesme proportion qu'iceux A, B, C: ils les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L; ce qu'estant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A; & L multipliant H, fait le mesme A; par la 19. pro. il y aura telle raison de D à L; que de H à E: mais H est moindre que E: donc D sera aussi moindre que L: Et puis que H, I, K mesurent A, B, C, par L; L mesurera aussi iceux A, B, C, par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C: ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en mesme raison, que les proposez A, B, C. Parquoy estans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R L L O A I R E.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

Par ces choses appert le moyen de trouver les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C , continuellement proportionnaux, nous trouverons les deux moindres en la mesme raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B , c'est à sçavoir ces nombres-là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B , mesure iceux. Car par le corol. cy-dessus, E & F seront les plus petites de tous ceux qui sont en la mesme raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C .

PROBL. 4. PRO. xxxvi.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouver le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez mesure le plus grand, iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons: que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non; si premiers, soit C produit de A , multiplié par B . Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A , & par B . Car par la 7. comm. sent. il est evident que C sera mesuré par l'un & par l'autre,

& s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B, en soit vn autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la neuuesme commune sentence, & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous auons monstré que A mesuroit F : donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C estoit donc le moindre nombre que A & B peuvent mesurer.

Soient maintenant les A....4 B.....6
deux nombres A & B com- C...2 D...3 E.....12
posez, & par la preced. prop. soient trouuez C & D
les plus petits nombres de la mesme raison, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, soient proportionnaux : Quoy posé par la 19. prop. le produit de A multiplié par D, sera egal au produit de B multiplié par C: iceluy produit soit E. Donc E sera mesuré par B, & par A : & par le mesme discours de la precedente demonstration, on monstrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Nous auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 33. PROP. xxxvii.

Si deux nombres mesurent vn autre
nombre ; le plus petit qu'ils me-

furent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B,
qui en mesurent vn autre CD, & A...2 B...3
que le plus petit nombre qu'ils C..... F..... D
mesurent soit E. Je dis que B E.....6
mesurera aussi CD.

Autrement, si E ne mesure CD; apres auoir mesuré CF, qu'il laisse FD plus petit que soy, s'il est possible: A & B mesurans E, ils mesureront aussi CF par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E, ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD: Si donc deux nombres mesurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. xxxviii.

Trouuer le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez
A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent. B...2 B...3 C.....6
D.....6

Soit trouué D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B, par la 36. prop. Or C mesure aussi D, & il ne le mesurera pas: s'il le mesure; Je dis qu'il est au. le plus petit qu'iceux A, B, C, peuvent mesurer: car

s'il n'est, en soit quelque autre plus petit E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A, B, C.

Que si D n'est aussi mesuré par A...2 B...3 C...4
 C: par la mesme 36. proposi. soit D.....6
 trouué E plus petit nombre me- E.....12
 suré par C & D: le dis que E sera F.....
 le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement E est mesuré par A, B, C d'autant que C & D, le mesurent; & A & B mesurant D, par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible: A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la preced prop. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C. le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la mesme prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand vn plus petit; ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuvent mesurer: Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cest autre. Car il a esté demonstté que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

S C H O L I E .

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4 nombres sont donnez, il faudra trouuer le moindre que trois mesurent: si 5, il faudra trouuer le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. xxxix.

Si vn nombre mesure vn autre nombre;
le mesuré aura vne partie denommée
par le mesurant.

Vnité.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Je dis que iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois, que l'unité mesure A; & C sera telle partie de B que l'unité de A. Mais l'unité est vne partie de A, denommée par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. deff. de ce 7. liure: donc aussi C sera vne partie de B denommée par A. Si donc vn nombre mesure vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 35. PROP. xl.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle

soit, le nombre nommant ceste partie
le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B A.....12
denommée par le nombre C. Je dis B...3 C...4
que C mesure A.

Car puis que B est partie dénommée par C ; &
l'unité est partie de C, dénommée par le mesme C ;
comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A : & par
la 15. prop. en permutant comme l'unité mesurera B,
ainsi C mesurera A. Parquoy si vn nombre a quel-
conque partie, & c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les
parties donnees.

Soient les parties données A, A deuxiesme D..2
B, C ; il faut trouuer le plus petit B tiers E...3
nombre qui ait icelles parties. C quart. F...4

Soient pris les trois nombres, G.....12
D, E, F, denommez par icelles H.....
parties A, B, C ; & par la 38. prop. soit trouué G, le
plus petit nombre que peuuent mesurer D, E, F : Je
dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G, par la 39. prop. G
aura les parties denommées par D, E, F, c'est à dire
les parties A, B, C. Je dis aussi que G est le plus petit
nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit
H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties.
Et H sera mesuré par les nombres D, E, F denom-

mées par les parties E, B, C, par la precedente prop. & partant puis que H est moindre que G; iceluy nombre G ne sera le plus petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. G est donc le moindre nombre, ayant les parties donnees A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties donnees: Ce qu'il falloit faire.

Fin du septiesme Element.





E L E M E N T

H V I C T I E S M E.

T H E O R. I. P R O P. I.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & les extrêmes sont premiers entr'eux; ils seront les plus petits de leur raison.



OIENT trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C; &

A....4	D...
B.....6	E.....
C.....9	F.....

que les extrêmes A & C, soient premiers entr'eux: le dis que A, B, C, sont

les plus petits qui soient en la même raison.

Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la même raison, s'il est possible. Donc en raison égale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront D & F: ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les

plus petits en la mesme raison. Parquoy s'il ya tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

P R O B. I. P R O P. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en vne raison donnée.

Soiēt les deux nombre A & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: il faut trouuer le requis.

Que A multiplié par soy produise C; A par B produise D; & B par soy produise E: le dispremierement

que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliant A & B a produit C & D; comme A sera à B, ainsi C à D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E: Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que par la 24. p. 7. A & B sont premiers, aussi par la 29. p. 7. C & E seront premiers: & par la precedente prop. C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise F; A par D produise G; B par D produise H; & B par E produise I: le dis que F, G, H, I sont

F 8.

C 4.

A 2.

G 12.

D 6.

B 3.

H 18.

E 9.

I 27.

les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. ces nombres seront continuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux : & par la precedente F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la mesme raison qu'iceux extrêmes F & I. Et en ceste façon on en trouvera tant que l'on voudra. Nous avons donc trouvé les nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estans les plus petits de leur raison ; les extrêmes seront quarréz : s'il y en a quatre, qu'iceux extrêmes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrêmes C & E, ont esté produicts de A & B multipliez par eux mesmes, & des 4. F, G, H, I, les extrêmes F & I ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarréz C & E.

Il resulte encore que les extrêmes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstté par les 24. & 29. p. 7. que les extrêmes C, E ; & F, I sont premiers entr'eux.

T H E O R. 2. P R O P. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison : les extrêmes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D : Je dis que les extrêmes A & D sont premiers entr'eux.

Car soient trouvez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G: ils seront premiers entr'eux, par la 23. p. 7. & comme il a esté enseigné en la preced. soient trouvez des nombres

A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O; & ainsi consecutiuellement vn plus, iusques à ce que on en ayt autant qu'il y en aura de proposez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extrêmes L & O sont premiers entr'eux, par le corol. de la preced. les extrêmes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 2. PROP. IIII.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les petits continuellement proportionnaux selon les raisons données.

Soient données les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouver trois nombres en continue proportion, les plus petits de ceux qui sont selon les raisons données.

A 1.

G 8. Loo

B 3.

F 12. Moo

C 4.

H 15. Noo

D 5.

Soit trouvé F le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7. en apres soit trouvé G, autant de fois mesuré par A, que F par B. Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont les nombres requis.

Car il est evident qu'ils sont continuellement proportionnaux en la raison donnée; d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F; & par consequent A & B multiplians vn mesme nombre (sçavoir celuy par lequel ils mesurent G & F) ont produit G & F: par la 18. p. 7. G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme C à D.

On prouvera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les raisons données: d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux raisons données comme les trois G, F, H: il est evident que B & C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B & par C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sçavoir est, le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Que si trois raisons estoient données aux plus

petits termes A à B ; C à

D, & F à G, selon les- A 2.

quelles il fallut trouver

I 8. M 16.

quatre nombres tels B 3.

que requiert la propo- H 12. N 24.

sition : on procedera en C 4.

ceste sorte.

K 15. O 30.

Soiēt trouvez les trois D 5.

nombres I, H, K, com- F 6.

L. P 35.

me dessus : ce faict ou F G 7.

mesurera k, ou non. S'il

le mesuroit, faudroit prendre L autant de fois mesuré par G, que K par F: & par la precedente demonstration, il est evident qu'on auroit satisfait. Que si F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36.p.7. Et que G mesure autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N; & I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nōbres requis.

Car puisque I, H, K mesurent également M, N, O, cōme dit est cy dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme raison de I à H que de A à B. & de H à k que de C à D, pource que A & B mesurent egalemēt iceux I & H; & C, D, également H & k. Donc comme A à B, ainsi M à N, & cōme C à D, ainsi N à O : aussi comme F à G ainsi O à P, à cause que F, G mesurent également O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux és raisons donnees. Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstrera en la mesme façon qu'on a faict cy dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé si 4. ou d'avantage de raisons sont données aux plus petits ter-

mes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROR. v.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en la raison composée de leurs costez.

Soient les deux nombres plans A & B; les costez de A, soient C & D; & les costez de B, soient E & F. Je dis que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

C 3.

A 12.

D 4.

G 8.

E 2.

B 18.

F 9.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en même raison que C à E, par la 17. p. 7. Et par même discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en même raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composée de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composée de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'un à l'autre en raison composée de celles de leurs costez. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &

que le premier ne mesure le second,
ny aussi pas vn autre ne mesurera pas
vn autre.

Soient tant de nombres A 8. B 12. C 18. D 27.
que l'on vouldra conti- E 4. F 6. G 9.
nuellement proportion-

naux A, B, C, D; & que le premier A, ne mesure
point le second B. Je dis que pas vn autre n'en me-
surera pas vn autre.

Car premierement, comme A ne mesure point
B, ainsi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'au-
tant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit
dire qu'en passant quelqu'un, les extrêmes se pour-
roient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C,
soient trouuez trois nombres E, F, G, les plus petits
en la raison de A, B, C par la 37. p. 7. ainsi A estant à
B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G: en
raison egale A sera à C cōme E à G, par la 14. p. 7. &
puis que par l'hypothese, A ne mesure point B, aussi
E ne mesurera point F; & partāt E ne sera pas l'vnité,
autrement il mesurerait F, veu que l'vnité mesure
tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce
liure E & G sont nombres premiers, & que E n'est
pas l'vnité; iceluy E ne mesurera pas G: Mais nous
auons demonsté que comme A est à C, ainsi E est
à G. Donc comme E ne mesure point G, aussi A ne
mesurera point C. Par le mesme discours on prou-
uera de tous les autres. S'il y a donc tant de nom-
bres qu'on vouldra continuellement proportion-
naux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres quel'on voudra
continuellement proportionnaux,
& que le premier mesure le dernier,
il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres A 3. B 9. C 12. D 24.
qu'on voudra continuelle-
ment proportionnaux A, B, C, D; & que le premier
A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi
le second B.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi
pas vn autre ne mesurerait pas vn autre, & par con-
sequent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothe-
se. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de
nombres qu'on voudra continuellement propor-
tionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quel-
ques nombres moyens proportion-
naux, il en tombera autant entre
deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, A 3. C 9. D 27. B 81.
entre lesquels tombent C G 1. H 3. I 9. K 27.
& D continuellement pro- E 1. L 6. M 18. F 54.
portionnaux: & qu'il y ait
telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre

B b

E & F se trouueront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B. Donc en raison egale comme A sera à B, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront egaleement E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M: tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent egaleement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstté à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est egale à la multitude A, C, D, B, il tombera autât de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a esté demonstté que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle des

nombres G, H, I, K : Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B , donc aussi E, L, M, F , sont en mesme proportion que A, C, D, B .

Il appert aussi de ce theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouuée entre le binaire & l'vnité; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la seule vnité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là, ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre 2. nombres differens seulement de l'vnité. ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'vnité: lequel nous demonstrerons ne pouuoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD , differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'vnité, mais plus grand que CD , aussi de l'vnité. Le dis que

EF n'est moyen prop. entre AB, CD . Car si on dit que comme AB à EF , ainsi EF à CD : estant osté de AB , le nombre AG egal à EF , afin qu'il reste l'vnité GB ; & de EF , le nombre EH egal à CD , afin qu'il reste aussi l'vnité HF ; pareillement comme AB sera à EF , ainsi le retranché AG sera au retranché EH . Donc aussi le reste GB sera au reste HF ; c'est à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout AB

$A.....6G.B$	$A..G.B$
$E.....5H.F$	$E.H.F$
$C.....5D$	$C.D$

B b ij

au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui est absurde; donc EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raison triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui est impossible, comme nous venons de demonstrier.

Par mesme raison, ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit aussi un (par ce theor) entre 5 & 1, les petits nombres de la raison quintuple: ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C, tombe un moyen prop. binaire, ou ternaire D, tellement que AB soit à D, comme D à A.....B.E C: en changeant C sera à D come D à AB. Et D..D... pour ce que l'unité C mesure D, aussi D mesurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D mesure pareillement le sinaire AE: donc D mesurera le tout AE, & le retranché AB; & partant par la 11. com. sent. aussi D mesurera le reste unité BE. Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduendra tousiours, si on dit qu'un nombre quaternaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'unité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entre-eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'unité.

Soient deux
 nombres pre- A 8 C 12. D 18. B 27.
 miers entre- Vnité.
 eux A & B, en- E 2. F 3.
 tre lesquels G 4 H 6. I 9.
 tombēt quel- K 8. L 12. M 18. N 27.
 ques nombres

continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petit nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. soient trouuez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I: puis les quatre k, L, M, N; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrêmes A, B, sont premiers entre eux, par la 1. p. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs egaux en multitude k, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la construction. Donc k, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme k à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la demonstration de la 2. p. 8.) E multipliant soy-mesme a produit G; & multipliant G a fait k, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy k par le mesme E: mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E. Donc l'vnité mesurera egallement E; & E iceluy G; & G iceluy k: & partant l'vnité sera mesme partie de E, que E de G, & G de k. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G, k, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouuez con-

tinuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'vnité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre k ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. x.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportion-

A 8. I 12. K 18. B 27.

E 4. H 6. G 9.

D 2. F 3.

C 1.

naux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Je dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionnaux entre A & B

Car si on vient à multiplier comme en la 2. p. 8. pour trouuer les trois nombres, H, I, K, c'est à sçauoir que H soit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puisque comme C à D, ainsi D à E, & E à A; & que par la 3. com. sent. C vnité mesure D, par les

vnitez qui sont en D; aussi D mesurera E, par les vnitez qui sont en D; & E mesurera A, par les mesmes vnitez de D; ainsi il est euident que D multiplié par soy-mesme produict E, & E multiplié par D, a produict A. Par mesme discours se prouuera que F multiplié par soy-mesme, a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant puis que D multiplié par soy-mesme, & par F a produict E & H, par la 17. p. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par soy-mesme, a produict H & G; aussi H sera à G comme D à F: Parquoy les trois nombres E, H, G, seront en continuelle proportion. D'auantage D multipliant E & H, produict A & I; partant comme E sera à H, ainsi A sera à I: & puis que D & F multiplient H, & produisent I & K: I sera à K, comme D à F. Par mesme discours k sera à B à la mesme raison, estans les produicts de H & G multipliez par F, le tout par les 17. & 18. p. 7. Il est donc euident que A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux, & que partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'est à sçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 9. P R O P. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel: & le quarré est au quarré en raison doublée du costé au costé.

Soient deux nombres
 quarrez A & B, desquels A4. E6. B9.
 les costez soient c & d. le C2. D3.
 dis qu'être iceux quarrez

A & B, tombera vn moyen proportionnel: & que le
 quarré A est au quarré B en la raison doublee du co-
 sté C au costé D.

Car puis que C est le costé de A; C multiplié par
 soy-mesme produira A: pareillement D par soy-
 mesme produira B. Maintenant soit trouué E, pro-
 duiet de C multiplié par D: Et par la 17. prop. 7. com-
 me C à D, ainsi A à E, & E à B. Partant E est moyen
 proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie: il est enuidens que le quar-
 ré A, est au quarré B, en raison doublee du costé C
 au costé D. Car A, E, B estans continuellement pro-
 portionnaux, A est à B en raison doublee de A à E
 par la 10. deff. 5. qui est la mesme raison que de C à
 D, ainsi qu'il à esté demonstéré cy-dessus. Parquoy
 entre deux nombres quarrez tombe vn moyen pro-
 portionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent
 deux moyens proportionnaux: & le
 cube est au cube en raison triplee du
 costé au costé.

Soient deux nom- A 27. H 36. I 48. B 64.
 bres cubes A & B, E 9. G 12. F 16.
 desquels les costez C 3. D 4.

soient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du costé C au costé D.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme produise E ; D par soy produise F ; mais C & D l'un par l'autre produise G ; & iceluy G multiplié par l'un & l'autre C & D, produise H & I. Or puis que A, & B sont cubes, ils seront les produits de C multiplié par E, & de D multiplié par F : il est donc evident que la construction est semblable à celle de la 2. prop. 8. & par la demonstration de la mesme, A, H, I, B seront continuellement proportionnaux selon la raison de C à D. Parrant H & I, seront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la seconde partie ; il est manifeste que le cube A est au cube B, en raison triplée du costé C au costé D. Car A, H, I, B estans continuellement proportionnaux, A est à B en raison triplée de A à H par la 10. deff. 5. Mais comme A est à H, ainsi C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison triplée du costé C au costé D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux ; iceux estans multipliez chacun par soy, leurs produits seront aussi continuellement proportionnaux : & si

chacun multiplie encores son produit, les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux: & cela aduiendra tousiours environ les extremes.

Soiēt

A₁. B₄. C₈.

trois

D₄. N₈. E₁₆. O₃₂ F₆₄.

nom-

G₈. P₁₆. Q₃₂. H₆₄. R₁₂₈. S₂₅₆. I₅₁₂.

bres continuellement proportionnaux A, B, C : Et qu'iceux se multiplians chacun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chacun son produict facent G, H, I, & ainsi continuellement. Le dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi; que N soit le produict de A multiplié par B; & O, de B par C: Pareillement que P soit le produit de A par N; Q, de A par E; R, de B par O; S, de B par F: par la 17. proposit. 7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B: & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E seront aussi en la mesme raison, & ainsi des autres: Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B: ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en vne mesme raison; & en en raison egale comme D sera à E, ainsi E à F: parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q: par ce que nous auons demonstté

à la 18. prop. 7. G, P, Q . seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E ; c'est à dire comme A à B . Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H , & par la 18. prop. 7. comme aussi A sera à B , ainsi Q à H . Donc G, P, Q, H , sont proportionnaux en la raison de A à B . Par mesme discours H, R, S, I , seront promus proportionnaux en la mesme raison de A à B : & partant en raison egale comme G sera à H , ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui $A 4.$ $E 12.$ $B 36.$ mesure le nombre quarré B ; & $C 2.$ $D 6.$ d'iceux quarez les costez soiēt C , & D . Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D .

Car ayant multiplié C par D , il est euident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen proport. entre A & B , en la raison de C à D : mais le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E . Parquoy puis que comme A à E , ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D . Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D , aussi le quarré A mesurera le quarré B . Car comme dessus A ,

E & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E ; & E mesurera B, & par conséquent A mesurera aussi B, parce que qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, &c.. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube: aussi le costé mesurera le costé: & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit vn nombre cube

A, qui mesure vn autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez

A 8. H 24. I 72. B 216.

E 4. G 12. F 36.

C 2. D 6.

soient C & D. Je dis

que le costé C mesurera aussi le costé D : Pareillement que si le costé C mesure le costé D, aussi le cube A mesurera le cube B.

Car puis que par la 12. p. 8. entre deux cubes tombent deux moyens proportionnaux H, I, & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé, c'est à dire que le costé C est au costé D, comme l'un des cubes A est à son prochain moyen proportionnel H, lequel il mesurera par la 7. prop. 8. & par conséquent le costé C mesurera aussi le costé D. Pour la seconde partie, si le costé C mesure le costé D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen prop. H.

lequel mesurera l'autre moyen prop. I, & iceluy l'autre cube B ; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B, par la 11. com. sent. repetée. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 14. PROP. xvi.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera pas le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarez A & B, desquels les costés sont C & D, mais
 que A ne mesure pas B : Je dis pre-
 mierement que le costé C ne mesu-
 rera pas le costé D.

A 16. B 81.
 C 4. D 9.

Car par la 14. prop. de celiure, si ledict costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B contre l'hypothese. Pour la seconde partie, que le costé C ne mesure pas le costé D : Je dis que le quarré A ne mesurera pas le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre nostre hypothese. Si donc vn nombre quarré ne mesurera pas vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 15. PROP. xvii.

Si vn nombre cube ne mesure point vn

nombre cube, aussi le costé ne mesurera pas le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera pas le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les costez sont C & D, & que A $A 8.$ B 27 ne mesure pas B: Je dis que le costé C $C 2.$ D 3 ne mesure pas aussi le costé D: & d'antage que si le costé C ne mesure pas le costé D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesurerait le cube contre l'hypothese. Et pour le second: Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesurerait le costé, par la susdicte 15. p. 8. aussi contre l'hypothese. Parquoy si vn nombre cube ne mesure pas vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plan en raison doublee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres plans A $12.$ G $18.$ B $27.$ semblables A & B, & leurs costez soient C, D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn moyen proportionnel; & que A est à B en raison doublee de C à E, costez de mesme raison.

Car puis que les plans A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F; & si A sera le produit de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G; par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produise A & G; A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D, & F, produise G & B; partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F: ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux, en la raison de C à E, & partant G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est euidente: car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux, par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la mesme raison que de C à E, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux; & le solide est au solide en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & C 2. D 3. E 5. F 4. G 6. H 10.
 A 30. M 60. N 120. B 240.
 I 6. L 12. K 24.

B, desquels les costez soient C, D, E, & F, G, H. Ie dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F costez de mesme raison.

Car I soit le produict de C multiplié par D, K le produict de F par G, L le produict de F par D, & M & N produicts de L par E & H.

Maintenant puisque par la 21. def. 7. C, D, E, sont l'un à l'autre comme F, G, H: aussi en permutant, ils seront proportionnaux, c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & F, produict I & L, iceux I & L seront l'un à l'autre comme C à F, c'est à dire comme D à G, ou E à H. Par mesme discours F multipliant D & G, produict I & K, iceux seront donc aussi l'un à l'autre comme D à G; & parrant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produict des trois nombres C, D, E; & I, le produict de C par D, aussi A sera le produict de I par E: & par mesme discours B sera le produict de K par H, & par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produict A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et parrant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est euidente, car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont esté prouuez
 conti

continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triples de A à M, c'est à dire comme C à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

T. H. E. O. R. 18. P. R. O. P. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyé proportionnel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A, & A 12. C 18. B 27. B, entre lesquels tombe C, D 2. E 3. F 6. G 9. moyen proportionnel. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D & E mesureront A & C l'un comme l'autre, par la 11. prop. 7. Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & E mesurent A & C selon le nombre F; & qu'ils mesurent aussi C & B selon le nombre G. Parquoy F multipliant D & E, sera produit A & C, par la 9. com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produits C & B. Veu donc que E multipliant F & G fait C & B; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. p. 7. Mais comme C est à B, ainsi estoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a fait A, iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pour ce que G multipliant E a fait B; B sera le plan

C e

duquel $\mathbf{z}$ & $\mathbf{g}$ sont les costez. Mais ces costez ont esté demonstrez proportionnaux, c'est à dire $\mathbf{D}$ estre à $\mathbf{E}$, comme $\mathbf{E}$ à $\mathbf{G}$. Donc par la 21. def. 7. $\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$ seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres $\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux $\mathbf{C}$ & $\mathbf{D}$. Je dis qu'ils sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2. prop. 8. les trois nombres $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{A}$ 16. $\mathbf{C}$ 24. $\mathbf{D}$ 36. $\mathbf{B}$ 54. $\mathbf{G}$, les plus petits en la raison de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$. $\mathbf{H}$ 2. $\mathbf{I}$ 2. $\mathbf{M}$ 4. $\mathbf{K}$ 3. $\mathbf{L}$ 3. $\mathbf{N}$ 6. Veu donc qu'en tre $\mathbf{E}$ & $\mathbf{G}$ tombe vn moyen proportionnel $\mathbf{F}$, par la preced. prop. $\mathbf{E}$ & $\mathbf{G}$ seront plans semblables. Soient leurs costez $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$; & $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puis que $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ sont les plus petits en la raison de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, ils les mesureront également par la 21. prop. 7. soit selon le nombre $\mathbf{M}$: c'est à dire que $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, estans multipliez par $\mathbf{M}$ produisent $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$: item par le mesme discours $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, mesureront également les trois nombres $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, chacun le sien: soit selon le

nombre N , c'est à dire que N multipliant E , F , G , produise C , D , B . Il est donc évident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H , I , M , & K , L , N . Mais pour autant que M & N multipliant F , produisent C & D , par la 18. p. 7, M sera à N en la raison de C à D , & C'est à D en mesme raison que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E & F a produi& iceux C & D ; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K , ou I à L . Donc aussi H sera à K , ou I à L comme M à N ; & en permutant H sera à I , comme K à L ; & I à M comme L à N : & partant les costez H , I , M sont proportionnaux aux costez K , L , N ; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si entre deux nombres tombent deux moyens continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré; le troisieme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A , $A 4$. $B 6$. $C 9$. B, C , desquels le premier A soit quarré: Je dis que le troisieme C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils seront plans semblables; & partant l'un d'iceux estant quarré, aufera l'autre. Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres $A\ 8.$ $B\ 12.$ $C\ 18.$ $D\ 27.$ continuellement proportionnaux, A, B, C & D , le premier desquels A soit cube: le dis que le quatriesme D est aussi cube.

Car puisque entre A & D tombe deux moyens proportionnaux B & C , par la 21. prop. de ce livre, iceux A & D seront solides semblables: mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B , lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D , & soit A quarré. le dis que B est aussi quarré.

$A\ 16.$ $F\ 24.$ $B\ 36.$
 $C\ 4.$ $E\ 6.$ $D\ 9.$

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, sçauoir est E; il en tombera aussi vn entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisieme B sera quarré. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

Il appert des choses cy-dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut estre exhibee en deux nombres quarez: Car si elle y estoit exhibee, par la 24. proposi. 8. les deux premiers nombres ayans la mesme raison que les quarez de la raison exhibee seroient aussi quarez, puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayans la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. &c. seroient quarez; d'autant que 4. estant quarré, par la 24. proposi. 8. aussi 8 seroit quarré: donc aussi 16 & 32. &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8. & entre 8 & 16. & entre 16 & 32, &c. tomberoit vn moyen proportionnel, s'ils estoient quarez par la 11. prop. 8. & nous auons demonstté au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen prop. entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11. proposi. 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel: donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible, comme nous auons demonstté au Scholie de la 8. prop. 8.

THEOR. 23. PROP. xxv.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Que A soit à B, comme le cube C au cube D, & que A soit cube; Je dis que B est aussi cube.

Car puisque A est à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce liure, lesquels soient E & F: Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatriesme B par la 23. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

C O R O L L A I R E.

Il appert aussi des choses cy dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelcunque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. xxvi.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nōbres plans sem- A 20. C 30. B 45.
blables A & B. Ie dis que A sera D 4. E 6. F 9.
à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyé
prop. & soit C: si donc on prend les trois nombres D,
E, F, les plus petits en la raison cōtinuë de A, C, B, les
extremes D & F seront quarez par le corol. de la 2.
prop. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B,
comme D à F, il est manifeste que A est à B comme
nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir
comme le nombre quarré D au nombre quarré F.
Parquoy les nombres plans semblables sont entre-
eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce
qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Clavius a demonstté la conuerse de ceste prop. c'est à sçauoir:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme
nōbre quarré à nōbre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quar-
rez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre
iceux quarez; & aussi vn entre A & B, par la 8. prop. 8. &
partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont
semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre
quarré.

THEOR. 25. PROP. xxvii.

Les nombres solides semblables, sont
l'un à l'autre comme nombre cube à
nombre cube.

Soient deux nombres $A\ 16.$ $C\ 24.$ $D\ 36.$ $B\ 54.$ solides semblables $A,$ & $E\ 8.$ $F\ 12.$ $G\ 18.$ $H\ 27.$ B. le dis que A sera à $B,$ comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & $D.$ Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à $C,$ & qu'en la raison d'iceux on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres en continuellé proportion $E, F, G, H;$ les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 2. propo. 8. & en raison egale comme E à $H,$ ainsi A à $B:$ Parquoy les nombres solides semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui estoit à démonstrer.

SCHOLIE.

Clavius demonstre aussi la conuerse de ceste proposi. sçavoir est:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & $B,$ estans entr'eux, comme les cubes E & $H,$ par la 12. p. 8. Il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & $H,$ Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est evident par toutes les choses cy-dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticulièr, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté démontré au Scholiste de la 8. prop. 8. Ils ne

seront aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement ils en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire, comme il a esté dict au susdits S. holie, entre lesquels il certain, que deux nombres moyens prop. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuvent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuvent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'unité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les costez sont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy-mesme, & deux unités; & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuvent estre proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuvent estre plans, ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, un ou deux moyens prop. & puis que les extrêmes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrêmes n'en ayant point: Parquoy il est euident par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et parlant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extrêmes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & parlant

(comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy dessus. Ven donc qu'il se mesure aussi soy-mesme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouuer deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres sans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube; il est euident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20, ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils seroient comme quarré à quarré: & 16 estant quarré, par la 24. p. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27. p. 8. ils seroient comme cube à cube; & 27 estant cube par la 25. p. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huictiesme Element.



ELEMENT

NEVFIESME.

THEOR. I. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.



SOIENT deux A 4. B 9.
nombres plans D 16. E 24. C 36.
semblables A &
B, lesquels se multiplient mutuelle-
ment, produisent C. Je dis que C
est quarré. Car A se multipliant soy-
me produit D quarré. Et puisque A multipliant A
& B produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à
C, par la 17. p. 7. Mais A & B estans plans semblables,
il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la
18. p. 8. Il en tombera donc aussi un entre D & C, par
la 8. p. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres con-
tinuellement proportionnaux D, E, C, le premier D
est quarré par la construction; le tiers C sera aussi
quarré par la 22. p. 8. Parquoy si deux nombres plans

semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera carré. Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre produisent un nombre carré, iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplient l'un l'autre, produisent C carré. Je dis que A & B sont plans semblables.

A 4. B 9.
D 16. C 36.

Car que A se multipliant soy-mesme produise D carré. Veud donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les carrés D & C tombe un moyen proportionnel ; Il en tombera donc aussi un entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 3. PROP. III.

Si un nombre cube se multiplie soy-mesme, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B. Je dis que B est nombre cube.

A 8.
E 16. D 4.
F 32. C 2.
B 64. Unité.

Car soit C costé du cube A : &

de C multiplié en soy, soit produict D ; il est manifeste que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par C. L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D ; & partant comme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20. d. 7. derechef puisque C multipliant D a fait A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A ; & partant comme C à D, ainsi D à A ; mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A : ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A ; (car B a esté fait de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A ; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B : partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D ; par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4. nombres A. E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriesme sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produict sera cube. Ce qui quiestoit à prouuer.

THEOR .4. PROP. III.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C : Je dis que C est aussi nombre cube. A 8. B 27.
D 64. C 216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B, & soy-mesme, a produit C & D; il y aura telle raison de D à C, que de A à B, par la 17. p. 7. Et par la 12. p. 8. il tombera deux moyes proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube, par la 13. p. 8. C sera aussi cube. Si donc vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produit sera cube. Ce qui estoit à prouuer.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube. A 8. B 27.
D 64. C 216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-mesme, comme en la precedente: A sera à B comme D à C, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 13. p. 8. A estant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy, si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy-mesme
produict vn nombre cube, iceluy
nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel mul- A 8. B 64. C 512.
tiplié par soy-mesme produise
le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre
cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par
B, il sera cube par la definition du nombre cube; &
par la s.p. 9. A sera aussi cube. Si done vn nombre
se multipliant soy-mesme produict vn nombre
cube, iceluy nombre sera aussi cube. Ce qu'il fal-
loit demonst rer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié
par quelque autre, le produict sera
solide.

Soit le nombre composé A, le- A 6. B 5. C 30.
quel estant multiplié par quelque D 2. E 3.
nombre B produise C. Je dis que C
est nombre solide.

Car puisque A est composé, quelque nombre
autre l'vnité le mesurera par la 13.d. 7. Que D mesu-
re donc A par E. Ce qu'estant posé, D multipliant
iceluy E, produira A par la 9.com. sent. Et puis qu : B

multipliant A a produict C, iceluy C sera Procrée de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B, partant par la 17. d. 7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B. Parquoy vn nombre composé estant multiplié par quelque autre, le produict sera solide. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on vondra continuellement proportionnaux, le troisieme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn: Mais le quatriesme sera cube, & tous les suyans qui en laisseront deux: & le septiesme sera cube & quarré ensemble, & tous les suyans qui en laisseront cinq.

Soient *Unité*. A. B. C. D. E. F. G. H. I.
tant de 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683.
nombres

qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Je dis que le troisieme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres, comme F & I. Pareillement que le septiesme F est cube & quarré ensemble, comme aussi tous autres qui pourroient suivre en laissant tousiours cinq nombres.

Pour

Pour la premier partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A : partant B troisieme qui sera en ce faisant le produict de A multiplié par soy, sera quarré : & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D est quarré, aussi F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produict B; & B par A produict C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23. p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube: par mesme raison, estans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F est cube, aussi I sera cube; & ainsi de tous les autres, en laissant deux, si d'auantage y en auoit.

Pour la troisieme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube, il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 9. P R O P. ix.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit

l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarez : que s'il estoit cube, aussi les autres seront cubes.

Soient tant de nombres *Vnité. A. B. C. D.*
qu'on voudra cōtinuelle 1. 4. 16. 64. 256.
ment proportionnaux de-
puis l'vnité A, B, C, D. Je dis premierement que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarez.

Car il est euident comme en la precedente, que puis qu'iceux nombres A, B, C, D, sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera aussi B par les vnitez qui sont en A ; & par consequent B sera nombre quarré : mais A est aussi quarré par l'hypothese ; & par la 22. p. 8. C sera aussi quarré : & par la mesme raison B estant quarré, aussi sera D. Et ainsi de tous les autres.

Je dis en second lieu que *Vnité A. B. C. D.*
si A est cube, aussi tous les 1. 8. 64. 512. 4096.
autres seront cubes : Car
il est euident que A mesurera B par soy-mesme comme en la premiere partie : C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3. p. 9. Mais tous les suiuaus sont en la raison de A à B, & par la 23. p. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 10. P R O P. x.
Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres

qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiésme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube; aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatriésme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant	<i>Vnité,</i>	A.	B.	C.	D.	E.	F.
de nombres	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.
qu'on voudra							

continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Je dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiésme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F sont quarez: Que si quelqu'un veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré, sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi

D d ij

pas vn autre sera cube, sinon C & F, & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8. p. 9. C & F sont cubes : que si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube ; il faudroit par la 23. p. 8. que A le soit contre l'hypothese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuvent estre cubes. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. II. P R O P. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : le plus petit mesure le plus grand selon quelque vn de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient A. B. C. D. E. F.
tant de nombres qu'on 1. 3. 9. 27. 81. 845.
voudra continuellement
proportionnaux B, C, D, E, F. Je dis que le plus petit
nombre B mesurera le plus grand F par quelque vn
des nombres C, D, E.

Car d'autant que A, B, C, D, E sont en mesme raison que B, C, D, E, F, en raison egale l'vnité A sera à E, comme B est à F. Et par les def. du 7. comme l'vnité A mesure E par E : ainsi B mesurera F par E. Le mesme peut-on dire des autres. Parquoy si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Il appert par ce que dessus que le plus grand nombre est autant estoigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand : & ce d'autant qu'il y doit auoir vne mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera

F par D ; & C me-	Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
surera F par C, c'est	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.
à dire par soy-mes-							

me, &c. Pour ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres : & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

Il appert encor que quelconque de ces nombres, multiplié par soy-mesme en produict vn autre, qui entre les proportionaux est autant estoigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouendra sera autant estoigné du grand que le moindre de l'vnité : Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produict celuy-là qui est mesuré par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant estoigné de C qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, sera le mesme F, pour ce que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

T H E O R. 12. P R O P. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux : Autant de nombres

premiers mesureront le nombre d'après l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, A. B. C. D. E. F. 1. 3. 9. 27. 81. 3. B, C, D, E. le dis qu'autant de nombres premiers se trouueront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy nombre E, il mesurera aussi B.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront nombres premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D; D & F seront donc aussi premiers par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E; partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E; ce qui est contre l'hypothese; Donc F mesureroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrier,

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre

nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A 1. B 3. C 9. D 27. E 81.
A soient tant de K 100. I 100. H 100. G 100.
nombres qu'on vouldra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nombre G mesure E ; il est manifeste que G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la prop. preced. qu'il mesurast B, qui a esté posé nombre premier : G ne sera donc premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B ; d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il mesurast aussi B nombre premier : ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H : & puis que par les choses dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produist E & G, par la 17. p. 7. comme E sera à G, ainsi D à H : mais, G mesure E ; donc aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus qu'il ne peut estre premier ny mesuré par vn autre nombre premier que B : Car si H estoit premier, mesurant D, il mesureroit aussi B : ce qui ne se peut faire, ayant esté posé premier. Que si H est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi D, & celuy qui mesure D, c'est à sçauoir B, par la 11. cō. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H, & posant que ce soit par le nom-

bre I. On prouvera aussi comme dessus, que cōme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nōbre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre k: par mesmes raisons, comme I mesure C, ainsi k mesurera B nombre premier; il faut donc qu'à tout le moins il luy soit egal; ce qui est impossible; d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy-mesme. Partant aucun nombre ne mesurera, E sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. p. 9. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 14. PROP. XIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent estre mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A. le plus petit nombre A. B. C. D. E. F. de tous ceux qui peuvent estre mesurez par les 3. nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, ou C, ou D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par E: donc E multiplié par F

prôdnira A, lequel est mesuré par B, C, & D, & par la 32. p. 7. iceux B, C, D, mesureront l'un ou l'autre de E, ou F : Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas vn d'iceux, ils mesureront donc F, lequel estant plus petit que A, iceluy A ne seroit le plus petit de ceux qui peuvent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent estre mesurez, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

S C H O L I E.

Nous demonstrez icy (apres Commandinus & Clavius) en nombres, les 10 premiers theoremes, lesquels sont demonstrez en lignes au second livre.

I.

S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, AB & C, desquels AB est diuisé en AD, DE, EB, & A...D..E.BC.. soit fait F de C en AB : Item GH de C F.....12 en AD, & HI, de C en DE, & IK de G.....H....I..K C en EB : Je dis que F est egal aux nombres GH, HI, IK, c'est à dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puisque C multipliant AB, a produit F : AB mesurera F par C, c'est à dire que AB sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison AD sera la partie de GH : & DE de HI : & EB de IK, denommée par C, sçavoir est, la mesme que AB de F. Mais il est enuident par la 5. prop. 7. que AB est la mesme partie de GK, que AD de GH, par-

quoy aussi AB sera mesme partie de GK, que AB de F : & partant par la 4. com. sent. F & GK seront egaux entr'eux. Ce qui estoit proposé,

II.

Si vn nombre est couppé en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuisé en AC, CB.

Je dis que les nombres qui seront produicts du total AB, & des parties AC, CB seront ensemble

A....C..B

D.....

egaux au quarré de AB. Car estant pris le nombre D egal à AB, par le 1. theo. le nombre fait de D ; c'est à dire de AB en AB, sçavoir est le quarré d'iceluy AB, sera egal aux nombres qui seront produicts de D, c'est à dire de AB en AC, & en CB : ce qui estoit proposé.

Le mesme sera demonsté, si AB est couppé en plus de deux parties, comme on peut veoir par la seconde

A...C..D..B

figure icy apposée. Car par la mesme raison,

E.....

le nombre fait de E, c'est à dire de AB en AB, c'est à sçavoir le quarré de AB sera egal aux nombres, qui seront produicts de E, c'est à dire de AB, en chascune partie AC, CD, & DB.

III.

Si vn nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB.

Je dis que le nombre plan produict de AB en la partie AC, est egal à celuy fait des

A....C.....B

D....

parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D egal à la susdicte partie AC. par le 1. theo. le nombre fait de D, c'est à di-

re de AC en AB ; ou (qui est le mesme) de AB en AC, sera egal aux nombres faits de D, c'est à dire de AC en CB, & de D, c'est à dire de AC en AC, sçavoir est le quarré de A C. Ce qui estoit proposé.

IIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties ; le quarré fait du tout est egal aux deux quarez faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB. A.....C....B
 Je dis que le nombre quarré fait de AB, est egal aux quarez des parties AC, CB, avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB. Car par le 2. theo. le nombre quarré de AB, est egal aux nombres faits de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. theo. le nombre fait de AB en AC, est egal au nombre produit de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC : Item le nombre produit de AB en CB est par mesme raison egal au nombre produit de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré fait de AB, est pareillement egal aux nombres quarez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre fait de AC en CB. Ce qui estoit proposé.

V.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & en deux inegales ; le nombre plan contenu des parties inegales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est egal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties egales AC, CB, & en deux inegales AD, DB. Je dis que le nombre plan compris des parties inegales AD, DB, avec le quarré du nombre CD, est egal au quarré du nombre BC. Car puis que par le theo. preced. le nombre quarré de CB, est egal aux quarez des parties CD, D

B, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; & par le 3. theor. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble avec le quarré de DB, est egal au nombre produit de CB en DB; sera fait que si ce nombre fait de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD en DB, aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble à l'autre nombre fait de CD en DB, & au nombre produit de CB, c'est à dire de AC en DB; & passans par le 1. theor. le nombre fait du total AD en DB, est egal aux nombres produits de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

V I.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy est adiousté quelque autre nombre, le nombre qui est fait du tout avec l'adiousté en l'adiousté, avec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB coupé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy soit adiousté le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adiousté BD, comme vn seul, scauoir est de AD en l'adiousté BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré fait de la moitié CB & adiousté BD, comme vn seul, c'est à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theor. le quarré de CD est egal aux quarrés des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire aux quarrés des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier thea. le nombre fait de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD, c'est à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD en DB, pour le quarré de la partie BD;

avec les nombres faictz de CB en BD , & de AC en BD , le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CB , ensemble avec le nombre faict de AD en BD : c'est à dire que le nombre faict de AD en BD , avec le quarré de CB , est egal au quarré de CD : ce qui estoit proposé.

VII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, est egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, ensemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB couppeé es parties AC, CB . Je dis que le quarré de AB , avec celui de la partie CB , est egal à deux fois le nombre faict de AB en $A.....C....B$ CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC . Car puisque par le 4. theor. le quarré de AB est egal aux quarréz des parties AC, CB , & a deux fois le nombre faict d'icelles AC, CB ; si on adiouste le commun quarré de CB , les quarréz de AB, CB , seront ensemble egaux aux quarréz de AC, CB, CB , avec deux fois le nombre produict de AC en CB : mais par le 3. theor. le nombre faict de AC en CB avec le quarré de CB , est egal au nombre produict de AB en CB ; & partant le double de l'un est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre faict de AC en CB , & quarré de CB , on prend le double du nombre produict de AB en CB , les quarréz des nombres AB, CB seront ensemble egaux à deux fois le nombre de AB en CB , avec le quarré de l'autre partie AC . Ce qui estoit proposé.

VIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB couppeé es parties $A....C....B...D$ AC, CB . Je dis que le nombre faict de AB en la partie

CB, ensemble avec le quarré de l'autre partie AC, est égal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB. Car estant adionsté le nombre BD égal à CB, par le 4. theor. le quarré du tout AD est égal aux quarréz des nombres AB, BD, ensemble avec le nombre double de AB en BD, c'est à dire aux quarréz des nombres AB, CB, ensemble avec deux fois le nombre de AB en CB: Mais par le 7. theor. les quarréz de AB, CB, sont égaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, avec le quarré de AC: donc si pour les quarréz de AB, CB, on prend le nombre double de AB en CB, & le quarré de AC; le quarré faict de AD est égal à 4 fois le nombre faict de AB en CB, ensemble avec le quarré de l'autre partie AC: ce qui estoit proposé.

I X.

Si vn nombre est couppé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarréz faicts des parties inegales, sont doubles des quarréz faicts de la moitié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB diuisé es parties egales AC, CB; & es inegales AD, DB. A.....C...D..B
Je dis que les quarréz des parties inegales AD, DB, sont doubles des quarréz de la moitié AC, & du nombre entre-moyen CD. Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre AD est égal aux quarréz des nombres AC, CD, ensemble avec deux fois le nombre faict de AC en CD; si on adionst le commun quarré de DB, les quarréz des parties AD, DB, seront égaux aux quarréz des parties AC, CD, DB, ensemble avec deux fois le nombre produit de AC en CD, c'est à dire de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarréz de CB, c'est à dire de AC, & CD, sont égaux au quarré de DB, & a deux fois le nombre de CB en CD. Donc si pour le quarré de DB, & deux fois le nombre faict de CB en CD, on prend les quarréz de AC, CD, les quar-

rez de AD, DB seront egaux au double des quarrez des parties AC, CD ; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy on adiouste quelque autre nombre; le carré du nombre composé d'iceux, & le carré de l'adiouste, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy fait du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiouste.

Soit le nombre AB diuisé en deux parties egales AC CB, & à iceluy soit adionsté le nombre BD. Je dis que le carré du nombre AD composé du tout AB, & de l'adiouste BD, & le carré d'iceluy nombre adionsté BD, sont ensemble doubles des quarrez faits de la moitié AC, & de CD, composé de la moitié CB & de l'adiouste BD. Car puis-que par le 4. theor. le carré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre produit de AC, c'est à dire de CB en CD ; si on adionste le commun carré du nombre BD, les quarrez des nombres AD, BD seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, ou AC, & CD sont egaux au carré de BD, & a deux fois le nombre fait de CB en CD. Donc si pour le carré de BD, & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD, on prend les quarrez des nombres CB, CD, c'est à dire des nombres AC, CD : les quarrez des nombres AD, BD seront egaux à deux fois les quarrez des nombres AC, CD : & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy : ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. xv.

Sitrois nombres sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison aveciceux: le composé de deux tels que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportionnaux A, A 9. B 12. C 16.
B, C, les plus petits qui soient en D 3. E 4.
la mesme raison: Je dis que les deux ensemble A & B sont premiers à C; & B, C ensemble premiers à A; & A, C ensemble à B.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le scholie de la 35. prop. 7. il est evident par ce qui a esté demonstré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarez de D & E, & que B est le produit de D multiplié par E: & par le 3. theo. du scholie precedent D & E, comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B comme vn seul nombre. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi tous deux ensemble, seront premiers au seul E, par la 30. prop. 7. ou à son quarré C, par la 27. prop. 7. Et par la mesme proposition D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit de D & E comme vn seul nombre multiplié par D sera premier à C. Mais nous auons monsté que ce produit est egal au nombre composé de A & B: Donc aussi A & B ensemble seront premiers à C.

En

En apres, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacune d'iceux; par la 26. prop. 7. le produit de D, E comme vn seul nombre multiplié par E sera premier à D . Mais par le susdict theor. iceluy produit est egal à C fait de E en soy, & au nombre B fait de D en E . Donc le nombre composé de ces deux $B \& C$ sera aussi premier à D ; & partant aussi à A par la 27. prop. 7.

Finablement $D \& E$ estans premiers entr'eux par la 24. proposit. 7. & premiers au composé des deux par la 30. propo. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 16. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de $D E$ comme vn seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B . Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produit de $D E$ comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à $A \& C \& deux fois B$ ensemble: donc $A \& C$ avec deux fois B , sont premiers à B . Or en ostant les deux fois B ; il est manifeste que le reste $A \& C$ sera premier à B . Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B ; & par consequent aussi le composé de $A \& C \& deux fois B$, qui ne seroit en ce faisant premier à B , contre ce qui a esté demonstré cy-dessus. Donc le composé de $A \& C$ est premier à B . Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entre eux, il ne sera pas comme le premier

E e

au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B . Je dis que comme A à B , C 00. A est à B , ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A & B on ne peut trouver vn troisieme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B , ainsi B soit à vn autre, c'est à sçavoir à C . Par la 23. prop. 7. A & B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. prop. 7. A mesurera B , & B mesurera C . Mais aussi A mesure soy-mesme; donc A mesure iceux A & B : Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas comme A à B , ainsi B à C . Par mesme raison, il ne sera pas comme B à A , ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C , continuellement proportionnaux.

desquels les extremes A & C soient premiers entr'eux. A 4. B 6. C 9. D 00. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D: & par la 23. prop. 7. A & C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront également B & D; sçauoir est A iceluy B, & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C; & A mesure B, aussi B mesurera C: & par la 11. comm. sent. A mesurera aussi C; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. I. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on en pourra trouuer vn troisieme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B: Il faut A 4. B 6. D 9. C 36. considerer si à iceux on A 6. B 7. D 00. C 49. peut trouuer vn troisieme nombre proportionnel.

La solution de ceste proposition est aisee. Car il n'y a qu'à considerer si C produict du second

Es ij

nombre B multiplié par soy mesme, peut-estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier A : car s'il peut estre mesuré ou diuisé, comme en la premiere formule, il est euident par la 20. prop. 7. que le quotient sera troisieme nombre proportionnel; sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatriesme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois A 3. B 6. C 5. E 10. D 30. nombres A , B , C ; & il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn quatriesme proportionnel.

La solution de ceste prop. est aussi aisee. Car il faut seulement considerer si D , qui est le produit des second & troisieme nombre B & C peut estre mesuré par le premier A : s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriesme prop. sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 19. proposit. 7. quatre nombres estans prop. le produict du second & troisieme doit estre egal au produict du premier & quatriesme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres pre-

miers qu'on propose, ils'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude A...2 B...3 C.....
de nombres premiers A, B, C. D..... E, F
Je dis qu'ils'en trouuera enco- G.....
res d'autres.

Car si on trouue le nombre DE le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 38. prop. 7. & à iceluy on adiouste l'vnité EF, le tout DF sera premier ou non: S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez: s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. propo. 7. Soit donc mesuré par G: il est euident que G ne peut pas estre vn des trois A, B, C: car s'il estoit quelqu'un d'iceux, il mesurerait DE, & le tout DF: Partant par la 12. comm. sent. il mesurerait aussi l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trouuer infini autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisée: d'autant que par

la 6. def. 7. le nombre pair peut estre diuisé en deux parties egales; partant les moictiés de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout: Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la susdicte 6. definition du 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisee: d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. propoit. 9. leur tout sera pair: Et pour-auint que leur multitude est en nombre pair, les vnitez rerranchees feront vn nombre pair, lequel adiousté avec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout sera pair par la susdicte 21. prop. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisee. Car si on

retranche vn nombre impair, tout le reste fera vn nombre pair par la precedente : Et si du restant impair on oste l'vnité; ce qui restera sera pair, lequel adiousté à tout le reste fera vn nombre pair par la 21. prop. 9. Partant il est euident, que si on adiousté l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEOR. 22. PROP. xxiii.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Ce qui est euident : Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair : Et le retranché avec iceluy feroit aussi un nombre pair par la 21. prop. 9. & partant adioustant l'vnité ostée, le tout seroit impair, ce qui est absurde ; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. xxv.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Cela est euident : Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24. prop. 9.

THEOR. 24. PROP. xxvi.

Si d'un nombre impair on oste un

nombre impair, le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi evidente: Car si le reste estoit impair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 12. propositt. 9. contre l'hypothese.

T H O R. 25. P R O P. xxvii.
Si d'un nombre impair on oste vn nombre pair, le reste sera impair.

Cecy est aussi aysé à demonstrier: Car si le reste estoit pair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair, par la 21. prop. 9. contre l'hypothese.

T H E O R. 26. P R O P. xxviii.
Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi evidente: Car par les def. du 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au nombre pair multiplié: Et par ainsi le produit sera la somme de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude est en nombre pair, & partant par la 22. prop. 9. le produit sera pair.

S C H O L I E.

On demonstlera en la mesme maniere que si vn nombre pair

multiplie vn nombre pair ; le produict sera aussi pair.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair ; le produict sera impair.

Cela est aussi euident : Car comme en la precedente , le produict sera vne addition de plusieurs nombres impairs , desquels la multitude sera en nombre impair ; & partant par la 23. p. 9. le tout, ou le produict sera impair.

SCHOLIE.

Clavius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suiuaus.

Vn nombre impair mesurant vn nombre pair , il le mesure par vn nombre pair. A...3 C...2.
B.....6.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Ie dis que C est pair. Car s'il est impair ; B produict de A impair multiplié par C impair , sera impair, par la 27. p. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair, il le mesure par vn nombre impair. A...3 C.....5
B.....15

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Ie dis que C est impair. Car s'il est pair ; B fait de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contraire l'hypothese ; donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair. A.....15
B.....5 C...3

Soit le nombre impair A , lequel B mesure par C . Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. xxx.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A , qui	$A...3$	$D...4$	$E...2$
mesure le nombre pair B . Je	$B.....12$		
dis qu'il mesurera aussi sa moitié C .	$C.....6$		

Car puis que A mesure B , soit par le nombre D ; iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produit seroit aussi impair par la 29. p. 9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiler en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D . Parquoy comme D sera à sa moitié E , ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B , ainsi E sera à C . Mais A mesurant B par D , aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B denommée par A : donc aussi E sera la partie de C denommée par le mesme A : & partant A mesurera C , par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair mesure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entre eux, quelque nombre mesurera iceux, & soit D, lequel sera impair, comme nous auons démontré au Scholie de la 29. p. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair, puis qu'il a moictié B) il mesurera aussi sa moictié B par la prop. precedente. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entre eux: ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C; & partant ils seront premiers entre eux. Si donc vn nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suiuent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tât de nōbres *Vnité.* A 1. B 4. C 8. D 16. E 32

qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Je dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité, & puis que depuis l'unité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon lequel un de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. p. 9. lesquels estans tous pairs, il est evident par les def. du 7 que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la mesme progression. Mais pour autant que A prochain de l'unité est nombre premier, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la mesme progression, lesquels estans tous pairs, iceux nombres seront pairement pairs seulement. Parquoy tous les nombres qui suivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair: Je dis que A sera pairement impair seulement.

Car puisque B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les def. 7. A sera pairement impair: Mais qu'il soit seulement pairement impair on le prouvera

	A 30.	
B 15.		C 2.
D 00.		E 00.

ainsi. S'il estoit parement pair, vn nombre pair comme D le mesureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. sent. A est faict de D en E: mais le mesme A est aussi faict de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produict de C par B, estant egal au produict de E en D, comme C sera à E, ainsi D à B. Mais C nombre binaire mesure E: il faudroit donc aussi que D pair mesurast B, qui est vn nombre impair: ce qui est impossible. Donc A estoit nombre parement impair seulement. Parquoy si la moitié d'un nombre est impair, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 32. PROP. xxxiv.

Si vn nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié ne soit nombre impair, il sera parement pair, & parement impair.

Ceste demonstration est aisée. Car sa moitié estant pair, il sera mesuré par vn nombre pair selon le binaire qui est aussi pair. Et pour-autant qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, si on le diuise tousiours en deux également, on viendra à vne moitié impaire auparauant que paruenir iusques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nombre impair: & par les def. 7. il sera parement pair, & parement impair.

THEOR. 33. PROP. xxxv.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustrait le premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche FG égal au premier A: Et du dernier D l'on retranche KL aussi égal à A: le dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois A, B, C ensemble.

A.....8

B....4 F.....8 G

C.....18

D 9. H 6. I 4. k 8. L

Car si de DL on retranche LI égal à BG, il est evident que KI sera égal à BF, (étant KL égal à FG) & si on retranche LH égal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs egaux DL, HL, IL, KL: & en divisant DH sera à HL, comme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. p. 7. tous les antecédans DH, HI, IK, (c'est à dire DK) seront à tous les conséquens HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, C,) comme l'un des antecédans Ik, est à l'un des conséquens KL, ou leurs egaux BF à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Sidepuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, iusques à ce que le tout composé soit nombre premier : iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit E nombre premier. Je dis que si E est multiplié par le dernier D, que le produict F G sera nombre parfaict.

Car si on prend H I double de E ; K double de H I ; & L double de K, ainsi des autres ; E, H I, K, L, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C,

D ; & en raison egale A sera à D comme E à L, & par la 19. p. 7. A multiplié par L, sera le produict de D par E, sçauoir F G : mais A estant binaire, F G sera double de L ; ainsi E, H I, K L, F G, seront continuellement proportionnaux : Maintenant de H I soit retranché H M egal à E ; & de F G soit retranché F N, aussi egal à E : par la 35. proposition 9. comme H M est egal à E (d'autant que

Vnité.

A...2

B....4

C.....8

D.....16

E 31.

H 31. M 31. I

K 124.

L 248.

F 31. N 465. G

O 00. P 00.

H l'estoit double de E) ainsi NG sera egal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité, & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera egal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble : & puis que FG a esté fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG ; & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9, mesurent D, mesureront le mesme FG. Derechef puis que L mesure FG ; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double ; mesureront le mesme FG : ainsi l'vnité & tous les nombres, A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG. Parquoy si FG ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. il sera nombre parfait estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Que si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits ; que D le mesure s'il est possible, selon P : donc D multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produit de E en D. Donc vn mesme nombre est fait de E premier par D 4, & de P second en O ; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D : & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C ; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P : Donc aussi E ne mesurera P : & puis que E est premier par la 31. p. 7. E & P seront premiers entr'eux : & partant les moindres en leur raison par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C
mesure

mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le mesme que B : & d'autant que B, C, D, & E, H I, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produict de B par K, sera egal au produict de D en E. Mais le produict de D en E est egal à iceluy de P en O. Donc vn mesme nombre sera faict de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P sera à B, ainsi k à O. Mais P estoit le mesme que B : Donc aussi k sera le mesme que O. Ce qui est absurde, car O a esté posé autre que tous ceux cy A, B, C, D, E, H I, k, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, H I, k, L, qui mesurent F G. Iceluy est donc nombre parfaict. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit demoastrer.

Fin du neufiesme Element.



E L E M E N T

DIXIESME.

DEFINITIONS.

1 **C**OMMENSURABLES grandeurs, sont celles mesurées par vnè mesme mesure.

2 Incommensurables grandeurs, sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diametre & le costé de quelque quarré; car icelles n'ont nulle commune mesure, comme sera demonstté à la dernière prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçavoir est auxquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquées en ce liure; & enseigné par quelles manieres elles peuuent estre trouuées: derechef, les superficies sont dictes incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3 Les lignes droictes commensurables par puissance, sont celles desquelles les

quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Les lignes droictes sont considerées ou selon leur longueur ou selon leur puissance; & en l'une & l'autre sorte elles sont dites cōmensurables & incommens. Aux deux premieres des. Euclide a expliqué qu'elles sont les lignes cōmens. & incommens. considerées selon leurs longitudes, mais en ceste cy, & en la suivante, il declare qu'elles sont celles dites commens. & incōmens. en puissance. Il dit donc icy que les lignes droites dōt les quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie sont commensurables en puissance: comme par exemple, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds sera dite commensurable en puissance à vne autre ligne de 6 pieds, parce que leurs quarrez 9 & 36 peuuent estre mesurez par vne mesme superficie: Ainsi aussi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre $\sqrt{8}$ seront dictes cōmensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par vn mesme espace superficiel: de rechef vne ligne estant $\sqrt{20}$, & vne autre $\sqrt{125}$ seront pareillement dictes commensurables en puissance, pource que leurs quarrez $\sqrt{20}$ & $\sqrt{125}$ sont mesurez par vne mesme superficie $\sqrt{5}$; car elle est deux fois en $\sqrt{20}$, & 5 fois en $\sqrt{125}$.

4 Lignes droictes incōmensurables en puissance, sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Comme par exemple, vne ligne estant de 2 pieds, & vne autre $\sqrt{6}$, icelles deux lignes seront dictes incommens. en puissance, pource qu'il n'y a aucune superficie qui mesure leurs quarrez 4 & $\sqrt{6}$: de mesme $\sqrt{8}$ & $\sqrt{12}$ seront aussi dictes incommensurables en puissance, car nul espace superficiel ne mesure leurs quarrez 8 & $\sqrt{12}$.

Il faut icy noter que toutes lignes (ou nombres) incommensurables en puissance, le sont aussi en longueur, mais non pas au contraire. Ainsi vne ligne de 2 pieds sera bien incommensurable en longueur à vne autre ligne de $\sqrt{8}$. mais non pas en puissance : & 2 qui est incommensurable en puissance à $\sqrt{8}$, l'est aussi en longueur.

5 Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposée, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longueur & puissâce, les autres en puissâce seulemēt. Or vne ligne droicte proposée, est appellée rationnelle.

Si on prop. se quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & déterminée, icelle est appellée rationelle, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons : & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poserons tousiours d'un de ces nombres absolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

Donnot a estimé que ceste definition ne deuoit auoir lieu; & partant l'a reicitée. Ce que i estime qu'il n'a deub faire, ven qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationnelle mentionnée en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationnelle, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, sont appellées rationnelles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationnelle, sont irrationnelles.

Si comp. rant quelque ligne droicte, à la ligne prise pour

rationnelle, & sur laquelle nous ratiocinons, elle est trouuée commensurable à icelle rationnelle, soit en l'ogueur & puissance, soit en puissance seulement, telle ligne est aussi dictée rationnelle par Euclide; mais si elle est incommens. à icelle ligne rationnelle proposée, tant en longitude qu'en puissance, ceste dictée ligne est appelée rationnelle par nostre auteur.

8 Le quarré décrit sur vne ligne rationnelle, est appelée rationnel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognüe & déterminée de certaine quantité est dite rationnelle; ainsi aussi le quarré décrit sur icelle ligne, est appelé rationnel, pource qu'iceluy est certain & cognu: & les superficies comparées à iceluy quarré, sont aussi dictées rationnelles, ou bien irrationnelles, selon qu'elles seront trouuées commens. ou incommens. à iceluy quarré rationnel, ainsi qu'il est dit és deux des. suivantes.

9 Les figures commensurables au quarré rationnel, sont aussi rationnelles.

10 Et celles qui sont incommensurables au quarré rationnel, sont irrationnelles & sourdes.

11 Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationnelles, sont irrationnelles & sourdes.

Or vne ligne est dictée pouuoir vne figure, quand le quarré décrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racinee ou de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurab. en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarrés d'icelles lignes, peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Or à ces définitions nous adionfterons (après Clavius) une demande, & quelques communes sentences, dont l'usage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excède quelconque grandeur de mesme genre.

COMMUNES SENTENCES.

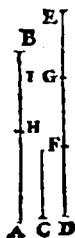
- 1 Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composée d'icelles.
- 2 Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillement toute grandeur que celle-là mesure.
- 3 Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostée, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du resi-

du plus de la moitié, & en continuant
toufiours ainsi : Il demeurera à la fin
vne grandeur plus petite que la
moindre des deux proposées.

Soient proposées deux grandeurs ine-
gales AB & C, étant C la plus petite : le
disque si on retranche plus de la moitié
de AB, & du residu encores plus de la
moitié, & en continuant toufiours ainsi,
on trouuera à la fin vn residu plus petit
que C.



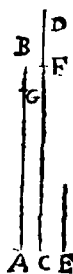
Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C
multipliée tant fois qu'elle excède la plus
grande AB, & soit la produite d'icelle multiplication
DE, laquelle sera multiplie de C, & plus grande
que AB : qu'elle soit donc diuisée en parties egales à
C, comme en DF, FG, GE : Item soit osté de AB
plus de la moitié, sçauoir AH, & du residu HB plus
de la moitié, sçauoir HI, & en continuant touf-
iours cecy iusques à ce que AB soit diuisée en au-
tant de parties que DE, sçauoir AH, HI, & IB,
comme DE est diuisée en DF, FG, GE. Pour autant
que DE est plus grande que AB, & que le retran-
ché DF n'est pas plus grand que la moitié de DE;
comme le retranché AH, est plus grand que la moi-
tié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste
HB : semblablement si du plus grand residu FE, on
oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du
plus petit residu HB on oste plus de la moitié
HI; le reste IB sera plus petit que le reste GE
egal à C : & par consequent IB dernière partie de

A B, sera plus petit que C. Estans donc proposées deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposées on retranche tousiours alternativement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure la grandeur precedente ; telles grandeurs sont incommensurables.

Soient proposées deux grandeurs inegales AB & CD ; si on retranche continuellement & alternativement la plus petite de la plus grande, & que le residu ne mesure jamais la grãdeur precedente, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure jamais le plus grand residu ; Je dis que AB & CD sont incommensurables.



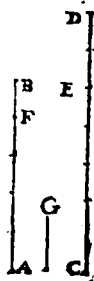
Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables : Partant aussi qu'elles aient vne commune mesure, soit donc icelle E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande CD soit retranchée CF egale à AB : Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste DF soit plus petit que AB. Donc E commune mesure, mesurera la toute CD & la retranchée CF, egale à AB, ou multiplie d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste DF par la 3. com. sent. Item soit re-

tranchee DF de AB tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par consequent sa multipliee AG, par la 2. comm. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. comm. sent. ce qui est absurde. Parrant AB & CD n'auoient point de commune mesure; & par consequent sont incommensurables. Parquoy si de deux grandeurs inegales propoposees, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. I. PROP. III.

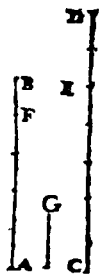
Estants donnees deux grandeurs commensurables, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point: si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchee de CD, & que le reste ED mesure AB. Je dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle

mesurera aussi CE son egale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie quelle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G, (s'il est possible) donc par les comm. sent. G mesurera AB, cd, & le retranché CE egal à AB, & par consequent le reste ED, qui est plus petit; ce qui est impossible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD: Partant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc données deux grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

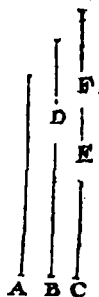
De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. , 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande

commune mesure. Soit trouuee D plus grande commune mesure entre A & B par la 3. prop. 10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables : car veu que A, B, C sont commensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le coroll. de la 3. prop. 10. mais ceste mesme mesure-là mesurera aussi C : donc D & C, seront commens. Soit donc trouuee par la susdicté 3. prop. 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C : & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C ; & D mesure A & B, par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C : donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdict coroll. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C : donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles : ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C : & partant E est la plus grande commune mesure



d'icelles. Parquoy estans données trois grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

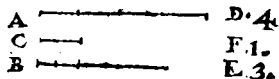
Par cecy est euident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si F mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillemens E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans données plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure; & ce mesme corollaire aura aussi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Je dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.



Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C: donc C mesurera A selon quelque nombre, comme selon D: il mesurera aussi B selon quelque autre nombre, comme selon E: ainsi puis que C est autant de fois en A, comme l'vnité 1 est en D, & C en B, comme

En E, les grandeurs A, C, B, seront l'une à l'autre comme les nombres D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. prop. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 4. P R O P. VI.

Si deux grandeurs sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs
A & B qui soient l'une à
l'autre comme le nom-
bre C est au nombre D:

E	—	F
A	—————	C
B	—————	D

Je dis qu'elles seront commensurables.

Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'une d'icelles parties soit egale à E : donc E est à A, ainsi que l'vnité F est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D ; donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F mesure D ; donc aussi E mesure B : mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B ; & partant par la premiere deff. de ce liure A & B sont commensurables. Parquoy si deux grandeurs sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

Par ce qui est evident qu'estant proposez deux nombres com-

me C & D, & une ligne droite comme A qu'il sera aisé de trouver une autre ligne droite, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: Car diuisant A en autant de parties égales qu'il y a d'unités au nombre C; & on prend une ligne droite B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unités au nombre D: alors A sera à B, comme le nombre C au nombre D, ainsi qu'il est manifeste parce qu'il a été démontré.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & une ligne droite,) trouver une autre ligne droite, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouver une ligne droite, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre D: Il faudra trouver ainsi que dessus la ligne B, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D; puis soit trouuee par la 13.p.6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B; & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommensurables, ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommensurables A & B; Je dis qu'elles ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Ce qui est manifeste: car si elles estoient entre-elles comme nombre à nombre, elles seroient com-

mesurables par la 6. prop. 10. ce qui est contre l'hypothese, ayans esté posées incommensurables. Parquoy les grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si deux grâdeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Que les grandeurs A & B ne soient entr'elles comme nombre à nombre: $A \text{ —————}$
 $B \text{ —————}$

Je dis qu'elles sont incommensurables.

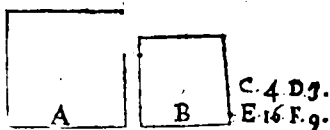
Ce qui est evident; car si elles estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui est contre nostre hypothese, puis qu'elles ont esté posées n'estre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez qui sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commensurables en longitude. Mais les quarez descrits sur lignes incommensurables en

longitude, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.

Soient les lignes A & B commensurables en longitude: le dis que leurs quarez sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.



Car puis que les lignes A & B sont commensurables en longitude, elles seront entr'elles cōme nombre à nombre, par la 5. proposi. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D; & les quarez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F: C'est à sçauoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: le dis que les lignes A & B seront commensurables en longitude. Car par la 20. prop. 6. & 11. prop. 8. la raison des quarez aux quarez, est la raison doublee de leurs costez; & partant comme le

costé

coſté A au coſté B, ainſi le nombre C au nombre D, puis que leurs raiſons doubles ſont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B ſont commenſurables en longitude.

Pour la troiſieſme partie, ſoient les lignes droictes A & B incommenſurables en longitude. Je diſ que leurs quarez ne ſont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi les quarez de A & B eſtoient ainſi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B ſeroient commenſurables en longitude contre l'hypothèſe.

Finablement les quarez de A & B n'eſtans entre-eux comme nombre quarré à nombre quarré. Je diſ qu'elles ſont incommenſurables en longitude. Car autrement leurs quarez ſeroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothèſe. Parquoy les quarez deſcrits ſur lignes commenſurables en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

C O R O L L A I R E.

Il eſt manifeſte par les choſes cy deſſus demonſtrees, que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puissance: mais que celles qui ſont commenſurables en puissance, ne le ſont pas tousiours en longitude. Que les incommenſurables en longitude, ne le ſont pas pourtant en puissance: & que celles incommenſ. en puissance, le ſont auſſi en longitude.

Car d'autant que les quarez d'icelles lignes commenſ. en longitude ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'eſt à dire ſimplement comme nombre à nombre: iceux quarez ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & par-tant les lignes commenſurables en longitude le ſont auſſi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, aus seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrez sont commensurables par la 6. pr. 10.) & non en longueur comme il a esté démontré: il appert que les lignes commensurables en puissance ne le sont pas pourtant en longueur, sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef puis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommens. en longie. & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommensurables en longueur ne le sont pas tousiours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrez sont incommens. par la 8. prop. 10.

Finablement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longueur: car si elles estoient commens. en long. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corol. ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Il est à noter qu'és deux premieres parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourueu qu'elles soient commensurables en longueur; comme si les quarrez de A & B estoient 12 & 3, leurs costez seroient $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, qui sont inexplicables par nombres, toutesfois commens. Car par la 20. prop. 6. 12 seroit à 3 en raison doublee de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$. Mais 12 est quadruple de 3: Ainsi le costé A sera double du costé B , par la 10. def. 5. Car la double raison doublee est quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & la premiere est commensurable à la seconde, la troisieme sera aussi commensurable à la quatrieme. Que si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisieme sera aussi incommensurable à la quatrieme.

Soient quatre grandeurs prop: A, B, C, D: si A est commensurable à B, je dis que C sera aussi commensurable à D.

Car A estant commensurable à B, ils seront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D; Partant C est à D, comme nombre à nombre; & par conséquent commensurable par la 6. proposition. 10.

Que si A estoit incommensurable à B. Je dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre; & par conséquent incommensurable par la 8. proposition. 10. Si donc quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonst.



L E M M E.

Trouuer deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A ,
 & vn autre B non quarré. Je dis qu'iceux A 16. B 20.
 nombres A & B sont plans dissemblables.

Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. prop. 8. & partant A estant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. prop. 8. contre l'hypothese. Donc A, B , ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

P R O B L. 3. P R O P. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationelle proposee, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autte en longitude & puissance.

Soit la ligne rationelle proposee A , à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables, l'une seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.

A ————— B 20.
 E —————
 D ————— C 16.

Soient trouuez par le lemme precedent deux nom-

bres B, & C, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le coroll. de la 6. prop. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarréz de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurab. en puissance seulement : la ligne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuee la ligne E moyëne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee : car puis que par le coroll. de la 20. proposit. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A à D, & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté demonsté : le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E, par la 10. proposit. 10. Parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le coroll. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Soit A 5. donc la ligne D sera $\sqrt{20}$, laquelle il appert estre incommensurable en longitude à A, mais commensurable en puissance. Mais E estant moyenne prop. entre A 5, & D $\sqrt{20}$, sera $\sqrt{500}$, qui est incommens. tant en longit. que puissance à A 5.

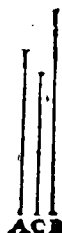
Donnot ayant delaisié le lemme precedent, se sert neantmoins d'iceluy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C. Je dis qu'elles sont commensurables entr'elles.

Car puisque A & C sont commens. icelles seroient comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nombre E. De rechef puis que C & B sont com-



D, 10. E, 8.

F, 2, G, 5.

H, 5. I, 4. K, 6.

mens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G : tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I, & C à B, comme I à K, par raison egale A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre : & partant A & B sont commens. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'une est commensurable à une troisieme, mais l'autre incommens. icelles grandeurs seront incommens. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, des- A ——— —
 quelles A soit commens. à C; & B in- C ——— —
 commens. à la mesme C. Je dis que A B ——— —
 & B sont incommens. entr'elles. Car si B estoit com-
 mens. à A, lequel A est posé aussi commens. à C, par
 la 12. prop. 10. B & C seroient commens. contre l'hy-
 pothese. Donc A & B ne sont commens. Parquoy si
 de deux grandeurs, l'une est commensurable à une
 troisieme, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à une tierce, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commensura-
 bles A & B, & que A soit incommensu-
 rable à la tierce C: Je dis que B & C sont
 aussi incommensurables.

Autrement, si B est commensurable à
 C, il sera aussi commensurable à A, par la
 Gg .iiij



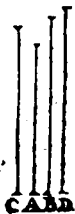
12. prop. 10. contre nostre hypothese : donc B est incommensurable à C : Parquoy si de deux grandeurs commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceste prop. le theoreme suiuant, utile aux choses demonstrees en ce liure.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommensurables, auxquelles C & D soient commensurables. Sçavoir est C à A, & D à B. Je dis que C & D sont incommensurables entr'elles. Car puis que A & C sont posées commensurables, & A incommensurable à B, l'autre C sera aussi incommensurable à B par la 14. prop. 10. De rechef, puis que D & B sont posées commensurables, & B a esté demonstree incommensurable à C; D sera aussi incommensurable à C par la 14. prop. 10. Ce qui estoit proposé.

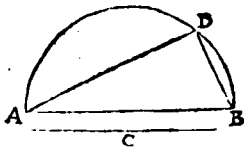


L E M M E.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droictes AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C.

Soit descript sur AB le demy cercle ADB, & dans icy soit accommodee AD egale à C, par la 1. prop. 4. & soit



mente DB. Je dis que AB peut plus que C du quarré de BD. Car d'auant quel angle D est au demy cercle, il est droit par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB, sera egal aux quarréz de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'est à dire que C, du quarré de BD. Ce qui estoit proposé.

Semblablement estans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient données les deux lignes droictes AD, BD: & il faut trouuer vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posées icelles AD, BD à angle droit D, & tiré AB. Il est evident qu'icelles AB peut AD & BD; puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB, est egal aux quarréz de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. xv.

Si quatre lignes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longueur.

Soient 4. lignes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E, & C plus que D du quarré de F. Je dis que comme A sera commensurable ou incommens. à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F.



Car puis que A, B, C, D, sont proportionnelles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarréz de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarréz de D, F: donc aussi les quarréz de B, E, seront au quarré de B, comme les quarréz de D, F, au quarré de D: & en diuisant comme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F à la ligne D; & en changeant comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F, par raison egale comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parpuoy si quatre lignes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grâdeurs commensurables sont iointes, la composée sera commensurable à chacune de ses parties: Et si la composée est commensurable à

vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles.

Soient iointes deux grandeurs commens.



AB & BC : le dis que la composée AC, est commensurable à AB, & à BC parties d'icelle.

Car puis que AB & BC sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant AB & BC, mesurera aussi la toute AC, par la 1. c. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute AC est commens. à vne de ses parties, comme AB : le dis qu'icelles parties AB, BC seront commensurables entr'elles. Car si AC & AB, sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste par la 3. comm. sent. Partant le retranché & le reste seront commensurables, d'autant qu'ils ont vne commune mesure. Parquoy si deux grandeurs commensurables sont iointes ensemble, la composée, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que si vne grandeur composée de deux, est commensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC. Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commensurables: donc par la premiere partie AC sera commensurable à chasques partie, AB, BC.

S C H O L I E.

Soit AB γ 18, & BC γ 8, lesquelles sont commens. La

composée AC sera $\sqrt{50}$, laquelle est commens. tant à $\sqrt{18}$, que à $\sqrt{8}$. Car $\sqrt{50}$ est à $\sqrt{18}$, comme 5 à 3; & à $\sqrt{8}$, comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conjoint deux grandeurs incommensurables, la composée sera incommensurable à chacune de ses parties : Et si la composée est incommensurable à l'une de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.

Soient conjointes deux grandeurs incommens. AB & BC : Je dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.



Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à BC : car la commune mesure qui mesurerait AC & le retranché AB, mesurerait aussi le reste BC, par la 3. com. sent. Et partant AB & BC seroient commens. (ce qui est contre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuivra le mesme inconuenient si on nie que AC, BC soient incommensurables.

Pour la secōde partie: Je dis que si AC & BC, sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurable : La toute AC, seroit aussi commensurable à sa partie BC par la 16. p. 10. contre nostre hypothese. Donc AB & BC sont incommens. Par mesme argument

nous demonst rerons que si AC & AB sont incommensurables. que AB & BC sont aussi incommensurables. Parquoy si on conjoint deux grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

C O R O L A I R E.

Il resulte de ces choses, que si vne grandeur composée de deux, est incommensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC composée de AB & BC est incommensurable à AB , elle le sera aussi à BC . Car si AC estoit commensurable à icelle BC , elle le seroit aussi à AB , par le corolaire de la precedente prop. ce qui est contre l'hypothese. Donc AC & BC ne sont commensurables, mais incommensurables.

S C H O L I E.

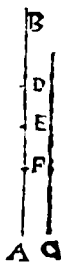
Soit AB 8, & BC $\sqrt{28}$, lesquelles sont incommensurables. La composée AC sera $8 + \sqrt{28}$ incommensurable à chacune d'icelles AB 8, BC $\sqrt{28}$.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'une figure quarrée, & qu'à le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties commensurables en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la

plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée; le rectangle diuifera icelle plus grande ligne en parties commensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. sur la plus grande AB soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé. Et soit iceluy rectangle contenu de AD & DB. Je dis que si AD & DB sont commensurables en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude.



Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AB couppée en deux également en E, & soit faicte EF egale à ED: Il est euident que AF sera egale à DB, puis que les toutes AE, EB sont egales, & aussi les retranchées EF, ED. Maintenant puis que AB est couppée en deux également en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB avec le quarré de

ED, seront egaux au quarré de BE, lequel n'estant par l'hypothese que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, sont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD, & DB est le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du seul de FD egal à iceux, par le Scholie de la 4. p. 2. puisque FD est double de ED. Il faut donc demonstrier que AB & FD sont commensurables en longueur: Pource que AD & DB estant posées commens. en longueur, la toute AB sera aussi commens. en longueur à sa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à son egale AF, & à routes les deux ioinctes en vne: & par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 16. p. 10. Donc la ligne droite AB peut plus que C, du quarré de FD qui luy est commensurable en longueur.

Pour la seconde partie, sans rien changer à la construction: si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur. Je dis que AD & DB seront aussi commens. en longueur. Car il sera demonsté ainsi que dessus que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a esté posée pouoir plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: & partant AB sera commens. en longueur à icelle FD. Et puis que AB composée de FD, AF, & DB comme d'une, est commens. en longueur à la partie FD; la mesme AB sera aussi commens. en longueur à l'autre partie composée de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle composée de AF, DB, est aussi commens. en long à DB, puis qu'elle est double d'icelle: donc puis que chacune di-

celles AB, DB est commensurable en longit. à la composée de AF, DB; aussi AB, DB seront commensurables entr'elles en longueur par la 12. p. 10. & partant veu que la route AB composée de AD, DB est commensurable en longueur à icelle DB, aussi icelles AD, DB seront commensurables en longueur entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

S C H O L I E.

L'application mentionnée au cōmencement de la demōstr. cy dessus se fera bien plus bresquement par le 60. de nos problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

Quant application des nombres soit AB 30, & C 24. donc les segmens AD, & DB, seront 24 & 6, desquels le produit, c'est à dire le rectangle est 144, qui est egal au quart de 576, quarré de C 24. & desailant du quarré de DB 6, c'est à dire 36 : & sont icelles parties AD 24, DB 6, commens. en longueur: car l'une est quadruple de l'autre. Ainsi FD, qui peut avec C le quarré de AB, sera 18 : car le quarré de AB est 900, & celui de C 576; & partant reste pour le quarré de FD, 324, dont la racinee quarrée est 18, commensurable en longueur à AB. L'autre partie sera aussi euidente par l'addaption des nombres cy dessus.

La proposition suivante sera aussi facilement entendue, si on pose AB 12, & C 96 : car les segmens AD, DB, seront 6 + 96. & 6 - 96; & FD 96, qui est à 12 incommensurable en longueur, &c.

THEOR.

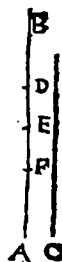
THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude; la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de le plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, le rectangle diuifera la plus grande ligne en parties incommensurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. p. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée: & soit iceluy rectangle contenu

Hh

sous AD, DB incommensurables en longueur. Je dis que AB peut plus que C du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur. Car ayant construit comme en la précédente prop. nous démontrerons semblablement que AB peut plus que AC du carré de FD. Il faut donc démontrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posées incommens. en longueur la route AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurable en longueur à la composée de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle là : donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en longueur à AB ; la composée de AF, DB sera aussi incommens. en long. à la même AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composée de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en long. à la composée de AF, DB ; la même AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du carré de FD, qui luy est incommensurable en longueur.



Maintenant si AB peut plus que C du carré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du carré de C, & defaillant d'une figure carrée, lequel rectangle diuise AB és parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long. Car nous démontrerons comme deuant (les mêmes choses estans construites) que AB peut plus que C du carré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommensurables en longueur : & puis que AB est composée de FD & de AF, DB ioinctes en vne

icelle AB sera aussi incommens. en longueur à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la composée de AF, DB est commens. en longit. à icelle DB, puis que celle là est double de ceste-cy. Donc puis que AB est incommensurable en longit. à la composée de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à DB, icelles AD, DB seront aussi incommensurables en longueur entr'elles par la 17. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

L E M M E.

Puis qu'il a esté demonsté que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas tousiours en longueur: il est manifeste que s'il y a quelque ligne commens. en longueur à une proposée rationele: elle doit estre appellée rationele & commensurable à icelle, non seulement en longueur, mais aussi en puissance: car les lignes cūmens. en long. le sont tousiours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droicte commens. en puissance & longueur à l'exposée rationele, elle sera aussi dite rationele commens. en longueur & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommens. en longueur, elle sera aussi dicte rationele commens. à icelle en puissance seulement.

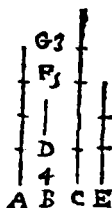
S C H O L I E.

Il appert par ce que dessus, qu'il y a de trois sortes de lignes rationeles commensurab. entr'elles en longueur. Car de deux lignes rationeles commensurables entr'elles en longueur, ou l'une est egale à l'exposée rationele; & partant l'une & l'autre

tre cōmens. en longitude à la rationele: ou l'une ny l'autre n'est égale à l'exposée rationele, & toutesfois cōmens. en longit. à icelle: ou finalement l'une & l'autre est cōmens. à l'exposée rationele en puissance seulement. Or nous trouverons ces trois genres de lignes rationelles en ceste maniere. Soit une rationele proposée *A* divisée en quatre parties égales; c'est à sçavoir en autant qu'il y a d'unités au nombre *B*: puis apres estant pris quelque autre nombre *C*, la ligne *D* soit une partie de *A*; & autant de fois que *D* mesure *A*, autant de fois elle mesure quelque ligne *E*: Item autant de fois que l'unité est en *C*, qu'autant de fois la mesme *D* mesure quelque autre ligne *F*. Donc puis que *A* & *E* sont composées de parties égales en nombre, qui sont égales à *D*; elles seront égales. De rechef puis que *D* mesure toutes les trois lignes *A*, *E*, *F*, elles seront cōmens. en longitude; parquoy *E* & *F* sont rationeles cōmens. en longitude à la rationele *A*: mais elles ont esté démontrées estre aussi cōmens. entr'elles en longitude. Nous avons donc trouvé deux rationeles *E* & *F* cōmens. en longitude, sans entr'elles qu'à la ration. exposée *A*, & desquelles une sçavoir est *E*, est égale à *A*.

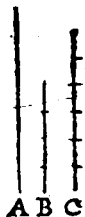


Or maintenant que *D* mesure deux lignes *C* & *E* par deux nombres *F* & *G* differens de *B*, tellement que l'une & l'autre ligne *C* & *E* soit inégale à *A*. Donc comme dessus les trois lignes *A*, *C*, *E*, ayans *D* pour mesure commune, seront cōmens. en longitude; parquoy *C* & *E* sont rationeles cōmens. en longitude à la rationele *A*: mais elles le sont aussi entr'elles. Nous avons donc trouvé deux rationeles *C* & *E* cōmens. en longitude, sans entr'elles qu'à la rationele



proposée A , l'une ny l'autre desquelles n'est égale à icelle A .

Finablement par la 11. p. 10. à l'exposée rationelle A soit trouuée la ligne B , incommens. en longueur seulement, laquelle soit coupée en sans de parties égales qu'on voudra, & soit prise C , composée de quelconque nombre d'icelles parties de B : & icelles B & C seront commens. en longueur. Je dis qu'elles sont aussi commens. en puissance seulement à l'exposée rationelle A . Car puss que A & B sont commensurable en puissance ; le carré de A sera commens. au carré de B : Mais au mesme carré de B , est aussi commens. le carré de C , pource que B, C estans commens. en longueur, elles le sont aussi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les carrés de A & C , sont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C est commens. en puissance à icelle A . Et pource que des deux lignes B & C commens. en longueur, B est incommens. en longueur à A : par la 14. p. 10. C sera aussi incommens. en longueur à la mesme A . Donc C est commens. à A seulement en puissance. Et pource que B & C , commensurables en puissance à l'exposée rationelle A , sont rationelles ; elles seront deux rationelles commensurables en longueur entr'elles, mais en puissance seulement à l'exposée rationelle A : elles sont donc les deux lignes requises à trouuer.



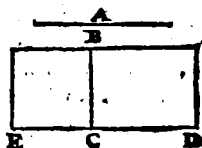
Que si quelqu'un desire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationelles commensurables en longueur entr'elles, cela se fera ainsi qu'il ensuit : Soit pris quelcôque mesure D , (regardez la dernière figure de la page précédente) & soient composées autant qu'on voudra de lignes A, C, E , d'autant de parties égales à icelle D ; qu'il y a d'unités en autant de nombres inégaux B, F, G : car les lignes A, C, E , ayans la commune mesure D , seront commensurables en longueur.

Or il est aussi evident que toutes lignes rationeles, sont commens. non seulement à vne exposée rationele, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles sont celles qui sont commens. à l'exposée rationele, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12. p. 10. les commensurables à vne mesme, sont aussi commens. entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationeles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en longueur selon quelque vne des manieres cy deuant dites, est rationel.

Soit vne exposée rationele A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationeles commens. en longueur, selon quelque vne des manieres cy dessus dites: Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur BC on fait le quarré BE, il sera commensurable au quarré de la rationele A par la 3. d. 10. puis que BC est rationele commens. à la rationele exposée A, ou en longueur & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC, ou CE, CD sont commens. en longueur (car BC, CD ont esté posées rationeles commensurables en longueur entre-elles) & par la 1. p. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD seront aussi commens.

tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commensurables au quarré EB; & partant commens. entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationnel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationnel: Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

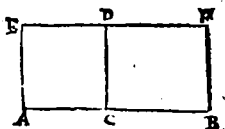
S C H O L I E .

Soit BC 3 & CD 4. donc le rectangle BD sera 12. Derechef soit BC $\sqrt{3}$ & CD $\sqrt{12}$: Le rect. BD sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6. Et derechef si BC est $\sqrt{8}$, & CD $\sqrt{18}$: Le rectangle BD sera $\sqrt{144}$, c'est à dire 12. Ainsi icy rectangle est rationnel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationnel a l'un des costez rationnel, il aura aussi l'autre costé rationnel: & iceux seront entr'eux commensurables en longitude.

Soit le rectangle rationnel DB ayant le costé CD rationnel: le dis que BC sera aussi rationnel commensurable en longitude à CD.



Car sur DC, soit fait le quarré AD, lequel sera rationnel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB à CA par la 1. propop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationnaux, & partant commensurables. Donc par la 10 prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront

rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si vn rectangle rationnel a l'un des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstres.

S C H O L I E.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD $\sqrt{3}$: BC fera donc $\sqrt{12}$, qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$. Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droite CD $\sqrt{8}$, l'autre costé BC fera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à CD $\sqrt{8}$. Car si on diuise $\sqrt{18}$, par $\sqrt{8}$ prouendra $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sqrt{\frac{5}{2}}$ qui est $\frac{1}{2}$: & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$. comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longitude.

L E M M E.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droite incommensurable en longitude seulement à vne ligne droite rationele proposée, & icelles seront les requises: car puis qu'elles sont commensurables en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d. 10.

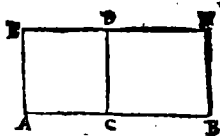
Que si à la ligne trouuée, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la proposée rationele, il est manifeste par la 12. prop. 10. que toutes les trois seront commensurables entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

T H O R. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commens. en puis-

sance seulement, est irrationnel : & la ligne droicte qui peut iceluy est irrationnelle. Soit icelle appelée Mediale.

Soit le rectangle CF, compris de deux lignes rationnelles DC & BC commensurables en puissance seulement. Je dis que le rectangle est irrationnel : & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationnelle, qui doit estre appelée Mediale.



Car si sur la rationnelle CD on décrit le quarré AD, il sera rationnel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son egale, est à BC, par la 1. prop. 6. Mais DC & BC sont incommens. en longitude: donc par la 10. prop. 10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarré est rationnel: donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationnel; & par la vnziesme la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationnelle: & soit icelle ligne appelée Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationnelles DC, CB commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationnelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationnelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons

icelle estre vne ligne irrationnelle, moyenne proportionnelle entre deux lignes rationnelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui pent vn rectangle contenu sous deux lignes rationnelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationnel qu'elle pent, est aussi nommé medial, pour ce qu'il est moyen prop. entre les quarréz d'icelles lignes rationnelles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle medial soit toujours contenu sous deux lignes droictes rationnelles commensurables en puissance seulement, tel qu'est le medial CF: car il en aduiënt quelquesfois autrement, comme se verra cy-apres.

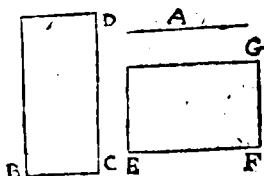
La ligne DC soit 2, & BC 8. Le rectangle BD sera 16, qui est irrationnel; & sera dict medial, mais la ligne pouuans iceluy est 4, laquelle on appelle mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué sur vne ligne rationnelle, faict l'autre costé rationnel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se faict l'application.

Auparuant que venir à ce qui est icy proposé, est à noter que pour appliquer sur vne ligne rationnelle vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne ratio-

nelle, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionnelle, laquelle sera l'autre costé du rectángle: car par la 17. proposi. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectángle des extremes.



Venons maintenant à la demonstration de la proposition.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationnelle BC, faisant le rectángle BD: le dis que BC & CD sont rationnelles commens. en puissance seulement.

Car A estant mediale, elle peut vn rectángle compris de deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dictée mediale: Soit donc iceluy rectángle EG, contenu sous les rationnelles EF, FG commensurables en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypothese peut aussi le rectángle BD: Iceux rectángles BD, EG seront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les costez reciproques, sçavoir que, comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. prop. 6. les quarréz d'icelles lignes seront proport. Mais le quarté de BC ligne rationnelle, est commens. au quarré de EF, aussi ligne rationnelle: donc par la 10. prop. 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD seront comm. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationnelles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement, il est evident par ce quia esté demonstré à la 21. prop. 10. Car

si elles estoient commensurables en longueur, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A . Donc les lignes BC & CD sont incommensurables en longueur. Parquoy le quarré d'une ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

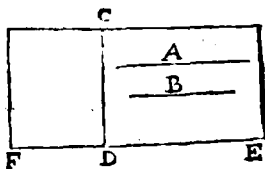
Soit le quarré de $A\gamma$ 40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique γ 40, l'autre costé CD sera γ 10. qui est incommens. en longitude à BC , mais commens. en puissance. Que si BC est γ 5, CD sera γ 8, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit $\gamma\gamma$ 35, & $BC\gamma$ 5 : le quarré de A seroit γ 35, & $CD\gamma$ 7, commens. en puissance seulement à BC .

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à
vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit communurable la ligne droite B. Je dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposée la rationnelle CD , & sur icelle appliqué le rectangle CE égal au quarré de A : Item sur la mesme rationnelle CD soit appliqué



le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationnelle CD, l'autre costé DE est rationnel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrés (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droite ED est à la ligne droite DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront commens. en longitude. Mais la ligne ED est rationnelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationnelle & incommens. en longitude à la même CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationnelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. propo. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que toute figure commensurable à vne figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrés egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourrons, à tous le moins en puissance, & l'une d'icelles étant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

S C H O L I E.

Soit AVV 200, BVV 128, CD 4. Donc DE sera $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ & DFV 8 commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DF est commens. en puiff. seulement à CD; & par consequent

le rectangle CF, qui est V 128, est medial, & la ligne BVV 128, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMM E 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de celiure, nous le dirons aussi des mediales : sçavoir est que les lignes droictes commens. en long. à vne mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance. Car vniuersellement les lignes droictes commensurables en longueur le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne commens. en puissance & longit. à vne mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en longit. & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à vne mediale, mais incommens. en longit. elle sera aussi dite mediale commens. à icelle en puissance seulement.

LEMM E 2.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en longueur : Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C, c'est à sçavoir A en longit. & B en puissance seulement : & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24. prop. 10. Ven dont que A & C sont commens. en longit. & B, C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.



Or il est à noter qu'encore que toute ligne droicte commens. à vne mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuent donner incommens. en longit. & puissance.

ce, comme apparoitra par la 36. prop. de ce liure, où nous enseignerons aussi à trouuer deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. xxv.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables enlongitude, est aussi medial.

Soit le rectangle DB, (à la figure de la precedente fol. 487.) compris des deux mediales commensurables enlongitude DC & BC : Je dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on décrit le quarré DA, il sera medial, étant décrit sur vne ligne mediale : & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi AD à DB : mais CD, ou CA son egale, est commensurable enlongitude à BC : Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, sera commensurable au rectangle DB : & par le corolaire de la 24. propo. 10. iceluy rectangle sera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

SCHOLIE.

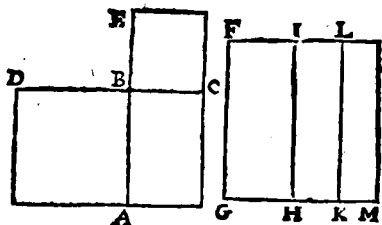
Si les mediales DC, CB commensf. enlongitude sont $\sqrt{2}$ & $\sqrt{32}$: le rectangle d'icelles, sçavoir DB, sera $\sqrt{64}$, c'est à dire $\sqrt{8}$, qui est medial.

THEOR. 23. PROP. xxvi.

Le rectangle compris de deux lignes

mediales commensurables en puissance seulement, est rationel, ou medial.

Soient les deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle A



C: Je dis qu'iceluy rectangle est rationel, ou medial.

Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faits les quarez AD & CE, lesquels comme estans faits sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationelle FG, & sur icelle soient descrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. prop. 1. Et d'autant que les quarez AD, & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationnaux commens. en puissance seulement à FG par la 23 prop. 10. Mais d'autant que les quarez AD & CE sont commensurab. (estans faits sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commens. mais par la 1. pr. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droite GH est à la ligne droite KM: donc par la 10. prop. 10. GH & KM seront commens. en longitude; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH

& KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BH aussi egales, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1. proposi. 6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE : donc comme AD à AC, ainsi AC à CE : & partant AD, AC, CE sont proportionnaux; & par consequent leurs egaux FH, HL, LM seront aussi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes G H, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles seront donc proportionnelles : & par la 17. prop. 6. le rectangle de GH, KM, sera egal au carré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a esté demonstté rationnel : donc aussi le carré de HK sera rationel : & par consequent la ligne HK sera aussi rationelle : & par la 6. def. 10. elle sera pareillement commensurable à la rationelle proposée FG, ou à son egale HL, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement : Si en longueur, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est egal, sera rationel par la 20. prop. 10. mais si HK est commensurable en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

S C H O L I E.

Soient les mediales AB & BC, $\sqrt{8}$, & $\sqrt{2}$: (desquelles les puissances sont commensurables, car elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera $\sqrt{16}$, c'est à dire 2, qui est rationel. Mais si AB est $\sqrt{12}$, & BC $\sqrt{3}$, (desquelles les puissances sont commensurables en raison double.) Le rectangle AC sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, qui est un medial.

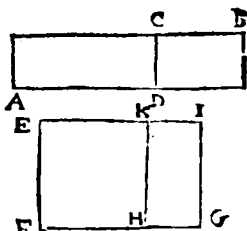
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale, n'est pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationnelle.

Soit la figure mediale AB qui excède le medial AC du rectangle DB : ie dis que DB n'est pas figure rationnelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur une proposée rationnelle EF soient faits les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI sera egal à DB: partant iceux rectangles EG, EH seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationnelle EF, les autres costez FG & FH seront lignes rationnelles commens. en puissance seulement à EF par la 23. prop. 10.

Maintenant si on dit que HI est rationnel, estant appliqué sur la rationnelle KH, l'autre costé GH sera rationnel commens. en longueur à KH par la 21. prop. 10. mais FH est incommens. en long. à KH, ou



EF: donc par la 14. prop. 10. FH & GH seront incommens. en longueur: mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au carré de GH par la 1. prop. 6. (car ils sont de même hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le carré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le

rectangle de FH & GH par la 14. prop. 10. Or le meſme quarré de GH eſt comm. au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG eſtans rationelles,) & par la 16. p. 10. les deux quarez de FH & GH, enſemble ſeront commens. au quarré de GH : mais iceluy quarré eſt incommenſurable à deux fois le rectangle de FH & GH : donc par la 13. prop. 10. les deux quarez de FH & GH ſeront enſemble incommens. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarez, & deux fois le rectangle de FH & GH ſont egaux au quarré de FG par la 4. prop. 2. donc par la 17. p. 10. le quarré de FG ſera incommens. aux deux quarez de FH & GH enſemble : leſquels eſtans rationaux (car ils ſont faits ſur lignes rationelles) il faudra que le quarré de FG ſoit irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne FG irrationelle, laquelle cy deſſus auons monſtré eſtre rationelle. Ce qui eſt abſurde : donc le rectangle HI, ou ſon egal DB n'eſtoit pas rationel. Parquoy vne figure mediale n'eſt pas plus grande, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

S C H O L I E.

Soit le rectangle medial ABV 50, & le rectangle ACV 18 : le rectangle reſtant DB ſera $\sqrt{8}$, qui eſt medial. Recherchez AB eſtant $\sqrt{32}$, & ACV 20 : le reſtant DB ſera $\sqrt{32 - \sqrt{20}}$, qui n'eſt pas rationel.

PROBL. 4. PROP. xxviii.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. propo. 6.) soit trouuee la moyenne proportionnelle C; puis (par la 12. proposi. 6.) aux trois A, B, C, soit trouuee la quatriesme proportionnelle D: Je dis que C & D sont les deux lignes demandees.

Car puis que C est moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. prop. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale: Item puis que comme A à B, ainsi C à D, mais A est commensurable en puissance seulement à B, aussi sera C à D par la 10. prop. 10. & par la 24. proposi. 10. D sera ligne mediale (pour estre commens. en puissance à la mediale C.) Voila donc les deux lignes commens. en puissance seulement qui sont trouuees. Reste à prouuer que leur rectangle est rationel.

D'autant que comme A est à B, ainsi C à D, & en permutant comme A à C ainsi à BD; & comme A à C, ainsi C à B. Pareillement comme C sera à B, ainsi B sera à D par la 11. pr. 5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B est rationel: donc le rectangle compris de C & D est aussi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprennent vn rectangle rationel; ce qu'il falloit faire.

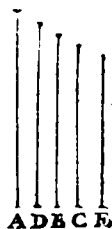
SCHOLIE.

Soit AV 20, & BV 12. donc la moyenne prop. C sera VV 240. & puis que comme A à B , ainsi C à D ; D sera VV 86 $\frac{2}{3}$. Or les puissances de VV 240. & VV 86 $\frac{2}{3}$, sont commens. car elles sont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles est VV 20736, c'est à dire 12, egal au quarré de V 12, qui est aussi 12: & partant iceluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, B, C , trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 22. prop. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionnelle D : puis par la 12. p. 6. soit fait comme B à C ainsi D à E : le dis que D & E sont les deux mediales demandées.



Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. proposit. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B : mais comme B à C , ainsi D à E , & B est commens. en puissance seulement à C , aussi par la 10. prop. 10. D sera commens. en puissance seulement à E : Et par la

24. prop. 10. Destant mediale, E sera aussi mediale commens. en puissance seulement à D.

D'avantage, ie dis que le rectangle des deux mediales D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D comme C à E : mais B est à D comme D à A ; partant comme D est à A, ainsi C est à E ; & par la 16. prop. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commens. en puissance seulement, est medial par la 22. prop. 10. Donc par le corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Parquoy nous auons trouué deux lignes medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il falloit faire,

SCHOLIE 1.

Soit $A20$, $B\sqrt{200}$, & $C\sqrt{80}$. Donc la moyenne prop. D, sera $\sqrt{80000}$. Et puis que comme B à C, ainsi D à E ; icelle E sera $\sqrt{12800}$. Or les puissances de D & E, sont commensurables, car elles sont comme 3 à 2 & le rectangle d'icelles est $\sqrt{1024000000}$, c'est à dire $\sqrt{32000}$, egal au rectangle de A & C, qui est $\sqrt{32000}$.

Or és choses suivantes nous aurons besoin de ce probleme cy,

Trouuer deux nombres plans semblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux $A6$. $C12$. A, B, C, D , c'est à dire que comme A est à B, B 4. D 8. ainsi C soit à D. Mais A & B se multipliant E 24. F 96. entr'eux fassent E ; Item C & D se multipliant fassent F. Donc E & F seront nombres plans semblables, puis qu'ils ont les costez proportionnaux.

Or d'autant qu'il a esté démontré es 28. & 29. p. 9. que si on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, est produit vn nombre pair; mais vn impair, si on multiplie vn impair par vn impair; il appert par quelle maniere peuent estre trouuez deux plans semblables, l'un & l'autre desquels soit pair ou impair; ou vn seul pair, & l'autre impair: Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'un sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là sera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans seront pairs, si chacun a vn costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.

L E M M E 1.

Trouuer deux nombres quarréz, tels que le composé d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy- A.....E.....D.....B
dessus dictes deux plans semblables C.....
AB & C, vn chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant
que par les 24. & 26. prop. 9. si on oste d'un pair vn pair, ou
bien vn impair d'un impair, le reste est pair; estant osté BD
égal à C de AB, le reste AD sera pair; & iceluy AD estant
diuisé en deux également en E; le des que le nombre fait de
AB en BD (qui est vn quarré par la 1. prop. 9) avec le quar-
ré du nombre ED, fait vn quarré. Car puis que le nombre
AD est diuisé en deux également en E, & à iceluy est adiou-
sté DB; le nombre qui est fait de AB en BD, ensemble avec
le quarré du nombre DE, sera egal au quarré du nombre EB,
par le 6. theo. de ceux que nous auons démontré à la 14. prop.
9. Parquoy les deux quarréz, sçauoir celuy fait de AB en
BD, & celuy du nombre DE adiousté ensemble feront vn
quarré, sçauoir celuy qui sera produit de BE. Ce qui estoit
proposé.

COROLLAIRE.

De ces choses est manifeste que quand AB & C sont semblables, estre trouvez en la mesme maniere les deux nombres quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçavoir le nombre faict de AB en BD , est aussi quarré.

Que si les nombres AB & C ne sont prins semblables, l'un & l'autre toutesfois pair, ou impair, seront trouvez en la mesme maniere les deux quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçavoir le nombre faict de AB en BD n'est quarré. Car s'il estoit quarré, par la 2. proposition. 9. les nombres AB , BD , c'est à dire AB & C , seroient plans semblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils ont esté posez dissemblables.

SCHOLIE 2.

Parquoy s'il faut trouver deux nombres quarréz, desquels l'excez soit aussi nombre quarré, nous prendrons comme cy-dessus, deux plans semblables, desquels l'un & l'autre soit pair ou impair, sçavoir AB & C , & acheuerons comme il est dit au prochain lemme.

Que s'il faut trouver deux quarréz, desquels l'excez ne soit quarré, il faudra prendre deux nombres plans dissemblables, & paracheuer comme dessus. Ce qu'on observera plus facilement, diuisant un nombre quarré en deux nombres, l'un desquels soit quarré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12 : ou 36 en 16 & 20 : & ainsi des autres.

L E M M E. 2.

Trouver deux nombres quarréz, tels que le composé d'iceux ne soit quarré.

Soient deux nombres $A..H..I..E..F..G...D.....B$
plans semblables AB , & $C.....$
 C pairs, ou impairs, & soit
faict mesme construction qu'au lemme preced. tellement que
le quarré faict de la multiplication des nombres semblables
 AB , DB entr'eux, ensemble avec le quarré de DE , soit egal
au quarré de BE : en apres de DE soit ostée l'vnité EF . Donc
le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE , à cause
de l'inegalité des costez. Je dis que le nombre composé des
nombres quarréz, desquels l'un est faict de AB en BD , &
l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé
estoit nombre quarré, il sera plus grand, ou egal, ou moindre
que le quarré de BF : Soit premi:rement plus grand; & partant
le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF : donc le costé
d'iceluy sera egal, ou plus grand que le nōbre BE : (car il ne
sera moindre, pource qu'entre BE , BF , nombres differens de
l'vnité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu
entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF , mais moindre
que BE). Si on dict qu'il est egal, tellement qu'au quarré de
 BE , soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB en
 BD , & du quarré de DF , puis qu'au mesme quarré de BE , il
a esté demonst:ré au lemme precedent, estre egal le nombre
faict de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE ; celuy
faict de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , sera
egal à celuy-là faict de AB en BD , ensemble avec le quarré
de DE . Ostant donc le commun faict de AB en DB , le reste
quarré de DF , sera egal au reste quarré de DE ; & partant le
costé DF aussi egal au costé DE , la partie au tout: ce qui est
absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, des-

quels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE . Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI , qui est plus grand que BE . Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE . Mais au precedens lemme le quarré de BE a esté démontré egal au nombre fait de AB en BD , ensemble au quarré de DE : ostant donc le commun nombre fait de AB en BD , restera le quarré de DE , plus grand que le quarré de DE , & partant le costé DF plus grand que le ceste DE , la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, n'est pas plus grand que le costé BE : mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BE .

Soit maintenant si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , egal au quarré de BE ; & soit posé AH double de l'unité EF . Donc puis que le tout AD est double du tout ED , (car AD a esté diuisé en deux egalemēt en E) & l'osté AH double de l'osté EF , aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. p. 7. & partant HD est diuisé en deux egalemēt en F : Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons démontré sur la 14. p. 9. le nōbre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF , sera egal au quarré de BE : Mais au mesme quarré de BE , est posé egal le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DF . Donc le nombre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF , est egal à celuy fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF . Ostant donc le commun quarré de DF restera le nombre fait de HB en BD , egal à celuy

fais de AB en DB . Parquoy puis que HB , AB multiplians le mesme BD , produisent nombres egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produis; HB sera egal à AB , la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE , n'est pas egal au quarré de BE .

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE , moindre que le quarré de BE ; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BE , lequel soit BG , tellement que le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE , soit egal au quarré de BG : Soit pris AI double d'iceluy EG . D'où puis que le tout AD est double du tout BD , & l'osté AI double de l'osté EG ; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD ; & partant ID est divisé en deux également en G . Parquoy par le 6. theor. démontré sur la 14. p. 9. le nombre fait de IB en BD ensemble avec le quarré de DG , est egal au quarré de BG . Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE : Donc le nombre fait de IB en BD , ensemble avec le quarré de DG , est egal à celuy fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE . Ostant donc les quarrés de DG & DE , desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD , plus grand que celuy fait de AB en BD , la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DE , n'est pas moindre que le quarré de BE : mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD , ensemble avec le quarré de DE , n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à démontrer.

S C H O L I E. 3.

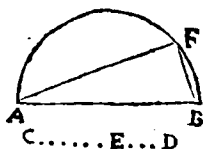
Par cecy nous trouverons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'un ny à l'autre comme

nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarréz, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelque nombre quarré en deux non quarréz : Car ainsi le quarré total ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 6. PROP. xxx.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soit proposée la rationele, AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarréz CD, CE, l'excez desquels



DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodée en iceluy AF: & ioinct BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré

de AF comme le nombre CD est au nombre DE , ils seront commensurables par la 6. p. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF aumoins en puissance; mais AB est rationnele; & par consequent aussi rationnele AF qui luy est commensurable mais; les quarréz de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF seront incommensurables en longueur: elles seront donc rationeles commensurables en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. p. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarréz de AF & FB , c'est à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF , du quarré de FB . Et d'autant que comme CD est à DE , ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF , par conuersion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE , ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB (car ainsi que CD excède DE du quarré de CE , ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB , FB sont commensurables en longueur par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB , AF commensurables en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB , qui luy est commensurable en longueur: ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationnele AB soit 6 : AF sera $\sqrt{20}$: & partant BF sera 4. commens. en longueur à AB .

La construction & demonstration tant de ceste prop. que de plusieurs autres de ce liure, sont tellement defectueuses en

l'edition de Donnot, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien, entendu ce que nous auons dict iusques icy) recognoistre facilement les deffants d'icelle : c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROB. 7. PROP. xxxi.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur.

Soit exposée la rationele AB & soient trouuez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la prop. 29. de ce liure) deux nombres quarez tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarez CE, ED, à fin que le tout CD ne soit à l'un ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré : puis sur AB soit décrit le demy cercle AFB; & par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée la ligne droicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE: & finalement soit menée BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.



Caton prouuera tout ainſi qu'à la precedente, que AB & AF ſont rationeles commenſurables en puissance ſeulement (d'autant que leurs quarréz ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF . Et d'autant que comme CD eſt à CE , ainſi le quarré de AB eſt au quarré de AF : par conuerſion de raiſon comme CD ſera à DE , ainſi le quarré de AB ſera au quarré de BF . Mais CD n'eſt pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc auſſi le quarré de AB , ne ſera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB , BF ſeront incommenſurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB , AF commenſurables en puissance ſeulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF , du quarré de la ligne BF , qui luy eſt incommenſurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

S H O L I E.

Si la rationele AB eſt 3: AF ſera $\sqrt{6}$, & BF 3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puissance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

Soient trouuées par la 30. prop. de ce liure deux lignes rationeles A & B commensurables en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite

A —————
C —————
B —————
D —————

B du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur. Item par la 13. prop. 6. soit trouuée C moyenne proportionnelle entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouuée la 4. proportionnelle D. Je dis que C & D sont les deux lignes demandées.

Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. prop. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationnel; & la ligne C pouuant iceluy par la 17. prop. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D, par la 10. prop. 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. prop. 10. D, sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D: & en permutant comme A sera à C, ainsi B sera à D: mais par la construction comme A est à C, ainsi C est à B: paroitement donc comme C sera à B, ainsi B sera à D: & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. prop. 6. & puis que le quarré de la rationelle B est rationel, le rectangle compris sous C & D qui luy est egal sera aussi rationel. Et veu que comme A est à B, ainsi C à D; & peut plus que B du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, aussi par la 15. prop. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Nous auons donc trouué C & D, deux
mediales

mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude: ce qu'il falloit faire.

Que si on vouloit que C peust plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommens. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles sont requises par la precedente prop. au lieu que cy dessus elles ont esté trouuées par la 90. p. 10. & acheuer le tout comme dessus.

S C H O L I E.

Soit AB, BY 28: le rectangle d'icelles sera $\gamma 1792$, & la ligne CY $\gamma 1792$, qui est mediale. Et puis que comme AB, est à BY 28, ainsi CY $\gamma 1792$ est à D, icelle sera $\gamma \gamma 343$: donc C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rationel 28. & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'une ligne qui luy est commens. en longitude. Car si du quarré d'icelle C, on oste le quarré de D, restera $\gamma 567$, & seront commens. en longit. les deux mediales $\gamma \gamma 1792$ & $\gamma \gamma 567$. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit AB, & BY 20: le rectangle d'icelles sera $\gamma 1280$, & la ligne CY $\gamma 1280$, & partant D sera $\gamma \gamma 125$: donc C & D sont mediales comprenant vn rationel 20, & C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la

plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouvées trois lignes rationeles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouvant premierement par la 30. p. 10. les deux rationeles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & A soit trouvée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouvée D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit fait comme D à B, ainsi C à E. Je dis que D & E sont les deux lignes demandées.

Car puis que D est moyēne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationnel, & par conséquent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulemēt: donc aussi D & E: & par la 24. p. 10. D est mediale, E le sera aussi. Et derechef puis que comme D à B, ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrêmes D & E sera egal au rectangle des moyēnes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationeles commens. en puissance seulement est medial. Dōc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de

A _____
D _____
B _____
C _____
E _____

D & E sera aussi medial. Finablement puis que comme A à C, ainsi D à E; & A peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. p. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que si on trouue A, B, C rationeles commens. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, & on acheue de construire comme dessus, on demonstrera semblablement que D & E sont mediales, commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

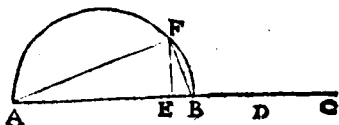
S C H O L I E.

Soit A 8, B $\sqrt{48}$, & C $\sqrt{28}$: le rectangle compris de A & B sera donc $\sqrt{3072}$. & la ligne droite D $\sqrt{3072}$, qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera $\sqrt{388}$. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'une ligne, qui luy est commensurable en longitude. Car si du quarré d'icelle D, on oste le quarré de E, le reste sera $\sqrt{972}$, qui est commensurable en longitude à icelle D $\sqrt{3072}$. Recherche si A est 8, B $\sqrt{48}$, & C $\sqrt{20}$; D sera encore $\sqrt{3072}$, mais E sera $\sqrt{300}$. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel; mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationnelles cōmensurables en puissance seulement AB & BC,



& que la plus grāde AB puisse plus que la plus petite BC du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuées comme il a esté enseigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppe en deux également CB au point D, soit appliqué vn rectangle sur BA egal au carré de BD, defaillant d'une figure quarrée par la 28. prop. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB : & apres auoir fait le demy cercle sur la ligne BA & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA : le dis qu'icelles lignes sont les requises.

Cat puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'une figure quarrée, est egal au quart du carré de BC (c'est à dire au carré de

DB: car nous avons démontré au scholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC est quadruple du quarré de BD: les deux lignes AE & EB seront incommens. en longitude par la 19. p. 10. Mais par le scholie de la 13. p. 6. EF est moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a esté démontré à la 11. p. 10. elle sera incommens. en puissance à EA. Mais comme FE à EA, ainsi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA sont incommens. en puissance, par la 10. p. 10. BF & FA seront aussi incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. le quel quarré de BA est rationel, estant la ligne AB rationele; partant le composé des quarréz de BF & FA, sera aussi rationel. Et d'autant que par l'hypothese le rectangle de AE, EB, est egal au quarré de BD, & qu'il est aussi egal au quarré de la moyenne proport. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de EF sera egal au quarré de BD: partant la ligne EF est egale à BD: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & EF, ou BD son egale, (car par la 8. & 4. prop. 6. AB est à BF comme FA à EF.) Or par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & DC est double du rectangle de AB & BD, (car la base BC est double de la base BD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 22. prop. 10. donc aussi la moitié rectangle de AB & BD: & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA. Nous avons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarréz rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

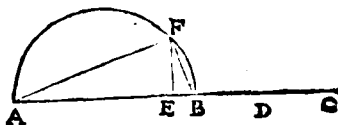
SCHOLIE.

Si AB est 6, & $BC \sqrt{12}$; BD ou EF sera $\sqrt{3}$: & par conséquent AE sera $3 + \sqrt{6}$, & EB $3 - \sqrt{6}$: & puis que le quarré de AF est égal aux quarréz de AE , EF : icelle AF sera $\sqrt{(18 + \sqrt{216})}$: mais BF sera $\sqrt{(18 - \sqrt{216})}$. Donc icelles AF , FB sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarréz, sçavoir 36, est rationnel, mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est $\sqrt{108}$, est medial.

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui fassent le composé de leurs quarréz medial: mais qu'elles comprennent vn rectangle rationnel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC , comprenant vn rectangle rationnel,



& que AB puisse plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incōmensurable en longitude, trouuées comme il a esté enseigné en la 32. p. 10. & soit acheuée la construction comme en la precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandées.

Car nous demonstrerons ainsi qu'en la prece-

dente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance : & le quarré de BA est medial, estant décrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le composé des deux quarréz de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a esté démontré en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD; & qu'il est rationel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationel. Mais il a esté démontré en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA : & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarréz medial : mais le rectangle compris d'icelles rationel : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{432}$, & BC $\sqrt{48}$: BD ou EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{(\sqrt{108} + \sqrt{72})}$; mais BF est $\sqrt{(\sqrt{108} - \sqrt{72})}$: & partant icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarréz, sçauoir est $\sqrt{432}$, est medial : mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, est rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarréz medial, & aussi le rectangle d'icelles, medial, &

incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC , comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouuées comme nous auons enseigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la construction comme en la 34. p. 10. Je dis que BF & FA sont les lignes demandées.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des quarrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par l'hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté demonstré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longueur à BC , mais à icelle BC est commensurable en longueur sa moitié BD : Donc par la 13. p. 10. BD sera aussi incommensurable en longueur à AB , & par la 1. prop. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD , c'est à dire incommensurable, par la 10. prop. 10. & par consequent le rectangle de BF , & FA egal au rectangle de AB & BD , sera incommensurable au quarré de BA , c'est à dire au composé des quarrez de BF & FA . Nous auons donc trouué deux lignes droictes

AF, BF incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé d'iceux quarez: ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{192}$, & BC $\sqrt{48}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{(48+24)}$, & BF $(\sqrt{48}-\sqrt{24})$: Parquoy icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarez, sçavoir est $\sqrt{192}$, est medial incommens. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme est manifeste le faissant.

Trouver deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

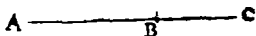
Car puis que tant le composé des quarez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommens. à ce composé, aussi les lignes pouuans iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incommens. tant en longueur que puissance. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les quarez d'icelles, c'est à dire le composé des quarez des lignes AF, BF, & le rectangle sous icelles AF, BF, seroient commens. Ce qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le composé des lignes AF, BF; & une autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, BF, c'est à dire une moyenne proportionnelle entre AF, BF, seront trouuees deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

ICY COMMENCENT LES
*sixaines des lignes irrationelles par la
 composition.*

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement sont assemblees, la toute sera irrationelle: & soit icelle appelée Binome.

Soient assemblees deux lignes rationelles commens. en puissance seulement AB & BC, trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationelle.



Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC sont incommens. en longueur par l'hypothese. Donc par la 10. prop. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC sont rationelles commens. en puissance seulement, leurs quarrés seront commensurables entre eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 16. prop. 10. & partant par la 14. p. 10. les deux quarrés d'icelles AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectangle &

des deux quarez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré est egal aux quarez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarez de AB & BC, lesquels estans rationnaux, & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. def. 10. & par consequent la ligne AC irrationelle : icelle sera donc appelée binome. Si donc deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Soit AB 2, & BC $\sqrt{3}$: la toute AC sera $2 + \sqrt{3}$. & son quarré est $7 + \sqrt{48}$.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, sont procréées deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles est irrationelle par la 22. prop. de ce liure, laquelle est appelée mediale. Et la composée d'icelles, par la 37. prop. 10. est vne irrationelle, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement ; comprenant vn rectangle rationel sont assemblees, la toute sera irrationelle : & soit icelle appelée bimedialle premiere.

Soient assemblees deux
mediales AB & BC com-
mensurables en puissance
seulement, comprenant



vn rectangle rationel, trouuees par la 28. prop. 10. Je
dis que la toute AC est irrationelle.

Car puisque par la 1. prop. 6. comme AB est à
BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au
quarré de BC; & que AB, BC sont incommensura-
bles en longitude; par la 10. prop. de ce liure, iceluy
rectangle de AB, BC sera aussi incommensurable au
quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC est com-
mensurable à deux fois iceluy; & au quarré de BC est
commens. le composé des quarréz d'icelles AB, BC:
(car puisque AB, BC sont commensurables en puis-
sance, leurs quarréz seront commensurables; & par-
tant le composé d'iceux quarréz sera aussi commen-
surable au quarré de BC par la 16. prop. 10.) Donc le
composé des deux quarréz de AB, BC sera incommen-
surable à deux fois le rectangle compris d'icel-
les lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le
composé d'iceux deux quarréz, & rectangles, c'est
à dire le seul quarré de AC, qui leur est egal par la
4. prop. 2. sera aussi incommensurable à deux fois le
rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux
fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable
vn seul rectangle d'icelles AB, BC: donc par la 13.
prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au
rectangle compris sous AB, BC: & iceluy rectangle
estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de
AC sera irrationel par la 10. def. 10. & pource la li-
gne AC sera aussi irrationnelle par la 11. def. 10. Et
icelle ligne soit appellée bimedialle premiere. Si
donc deux lignes medialles commensurables en

puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demon-
strer.

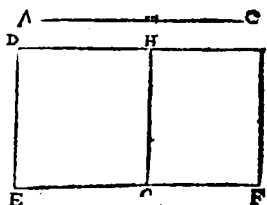
S C H O L I E

Soit $AB\sqrt{5}4$, & $BC\sqrt{2}4$: La toute AC sera $\sqrt{34} + \sqrt{2}4$, irrationnelle nommée bimédiale première.

THEOR. 27. PROP. xxxix.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la toute sera irrationnelle : & soit icelle appelée bimédiale seconde.

Soient assemblees les deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29. prop. 10. le dis que la toute AC est irrationnelle.



Car soit vne ligne rationnelle proposée DE , sur laquelle soit appliqué le rectangle DF égal au carré de AC , & le rectangle DG égal au composé des quarrés de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. prop. 2. le carré de AC , c'est à dire le rectangle DF , est égal aux deux quarrés de AB , BC

ensemble avec deux fois le rectangle de AB, BC ; le rectangle HF sera égal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC , est medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC , qui luy est commens. c'est à dire le rectangle HF , sera aussi medial. De-rechef puis que les quarez des mediales AB, BC sont commens. le composé d'iceux, c'est à sçavoir le rectangle DG sera aussi commensurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarez des mediales AB, BC , est medial: Donc par le coroll. de la 24. prop. 10. le rectangle DG sera aussi medial: Ainsi les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE , (car GH est egale à la rationelle DE ,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH , par la 23. proposi. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC , par la 1. prop. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC : & les deux quarez de AB & BC estans commensurables entr'eux, les deux ensemble seront commensurables au seul de BC , par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarez de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationelles seront incommensurables en longitude: elles seront donc commensurables en puissance seulement; (car autrement elles ne seroient rationelles si elles estoient incommensurables,) & par la 37. proposi. 10. la toute composee EF sera irrationnelle: & le rectangle DF

sera irrationnel : car s'il estoit rationnel la ligne DE estant rationnelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationnel, ce qui n'est pas. DF est donc irrationnel : & partant aussi irrationnel son egal quarré de AC ; & par consequent la ligne AC irrationnelle, qui sera appelée bimediale seconde. Si donc deux mediales commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle compris d'une ligne rationnelle & d'une irrationnelle, est aussi irrationnel. Car il y a esté démontré que le rectangle DF compris de la rationnelle DE, & irrationnelle EF, ne peut estre rationnel.

SCHOLIE.

Soit ABVV 18, & BCVV 8 : La toute AC sera VV 18 + VV 8, qui est irrationnelle, appelée bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adioust ensemble deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarez soit rationnel ; la toute sera irrationnelle : & soit icelle appelée ligne majeure.

Soient assembles les deux lignes AB & BC incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, trouuees par la 34. prop. 10. le dis que la toute est irrationelle.

Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. prop. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypothese le composé des quarez de AB & BC est rationel : partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17. prop. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarez (qui est le quarré de AC par la 4. prop. 2.) sera incommensurable au composé des deux quarez de AB & BC, qui est rationel : partant le quarré de AC sera irrationel ; & son costé AC aussi irrationel : lequel sera appellé ligne majeure. Parquoy si on adiousté deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

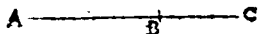
Soit $AB\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, & $BC\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: La somme AC sera donc $\sqrt{(18+\sqrt{216})} + \sqrt{(18-\sqrt{216})}$, qui est irrationelle nommée ligne majeure.

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs

leurs quarez medial, sont assemblees, la toute sera irrationnelle : & soit ieelle appellee ligne pouuant vn rationel, & & vn medial.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, telles que demande la propos. & qu'enseigne à trouver la 35. proposition de ce liure. Je dis que la toute AC est irrationnelle.



Car puis que le composé des quarez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. proposi. 10. le composé des deux quarez, & des deux rectangles, sçauoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel : Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationnel : & par consequent la ligne AC aussi irrationnelle : laquelle sera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

Soit $AB\sqrt{108 + \sqrt{72}}$, & $BC\sqrt{108 - \sqrt{72}}$: La toute AC sera donc $\sqrt{(\sqrt{108 + \sqrt{72}})^2 + (\sqrt{108 - \sqrt{72}})^2}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommensura-

bles en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, sont assemblees; la toute sera irrationnelle: Soit icelle appelée ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, (comme en la figure de la prop. 39. pag. 525.) telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Soit exposée la rationnelle DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. prop. 10. sçauoir que le rectangle DH soit egal au quarré de AC; DG aux deux quarez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté démontré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF seront aussi incommens. en longueur. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationnelle DE, feront les deux autres costez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainsi EG & FG seront rationnelles commens. en puissance seulement, & par la 17. prop. 10. la toute EF sera irrationnelle. Mais DE estant rationnelle, le rectangle DF sera irrationnel par le coroll. de la 39. p. 10. Part. nt la ligne qui peut iceluy rectangle, sçauoir AC sera irrationnelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommensurab. en puissance, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

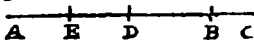
Soit $ABV (\sqrt{48} + \sqrt{14})$ & $BCV (\sqrt{48} - \sqrt{14})$ Deme

la toute AC sera $\sqrt{V48+V24} + \sqrt{V48-V24}$.

L E M M E I.

Si vne ligne droicte est couppée en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalement en vn autre poinct, & les parties de l'une des diuisions sont inegales aux parties de l'autre diuision, chacune à la sienne: les quarez des deux lignes de la plus inegale diuision sont plus grands que les quarez des lignes de la moins inegale.

Soit la ligne droicte AC diuisée inegalement en B: & en-



cores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Je dis que les quarez de AB & BC, sont plus grands que ceux de AE & EC.

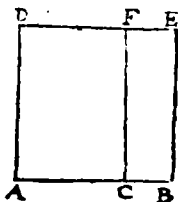
Car si AC est couppée en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC sont plus inegales que CE, AE; & que AB est plus grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, avec le carré de DB, est egal au carré de DC: Item le rectangle de AE & EC, avec le carré de DE, est aussi egal au carré de DC: partant le rectangle de AE & EC avec le carré de DF, est egal au rectangle de AB & BC, avec le carré de BD. Es en ostât les quarez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarez de AB & BC, & deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au carré de AC par la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarez de AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par consequens les composez des quarez, & rectangles sont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont esté démontré plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarez de AB & BC seront plus grands que les deux quarez de AE & EC: Ce qui estoit proposé.

L E M M E. 2.

Vne figure rationnelle excède vne figure rationnelle, d'une figure rationnelle.

Soient les deux figures rationnelles AE & AF , estant AE plus grande que AF de CE : le duquel CE est figure rationnelle.

Car AE & AF estans rationnelles, elles seront aussi commens. & par la 16. prop. 10. AF & CE seront commens. entr'elles, & par conséquent rationnelles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn poinct seulement.

Soit le binome AB diuisé en ses noms au poinct C : tellement que AC, CB ,



soient rationnelles commensurables en puissance seulement, comme veut la 37. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre poinct, scauoir est que les lignes soient rationnelles commens. en puissance seulement.

Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au poinct D . Or il appert que AB n'est coupee en deux également és poincts C & D . Car AC, CB , ou AD, DB seroient commens. en longueur contre l'hypothese: il faut donc que AD & DB

soient plus grandes ou plus petites que AC & CB , chacune à la sienne : car si elles estoient egales, elles seroient diuisees sur vn mesme poinct. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB , par le lemme qui suit la 42. proposi. 10. le composé des quarez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarez de AD & DB : Et d'autant qu'iceux cōposez sont rationaux. (car ce sont quarez construits sur lignes rationnelles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced. Or est-il que le composé des quarez de AC & CB , avec deux fois le rectangle de AC & CB , est egal au composé des quarez de AD & DB , avec deux fois le rectangle de AD & DB : (car iceux sont chacun egaux au carré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarez de AC & CB , sont plus grands que les quarez de AD & DB , d'autant les rectangles de AC , CB , soient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a esté démontré que l'excez des quarez est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel : (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB , ou AD & DB , sont rationnelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'és cinq sortes de lignes irrationnelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuvent estre egaux : car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commens.

en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. sans aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuvent estre diuisees en leurs noms qu'au poinct proposé, sans entendre que le contredisant apportant vne autre diuision, les parties d'icelles doiuent estre inegales aux parties de la proposee.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au poinct C, tellement que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. Je dis qu'on ne la peut diuiser en ses noms en vn autre poinct.

A ——— D — C — B

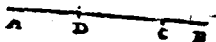
Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonstrerons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB sera autant plus grand que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarez de AD & DB sont plus petits que les quarez de AC & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux par l'hypothese. Donc leurs excez sera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par consequent l'excez des quarez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarez estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, ainsi qu'il appert par la 16. proposi. 10. & coroll. de la 24. prop. 10. partant l'ex-

cez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrier.

L E M M E.

Si vne ligne droicte est coupee inegalement, les quarez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB coupee inegalement en C : Je dis que les quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.



Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. prop. 2. les quarez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) avec le carré de AD : & partant les deux quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB : ce qui estoit proposé.

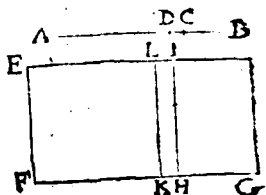
THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la

37. prop. de celiure: le dis qu'elle ne peut estre diuisee en ses noms en vn autre point que C.

Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus : & soit vne ligne rationelle propdsee EF, sur laquelle (par la 45. prop. 1. soit construit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarez de AC, CB: le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarez de AC, CB, & deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la mesme maniere si sur EF on applique EK égal aux quarez de AD, DB : le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarez de AC, CB, sont inegaux aux quarez de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux : & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent; EH sera aussi plus grand que IG : & partant EH plus grand que la moitié de EG : & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonsturerons par mesmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que AC, CB sont mediales, & commenfurables en puissance; les quarez d'icelles seront aussi mediaux & commenfurables, & par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commenfurable à vn cha-



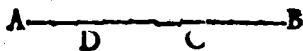
eun d'eux ; lesquels estans mediaux leur composé,
 c'est à sçauoir le rectangle EH sera aussi medial par
 le corol. de la 24. p. 10. Par mesme raison EK sera de-
 monstré medial : parquoy EH, EK appliquez sur la
 rationele EF, auront les costez FH, FK, rationaux
 commensurables en puissance seulement à la ratio-
 nele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le
 rectangle de AC, CB est posé medial ; le double d'i-
 celuy, sçauoir est IG, sera aussi medial par le corol.
 de la 24. prop. 10. & estant appliqué sur la rationele
 HI, l'autre costé HG sera aussi rationel commensu-
 rable en puissance seulement à icelle HI, par la 23.
 p. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurables
 en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC est à
 CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC,
 CB : (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop.
 10. le quarré sera incommensurable au rectangle.
 Mais au quarré de AC est commensurable le com-
 posé des quarez de AC CB; (car d'autant que AC,
 CB sont commensurables en puissance, & partant
 les quarez d'icelles commensurables, le composé
 d'icenz quarez sera aussi commensurable au quarré
 de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC,
 CB est commensurable à son double. Donc aussi le
 composé des quarez de AC, CB, c'est à dire le re-
 ctangle EH est incommensurable au double du re-
 ctangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie
 de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6.
 comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10.
 prop. 10. icelles FH, HG seront incommensurables
 en longitude. Mais elles ont esté démontrées ra-
 tioneles : Donc les lignes FH, HG sont rationeles
 commensurables en puissance seulement. Et par la
 37. prop. 10. la route FG sera binome, & diuisée en

ses noms au poinct H. En la meſme maniere nous demonſtrerons auſſi FG binome eſtre diuiſée en d'autres noms à vn autre poinct k; ce qui eſt abſurde: car par la 43. p. 10. elle ne peut eſtre diuiſée en ſes noms qu'en vn ſeul poinct. Donc AB bimediale ſeconde ne peut eſtre diuiſée en ſes noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, eſt diuiſée en ſes noms, en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne maieure AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient



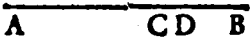
incommenſurables en puissance: & le compoſé de leurs quarez ſoit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40. p. de ce liure. Je diſ qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

Car ſi faire ſe peut, qu'elle ſoit diuiſée en ſes noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que ſoit le poinct D, nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la 43. p. de ce liure, que les compoſez des quarez de AC & BC; & de AD & DB ont vn meſme excez que les doubles rectangles de AC & BC; & de AD & DB. Mais d'autant que les compoſez quarez ſont rationaux par l'hypothèſe; & par conſequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (leſquels ſont mediaux par le corol.

de le 24. prop. 10.) fur rationel ; ce qui est contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne sera diuisée en ses noms en autre poinct qu'en C. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, est diuisée en ses noms, en vn poinct seulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB,  diuisée en ses n^{os} au poinct C, en sorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel ; & que le composé de leurs quarez soit medial : mais le rectangle d'icelles, rationel, cōme veut en la 41. p. 10. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car il s'ensuyuroit mesme absurdité qu'en la precedente prop. sçauoir que si on la diuisoit encores au poinct D, il s'ensuyuroit comme là, que l'excez tant des quarez, que des rectangles, seroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux medaux, est diuisée en ses noms, en vn poinct seulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisée en ses noms au poinct C, (comme en la figure mise à la page 536.) en sorte que AC & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, comme veut la 42. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car si faire se peut, qu'icelle AB soit encore diuisée au poinct D : & sur la rationele proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45. prop. 10. sçauoir est le rectangle EG égal au quarré de AB, & EH égal aux deux quarez de AC & CB : & partant IG, égal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a esté démontré en ladite 45. prop. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui sont mediaux par la susdite demonstration, seront les lignes FH & HG rationeles : mais le composé des quarez de AC & BC est incommensurable au double de leur rectangle : (car par l'hypothese il est incommensurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommensurables. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commensurables en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. AB sera binome, diuisé en ses noms au poinct H. Que si on veut dire que AB peut encore estre diuisé en ses noms au poinct D : il s'ensuyura, cōme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diuisé en ses noms au poinct H, le pourroit encore diuiser en ses noms au poinct K, contre la 42. prop. 10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuisée en ses noms qu'au seul poinct C. Ce qu'il falloit démonstrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Une ligne rationele estant proposée, & le binome divisé en ses noms: lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome premier.

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome second.

3. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome troisieme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposée: toute la ligne soit appelée Binome quatrieme.

5. Mais si le plus petit nom est com-

mensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne est appelée Binome cinquiesme.

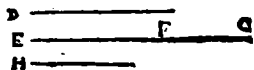
6. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée ; la toute soit appelée Binome sixiesme.

Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposée : parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six.3.
Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres quarez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29. p. 10.) desquels l'excez

A.....C.....B



AC ne soit quarré, à fin que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient entr'eux comme quarré à quarré : Soit vne rationele proposée D, à laquelle soit pris EF commensurable en longitude : & icelles D & EF feront rationeles commensurables en longitude. En apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit fait que comme le nombre A B est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG. Je dis que la toute EG est binome premier.

Car puis que les quarez de EF, FG qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC, sont commensurables par la 6. prop. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensurables au moins en puissance : Et d'autant que EF est rationele, aussi FG sera rationele. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarez d'icelles rationeles EF, FG ne sont comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF FG sont incommensurables en longitude par la 9. p. 10. elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG : soit donc du quarré de H. (iceluy quarré sera trouué par le lemme qui suit la 14. p. 10.) Et puis que cōme le nombre AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB est à CB comme nombre quarré à nōbre quarré : donc le quarré de EF sera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF, H sont cōmens. en longitude par la 9. p. 10. Veudonc que EF plus grand nom est commens. en longitude à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commens. en longitude ; EG sera binome premier par la 1. des secondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

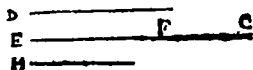
Soit la rationele proposée D 8, & EF 6. faisant donc que

comme AB est à AC , ainsi 36 quarré de EF , soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant la souce EG , sera $6 + \sqrt{20}$, qui est binome premier; car le plus grand nom est commensurable à nombre absolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'un quarré dont la racine est commensurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier sera trouué plus briefuement que dessus, posant quelque nombre pour plus grand nom, & pour le moindre la racine quarré des trois quarts de sa puissance. Ainsi posant 8 pour le plus grand nom, son quarré sera 64 , dont le quart soustrais reste 48 ; & partant $8 + \sqrt{48}$ sera binome premier.

PROBL. 14. PROP. L. Trouuer vn Binome second.

Estant trouuez les deux nombres quarez AB, CB , cōme en la prop. precedēte, & pris FG commenturable en longitude à vne

$A.....C.....B$



rationele proposée D : icelles D & FG seront rationeles commensurables: puis apres par le corol. de la 6. p. 10. soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB : ainsi le quarré de FG soit au quarré de EF . Je dis que EG est binome second.

Car on demonstrera premierement tout ainsi qu'en la precedente que EG est binome. Et puis que comme le nombre AC est au nombre AB , ainsi le quarré de FG est au quarré de EF : en changeant comme AB à AC , ainsi le quarré de EF est au quarré de FG . Mais AB est plus grand que AC : Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG ,

&c

& soit du quarré de H. Nous demonstrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF sont commensurables en longueur. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commens. en longueur, & le moindre nom FG commensurable en longueur à la rationelle D : & par les sec. def. EG, sera binome second. Nous auons donc trouué vn binome second, ainsi qu'il estoit requis.

S C H O L I E.

La rationelle proposée D soit 7, & FG 5: faisant donc que comme AC 5 est à AB 9, ainsi 25 quarré de FG soit au quarré de EF; icelle EF sera $\sqrt{45}$. & partant la route EG sera $\sqrt{45} + 5$, qui est binome second; pource que le plus grand nom d'iceluy pens plus que le moindre d'un quarré, dont la racine est commensurable en longueur à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom est aussi commensurable au nombre rationnel proposé. Or pour trouuer plus brefuement que dessus iceluy binome second, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adionster le tiers, & la racine quarrée de ce qui en viendra sera le plus grand nom. Ainsi prenant pour le moindre nom 6, son quarré est 36, dont le tiers luy estant adionsté sera 48: & partant $\sqrt{48} + 6$ sera binome second.

P R O B. 15. P R O P. 11.

Trouuer vn binome troisieme.

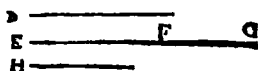
Estans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. soit pris vn autre nombre l qui

M m

ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre carré à nombre carré : (ce qui se fait prenant I nombre non carré prochainement plus grand que AC. Car puis

A....C....B

I.....



qu'il n'est carré, il ne sera au carré AB, comme nombre carré à nombre carré. Derechef puis qu'il est non carré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'unité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC un moyen proportionel, comme nous avons demonsté au scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront donc plans semblables : & partant ne seront entr'eux comme nombres quarez ; & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme I à AB. Ainsi le carré de D, au carré de EF : ainsi les quarez de D, & EF, estans comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables, au moins en puissance. D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est pas à AB, c'est à dire le carré de D au carré de EF, comme nombre carré à nombre carré ; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef soit fait par le susdit corol. que comme AB est à AC ; ainsi le carré de EF soit au carré de FG : & par la 6. prop. 10. iceux quarez de EF, FG, estans comme nombre à nombre, seront commensurables entr'eux : & partant les lignes EF, FG aussi commensurables, au moins en puissance ; & EF estant rationele FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est pas à AC, c'est à dire le carré de EF au carré

de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG seront incommensurables en longueur par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. la route EG sera binome. Je dis aussi qu'elle est binome troisieme. Car d'autant, que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré; donc les quarrés de D, & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D, & FG, seront incômensurables en longueur par la 9. p. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H sont commensurables en longueur. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy est commensurable en longueur, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longueur à la proposée rationele D, comme il a esté demonsté: partant EG sera binome troisieme par les secondes definitions. Nous avons donc trouué vn binome troisieme. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6: faisant donc que com
M m ij

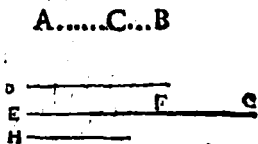
me 16, est à AB 9, ainsi 36 quarré de D soit au quarré de EF; icelle EF sera $\sqrt{54}$; & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{30}$: & partans la toute EG sera $\sqrt{54} + \sqrt{30}$, qui est binome troisieme, parce que l'un ny l'autre nom est commensurable en longitude à nombre rationel proposé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré, duquel la racine est commensurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouuer ce binome plus proprement que dessus, on posera la racine quarrée de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarrée des trois quarts du mesme nombre pour le moindre nom: Ainsi posant pour le plus grand nom $\sqrt{20}$, l'autre nom sera $\sqrt{15}$: & partans $\sqrt{20} + \sqrt{15}$ sera binome troisieme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatriesme.

Estans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'un ny à l'autre comme nombres quarez: (comme nous auons enseigné au 3.

(tholie de la 29. prop. de ce liure-) Soit exposé la rationele D, & pris EF commensurable en longitude à icelle rationele D; & par consequent EF sera aussi rationele: Et ayant construit le reste comme en la 49. p. 10. Nous demonst. comme là que la toute EG est binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du qu. de H; & que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré



de EF au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré : Donc le quarré de EF ne sera au quarré de H, comme nōbre quarré à nombre quarré : & par la 9. p. 10. les lignes EF & H, sont incommens. en longitude : parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est incommensurable en longitude, & qu'icelle EF est commensurable en longitude à la rationele proposée D ; EG sera binome quatriesme par les def. secondes. Nous auons donc trouué vn binome quatriesme : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele exposée D soit 8, & EF 6 : faisant donc que l'omme AB y est AC 6, ainsi le quarré de EF, sçauoir 36. soit au quarré de FG ; icelle FG sera trouuée de $\sqrt{24}$: & passant la souste EG sera $6 + \sqrt{24}$, qui est binome quatriesme ; pource que le plus grand nom est commensurable en longitude au nombre rationnel proposé, & qu'icelluy nom peut plus que le moindre nom d'un quarré dont la racine est incommensurable en longitude d'iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus prōptemens que dessus posant pour le plus grand nom quelque nombre ; & pour le moindre la racine quarrée de la moitié du quarré d'iceluy. Ainsi posant 6. pour le plus grand nom, son quarré sera 36, dont la moitié sera 18, & passant $6 + \sqrt{18}$ sera binome quatriesme.

P R O B. 17. P R O P. LIII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la construction comme en la 50. p. on demonstrera comme en ladi-

te 50. prop. que EG est binome. Item que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Et comme en la precedente qu'icelles EF & H sont incommensurables en longueur: & partant par les secondes def. EG est binome cinquiésme. Nous auons donc trouué vn binome cinquiésme. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 7, & FG 6: donc faisant que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de GF, sçauoir est 36, soit au quarré de EF: icelle EF sera trouuée de $\sqrt{54}$: partant la toute EG sera $\sqrt{54} + 6$, qui est binome cinquiésme: car le moindre nom est commensurable en longit. au nomb; e rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré dont la racine est incommensurable en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer cel binome si il posé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy est ant adioustée au mesme quarré, la racine du tout sera le plus grand nom: Ainsi posant 4 pour le moindre nom, son quarré sera 16, dont la moitié 8 luy estant adioustée ierons 24, dont la racine sera $\sqrt{24}$; & partant $\sqrt{24} + 4$ sera binome cinquiésme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome sixiésme.

Soient exposez deux nombres AC, CB, tellement que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (ce qu'on fera adioustant ensemble deux nombres premiers

entr'eux : Car
par la 30. p. 7.
le total sera
aussi premier à
chacun d'eux;
& partant ne
sera à l'un ny

A.....C...B

I.....

D —————
E ————— F ————— G
H —————

à l'autre cōme nombre quarré à nombre quarré, par les choses demōstrées à la fin du 8. liure) Et soit pris quelque autre nombre non quarré I, à fin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres soit vne rationele proposée D: & par le corol. de la 6. p. 10. soit faict que cōme I est à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: & ayāt acheué comme en la 51. p. 10. nous demonstrerons comme là que EG est binome: en apres que D & FG sont incommens. en longitude, & que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstrerons cōme en la 49. p. que par conuersion de raiſon, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par consequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. p. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy est incommens. en longitude: & l'un ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en longitude à l'exposée rationele D, par les secondes def. EG sera binome sixiesme. Nous auons donc trouué vn binome sixies. Ce qu'il falloit faire.

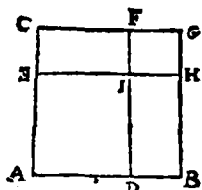
S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6 : faisant que comme I 6
M m iij

est à AB^8 , ainsi le carré de D , c'est à sçavoir 36 , au carré de EF : icelle EF sera trouuée de $\sqrt{48}$: & faisant que comme AB^8 est à AC^5 , ainsi 48 carré de EE soit au carré de FG : icelle FG sera trouuée de $\sqrt{30}$: partant la toute EG sera $\sqrt{48} + \sqrt{30}$, qui est binome fixiesme: car l'un & l'autre nom est incommensurable en longueur au nombre rationnel proposé, & le plus grand nom pnt plus que le moindre d'un carré, dont la racine est incommensurable à iceluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que dessus tel binome il ny a qu'à prendre les racines carrées de deux nombres non carrez, dont l'un soit double de l'autre: Ainsi posons $\sqrt{12}$ pour le plus grand nom l'autre sera $\sqrt{6}$; & partant $\sqrt{12} + \sqrt{6}$ sera binome fixiesme.

L E M M E.

Les carrez AI , IG estans conioincts à l'angle I , tellement que les costez DI , IF facent vne seule ligne droite DF , & par consequent les costez EI , IH aussi vne seule ligne droite EH , estant acheué



le parallelogramme BC . Je dis qu'iceluy est carré: & EF estre rectangle moyen proportionnel entre les carrez AI , IG : & EG moyen proportionnel entre les carrez AG , IG .

Car d'autant que EI est égale à ID , mais HI à IF : la toute EH sera égale à la toute DF . Mais par la 34. p. 1. la ligne EH est égale à l'une & à l'autre d'icelles AB , CG : & DF à AC , BG : & par consequent chacune d'icelles AB , CG est égale à l'une & à l'autre AC , BG : donc le parallelogramme BC est equilateral. Mais par la 29. proposition 1. il est aussi rectangle, & partant carré. De ce bes pnt que comme DI est à IF , ainsi EI à IH . Mais par la 1. prop. 6.

comme DI à IF , ainsi AI à EF : & comme EI à IH , ainsi EF à IG : donc comme AI à EF , ainsi EF à IG : & partant E est moyen prop. entre AI , IG . Et finalement veu que cōme AE à EC , ainsi CF à FG , icelles estans egales chacune à la sienne : & en composant comme AC à EC , ainsi CG à FG . Mais comme AC à CE , ainsi AC à EG : & comme CF à FG ainsi EG à IG par la 1. prop. 6. Donc comme AG à EG , ainsi EG à IG ; & par consequent EG est moyen prop. entre AG , IG .

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce lemme : mais Clavius le propose ainsi.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionnel entre les quarez d'icelles. Item le rectangle contenu sous la toute, & vne des parties, est moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Ce qui est la mesme chose que dessus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

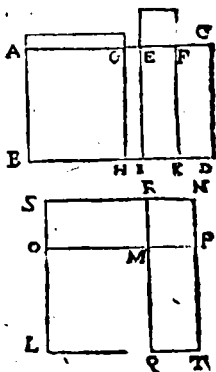
Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome premier, la ligne pouuant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB & du binome premier AC : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationnelle appelée binome.

Car d'iceluy binome AC , le plus grand nom soit AE : donc par la def. AE , EC sont rationnelles com-

menf. en puiffance feulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eft communf. en longit. & auffi AE fera communf. en longit. à la rationnelle propofée AB. Soit couppée EC en deux également en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eft communf. en long, fi fur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eft à dire au quarré de EF, & defaillât d'une figure quarrée, il diuifera icelle AB en parties communf. en long.

par la 18. prop. 10. foient donc icelles parties AG, GE: & par les poinçts G, E, F foient menées GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. p. 2. foient defcrits les quarréz LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & difpofez en forte que OM, MP facent vne ligne droicte: puis foit acheué le rectangle ST, lequel fera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la construction le rectangle de AG, GE eft egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE feront proport. par la 17. prop. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI feront auffi proportionnaux: parquoy EK fera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarréz LM, MN. Mais par le lemme precedent OR eft auffi moyen prop. entre iceux quarréz LM, MN: donc OR, EK feront egaux. Mais par la 43. prop. 1. OR, QP font egaux: & par la 36. prop. 1. EK eft egal à FD: donc QP fera auffi egal à FD: & par consequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle

AD: & ainſi la ligne OP peut le rectangle AD: le dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commens. en longitude, la toute AE ſera auſſi commens. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE eſt auſſi commensurab. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle AB eſt auſſi commens. en long. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB eſtant rationnelle, AG, GE ſeront auſſi rationnelles: & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationnelles, ſeront rationaux: donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationnelles. Et d'autant que AE eſt incommens. en longitude à EC, mais commens. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. AG, EF ſeront incommens. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. pr. 6. ſont auſſi incommens. par la 10. p. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. prop. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommens. en longit. puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demonſtrees rationnelles: & partant elles ſont rationnelles commens. en puiſſance ſeulement: donc la toute OP pouuant le rectangle AD eſt binome par la 37. p. 10. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome premier, &c. Ce qu'il falloir prouuer.

S C H O L I E.

La rationnelle AB ſoit 5, & AC 4 + $\sqrt{12}$. Donc le rectangle AD ſera 20 + $\sqrt{300}$: Et, puis que AE plus grand nom du binome eſt 4, & EF moitié du plus petit nom EC, eſt $\sqrt{3}$,

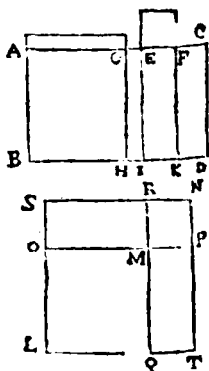
AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15. & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera $\sqrt{15}$: Ainsi GI est 5, & MP $\sqrt{5}$. Mais EF est $\sqrt{3}$, & EI égale à AB: donc EK sera $\sqrt{75}$, & son double ED $\sqrt{300}$. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produîte MI $\sqrt{75}$, égal à EK. Mais à iceluy MI est égal MS: donc MS, MI ensemble seront aussi $\sqrt{300}$. Or les quarréz LM 15, MN 5, font ensemble 20: Partant tout le quarré LN est $20 + \sqrt{300}$, & son costé OP ou LT $\sqrt{15} + \sqrt{5}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationnelle AB & du binome second AC: Je dis que (apres auoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationnelle appelée bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longit. à la rationnelle AB: Item AG & EG (qu'on prouuera estre commensurable en longueur entr'elles, comme en la precedente, &



par la 16. prop. 10. à leur toute AE) seront par la 14. prop. 10. aussi incommensurables en longueur à icelle AB, laquelle estant rationnelle, icelles AG, GE seront aussi rationnelles : & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationnelle AB. Donc par la 22. prop. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux : & leurs egaux quarez LM, MN aussi mediaux : Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longueur à la rationnelle AB, le rectangle ED sera rationnel par la 20. prop. 10. aussi sera la moitié EK : & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP : & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationnelle AB soit 5, & AC $\sqrt{48+6}$: donc le rectangle AD sera $\sqrt{12000+30}$. Et puis que AE est $\sqrt{48}$, & EC 6 : EF sera 3, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$: parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{675}$, & par consequent la ligne OM, qui peut iceluy sera $\sqrt{675}$: ainsi GI sera $\sqrt{75}$ & MP $\sqrt{75}$. Or EC est 6 : partant ED double de MS $\sqrt{50625}$, c'est à dire 15, est 30 ; & par consequent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarez LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{75}$, & des deux rectangles MS, MT 30, sera $\sqrt{12000+30}$, & son costé OP ou LT $\sqrt{675} + \sqrt{75}$, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome troisieme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationelle nommée bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisieme AC (apres auoir construit comme aux precedentes.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle appelée bimediale seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commensurables en puissance seulement : Item d'autant que AC est binome troisieme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationelle AB; & par la 22. prop. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK : Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. prop. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC $\sqrt{32} + \sqrt{24}$: Donc le rectangle AD sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$. Mais d'autant que AE est

$\sqrt{32}$, & $EC \sqrt{24}$; EF sera $\sqrt{6}$, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE ; & partant AG sera $\sqrt{18}$, & $GE \sqrt{2}$. Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{450}$, & $GI \sqrt{50}$; & par consequent la ligne QM est $\sqrt{\sqrt{450}}$, & $MP \sqrt{\sqrt{50}}$. Et puis que El est 5 , & $EC \sqrt{24}$, le rectangle ED sera $\sqrt{600}$, lequel est double de $MT \sqrt{150}$. Donc tout le quarré LN , qui est composé des quarréz $LM \sqrt{450}$, $MN \sqrt{50}$, & des rectangles $MS, MT \sqrt{600}$; sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$; & partant son costé OP est $\sqrt{\sqrt{450} + \sqrt{150}}$, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.

Soit le rectangle AD , compris du binome quatriesme AC & de la rationnelle AB (apres auoir construit & demonsté comme en la 55. p.) Je dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne irrationnelle qu'on appelle maieure.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est commensurable en longueur à la rationnelle AB , & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 19. prop. 10. le rectangle deffillant compris sous AG, GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuifera AE en AG & EG incommensurab. en longueur: & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Donc aussi incommens.

leurs egaux quarrez LM, & MN : & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris des rationelles AB, AE, est rationel par la 20. prop. 10. (qui est egal aux quarrez LM, MN). Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. estant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP est ligne majeure. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC $4 + \sqrt{8}$: Donc le rectangle AD sera $20 + \sqrt{200}$. Et puis que AE est 4, & E $\sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle, sçavoir 2, ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE; la ligne AG sera $2 + \sqrt{2}$, & GE $2 - \sqrt{2}$: partant le rectangle AH sera $10 + \sqrt{50}$, & GI $10 - \sqrt{50}$; & par consequent OM est $\sqrt{(10 + \sqrt{50})}$ & MP $\sqrt{(10 - \sqrt{50})}$. Or ED estoit $\sqrt{8}$; donc ED double du rectangle MT $\sqrt{50}$; sera $\sqrt{200}$. La somme des quarrez LM, MN; sera donc 20, à laquelle si on adiouste les plans TMS $\sqrt{200}$, on aura pour tous le quarré LN $20 + \sqrt{200}$; & partant son costé OP sera $\sqrt{(10 + \sqrt{50}) + (10 - \sqrt{50})}$ ou $\sqrt{(20 + \sqrt{200})}$ qui est ligne majeure.

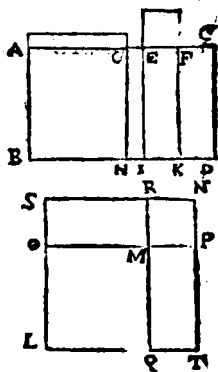
THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome cinquième, la ligne qui peut iceluy rectan-

gle, est ligne irrationnelle pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB , & du binome cinquième AC ; le dis (apres auoir construit & démontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD , est ligne irrationnelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquième, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: & comme en la precedente AG & EG seront incommensurables en longueur: Et les lignes OM , MP seront incommensurables en puissance, & l'egal au composé de leurs quarrés, sçauoir le rectangle AI , est medial par la 22. proposit. 10. car les lignes AB & AE sont rationnelles commensurables en puissance seulement. Et d'autant que AB , & le plus petit nom EC , sont commensurables en longueur, par la 20. proposit. 10. ED est rationel: aussi sera la moitié EK , & son egal QP compris des lignes OM , MP , & par la 41. prop. 10. OP est ligne irrationnelle pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.



SCHOLIE.

La rationnelle AB soit 5, & $AC \sqrt{8} + 2$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{200} + 10$. Et d'autant que AE est $\sqrt{8}$, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE , le costé AG sera $\sqrt{2} + 1$; & GE $\sqrt{2} - 1$; & partans le rectangle AH sera $\sqrt{50} + 5$, & la ligne OMY ($\sqrt{50} + 5$); & $MP \sqrt{(\sqrt{50} - 5)}$, puis que GI est $\sqrt{50} - 5$. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarréz LM, MN , est $\sqrt{200}$, à laquelle adionstant les rectangles SMI 10, tout le quarré LN sera $\sqrt{200} + 10$; & par consequent son costé OP , est $\sqrt{(\sqrt{50} + 5)} + \sqrt{(\sqrt{50} - 5)}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{200} + 10)}$, qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

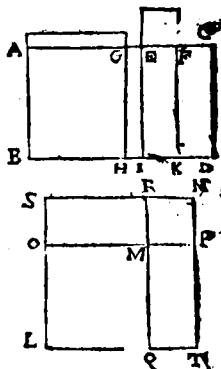
THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationnelle, & d'un binome sixiesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD , compris de la rationnelle AB , & du binome sixiesme AC : (apres auoir construit & demonstté comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD) Je dis qu'icelle OP , est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les

deux noms sont incommensurables en longueur à la rationnelle AB : Et comme il a été démontré à la 58. prop. 10. OM , MP seront incommensurables en puissance ; & si par la 22. prop. 10. le rectangle AI , qui est égal au composé de leurs quarrés est medial : Item ED qui est compris de deux rationnelles commensurables en puissance seulement , est aussi medial par la mesme proposition. aussi medial sa moitié



EK , & son égal QP compris d'icelles lignes OM , MP . Et si iceluy rectangle QP , ou son égal EK est incommensur. au composé des quarrés LM , MN , sçavoir AI : car les lignes AE & EC étant incommens. en longueur , aussi AE & EF le seront : & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. Les rectangles AI & EK seront incommens. Et par la 42. prop. 10. OP sera ligne pouvant deux mediaux.

S C H O L I E.

La rationnelle AB soit 5, $AC \sqrt{12} + \sqrt{8}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{300} + \sqrt{200}$. Et pource que AE est $\sqrt{12}$, & $EC \sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle étant égal le rectangle de AGE ; le costé AG sera $\sqrt{3} + 1$, & le costé $GE \sqrt{3} - 1$: Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{75} + 5$, & la ligne $OM \sqrt{(\sqrt{75} + 5)}$; & GI étant $\sqrt{75} - 5$, MP sera $\sqrt{(\sqrt{75} - 5)}$. Mais EC étant $\sqrt{8}$, le rectangle ED double de $MT \sqrt{50}$, sera $\sqrt{200}$. Donc les quarrés LM , MN , seront ensemble $\sqrt{300}$, & les rectangles $SMT \sqrt{200}$; & par conséquent

Na ij

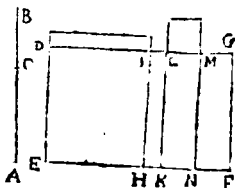
sons le quarré LN sera $\sqrt{300} + \sqrt{100}$; & par consequent son costé OP sera $\sqrt{(\sqrt{75} + 5) + \sqrt{(\sqrt{75} - 5)}}$ ou bien $\sqrt{(\sqrt{300} + \sqrt{100})}$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six.5.

Le quarré d'un binome, appliqué sur une ligne rationnelle, faict l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB , le plus grand nom duquel est AC ; & sur la rationnelle DE soit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF égal au quarré de AB : le dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la même DE soit construit le rectangle DH égal au quarré de AC : & sur HI un autre rectangle IK égal au quarré de CB : il est donc evident par la 4. prop. 2. que le reste LF est égal à deux fois le rectangle de AC, CB : & en diuisant LG également en M , & en menant MN parallèle à CD , chaque rectangle LN, MF sera égal au rectangle de AC, CB . Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationnelles commens. en puissance seulement; & leurs quarrés seront rationaux, & leurs égaux rectangles DH & IK aussi rationaux; & par la 21. propo. 10. les costés DI & IL seront rationnelles commensurables en longueur à la rationnelle DE , & entr'elles par la 12. proposit. 10. Et par la 16. proposit. 10. la route DL sera commensurable



en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle sera rationnelle & commens. en longitude à DE rationnelle : Et d'autant que par la 22. prop. 10. le rectangle de AC, CB est medial, son double LF sera aussi medial : & par la 22. prop. 10. Iceluy medial LF estant appliqué sur la rationnelle LK, l'autre costé LG sera aussi rationnel incommens. en longit. à icelle LK, c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles sont rationnelles : elles seront donc commens. en puissance seulement ; & par la 37. prop. 10. DG est binome. Je dis en outre que c'est binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarez d'icelles AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, Ik : & par conséquent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL sera egal au quarré de LM : Et d'autant que les quarez de AC, CB sont commens. (car icelles AC, CB sont posees commensurab. en puissance) leurs egaux DH, IK le seront aussi commens. Donc aussi commens. en longitude les lignes DI, IL par les 1. propo. 6. & 10. p. 10. Et d'autant que les deux quarez de AC & CB sont plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui suit la 44. prop. de ce liure : partant DK sera plus grand que LF ; & DL plus grand nom que LG : car icelles lignes sont entr'elles comme Dk à LF, par la 1. prop. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est egal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & de failant d'une figure quarree, & les parties DI, IL sont commens. en longitude : icelle DL peut plus que LG du quarré

d'une ligne qui luy est commun. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant esté demonstree commun. en long. à la rationelle DE, par les secondes def. DG sera binome premier. Donc le carré d'un binome appliqué sur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

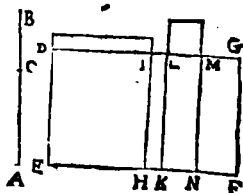
S C H O L I E.

Le binome AB soit $\sqrt{45} + 3$, & la rationelle DE 6. d'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{45}$, son carré est 45, lequel appliqué sur DE 6, fait l'autre costé DI de $7\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB estant 3, son carré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9. Or le rectangle de ACB est $\sqrt{405}$, & son double LF $\sqrt{1620}$. Donc la ligne FG sera $\sqrt{45}$: & par consequent la toute DG sera $9 + \sqrt{45}$, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le carré d'une bimediale premiere, appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC, (apres auoir construit comme en la precedente.) Je dis que DG est binome second.



Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38.

prop. 10. AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longueur à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarez sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommensur. en longueur à la rationelle DE : & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG sera binome. Je dis d'avantage qu'il est binome premier. Car il se prouvera comme en la precedente, que DL est plus grand nom, & qu'il pent plus que le moindre LG du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur. Nous auons aussi montré que LG plus petit nom, est commens. en longueur à la rationelle DE : & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'une bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La bimediale AB soit $\sqrt{180} + \sqrt{12}$, & la rationelle DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{108}$, son quarré est $\sqrt{108}$, lequel estant appliqué sur la rationelle DE 4, le costé DI sera $\sqrt{6\frac{3}{4}}$: Ainsi aussi le moindre nom estant $\sqrt{12}$, son quarré est $\sqrt{12}$; & par consequent IL, est $\sqrt{\frac{1}{4}}$, & la route DL $\sqrt{12}$. Or le rectangle de ACB est 6 : & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3.

Donc la somme DG sera $\sqrt{12+3}$, qui est binome seconde.

THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale seconde, appliqué sur une ligne rationnelle, fait l'autre costé binome troisieme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Après auoir construit comme en la 61. p.) Je dis que DG est binome troisieme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 40. AC, BC sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial; partant les quarrés d'icelles AC, CB seront commensurables & mediaux; & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. p. 10. le total DK est commensurable à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. proposit. 10. DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationnelle DE, par la 13. propo. 10. son autre costé DL, sera rationel incommensurable en longueur à icelle DE. De rechef puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi; & iceluy LF estant appliqué sur la rationnelle LK, son autre costé LG sera rationel incommensurable en longueur à LK: c'est à dire à DE. Donc l'une & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationnelle & incommensurable en longueur à la rationnelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il est euident par la 10. propo. 10. que le

quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurables en longueur.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrés de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrés de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommensurables en longueur par la 10. prop. 10. mais elles sont rationeles, & partant commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage, qu'il est binome troisieme. Car il a esté démontré que les deux noms sont incommensurables en longueur à la rationele DE: Et se prouvera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur: & par les secondes def. DG est binome troisieme. Donc le quarré d'une bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

AB soit $\sqrt{72} + \sqrt{8}$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, & LN ou MF $\sqrt{24}$, qui appliquez sur DE; DI sera $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, IL $\sqrt{\frac{1}{2}}$, & LM ou MG $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{8}$, & LG $\sqrt{6}$. Parquoy la toute DG est $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome troisieme.

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'une ligne maieur appliqué

sur vne ligne rationele, faict l'autre
costé binome quatriesme.

Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construit comme en la 61. p. de celiure) ie dis que DG est binome quatriesme.

Car puis que AB est ligne maieur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commensurable en longitude à icelle DE par la 21. prop. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommensurable en longitude à DE. Et partant par la 13. prop. 10. les rationeles DL & LG, seront incommensurables en longitude. Donc commens. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommensurables en puissance, leurs quarrez seront incommensurables: partant aussi leurs egaux rectangles DH, Ik, & les lignes DL, & IL incommensurables. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, lequel diuise icelle DL en parties incommensurables en longitude, par la 19. p. 10. DL, qui est commens.

en longitude à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome quatriesme. Donc le quarré d'une ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}} + \sqrt{10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}}$, & la rationele DE soit 5. Donc le rectangle DH sera $10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}$: LN ou MF, $\sqrt{62\frac{1}{2}}$, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, IL $2 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$, & LM ou MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. Parquoy DL sera 4, & LG $\sqrt{10}$; & par consequent la somme DG est $4 + \sqrt{10}$, qui est binome quatriesme.

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouuant vn rationel & vn medial appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisée en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (apres auoir construit comme à la 61. prop.) Je dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41. p. 10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial: Partant le rectangle Dk egal au composé d'iceux quarez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel

commensurable en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele com. en long. à icelle DE; & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulement, & par la 36. prop. 10. DG sera binome. Je dis de plus, qu'il est binome cinquiésme. Car LG est commensurable en longueur à la rationele DE, & si on prouvera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par les secondes definitions DG est binome cinquiésme. Donc le quarré d'une ligne pouvant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{125+5} + \sqrt{125-5}$, & la rationele DE 5. Donc le rectangle DH sera $\sqrt{125+5}$, IK $\sqrt{125-5}$, & LN, ou MF 10, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $\sqrt{5+1}$, LV $\sqrt{5-1}$, & LM ou MG 2. Parquoy DL sera $\sqrt{20}$, & LG 4, & par consequent la toute DG est $\sqrt{20+4}$, qui est binome cinquiésme.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouuât deux mediaux appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome sixiésme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (Après auoir construit comme aux precedentes) ie dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quatz aussi medial: ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommensurables; & par la 23. p. 10. iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommensurables, seront aussi entr'eux incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. Donc les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: & comme il a esté demonstté aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome sixiesme. Parquoy le quarré d'une ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

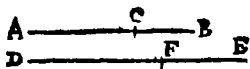
S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, & $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, IK $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & LN, ou MF $\sqrt{180}$, qui appliquez à DE,

le costé DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, $IL \sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou $MG \sqrt{5}$.
 Partant DL est $\sqrt{28}$, & $LG \sqrt{20}$; & par consequent la toute
 DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.
 La ligne commensurable en longueur
 au binome, est aussi binome de mes-
 me ordre.

Soit quelconque bino-
 me AB diuisée en ses
 noms au point C , des-
 quels AC est le plus



grand, & CB le moindre : & soit la ligne droite DE
 commensurable en longueur au binome AB . Je dis
 que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB .

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la
 toute AB est à la toute DE , ainsi la retranchée AC
 soit à la retranchée DF , par la 19. p. 5. le reste CB sera
 au reste FE , cōme la toute AB à la toute DE . Et pource
 AB , DE , sont commensurables en longueur par la
 10. prop. 10. AC , DF , & CB , FE , seront aussi com-
 mens. en longueur. Mais par la 37. p. 10. AC , CB ,
 sont rationeles. Donc aussi DF , FE sont rationeles.
 Et puis que comme AC à DF , ainsi CB à FE , en
 permutant comme AC sera à CB , ainsi DF à FE .
 Mais AC , CB sont rationeles commensurables en
 puissance seulement; donc aussi DF , FE seront ra-
 tioneles commensurables en puissance seulement.
 Et partant par la 37. prop. 10. DE est binome. Main-
 tenant je dis qu'il est aussi binome de mesme ordre
 que AB .

Car si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit communurable en longitude, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est communurable en longitude à la rationelle proposée, aussi sera DF par la 12. prop. 10. veu que l'une & l'autre est communurable en longitude à la mesme AC : Et partant AB, & DE seront binome premier : Si BC est communurable en longitude à la rationelle exposée, aussi sera FE : ainsi AB & DE seront binome second : si AC & BC sont incommensurables en longitude à la rationelle, aussi seront DF & FE : & par les def. AB & DE seront binome troisieme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, aussi par la 15. prop. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE seront binome ou quatriesme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre. Donc la ligne communurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne communurable en longitude à une bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

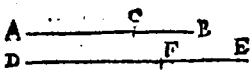
Soit quelconque bimediale AB, diuisée en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand, & CB le plus petit, & à icelle AB soit communurable en longitude la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres avoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, comme la route AB, à la route DE: & partant par la 10. p. 10. AC sera commensurable en longueur à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24. p. 10. DF, FE, commensurables à icelles, sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant comme AC à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont commensurables en puissance seulement, par la 38. prop. 10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10. prop. 10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38. ou 39. prop. 10. DE sera bimediale. D'avantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22. prop. 6. Le carré de AC sera au carré de DF, comme le rectangle de AC, BC est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez prop.) Mais le carré de AC est commensurable au carré de DF, ainsi par la 10. prop. 10. les rectangles seront aussi commensurables: que si l'un est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que si l'un des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39. prop. 10. Ainsi DE sera bimediale, & en mesme ordre que AB. Parquoy la ligne commensurable en longueur à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commensurable à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur.

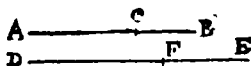
Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms A  B en C, & à icelle soit commensurable DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne maieur.

Car (apres auoir construit comme aux precedentes) AC sera à CB comme DF à FE, & AC commensurable à DF, & CB à FE : mais par la 41. proposi. 10. AC & CB sont incommensurables en puissance ; les lignes DF & FE le seront donc aussi. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont proport. par la 22. p. 6. leurs quarez seront proportionaux : & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, comme les deux DF & FE sont au seul de FE, & en permutant les deux quarez de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commensurables leurs quarez seront aussi commensurables, & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. prop. 10. commensurables aux deux de AC & BC : & seront rationaux comme iceux. Item on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DE & FE est commensurable au rectangle de AC & BC : lequel estant medial, par la 40. prop. 10. aussi sera celuy de DF & FE, par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE sera ligne maieure. Donc la ligne commens. à vne ligne maieure, est aussi maieure. Ce qu'il falloit demonstter.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, & vn medial, est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisée en ses noms en C, & à icelle



soit commensurable la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que-comme AC & BC sont incommensurables en puissance, aussi seront DF & FE. Item que le composé des quarez de AC & BC sera commensurable au composé des quarez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC aussi commensurable au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. p. 10. le composé des quarez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & par ainsi le toute DE sera ligne pouuant vn rationel, & vn medial, par la susdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne

pouuant deux mediaux, est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuisée en ses noms au point C, & à icelle soit commens. DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant deux mediaux.

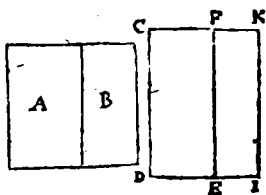
Car (apres auoir construit comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissance: que le composé de leurs quarez est medial, & leur rectagle aussi medial: mais on prouuera aussi comme en la 69. p. que le composé des quarez de AC & BC, est au composé des quarez de DF & FE, comme le carré de CB au carré de FE: & encore comme en la 68. p. que le carré de CB est au carré de EF comme le rectangle de AC & BC, est au rectangle de DF & FE: donc par la 11. p. 5. le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le composé des quarez de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarez de DF & FE est incommens. à leur rectangle, & par la 42. p. 10. DE est ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commens. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 54. PROP. LXXII. six. 7.

Si vne superficie rationele, & vne mediale sôt iointes; la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimedia-

le premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuât vn rationel, & vn medial.

Soient ioinctes deux superficies A rationale, & B mediale : ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bi-mediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouvant vn rationel & vn medial.



Car premierement les deux superficies ne scauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B : Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A : & sur EF vn autre rectangle FI egal à B, à fin que tout le rectangle CI soit egal aux deux superficies proposées A & B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele commensurable en longueur à icelle CD par la 21. p. 10. & aussi FK rationele, mais incommensurable en longueur à la mesme CD par la 23. prop. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK seront incommensurables en longueur; donc commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. CK sera binome diuisé en ses noms en F. Mais puis que A a esté posée plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI; & partant CF sera plus grande que FK par la 1. p. 6. Parquoy CF sera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'une ligne

qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude. Si commens. (estant CF commens. en longitude à la rationelle CD) CK sera binome premier par la 1. des secondes def. Et par la 58. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CK sera binome quatriesme, par la 4. des secondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne maieure.

Que si la figure A estoit plus petite que B, aussi le rectangle CE seroit plus petit que le rectangle FI; & CF seroit le plus petit nom commens. à la rationelle CD: & par ce moyen CK sera binome second, ou cinquieme: si binome second, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale premiere. Si binome cinquieme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouvant vn rationnel & vn medial. Si donc vne superficie rationelle, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

SCHOLIE.

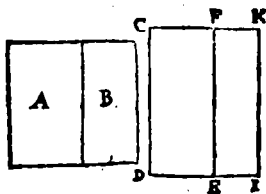
Si la superficie rationelle A est 7, & la mediale BV 48, la ligne pouvant icelles adioustées ensemble sera $2 + \sqrt{3}$, qui est binome premier: si A & B sont 21 & V 432, la ligne pouvant icelles sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second: mais elle sera $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome troisieme, si A est 14 & B V 192: mais si A est 6, & BV 32, elle sera $2 + \sqrt{2}$, qui est binome quatriesme: si A est 3 & BV 8, elle sera $\sqrt{2} + 1$ qui est binome cinquieme: & si A est 5, & BV 24, la ligne pouvant la composée d'icelles sera $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ qui est binome 6: mais si A est 4 & BV 18, la ligne pouvant la superficie composée d'icelles sera $\sqrt{8} + \sqrt{2}$, qui est mediale premiere: mais si A est 6, & BV 12, la ligne pouvant la composée d'icelles sera $\sqrt{(6+12)}$ ou $\sqrt{(3+\sqrt{6})} + \sqrt{(3-\sqrt{6})}$: & finalement si A est 2, & BV 8, la ligne pouvant icelles sera

$\sqrt{\gamma^2+2}$, ou $\sqrt{\gamma^2+1} + \sqrt{\gamma^2-1}$, qui est ligne pouvant un rationel & un medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont jointes, la ligne qui peut tout le composé est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.

Soient jointes ensemble deux superficies mediales incommens. A & B : Je dis que la ligne droite qui peut le composé d'icelles superficies A & B est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.



Ayant fait sur la rationelle CD pareille construction qu'en la precedente p. les rectangles CE & FI seront mediaux & incommens. Et par la 23. p. 10. CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationelle CD : & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom : Car CF & FK ne scauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longueur : Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur. Si commens. CK est binome troisieme par la 3. d. secondes, (estant les deux noms CF, FK incommens. en longueur à la

rationele CD) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale seconde : Si incommens. par la 6. des secondes def. CK sera binome sixiesme : & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy si deux superficies mediales incommens. sont ioinctes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Si A est $\sqrt{50}$, & B $\sqrt{48}$: la ligne pouuant la composée d'icelles sera $\sqrt{50} + \sqrt{48}$, qui est bimediale seconde : mais si A est $\sqrt{12}$, & B $\sqrt{8}$, ladite ligne pouuant icelles sera $\sqrt{12} + \sqrt{8}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{3}+1)} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)}$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

C O R O L A I R E.

De toutes ces choses on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui suruent icelle sont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'une ligne mediale, appliqué sur une ligne irrationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à la rationele à laquelle il est appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre costé binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'une bimediale premiere, fait l'autre costé binome second, par la 62. p. 10.

Le quarré d'une bimediale seconde, fait l'autre costé binome troisieme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatrieme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouuant un rationel & un mediale fait l'autre costé binome cinquiesme, par la 65. p. 10.

Le carré d'une ligne pouuant deux medians, fait l'autre costé binome sixiesme, par la 66. p. 10.

Mais il faut toujours entendre qu'ils soient appliquez sur une ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationeles sont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES
sixaines des lignes irrationeles par le
retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'une ligne rationele, est retranchée
une ligne rationele commensurable
en puissance seulement à la toute ; le
reste est irrationel : & soit appelé
Residu.

Soit retranchée de la
rationele AB la ratio-
nele AC, en sorte que



AB & AC, soient rationeles commensurables en
puissance seulement : le dis que le reste CB est irra-
tionel.

Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le quar-
ré de AB est au rectangle de AB & AC : mais AB est
incommensurable en longueur à AC. Donc par la
10. p. 10. Le carré de AB est incommens. au rectan-
gle de AB & BC : Partant aussi à son double : mais

les quarez de AB & AC, sont posez commensur. Donc par la 16. prop. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que le quarré de AB est incommensurable au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarez de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels avec le quarré de CB, estans egaux aux deux quarez de AB & AC par la 7. prop. 2. il s'ensuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB, & AC seront incommensurable à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17. prop. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarez de AB & AC) seront incommens. au quarré de CB: Mais iceux quarez de AB, AC, estans rationaux; (car ils sont descrits sur lignes rationelles) le quarré de CB sera irrationel: Partant la ligne CB sera aussi irrationelle appelée Residu. Si donc d'une ligne rationelle est retranché une ligne rationelle commensurable en puissance seulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonst. er.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 2, & AC $\sqrt{3}$; Donc le reste BC sera $2 - \sqrt{3}$. Or en ceste prop. & és 5. suivantes, on Enclide monstre l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si aux lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est irrationel appelé residu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, est retranchée

une mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec la toute un rectangle rationel, le reste est irrationel: Soit appelé residu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle est retranchée la



mediale AB, en sorte que AB & AC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel: Je dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarrés seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel, un seul rectangle ayant esté posé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, avec le quarré de BC sont égaux aux quarrés de AB & AC: donc aussi deux fois le rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC seront incommensur. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. prop. 10. le quarré de BC sera incommensur. au double du rectangle AB & AC, mais iceluy double est rationel: donc le quarré de BC sera irrationel; & partant la ligne BC aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial premier.

SCHOLIE.

La mediale AC soit $\sqrt{54}$, & la retranchée AB $\sqrt{24}$: donc le reste BC sera $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale est retranchée
une ligne mediale commens. en puis-
sance seulement à la toute, compre-
nant avec icelle un rectangle medial,
le reste est irrationnel : Soit appelé re-
sidu medial second.

Soit la mediale AB , de
laquelle est retranchée la me-
diale AC , en sorte que AB
& AC soient commens. en puissance seulement,
comprenant un rectangle medial : Je dis que le reste
 CB est irrationnel.



Car puis que les quarez de AB & AC sont com-
mensurab. par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera
aussi commensur. à un chacun d'eux : & chacun d'i-
ceux étant medial, (pource que les lignes AB , AC
sont posées mediales) aussi le composé d'iceux quar-
rez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme
aussi le double du rectangle de AB , AC puis que le
seul rectangle de AB , AC est posé medial. Veu donc
que par la 7. prop. 2. le composé des quarez de AB ,
 AC , est égal au double du rectangle de AB , AC ,
avec le carré de CB : le composé des quarez de
 AB , AC , qui est medial, excèdera le double du re-
ctangle de AB , AC , qui est aussi medial, du carré de
 CB . Mais par la 27. p. 10. un medial n'excède pas un
medial, d'un rationnel : donc le carré de CB n'est pas

rationnel; & partant il est irrationnel; & la ligne BC sera aussi irrationnelle, qu'on appellera residu medial second. Parquoy si d'une ligne mediale on retranche vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouver.

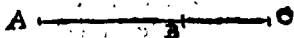
S C H O L I E :

La mediale AB soit $\gamma\gamma 18$, & AC $\gamma\gamma 8$: dont le reste CB sera $\gamma\gamma 18 - \gamma\gamma 8$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droicte est retranchée vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenāt avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, le reste sera irrationnel: Soit appellé ligne mineure.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est re-



tranchée AB incommens. en puissance à la toute AC, comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez est rationel: Je dis que le reste BC est irrationnel.

Car puisque le composé des quarez de AB, & AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le composé

des quarréz de AB, AC est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le composé d'iceux quarréz de AB, AC sera aussi incommens. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy composé est posé rationel, par la 10. def. le quarré de BC est irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy si d'une ligne droicte est retranchée une ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Soit la ligne AC $\sqrt{18+\sqrt{108}}$, & AB $\sqrt{18-\sqrt{108}}$; le reste BC sera donc $\sqrt{18+\sqrt{108}} - \sqrt{18-\sqrt{108}}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droicte est retranchée une ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel, & le composé de leurs quarréz medial, le reste sera irrationel: Soit appelé ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchée AB incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel, & le composé de leurs quarréz est medial: le dis que le reste BC est irrationel.

A ————— B ————— C

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationnel, aussi sera son double, & partant par la 10. def. il sera incommensurable au composé des quarez de AC & AB, lequel est medial, c'est à dire irrationnel. Mais le composé d'iceux quarez par la 7. prop. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC: Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle est rationnel, par la 10. definit. le quarré de BC sera rationnel, & la ligne BC irrationele, appelée ligne faisant avec vne superficie rationelle, vn tout medial, ainsi nommée à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté avec vne superficie rationelle fait vn tout medial, comme il apparoiſtra à la 109. prop. 10. Parquoy si d'une ligne droicte est retranchée, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

Si AC est $\sqrt{\gamma 216 + \gamma 72}$, & AB $\sqrt{\gamma 216 - \gamma 72}$; le reste BC sera $\sqrt{\gamma 216 + \gamma 72} - \sqrt{\gamma 216 - \gamma 72}$.

THEOR. 61. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droicte, est retrachée vne ligne droicte incommensurable en puissance à la route, comprenant avec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs

quarrez aussi medial, le reste est irrationnel: soit appellé ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droicte

AB, de laquelle est retraché la ligne AC incommensurable en puissance à la route, comprenant avec icelle vn rectangle medial incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial: le dis que le rectangle BC est irrationnel.

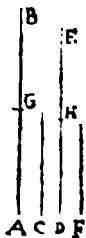
Car puis que par la 7. proposit. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, avec le carré de BC: iceluy composé des quarrez excedera le double du rectangle du carré de BC. Mais par la 27. proposit. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'un rationnel: Donc le carré de BC n'est pas rationnel; & partant est irrationnel, & la ligne BC aussi irrationnelle, qu'on appellera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial: ainsi appelée parce que le carré d'icelle avec vne superficie mediale fait vn tout medial. Parquoy si d'une ligne droicte est retranchée vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{1(80 + \sqrt{60})}$, & AC $\sqrt{180 - \sqrt{60}}$, le reste CB sera $\sqrt{2180 + \sqrt{60}} - \sqrt{180 - \sqrt{60}}$.

L E M M E.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F , & que GB excetz d'entre AB & C soit egal à DH excetz d'entre DE & F ; aussi en permutant l'excetz d'entre AB & DE sera egal à l'excetz d'entre C & F . Car puis que GB est l'excetz d'entre AB & C , AG sera egal à C : En la mesme maniere DH sera egal à F . Donc l'excetz d'entre AG & DH sera egal à l'excetz d'entre C & F , puis que ces grandeurs cy sont egales à celles-là, chacune à la sienne, & partant adionstant à AG & DH choses egales GB & HF , l'excetz d'entre les toutes AB , & DE sera tousiours egal à l'excetz d'entre C & F . Ce qui estoit proposé.



C O R O L L A I R E.

De ces choses appert que quatre grandeurs ayans proportion Arithmetique, en permutant elles seront aussi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'une seule ligne rationelle commens. en puissance seulement à la toute.

Soit le residu AB , auquel BC conuienne, en sorte que AB & BC soient rationelles commens. en puissance seulement: Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car

Car s'il est possible, en soit vne autre BD, s'accordant avec icelle AB, en sorte que AD, & BD soient rationeles commensurables en puissance seulement. Maintenant par la 7. prop. 2. les deux quarrés de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrés de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en permutant par le lemme precedent, les quarrés excéderont autant les quarrés, que les rectangles excèdent les rectangles: & d'autant que les quarrés sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. prop. 10. vn seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. prop. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationelle commensurable en puissance seulement à la toute. Parquoy au residu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AB, auquel la me

P P

diale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne que BC en la mesme sorte.

A B C D

Car si faire se peut en soit vne autre BD. Maintenant par la 7. proposit. 2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarez de AC, BC, & le composé des quarez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarez qui sont mediaux (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc à AB n'a peu conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit commens. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au résidu medial second, ne peut estre conioincte qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant avec icelle vn rectangle

Maintenant les quarréz de AC & BC sont mediaux (estans faicts de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial : partant leurs egaux rectangles EO, & KG serót mediaux : lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH, & KH rationaux comm. en puiss. seulement à EF par la 23. p. 10. en apres le quarré de AC estant au rectangle de AC, & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incomm. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incomm. au rectangle de AC & BC : & partát aussi à son double KG. Item le quarré de BC est cōmens. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG égal à iceux quarréz, sera incommensur. au seul quarré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG, & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. lesquelles estans rationeles seront incōmens. en puissance seu-

lement : & par la 74. prop. 10. EK sera residu, & KH
 fa conuenable. Par mesme discours (si on maintient
 que DC soit aussi adiointe à AB, selon le requis) EK
 se trouuera residu , & KM fa conuenable : ce qui se-
 roit contre la 80. prop. 10. Donc au residu medial AB
 ne peut s'adioudre autre conuenable que BC. Ce
 qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne
 seule ligne incommens. en puissance
 à la toute, comprenant avec icelle vn
 rectangle medial, & le composé de
 leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB,
 à laquelle conuienne BC in-
 commensur. en puissance à
 la route AC, & faisant le composé de leurs quarrez
 rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC,
 medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut estre adiointe
 autre ligne que BC qui fasse le mesme.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre
 BD, qui soit pareillement incommensurable en
 puissance à la route AD, & faisant le composé des
 quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle com-
 pris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouuera
 comme en la 80. proposit. 10. qu'il y a mesme ex-
 cez entre le composé des quarrez de AC, BC, &
 le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux

A B C D

fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarez est rationel par le lemme qui suit la 42. propos. 10. pource que l'un & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. propos. 10. Car iceux rectangles estans mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adiouster autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIII.

À la ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarez medial.

Soit la ligne faisant $A \text{---} B \text{---} C \text{---} D$ avec vne superficie rationelle vn tout medial AB, à laquelle s'accorde la ligne BC, incommensurable en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarez medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui fasse la mesme chose.

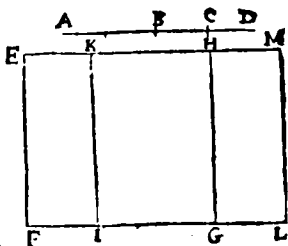
Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarez

de AC, & BC, excèdent les quarez de AB & BD d'un meſme excez, que deux fois le reſtangle de AC & BC, excèdent deux fois le reſtangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente ſeroit rationel & irrationel, ſi à la ligne AB, on pouuoit enjoincre BD incommenſurable en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

À la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial, ſe conioinct vne ſeule ligne incommenſurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn reſtangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarez auſſi medial.

Soit la ligne faiſant avec vne ſuperficie mediale vn tout medial AB, à laquelle s'accorde BC incommenſur. en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn reſtangle medial incommenſurable au compoſé de leurs quarez, qui eſt auſſi medial. Je diſ qu'à icelle AB ne peut s'ad-



joindre autre ligne que BC, qui fasse le proposé.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD. Puis soit fait mesme construction qu'en la 82. propos. 10. Donc le composé des quarréz de AC & BC estant medial & incommensurable à deux fois le rectangle de AC & BC aussi medial, leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux, & incommensurables : Et par la 23. prop. 10. estans appliquez sur la rationnelle EF leurs autres costez EH, & KH seront lignes rationeles, & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. commensurables en puissance seulement ; (puis que leurs rectangles sont incommensurables) & par la 74. prop. 10. EK sera residu auquel KM sera conuenablement adioustee. Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi conuenable à AB & fasse ce qui est proposé.) EK se trouuera residu, & KM se conuenable : ainsi le residu Ek n'auroit pas vne seule conuenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouuoit donc pas adjoindre à AB, autre ligne conuenable que BC, incommensurable en puissance à la toute AC, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

DEFINITIONS TROISIEMES.

Estant proposee vne ligne rationele, & vn residu : Lors que la toute composee du residu, & de sa conuenable ou adioustee, peut plus que la conuenable, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si la toute est commensurable à la rationnelle proposee, le residu soit appellé residu premier.

2. Mais si l'adioustee est commensurable à la rationelle exposée, Soit residu second.

3. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle proposée, Soit residu troisieme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adioustee, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

4. Si la toute est commensurable à la rationelle proposée, Soit residu quatrieme.

5. Mais si l'adioustee est commensurable à la rationelle, Soit residu cinquiesme.

6. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle, Soit residu sixiesme.

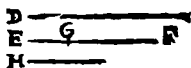
PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn residu premier.

Estans trouuez deux nombres quarez AB, CB, (comme nous auons enseigné au second scholie de la 29. proposi. de ce liure, desquels l'excez AC ne soit quarré, soit exposée la rationnelle D, à la-

quelle EF soit commensurable en longitude ; & partant icelle EF sera aussi rationele : puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit fait que comme le

A....C....B



nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de GF. Je dis que EG est residu premier.

Car puis que les quarez de EF, GF, qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables par la 10. pr. aussi les lignes EF, GF seront commens. au moins en puissance : & EF étant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que AB, AC ne sont entre-eux comme nombres quarez : aussi les quarez de EF, GF ne seront entr'eux comme nombres quarez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF sont incommensurables en longitude : elles sont donc rationeles commensurables en puissance seulement, & partant le reste EG sera residu par la 74. prop. 10.

Je dis d'avantage qu'il est residu premier : car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, soit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuersion de raison comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarez : Donc les quarez de EF & H sont comme nombres quarez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, & H sont commensurables en longitude. Ainsi la toute EF commensurable en longitude à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy est commensurable en longitude : & partant par la 1. des troisiemes def. EG sera residu

premier. Nous auons donc trouué vn residu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationnelle D soit 9, EF 6 : AB 9, CB 4, & par consequent AC est 5 : faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF , c'est à dire 36, soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partans le reste EG sera 6— $\sqrt{20}$, qui est residu premier.

Or il appert par les def. preced. que Apotome ou residu n'est autre chose que ce qui restera si de deux nombres possez rationaux commensurables en puissance seulement on soustrait le moindre du plus grand ; ce qui se fait par l'interposition du signe— : & par ainsi il n'y a aucune difference entre le binome & le residu, sinon qu'en celuy-là les deux noms sont joints par le signe +, & en cestuy-cy, l'un est soustrait de l'autre par le signe—. Parquoy pour promptement trouuer vn residu de quelque espee que ce soit, il n'y a qu'à trouuer le binome de mesme espee, ainsi qu'il a esté dit cy deuant, puis au lieu du signe + apposer le signe—. Comme au scholie de la 49. prop. nous auons trouué ce binome premier $8 + \sqrt{48}$; mais en changeant seulement le signe nous auons $8 - \sqrt{48}$, pour residu premier : & ainsi des autres.

PROBL. 20. PRO P. LXXXVII.

Trouuer vn residu deuxiesme.

Estans trouuées deux nombres quarez AB , CB . (comme en la precedente proposition & l'exopsée rationelle D , soit prise GF commensu-

$A....C....B$

D —————
 E — G ————— F
 H —————

en longitude à icelle D , laquelle sera aussi rationelle :

puis soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. prop. 10. Je dis que EG est residu second.

Car puis que les quarez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF seront aussi commensurables au moins en puissance : & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarez de GF, EF, ne sont entr'eux comme nombres quarez, par la 9. prop. 10. GF, EF, seront incommensurables en longueur: donc les rationeles GF, EF, sont commensurable en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste EG est residu.

Je dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF: en changeant cōme AB sera à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF. Maintenant nous demōstrerons cōme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longueur à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adioustée GF, du quarré de H, qui luy est commensurable en longueur, comme aussi à la rationele proposée D : par les troisiemes def. EG sera residu second. Nous auons donc trouué vn residu second, ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La ratiōnelle D soit 9, FG 5. AB 9, CB 4. & par consequent AC 5 : faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF : icelle EF sera $\sqrt{45}$: & partant EG sera $\sqrt{45} - 5$, qui est residu second.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu troisieme.

Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la p. 86. soit pris vn autre nombre I, (comme nous auons en-

A.....C....B

I.....

D _____
E _____ F _____ C
H _____

seigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, cōme nombre carré à nombre carré : puis estant exposée la rationele D, soit fait que cōme I est à AB, le carré de D soit au carré de EG, lesquels quarrez par la 6. p. 10. seront commensurables : & partant les lignes D & EG, aussi commensurables au moins en puissance. Donc D estant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommensurables en longueur. De rechef soit fait que comme AB est à AC, ainsi le carré de EG soit au carré de GF. Je dis que EF est residu troisieme.

Car puis que les quarrez de EG, GF, estans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront aussi commensurables au moins en puissance. Mais EG estant rationele, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarrez de EG, GF, ne sont comme nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF, seront incommensurables en longueur. Donc

EG, FG sont rationeles commensurables en puissance seulemēt : & partant puis que de EG est ostée GF commensurable en puissance à icelle, par la 74. p. 10. le reste EF sera residu.

Je dis qu'il est aussi residu troisieme: Car puis que comme I est à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EG, & comme AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF, en raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne sont comme nombres quarez, ny par consequent aussi les quarez de D & GF: parquoy par la 9. p. 10. les lignes D & GF sont incommensurables en longitude. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF est incommensurable en longitude à la rationele proposée D. Et comme en la 86. prop. on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy est commensurable en longitude: Et par les tierces def. EF sera le residu troisiem. qu'il falloit trouver.

S C H O L I E.

La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre I 6, est à AB 9, ainsi le quarré de D, sçavoir 36, soit au quarré de EF, & iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF √ 54: Mais faisant que comme AB 9, est à AC 5, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG, icelle FG sera √ 30, & par consequent EG sera √ 54—√ 30, qui est residu troisieme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn residu quatrieme.

Estant trouvez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. proposition 10. & comme il apert en la fig. de la 87. propo. fol. 602.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré : soit proposée la rationelle D, à laquelle soit commenturable en longitude EF, laquelle sera par consequent aussi rationelle. Que si on acheue de construire comme en la 86. proposition, on demonstrera comme làque EG est residu : & d'auantage, ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré : donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H seront incommensurables en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adioustée GF, du quarré de H, qui luy est incommensurable en longitude, & la mesme EF est commenturable en longitude à la rationelle D : partant par la def. EG sera residu quatriesme. Nous auons donc trouué vn Apotome ou residu quatriesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationelle D soit 9, EF 6, faisant donc que comme AB y est à AC 6, ainsi 36 quarré de EF soit au quarré de FG, icelle sera $\sqrt{24}$, & par consequent le reste EG sera $6 - \sqrt{24}$ qui est residu quatriesme.

PROBL. 23. PROP. XC.
Trouuer vn residu cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. precedente, soit fait mesme construction qu'en la 87. prop. puis soit demonsté comme en icelle 87. prop. que EG est residu. Je dis qu'il est aussi residu 5. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86. proposition, nous demonstrerons par conuersion de raison que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H seront incommensurables en longitude: & la conuenable GF commensurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les def. troisiemes EG sera residu cinquiesme. Nous auons donc trouué vn residu cinquiesme. Ce qu'il falloit faire

S C H O L I E.

La rationele D soit 9, FG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy, sera 54, & par consequent la ligne EF $\sqrt{54}$; & le reste EG, $\sqrt{54}-6$, qui est residu cinquiesme.

PROB. 24. PROP. XCI.
Trouuer vn residu sixiesme.

Estans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. & exposé la rationele D, soit

acheuée la cō-
structiō com-
me en la 88. p.

Nous demon-
strerons com-
me là, que D
& E G sont in-

A.....C.....B

L.....

D _____
E _____ F _____ G
H _____

commensurables en longitude, & que EF est residu: puis que D & FG seront aussi incommensurables en longitude, & partant l'une & l'autre d'icelles EG, FG est incommensurable en longitude à la rationele proposée D. Maintenant EG peut plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous démonstrerons comme en la 89. prop. estre incommensurable en longitude à icelle EG. Parquoy par la dernière des 3. def. EF sera residu sixiesme. Nous auons donc trouué vn residu sixiesme. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9; & soit fait que comme l 9 est à AB 12, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle sera $\sqrt{108}$; & faisant que comme AB est à AC 7, ainsi 108 soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{63}$, & par consequent le reste EG sera $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, qui est residu sixiesme.

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les six residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouuer pour exemple le residu premier: soit trouué par la 49. p 10. le binome premier AD duquel le plus grād nom est AC, & le moindre CD; puis soit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Je dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rati-
onels

neles commensurables en puissance seulement ; aussi AC , BC seront rationeles commensurables en puissance seulement : Donc par la 74. p. 10. AB est residu. Et pource que AC peut plus que CD , ou CB du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, & AC est commensurable en longueur à la rationele proposée par la def. du binome premier, AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la mesme maniere seront trouvez tous les autres residus, sçavoir noir est le 2. si du second binome nous osons le moindre nom du plus grand, &c,

Ainsi ayant trouué le binome premier $AD\ 9 + \sqrt{45}$, si du plus grand nom $AC\ 9$, on ôste le moindre nom, restera le residu AB de $9 - \sqrt{45}$. & ainsi des autres.

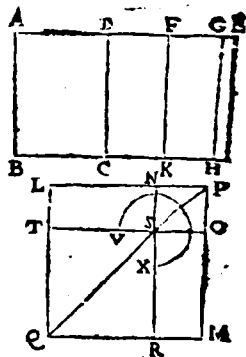
THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB , & du residu premier AD : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AD soit la convenable DE , laquelle soit couppee en deux également au point F , & apres avoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé, & egal au quart du quarré de DE , qui est le quarré de FE , soit iceluy rectangle compris sous AG, GE : en apres soient menées les lignes Fk, GH, EI paralleles à AB , qui rencontrent la ligne BC prolongée en k, H & I , puis soit fait le

quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LPM commun. Donc les quarréz LM, NO, par la 26. p. 6. seront au long d'un mesme diametre, lequel soit PQ : soient continuées les lignes NS, OS, à fin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant FE est moyenne pr. entre AG & GE, par la



17. p. 6. car par l'hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p. 6. le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE; il le sera aussi entre leurs egaux quarréz LM & NO. Mais par le lemme de la 34. p. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarréz: Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO. Et par consequent KG à LS, (estant HE egal à NO) Iceluy GK sera aussi egal à SM: ainsi le rectangle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera egal au quarré TR. Maintenant ie dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC est residu.

Car puisque AD est residu premier, & DE sa conuenable: les deux lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustée DE, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude: Et par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longit. & par la 16. p. 10. ils seront commens. en longit. à la totale AE, laquelle

estant commensurable en longit. à la rationele AB, par la 12. pr. 10. AE, AG, GE, AB seront toutes rationeles commens. en longitude : & par la 20. p. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & par consequent leurs egaux quarréz LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

Pareillement les deux lignes DF & FE estans egales, & commens. elles le seront aussi à leur toute DE, par la 16. p. 10. laquelle DE estant rationele, DF, & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement à AB, comme leur toute DE; & par la 22. p. 10. leurs rectangles CF & kE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial kE, partant aussi medial, & incommens. au quarré rationel NO. Et par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs cossez TO & SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. TS est residu. Si donc vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu premier, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 8, & AD 9 — $\sqrt{45}$: DE est donc $\sqrt{45}$, & sa moitié DF $\sqrt{11\frac{1}{2}}$: mais AG sera $7\frac{1}{2}$, & GE $1\frac{1}{2}$. Donc le rectangle BE est 72, AH 60, HE 12, CF $\sqrt{720}$, & AC 72 — $\sqrt{2880}$, & le rectangle de AG, GE est $11\frac{1}{2}$. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12 : & partant la ligne LP est $\sqrt{60}$, & NP $\sqrt{12}$: & par consequent LN, ou TS sera $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, qui est residu ; & son quarré TR est $72 - \sqrt{2880}$, egal au rectangle AC.

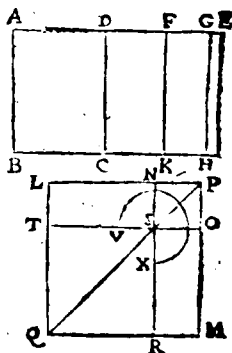
Qq ij

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu second AD. Je dis (après avoir construit comme en la precedente, & démontré comme là que le rectangle AC est egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE la conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant commensurable en longitude à la rationelle AB; & AB peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 18. prop. 10. le rectangle desillant aura les deux costez AG & GE commensurables en longitude, & par la 16. prop. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. pro. 10. icelle totale estant commensurable en longitude à la rationelle AB, aussi seront AG, & GE qui sont rationelles (car elles sont commensurables à leur totale qui est rationelle) commensurables en puissance seulement à la rationelle AB, & par la 22.



p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux; partant mediaux leurs egaux quarez LM & NO , & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant commensurable en longueur à la rationele AB , aussi sera sa moitié FE , & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle LO , compris des deux mediales TO & SO , lesquelles sont incommensurables en longueur: (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. prop. 10.) & par la 75. prop. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, $AD\sqrt{45}-5$: DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG , GE , icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE , ou quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{20}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & $AG\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH , ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{500}$: de laquelle estant ostée SO , restera $TS\sqrt{500}-\sqrt{20}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est autant: car multipliant AB 4 par $AD\sqrt{45}-5$, viendra aussi $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Donc ST residu medial premier pent le rectangle AC .

THEOR. 70. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu troisieme, la ligne pouuant iceluy rectangle,

est residu medial second.

Soit le rectangle AC , compris de la rationele AB , & du residu troisieme AD : (apres avoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC ,) comme nous auons demonsté en la susdite p.) est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB : mais AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longit. & par la 18. p. 10. AG & GE seront commens. en longueur, & à leur totale AE par la 16. p. 10. Et seront rationeles comme icelle: mais AE est commens. en puissance seulement à la rationele AB , & par la 14. p. 10. AG & GE seront commens. en puissance seulement à AB : Et par la 22. p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux: donc aussi mediaux leurs egaux quarrés LM & NO , & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant incommens. en longueur à la rationele AB , aussi sera sa moitié FE , par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF estant rationele comme la double DE , le rectangle KE sera medial, partant aussi medial son egal LO , compris des deux mediales commensurables en puissance seulement TO & SO : (car leurs quarrés sont commensurables) estans leurs egaux rectangles commensurables, & ne scauroient estre commensurables en longueur, car il faudroit par la 1. p. 6. & 10. p. 10. que LO & NO fussent aussi commensurables, & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE , (ce qui n'est pas,) & par la 76. p. 10. TS est residu medial second. Si donc

vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c.
Ce qu'il falloit demonſtrer

S C H O L I E.

La rationelle AB ſoit 4, & $AD \sqrt{54} - \sqrt{30}$; donc DE eſt $\sqrt{30}$: & ſa moitié $DF \sqrt{7\frac{1}{2}}$ ſon quarré $7\frac{1}{2}$, lequel eſtant appliqué ſur la ligne $AE \sqrt{54}$, & deſaillant d'une figure quarrée, les coſtez du rect. appliqué, ſçavoir AG , GE , ſeront $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, & $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC ſera $\sqrt{864} - \sqrt{480}$, $BE \sqrt{864}$, $CE \sqrt{480}$, $AH \sqrt{600}$, $DK \sqrt{120}$, & $HE \sqrt{24}$. Mais le quarré LM eſtant égal à AH , il ſera auſſi $\sqrt{600}$, NO égal à $HE \sqrt{24}$: & partant les coſtez d'iceux quarréz, ſçavoir TO , SO ſont $\sqrt{\sqrt{600}}$, $\sqrt{\sqrt{24}}$: & par conſequens TS eſt $\sqrt{\sqrt{600} - \sqrt{\sqrt{24}}}$, & ſon quarré $TR \sqrt{864} - \sqrt{480}$, égal au rectangle AC .

THEOR. 71. PROP. xcv.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un reſidu quatrieſme, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt ligne mineure.

Soit le rectangle AC cõpris de la rationelle AB , & du reſidu quatrieſme AD (apresauoir cõſtruit comme en la 92. prop. 10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC .) Je diſ qu'icelle ligne TS eſt ligne mineure.

Car puis que AD eſt reſidu quatrieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationelles cõmens. en puiffance ſeulement, & AE qui eſt cõmens.

Qq iiij

en longitude à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude : & par la 19. prop. 10. AG & GE seront incommensurables en longitude : partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommens. aussi seront donc leurs egaux quarréz LM & NO : partant les lignes TO & SO seront incommensurables en puissance : Mais AE estant communurable en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle AI sera rationel. partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarréz LM & NO.

Parcillement DE estant communurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. prop. 10. aussi sera sa moitié KE : & par consequent son egal LM sera aussi medial : partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarréz estant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 6, AD 9— $\sqrt{54}$; donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarré $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & d'ffallars d'une figure quarrée, les costez AG, GE serot $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}}$, & $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{4}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54 - \sqrt{1944}$, BE 4, AH $27 + \sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $27 - \sqrt{243}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, sera aussi $27 + \sqrt{243}$, & NO egal à HE $27 - \sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{27 + \sqrt{243}}$, & $\sqrt{27 - \sqrt{243}}$: & par consequent TS est $\sqrt{27 + \sqrt{243}} - \sqrt{27 - \sqrt{243}}$, & son quarré TR $54 - \sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. xcvi.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu cinquieme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu cinquieme AD: (apres avoir construit comme en la 92. pro. 10. & demonstre comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Je dis que icelle TS est ligne faisant avec vne superficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD est residu cinquieme, & DE sa conuenable, les lignes AE, & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, & DE est commensur. en longueur à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par la 19. propo. 10. les lignes AG & GE sont incommens. en longueur: & comme en la precedente TO & SO seront incommens. en puissance. Mais AE estant, incommensurable en longueur à la rationelle AB, le rectangle AI sera medial par la 22. propos. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrés LM, & NO.

Pareillement DE estant commens. en longueur à la rationelle AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommensur. en puissance

TO & SO, desquelles le composé de leurs quarréz faict vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS sera ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial. Parquoy si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, $AD \sqrt{54} - 6$: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarré 9, auquel estant egal le rectangle de AGE: AG sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$, & GE $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC sera $\sqrt{864} - 24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216} - \sqrt{72}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, NO $\sqrt{216} - \sqrt{72}$, & leurs costez TO, SO, $\sqrt{\sqrt{216} + 72}$, & $\sqrt{\sqrt{216} - 72}$, & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{216} + 72} - \sqrt{\sqrt{216} - 72}$, & son quarré TR sera $\sqrt{864} - 24$.

THEOR. 73. PROP. xcviij.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu sixiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu sixiesme AD (apres avoir construit comme en la 92. prop. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, comme il a esté demonstrier en la susdite prop.) est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD est residu fixiesme, & DE sa convenable, AE & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement entr'elles, & à la rationelle AB; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: Et par la 19. prop. 10. AG & GE seront incommensurables en longueur: Et comme en la 95. prop. 10. TO & SO seront incommensurables en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AI estant medial, le composé de leurs egaux quarrés LM & NO, sera aussi medial: Item DE estant commensurable en puissance seulement à AB rationelle, par la 22. propo. 10. le rectangle CE sera medial: aussi sera donc sa moitié KE, & son egal LO. Et AE, DE estans incommensurables en longueur, par la 1. prop. 6. & 10. propo. 10. les rectangles AI, CE, seront incommensurables. & puis que CE est commensurable à sa moitié KE, par la 14. prop. 10. KE sera incommensurable à AI: Et partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incommensurables en puissance, est incommensurable au composé des quarrés d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reste TS sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

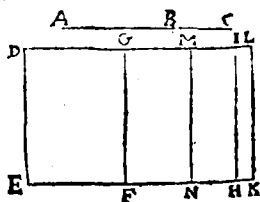
La rationelle AB soit 6, AD $\sqrt{108}$ — $\sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié DE $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{27}$ — $\sqrt{11\frac{3}{4}}$, GE $\sqrt{27}$ — $\sqrt{11\frac{3}{4}}$: mais le rectangle AC sera $\sqrt{3888}$ — $\sqrt{1268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$ & HE $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$

405, NO $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO , seront $\sqrt{V}$
 $(972 + \sqrt{405})$, & $\sqrt{V} (972 - \sqrt{405})$: & par consequent
 TS est $\sqrt{V} (972 + \sqrt{405}) - \sqrt{V} (972 - \sqrt{405})$, & son
quarré $TR \sqrt{3888} - \sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PRO. xcviij. Six.5.

Le quarré d'un residu appliqué sur vne
rationnelle, faict l'autre coste residu
premier.

Soit le residu AB , &
 BC sa conuenable, telle-
ment que AC, BC soient
rationnelles commen. en
puissance seulement : &
sur la rationnelle DE soit
appliqué le rectangle DF
égal au quarré de AB . Le
dis que l'autre costé DG est residu premier.



Car sur la mesme rationnelle DE soit appliqué le
rectangle DH égal au quarré de AC : & sur IH vn au-
tre rectangle IK égal au quarré de BC , tellement
que le total DK est égal au composé des quarréz de
 AC, BC ; lequel estant égal par la 7. prop. 2. à deux
fois le rectangle de AC, CB , ensemble avec le quar-
ré de AB , si on oste le quarré de AB & le rectangle
 DF ; restera GK égal à deux fois le rectangle de AC ,
 CB : partant GL estant couppee en deux également
en M , & tiré MN parallele à DE : MK sera égal au
rectangle de AC, CB . Et pource que AC, CB sont
rationnelles, leurs quarréz seront aussi rationaux, &
partant commen. & par la 16. prop. 10. le composé

d'iceux quarez est commens. à vn chacun d'eux : & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationnel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, par la 21. prop. 10. DL sera rationelle commens. en longit. à icelle DE. Derechef puis que AC, CB sont rationnelles commensur. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial : & iceluy estant appliqué à la rationelle GF, par la 23. prop. 10. GL sera rationelle incommens. en longit. à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longit. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationelles, elles seront commensur. en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste DG sera aussi residu. le dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK : DH, MK, IK seront continuellement proportionaux : & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. prop. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. prop. 2. Et puis que les quarez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de GL, & de faillant d'une figure quaree, par la 18. prop. 10. DL, pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longit. : & par la 1. des 3. def. DG

sera residu premier. Parquoy le quarré d'un residu appliqué sur vne rationnelle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

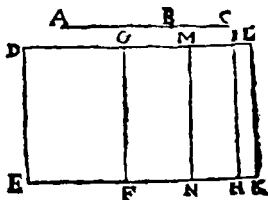
SCHOLIE.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & $BC \sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationnelle DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB , qui est $72 - \sqrt{2880}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, $IL 1\frac{1}{2}$, $DL 9$, & $GL \sqrt{45}$, & $GM \sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rect. DK sera 72, $DH 60$, $IK 12$, $GN \sqrt{720}$, $GK \sqrt{2880}$. & $DF 72 - \sqrt{2880}$.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationnelle, faict l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB , duquel la conuenable soit BC , tellement que AC, BC , soient mediales commensur. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la ration-



le DE soit appliqué le rectangle DE egal au quarré de AB . Je dis que l'autre costé DG est residu second.

Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK , soient egaux aux quarrés

rez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement; les quarez d'icelles, ou leur segaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. proposit. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationnelle commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationnel, son double GK sera aussi rationnel: & par la 21. prop. 10. GL sera rationnelle commens. en longitude à DE rationelle, & les deux rectangles Dk, & Gk estans incomm. (car l'un est rationnel, & l'autre medial) les rationnelles DL & GL seront commensurab. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la route DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second. Parquoy le quarré d'un residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Le residu medial premier AB soit $\sqrt{500}$ — $\sqrt{20}$, & BC $\sqrt{20}$: la route AC sera donc $\sqrt{500}$: & estant appliqué sur la rationnelle DE 4, le quarré de AC, qui est $\sqrt{500}$, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{20}$, IL sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: ainsi la route DL sera $\sqrt{45}$. De crechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10. l'autre costé GM

sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL 5: parquoy DG sera $\sqrt{45}$ —5.
qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'un residu medial second,
appliqué sur vne ligne rationnelle,
faict l'autre costé residu troisieme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationnelle DE, soit appliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre costé DG est residu troisieme.

Car (ayant construit comme en la 98. prop. 10.) on demonstrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationnelle DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi sera son double Gk, & par la 23. prop. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationnelle DE: Et puis que AC, BC sont incommens. en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double Gk: Mais le quarré de AC est aussi commens. au quarré de BC: (pource qu'iceux quarez sont descriptz sur lignes commensur. en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarez, c'est à dire Dk, sera aussi commens. au quarré de AC, auquel est incommens. Gk, parquoy par la 13. prop. 10. Dk sera

Dk sera incommens. à GK, & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant mesme raison que DK, Gk seront incom. en long. Mais estans rationeles, elles seront comm. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. BG sera residu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98. prop. 10. que DL peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commensurab. en longitude : Et par les tierces des. DG est residu troisieme. Parquoy le quarré d'un residu medial second, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

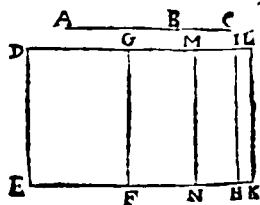
Le residu medial second AB soit $\sqrt{600} - \sqrt{24}$, & BC $\sqrt{24}$: la toute AC sera donc $\sqrt{600}$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est $\sqrt{600}$, l'autre costé DI sera $\sqrt{37\frac{1}{2}}$; mais appliquant sur la mesme DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre costé IL sera $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: & si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{120}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, & son double GL $\sqrt{30}$: parquoy DG est $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

THEOR. 77. PROP. ci.

Le quarré d'une ligne mineure, appliqué sur une ligne rationelle, faict l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC convienne, en sorte que AC, BC, soient incommensurab. en

puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel, & le quarré d'icelle AB soit appliqué sur la rationelle DE: dis que l'autre costé DG est residu quatriesme.



Car (après auoir construit comme en la 98. prop. 10.) le rectangle DK sera rationel, & GK medial, par le dit cours des precedentes; & par la 21. prop. 10. DL sera rationelle commens. en longit. à la rationelle DE; & GL, par la 23. prop. 10. sera rationelle comment en puissance seulement à icelle rationelle DE: & puis que Dk est rationel, & Gk medial, ils sont incomm. & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL qui sont en mesme raison que Dk, Gk, seront incommensur. en longitude. Mais elles sont rationelles, elles seront donc commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. 10. DG sera residu.

D'avantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes AC, BC sont incommensur. en puissance, leurs quarréz seront incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles DH, IK, & par consequent incommens. les lignes DI, IL, costez du rectangle de faillat d'une figure quarrée egale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a esté demonst. en la 98. prop. 10. & par la 19. prop. 10. DL (qui est commens. en longitude à la rationelle DE,) peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude: & par les tierces definitions DG est residu quatriesme. Donc le quarré d'une ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonst.

S C H O L I E.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{27 + \sqrt{243}} - \sqrt{27 - \sqrt{243}}$ & $BC \sqrt{27 - \sqrt{243}}$: la touse AC sera donc $\sqrt{27 + \sqrt{243}}$, le quarré de laquelle appliqué sur la rationelle DE 6, l'autre costé DI sera $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{3}{4}}$: mais étant appliqué sur la mesme DE , le rectangle Ik , egal au quarré de BC , qui est $27 - \sqrt{243}$, l'autre costé IL sera $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{3}{4}}$: & partant la touse DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN egal au rectangle de ACB , qui est $\sqrt{486}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, & son double $GL \sqrt{54}$: & partant DG est $9 - \sqrt{54}$, qui est residu quatriesme.

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, faict l'autre costé residu cinquieme.

Soit la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial AB , de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle DE : le dis que l'autre costé DG est residu cinquieme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. prop. 10.) AB étant ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, & BC sa convenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de

leurs quarréz medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. prop. 10. DL sera rationele incommensur. en longueur à la rationele DE : & par la 21. propos. 10. GL sera aussi rationele, mais commens. en longit. à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK estans incomm. (car l'un est rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longueur. Mais icelles sont rationeles : elles sont donc commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu. Mais GL estant commensur. en longueur à la rationelle DE, & si comme en la precedente on prouuera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur : & partant par les tierces def. DG est residu cinquiésme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{216+272}-\sqrt{216-272}$, & BC $\sqrt{216-272}$; la toute AC sera donc $\sqrt{216+272}$, le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE 4, & l'autre costé DI sera $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{216-272}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: Que si à la mesme rationele on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangl. de ACB, qui est 12, l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6 : Parquoy DG sera $\sqrt{54}-6$, qui est residu Enquiésme.

THEOR. 79. PRO. CIII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant avec une superficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationelle DE: Je dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB estant ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, & BC la conuenable à icelle AB, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrés aussi medial: partant les deux rectangles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. prop. 10. DL, GL seront rationelles incommens. en longit. entr'elles, & à la rationelle DE; & par consequent commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. 10. BG sera residu. Mais on peut prouuer comme en la 101. p. 10. que la route DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

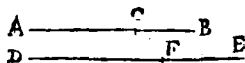
La ligne AB soit $\sqrt{972 + 405} - \sqrt{972 - 405}$
R r iij

$\sqrt{405}$, & BC $\sqrt{972 - \sqrt{405}}$: donc la toute AC sera $\sqrt{972 + \sqrt{405}}$, au quarré de laquelle soit egal le rectangle DH, appliqué sur la rationnelle DE 6 : l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27 + \sqrt{11\frac{1}{4}}}$: mais étant appliqué sur la mesme rationnelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{972 - \sqrt{405}}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{27 - \sqrt{11\frac{1}{4}}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{108}$: Si derechef on applique sur la mesme rationnelle le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{567}$ l'autre costé GM sera $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108 - \sqrt{63}}$, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIII. Six. 6.

La ligne commensurable en longitude à un residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit comm. en long. la ligne droite DF. Je dis que DF est residu de mesme ordre que AC.



Car CB soit la convenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationnelles commensur. en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit fait que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. p. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE : & par la 10. prop. 10. comme AC est commensurable en longitude à DF, ainsi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant comme, AB & BC sont ra-

tionelles, aussi seront DE & FE : (car elles sont commensurables à icelles, par la 10. prop. 10.) Mais AB & BC sont commensur. en puissance seulement : partant DE & FE seront aussi rationelles commensurables en puissance seulement, & par la 74. propo. 10. DF est residu.

Je dis d'avantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du carré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longueur : si commensurable, aussi DE pourra plus que FE de mesme façon par la 15. propos. 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AB est commens. en long. à une ligne rationelle proposée, aussi DE qui luy est commens. en longueur sera commens. en longueur à la mesme rationelle proposée par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF seront residus premiers : Que si BC est commensur. en longueur à la rationelle, aussi sera FE : & AC, DF seront residus seconds : si AB & BC sont incommensurables en longueur à la rationelle, aussi seront DE & FE ; & AC, DF seront residus troisiemes. Que si AB peut plus que BC du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. prop. 10. & si AB est commensurable en longueur à la rationelle, aussi sera DE : & AC, DF seront residus quatriemes. Si BC est commensurable en longueur à la rationelle, aussi sera FE : & AC, DF seront residus cinquiemes. Si AB & BC sont incommensur. en longueur à la rationelle, aussi seront DE & FE : partant AC & DF seront residus sixiemes : par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC. Parquoy la ligne commens. en longueur a un residu, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

SCHOLIE.

Le residu AC soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & DF $\sqrt{15} - \sqrt{3}$, lesquelles sont commens. en longueur, l'une estant double de l'autre, & la convenable CB soit $\sqrt{12}$: Donc la toute AB est $\sqrt{60}$: & puis que comme AC est à DF, ainsi CB $\sqrt{12}$ est à FE; icelle FE sera $\sqrt{3}$: & la toute DE $\sqrt{15}$, commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. cv.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC: ie dis que icelle DF est aussi residu medial, & de mesme ordre que AC.

Car ayant faict mesme construction qu'en la preced. prop. AB & BC seront comm. à DE, EF lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. prop. 10. DE & FE seront mediales commens. en puissance seulement. par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. p. 10. DF est residu medial: ie dis d'avantage qu'il est de mesme ordre que AC.

Car le quarré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1. p. 6. Mais le quarré de AB est commensur. au quarré de DE, estant AB & DE commens. & par la propos. 10. les deux rectangles seront aussi commens. Que com-

me l'un sera rationel ou medial, aussi l'autre sera rationel ou medial: partant si les rectangles sont rationaux, AC & DF seront residus mediaux premiers: si les rectangles sont mediaux, AC & DF seront residus mediaux seconds. Donc la ligne communf. à vn residu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

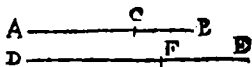
S C H O L I E.

Le residu medial AC soit $\sqrt{500} - \sqrt{20}$, & DF $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$: BC sera $\sqrt{20}$, & la toute AB $\sqrt{500}$; mais FE sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$, & la toute DE $\sqrt{31\frac{1}{4}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commensurable à vne ligne mineure, est aussi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commensurable à la ligne mineure AC: le dis qu'icelle DF est aussi ligne



mineure. Car CB estant conuenable à icelle AC, & faict mesme construction qu'en la 104. prop. 10. AB & BC seront incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel. Mais cōme AB à CB, ainsi DE à FE, & par la 10.p.10. DE & FE serōt incommens. en puissance. Item puis que comme AB à BC, ainsi DE à FE, par la 22. prop. 6. leurs quarrez seront proportionaux, & en composant comme le composé des quarrez de AB, BC sera au carré de BC, ainsi le composé des quarrez de DE, FE, sera au carré de FE; & en permutant comme le composé des quar-

rez de AB, BC sera au composé des quarez de DE, FE, ainsi le carré de CB sera au carré de FE: lesquels quarez de CB & FE sont commensurables: (car les lignes BC & FE sont commensurables comme AC & DF, ainsi qu'il a esté démontré à la 104. prop. 10.) & partant par la 10. prop. 10. le composé des quarez de AB & BC, (lequel est rationel) sera commensurable au composé des quarez de DE & FE, lequel sera aussi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, le carré de AB est au rectangle de AB & CB, comme le carré de DE au rectangle de DE & FE, & en permutant cōme le carré au carré ainsi le rectangle au rectangle: c'est à dire commens. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. pr. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celuy de DE & FE sera aussi medial: partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure. Donc la ligne commensurable à vne ligne mineure est aussi ligne mineure. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC,

faisant avec vne superficie rationele vn tout medial. Iedis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et estant fait meisme construction qu'en la 104. p. on demonstrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE sont incommens. en puissance; & que le composé des quarrez de AB, CB est commens. au composé des quarrez de DE, FE. Mais celuy là-est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol, de la 24. p. 10. De-rechef comme nous auons demonstré en la 105. p. le rectangle de AB, CB est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc cestuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & sont le composé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant avec superficie rationele vn tout medial. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensur. à la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant avec vne superficie mediale vn tout medial: Ie dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

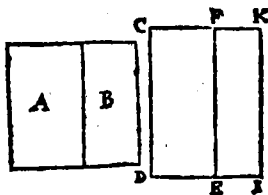
Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB, CB soient incommensurables en puissance, & facent le composé de leurs quarez medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au composé de leurs quarez : & ayant fait semblable construction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop. que les lignes DE, FE, sont incommensurable, en puissance, & que le composé des quarez de AB & BC, est commensurable au composé des quarez de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, est commensurable au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB & CB, est medial, & incommensurable au composé des quarez de AB & CB, aussi medial : partant par le scholie de la 14. p. 10. le rectangle de DE & EF, sera medial, & incommens. au composé des quarez de DE & FE aussi medial : & DF sera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial. Donc la ligne commensurable à la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonst. rer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une superficie rationele, est retranchée vne superficie mediale : la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationele AB, de laquelle soit retranchée la mediale A : le dis que la ligne qui peut le reste, B est residu, ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi: Sur
vne rationele proposée
CD soit décrit le re-
ctangle CE égal à A, &
FI égal à B. Il est euidēt
que CI sera rationel, &
par la 21. p. 10. son autre



costé Ck sera rationel commensurable en longitu-
de à CD. Item par la 23. prop. 10. CD estant medial,
CF sera rationele commensurable en puissance seu-
lement à CD, & par la 13. prop. 10. CK & CF seront
rationeles commensurables en puissance seulement:
& partant par la 74. p. 10. Fk sera residu. Maintenant
CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy
est commensurable ou incommensurable en longit.
Si commensurable Fk sera residu premier: & la li-
gne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu
par la 92. prop. 10. Si incommensurable CK est residu
quatriesme: & la ligne qui peut le rectangle FI, ou
(ou son egal B) est ligne mineure par la 95. pr. 10.
Parquoy si d'une superficie rationele, est retranché
vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demon-
strer.

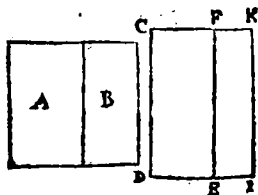
SCHOLIE.

Si le rectangle rationel AB est 32, le medial A $\sqrt{320}$, &
la ligne rationele CD 6, sur laquelle est décrit le rectangle
CE égal à A, & FI égal à B: les costez CF; & FK, seront
 $\sqrt{8\frac{2}{3}}$, & $5\frac{1}{3}$ — $\sqrt{8\frac{2}{3}}$: & partant la toute CK sera $5\frac{1}{3}$: & le
rectangle CI 32, duquel ostans CE, qui est $\sqrt{320}$, le reste
rectangle FI sera $32 - \sqrt{320}$: & la ligne pouvant iceluy
sera $\sqrt{(16 + \sqrt{176})} - \sqrt{(16 - \sqrt{176})}$, qui est ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. cv.

Si d'une superficie mediale est retranchée une superficie rationele, la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit comme dessus la superficie mediale AB , de laquelle soit retranchée la rationele A . Je dis que la ligne qui peut le reste B , (apres avoir construit comme en la precedente) ou son egal FI , est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie, rationele un tout medial.



Car puis que la superficie totale AB est mediale aussi la totale CI est mediale, & par la 23. p. 10. le costé CK est rationel commens. en puissance seulement à la rationele CD . Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE , & par la 21. p. 10. CF sera rationele commensurable en longitude à la rationele CD : & par la 13. pr. 10. Ck & CF seront rationeles commensurables en puissance seulement; & partant par la 74. p. 10. FK sera aussi residu. Mais à cause que Ck peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy est commensurable; ou incommensurable en longitude, $E k$ sera residu, second,

ou residu cinquiésme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93. prop. 10. si residu cinquiésme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial par la 96. p. 10. Parquoy si d'une superficie mediale est retranchée vne superficie rationele, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{800}$, & la rationele A 12; le reste B sera $\sqrt{800}-12$, & la ligne pouvant iceluy sera $\sqrt{(\sqrt{200}+\sqrt{164})-(\sqrt{200}-\sqrt{164})}$, qui est ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

T H E O R. 87. P R O P. CXI.

Si d'une superficie mediale, est retranchée vne superficie mediale incommensurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la superficie mediale A, incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Car ayant fait mesme construction qu'aux precedentes, les rectang. CI, CE serōt mediaux & incomm-

mesurables entr'eux ; & par la 23. prop. 10. les lignes Ck , CF seront rationeles incommensurables en longitude à CD. Et puis que CI, CE sont incommensurab. les rationeles ck, cf, qui sont en mesme raison que CI, CE, seront aussi incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. & par consequent elles sont seulement commensurables en puissance: Donc FK sera residu par la 74. prop. 10. & FC la conuenable. Maintenant Ck peut plus que Fk, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude : si commensurable, FK sera residu troisieme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B (est residu medial second, par la 94. prop. 10. Si incommens. FK sera residu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, par la 97. p. 10. Si donc d'une superficie mediale est retranché une superficie mediale incommensurable à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{279}$, & $\sqrt{40}$: la superficie restante B sera $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: & la ligne pouvant icelle sera $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} - \sqrt{59\frac{3}{4}}) - \sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} - \sqrt{59\frac{3}{4}})}}$, qui est appelée ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

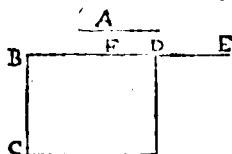
THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appelée residu , n'est pas la mesme que Binome.

Soit

Soit le résidu A. Je dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.

Car soit la rationele proposée BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD



égal au quarré du résidu A : par la 98. prop. 10. BD sera résidu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE ; BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement : & BE commens. en longueur à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome ; BD sera binome premier, par la 61. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au point F ; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commensurables en puissance seulement , & BF commensurable en longueur à la rationele BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, seront commensurables en longueur. Veu donc que la route BE est commensurable en longueur à la partie BF. par le corol. de la 16. prop. 10. l'autre partie FE sera aussi commensurable en longueur à BE : partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longueur à BE, & par la 14. prop. 10. FE, DE sont rationeles commensurables en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. FD est résidu, & par consequent irrationele ; ce qui est absurde : car elle a esté prouée tantost rationele : donc le résidu A, sera differend du binome. Parquoy la ligne appelée résidu n'est pas la mesme que binome. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appel-

Si

l'excès résidu, & les cinq sortes de lignes irrationnelles suivantes, sont différentes de la mediale, & entr'elles. Car le carré de la mediale appliqué sur une ligne rationnelle, fait l'autre côté rationnel commensurable en puissance seulement à icelle rationnelle, par la 23. p. 10.

Le carré du résidu, fait l'autre côté résidu premier, par la 98. p. 10.

Le carré du résidu medial premier, fait l'autre côté résidu second, par la 99. p. 10.

Le carré du résidu medial second, fait l'autre côté résidu troisieme, par la 100. p. 10.

Le carré de la ligne mineure, fait l'autre côté résidu quatriesme, par la 101. p. 10.

Le carré de la ligne faisant avec une superficie rationnelle un tout medial, fait l'autre côté résidu cinquieme, par la 102. prop. 10.

Le carré de la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, fait l'autre côté résidu sixiesme, par la 103. p. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuvont seront aussi différentes. Mais les quarrés des binomes, & des cinq lignes irrationnelles suivantes, estans appliquez sur une ligne rationnelle font l'autre côté binome de quelque ordre: parant le binome, & les cinq suivantes sont differences du résidu, & des cinq suivantes.

Ainsi toutes les lignes irrationnelles cy devant dites sont treize: sçavoir celles-cy.

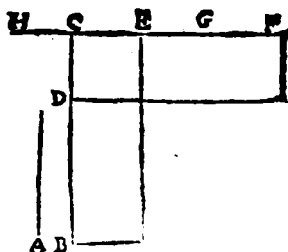
1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouvant un rationnel & un medial.
7. Ligne pouvant deux mediaux.

8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du binome: en outre le residu est de mesme ordre que le binome.

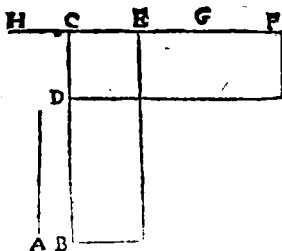
Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD: & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Je dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.



Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçavoir que co-

Si ij

me BC à DC, ainsi CF
à CE, & en diuisant
cōme BD, à DC, ainsi
FE à EC. Mais BD est
plus grande que CD:
donc aussi FE sera plus
grande que EC. Main-
tenant de EF soit re-
trāchée EG égale à EC,



& soit fait cōme FG à GE, ainsi EC à CH par la 12.
p. 6. & en composant comme FE à EG (ou EC son
égale) ainsi EH à CH, & par la 12. prop. 5. les deux an-
tecedents FEH seront aux deux consequents ECH,
comme l'un des antecedens EH à l'un des consequens
CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, seront
continuellement proportioneles en la raison de FE à
EC, ou BD à DC: & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. com-
me le quarré de BD est commens. au quarré de DC,
(car iceux quarrés sont commensurable puis que
BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi que le
quarré de EH, sera commens. au quarré de CH: &
par le corol. de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH sera com-
mens. en l'ogitude à la troisieme proportionele FH,
& par la 16. p. 10. CH & CF seront commens. en lon-
gitude. Et d'autant que le rectangle DF est rationel
(estant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC
ligne rationele: CF sera aussi ligne rationele cōmens.
en longitude à CD, par la 21. p. 10. Et CH sera aussi
rationele commens. en longitude à CD, par la 12. p.
10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB sont ratione-
les commens. en puissance seulement, aussi CH, EH,
seront rationeles commens. en puissance seulement:
& partant par la 74. prop. 10. CE sera residu: duquel
les noms EH, CH sont proportionaux, & commens.

aux noms BD, DC, du binome BC : Car il a esté démontré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH; & partant en permutant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté démontrées commens. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouver que le residu est de mesme ordre que le binome : Or les noms de l'un estans proportionnaux, & commens. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longitude : le plus grand nom du residu pourra plus de mesme : Que si le plus grand nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus grand du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier : Que si le plus petit nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus petit du residu ; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele : semblablement l'un ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele par la 14. p. 10. & partant ils seront binome, & residu troisieme : & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur un binome, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

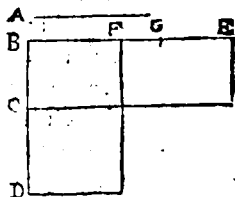
Si la rationele A est 8, le binome BC $9 + \sqrt{45}$. tellement que BD soit 9, & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A estant appliqué sur BC, l'autre costé du rectangle CE sera $16 - \sqrt{142\frac{2}{3}}$, qui est residu : & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à C*elle* CF sera $\sqrt{91\frac{1}{43}}$; & EF $\sqrt{460\frac{4}{5}} - 16$. Mais EG estant

egale à CE, est 16 — $\sqrt{142\frac{2}{3}}$; GF $\sqrt{111\frac{1}{3}}$ — 32: & d'autant que
comme FG est à GE, ainsi EC à CH, icelle sera $\sqrt{142\frac{2}{3}}$, &
EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre
que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportion-
naux aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele, estant
appliqué sur vn residu, faict l'autre
costé binome, les noms duquel sont
proportionaux, & commensur. aux
noms du residu: En outre le binome
est de mesme ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le
residu BC auquel cōvien-
ne CD, & sur BC soit des-
crit le rectangle CE egal
au quarré de la rationele
A: Le dis que l'autre costé
BE sera binome tel que
demande la proposition.



Car sur BD, soit descrit le rectangle DF egal au
mesme quarré de la rationele A: Donc les rectan-
gles CE & DF seront egaux, & ayans les costez re-
ciproques par la 14. p. 6. BD sera à BC comme BE à
BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, com-
me BE à FE. Maintenant soit couppee EF en G, par
10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi
EG à GF: veu donc que comme la toute BE est à la

toute FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF retranchée de FE, aussi par la 19. p. 5. le reste BG sera au reste EG, comme la toute à la toute, c'est à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & partant EG est moyenne proportionelée entre BG & GF. Parquoy cōme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi commensurables en puissance seulement: & partant les quarez d'icelles BG, GE sont commensurables, & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarez, sont commensurables en longitude par la mesme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF seront aussi commensurables en longitude. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, est rationel; par la 21. prop. 10. BF sera aussi rationele commensurable en longitude à BD. Donc par la 12. prop. 10. BG sera aussi rationele commens. en longitude à la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté demonstrees commens. en puissance seulement, & BG rationele, GE sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 37. p. 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté demonsté que comme BD à CD, ainsi BG à GE: & partant en permutant comme BD à BG, ainsi CD à GE: mais BD a esté demonsté commensurable en longitude à BG: donc aussi CD l'est commens. en longitude à GE, par la 10. p. 10. reste

donc à prouuer que BE est binome de mesme ordre que le residu BC: ce qu'on fera procedant tout ainsi qu'en la precedente. Parquoy le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

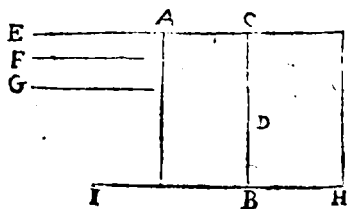
S C H O L I E .

Si la rationele A est 4, & le residu BC 9— $\sqrt{45}$, CD $\sqrt{45}$, & BD 9, le rect. DF sera 16, & aussi CE 16: ainsi le costé BF sera $1\frac{1}{2}$, & BE $4 + \sqrt{8\frac{2}{9}}$: & par consequent FE sera $\sqrt{8\frac{2}{9}} + 2\frac{1}{2}$; & GE $\sqrt{8\frac{2}{9}}$, FG $2\frac{1}{2}$, BG 4. ainsi est euident que BE est binome en mesme ordre que le residu BC, & que les noms d'iceux sont proportionaux.

THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, desquels les noms sont proportionaux & commensurables, la ligne droicte pouuant iceluy rectangle est rationele.

Soit le rectāgle AB, cōpris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB, soiēt proportionaux, &



commensurables aux noms CE, AE du residu AC: & soit la ligne droicte F pouuant iceluy rectangle AB. Je dis que F est rationele.

Car soit vne rationnelle proposée G , le quarré de laquelle estant appliqué sur le binome CB , face le rectangle CH . Donc par la 113. prop. 10. l'autre costé BH sera residu, duquel les noms HI , BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD , DB , sçauoir est que comme HI à BI , ainsi CD à DB , & partant ainsi CE à AE : & en permutant comme la toute HI à la toute CE , ainsi la retranchée BI à la retranchée AE ; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC , comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commensur. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'une & l'autre est commensur. b. a CD : donc aussi BH , AC seront commensur. en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH , & AC , ils seront aussi commensur. Mais HC , egal au quarré de la rationnelle G , est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB , sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

C O R O L L A I R E.

De cery est manifeste qu'un rectangle rationel, peut estre compris de lignes irrationeles.

S C H O L I E.

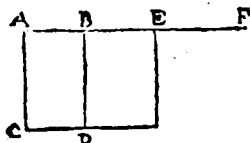
Si le residu AC est $4 - \sqrt{5}$, tellement que les noms d'iceluy CE , & AE soient 4 , & $\sqrt{5}$, mais le binome BC soit $9 + \sqrt{45}$, le rectangle AB sera 16 , qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4 , & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8 , le rectangle CH sera 64 , & le costé

BH 16— $\sqrt{142\frac{1}{2}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{1}{2}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

Dela ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dites.

Soit la ligne mediale AB : ie dis, que d'icelle naissent infinies lignes irrationelles toutes differentes des deuant dictes.



Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationelle, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle sera irrationnel par le coroll. de la 39. prop. 10. & par la 11. deff. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationelle, soit icelle BE ; laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationelle comme AC, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationnel : & la ligne qui le peut, aussi irrationele : & soit EF, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationele, ne faict l'autre costé tel que BE: & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.

SCHOLIE.

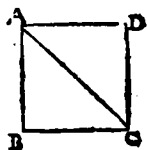
Sil la mediale AB est $\sqrt{2}$, & la rationele AC 2; le rectan-

gle AD sera $\sqrt{V} 32$, & la ligne BE qui peut iceluy sera $\sqrt{V} 12$:
 32: Ainsi le rectangle DE sera $\sqrt{V} 512$, & la ligne EF
 qui peut iceluy sera $\sqrt{V} 512$, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longueur au costé.

Soit le quarré ABCD, duquel AC soit diagonale. Je dis que la diagonale AC est incommens. en longueur au costé AB.



Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'une autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons demonst. au corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. prop. 10. la diagonale AC, & le costé AB, sont incōmen. en longueur. Donc au quarré, la diagonale est incommens. en longueur au costé. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$, c'est à dire incommens. en longueur.

Fin du dixiesme Element.



E L E M E N T

VNZIESME.

DEFINITIONS.

1.  Olide, est ce qui a longueur, largeur & profondeur: Mais les termes d'un solide, sont superficies.

2. Vne ligne droicte est perpendiculairement esleuee sur vn plan, quand toutes les lignes constituées sur iceluy plan & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

3. Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'une ligne droite à un plan est l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droite menée au plan de l'inclinante, par le point auquel tombe une perpendiculaire tirée du sommet d'icelle inclinante sur le dit plan.

5. Un plan est incliné sur un plan, quand les lignes menées sur l'un & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers un même point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les unes aux autres : & l'inclination d'iceux plans, est l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

6. Un plan est dit estre semblablement incliné à un plan, lors que les susdicts angles d'inclination sont égaux entr'eux.

7. Plans parallèles, sont ceux lesquels estans continuez ne se rencontrét point.

8. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, égales en nombre.

9. Solides égaux, & semblables, sont

ceux qui sont compris de semblables superficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle solide, c'est la rencontre de plus de deux angles plans en vn mesme poinct, estans iceux constituez sur plans differens.

11. Pyramide, est vn solide compris de plusieurs plans, se rencôtrans en vn mesme poinct, & ayans vn autre plan pour base.

12. Prisme, est vn solide compris de plans, desquels deux qui sont opposez sont egaux, semblables & parallels, & les autres sont parallelogrammes.

13. Sphere, est vne figuré comprise par le demy cercle, lors que son diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là d'où il estoit party.

14. L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la sphere, est celuy mesme que du demy cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne lig.dr. laquelle passant par le centre d'icelle, est terminee à la superficie de la sphere.

17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'un des costez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, le triangle faict vn tour à l'entour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé, comprenant l'angle droict, le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

19. Mais le cercle descript par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne, est la base du cone.

20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallelogramme rectangle, lors que l'un des costez demeurant immobile, le parallelogramme faict vn tour à l'entour d'iceluy costé.

21. L'axe du cylindre, est icelle ligne

immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La base du cylindre, est le cercle décrit par l'autre costé, qui avec l'axe du cylindre comprend l'angle droict.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarez.

25. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide compris de huit triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pantagones egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les opposez sont parallels.

30. Vne figure solide, est dictée inscrite

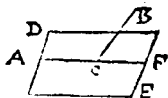
en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont construits, ou és angles, ou és costez, ou finalement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

31. Mais vne figure solide, est dictée circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle est descrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Vne partie d'une ligne droite ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est evident que ACB ne sera pas ligne droite, comme il est requis.



THEOR. 2. PROP. II.

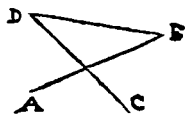
Si deux lignes droictes se coupent l'une

Tc

l'autre, elles seront sur vn mesme plan:

Et tout triang. est en vn mesme plan.

Soient deux lignes droictes AB & CD se coupans l'une l'autre au point E; & en EB, ED soient pris quelconques points B & D, & soit tiree la ligne droicte BD, afin de faire le triangle EBD. Je dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan: Item que le triangle EBD est pareillement en vn seul plan.

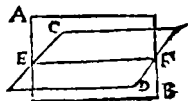


Car d'autant que les lignes droictes AB, CD s'entrecouparent en E; BE, DE feront vn angle au point E: & par la definition de l'angle plan conuerrie, & 1. p. 11. elles seront en vn mesme plan. Et par la mesme raison la ligne droicte BD faisant deux angles avec icelles deux lignes BE, DE, sera aussi au mesme plan: Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; scauoir est en ceuy auquel nous auons demonstre estre le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstier.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD, & les termes de leur commune section, soient les points E, F. Je dis que icelle commune section est vne ligne droite.



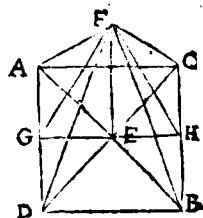
Car puis que les points E, F, sont communs à tous les deux plans, d'un point à l'autre soit mence vne ligne droite sur le plan AB; item de mesmes points soit mence vne ligne droite sur le plan CD: Je dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'une seule ligne droite, sçavoir E & F: car si elles estoient differentes, il s'ensuiuroit que deux lignes droictes auroient leurs extremittez communes: ce qui est impossible, car elles enfermeroient vne espace, contre la 12. comm. sent. La ligne droite EF est donc sur l'un & l'autre plan, & partant leur commune section. Parquoy si deux plans se couppent l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes se couppans l'une l'autre, & au point de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droite, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes droictes AB & CD, se couppans l'une l'autre au point E, & d'iceluy point de section E, soit esleue la perpendiculaire EF à cha-

cunes d'icelles : ie dis qu'elle est aussi perpendiculaire à leur plan.



Car soient posees egales AE, EB, CE & ED, & soient tirees les lignes AD, BC, & par le point E soit menee la ligne droite GH coupant les lignes AD, BC, es points G & H : Item du point en l'air F soient tirees les lignes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les costez EA, ED du triangle AED, sont egaux aux costez EB, EC du triangle BEC, chacun au sien, & les angles AED, BEC contenus par iceux costez aussi egaux par la 15. prop. 1. les bases AD, BC seront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont egaux par la 15. prop. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH, EBH du triangle BHE, & le costé AE est egal au costé BE : donc par la 26. prop. 1. les deux costez AG, GE, seront egaux aux deux costez BH, HE. Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçavoir droicts par l'hypothese, par la 4. prop. 1. les bases EA, EB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD, FC. D'avantage veu que les costez FA, AD du triangle FAD, sont egaux aux costez FB, BC du trian. FBC, & la base FC, egale à la base FD, par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC seront aussi egaux : Parquoy les costez FA, AG du trian. FAG, estans egaux aux costez FB, BH, du triangle FBH, les bases FG, FH, seront pareillement egales par la 41. prop. 1. Et finalement puis que les costez FE, EG, du triangle FEG,

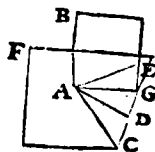
sont egaux aux costez EF, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8. p. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 11.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE, par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d. 11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes se couppent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes seront en vn mesme plan.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.



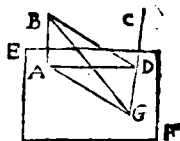
Car puis que deux d'icelles quel-les qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. propos. 11. soient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. propos. 11. & soient toutes

deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au poinct A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC; & partant par la 3. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droicts: mais par hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droicts: par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout: ce qui est impossible: Donc AE n'estoit pas esleuée en l'air, ains estoit au mesme plan que AC & AD. Parquoy si vne ligne droicte rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan, elles seront paralleles.

Soient deux lignes droictes AB CD esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan EF, & aux poincts A & D. le dis qu'elles sont paralleles entr'elles.



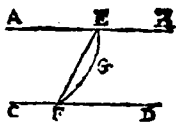
Car si des susdicts poincts A & D, du plan EF, on meine la ligne droicte AD, les deux angles BAD & CDA seront droicts par la 2. p. 11. partant si les deux lignes BA & CD sont en mesme plan, elles seront paralleles par la 18. prop. 1.

Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du poinct D, soit menee DG perpendiculaire à AD par la 11. prop. 1. & soit posée icelle DG égale à AB, & soient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG égaux, & AD commun, & l'angle droit BAD égal à l'angle GDA aussi droit, par la 4. prop. 1. la base BD sera égale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG égaux, & les deux autres AG & BD aussi égaux, & la base BG commune: tous les deux triangles par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG seront égaux. Mais l'angle BAG est droit par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droit: il est donc euident que GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. prop. 11. icelles trois lignes seront en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. prop. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AB & CD seront en vn mesme plan. Parquoy si deux lignes droictes sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes sont paralleles, & del'une à l'autre on mene vne ligne droicte, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'une à l'autre soit menee la ligne droicte EF. Je dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CD.



Car si elles n'est au mesme plan, ains en vn autre: que celuy cy coupe cestuy-là és poinçts E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droicte par la 3. prop. 11. donc les deux lignes droictes EF, & GF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroient vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte EF n'est pas en vn autre plan que celuy auquel sont les paralleles AB, CD. Parquoy si deux lignes droictes sont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

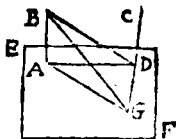
Cette mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pourueu qu'elles soient en vn mesme plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, desquelles l'une soit à angles droicts à quelque plan: aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

Soiēt deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'une d'icelle AB soit esleuee perpendiculairement sur le plan EF. Je dis que l'autre CD est aussi esleuee perpendiculairement sur le mesme plan EF.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faite
même construction qu'en la 6.
p. 11. & comme il a esté demon-
stré, les deux angles BAG &
 ADB seront droicts, & par la
4. prop. 11. GD sera esleuée per-

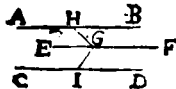


pendiculairement sur le plan des lignes AD & BD : mais par la precedente prop. les deux lignes AB & AD sont au mesme plan de AB & CD : car elles sont paralleles par l'hypothese : il s'ensuit donc que GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD : Ainsi l'angle CDG sera droit. Mais l'angle ADC est aussi droit par la 29. prop. 1. estans AB & CD paralleles : & par la 4. prop. 11. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD , c'est à dire au plan EF . Parquoy s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont à vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Je dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.



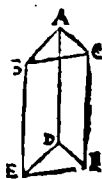
Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirées à icelle EF deux perpendiculaires, sça.

voir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G : elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles : & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI : aussi AB sera perpendiculaire au meisme plan par la 8. p. 11. Par meisme raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI : & partant par la 6. p. 11. AB, CD estans perpendiculaires à vn meisme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droictes s'entretouchás, sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne sont en vn meisme plan, elles comprendront angles egaux.

Soient deux lignes droictes AB & AC se touchans en A, lesquelles soient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF se touchant en D : & AB, AC ne soient au meisme plan que DE, DF. Je dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles sont egaux.



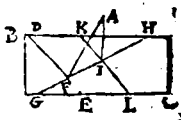
Qu'ainsi ne soit. Soient prises egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF ; & soient menées les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Premièrement AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi

egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par la mesme raison AD, & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la 9. prop. 11. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles: & par la 33. prop. 1. BC & EF seront egales & paralleles: Ainsi les deux triangles ABC, & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles BAC, EDF seront egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

P R O B L. 1. P R O P. XI.

D'un poinct donné en haut, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy poinct.

Soit le poinct A esleué en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy poinct A. Au plan BC, soit menée comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. prop. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. prop. 1. Et à icelle GH soit tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. prop. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.



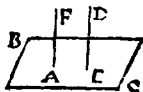
Car au plan BC, étant tirée par I, la ligne KN, parallele à DFE par la 31. prop. 1. puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH par la construction: & partant aussi perpendiculaire au plan tiré par FA, FH par la 4. p. 11. pareillemēt KI sera per-

pendiculaire au mesme plan par la 8. prop. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en vn mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'ang^e KIA sera droit par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. prop. 11. AI sera perpendiculaire au plan où sont les lignes KI, IF, sçauoir au plan BC. Nous auons donc d'un point donné en l'air abaissé vne perpendiculaire au plan d'au dessoubs d'iceluy point : Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'un point donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le point donné en iceluy soit A : Il faut d'iceluy point A esleuer vne ligne perpendiculaire au plan donné BC.

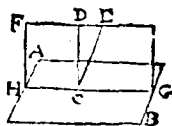


Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menée sur le plan BC, la perpendiculaire DE, par la precedente prop. laquelle rencontrant le plan BC au point A, on aura fait ce qui estoit requis : Mais si elle ne rencontre iceluy point A, mais quelque autre point E, dudit point A soit menée AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. il est euident que par la 8. prop. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuée sur le plan BC, ainsi qu'il estoit requis.

T H E O R. .II. P R O P. X I I I.

D'un mesme plan, & d'un mesme point
d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'un
mesme costé, deux lignes perpendi-
culaires.

Soit donné quelque plan com-
me AB, & le point en iceluy C:
ie dis que du point C, on n'esle-
uera pas en l'air deux lignes per-
pendiculaires sur iceluy plan, &
de mesme costé.

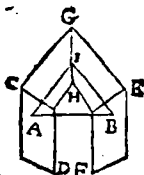


Autrement, s'il est impossible : du point C, soient
esleuées en l'air les deux perpendiculaires CD &
CE, elles seront en vn mesme plan, par la 2. prop. II.
& soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le
plan AB, au point C, n'est point parallele à iceluy
AB : partant estans continuez ils se couperont, &
leur commune section sera vne ligne droicte : soit
icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont
perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG
& DCG seroient droicts & egaux, la partie au tout:
ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du
point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB,
& de mesme costé. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 12. P R O P. X I V.

Si vne ligne droicte est perpendiculaire
à deux plans, iceux plans seront pa-
rallèles.

Soit la ligne droite AB , perpendiculaire à chacun des plans CD & EF : ie dis qu'iceux plans sont parallèles entr'eux.

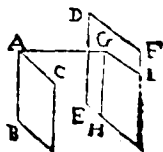


Autrement s'ils n'estoient parallèles, estans continuez ils se rencontreroient, & leur commune section fera vne ligne droite par la 3. prop. 11. soit icelle GH , en laquelle soit pris comme on voudra le point I , & soient d'iceluy menées les lignes IA , IB es plans GCD , GEF . Maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD , GEF , au triangle AIB les angles IAB & IBA , seront droits, contre la 17. prop. 1. donc les deux plans CD , EF ne se rencontreront point, ains seront parallèles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. xv.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan : les plans passans par icelles, seront aussi paralleles.

Soient les deux lignes AB & BC , se touchans au point A , paralleles à deux autres lignes DE , DF , s'entretouchans en D , & ne soient en vn mesme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par



icelles AB, AC est parallèle au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

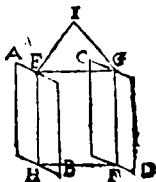
Car par la 31. prop. 11. de A soit tirée sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G : puis par la 31. prop. 1. au plan EF, soient tirées de G, les lignes GH, GI parallèles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH sont parallèles à DE, icelles AB, GH seront parallèles entr'elles, par la 9. prop. 11. & partant par la 29. prop. 1. les angles BAG, AGH sont égaux à deux droi&ts. Mais AGH est droi&t, par la 3. def. 11. Donc BAG sera aussi droi&t. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droi&t. Parquoy veu que la ligne GA est perpendiculaire aux deux AB, AC ; par la 4. prop. 11. elle sera aussi perpendiculaire à leur plan BC : Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 14. prop. 11. les plans BC, seront parallèles. Parquoy si deux lignes droi&tes s'entretouch&nt sont parallèles à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont coupez par vn autre plan ; les lignes de commune section seront paralleles.

• Soient les deux plans parallèles AB & CD, coupez par le troisième plan EF: le dis que leurs lignes de commune section (c'est à savoir HE & GF) sont parallèles.

Autrement, si elles n'estoient pa-

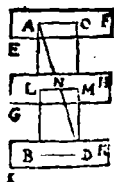


ralleles, estans continuées, elles se rencontreroient comme au poinct I : Mais d'autant qu'iceux plans AB, CD sont parallels, estans continuez ils ne se rencontreront iamais : il faudroit donc que les lignes HEI, FGI (lesquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors, ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HE & GF estans continuées ne se rencontrent point, & partant sont paralleles: Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont couppees par plusieurs plans parallels, elles seront couppees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, traversans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont couppees par iceux plans es poincts A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont couppees proportionnellement, c'est à dire que les segmens d'icelles intercepts entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.



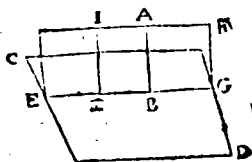
Car es plans EF, IK, soient menées les lignes droictes AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel soient menées les lignes LN, NM, au mesme plan GH : & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. sera en vn mesme plan : semblablement le triangle ADC en vn seul plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK sont coupeez par le plan

plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la 16. prop. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. prop. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droictes sont couppees par plusieurs plans parallels, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : le dis que tous les plans menez de la ligne AB, qu'elle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.



Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, couppant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque point H, duquel au plan EF soit menée HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posée perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpendiculaire au mesme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant par la 2. def. 11. aussi perpendiculaire à la com-

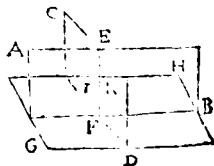
Vu

me section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirées au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 3. def. 11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecourent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE : ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.



Cas si elle n'est perpendiculaire au plan GH : puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte : soit icelle FB ; & du point F pris en icelle soit menée FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 4. def. 11. conuertie, elle sera

perpendiculaire au plan GH. Tout de mesme le plan CD estant perpendiculaire au plan GH, si à leur commune section DF, & du poinct F, on leue la perpendiculaire FK sur le plan CD, elle sera aussi par la mesme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'un mesme poinct esleuées perpendiculairement sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13. p. 11. Donc du poinct F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan GH, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FE. Parquoy si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonst rer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Je dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands que le troi s. BAC.



Car si on dict que BAC soit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit fait BAE egal à DAB par la 23 p. 1. & soient faictes egales les deux lignes AD, AE: puis apres au mesme plan soit menée par E la ligne droite BC, couppant les lignes

AB, AC, en B & C: & soient tirées les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD sont égaux aux deux costez A B & A E, & leurs angles égaux: la base DB sera égale à la base BE, par la 4. p. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est égal à l'un d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD: mais les deux costez EA & AC sont égaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC: & BD étant égale à BE, il est évident que au triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres: ce qui est contre la 20. p. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est égal, il s'en suyra par le même discours que BC est égale à BD & CD: ce qui contrevient tousiours à la 20. p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres. Parquoy si un angle solide est compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle solide, sôt plus petits que quatre angles droits.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Je dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre angles droits.



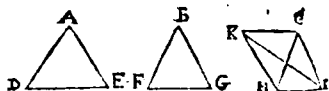
Car estans tirées les trois lignes droictes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D,

desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçavoir B, sous ABC, ABD, CBD: & C sous ACB, ACD, BCD: & D sous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 11. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisieme BCD, & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisieme BCD: Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC: & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts: (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux six angles avec les trois qui font l'angle solide A, vallent six droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) & qu'iceux six angles sont plus grands que deux droicts; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts: Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux, egales; il se peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plans A, B, C, cōtenus des lignes égales A D, A E,



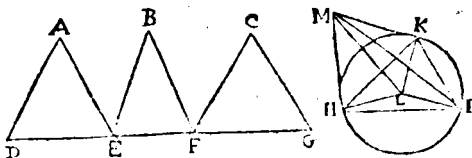
BF, BG, CH & CI: deux desquels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Je dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conjoignent icelles lignes égales, peut estre constitué vn triangle.

Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme : qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à HCI, on adiouite HCK égal à FBG par la 23. p. 1. & ayant fait Ck égal à B G : on tire Ik & Hk; l'angle ICK estant plus grand que le troisieme A, la base Ik par la 24. p. 1. sera plus grande que la base DE : (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, Hk qui par la 20. p. 1. sont plus grandes qu'icelles Ik, seront plus grandes que la troisieme DE. Et par mesme discours on monstrea toujours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisieme : Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit à demonstrier.

PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plâs, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans ABC, moindres que quatre droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.



Soient posées egales les six lignes droictes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soustenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit fait le triangle Hlk, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel soit circonscrit du cercle Hlk par la 5. p. 4. & du centre L soient menées les trois lignes LH, LI, LK : & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'un des costez d'iceux angles plans : puis soient menées les lignes HM, IM, kM : Je dis que HlMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, Lk estans egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, kM, seront egales, d'autant qu'elles peuvent autant l'une comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuvent autant que l'un des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez

d'iceux angles plans : puis les trois bases HI, IK, KH estans égales aux bases des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faisant l'angle solide au poinct M, seront égaux aux trois donnez A, B, C. Nous auons donc faict vn angle solide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E .

Si quelqu'un obiectoic icy que la perpendiculaire LM ne peut pas tousiours estre retrahée, en sorte que son quarré avec le quarré de LH soient égaux au quarré de l'un des costez des angles donnez : comme par exemple, si iceluy costé estoit égal ou plus petit que HL. Je dis que cela n'arrive iamais, non pas seulement qu'il soit égal à HL : Car si HL & IL estoient égaux à AD & AE : & la base HI égale à la base DE, par la 8. p. 1. (& ainsi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L seroient égaux aux trois angles A, B, C, chacun au sien : ce qui est euidentement faux : Car tousiours par hypothese les trois angles A, B, C, sont plus petits que quatre droicts ; & par le coroll. de la 15. p. 1. les trois au poinct L sont égaux à quatre droicts.

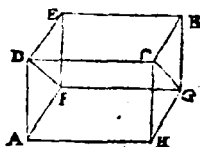
T H E O R. 21. P R O P. XXIV.

Si vn solide est compris de plans parallèles ; les plans opposez d'icelles seront parallogrammes semblables, & égaux.

Soit le solide AB compris de six plans parallèles AC, FB, AG, DB, AE, HB : Je dis que les plans opposez sont parallelogrammes semblables, & égaux.

Car puis que les plans AC & FB sont parallèles,

estans coupez par les plans AE & HB ; les lignes de commune section AD, FE sont paralleles : Item H C & GB, par la 16. prop. 11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de commune section AF & DE : Item GH & BC sont paralleles : partant AE & HB



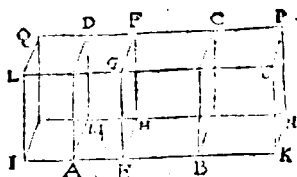
sont parallelogrammes. Par le mesme discours AG, DB ; AC, FB, le prouueront estre parallelogrammes. Je dis maintenant que les parallelogrammes opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, sont paralleles aux lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en opposez ; par la 10. prop. 11. les angles DAF, CHG, seront egaux : par mesme raison les autres angles du parallelogramme AE, seront egaux aux autres angles du parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC les costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogr. AG ; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux : & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG : veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG, du triangle HCG, & les angles DAF, CHG aussi egaux ; par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux : lesquels estans moitie des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogram. seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrera les autres parallelogrammes opposez AG, DB ; AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc vn solide est

compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. xxv.

Si vn ſolide parallelipede eſt couppe par vn plan parallel aux plans oppoſez, les ſolides couplez ſeront l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soit le ſolide parallelipede ABCD coupe par le plan EF parallel aux deux oppoſez AD & BC, & faict deux ſolides AF & EC: ie dis qu'iceux ſolides ſeront l'un à l'autre, comme la baſe AH à la baſe BH.



Qu'il ne ſoit ainſi : la ligne AB eſtant prolongee de part & d'autre, ſoient faictes egales AI à AE, & BK à BE ; & ſoient accomplis les parallelogrammes IM & BN : Item les ſolides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, ſont egales, les parallelogr. IM, AH ſeront auſſi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans oppoſez LD, GD ſeront ſemblables & egaux : Item AL, AG ſemblables & egaux à MQ, MF, plans oppoſez ; & ainſi des autres : & par la 9. def. de ce liure, le ſolide AQ eſt egal au ſolide AF. Par le meſme diſcours le ſolide BP ſera egal au ſolide FB : partant le ſolide IF eſt autant multiplie du ſolide AF, comme la baſe IH eſt multipliee de la baſe AH : Item le ſolide EP eſt autant multiplie du ſolide EC, comme la baſe EN eſt multipliee de la baſe

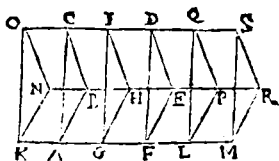
BH : & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC : desquelles de la premiere & troisieme, (sçavoir de la base AH & du solide AF) on a pris les equemultiples HI base, & IF solide : Item de la seconde & quatrieme, (sçavoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiples EN base, & EP solide, lesquels nous auons monsté estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prises : & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF au solide EC. Parquoy si vn solide parallelepipedé est coupé par vn plan parallel aux plans opposés, &c. Ce qu'il falloit demonstter.

S C H O L I E.

Ceste propos. se peut accommoder à tous prisme :

Car si quelconque prisme est coupé par vn plan parallel aux plans opposés ; tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car

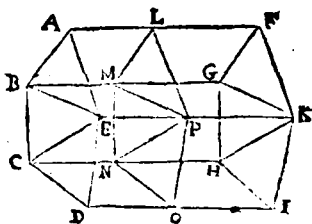
soit premierement le prisme ABCDEF, duquel les plans opposés sont les triangles ABC, DEF ; & soit iceluy coupé par le plan GHI parallel aux plans opposés. Je dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABCIHG est au solide



FEDIHG. Car soit imaginé le prisme $ABCDEF$ estre prolongé de pars & d'autre, tant qu'on voudra; & de AF prolongée soient prises Ak égale à GF , & FL , LM égales à FG : En apres par les points G, L, M , soient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallèles aux plans ABC, GHI, FED . Donc puis que les plans parallèles ABC, GHI , sont coupezz par le plan AI ; leurs communes sections AC, GI , seront parallèles par la 16. prop. 11. Mais à cause que AD est parallèle. AG, CI seront aussi parallèles. Donc AI est parallélog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH, CH estre parallélog. Et pource que les costez AC, AB , du triangle ABC , sont égaux aux costez GI, GH , du triangle GHI , (car par la 34. prop. 1. AC est égal à GI , & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI sont aussi égaux; (pource que les lignes AB, AC sont parallèles aux lignes GH, GI , & en divers plans) par la 4. prop. 1. les triangles ABC, GHI sont égaux entr'eux, & equiangle: Parquoy par la 4. prop. 6. les costez d'alentour les angles égaux, seront proportionnaux; & partant iceux triangles seront semblables. Donc le solide $ABCIHG$, contenu des deux plans opposez ABC, GHI égaux, & semblables, & des parallélog. AI, IB, GB , est vn prisme. Par mesme raison $ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM$ seront prismes: Et pource que les parallélogrammes AI, KC sont égaux & semblables, comme aussi AH, KB ; & CH, OB ; tous les plans du prisme $ABCIHG$, seront égaux & semblables à tous les plans du prisme $ABCONK$. Parquoy par la 9. def. 11. les prismes $ABCIHG, ABCONK$ sont égaux. Par mesme raison les prismes $GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM$ seront égaux. Partant le prisme $KNOIHG$ sera autant multiple du prisme $ABCIHG$, que la base KI , de la base AI ; & le prisme $GHISRM$ autant multiplie du prisme $GHIDEF$, que la base GS de la base GD . Et pource que si la base KI , multiplie de la base AI premiere gran-

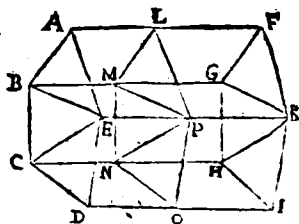
deur) est égale à la base GS , (multiplie de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme $KNOIHG$, (multiple du prisme $ABCIHG$ 3. grandeur) est égal au prisme $GHISRM$, (multiple du prisme $GHIDEF$ 4. grandeur :) Mais si la base KI est plus grande que la base GS , aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. d. 5. comme la base AI première grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme $ABCIHG$ 3. grandeur sera au prisme $GHIDEF$ 4. grandeur. En la mesme maniere on démontrera que le prisme est au prisme, comme la base AI est à la base GE , & comme la base GH est à la base EI . Ce qui estoit proposé.

Soit maintenant le prisme $ABCDEFGHKL$, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçavoir pentagones, & soit coupé par le plan $LMNOP$. Je dis derechef, que comme la base CM est à la base NG ,



ainsi est le solide $ABCDELMNOP$, au solide $LMNOPFGHIK$. Car si les plans opposez parallels sont resonds en triangles; aussi le prisme sera resond en autant de prismes qu'il y aura de triangles es plans opposez. Parquoy comme la base BP sera à la base MK , ainsi le prisme $ABEPML$ sera au prisme $LMPKGE$, par les choses demonstrees cy dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK , ainsi le prisme $BCEPMN$ sera au prisme $MNPkGH$; & le prisme $CDEPNO$ au prisme $NOPkHI$. Mais par la 1. prop. 6. comme BP est à MK ; & CP à NK , ainsi est la ligne EP à la ligne PK , c'est à dire comme CN est à NH , & comme CN est à NH , ainsi est CM à NG . Donc les prismes $ABEPML$,

BCEPMN, CDEPNO, ont mesme raison aux prismes
 LMPKGF, MNPK
 GH, NOPKHI, que
 CM à NG, & partant
 ont la mesme entre-
 eux. Mais par la 12.
 prop. 5. comme vn seul
 est à vn seul, ainsi sont
 les trois aux trois. Donc
 comme le prisme BC
 EPMN sera au prisme MNPKGH, c'est à dire comme la
 base CM à la base NG, ainsi le prisme ABCDELMPN
 composé des trois sera au prisme LMNOFGHIK compo-
 sé des trois. Ce qui estoit proposé. Il y aura mesme demonstration
 en quelconque autre prisme.



COROLLAIRE.

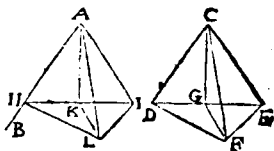
De cecy resulte que si quelconque prisme est coupé par un
 plan parallel aux plans opposez, que la section est une figure
 egale & semblable aux plans opposez. Car il a esté demonstre
 au premier prisme que le triangle GHI est egal, & semblable
 au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a mes-
 me demonstration en tous. Le mesme se doit entendre des pa-
 rallélipèdes.

PROBL. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte, & à vn poinct
 donné en icelle, constituer vn angle
 solide egal à vn angle solide donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, & le poinct ex

icelle A ; & il faut construire sur icelle AB, & au point A, vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.



Soit tirée de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. p. 11. & soient menées les lignes DF, FE, EG, GD, CG : en apres soit prise AH égale à CD : & par la 23. propos. 1. soit fait l'angle HAI égal à l'angle DCE : & la ligne AI égale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, soit fait l'angle HAK égal à l'angle DCG : & la ligne AK égale à la ligne CG : puis par la 12. prop. 11. de K soit tirée au plan auquel sont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL : laquelle soit posée égale à FG, & soit menée la ligne AL. Je dis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est egal à l'angle solide donné C.

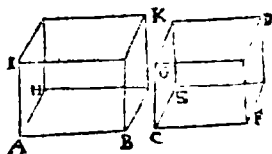
Car estans menées les lignes HK, KI, IL, LH : veu que les costez AH, AK du triangle AHK, sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la construction : les bases HK, DG seront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, estans ostez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes egales, par la 4. prop. 1. les bases KI, GE, seront aussi egales. Les costez KH, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts : donc par la mesme 4. prop. 1. les bases HL, DF, seront egales. Parquoy puisque les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF : (car les costez AK,

kL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprenant angles droicts : partant les bases AL, CF sont egales par la 4.p.1.) les angles HAL DCF seront pareillement egaux par la 8.p.1. finalement, pource que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droicts ; par la 4. prop. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8.p.1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composant l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composant l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C : ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn solide parallelipede semblable, & semblablement posé à vn solide parallelipede donné.

Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallelipede sēblable, & semblablement posé au parallelipede donné CD.



Sur la ligne AB & au poinct A, soit fait vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. prop. 11. lequel soit

soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH: & par la 12. propos. 6. soit fait comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH: & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant paracheuez les parallelogr. BH, HI, BI, Bk, kI, kH. le dis que le solide AX est semblable & semblablement posé au solide CD donné.

Car ils ont autant de superficies planes l'un comme l'autre: & d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI égal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelogr. FG: par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelog. du solide Ak sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide Ak sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD: & partant par la 8. definition de ce liure les solides AX & CD seront semblables & semblablement posez. Nous auons donc sur vne ligne droite donnée, décrit vn parallelipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

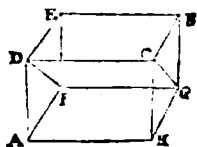
THEOR. 23. PROP. xxviii.

Si vn solide parallelipede est couppé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez, il sera couppé en deux egalement.

Soit le solide parallelipede A'B couppé par vn

Xx

plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Je dis qu'il est couppe en deux egalement.



Car il est euident par la 34. prop. 1. que les triangles ADF, EFD, sont egaux : item les deux CGH & GCB ; & le plan AG egal & semblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont compris de parallelogrammes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9. def. de ce liure iceux prismes sont egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelepiped AB : iceluy sera couppe en deux egalement par le plan DCGF. Si donc vn solide parallelepiped est couppe par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

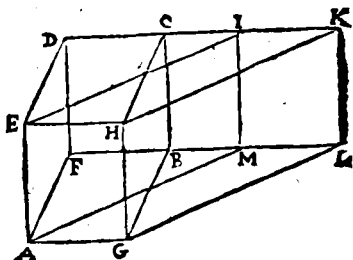
THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipedes ayans mesme base, & mesme hauteur, & desquels les plans opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipedes ABCDEFGH, ALKIEHGM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur, ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes Dk & FL : ie dis qu'ils

ceux deux solides parallelipipedes sont egaux entr'eux.

Ceste demonstration est facile à iceluy qui a bien conceu celle de la 55. prop. 1. Car ce que celle-là prouue des parallelogrâmes par les triangles



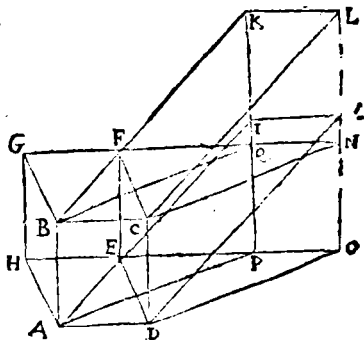
egaux, ausquels on oste & adioust: ceste-cy le prouue des parallelipipedes par les prismes egaux, desquels on retranche & adioust vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKGH, seront monstrez egaux par la 24. prop. 11. parce que les plans opposez des parallelipipedes sont semblables, & egaux: & d'iceux sont faicts les prismes. Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 25. PROP. xxx.

Les solides parallelipipedes cōstituez sur mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plans opposez à leur base ne sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient deux solides parallelipipedes ABCDEF GH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base

ABCD, & de
mesme hauteur
(c'est à dire que
leurs plans oppo-
sez, & parallels à
leur base ABCD,
sçauoir GE & KM
soient en vn mes-
me plan, lequel
soit parallel à la
base AC) : ie dis
qu'ils sont egaux
entr'eux, encores



que les plans GE & KM opposez à leur base commune AC, ne soient entre mesmes lignes droictes.

Car puis que les plans GE & KM sont en vn mes-
me plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droi-
ctes : il est certain que deux costez de l'un estans
continuez, couperont deux costez de l'autre aussi
continuez. Soient donc les costez GE, HE continuez
vers N & D : Item KI, LM vers P & O : elles se coup-
peront donc aux poincts Q, N, P, O, faisant vn pa-
rallelogramme, (d'autant que les lignes continuees
sont paralleles) lequel sera egal à la base plane AC :
Car par la 34. prop. 1. les lignes QP & NO estans
egales à GH, FE, elles le seront aussi à BA & CD :
item PO & QN estans egales à IM & KL, elles le
seront aussi à BC & AD : & apres auoir mené les
quatre lignes AP, DO, BQ, CN : il est manifeste que
les deux solides AF, AN, sont sur mesme base, & de
mesme hauteur ; (car ils sont entre mesmes plans)
& les plans HF, PN opposez à la base AC, entre
mesmes lignes droictes, & par la 29. prop. 11. ils sont
egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estans sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes ligne droictes) & par la 1. commune sentence le solide AF sera egal au solide AL. Parquoy les solides parallelipipedes constituez sur mesme base, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

S C H O L I E.

On conuertira sans ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'un est plus haut, si d'iceluy on coupe un parallelipede de mesme hauteur que l'autre, le couppé & l'autre seront egaux, par la 29. ou 30. propos. 1. & puis que cest autre est posé egal au tout, le couppé sera egal au tout. Ce qui est absurde.

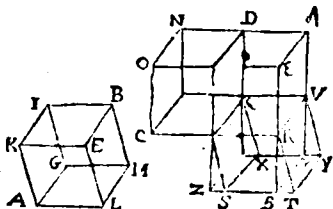
THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipipedes AB, CD constituez sur bases egales AE & CF, & de mesme hauteur AG, CH. Je dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit: leurs hauteurs sont perpendi-

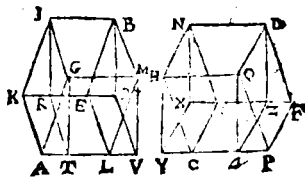
culaires, ou non : Soient premierement perpen-
culaires : & apres
auoir continué CP
iusques à R, & faict
PR egale à KE, au
plan de OP prolon-
gé, soit faict l'angle
RPS egal à l'angle
AKE, & faict PS ega-



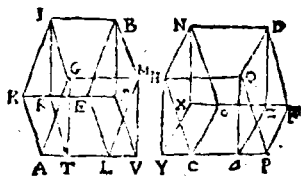
le à KA : puis soit acheué le parallelogramme PT,
sur lequel soit construit le parallelepiped QSTV
à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis
que les costez PR, PS sont egaux aux costez Ek,
kA, & les angles RPS, EkA egaux, les parallelo-
grammes PT, kL seront egaux & semblables. De-
rechef puis que les costez PQ, PS sont egaux aux
costez kl, kA, & les angles QPS, IkA droicts par
la 2. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ sont posees
perpendiculaires aux plans AE, PT : aussi les paral-
lelogrammes QS, AI, seront egaux, & semblables.
Par mesme railon, d'autant que les costez PR, PQ
sont egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ,
EkI droicts par la mesme 2. def. 11. pareillement les
parallelogrammes PV, KB seront egaux & sembla-
bles. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS,
PV, du parallelepiped QSTV sont egaux & sembla-
bles aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la
24. p. 11. tår ceux-là que ceux-cy seront egaux & sem-
blables à leurs autres parallelogrammes opposez : &
partant par la 9. definit. de ce liure les paralleli-
pedes AB, SV seront egaux entr'eux. Maintenant
que t P, TS prolongees se rencontrent en Z : &
DQ, YX, en 4, & soit acheué le parallelepiped ZV.
Item que DN, V prolongees se rencontrent en 4,

& OF, BR, en $\ast$, & soit acheué le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & sont en mesme hauteur, & que les plans SY, ZY, opposez à la base, sont entre mesmes lignes droictes ZT, AY: iceux solides seront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV est egal au parallelipipede AB: donc le parallelipipede ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. prop. 1. les parallelogrammes PT, PB sont egaux, & PT egal à AE, aussi PB sera egal au mesme AE, c'est à dire à CF (car AE, CF sont posees bases egales): & par la 7. prop. 5. comme CF sera à P $\ast$, ainsi PB sera à P $\ast$: & par la 25. prop. 11. comme la base CF est à la base P $\ast$, ainsi le solide CD est au solide P $\ast$, puis que le parallelipipede CS est couppé par le plan PD parallel aux plans opposez CN, R $\ast$: Par la mesme raison comme PB est à P $\ast$, ainsi le solide ZV au solide P $\ast$, pource que le parallepipede DB est couppé par le plan PV parallel aux plans opposez. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipipedes CD, ZV seront egaux, puis qu'ils ont mesme raison au solide P $\ast$, sçauoir est la mesme qu'ont les bases CF, PB, à la base P $\ast$. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a esté demonstté egal au parallepipede AB: les parallelip. AB & CD seront pareillement egaux: ce qui estoit proposé.

Maintenant, si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires, sur les bases AE, CF, soient tirees des points (apres auoir continué les lignes AL, KE & BC, FO, tant qu'il sera



de besoin) G, I, B, M,
& H, N, D, Q, & sur
les plans d'au-dessous
d'iceux points les per-
pédiculaires GT, IR,
BS, MV, & HY, NX,
DZ, Qa, par la 11. p. 11.
& soient tirées RT,



SV, XY, Za. Il est évident par ce qui a esté demon-
stré cy dessus que le solide TB est égal au solide YD,
car ils sont sur bases égales GB, HD : & de même
hauteur : Mais par la 29. prop. 1. le solide TB est égal
au solide AB; & le solide YD égal au solide CD: donc
le solide AB sera égal au solide CD. Parquoy les so-
lides parallelepipedes estans sur bases égales, &c. Ce
qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

On convertira ceste 31. prop. en ceste maniere.

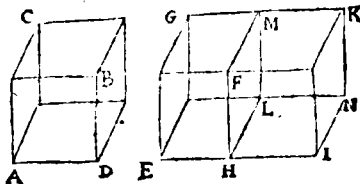
Les solides parallelepipedes égaux, constituez sur
bases égales, sont en même hauteur : & les solides
parallelepipedes égaux, qui sont en même hauteur:
sont sur bases égales, s'ils n'ont vne même base.

Car si on croit l'un plus haut que l'autre: si on coupe du plus
haut un parallelipip. de même hauteur que l'autre: par la
31. prop. 11. le couppé sera égal à l'autre, auquel est aussi posé
égal le tout : parquoy le couppé sera aussi égal au tout : ce qui
est absurde. Que si les parallelipip. estans de même hauteur,
on croit que la base de l'un soit plus grande que la base de l'aut-
re : si on coupe d'icelle base vne égale à l'autre, & sur icelle
couppé on entend estre un parallelipipede de même hauteur,
nous démonstrerons en la même maniere, la partie estre égale
au tout: ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les solides parallelipipedes de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallelipipedes de mesme hauteur $ABCD, EFGH$, desquels les bases soient AB, EF . Je dis que le solide est au solide comme la base à la base.



Car, si sur la ligne HF , (après avoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallelogramme FI égal au parallelogramme AB ; puis on achève le solide $IFLK$; iceluy estant de mesme hauteur que le solide $ABCD$, & sur base égale, il luy sera égal par la 31. prop. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le solide $IFkL$ est au solide $EFGH$, ainsi le solide $ABCD$ au mesme solide $EFGH$. Mais par la 25. prop. 11. le solide $IFkL$ est au solide $EFGH$, comme la base IF , c'est à dire AB à la base EF : Donc aussi le solide $ABCD$, sera au solide $EFGH$, comme la base AB à la base EF . Parquoy les solides parallelipipedes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

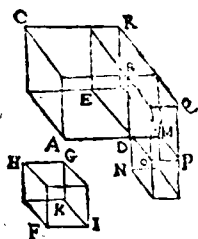
La converse: si les solides parallelipipedes sont en-

tr'eux comme leurs bases ; ils seront en mesme hauteur. Car si l'une des hauteurs est plus grande que l'autre, de la plus grande en soit couppée une egale à la moindre, & puis soit tiré un plan parallele à la base ; & par la 32. prop. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelipede sera au parallelipede couppé : mais ainsi il estoit aussi au parallelipede total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 5. ce qui est absurde.

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelipedes, sont l'un à l'autre en raison triplée de leurs costez homologues.

Soiēt deux semblables parallelipedes ABCDBFGHIK constituez sur les bases semblables AE, Fk, esquelles les costez homologues sont AD, FI. Je dis que le parallelipede ABCDE est au parallelipede FGHIK en raison triplée des costez homologues AD, FI.



Qu'ainsi ne soit : soit prolongé AD vers M, tellement que DM soit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en sorte que DN soit egale à LI ou Gk : Item ED vers O, tellement que DO soit egale à kl ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO, soit acheué le parallelipede NMP. Il est donc evident que les deux parallelipedes FG, NP sont semblables & egaux, puis qu'ils sont composez de plans qui ont les angles egaux, &

les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construits les parallelipipedes $BMOQ$, & $EBRM$. D'autant que les parallelipipedes $ABCD$, $FGHI$, sont semblables, comme AD est à FI , c'est à dire à DM , ainsi DE à KI , c'est à dire à DO ; & BD à LI , c'est à dire à DN . Mais par la 1. p. 6. comme AD à DM , ainsi est le parallelog. AE , au parallelog. EM ; & comme ED à DO , ainsi le parallelog. EM à DP ; & comme BD à DN , ainsi le parallelogramme BM à MN . Donc comme AE sera à EM , ainsi EM à DP , & BM à MN . Mais par la 32. p. 11. comme la base AE à la base EM , ainsi est le parallelip. $AECB$ au parallelip. $EMRB$: & comme la base EM est à la base DP , ainsi le parallelipede $EMRB$ est au parallelip. $DPBQ$: & comme la base BM est à la base MN , ainsi le parallelipede de $DPBQ$ au parallelipede NP . Parquoy comme le parallelipede $AECB$ sera au parallelipede $EMRB$, ainsi le parallelipede $EMRB$ sera au parallelipede $DPBQ$; & le parallelipede $DPBQ$ au parallelipede NP : Partant les quatre quantitez $AECB$, $EMRB$, $DPBQ$, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. def. 5. la premiere $AECB$ sera à la 4. NP , c'est à dire à FG , en raison triplée de la premiere $AECB$ à la seconde $EMRB$. Mais par la 32. prop. 11. comme $AECB$ est à $EMRB$, ainsi la base AE , est à la base EM ; & par la 1. prop. 6. comme AE est à EM , ainsi AD est à DM , c'est à dire à FI . Donc par la 11. pr. 5. $AECD$ sera à $EMRB$ comme AD à FI : partant la raison triplée de $AECD$ à $EMRB$, sera la même que AD à FI ; & par consequent $AECD$ estant à FG en raison triplée de $AECD$ à $EMRB$; il sera aussi en raison triplée de AD à FI . Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

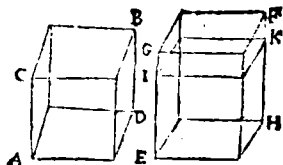
COROLLAIRE.

Parcecy est evident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la quatriesme, ainfile parallelipede décrit sur la premiere, est au parallelipede semblable, & semblablement décrit sur la seconde. Puis que tant le parallelipede est au parallelip. que la premiere ligne à la quarte en raison triplée de la raison de la premiere ligne à la seconde, sçavoir des costez homologues.

THEOR. 22. PROP. XXXIV.

Les egaux solides parallelipedes, ont les bases & les hauteurs reciproques;
Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient egaux les parallelipedes ABCD, EFGH sur les bases A D, E H. Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques,



c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.

Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que si les bases AD & EH sont egales, (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egales. Soient donc les bases inegales, sçavoir AD plus grande que DH. Je dis que la hauteur EG doit

estre plus grande que CA : car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 32. prop. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre comme leurs bases ; partant AB plus grand que EF, & nous les auons posez egaux : La hauteur EG sera donc plus grande que CA, & d'icelle soit retranchée EI egale à CA, & d'iceluy poinct I soit imaginé que le plan IK parallel à EH, coupe le parallelipipe EF : Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'un comme l'autre au solide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'un à l'autre comme la base AD à la base EH, par la 32. prop. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallelipipe de EF est au parallelipipe de EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. prop. 11. & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1. prop. 6. & partant par la 11. prop. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG à EI. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH : Donc par la 11. prop. 5. comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son egale AC.

Pour la seconde partie, si AD base est à EH base, comme EG hauteur est à AC hauteur. Je dis que les deux solides AB, & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est evident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posées en mesme raison ; & partant par la 31. prop. 11. les parallelipipedes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC, soit retranchée d'icelle EI, egale à AC, & par I soit tiré le plan IK, parallel à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH,

ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont egales : Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK : (car ils sont de mesme hauteur,) donc cōme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au mesme solide EK, puis que par l'hypothese AD est à EH comme EG à AC ou EI : partant par la 9. prop. 5. les solides AB, EF seront egaux. Donc les egaux solides parallelipipedes, ont les bases, & les hauteurs reciproques, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des solides doivent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, les y faudroit reduire, comme nous auons fait à la fin de la 31. prop. de ce liure.

Or toutes les choses que nous auons demonstrees es 6. precedentes propositions, sçauoir es 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, obseruant les susdites hypotheses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, & constituez sur une mesme base, ou sur bases egales, on appose deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront faitz deux parallelipipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesme, ou bases egales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. prop. 11. seront egaux iceux parallelipipedes ; & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçauoir les moitiez d'iceux parallelip.

Derechef si aux deux prismes susdits de mesme hauteur, & constituez sur diuerses bases, on adioinct deux autres prismes egaux, & semblables à iceux ; seront faitz derechef deux parallelipipedes de mesme hauteur : Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelipiede sera au parallelip. comme la base à la

base ; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçavoir la moitié de l'un des parallélip. à la moitié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallélogrammes, ou comme le triangle au triangle, sçavoir est la moitié d'une base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

D'auantage, si à iceux deux prismes semblables, on adionste deux autres prismes égaux & semblables à eux seront constitués deux parallélip. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplée des costez homologues. Donc aussi par la 15. p. 5. les prismes, sçavoir est les moitiés d'iceux, auront la raison triplée de mesmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

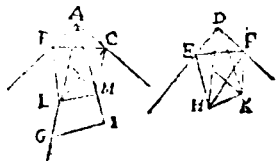
Finablement, si aux deux susdits prismes égaux, on adionste deux autres prismes égaux & semblables à iceux, seront constitués deux parallélip. égaux de mesme hauteur que les prismes: Parquoy par la 34. p. 11. puis que les bases, & les hauteurs des parallélip. sont reciproques, & les bases des prismes sôt les mesmes, ou les triangles moitiés d'icelles, ayant mesme raison par la 15. p. 5. Aussi les bases & hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. xxxv.

S'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels soient leuées en l'air deux lignes droictes faisant angles égaux avec les costez des angles premierement posez, chacun au sien; & d'un point pris au haut de chacune des deux lignes sont menées des lignes perpendiculaires sur les plans

esquels sont les angles premierement posez , & des poinçts où tombent icelles perpendiculaires sont tirées des lignes droictes vers les sommets des angles premierement posez : Les angles que font icelles lignes , avec les leuées en l'air sont egaux entr'eux.

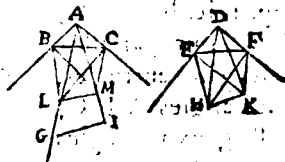
Soient les deux angles plans egaux BAC , EDF , du sommet desquels A & D , soient leuées en l'air les lignes droites AG , DH ,



tellement que l'angle BAG est egal à l'angle EDH : & l'angle CAG egal à l'angle FDH : & des poinçts G & H pris és lignes AG , DH , soient tirées aux plans esquels sont les angles BAC , EDF , les perpendiculaires GI , HK , tombantes és poinçts I , K , desquels soient menées les lignes IA , DK . Je dis que les angles GAI , HDK , sont egaux entr'eux.

Car si les deux lignes AG , DH sont inegales, de la plus grande AG , soit retranchée AL egale à DH : & de L au plan du triangle AGI , soit tirée LM parallele à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. II. puis que GI est perpendiculaire à iceluy plan. Soient aussi tirez des poinçts M , K , les lignes MB , MC , KE , KF , perpendiculaires aux lignes AB , AC , DE , DF ; & soient menées les lignes BC , BL , LC , EF , EH , HF . Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC ,

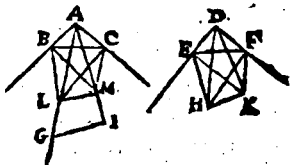
B A C, elle le sera aussi à la ligne AM tirée au même plan par la 2. d. 11. partant par la 47. prop. 1. le carré de AL sera égal aux car-



rez de AM, ML: mais par la même prop. le carré de AM est égal aux carrés de AC, CM, puis que l'angle ACM est droit par la construction. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AC, CM, ML: Et par la 47. prop. 1. le carré de CL est égal aux carrés de CM, ML, puis que par la 2. d. de ce livre, l'angle CML est droit. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AC, CL: & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL est droit. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le carré de AL est égal aux carrés de AM, ML: & le carré de AM est égal aux carrés de AB, BM, l'angle ABM étant droit par la construction: le carré de AL est égal aux carrés de AB, BM, ML: mais le carré de BL est égal à ceux carrés de B M, ML, pource que l'angle BML est droit par la 2. def. 11. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AB, BL: & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL sera droit. On démontrera en la même manière que les angles DFH, DEH sont aussi droits. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL sont égaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les costez AL, DH aussi égaux, par la 26. prop. 1. les autres costez AB, BL seront pareillement égaux aux autres costez DE, EH. Par même raison seront égaux les costez AC, CL, aux costez DF, FH. Parquoy les costez AB, AC du triangle ABC, estans égaux aux costez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF aussi égaux, par la 4.

Y y

prop. 1. les bases BC , EF , seront pareillement égales entr'elles, & les angles ABC , ACB égaux aux angles DEF , DFE . Mais tous



les angles ABM , ACM , sont égaux à tous les angles DEK , DFK , puis qu'ils sont tous droicts : Donc aussi les autres angles $BM C$, MCB seront égaux aux autres angles KEF , KFE ; & partant puis que les costez BC , EF , ont esté démontrés égaux; les costez BM , CM , seront égaux aux costez EK , FK , par la 26. prop. 1. veu donc que les costez AC , CM , du triangle ACM sont égaux aux costez DF , FK du triangle DFK . & les angles ACM , DFK sont droicts, par la 24. prop. 1. les bases AM , DK seront égales. Et puis que BL , EH ont esté démontrées égales, leurs quarrés seront aussi égaux : Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL est égal aux quarrés de BM , ML , & le quarré de EH aux quarrés de EK , KH , pource que les angles BML , EKH sont droicts, par la 2. def. 11. Donc les quarrés de BM , ML seront égaux aux quarrés de EK , KH : & partant estans ostés les quarrés de BM , EK , qui sont égaux, les lignes BM , EK , ayant esté démontrées égales; resteront égaux les quarrés de LM , HK , & partant les lignes LM , HK seront égales. Parquoy veu que les costez AL , AM du triangle ALM , sont égaux aux costez DH , DK du triangle DHk , & la base LM égale à la base Hk ; les angles LAM , HDK seront égaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans égaux, aux sommets desquels soiēt leuées en haut deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

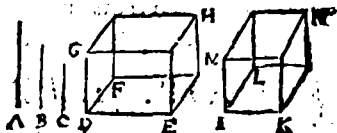
C O R O L A I R E.

Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, les sommets desquels soient eslevés en l'air des lignes droictes egales, lesquelles avec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles egaux, chacun au sien; les perpendiculaires tirées des points extremes d'icelles lignes eslevées en l'air, sur les plans des angles premierement posez, seront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC , EDF , sont posez egaux, & les lignes egales AL , DH eslevées en haut constituent les angles egaux LAB , HDE ; Item LAC , HDF ; il a esté démontré que les perpendiculaires LM , HK , sont egales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. xxxvi.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles; le solide parallelepipedé compris d'icelles trois lignes, est egal au solide parallelepipedé compris de la moyenne, pourueu qu'iceux deux solides soient equiangles.

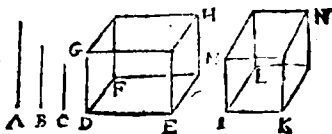
Soiét trois lignes continuellement proportionnelles A , B , C : & soit constitué vn angle solide D , de trois



quelconques angles plans EDF , EDG , FDG , tellement que la ligne DE soit egale à A , & DG à B , & DF egale à C ; & soit accompli le parallelepipedé DH :

Y y ij

en apres par la 26.
p. 11. sur la ligne Ik
egale à B. & au
point I soit fait
l'angle solide I des
trois angles plans



KIL, kIM, & kIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG:
tellement que les lignes Ik, IL, IM soient egales à la
moyenne B; & soit fait le parallelipede IN. Je
dis que les solides DH, IN sont egaux.

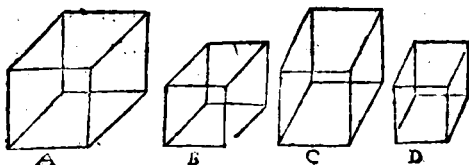
Car puis que comme DE est à Ik, ainsi IL à DF:
(car DE est egale à A; IK, IL à B; & DF à C), & les
angles EDF, kIL egaux; les parallelog. EI, kL seront
egaux par la 14. p. 6. pource qu'ils ont les costez au
long des angles egaux reciproques. Et d'autant
qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, kIL
sont esleuez en l'air les lignes egales DG, IM, les-
quelles avec les lignes des angles premierement po-
sez comprennent angles egaux, vn chaepn au sien: les
perpendiculaires tirees de G, M, sur les plans des ba-
ses EF, kL; (sçavoir est les hauteurs des parallelip.
DH, IN) seront egales entr'elles par le corollaire de
la preced. prop. Parquoy par la 31. p. 11. les parallelip.
DH, IN, seront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les
bases EF, kL egales, & pareillement les hauteurs
egales. Parquoy si trois lignes droictes sont propor-
tionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

THEOR. 32. PROP. xxxvii.

Si quatre lignes droictes sont propor-
tionnelles, les solides parallelipedes
semblables, & semblablement descrits
sur icelles, seront proportionaux: Et

si iceux quatre semblables solides parallelipipedes sont proportionaux ; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez , seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles , comme A, B, C, D : & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Je dis qu'iceux solides sont proportionaux.



Car puis que le solide A est semblable au solide B : par la 33. p. 11. ils seront l'un à l'autre en raison triplée de la ligne A à la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplée de C à D : mais la raison de A à B, est cōme de C à D par l'hypothese. Donc la raison triplée de A à B, sera semblable à la raison triplée de C à D ; & partant par la 11. p. 5. le solide A sera au solide B, cōme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplée de la ligne A à la ligne B : Item le solide C au solide D, en raison tri-

plée de C à D: mais le solide A est au solide B comme le solide C au solide D: partant leur raison triplée sera semblable; & par conséquent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportionnelles. Parquoy si quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy cest autre theoreme.

Si quatre lignes droictes sont continuellement proportionnelles: le parallelipede compris sous le quarré de l'une des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyenne proportion. plus prochaine de la premiere extreme prise.

Soient quatre lignes continuellement proportionnelles A, B, C, D. Je dis que le parallelipede compris sous le quarré de l'extreme A, & sous le quarré de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

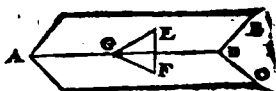
Car puis que par le corol. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D: les bases avec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallelipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy; & la base du cube est le quarré de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc par la 34. p. 11. le parallelipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le parallelip. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré de l'autre extreme A, sera demonstté egal au cube de la moyenne proportion. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan est eleué perpendiculaire-

mēt sur vn autre plan, & d'un poinct de l'un d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre, elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan AB, esleué perpendiculairement sur le plan AC, leur ligne de cōmune section AD;



& du poinct E pris en AB on laisse tomber vne perpendiculaire sur le plan AC : ie dis qu'elle tombera sur la commune section AD.

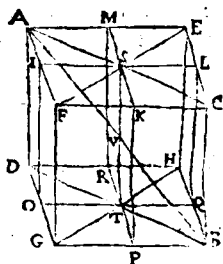
Autrement qu'elle tombe au poinct F, du plan AC, s'il est possible : & par la 12. prop. 1. du poinct F sur la ligne AD soit menée la perpendiculaire FG; & la ligne GE faisant le triangle GFE. Or si la ligne EF est perpendiculaire au plan AC, elle le sera aussi à la ligne FG : & icelle FG estant perpendiculaire à la commune section AD, elle le sera pareillement au plan AB : & par consequent à la ligne GE : partant au triangle GFE, les deux angles sur la ligne GF seroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E sur le plan AC ne tombera pas hors la commune section AD, mais elle tombera en icelle. Parquoy si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'un so-

lide parallelepipedes, sont coupeez en deux egalement ; & on mene des plans par les sections : la ligne de commune section d'iceux plans, & le diametre du solide parallelepipedes, se couperont en deux egalement.

Soit le parallelepipedes AB; les plans opposez AC, BD, desquels tous les costez soient coupeez en deux egalement es points I, K, L, M, O, P, Q, R, par lesquels soient imaginez passer les plans I, Q, K, R, se couppans l'un l'autre en la ligne ST : & soit mennee la diagonale AB : Je dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entre coupent en deux egalement.



Car estans tirees les lignes SA, SC, TD, TB : soient considerez les deux triangles BQT, DOT, desquels les deux costez BQ, QT sont egaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moitez des lignes droictes egales BH, DG : & par la 34. p. 1. QT, OT, sont egaux aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO sont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. prop. 1. est egal à l'interne DOT : partant par la 4. prop. 1. les bates BT, DT seront aussi egales : & les angles BTQ, DTO pareillement egaux : Et par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi DTO, BTQ sont egaux à deux droicts : & partant par la 14. p. 1. BT,

DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demonstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioignent les extremittez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par conséquent AS, BT moitiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront avec icelles en vn mesme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecouperont en vn poinct, sçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. prop. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BT V, BVT du triangle BT V., & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalelement au poinct V. Parquoy si les costez des plans opposez d'un solide parallelipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E..

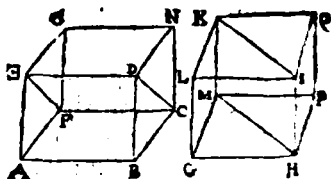
Par cery est euident qu'en tout parallelipede, tous les diametres s'entrecouppent en deux egalelement en vn seul poinct, sçauoir est au poinct V, auquel ils diuisent en deux egalelement la ligne ST. Est aussi manifeste que tout plan qui coupe le parallelipede en deux egalelement passe par le centre d'iceluy, sçauoir par V.

T H E O R. 35. P R O P. XL.

Deux prismes de mesmes hauteur sont

egaux, si la base de l'un triangulaire n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.

Soient deux prismes de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKLM$; & que celui-là ait pour base le parallelogramme $ABCF$, double du triangle GHM base du prisme $GHIKLM$. Je dis qu'iceux prismes sont



egaux.

Car si on les accomplit pour estre solides parallelipedes AN , GQ , la base GN sera egale à la base BF : & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. prop. 11. les plans diagonaux CD EF , $HlkM$ les diuiseront en deux egalement, & parant les prismes donnez au commencement estans les moitez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnziesme Element.



ELEMENT

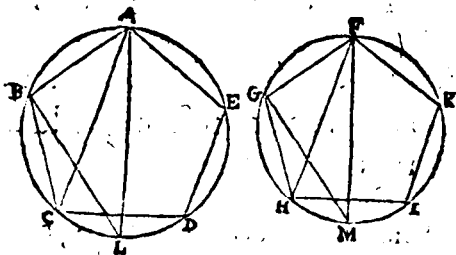
DOVZIESME.

THEOR. I. PROP. I.



Es polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'un à l'autre comme les quarez descrits des diametres des cercles.

Soient
deux po-
lygones
sembla-
bles. AB
CDE &
FGHIK,
inscrits
dans les
cercles,



desquels les diametres sont AL, FM. Je dis qu'iceux polygones sont l'un à l'autre comme les quarez des diametres AL, FM.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes AC, FH, item BL, & GM. D'autant que les pentagones sont semblables, AB est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC, egal à l'angle FGH; par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG. Mais ils sont chacū egaux, l'un à l'angle L, l'autre à l'angle M, par la 21. prop. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG.) Ainsi l'angle L sera egal à l'angle M: & par la 31. p. 3. les angles ABL, FGM estans droicts dans les demy cercles, & egaux, les triangles ABL, FGM seront equiangles: (car le troisieme sera egal au troisieme, par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG; & en permutant comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. p. 6. comme le pentagone descrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL au quarré de FM. Parquoy les poligones semblables inscrits aux cercles, &c. Ce qui estoit à prouver.

T H E O R. 2. P R O P. II.

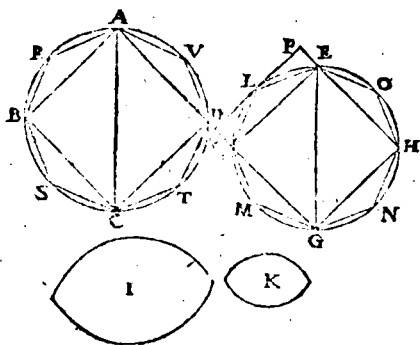
Les cercles sont l'un à l'autre, comme
les quarrez descrits de leurs diame-
tres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, descrits sur les deux diametres AC & EG: Je dis qu'ils sont l'un à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG; c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC, au quarré EG, ainsi le cercle ABCD

à quelque figure quatriefme proportion. (comme I) qu'icelle figure I est egale au cercle E F G H.

Autremēt elle sera plus petite ou plus grande.

Qu'elle soit premierement plus petite, s'il est possible: & soit le cercle E F G H plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle E F G H, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K: Soit donc dans iceluy cercle E F G H décrit le quarré E F G H, qui est plus grand que la moitié du cercle: (d'autāt que le quarré de E G, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petite, qu'e k, nous auons ce que nous demandons: Sinon soit couppe l'arc E F en deux egalemēt au point L, & les trois autres arcs semblablement es points M, N, O: & soient tirees les lignes E L, L F, F M, M G, G N, N H, H O, & O E, afin d'auoir l'octogone E L F M G N H O, inscrit dans le cercle: Il est euident que dans les quatre sections egales, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme E L F, est plus de la moitié de la section: (car le triangle Ifofcele F L E est la moitié du rectangle F P de mēme hauteur, & sur mēme base F E, par la 41. prop. 1. lequel rectangle est



plus grand que le segment F L E). Soient maintenant les huit petites figures restantes plus petites que la figure K , que si cela n'estoit, il faudroit toujours couper les arcs derniers, & toujours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent , & soustraire toujours plus de la moitié de chacune section , sçauoir son triangle Isocele : Il est certain qu'à la fin les dernieres portions seront plus petites que la figure k. Mais pour abreger soient les deuant dictes huit sections restantes plus petites que la figure k : Il est euident que l'octogone E L F M G N H O sera plus grand que la figure I, puis que les deux I & k sont egales au cercle E F G H. Soit pareillement inscrit vn octogone semblable au cercle A B C D, ce qui est facile : car il n'y a qu'à couper en deux egaleement les deux demy cercles A B C, A D C, en B & D ; puis les circonferences A B, B C, C D, A D aussi en deux egaleement en R, S, T, V ; & ayant tiré les lignes droictes A R, R B, B S, S C, C T, T D, D V, & V A ; il est euident que la figure inscrite sera semblable à la figure octogone descrite au cercle E F G H. Maintenant par la 1. prop. 12. l'octogone A R B S C T D V sera à l'octogone E L F M G N H O, comme le quarré de A C est au quarré de E G : mais comme le quarré de A C est au quarré de E G, ainsi le cercle A B C D est à la figure I : & par la 11. propos. 5. comme le polygone A R B S C T D V sera au polygone E L F M G N H O, ainsi le cercle A B C D sera à la figure I. Mais le polygone A R B S C T D V est moindre que le cercle A B C D : Donc par la 14. prop. 5. le polygone E L F M G N H O sera aussi moindre que la figure I : Mais il a aussi esté demonsté plus

grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande: Autrement s'il est possible, puis que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I: aussi en changeant la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC: mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme κ : & par la 14. prop. 5. comme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure κ : & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD sera à la figure κ , comme le quarré de AC est au quarré de EG: ce qui contreuient à la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous auons demonstré que l'un des cercles estant à vne figure, en la raison des quarréz des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure I ne pouuoit estre plus grande que le cercle EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle estoit donc égale à iceluy. Parquoy les cercles sont entr'eux comme les quarréz de leurs diametres: ce qu'il falloit prouuer.

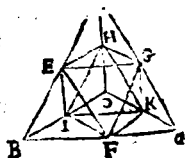
C R O L L A I R E.

Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone descript en celuy-là est au polygone semblable descript en cestuy-cy. Puis que par la 2. prop. 12. tant le cercle est au cercle, que par la 1. prop. 12. le polygone est au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté demonstré.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD, ayant la base triangulaire ABD, & le sommet au point C : Je dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale : & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié de la pyramide donnée.



Qu'il ne soit ainsi. Soient coupez en deux également, tous les costez des plans d'icelle pyramide, par les trois de la base ABD aux points E, F, G, & les trois hypothénuses AC, BC, DC aux trois points H, I, K, & soient menees les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premièrement la base ABD est diuisee en trois figures ; au quadrangle BEGF ; & les deux triangles DGF, & EAG, lesquels sont semblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les costez d'iceluy sont coupez proportionnellement, & par la 2. prop. 6. la ligne EG est parallele à BD, & FE à AD. Partant l'angle A estant commun aux deux triangles BAD,

BAD,

BAD & EAG, l'angle extérieur GEA sera égal à l'opposé intérieur DBA, par la 29. p. 1. Et par la 32. p. 1. le troisième sera égal au troisième, & par la 4. prop. 6. & 1. def. 6. les deux triangles BAD & EAG seront semblables. Par le même discours le triangle FGD, sera semblable au triangle BAD, & par la 21. prop. 6. les deux triangles EAG, FGD, seront semblables entr'eux, & égaux, d'autant que leurs costez sont égaux. Quant au quadrangle BEGF; il est évident par la 41. prop. 1. qu'il est double du triangle FGD. (car il est sur base égale, & entre mêmes parallèles) Il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est divisée aux deux pyramides AEGH & HICK égales & semblables; & aux deux prismes, l'un EHGFIB, duquel la base est le quadrangle BEGF, l'autre HICK FDG, duquel la base est le triangle FGD: & pour autant qu'ils sont de même hauteur, sçavoir de la hauteur du point H, ou du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire, ils seront égaux par la 40. prop. 11.

Or que les pyramides AEHG, & HICK soient semblables, on le prouve en ceste sorte: d'autant que les costez AC, DC du triangle ACD ont été couppez en deux également, par la 2. prop. 6. HK, AD, sont parallèles, & l'angle extérieur CHK est égal à son opposé intérieur HAG par la 29. prop. 1. Et AHG à HCK, & par la 32. prop. 1. le troisième sera égal au troisième; & partant par la 4. prop. 6. les triangles equiangles CHK & HAG seront semblables entr'eux, & au triangle ACD, par la 21. p. 6. ils seront aussi égaux entr'eux, estans les lignes CH & HA égales. Par les mêmes raisons les triangles ICH, & EHA seront égaux, & semblables entr'eux, &

au triangle ACB. Item le triangle Ikh se prouuera facilement equiangle, & semblable au triangle ABD, (car ayans leurs costez parallels se touchans en diuers plans ils ferōt angles egaux) partant aussi semblable au triangle GAE, & egal à iceluy par les 21. & 22. p. 6. Car HK est egal à GD, & GD à GA: & par la mesme raison kCI & BCD seront semblables à GH E, & KCI egal à iceluy: & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables; & les deux petites AEHG, HICK seront egales, estans faictes de plans egaux.

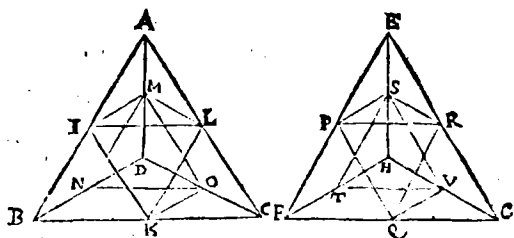
Que les deux prismes EHGFI B, & HIKF D G soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'un d'iceux EHGFI B, ayant base quadrangulaire BEGF double du triangle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie: Et par consequent les deux prismes ensemble, seront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD: donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant base triangulaire peut estre dinisée en deux pyramides egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, & chacune d'icelles est diuisee en deux autres pyramides semblables entr'elles, & à la toute, & en deux prismes egaux; & les pyramides de la diuision sont tousiours subdiuisees de mesme façon: comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdiuision d'icelle pyramide, seront à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient sur les bases triangulaires ABC , EFG , les pyramides $ABCD$, $EFGH$ de mesme hauteur, desquelles chacune soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyramides egales entr'elles & semblables à la toute, sçauoir est en $AILM$, $MNOD$; $EPRS$, $STVH$; & en deux prismes egaux $IBKLMN$, $CKLMNO$; $PFQRST$, $GQRSTV$: Et de mesme façon soient entendues chacunes des pyramides $AILM$, $MNOD$, $EPRS$, $STVH$ estre diuisees; & en continuant tousiours de mesme façon,

Je dis que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes faicts en la pyramide $ABCD$ à tous les prismes faicts en la pyramide $EFGH$.



Car puis que comme BC à Ck , ainsi FG à GQ ; pource que l'une & l'autre ligne est diuisee en deux egale-ment, & les triangles ABC , LkC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG , RQG , par le coroll. de la 4. propos. 6. pareillement par la 22. propos. 6. comme le triangle ABC au triangle LkC , ainsi le triangle EFG , au triangle RQG : & en permutant comme ABC à EFG , ainsi LkC à RQG . Mais comme LkC à RQG , ainsi est le prisme $CKLMNO$ au prisme $GQRSTV$, comme nous demonsturerons incontinent: & partant ainsi aussi le prisme $IBkLMN$ est au prisme $PFQRST$, puis que ceux-cy sont egaux à ceux-là: Et comme vn seul prisme, sçauoir $IBkLMN$ est à vn seul prisme $PFQRST$, ainsi sont les deux prismes ensemble $IBkLMN$, $CKLMNO$, aux deux prismes ensemble $PFQRST$, $GQRSTV$ par la 12. propos. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG , ainsi les deux prismes en la pyramide $ABCD$ seront aux deux prismes en la pyramide $EFGH$. Nous demonst-rons en la mesme maniere, deux prismes es pyra-mides $AILM$, $MNO D$, faictes en la pyramide

$ABCD$, estre aux deux prismes és pyramides $EPRS$, $STVH$, faictes en la pyramide $EFGH$, comme sont les bases AIL , MNO de ces pyramides là aux bases EPR , STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases-là sont à celles-cy, ainsi la base LkC , qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG , qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG . Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG , ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide $ABCD$, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide $EFGH$: & partant aussi comme les prismes de la pyramide $ABCD$ seront aux prismes de la pyramide $EFGH$, ainsi seront les prismes tant de la pyramide $AILM$, aux prismes de la pyramide $EPRS$, que les prismes de la pyramide $MNOD$, aux prismes de la pyramide $STVH$; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. *proposit.* 5. comme les deux prismes de la pyramide $ABCD$ sont aux deux prismes de la pyramide $EFGH$, ainsi tous les prismes estans és pyramides $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. ensemble, sont à tous les prismes estans és pyramides $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là; pareillement comme la base ABC est à la base EFG , ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide $ABCD$, à tous les prismes en la pyramide $EFGH$: Parquoy s'il y a deux pyramides de mesme hauteur, ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

L E M M E.

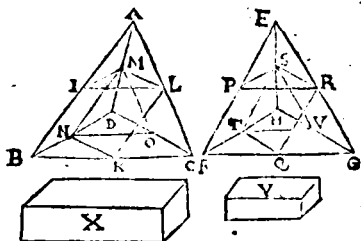
Or que comme LKC est à RQG , ainsi le prisme $CKLMNO$ soit au prisme $GQRSTV$, nous le démonstrerons ainsi. Soient imaginees tomber des sommets D, H , des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG , lesquelles seront les hauteurs egales des pyramides $ABCDEF GH$. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droictes, sçavoir DC & la perpendiculaire tombant de D ; & DC est coupee en deux egalemens en O : pareillement la perpendiculaire tombant de D , sera coupee en deux egalemens au point an quel elle rencontre le plan MNO . Par la mesme raison la perpendiculaire tombant de H , sera coupee en deux egalemens par le plan STV . Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posees egales, leurs moitiez, sçavoir est les hauteurs des prismes, seront aussi egales: & partant les prismes $CKLMNO, GQRSTV$ estans d'egales hauteurs, seront entr'eux, comme les bases LKC, RQG , par les choses que nous auons demonstrees sur la 34 prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de mesme hauteur $ABCD, EFGH$, desquelles les bases sont les triangles ABC, EFG . Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.

Autrement soit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme la base ABC à la base EFG , ainsi la pyramide $ABCD$ à quelque solide, cōme X : ie



dis qu'iceluy solide X est egal à la pyramyde $EFGH$, autrement il sera plus petit ou plus grand: & soit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du solide Y . Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y , soient egaux à la pyramide $EFGH$. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramydes egales, & en deux prismes egaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que si de la pyramide $EFGH$, on retranche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes $PFQ RST$, $GQRSTV$, & de chacune pyramide restante $EP RS$, $STVH$, encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y : ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide $EFGH$, seront plus grands que le solide X , puis que le reste est plus petit que le solide Y . Pareillement soient retranchez autant de fois deux prismes de la pyramide $ABCD$, cōme on en a retranché de la pyramide $EFGH$: il est euident par ce qui a esté demonstré en la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ seront à tous les prismes retranchez de la pyramide $EFGH$:

Mais nous auons posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auons tantost prouuez estre plus grands, en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH: partant icelle hypothese est fausse, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; & puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X, en permutant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide, comme Y: Et par la 14. prop. 5. d'aurant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y: & par la 11. propos. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons démontré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sc̃auoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la

base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH égale à iceluy solide X; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de même hauteur, ayans bases triangulaires, sont entr'elles comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Par la conuerse; Si les pyramides triangulaires sont entre-elles comme leurs bases : elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, soit coupée d'icelle une égale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la base, soient tirées des lignes droictes : & comme la base sera à la base, ainsi la pyramide sera à la pyramide n'aguères constituée : mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. prop. 5. la pyramide constituée sera égale à toute la pyramide, la partie au tout : ce qui est absurde.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituées sur mesme, ou égales bases triangulaires, sont égales entr'elles : puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posées égales, ou une seule & mesme.

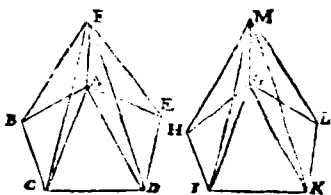
Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituées sur une mesme ou égales bases, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides égales, & ayans mesme hauteur, ont les bases égales, si elles ne sont une mesme : lesquelles deux choses nous demonstrerons par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous

avons vû en demonſtrant la conuerſe des 30. & 31. p. 11. ſans ſur la hauteur, que ſur la baſe couppee eſt conſtituée vne autre pyramide, &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes poligones, ſont l'une à l'autre comme leurs baſes.

Soit la pyramide $ABCDEF$ de meſme hauteur que la pyramide $GHIKLM$ deſquelles les baſes $ABCDE$ & $GHIKL$ ſont po-



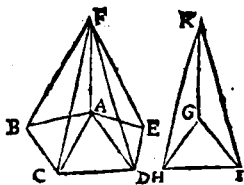
ligones : le dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi la pyramide eſt à la pyramide.

Car les baſes eſtans reduictes en triangles ABC , ACD , ADE ; GHI , GIK , GKL : ſoit imaginé ſur chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ACD , ainſi la pyramide $ABCF$ eſt à la pyramide $ACDF$; en composant comme la baſe $ABCD$ ſera à la baſe ACD , ainſi la pyramide $ABCDF$ ſera à la pyramide $ACDF$: Mais detachez, par la 5. prop. 12. comme la baſe ACD eſt à la baſe ADE , ainſi la pyramide $ACDF$ eſt à la pyramide $ADEF$: Donc en raiſon egale comme la baſe $ABCD$ eſt à la baſe ADE , ainſi la pyramide $ABCDF$ eſt à la pyramide $ADEF$: & partant en

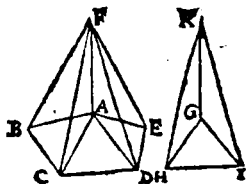
composant comme la base $A B C D E$ est à la base $A D E$, ainsi la pyramide $A B C D E F$ est à la pyramide $A D E F$. Par semblable argument sera démontré que comme la base $G H I K L$ est à la base $G K L$, ainsi la pyramide $G H I K L M$ est à la pyramide $G k L M$; & en changeant comme la base $G k L$ est à la base $G H I k L$, ainsi la pyramide de $G k L M$ est à la pyramide $G H I K L M$. Derechef puis que par la 5. prop. 12. comme la base $A D E$ est à la base $G K L$, ainsi la pyramide $A D E F$ est à la pyramide $G k L M$; les 4. bases $A B C D E$, $A D E$, $G K L$, $G H I k L$, seront é mesmes raisons que les 4. pyramides $A B C D E F$, $A D E F$, $G k L M$, $G H I k L M$: Parquoy en raison egale comme la base $A B C D E$ est à la base $G H I k L$, ainsi la pyramide $A B C D E F$ est à la pyramide $G H I k L M$. Donc les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, sont entr'elles comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la demonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme bautcur, desquelles les bases polygones ont les costez egaux en nombre : toutesfois nous demonstrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'une desquelles contient plus de costez que la base de l'autre. Car soient premierement deux pyramides de mesme bautcur $A B C D E F$, $G H I K$, la base de l'une desquelles soit polygone



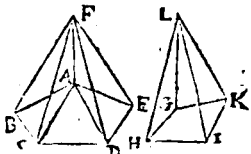
sçavoir est pentagone, & de l'autre triangulaire. Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera divisée en pyramides egales en nombre. Et pource que par



la 5. p. 12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF 3. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité. Et en la mesme maniere, comme la base ACD, 5. quantité est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ACDF 6. quantité, est à la pyramide GHIK 4. quantité: par la 24. prop. 5. comme la base ABCD 1 & 5 quantitez ensemble, sera à la base GHI seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDF 3. quantité avec la 6. sera à la pyramide GHIK 4. quantité. Derechef puis que comme la base ABCD est à la base GHI, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonstrier: & que par la 5. prop. 12. comme la base ADE 5. quantité, est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ADEF 6. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité: par la mesme 24. prop. 5. la base ABCDE sera à la base GHI, comme la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit tousiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonsté, la base du polygone ABCDE est à la base triangulaire GHI, ainsi que la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: parcelllement en changeans, comme la base GHI sera à la base ABCDE, ainsi la pyramide GHIK sera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, desquelles l'une a la base polygone, & l'autre triangulaire, sont tousiours comme leurs bases, de quelque part où l'on commence: Car encore

demonstration commence au polygone & à sa pyramide, cōme appert par la demonstration, toutes fois en changeant il est permis prendre le commencement au triangle & à sa pyramide, comme il a esté dict.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKL$, desquelles les bases sont polygones, & sōt plus de costez en une base qu'en l'autre: le dis derechef que la pyram. est à la pyramide, cōme la base est à la base. Car estant resoud le polygone $ABCDE$ es triangles ABC , ACD , ADE : la pyram. sera divisée en autā de pyramides. Es d'autā que cōme la base triangulaire ABC , premiere quantité, est à la base polygone $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCF$ troisieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité; & comme la base ACD 5. quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: aussi par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere quantité avec la 5. sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ troisieme quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité. Derechef puis que cōme la base $ABCD$ premiere quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ tierce quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: & aussi que cōme la base ADE quinte quantité, est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ sixieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ quarte quantité: pareillement par la 24. prop. 5. comme la base $ABCDE$ premiere quantité avec la quinte, sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDEF$ tierce quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.



Or nous convertirons tant ceste 6. prop. que celle demon-
strée en ce scholie, en ceste maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles
 sont entr'elles comme leurs bases, sont en mesme
 hauteur.

Ce qu'on démontrera en la mesme maniere, que les choses
dictes au scholie de la 5. pr. de ce livre, ont esté démontrées.

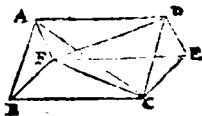
COROLLAIRE.

Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, con-
 struites sur bases égales multilatères, ou sur vne mesme, estre
 égales entr'elles; puis qu'elles ont mesme raison que leurs
 bases, lesquelles sont posées égales, ou vne mesme.

Derechef est evident que les pyramides multilatères éga-
 les, & construites sur bases égales, ou sur vne mesme, ont
 mesme hauteur. Et que les pyramides triangulaires égales,
 & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases égales, si elles ne
 sont vne mesme. Ce qui se peut démontrer comme nous
 auons dict au corol. de la 5. p. de ce livre.

T H E O R. 7. P R O P. VII.
 Tout prisme peut estre diuisé en trois
 pyramides égales, ayans bases trian-
 gulaires.

Soit le prisme ABCDEF
 duquel les deux triangles
 opposites ABF, DCE sont
 égaux & semblables. Je dis
 qu'iceluy prisme peut estre
 diuisé en trois pyramides égales, ayans bases trian-
 gulaires.



Car si des trois parallelogrammes d'iceluy prisme,
 on meine les trois diametres AC, CF, FD, il est eu-

dent que le prisme sera diuisé en trois pyramides: montrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC , couppant le parallelogramme $ABCD$ en deux également, les triangles ABC , ADC sont egaux: Partant la pyramide $ABCF$, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pyramide $ADCF$, ayant pour base le triangle ADC , par la 5. prop. 12. Car icelles pyramides sont de mesme hauteur, sçauoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan $ABCD$. Par mesme raison seront egales les pyramides $ADFC$, $EFDC$, constituées sur les bases egales ADF , EDF , & sous mesme hauteur, sçauoir de la perpendiculaire menée du sommet C sur le plan $ADEF$. Mais la pyramide $ADCF$ est la mesme que la pyramide $ADFC$; puis que l'une & l'autre est continuée des 4. plans ADC , ADF , ACF , DCF . Donc les trois pyramides $ABCF$, $ADCF$, $EFDC$, ou $CDEF$, composans tout le prisme, sont egales entr'elles. Parquoy tous prismes peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires. Ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'une pyramide est la tierce partie d'un prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

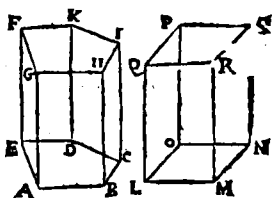
S C H O L I E.

Nous adiousterons icy la demonstration d'une autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables: ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelcōques bases, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux prismes de mesme hauteur $ABCDEFGHIK$, $LMNOPQRS$, desquels les bases sont figures multilatères. Je dis que comme la base $ABCDE$ est à la base $LMNO$, ainsi est le prisme au prisme.

Car si de tous les angles de chaque base on tire des lignes droictes à un point du plan supérieur, qui est opposé à la base, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme: Et partant par le corollaire cy dessus, chaque pyramide sera la troisieme partie de son prisme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme: Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté démontré à la 6. prop. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.



C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & constituez sur mesme base, ou sur bases egales, quelles qu'elles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont vne mesme, ou bien sont egales.

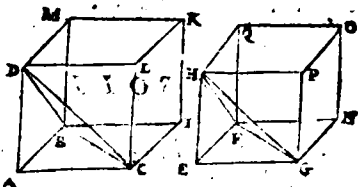
Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, constituez sur vne mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur: Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on démontrera en la mesme maniere qu'a esté démontré la conuerse de la 31. p. 11.

THEOR.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient les deux pyramides semblables ABCD & EFGH, ayans bases triangulaires, ABC & EFG : ie dis qu'elles sont en



raison triplée des costez de mesme raison AC & EG.

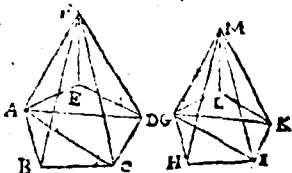
Qu'ainsi ne soit. Soient achetez les paralleleptèdes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD, AB, AC, seront proportionnaux aux trois costez EH, EF, EG, & l'angle solide A egal à l'angle solide E, par la def. des solides semblables: & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. prop. 11. les deux solides AK & EO seront semblables, ayans les trois costez AB, AD, AC, proportionaux aux trois costez EF, EH, EG; & les oppolez seront aussi proportionaux; & par consequent les six plans proportionaux aux six plans: Mais les 2. solides AK & EO, estans semblables, ils seront en raison triplée de leurs costez homologues AC, & EG, par la 33. proposition 11. Et comme le solide AK est au solide EO, ainsi la pyramide

ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide , d'autant que par la 28. prop. 11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux , & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7. prop. 12.) & passant par la 11. prop. 5. les pyramides sont aussi en raison triplée des costez de mesme raison AC, & EG. Donc les pyramides semblables ayans bases triangulaires sont en raison triplée de leurs costez homologues. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient les pyramides semblables ABCDEF, GHIKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Le dis qu'i-celles pyramides sont en raison triplée des costez ho-



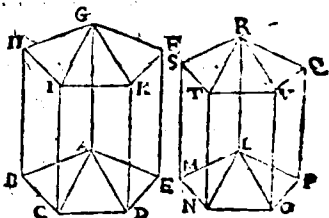
mologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD : GI, GK : par la 20. prop. 6. les bases semblables seront diuisées en nombre egal de triangles semblables. Sçauoir est que les triangles ABC, ACD, ADE, seront semblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides sont semblables, les triangles AFB, GMH, sont semblables, & l'angle FAB' egal à l'angle MGH ; & comme FA sera à AB, ainsi MG sera à GH : mais comme AB à AC, ainsi GH à GI, à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : donc en

raison egale, comme FA sera à AC , ainsi MG sera à GI .
 De rechef puis que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH :
 à cause de la similitude des triangles ABC , GHI : & comme
 GB à CF , ainsi IH à IM , puis que à cause de la similitude
 des pyramides, les triangles BCF , HIM , sont semblables
 aussi par raison egale, comme AC sera à CF , ainsi GI sera
 à IM : & partans puis que comme FA à AC , ainsi MG à
 GI ; & comme AC à CF , ainsi GI à IM : pareillement en
 raison egale, comme FA sera à FC , ainsi MG à MI . Par-
 quoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC , GMI , seront
 equiangles, & partans semblables. Mais les triangles AFB ,
 BFC , ABC sont aussi semblables aux triangles GMI ,
 HMI , GHI . Donc par la 8. def. 11. les pyramides $ABCF$,
 $CHIM$, sont semblables. Par mesme raison seront semblables
 les pyramides $ACDF$, $GIKM$: Item $ADEF$, $GKLM$. Par-
 quoy par la 8. p. 12. les pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$,
 seront aux pyramides $GHIM$, $CIKM$, $GKLM$, chacune à
 la sienne, en raison triplée des costez homologues AB , CD ,
 DE , à GH , IK , KL , chacun au sien. Veu donc qu'à cause de
 la similitude des bases $ABCDE$, $GHIKL$, il y a une seule
 & mesme raison de AB , CD , DE à GH , IK , KL : aussi les
 pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, auront aux pyramides
 $GHIM$, $GIKM$, $GKLM$, une seule & mesme raison, c'est à sça-
 voir triplée. Et par la 12. p. 5. comme une seule pyramide
 $ABCF$ est à une seule pyramide $GHIM$, ainsi toutes les
 pyramides, sçavoir est la pyramide $ABCDEF$, est à toutes
 les pyramides, sçavoir est à la totale $GHIKLM$. Parquoy
 puis que par la 8. prop. 12. la pyramide $ABEF$ est à la py-
 ramide $GHIM$ en raison triplée des costez homologues AB ,
 GH ; aussi la pyramide $ABCDEF$ sera à la pyramide
 $GHIKLM$ en la raison triplée des mesmes costez homolo-
 gues AB , GH . Ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison
 A a a ij

triplée de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables $AB.CDEFGHIK$, $LMNO.PQRSTV$; l'adu qu'ils sont en raison triplée des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC , AD ,



LN , LO ; par la 20. prop. 6. les triangles ABC , CAD , DEA , seront semblables aux triangles LMN , LNO , OPL . Semblablement si des angles G & R , on tire les lignes GI , GK , RT , RV ; les triangles GHI , GK , GKF , seront aussi semblables aux triangles RST , RTV , RVQ , & aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sont semblables. Et d'autant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH , NS sont semblables; comme CI sera à CB , ainsi TN sera à NM : mais comme BC est à CA , ainsi NM est à NE , à cause de la similitude des triangles. Donc par raison egale, comme CI sera à CA , ainsi TN à NE . De rechef pource que l'angle solide N , est egal à l'angle solide C , à cause de la similitude des prismes, si celui cy est superposé à l'autre l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD , & l'angle TNM à l'angle ICB , & l'angle TNO à l'angle ICD . Mais aussi la ligne droite NL conuient à la ligne CA , pource que les angles LMN , BCA sont egaux. Donc les angles ICA , TNL sont egaux & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont est é demostrez proportionaux, les parallelogrammes CG , NR , seront semblables. Mais aussi les parallelogrammes CH , HA , sont semblables aux parallelogrammes NS , SL , & les triangles ABC , GHI , aux triangles LMN , RST . Donc les prismes $ABCIGH$, $LMNTRS$, sont semblables, par la 8. def. vi. On demon-

strera en la mesme maniere que les prismes $CDAGIK$, $NOLTDV$, sont sèblables, cômme aussi les prismes $AEDKGF$, $LPOVRQ$. Parquoy les prismes $ABCIGH$, $CDAGIK$, $AEDKGF$, par les choses demonstrées à la 34. p. 11. sont aux prismes $LMNTRS$, $NOLRTV$, $LPOVRQ$, chacun au sien; en raison triplée des costez homologues BC , CD , DE , à MN , NO , OP ; chacun au sien. Et partant en la mesme maniere que nous auons demonstré cy dessus des pyramides multangles, on demonstrera que les prismes $ABCDEFGNIK$, $LMNOPQRSTV$, sont en raison triplée des costez homologues BC , MN .

De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre égal, & homologues aux toutes. Car icy est manifeste par la demonstration du preceit. corol.

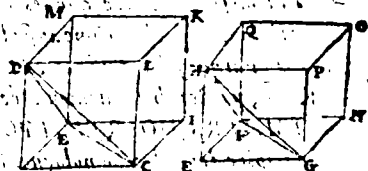
Se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre égal, & homologues aux tous, cômme appere par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans bases triangulaires, leurs hauteurs sont reciproques aux bases : Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

Soient les deux pyramides egales $ABCD$, & $EFGH$, ayans bases triangulaires : ie dis que les bases d'icelles sont reciproques à leurs hauteurs, c'est à

dit que comme
la base ABC à la
base EFG, ainsi
la hauteur du
point H à la hau-
teur du point D.

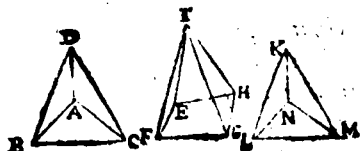


Qu'il ne soit
ainsi. Soient ache-
vez les parallepipèdes AK, EO, & comme en la
precedente, il sera evident que chacun d'iceux pa-
rallèpipèdes sera sextuple de sa pyramide. Et les
deux pyramides estant egales, iceux solides AK, EO,
seront egaux; & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs
reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la
hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi
la base EN à la base AI). Mais comme EN à AI, ainsi
sa moitié le triangle EFG, à la moitié de AI, sça-
voir le triangle ABC; & partant par la 11. p. 5. com-
me la hauteur du point D à la hauteur du point H,
ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du point D
est à la hauteur du point H, comme le triangle
EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides
ABCD, EFGH seront egales. Car il est evident
comme cy dessus que la hauteur du point D, sera à
la hauteur du point H, comme la base EN, à la base
AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles
EFG & ABC): ainsi les parallepipèdes AK, EO,
auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la
34 prop. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs
sixiemes parties seront aussi egales, sçavoir les py-
ramides ABCD, & EFGH: Parquoy des pyramides
egales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit
prouver.

SCHOLIE.

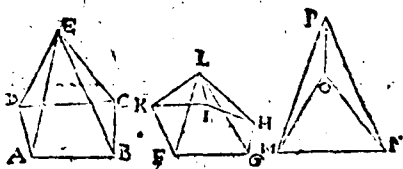
Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides des-



quelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premiere-
ment deux pyramides egales, l'une desquelles $ABCD$ ait
la base triangulaire, mais l'autre $EFGHI$ ne l'ait pas. Soit
fait le triangle KLM egal à la base non triangulaire $EFGH$;
puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide $KLMN$,
de mesme hauteur que la pyramide $EFGHI$. Or d'autant
que les pyramides $EFGHI$, $KLMN$, ont les bases egales, &
mesme hauteur; elles seront egales, par les choses demon-
strées au scholie de la 6. p. 32. Mais la pyramide $EFGHI$ a
esté posée egale à la pyramide $ABCD$; donc aussi les pyra-
mides $ABCD$, $KLMN$ seront egales; Parquoy puis qu'elles
ont les bases triangulaires, par la 9. p. 32. comme la base ABC
sera à la base KLM , on a souz egale $EFGH$, ainsi la hauteur de
la pyram. $KLMN$, a est à dire la hauteur de la pyram. $EFGH$,
sera à la hauteur de la pyram. $ABCD$: & par là des pyram.
egales $ABCD$, $EFGHI$, les bases & hauteurs s'ont reciproques.
Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hau-
teurs soient reciproques. Je dis qu'icelles pyramides sont ega-
les. Car demeurant la mesme construction faicte cy dessus;
puis que la base ABC est posée estre à la base $EFGH$,
comme la hauteur de la pyramide $EFGHI$ est à la hauteur
de la pyramide $ABCD$; aussi la base ABC sera à la base
 KLM , comme la hauteur de la pyramide $KLMN$ sera à la
hauteur de la pyramide $ABCD$. Parquoy par la 9. p. 32. les
pyramides $ABCD$, $KLMN$, sont egales. Mais comme nous

avons démontré au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide $kLMN$ est égale à la pyramide $EFGHI$: donc aussi la pyramide $ABCD$ sera égale à la pyramide $EFGHI$. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant les pyramides égales $AB C D E$, $F G H I k L$, ayant bases multiangulaires. Soient



dre chef le triangle MNO , égal à la base $ABCD$; & la pyramide $MNOP$ de mesme hauteur que la pyramide $ABCDE$. Donc par les choses démontrées au scholie de la 6. prop. 11. la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $ABCDE$: laquelle a esté posée égale à la pyramide $F G H I k L$: donc aussi la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $F G H I k L$. Parquoy comme nous avons démontré cy dessus, ainsi que la base MNO , c'est à dire la base $ABCD$, sera à la base $F G H I k$, ainsi la hauteur de la pyramide $F G H I k L$ sera à la hauteur de la pyramide $MNOP$, c'est à dire à la hauteur de la pyramide $ABCDE$: Et parant des pyramides égales $ABCDE$, $F G H I k L$, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles pyramides : on démontrera comme dessus qu'elles sont égales.

Or tout ce que nous avons démontré cy dessus peut aussi contenir à quelconque prismes. Car si les prismes estoient égaux, aussi les pyramides de mesme hauteur qu'iceux, ayant les mesmes bases, seront égales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. p. 12. elles sont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme

prop. Parquoy comme nous auons demonſtré n'agueres, les baſes & hauteurs d'icelles pyramides ſeront reciproques. V'en donc que ces baſes & hauteurs ſont les meſmes que des priſmes, les baſes & hauteurs des priſmes ſeront pareillement reciproques.

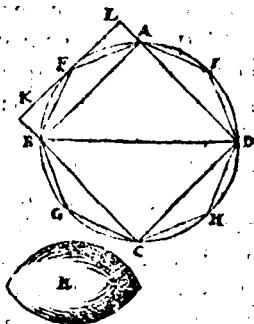
Derechef, ſi les baſes & hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyramides ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Parquoy, comme il a eſté demonſtré, les pyramides ſont egales; & partant auſſi les priſmes, puis que d'icelles pyramides ils ſont triples, ou ſeſquialteres. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

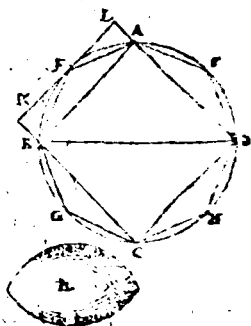
Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre ayant baſe egale, & de meſme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de meſme hauteur, & ayans vne meſme baſe, ſçauoir le cercle ABCD. Le diſ que le cylindre eſt triple du cone.

Autrement il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premieremēt plus grand ſ'il eſt poſſible, ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire que ſi du cylindre, ayāt pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone,



ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenant dans le cercle soit inscrit le quarré A B C D, diuisé en deux triangles par la diagonale BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'i-



ceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encorés plus grands que le solide E, sur les bases d'iceux segmens soient faicts les quatre triangles Isoleles AFB, BGC, CHD, DHA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, dont la base est le cercle ABCD. Il est euident qu'iceux triangles Isoleles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre; & par consequent qu'iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huit petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1. prop. 10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abregier soient iceux huit petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colonne composée de ces six prismes, ayant pour base le poligone inserit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui

esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de la pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'en suit que tous iceux prismes faisant la colonne, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisieme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle isoscele en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: ce qui doit arriuer par la 1. prop. 16. Soient donc pour abreger iceux huit petits segmens plus petits que le solide E: il est donc evident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que

d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi reſeinde eſt le tiers du cylindre donné, & la pyramide eſt auſſi, (comme il a eſté dit cy-deſſus) le tiers de la colonne de meſme hauteur, ayant le meſme octogone pour baſe: Partant icelle colonne ſeroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle eſt partie: Ce qui eſt impoſſible. Donc le cylindre donné n'eſtoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il ſoit egal. Parquoy tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre ayant baſe egale, & de meſme hauteur. Ce qui eſtoit à démonſtrer.

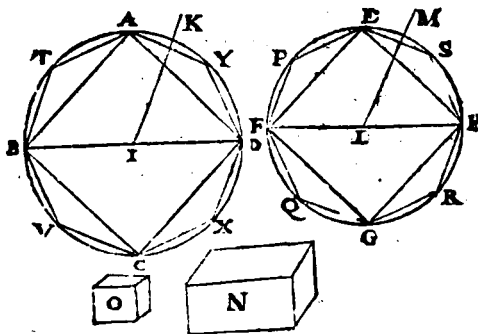
T H E O R. II. P R O P. XI.

Les cones, & les cylindres de meſme hauteur, ſont l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux cones de meſme hauteur, deſquels les baſes ſont les cercles $ABCD$ & $EFGH$; les diametres BD & FH , leurs axes ou hauteurs IK & LM . Je diſ que comme le cercle $ABCD$ eſt au cercle $EFGH$, ainſi le cone BK eſt au cone FM ; c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le cone ax ſoit à quelque autre ſolide, comme N : qu'iceluy ſolide N ſera egal au cone FM .

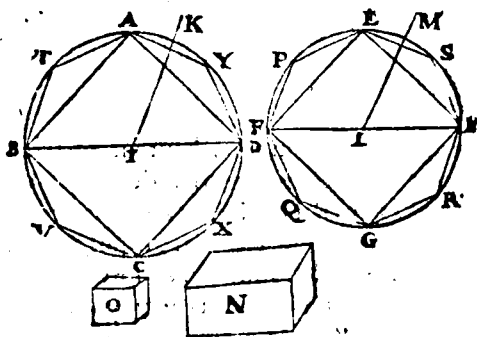
Autrement, il ſera plus petit ou plus grand. Soit premierement plus petit, & s'il eſt poſſible de la quantité du ſolide O : ainſi les deux ſolides N & O ſeront egaux au cone FM . Maintenant du cone FM comme en la precedente, ſoit retranché plus

de la moitié, ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant pour baſe le quarré FGH E: & du reſidu encores plus de la moitié, ſçauoir



quatre pyramides de meſme hauteur que le cone, ayans pour baſe les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, FQH, GRH, HSE, en continuant toujours iuſques à ce que par la 1. propoſ. 10. le reſidu ſoit plus petit que le ſolide O: & ſoit iceluy reſidu pour abreger les huitſ petits ſegmens: il ſ'enſuit que la pyramide FM de meſme hauteur que le cone FM, & ayant pour baſe l'octogone E P F Q G R H S, ſera plus grande que le ſolide N. Dans le cercle ABCD, ſoit inſcrit vn polygone ſemblable au polygone inſcrit dans la baſe circulaire E F G H, & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre eſſeuee vne pyramide de meſme hauteur que le cone Bk. Or par le corol de la 2. propoſ. 12. comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le polygone TVXY eſt au polygone PQRS: mais comme le cercle ABCD au cercle EFGH, ainſi le cone Bk eſt au ſolide N, & par la 6. p. 12. comme le polygone au polygone, ainſi la pyramide

à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXD Yk sera à la pyramide EPFQGRHSM, comme la cone BK au solide N. Mais la pyramide ATBVCXDYG est plus petit que le cone BK, la partie que le tout: Donc aussi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM sera moindre que le solide N. Mais elle a été démontrée aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel, il nous a conduit à absurdité.



Soit donc plus grand, s'il est possible: & soit en permutant comme le solide N au cone BK, ainsi le cercle EFGH au cercle ABCD: & comme iceluy solide N au cone BK, soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O: Et par la 14. prop. 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM, aussi le cone BK sera plus grand que le solide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le solide N est au cone BK: par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi

le cone FM au solide O, plus petit que le cone BK: ce que tantost nous auons monstré estre impossible. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base ABCD estre à la base EFGH, ainsi que le cone ABCDk au solide N: & par la 7. proposition. 5. comme le cone ABCDk est au solide N, ainsi est le mesme cone ABCDk au cone EFGHM; pareillement comme la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDk sera au cone EFGHM.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur: d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. prop. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

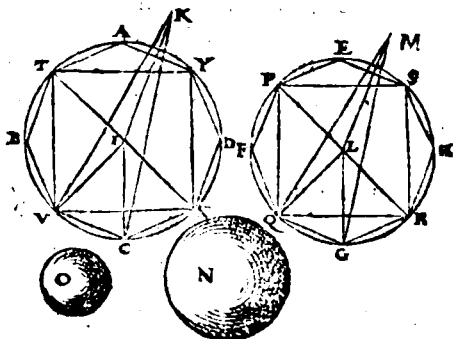
De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi egaux.

THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones, & les cylindres semblables, sont l'un à l'autre en raison triplee des

diametres de leurs bases.

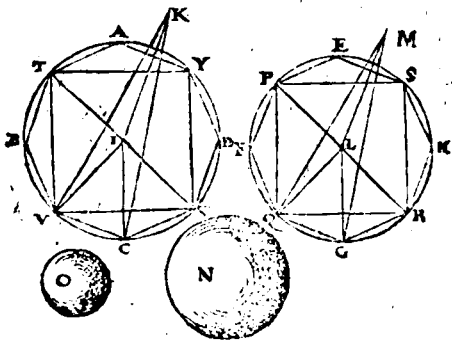
Soient semblables cones & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'eux soient IK, LM; & les diametres des bases TV,



PR. Je dis que le cone duquel la base est le cercle ABCD, mais le sommet K, est au cone ayant pour base le cercle EFGH, & pour sommet le point M, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme à N, en raison triplee du diametre Tk au diametre PR. Je dis que le solide N est egal au cone EFGHM.

Autrement, il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçavoir de la quantité du solide O: Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EFGHM: & comme en la precedente soit faite detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. prop. 10. les restes (c'est à sçavoir pour abreger les huit petits segmens, qui sont à l'entour de

de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est evident qu'icelle pyramide à la base polygone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme polygone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY: & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au polygone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICK est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur

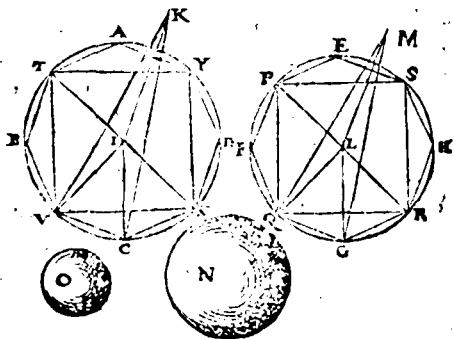


que la totale.) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale EPFOGRHSM est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'autant que les cones Bk & FM sont semblables par

B b b

la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe Ik est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe Ik, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droicts angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIk sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L, (ayans chacun la huitiesme partie de la circonference pour base) & partant par la 6. propos. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles: partant semblables: Item VC est à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QM; & en raison egale VC sera à VK, comme QG à GM: Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5. propos. 6. les triangles Vkc, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, seront semblables: Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçauoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de la totale ATBVCDYK, proportionnelles à vne chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM. Et partant par la 12. prop. 5. les toutes

seront aux toutes , comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM , en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL , ou bien du diametre TX , au diametre PR ; puis que comme VI est à QL , ainsi TX est à PR , par la 13. prop. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N , aussi en raison triplee des deux diametres TX , PR : Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide N , comme la pyramide $TBVCXDYK$ à la pyramide $EPFQGRHSM$. Parquoy puis que le cone BK , est plus grand que la pyramide BK , le tout que la partie , aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM : & il a esté demonstré estre aussi moindre . Ce qui est absurde . Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM , puis que le posant tel il nous a conduit à l'absurdité .



Soit donc maintenant le solide N , plus grand que le cone $EFGHM$, s'il est possible . D'autant qu'on a posé que le cone $ABCDK$ est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR , & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee

Bbb ij

des mesmes diametres, comme nous auons demon-
stré par la 11. prop. 5. comme le cone Bk sera au soli-
de N, ainsi la pyramide Bk à la pyramide FM : & en
permutant comme N au cone Bk, ainsi la pyramide
FM à la pyramide Bk. Parquoy puis que par le co-
rol. de la 8. prop. 12. la pyramide FM est à la pyramide
Bk en raison triplee des costez homologues QG à
VG : c'est à dire du diametre PR au diametre TX : pa-
reillement le solide N sera au cone BK en raison tri-
plee des mesmes diametres PR à TX. Soit posé
que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au
solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O
en raison triplee du diametre PR au diametre TX.
Et puis que le solide N a esté posé plus grand que le
cone FM : par la 14. prop. 5. le cone BK sera aussi plus
grand que O. Parquoy le cone FM sera au solide
O moindre que le cone Bk, en raison triplee du
diametre TR au diametre TX : ce qui est absurde.
Car il a esté démontré cy dessus qu'un cone ne peut
estre à un solide moindre qu'un autre cone, en rai-
son triplee des diametres des bases d'iceux cones.
Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit
que le cone EFGHM : il est donc egal. Parquoy
par la 7. propo. 6. le cone ABCDK à mesme rai-
son au cone EFGHM qu'au solide N. Et partant puis
qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison
triplee des diametres TX & PR : le cone ABCDK
sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des
mesmes diametres.

Cette preuue se doit aussi entendre des cylin-
dres semblables : car leurs cones estans en raison
triplee des diametres, par la 15. propo. 5. les cylin-
dres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'un à
l'autre en raison triplee de leurs diametres. Donc les

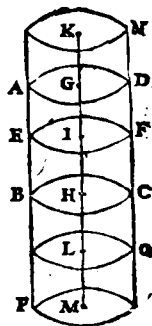
cones, & les cylindres semblables sont l'un à l'autre en raison triplée des diamètres de leurs bases. Ce qu'il falloit démonstrer.

T H E O R. 13. P R O P. XIII.

Si vn cylindre est coupé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre, les segmens du cylindre sont l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, coupé par le plan EF, parallel aux deux plans opposez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Je dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH.

Qu'il ne soit ainsi : apres auoir continué l'axe GH de part & d'autre, soit faite Gk egale à GI : & de l'autre costé HL, LM egales à IH: Et soit imaginé le cylindre ABCD, continué d'un costé iusques au point k, & de l'autre iusques au point M. Il est euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales: & par le corol. de la 11. propos. 12. les deux qui ont les axes egaux Gk, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont egaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux : Ainsi il est euident que l'axe Ik est

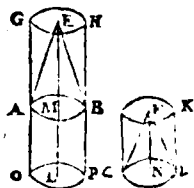


autant multiplie de l'axe IG, que le cylindre EN, est multiplie du cylindre ED: Pareillement que l'axe IM est autant multiplie de l'axe IH, que le cylindre PF, est multiplie du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multiplie de IG premiere grandeur) est egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiplie de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiplie du cylindre ED troisieme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiplie du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelconque multiplication: & partant par la 6. def. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy si vn cylindre est couppe par vn plan parallel aux plans opposez d'iceluy cylindre, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans bases egales, sont l'un à l'autre, comme leurs hauteurs.

Soient sur bases egales AB, CD, les deux cones ABE, CDE; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDE, & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.



Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, iusques au point L, & soit faicte ML egale à FN; &

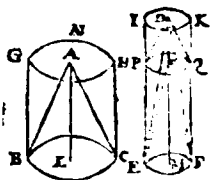
soit imaginé le cylindre AH cōtinué iusques au plan OP parallèle à AB , & passant par le point L . Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre $OPGH$, étant parallèle aux deux plans opposés OP , GH par la 13. prop. 12. les cylindres AH , AP , seront l'un à l'autre comme les axes EM & ML : Mais ML est égal à FN , & la base AB égale à la base CD : Donc par le corol. de la 11. p. 12. le cylindre AP sera au cylindre Ck : Partant comme EM sera à NF , ainsi le cylindre AH au cylindre Ck . Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABF , CDE , sont tierces parties des cylindres AH , Ck ; ils auront même raison qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF , comme la hauteur ME à la hauteur NF . Donc les cones & cylindres constituez sur bases égales, sont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui estoit à démonstrer.

THEOR. 15. PROP. xv.

Aux cones, & aux cylindres égaux, les hauteurs sont reciproques aux bases : Et les cones & cylindres sont égaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.

Soient égaux les cones ABC , DEF ; & les égaux cylindres $BGHC$, $EIKF$, desquels les bases soient BC , EF ; leurs axes ou hauteurs AL , DM . Je dis que les bases sont reciproques aux hauteurs; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF , ainsi la hauteur DM à la hauteur AL .

Car premierement si DM est egale à AL ; les cylindres estans egaux , il est evident par la 11. prop. 12. que la base sera egale à la base. Que si MD est plus grande que AL, soit retranchée MO egale à AL ; Et soit couppe le cylindre EK, par le plan PQ, parallel à EF, & passant par le point O. Donc par la 14. prop. 12. le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. & 11. prop. 5. le cylindre BH egal à iceluy EK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO : & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. prop. 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.



Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, sont reciproques ; si on construit deux cones sous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

Maintenant, soient les bases reciproques aux hauteurs ; Je dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construit comme dessus, puis que la base BC, est à la base EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO son egale : Et par la 11. prop. 12. comme la base BC, à la base EF, ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ : Item par la 14. prop. 12. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainsi le cylindre EK au cylindre EQ : par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront mesme

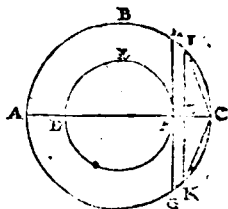
raison au troisieme EQ, l'un comme l'autre : Et par la 9. p. 5. ils seront egaux.

Quant aux cones qui ont aussi leurs bases & hauteurs reciproques, ils seront par le mesme discours demonstrez egaux. Ce qui est toutesfois assez evident, puis qu'ils sont par la 10. p. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. I. P R O P. XVI.

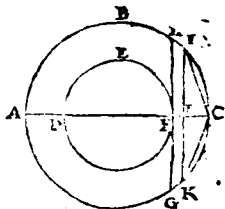
Deux cercles inegaux estans à l'entour d'un mesme centre; inscrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des costez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles inegaux ABC, & DEF, tous deux sur vn mesme centre: Il faut dans le plus grand ABC, inscrire vn polygone equilateral, duquel les costez soient nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.



Soit mené par le centre d'iceux cercles le diametre commun AC, coupant le petit cercle au point F: Et d'iceluy point soit menée HFK perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du

grand cercle aux points H
& G : & laquelle touchera
le cercle DEF en F par le
corol. de la 16. prop. 3. Item
soit coupée la demy cir-
conference ABC en deux
egalement ; Et la moitié
encores en deux égalemēt,



en continuant tousiours iusques à ce qu'on vienne
à vn arc plus petit que l'arc HG : ce qui est possible
par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC,
& soit tirée la ligne droicte subtendante IC. Je dis
qu'icelle ligne droicte IC est vn costé du polyg. re-
quis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'i-
celuy ont tousiours esté diuisez par moitié iusques à
l'arc IC : il est euident qu'iceluy arc est contenu pre-
cisément certain nombre de fois en la circonference
du cercle, & en nombre pair ; & par consequent que
la ligne droicte IC sera certain nombre de fois éga-
lement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair.
Partant sera décrit dans le cercle ABC vn polygo-
ne equilateral & de costez pair. Et qu'il ne touche le
cercle DEB, on le demonstre ainsi : De I soit menée
IK perpendiculaire à AC, coupant icelle AC en L.
D'autant que les angles HFC, ILF sont droicts,
les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. pro-
posit. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH tou-
che le cercle DEF au seul point F ; la ligne droicte
IK sera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut
iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra
auec la ligne droicte GH : Donc à plus forte raison
la ligne droicte IC, qui est moindre & plus esloignée
d'iceluy cercle que Ik, ne le touchera pas ; ny par-
tant aussi les autres costez du polygone inscrit, puis

qu'ils sont egaux à IC , & par consequent egale-
ment distans du centre d'iceluy cercle par la 14. prop. 3.
Parquoy deux cercles inegaux estans à l'entour d'un
mesme centre, nous auons inscrit au plus grand d'i-
ceux vn polygone equilateral, &c. Ce qu'il falloit
faire.

C O R O L L A I R E.

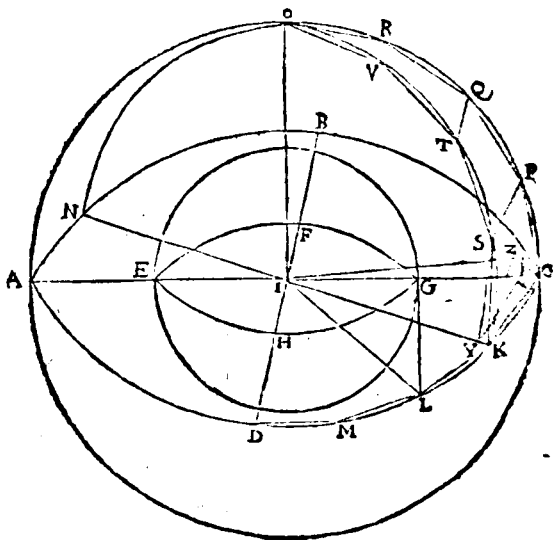
*De cecy est manifeste, que si à l'extremité du costé du poly-
gone inscrit, lequel conuient avec le diametre, on tire vne
ligne perpendiculaire à iceluy diametre, qu'elle ne peut tou-
cher le moindre cercle, mais que elle tombera toute dehors.
Car telle est la ligne IK , laquelle du poinct I extreme du
costé IC conuenant avec le diametre AC , est tirée perpendi-
culairement sur iceluy diametre AC , & a esté demonstté
qu'elle ne touche pas le cercle DEF .*

PROBL. 2. PROP. XVII.

Deux sphaeres inegales estans sur vn
mesme centre ; inscrire en la plus
grande vn polyedre, duquel les plans
ne touchent point la superficie de la
petite sphere.

Soient les deux sphaeres inegales $ABCD$, $EFGH$,
à l'entour d'un mesme centre I : & il faut dans la
plus grande $ABCD$ inscrire vn solide polyedre ou
de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de
la moindre sphere $EFGH$.

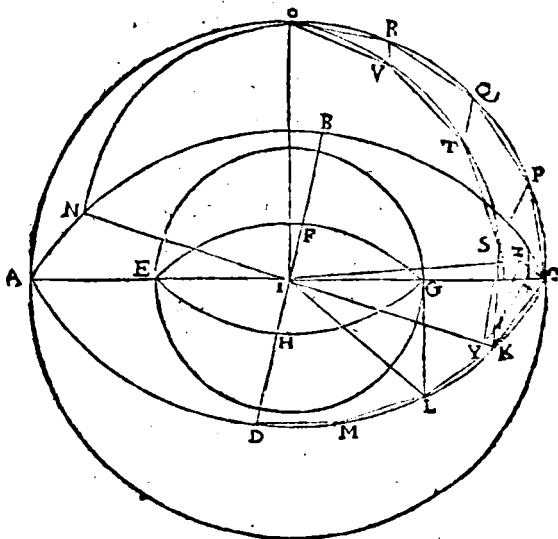
Soient les deux spheres couppees par quelque plan passant par le centre I : il est evident par la def. de la sphere, (qui est faicte par la circonduetion du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grands de toute la sphere : d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puisque le plan coup pant passe par le centre de la



sphere: soient donc icelles communes sections, sçavoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle E F K H : & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFkH, par la 16. prop. 12. duquel les costez de la quarte CD, soient Ck, K L,

LM, MD : Et soit menée la ligne k I, continuée iusques au point N : Item par la 12. pr. 11. du centre I soit menée IO perpendiculaire sur le plan des cercles AB CD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O: Pareillement, par les lignes AC, IO, & Nk, OI, soit tirez les plans AOC, NOk. Ils feront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC, NOk, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I:) Et d'autant que la ligne IO est esleuée perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOk, seront par la 18. prop. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOk sont egaux (ayans les diametres egaux), aussi leurs moitez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, OK: Partât autât qu'il y aura de costez du polygone en la quarte CD, ou en pourra inscrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & kS, ST, TV, VO: & soient menées les lignes SP, TQ, VR: Item des points P & S soient menées par la 11. prop. 11. les perpendiculaires PX, SY: par la 38. prop. 11. elles tomberont sur les lignes IC, Ik, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOk esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menée la ligne XY. Maintenant puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales: les angles PXC, SYk droicts, & les angles PCX, SKY egaux: car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS: les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au costé SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Par-

quoy puis que les deux diametres AC , Nk sont
 egaux: & les segmens XC , Yk aussi egaux; les seg-
 mens AX , NY seront pareillement egaux: partant
 comme IX est à XC , ainsi IY est à Yk : & par la 2. p.
 6. YX sera parallele à kC . Item les deux perpendi-
 culaires PX , SY estans egales, sont aussi paralleles par
 la 6. p. 11. & par la 33. prop. 1. SP , YX , seront egales



& paralleles: & par la 9. prop. 11, SP & kC seront
 paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au
 mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere
 Ck, SP , est en vn mesme plan. Par mesme discours
 on monstrera aussi que les quadrilateres $EPVQ$, &
 le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en
 vn mesme plan. Que si des poinçts O, P, R, S, T, V , on
 imagine des lignes menées vers le centre I , on se re-

presentera vne figure solide, comprise entre OC & Ok, composée de quatre pyramides, desquelles le sōmet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR: Et si on construit pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur Ck: Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn polyedre en la sphere donnée.

Je dis d'auantage, qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC: Je dis qu'elle sera plus grande que IG demy diametre de la petite sphere.

Car ayant pour l'inscription du polygone tiré du point G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que Ck costé d'iceluy polygone inscrit, soit tirée IL; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 2. d. 11. les angles IZC, IZk sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarréz de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarréz de IZ, ZK: Parquoy les quarréz des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarréz de IZ, CZ, seront egaux aux quarréz de IZ, ZK: ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarréz de CZ, KZ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy si du centre Z, & de l'interuale de l'une d'icelles, on décrit vn cercle, il circonserira la quadrilateré CKSP: duquel les trois costez Ck, CP, kS qui soustiennent arcs egaux de cercles egaux estā egaux, & l'autre costé SP plus petit; (car les triang. ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le

coſté IX, auffi le coſté Ck ſera plus grand que le coſté XI, qui a eſté demonſtré egal à SP) il eſt euidont que l'angle CZK ſera plus grand qu'un droit; & par conſequent le plus grand du triangle CZk: & par la 19. prop. 1. Ck ſera plus grand coſté que CZ. Parquoy GL eſtant plus grande que CK, ſera auffi plus grande que CZ; & par conſequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarez de IG & GL, ſont egaux aux quarez de IZ, CZ, (eſtans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande ſphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ ſont rectangles) & le quarré de GL, eſt plus grand que le quarré de CZ; le quarré de IZ, ſera plus grand que le quarré de IG; & par conſequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CkSP ne touche donc pas la petite ſphere EFGH. On prouuera par meſme raiſon que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la grande ſphere ne touchent pas la petite ſphere EFGH. Donc eſtans données deuz ſpheres inegales à l'entour d'un meſme centre, nous auons inſcrit en la plus grande un polyedre, qui ne touche par la ſuperficie de la petite ſphere. Ce qu'il falloir faire.

COROLLAIRE.

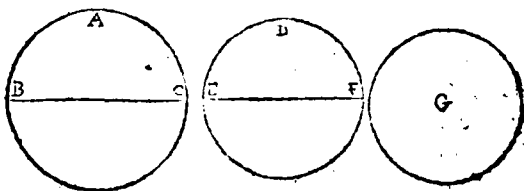
Des choſes cy deſſus demonſtrées reſulte que ſi en un autre ſphere on inſcrit un polyedre ſemblable au polyedre cy deſſus deſcrit, qu'iceux polyedres ſeront en raiſon triplée des diametres des ſpheres, auſquelles ils ſeront inſcrits. Car iceux polyedres eſtans ſemblables par la deff. des ſolides ſemblables, ils auront en leur conuexité autant de plans ſemblables l'un comme l'autre: partant ils ſe pourront diuiſer en autant de pyramides ſemblables l'un comme l'autre, ayant toutes le
dem-

demydiametre de leur sphere pour un de leurs costez : Par-
sant prises une à une, elles seront en raison triplée des co-
stex homologues, sçavoir est des demy diametres des spha-
res, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes,
pareillemēt en raison triplée des mesmes demy diametres, par
la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplée des diametres en-
tiers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison
triplée de leurs diametres.

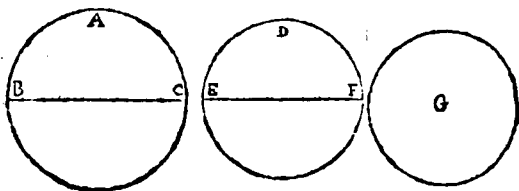
Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles
les diametres sont BC, EF. Je dis qu'elles sont l'une
à l'autre en raison triplée du diametre BC, au diame-



tre EF : C'est à dire que si on imagine que comme
la raison triplée de BC à EF, ainsi la sphere BAC, à
quelque autre sphere, comme G : icelle sera éga-
le à la sphere DEF.

Autrement, elle sera plus grande ou plus petite.
Soit premierement la sphere G, plus petite que la
sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra estre en-
fermée dans icelle, si on les met toutes deux sur un
Ccc

mesme centre : Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. pr. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillemēt inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera à celuy-là, en raison triplée du diametre BC au diametre EF : mais en telle raison, la sphere BAC est posée estre à la sphere G, & par la 11. pr. 5. comme la sphere BAC à la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere BAC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere BAC, est plus grande



que son polyedre, n'estant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la sphere G est plus grande que le polyedre de la sphere DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplée des diametres BC & EF, à vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible : Et puis qu'on a posé que comme la sphere ABC à la sphere G, ainsi la raison triplée du diametre BC au diametre EF, en changeant la sphere G sera à la sphere BAC, en raison triplée du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G à la sphere BAC, ainsi la sphere DEF, à vne quatriesme proportionelle : la;

quelle sera plus petite que BAC par la 14. prop. 3. d'autant que G est polée plus grande que DEF: Et partât icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC: Et si par la 11. pr. 3. la sphere DEF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplée du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonstté estre impossible. Donc la sphere G, n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale: & par consequent les spheres sont l'une à l'autre en raison triplée de leurs diametres. Ce qu'il falloit demonstter.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'une sphere est à une sphere, comme le polyedre descrit dans celle-là, est au polyedre semblable descrit en ceste cy: pource que sans les spheres que les polyedres sont en raison triplée des diametres d'icelles spheres, comme il a esté demonstté.

Fin du douziesme Element.



E L E M E N T

T R E Z I E S M E.

T H E O R. I. P R O P. I.

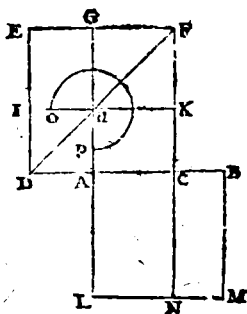


I V N E ligne droite est coup-
pée en la moyenne & extre-
me raison : le quarré de la
moictié de la toute , & du
plus grand segment comme d'une seule
ligne, est quintuple du quarré de la moi-
ctié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB, couppée en la moyenne
& extreme raison au poinct C, à laquelle on adiouste
AD, ligne egale à la moictié de la totale AB : ie dis
que le quarré de DC est quintuple du quarré de
DA.

Car soit descript sur CD le quarré CE, & tiré le
diametre DF ; puis soit menée AG parallele à DE,
coupant le diametre DF en H, par lequel poinct
soit tirée Ik parallele à CD. En apres ayant prolongé
GA, & accomply le quarré AM, soit produicte

FC iusques en N. Premièrement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilatères AI, Gk seront quarrés des lignes DA, AC. Et puis que AB est couppée en la moyenne & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17. prop. 6. le rectangle CM, sous AB, CB, est egal au quarré de AC, sçavoir GK.



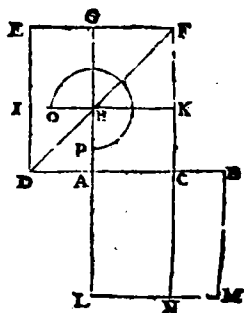
Et puis que AB est posée double de DA; & AL est egale à icelle AB; & AH à AD; aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1. prop. 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43. p. 1. Ak est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, Ak; adioustant donc ces egaux aux egaux CM, KG, le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du mesme quarré AI: & partant si au gnomon OP est adiouste le quarré AI; CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'une ligne droicte est quintuple du quarré d'une partie d'icelle: le double d'icelle partie estant coup-

péc en la moyenne & extreme raison;
le plus grand segment fera l'autre
partie de la donnee.

Soit la ligne droi&te DC
diuif&e au poin&t A, en
forte que le quarr&e de la
toute, ſçauoir EC, ſoit quin-
tuple du quarr&e de la plus
petite partie DA, ſçauoir
AI: & ſoit priſe AB dou-
ble d'icelle AD: Je diſ que
ſi on diuiſe AB en la moy&-
ne & extreme raiſon, que
le plus grand ſegment ſera
AC, autre partie de la totale DC.



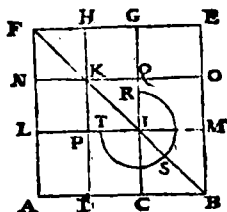
Car ayant acheué la construction cōme en la précédente : les quadrilateres AI , GK seront quarrés par le corol. de la 4. pr. 2. Et puis que AB , c'est à dire AL , est double de DA , ou AH son égale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou égal aux deux AK , IG qui sont égaux par la 43. pr. 1. Or par le scholie de la 4. pr. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI ; & le quarré EC est quintuple du même par l'hypothese : il est donc evident que le quarré AM est égal au gnomon OP , duquel les deux rectangles AK , IG , sont égaux au rectangle AN . Il faut donc que le rectangle CM , soit égal au quarré Gk , fait sur vne ligne égale à AC : & partant par la 17. p. 6. comme BM , c'est à dire AB est à AC , ainsi AC à CB . Parquoy par la 3. d. 6. la ligne AB sera coupée en la moyenne & extreme raison au point C : & AC autre partie de la totale DC , est le plus grand segment d'icelle. Parquoy si le quarré

d'une ligne droite est quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droite est couppée en la moyenne & extreme raison ; le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grãd segment, côme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segmẽt.

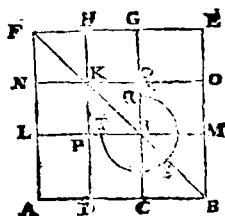
Soit la ligne droite AB, couppée en la moyenne & extreme raison au point C, de laquelle le plus grãd segment AC est couppé en deux egalemẽt en D : ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand, sçauoir de AD, est quintuple du quarré de DC, moitié du grand segment AC.



Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit descrit le quarré AE, & ayant mené son diametre BF, des points C & D soient menées CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF es points I & k, par lesquels soient menées LM, NO peralleles à AB, lesquels couppent CG, DH en P & Q : Et par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO seront quarræz des lignes AC, CD, DB : ie dis donc que le quarré DO est quintuple du quarré PQ.

Car puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par
Ccc iii j

la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (ſçauoir AM) eſt egal au quarré de la moyenne AC , ſçauoir LG , lequel eſtant par le ſcholie de la 4. pr. 2. quadruple du quarré PQ , le rectangle AM ſera auſſi

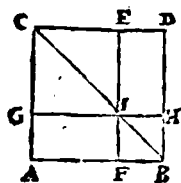


quadruple de PQ : mais AP & DI eſtans ſur baſes egales, ſont egaux par la 1. prop. 6. Et DI eſtant egal à IO , par la 43. prop. 1. le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ : ainſi il eſt euident que le quarré DO , eſt quintuple du quarré PQ : Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du plus grand ſegment.

Soit la ligne droicte AB , couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct F ; ie dis que le quarré de la toute AB , & le quarré de FB plus petit ſegmēt, ſont triples du quarré de AF plus grand ſegment.

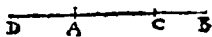


Car soit décrit sur AB le quarré AD , auquel estant tiré le diametre BC , soit menée de F la ligne EF parallele à AC , couppant BC en I , par lequel soit menée GH parallele à AB . Par le corol. de la 4. prop. 2. les parallelogrammes GE , FH ieront quarréz des lignes AF , FB : Et puis que comme AB est à AF , ainsi AF est à FB , par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB , FB , sçauoir AH est egal au quarré de la moyenne AF , sçauoir GE . Veu donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH , sera egal au double du quarré GE : & partant adioustant le quarré GE ; AD quarré de AB , avec FH quarré de FB , sera triple de GE quarré de AC . Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adioust directement le plus grand segment; la route composée, sera couppée en la moyenne & extreme raison, & la route simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne droicte AB , couppée en la moyenne & extreme raison au point C , & à icelle on adioust direc-



tement AD égale à AC grand segment: ie dis que

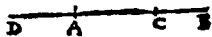
DB est aussi couppee en la moyenne & extreme raison au point A, & que la toute donnee AB est le plus grand segment.

Car puis que comme AB est à AC, c'est à dire AD, ainsi AC est à CB; en changeant comme DA sera à AB, ainsi BC à AC: & en composant comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire à AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB est couppee en la moyenne & extreme raison au point A, & le plus grand segment est la ligne AB proposee au commencement. Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele est couppee en la moyenne & extreme raison: l'un & l'autre segment est ligne irrationele, appellée residu.

Soit la ligne rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C: ie dis que AC & BC sont irrationeles & residus.



Car si au plus grand segment AC on adiouste directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de la ligne DA, il est à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. prop. 10. les quarrés de DC, DA seront commensurables, & par consequent les lignes DC, DA, sont aussi commensu-

ables, au moins en puissance. Or AD est rationnelle, puis qu'elle est moitié d'une rationnelle AB; Donc aussi DC sera rationnelle. Et d'autant que les quarrés de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le coroll. de la 24. propos. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommensurables en longueur, par la 9. prop. 10. & partant rationnelles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationnelle on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74. prop. 10. le reste AC sera irrationnelle, appelée résidu.

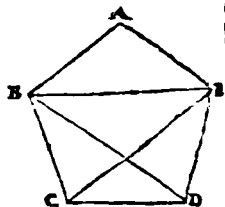
Derechef AB estant couppee en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. prop. 6. Or le quarré du résidu AC appliqué sur la rationnelle AB, doit faire l'autre costé CB résidu premier, par la 98. prop. 10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationnelles appelées résidus. Si donc une ligne droite rationnelle est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en un pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, duquel trois angles pris comme on voudra sont egaux, sçavoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car estans tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes substandantes BE, BD, CE, elles seront egales par la 4. prop. 1. (estans tous les costez egaux.) Item les deux triangles DBC & DEC, ayans les trois costez egaux



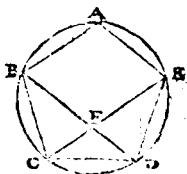
aux trois costez, chacun au sien, les deux angles DBC & DEC seront egaux par la 8. proposition. 1. Item BAE estant isoscele, les deux angles sur la baze BE, seront egaux par la 6. proposition. 1. Pareillement les deux triangles CBE & DEB, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, ils auront l'angle CEB egal à l'angle DBE, par la 8. prop. 1. Partant le total angle B est egal au total angle E. Mais d'autant que CBE est triangle isoscele, & que BAE à les trois costez egaux au trois costez du triangle DEC chacun au sien, l'angle ABE sera egal à l'angle DCE par la 8. prop. 1. Parquoy le total C sera egal à l'angle total B, & par la 1. commune sentence ils seront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone sera equiangle. Ce qui estoit à demonstrier.

T H E O R. 8. P R O P. V I I I.

Si deux lignes droictes subtendent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre icelles substandantes se couperont l'une l'autre en la moyenne & extre-

me raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à vn costé du pentagone.

Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, intendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'enrecouppent en F. Je dis qu'elles seront ainsi coupees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux à quelconque costé du pentagone.



Car ayant descrit par la 14. propos. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. propos. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26. prop. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par

la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. prop. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD: & parrant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Parquoy si deux lignes droictes subtendent deux angles d'un pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

Donnot a traduit cestte proposition ainsi.

Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux aux costez du pentagone.

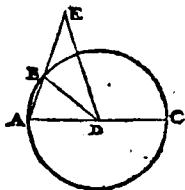
Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit vniuersellement vraye: Car il est euident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C & D, ou de l'angle B aux angles D & E, &c. Icelles lignes droictes ne se couperont points.

T H E O R. 9. P R O P. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le

plus grand segment est le costé de l'hexagone.

Dans le cercle A B C soit inscrit le costé du decagone A B, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone B E qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que B E soit egale au demy diametre du cercle, (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le coroll. de la 15. p. 4.) Je dis que A E est couppee en la moyenne & extremereason, & que B E costé de l'hexagone est le plus grand segment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre A C, & tiré les lignes D B, D E : l'arc A B estant la 10. partie de la periphèrè du cercle, sera la 5. de l'arc A C : & partant l'arc B C sera quadruple d'iceluy A B : Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle B D C sera quadruple de l'angle A D B : & par la 32. propos. 1. B D C estant extérieur, il vaudra les deux D A B, D B A : lesquels estans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle A B D est isoscele l'un ou l'autre sera double de A D B : mais l'un d'iceux D B A estant extérieur, est egal aux deux opposez intérieurement D E B & B D E, (lesquels sont egaux, estant le triangle D B E isoscele, pource que D B demy diametre, & B E sont egaux par la construction) ainsi l'angle D B A sera double de l'angle E : lequel par ce moyen sera egal à l'angle A D B : ainsi les deux triangle A E D, A D B seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E

egal à l'angle ADB, par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers : & par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB : partant AE est coupee en la moyenne & extreme raison en B : & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Donc la ligne droicte composée du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

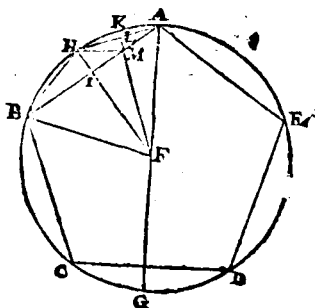
De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant coupé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on coupe vne partie egale à AB : comme la souse AE sera à la toute BE, ainsi la retranchée BE sera à la retranchée de BE, c'est à dire à AB : & partant par la 29. propos. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchée à la retranchée. Parquoy BE sera semblablement coupee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le plus grand segment sera AB costé du decagone.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarréz des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre est F, soit inscrit

inſcrit vn pentagone equilateral, vn coſté duquel eſt AB. Ie diſ que le quarré d'ice-luy coſté AB eſt egal aux deux quarréz des coſtez de l'hexagone, & du decagone inſcrit au meſme cercle.



Car ayāt tiré le dia-metre AFG, & ioinct

FB, ſoit coupép l'arc AB en deux également par la ligne FH, laquelle coupe auſſi la ligne AB en I; & ſoient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH ſera coſté du decagone, & FB coſté de l'hexagone: En apres ſoit coupép l'arc AH en deux également en K, par la ligne FK, laquelle coupe auſſi la ligne AH en L, & la ligne AB au poinct M, auquel ſoit men-nee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH ſont egaux, auſſi ſeront egaux les angles AFH, BFH, par la 27. propoſit. 3. Parquoy les coſtez AF, FB eſtans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la baſe AI ſera egale à la baſe BI, par la 4. propoſit. 1. & les angles AIF, BIF auſſi egaux, & par-tant droictz. Par meſme raiſon ſeront egales les lig. AL, HL, & les angles ALF, HLF droictz. Or ſi des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oſte arcs egaux ABC, AED, reſteront egaux. les arcs CG, CD, & partant l'arc CG ſera moitié de l'arc CGD. Mais auſſi l'arc AH eſt moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD ſont egaux, les arcs AH, CG moitié d'iceux, ſeront auſſi egaux: & partant l'arc AH eſtant double de l'arc Hk, auſſi le ſera CG. Et puis que

D d d

les arcs AB, BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont que-multiplices, sçauoir est doubles, des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. proposit. 6. Mais par la 20. prop. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB: donc les angles BFM, FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers, par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB iera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Derechef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4. prop. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est egal à l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux: Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA: & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. proposit. 6. comme AB sera à AH, ainsi AH à AM: & par la 17. proposit. 6. le rectangle de AB, AM sera egal au quarré de AH. Mais il a esté demonstré que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF: donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensembles, sont egaux aux deux quarréz de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont egaux au quarré de AB: donc le quarré

de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouuer.

C O R O L L A I R E.

Par cery est manifeste qu'une ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuise en deux egalement vn arc, diuise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux egalement, & à angles droictz.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux egalement l'arc que le costé opposé à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé opposé, & à angles droictz. Car il a esté demonstré que le diametre AG tiré du poinct A, diuise en deux egalement l'arc CD, lequel le costé opposé CD subtend: Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux egalement & à angles droictz iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

T H E O R. II. P R O P. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrational: appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral A B C D E, inscrit dans le cercle A B C D E, duquel le diametre est rationel: ie dis que AB costé du pentagone est irrational, appellé ligne mineure.

la 1. prop. 13. le quarré de la compoſee de CD plus grand ſegment, & CK moitié de la toute CA, ſera quintuple au quarré de Ck moitié de la toute : partant auſſi le quarré de KL, ſera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne B L eſt auſſi quintuple de FL, eſtant FL quart de IB: donc comme BL à FL, ainſi le quarré de KL, au quarré de FL; c'eſt à dire en raiſon doublee de kL à FL: dont ſ'enſuit que KL ſera moyenne proportionele entre BL & FL: Partant par la meſme raiſon doublee de la 10. deſſinit. 5. & 20. propoſition du 6. le quarré de BL ſera au quarré de K L, comme BL à FL: c'eſt à dire que le quarré de BL ſera quintuple du quarré de KL: Partant iceux quarez ſeront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8.) Parquoy par la 9. prop. 10. les lignes BL & kL, ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement: deſquelles BL eſtant rationele, BL & KL ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement; & par la 74. prop. 10. BK ſera reſidu. Maintenant que la ligne BL puiſſe plus que la ligne kL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL eſt rationele commenf. en longitude à la rationele propoſee BF: (car elles ſont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy eſt incommenſurable en longitude; (car la puiſſance de la ligne BL eſtant quintuple de la puiſſance de la ligne kL, le quarré de N, qui reſte apres auoir oſté le quarré de KL de celui de BL; ſera au quarré de BL comme 4. à 5. qui n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré: & partant par la 9. propoſition 10. BL qui peut plus que KL du quarré de la ligne N, eſt incommenſurable en longitude à icelle

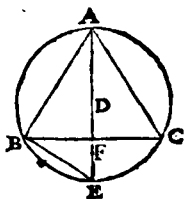
N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera residu quatriefme.

Finalemēt pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droit, duquel est tirée Ak perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droite AB peut la superficie contenuë de la rationele BH, & du residu 4. BK: par la 95. proposit. 10. icelle AB sera ligne mineure. Parquoy si dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Je dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.



Car estant tiré le diametre AE, lequel coupera par le corol.

de la 10. propos. de ce liure, l'arc BC en deux également en E; & aussi la ligne droite BC en deux également & à angles droits: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixies-

me partie : partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15. prop. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale, au demy diametre, par le scholie de la 4. prop. 2. & par la 47. prop. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE : il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

C R O L L A I R E.

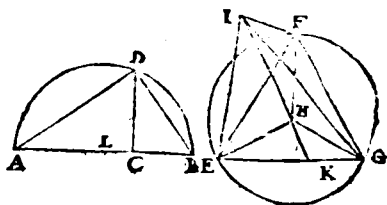
Il s'ensuit de ce que dessus que le quarré du diametre d'un cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquiterce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté demonsté que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD ; posant le quarré de AB 3. le quarré de AD sera 1 ; & le quarré de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4. à 3.

Et pource que par le corol. de la 8. p. 6. comme AE est à AB, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'un angle sur vn costé ; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4 à 3. On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE est coupé en deux également en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE ; si on pose iceluy quarré de AB estre 12. le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3 ; & par consequent le quarré de EF sera 1. par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE ; & par consequent DE est coupé en deux également en F.

P R O B. I. P R O P. XIII.

Dans vne sphere donnee , inscrire vne pyramide equilaterale : & monstrier que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarré du costé d'icelle pyramide.

Soit la ligne AB, diametre de la sphere donnee, diuisee en C, de sorte que AC soit double de BC : Et apres auoir descrit sur AB le de-



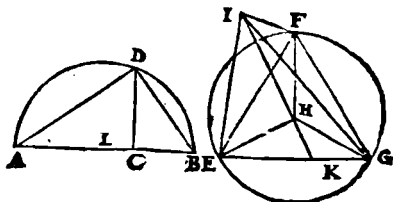
my cercle ADB, leué la moyenne proportionelle CD, & mené les lignes DA & DB : Soit descrite le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD : & apres auoir inscrit en iceluy le triang. equilateral EFG, du centre H soit leuee la perpendiculaire HI par la 12. prop. 11. laquelle soit egale à AC : puis soient menees les lignes IE, IF, IG. Je dis premiere-ment que la pyramide EFGI est equilaterale : puis qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diametre est AB : & que le quarré du diametre AB, est en raison sesquialtere au quarré du costé EG.

Que la pyramide soit equilaterale : il appert en premier lieu que le triangle EFG, est equilateral : Itē que

les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. prop. 1. le quarré d'une chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la base AD sera egale à la base EI par la 4. pr. 1. En la mesme maniere sera demonstrez AD estre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC, est double du quarré de CD (car ils sont l'un à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. pr. 6. estans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportionnelles) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarré de CD, ou de son egale HE: Mais par la 12. prop. 13. le quarré de EF est aussi triple du quarré de HE; Partant EF, & AD sont egales: & par la 1. commune sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD est aussi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par consequent la pyramide EFGI, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere, ayant pour diametre AB, il appert: Soit continuée la ligne perpendiculaire IH par dessous la base de la pyramide iusques en k: Et soit faicte Ik egale à AB, & soit imaginé estre posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide: sçavoir le point A, au point I; le point B au point k: & puis que AC & BC sont egales à IH, & HK; & HG egale à DC, faisant angle droit avec IH, aussi bien que leurs egales AC & CD, il est evident que le point D, du demy cercle tombera sur le point G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy cercle faict vne revolution, il

touchera les deux autres angles de la pyramide E & F; (estans les lignes HE, HF, HG égales) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnée.



Finablement que le quarré du diametre AB, soit sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert: Car puis que AB est triple de BC; & AC double de la même BC; AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtere. Nous auons donc inscrit vne pyramide equilaterale dans vne sphere donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E,

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidia. du cercle descript à l'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diametre de la sphere, a esté demonsté sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6. parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de

9. telles parties que le quarré de AB contiendra; le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE , puis que la raison des quarræz est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tirée au centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixiesme partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidia. Car L soit le centre du demy cercle ADB : L sera pareillement le centre de la sphere. Je dis que la ligne LC , (qui est la perpend. tirée du centre de la sphere à la base EFG : puis que AC est egale à HI , & partant le point C , le mesme que H , ainsi aussi L est le mesme que le centre de la sphere.) est la 6. partie du diametre de la sphere, & auoir est de AB , & la tierce partie du semid. AL . Car puis que AC est double de CB , de telles 4 parties qu'est AC , 2 telles sera CB : & partant 6 telles sera la toute AB , & 3 le semidia. AL . Parquoy si AC est 4, & AL 5; LC sera 1 : & partant LC sera la sixiesme partie de AB , & la tierce de AL .

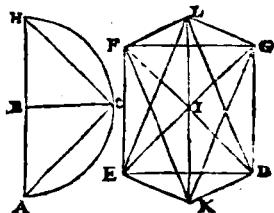
Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphere. Car HI est la mesme que AC , laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarré d'iceluy diametre le quarré de la hauteur de la pyramide en sera 4. Car la raison de 9 à 4, est la raison doublée de 3 à 2.

PROBL. 2. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn octaedre: Et monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaedre.

Soit le diametre de la sphere dōnée AH, coup-
pé en deux également
au point B : & apres
auoir construit le demy
cercle ACH ; leué la
perpendiculaire BC, &
mené les lignes CA,



CH, lesquelles seront egales entr'elles par la 4. prop.
1. sur la ligne DE egale à l'une d'icelles AC, CH, soit
construit le quarré DEFG, dans lequel soient me-
nées les deux diagonales DF, GE se couppans au
point I, duquel point par la 12. prop. 11. soit esleuée
la ligne IL, perpendiculairement sur le quarré GE;
laquelle soit aussi continuée perpendiculairement
par dessous iceluy plan, & soit icelle IK, laquelle
soit faicte egale à AB; & IL aussi à AB : Item des
points L & K, soient menées aux angles du quarré
les lignes LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG.

Je dis maintenant que la figure solide DLFK, est
environnée de huit triangles equilateraux; & que
c'est vn octaedre. Car le quarré DEFG, ayant les
costez egaux à AC; Il est evident que les diagonales
EG, FD seront egales à AH : partant leurs moitez à
AB. Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à
AB : & par consequent elles seront egales à une
chacune d'icelles demy diagonales; & par la 4. p. 1.
les huit lignes ID, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG, se-
ront toutes egales entr'elles : & aux quatre du quar-
ré DEFG par la mesme 4. prop. 1. (estans les demy
diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en
constituant des angles droicts au point I, milieu du
quarré). Et puis que tous les costez sont egaux, tous
les triangles seront equilateraux, sçauoir les quatre

au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct L : & quatre autres au dessous du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au poinct k : ainsi le solide DLFK compris de huit triangles equilateraux, sera octaedre.

Ie dis d'avantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est evident que la ligne LK, est egale au diametre AH, & que l'angle LDk est droit : (d'autant que les deux lignes LI, l D estans egales ; les angles sur la base LD seront egaux, & demy droits, pource que l'angle LID est droit : Et par mesme raison l'angle IDk est demy droit ; & partant le total LDk sera droit.) Partant le demy cercle ayant pour diametre Lk, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaedre il touchera le poinct D : Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont egaux à l'angle D.

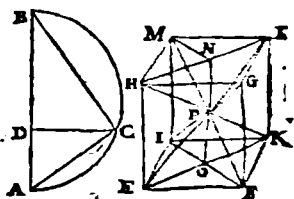
Finablement, il est evident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou Lk, est egal aux deux quarez de LD, Dk, lesquels sont egaux ; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'iceux costez de l'octaedre. Nous auons donc inscrit vn octaedre dans vne sphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. xv.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn cube : & monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré

ré dui costé d'celuy cube.

Soit le diametre de la sphere donnée AB, lequel soit couppé au point D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD : Puis, apres avoir



construi& le demy cercle ABC, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC, & BC : sur EF egale à BC, soit fait le quarré EFGH, sur lequel soient esleuées par la 12. pr. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, EK, GL, HM, qu'on fera egales à EF : puis soient menées les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK sont perpendiculaires au plan EFGH : elles seront parallèles par la 6. pr. 11. Mais elles sont aussi egales : donc par la 33. prop. 1. EF, IK seront pareillement egales & parallèles ; & partant EFKI est vn parallelogramme ayant les quatre costez egaux. Mais il a aussi par la 34. prop. 1. les 4. angles droicts, puis que les angles EIk, FKI sont opposez aux droicts KFE, IEF : donc EFKI est quarré. Par mesme raison FKLG, GLMH, HMIE seront quarez : & partant IKLM sera aussi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il est egal & semblable au quarré oppose EFGH : Car EL est vn solide parallelepipedé : pource que par la 15. prop. 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, estans tirez par lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL sera vn cube : lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnée. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, GM, des plans opposez EFKI,

HGLM, soient imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans EkLH, FIMG, lesquels par la 28. prop. 11. couperont le cube en deux également, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le point P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entre couperont aussi en deux également : & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux : & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL : il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube : laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de Ek est egal aux quarez des lignes egales EF, Fk, & partant double du quarré de EF, ou de kL : les quarez de Ek, kL seront triples du quarré de kL. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EL est egal aux quarez de Ek, KL : donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de kL, c'est à dire du quarré de AC : duquel est aussi triple le quarré de AB (car par le corol. de la 8. prop. 6. AB, AC, AD sont prop. & partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC : Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré de AC.) Parquoy les quarez de EL, AB sont egaux : & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres : comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstté que le quarré du diametre

EL est triple du quarré du costé du cube KL. Par quoy nous auons fait tout ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarréz du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarréz de AC, BC costez du cube, & du tetraedre.

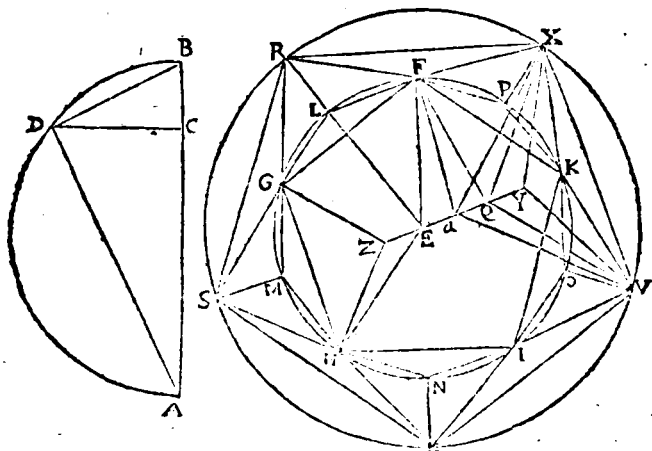
Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux également au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarréz opposez, se coupent en deux également au mesme centre de la sphere.

P R O B L. 4. P R O P. xvi.

Dans vne sphere donnée, inscrire vn icosaedre: Et monstrier que son costé est ligne irrationele, appelée ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnée AB, lequel soit diuisé, au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir coustruit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB, du centre E, & interval EF, egale à BD; soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHik, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en couppant en deux également l'arc
d'un

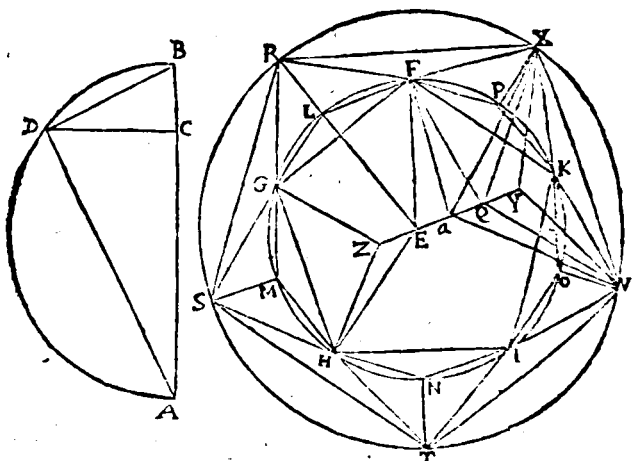
d'un chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E, & des points L, M, N, O, P, soient levées les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle F G H I K, lesquelles soient posées égales à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conjoignant icelles, scaoir



EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV, EP, QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'avons tirées pour éviter confusion) seront égales & parallèles entr'elles, par la 33. prop. 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont égales au semidiamètre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront égales tant entr'elles qu'à iceluy demy diamètre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. pr. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallèle au plan FGHK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallèle au mesme plan FGHK, tiré par les lignes EM, EN; mais que le

Ecc

plan tiré par les lignes QR , QS conuient avec le plan mené par les lignes QS , QT , en la ligne droite QS ; il est euident par les choses demonstrees à la 16. p. II. que ces deux plans en font vn seul. On demonstrea en la mesme maniere, que le plan tiré par QT , QV , avec celuy-cy en faict vn seul, & aussi celuy tiré par QV , QX , & par QX , QR : tellement donc que les li-



gnes QR , QS , QT , QV , QX sont en vn mesme plan; & partant si de Q & de l'intervale QR , on décrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres poinçts S , T , V , X , & sera egal au cercle $FGHIK$. Soient tirées les lig. droictes RS , ST , TV , VX , XR . Et d'autât que LR , PX sont egales & paralleles; si on imagine estre tirée vne ligne droite LP ; aussi par la 33. p. 1. LP , RX seront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prèd la 5. partie du cercle $FGHIK$, sçauoir

deux 5. parties LF, FP: Donc aussi RX, prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous concluons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirées des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHik, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, V k, X k, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'exagone du cercle FGHik; & LF est costé du decagone par la 10. prop. 13. le quarré du costé du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarréz de LR, LF. Mais le quarré de FR, par la 47. prop. 1. est egal à iceux quarréz de LR, LF. Donc le quarré de FR est egal au quarré du costé du pentagone; & par consequent la ligne RF sera egale à LP costé du pentagone, ou à FG, c'est à dire à RX. Par la mesme raison, les autres lignes RG, SG, &c. seront egales aux autres costez de chaque pentagone: & partant les 10. triangles REX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIk, VKX, XkF, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QY, EZ soient egales au costé du decagone, & soient tirées les lignes v Q, v Y, x Q, x Y, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX est lemy-diametre du cercle RSTVX, c'est à dire costé de l'exagone, & QY est costé du decagone de mesme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de xv costé du pentagone, sera egal aux quarréz de Qx, QY. Mais par la 47. proposition 1. à iceux quarréz de Qx, QY, est aussi egal le quarré de xy (car

l'angle XQY est droit, étant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallèles.) Donc le carré de XY est égal au carré de XV ; & partant la ligne XY égale à la ligne XV . Par même raison XV sera démontrée égale à VY ; & partant le triangle VYX est équilateral. Par même manière, (estant tirées les lignes RY, SY, TY , lesquelles ne sont tirées pour éviter confusion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV , seront démontrés équilatéraux, & égaux au triangle VYX , c'est à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs costez sont égaux aux costez du pentag. Par semblable argument sera prouvé que le triangle GZH est équilateral; cōme aussi les 4. autres triang. HZI, IZk, kXF, FZG . (desquels toutes fois nous n'avons aussi tiré les lignes, à fin d'éviter la confusion) tous lesquels seront égaux aux 15. précédans. Veu donc que tous ces 20. triangles sont équilatéraux, & égaux, & qu'ils se conioignent les uns aux autres par lignes droictes; sera constitué d'eux un icosaedre: lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnée, de laquelle le diametre est AB . Car ayant coupé en deux également EQ en a , & tiré les lignes aF, aX, aV ; les costez aQ, QV du triangle aQV seront égaux aux costez aQ, QX du triangle aQX , (car QV, QX sont semy-diametres du cercle $RSTVX$) & les angles aQV, aQX sont droicts: & partant par la 4. p. 1. les bases aV, aX seront égales. Par la même raison, si on tire des lignes de a & Q à R, S, T , les lignes aR, aS, aT seront démontrées égales entre elles, & à celle aV, aX . Et puis que les costez aQ, QX du triangle aQX sont égaux costez aE, EF du triangle aEF , (pource que QX, EF sōt demy diametres de cercles égaux, & EQ est coupée en deux éga-

lement en a ,) & les angles a QX, a EF sont aussi
 egaux, sçavoir droicts; par la 4. prop. 1. les bases
 a X, a F, seront aussi egales. Par mesme raison, si de a
 & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on de-
 montrera les lignes a G, a H, a I, a K, estre egales
 à icelles a X: & partant les dix lignes droictes tirées
 de a aux dix angles F, G, H, I, k, R, S, T, V, X, sont
 egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à
 dire costé de l'exagone du cercle FGHK; & EZ
 costé du decagone du mesme cercle; par la 9. prop.
 13. QZ sera divisée en la moyenne & extreme rai-
 son en E, & le plus grand segment sera QE. Par-
 quoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ sera quintu-
 ple du quarré de E a . Mais le quarré de a F est aussi
 quintuple du mesme quarré de E a : Car le quarré
 de EF étant quadruple du quarré de E a par le scho-
 lie de la 4. prop. 2. pource que EF est pouble de E a ;
 les quarez de EF, E a , sont le quintuple du quarré
 de E a . Mais par la 47. prop. 1. le quarré de a F est egal
 à iceux quarez de EF, E a : donc aussi le quarré d'i-
 celle a F sera quintuple d'iceluy quarré de E a . Donc
 les quarez de a Z, a F, sont egaux: & par cõse-
 quent les lignes a Z, a F seront egales. Et puis que
 a E, a Q, & EZ, QY sont egales, aussi a Z, a Y seront
 egales; & toutes les lignes droictes tirées de a , à
 tous les angles de l'iscosaedre pareillement egales.
 Parquoy la sphere descrite à l'entour du diametre
 ZY, passera par tous les angles de l'iscosaedre. Car
 d'autant que par la 15. prop. 5. comme a Z est à a E,
 ainsi YZ à QE, & partant par la 22. prop. 6. comme
 le quarré de a Z est au quarré de a E, ainsi le quarré
 de YZ au quarré de QE, & que le quarré de a Z a
 esté demonsté quintuple du quarré de a E: pareil-
 lement le quarré YZ sera quintuple du quarré de
 E e e ij

QE, c'est à dire du quarré de DB son egale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du mesme quarré de BD : car AB, BD, BC estans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. pr. 6. & partant AB estant quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarréz de YZ, AB sont egaux ; & partant les lignes YZ, AB, & les sphares descrites à l'entour d'icelles seront egales.

Je dis finablement que le costé de l'icosaedre est ligne irrationele, appelée ligne mineure : ce qui est evident par la 11. prop. 12. estant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele commensurable en puissance à la posée rationele AB, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc fait ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphaere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphaere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone, décrit en vn mesme cercle.

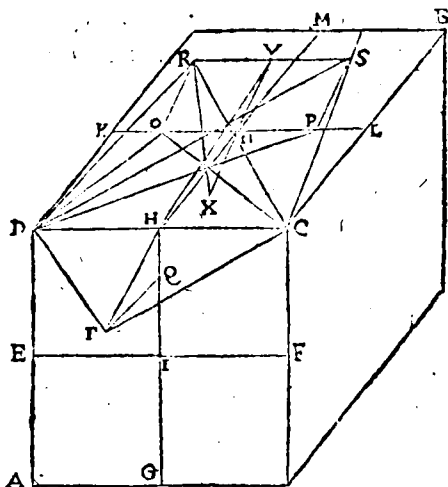
Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

P R O L. 5. P R O P. XVII.

Dans vne sphaere donnée, inscrire vn

dodecaedre: Et móstrer que son costé est ligne irrationele, appelee residu.

Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plás extérieurs AC, & DB, se rencontrans à droits angles à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les

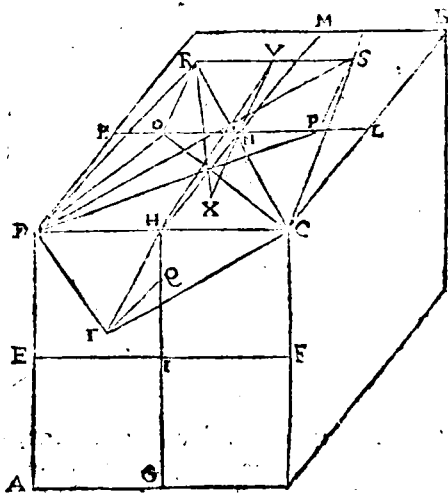


costez soient couppez en deux egalement, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppans au point I; & DB, par les lignes kL & HM se couppans au point N. Item, soient les trois lignes kN, NL, HI couppees en la moyenne & extreme raison aux points O, P, Q, desquelles les plus grands segments soient ON, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11. soient leuees les deux lignes O, R, P S. perpendiculaires au plá DB: mais QR au plan AC, lesquelles soiēt posées égales aux trois segments ON, NP, IQ. Puis soiēt menées les lig. DR, RS, DT, CS, GT. Je dis que

Ece. iiii.

DRSCT est pentagone equilateral constitué sur un
mesme plan, & equiangle.

Car soient menées les lignes DO, DP, DS: &
d'autant que KN est couppee en la moyenne & ex-
treme raison au point O, & que ON est le plus
grand segmēt, par la 4. p. 13. les deux quarrés de KN,
KO seront triples du quarré de ON: Et KN estant
egale à KD & ON à OR, les deux quarrés de KD, &
KO, ou par la 47. prop. 1. le seul de DO, est triple du



quarré de OR: & le quarré de DR, qui est egal à
tous les deux, par la 47. prop. 1. sera quadruple du
seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO,
son quarré, par le scholē de la 4. prop. 2. sera aussi
quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré
de DR: Partant les lignes DR, RS seront egales. Par
mesme discours on mōstrera l'egalité des trois autres
costez SC, CT, TD tant entr'eux qu'aux deux DR,
RS: donc le pentagone est equilateral.

Je dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit meneo NV, parallele à OR: Item les deux TH & HV. Je dis qu'icelles deux lignes se rencontrent directement, & font vne seule ligne droicte THV. Car pour autant que HI est coupee en la moyenne & extreme raison au poinct Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HV est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux costez proportionnaux à deux costez, & sont composez à vn angle H, tellement que les costez homologues sont parallels par la 6. prop. 11. sçauoir HN & TQ, qui sont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui sont à angles droicts sur le plan DB: par la 32. prop. 6. THV sera vne seule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone DR SCT est en vn mesme plan.

Je dis encores qu'il est equiangle: Car puis que KN est coupee en moyenne & extreme raison, estât ON plus grand segment, par la 5. prop. 13. en adioustant KN à n^e, egale au plus grand segment ON; la route n^e sera coupee en la moyēne & extreme raisō au poinct N, & sera KN le plus grand segment: & partant par la 4. propos. 13. les quarréz de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, (ou de son egale KD.) & en adioustant le quarré de KD avec les deux de KP & PS, iceux trois quarréz seront quadruples du seul de KD (ou par la 47. prop. 1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP avec celui de PS, ou encore le seul de DS; sera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. p. 2. estant DC double de KD: partant les deux lig. DC & DS seront egales:

Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien : Et par la 8. propos. 1. l'angle au poinct R sera egal à l'angle au poinct T. Et semblablement nous monstrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC : ainsi trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. prop. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & sur DC l'un des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon un pentagone, sur chacun des vnze costez restans, on trouuera vne figure solide environnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. sera dodecaedre.

Je dis d'auantage qu'il est inscriptible en la sphere donnee. Car si on prolonge VN, qui est perpendic. sur le centre du quarré DB: il appert par la 39. prop. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la coupe donc au poinct X, auquel poinct sera le centre de la sphere environnant le cube par le coroll. de la 15. prop. 13. & NX est egale au demy costé du cube: Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantost monstré par la 4. prop. 13. que les quarez de KP & NP sont triples du quarré de KN: Mais VX est egale à KP; & RV à NP: (car NX est egale à KN: & VN à NP). Partant les deux quarez de RV, XV, ou le seul de RX, par la 74. prop. 1. est triple du quarré de KN: Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscripte au cube, est triple du quarré du costé d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre est triple du quarré du demy costé. Or KN est le demy costé du cube: Partant RX sera le demy diametre de la sphere circōscrite au cube AB, duquel le centre est X. Par

mesme discours nous monstrerons que du point X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, sont egales au demy diametre de la sphere circonscripte au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscripte au cube & au dodecaedre.

Je dis finalement que le costé du dodecaedre est ligne irrationele appelee residu. Car d'autant que les deux demy costez du cube KN, NL sont chacun coupez en la moyenne & extreme raison : par la 15. prop. 5. toute la ligne KL sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçauoir à OP, comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, sçauoir à la composee de KO & PL. Parquoy si KL costé du cube est coupee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP. Mais la toute KL ainsi conppée est rationele : (car son quarré est commensurable au quarré du diametre de la sphere, lequel est posé rationel : puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13.) Donc par la 6. p. 13. le plus grand segment OP, c'est à dire RS costé du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appelee residu. Nous auons donc faict tout ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le costé d'un cube estant coupé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en vne mesme sphere.

Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droite subsendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant coupée en la moyenne & extreme raison, par la 8. prop. 13. le plus grand segment est costé

d'un pentagone : & partant par la 5. prop. 13. la ligne droite compoſee d'icelle, c'eſt à dire du coſté du cube, & du plus grand ſegment, c'eſt à dire du coſté du dodecaedre, eſt ſemblablement diuiſee, & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, mais le plus grand eſt coſté du cube : Il ſ'enſuit que ſi une ligne droite eſt coupee en la moyenne & extremiſon, & que le moindre ſegment ſoit coſté du dodecaedre : le plus grand ſegment ſera coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

PROB. 6. PROP. XVIII.

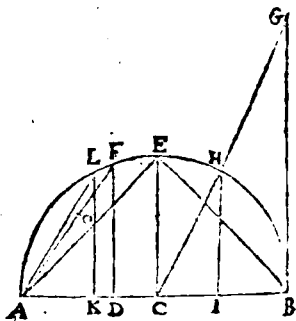
Le diametre d'une ſphere eſtant donné ; trouuer les coſtez des cinq figures inſcrites en icelle ; & les comparer entr'eux,

Soit le diametre d'une ſphere donnée AB : & il faut premièrement trouuer les coſtez des cinq figures inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diuiſé le diametre AB en deux également au point C ; mais au point D, tellement que AD ſoit la tierce partie de AB ;

puis ayant deſcrit ſur AB un demy cercle, ſoient eleuees les perpendiculaires CE, DF ; & tiré les lignes AE, AF ; BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF eſt



moyenne proportionele entre AB, BD ; par le coroll. de la 20. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere : (car par construction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2) Donc aussi le quarré de AB est au quarré de BD, en raison sesquialtere : & partant puis que par la 13. propos. 13. le quarré du diametre de la sphere est en raison sesquialtere au quarré du costé de la pyramide equilaterale ou tetraedre : BF sera le costé du tetraedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Derechef puis que par le mesme coroll. de la 8. p. 6. AE est moyenne prop. entre AB, AC : & partant comme AB est à AC ainsi le quarré de AB au quarré de AE par le coroll. de la 20. prop. 6. & AB est double de AC : aussi le quarré de AB sera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est double du costé de l'octaedre, AE sera costé de l'octaedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Et pour autant que par les mesmes coroll. de la 8. propos. & 20. prop. 6. le quarré de AB est au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la construction AB est triple de AD, le quarré de AB sera triple du quarré de AF. Parquoy veu que par la 15. p. 13. le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré du costé du cube, AF sera le costé du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Et d'autant que AF est costé du cube, soit iceluy coupé en la moyenne & extreme raison au point O, duquel le plus grand segment soit AO : iceluy (par le coroll. de la 17. prop. 13.) sera le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-là mesme qui a pour diametre AB.

quant au costé de l'icosaedre, soit leuée la perpendiculaire BG egale à AB : & apres auoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H , d'iceluy poinct soit menee HI perpendic. à AB par la 12. prop. 1. Or BG estant egale à AB , elle sera double de BC : & partant par la 4. prop. 6. HI sera double de IC : (car les triangles sont equiangles , pource qu'ayans l'angle C commun , & ceux des poincts B & I droicts : le tiers G sera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI sera quadruple du quarré de IC : & partant le quarré de HC (ou de son egale AC) qui par la 47. prop. 1. est egal à tous les deux , sera quintuple du quarré de CI . Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB , & AC sa moitié , DC sera le demy tiers : & partant AC sera triple de DC ; & son quarré vaudra neuf fois le quarré de DC , par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'est que quintuple du quarré de CI : donc la ligne CI sera plus grande que DC . Soit prise CK egale à CI , & apres auoir leuée la perpendiculaire kL , soit menee la ligne AL . Puis donc que le quarré de AC est quintuple du quarré de CI , par la 15. prop. 5. le quarré de AB , (la double de AC) sera quintuple du quarré de Ik (la double de IC .) Or par le corol. de la 16. propo. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite à l'icosaedre est quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonscript au 5. costez de l'icosaedre : donc CK sera semidia. c'est à dire costé de l'hexag. d'iceluy cercle, lequel costé de l'hexagone avec deux fois le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle, est egal au diametre de la sphere AB , par le coroll. de la mesme 16. prop. 13. Il faut donc que Ak . & IB lignes egales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle,

dans lequel KI est le costé de l'hexagone. Mais KI & KL sont egales : (car KL est egale à IH, pour estre en mesme distance du centre C , laquelle estant double de CI sera egale à KI.) Partant KL sera costé de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL sera le costé du pentagone inscrit au mesme cercle. Donc il sera aussi le costé de l'Icosaedre, par la 16. prop. 13.

Nous auons donc trouué les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne mesme sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonstté que le quarré du diametre de la sphere est sesquialtere au quarré du costé de la pyramide : mais double de celui du costé de l'octaedre, & triple du quarré du costé du cube ; il est euident que le quarré du diametre de la sphere estant 6. celui du costé du tetraedre sera 4. celui du costé de l'octaedre 3. & celui du costé du cube 2. Partant le quarré du costé de la pyramide est sesquiterce au quarré de l'octaedre : mais double de celui du costé du cube. Item le quarré du costé de l'octaedre est sesquialtere à celui du costé du cube. Parquoy les quarez des costez d'icelles trois figures, & celui du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre : & partant par la 6. prop. 10. lceluy diametre de la sphere, & costez d'icelles figures sont lignes commens. & rationeles, pource que le diametre est posé rationel. Mais les susdits quarez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainsi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (sçauoir le diametre de la sphere, le costé de la pyramide, le costé de l'octaedre, & celui du cube,) sont incommens. en longitude par la 9. proposi. 10.

& partant elles sont rationeles commensurables en puissance seulement.

Et quant aux costez de l'icosaedre, & dodecaedre: pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est euident que ils sont incommensur. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi: d'autant qu'il a esté demonstrier cy dessus que le quarré de AB est triple du quarré de AF : mais quintuple du quarré de KL , c'est à dire de KL son egale; trois quarez de AF seront egaux à 5 quarez de KL . Et puis que AF est couppée en la moyenne & extreme raison en O , & AO est le plus grand segment, il est euident par la 1. p. 6. que le rectangle compris de AF , AO sera plus grand que le rectangle de AF , OF : & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le doub'e du rectangle de AF , OF : Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarré de AF , par la 2. prop. 1. & au double du rectangle de AF , OF , est egal le double du quarré de AO : (car par la 17. prop. 6. le simple rectangle de AF , OF est egal au simple quarré de AO .) Donc aussi le quarré de AF sera plus grand que deux fois le quarré de AO : & par consequent trois quarez de AF , ou cinq quarez de KL leurs egaux, seront aussi plus grands que 6. quarez de AO . Parquoy vn seul quarré de KL sera plus grand qu'un seul quarré de AO : & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO : Partant AL qui est plus grande qu'icelle KL , sera beaucoup plus grande que la mesme AO costé du dodecaedre. Nous auons donc fait ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on m'en
peut

peut trouuer d'autres comprises de superficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouvant constituer vn angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaèdre: de cinq, l'angle de l'icosaèdre: de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide: car iceux sont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'un angle solide, doiuent estre plus petits que quatre angles droicts par la 21. prop. 11. Partant on ne pourra constituer, vn angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droicts est composé l'angle solide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle solide: car ce seroit toujours contrenenir à la 21. prop. 11. l'angle solide du dodecaèdre est compris de trois pentagones equiangl. De quatre pentagones, il sera impossible: estans iceux plus grands que quatre droicts. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuyuroit absurdité. Partant il est euident qu'oultre les cinq figures regulieres cy dessus declarées, on n'en trouuera point d'autres,

Fin du treziesme Element.

FFF



E L E M E N T

QVATORZIESME.

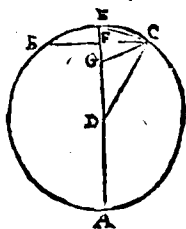
THEOR. I. PROP. I.



A ligne droicte perpendiculaire menee du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

Soit dans le cercle ABC, le costé du pentagone BC, & du centre D soit menee la ligne DF, tombant perpendiculairement sur iceluy costé BC ; & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E, elle coupera l'arc BEC en deux egalemment, comme la ligne BC par la

3. propos. 3. ainsi estant tiree la ligne EC, elle sera le



cofté du decagone, & DE cofté de l'hexagone. Je dis que la perpendiculaire DF eft la moitié des deux cofté ensemble EC & DE.

Qu'il ne foit ainfi, Après auoir pris FG égale à FE, foit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC eft la cinquième partie de la circonferance du cercle, EC fa moitié fera la cinquième partie de la demy circonferance ACE : Et partant l'arc AC fera quadruple de CE, & par la 33. prop. 6. l'angle CDA fera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonferance par la 20. prop. 3. lequel par ce moyen fera double à CDE : mais par la 4. prop. 1. la bafe CE eft égale à la bafe CG : & par la 5. propol. 1. les deux angles fur la bafe EG feront égaux : & FGC fera double de GDC : & iceluy FGC eftant par la 32. prop. 1. égal à tous les deux oppofez interieurement, les deux angles fur la bafe DC feront égaux entr'eux : & par la 6. prop. 1. GC & GD feront égales ; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE eftans égales, la feule FD, fera égale aux deux FE, EC ensemble : & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'eft à dire les deux ensemble DE, EC, feront égales au double de la feule DF : & par confequent icelle DF perpendiculairement tirée du centre fur le cofté du pentagone, fera moitié des deux ensemble DE, EC, cofté de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droicte perpendiculaire menée du centre vers le cofté du pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

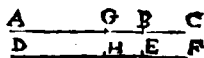
T H E O R. 2. P R O P. II.

S'il y a deux lignes droictes coupees en

Fff ij

la moyenné & extreme raison; elles
feront semblablement coupees.

Soient les deux lignes AB &
DE coupees en la moyenné
& extreme raison aux points
G & H: leurs plus grands seg-
mens soient AG & DH. Je dis



qu'icelles lignes sont semblablement coupees:
c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à
DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainsi DH
à HE, &c.

Car par la 17. prop. 6. comme le rectangle de AB,
& GB, sera egal au quarré de AG, ainsi le rectangle
de DE & HE sera egal au quarré de DH: & partant
quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré
de AG, comme quatre fois le rectangle de DE &
HE au quarré de DH: & en composant (apres auoir
adiousté directement BC egale à BG; & EF ega-
le à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB
avec le quarré de AG (ou par la 8. proposi. 1. le
seul quarré de AC) est au quarré de AG, comme
quatre fois le rectangle de DE & HE, avec le quarré
de DH, (ou le seul quarré de DF) est au quarré de
DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG,
ainsi DF à DH: Et en composant comme la compo-
see de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG,
ainsi la composee de DF, DH, c'est à dire la double
de DE, est à DH: & en permutant. comme la double
de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH: Et par
la 16. prop. 5. comme la double de AB est à la double
de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE,
ainsi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainsi sera

aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis quel vne & l'autre raison est comme AB à DE : & en permutant comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE : & ainsi selon toutes les autres manieres d'argumenter es proportions, on demonstrera toutes lignes, & parties d'icelles estre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes coupees en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

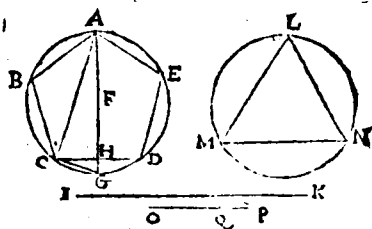
T H E O R. 3. P R O P. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

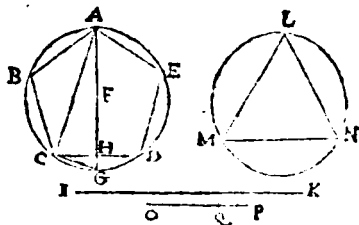
Auparauât que d'expliquer ceste prop. il conuient demonstrer que le quarré du costé du pentagone avec le quarré de la ligne qui soustient vn angle

d'iceluy, est quintuple du quarré demy diametre du cercle dans lequel est inscrit iceluy pentagone.

Soit le costé du pentagone inscrit dans vn cercle CD, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en



deux également,
tant l'arc CGD
que le costé CD,
par le corol. de
la 10. prop. 13. le
dis que les deux
quarrez de CA
& CD sont en-
semble quintuples du carré de FG.



Car si on meine CG, ce sera le costé du decagone:
& par le scholie de la 4. prop. 2. le carré de AG,
sera quadruple du carré du demy diamètre FG; &
par consequent les deux de AC, CG, qui par la 47.
prop. 1. sont egaux au carré de AG, seront aussi
quadruple d'iceluy carré de FG. Parquoy les trois
de AC, CG, & GF, seront ensemble quintuples du
seul de GF. Mais les deux de CG, & GF, costez del'he-
xagone & decagone sont ensemble egaux au car-
re de CD costé du pentagone, par la 10. propos. 13.
parrant les deux quarrez de AC & CD sont quin-
tuples du carré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diamètre de la
sphere comprenant le dodecaedre & l'icosaedre;
& d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone AFCDE,
& le l'icosaedre soit le triangle equilateral LMN:
ie dis qu'un mesme cercle circonscrit le pentago-
na ABCDE, & le triangle LMN; c'est à dire que les
cercles ABCDE, LMN, qui les circonscrivent
sont egaux.

Car estant tirée AC subtendante de l'angle du
pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la
mesme sphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & soit
exposée la ligne droite OP, telle que le carré de
Ik diamètre de la sphere, soit quintuple du carré

d'icelle OP : laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'Icosaedre par le corol. de la 16. prop. 13. soit icelle OP couppee en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou semi-diametre, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. proposit. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB : Donc par la 2. proposit. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB sera au plus grand segment OQ : partant par la 12. prop. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP : (pource que le quarré de Ik diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube, par la 15. propo. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le coroll. de la 16. prop. 13. ML costé du triangle de l'Icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demi-diametre: & partant puis que par la 10. propo. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML, seront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ: ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC, estans quintuples du quarré du demi-diametre FA, (comme nous auons demonstté au

commencement de ceste proposition) trois quarez de AB, & AC seront egaux à quinze quarez du demy diametre FA. Mais cinq quarez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML est triple du quarré du demy diametre, par la 12. proposit. du 13.) Donc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux sera egal à vn quarré, & le demy-diametre au demy-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux. Donc vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

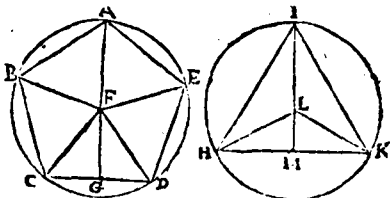
THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du centre du cercle circonscriuant le pentagone du dodecaedre, on mene vne ligne droicte perpendiculaire sur vn costé d'iceluy pētagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, sont egaux à toute la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonscriuant vn pētagone d'un dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tiree FG perpendiculairement sur le costé CD. Je dis que trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire FG & costé CD, sont egaux à la superficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE : il est evident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chaque pentagone a cinq pareils triangles que CFD, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroient le double : Donc trente rectangles de FG, & CD, leur seront egaux.

Nous démontrons semblablement, que si un triangle equilateral, comme Hlk, est inscrit en un cer-



cle, du centre duquel L, on tire sur le costé Hk la perpendiculaire LM : trente fois le rectangle de LM & HK, seront egaux à la superficie de l'Icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK ; & chacun d'iceux se diuise en trois egaux entr'eux, & semblables & egaux à HLK, qui sont en tout soixante triangles comme HLK : mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK, par la 41. p. 1. Et par consequent soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles : Donc trente rectangles de LM & Hk seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre. Si donc du centre du cercle circonscrivant le pentagone, &c.

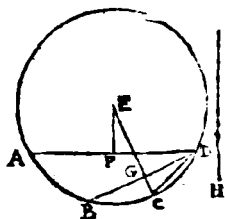
C O R O L L A I R E.

De cecy resulte, par la 15. prop. 5. que comme un seul rectangle de FG & CD, est à un seul rectangle de LM & Hk, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre; ainsi le costé du cube est au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Dans le cercle donné A BCD soit pris AD le costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monstré estre possible par la 2. prop.



14. qu'un mesme cercle comprend & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy costé du pentagone BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG: & icelle EG estant prolongee insques à la circonference, elle coupera l'arc BCD en deux egaleement en C: & estant tiree la ligne droite CD, ce sera le costé du decagone: & finalement soit exposee la ligne droite H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Je dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'Icosaedre.

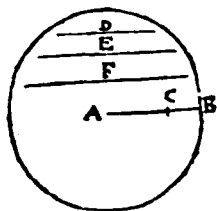
Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle;

la composée d'iceux costez, sera couppee en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle composée est EG; & par le corol. la 12. prop. 12. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF: Et partant puis que par la 15. prop. 5. les toutes sont aux toutes, comme les moitez aux moitez: il est euident que la moitié EG estant couppee en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment: (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faiët la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H costé du cube estant aussi couppeé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF: aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle compris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre: pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison; comme les deux quarrez de la route & du plus grand segment, sont aux deux quarrez de la route & du plus petit segment, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB , soit couppe en la moyenne & extreme raison en C , le plus grand segment soit AC , lequel se-



ra le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le corol. de la 9. prop. 13. Item soient prises trois lignes, D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, & F costé du cube: Je dis que le quarré de F , est au quarré de E , comme les deux quarrez de AB & AC sont aux deux quarrez de AB & CB .

Car D estant le costé du pentagone, & E costé du triangle tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment,

par le corol. de la 17. prop. 13. Donc Estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy-diametre AB par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarez de AB & CB sont triples du quarré de AC: Ainsi le quarré de E, est au quarré de AB, comme les 2. quarez de AB, CB sont au quarré de AC: Et en permutant le quarré de E, sera aux deux quarez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB est à son plus grand segment AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarez de AB & CB, ainsi le quarré de F, au quarré de D: & en permutant comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarez de AB & CB, sont au quarré de D, costé du pentagone: lequel par la 10. prop. 13. est egal aux deux quarez de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en vn mesme cercle; & par consequent le quarré de F costé du cube est à E costé de l'Icosaedre, comme les deux quarez de AB & AC, sont aux deux quarez de AB, & CB. Si donc vne ligne droiſte est coupée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le costé du cube est au costé de

l'icosaedre, ainsi le dodecaedre est à l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Ceste demonstration est facile, les precedentes estans bien entendues : car puisque par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre sont inscrits dans vn mesme cercle : il est evident qu'iceux triangle & pentagone seront equidistans du centre de la sphere. Parquoy si on diuise le dodecaedre & l'icosaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre solide seront de mesme hauteur : Et par les 5. & 6. prop. 12. elles seront l'une à l'autre, comme leurs bases ; c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icosaedre, comme douze pentagones à vingt triangles : C'est à dire que comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre, ainsi tout le dodecaedre à tout l'icosaedre. Mais par la 5. prop. 14. icelles superficies sont l'une à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaedre : donc par la 11. prop. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaedre, ainsi le dodecaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouuer.

Fin du quatorziesme Element.



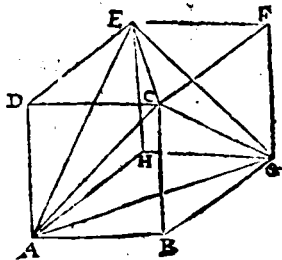
E L E M E N T

QVINZIE'SME.

PROBL. I. PROP. I.

DAns vn cube donné, inscrire vne pyramide.

Soit le cube donné AF , dans lequel il faut inscrire vne pyramide. Soient menez les diagonales AE, EC, EG , & des extrémités d'icelles A, C, G , soient aussi menees les diagonales AG, AC, GC : Toutes lesquelles diagonales sont égales entr'elles, parce que les six quarrés dans lesquelles elles sont menees sont égaux par la définition du cube: Partant les quatre triangles composez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG , sont équilatéraux, & égaux entr'eux: & partant par la pyramide $AEGC$ constituée d'iceux triangles est inscrite au cube donné AF , par la 30. deff. II. Car tous

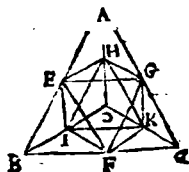


les angles d'icelle pyramide sont colloquez és angles d'iceluy cube AF. Nous auons donc inscrit vne pyramide dans le cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. II. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inscrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez tous les costez d'icelle pyramide en deux également aux poinçts E, F, G, H, I, k: Et soient menees les lignes EF, FG, GE, HI, Ik, kH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes lesquelles lignes sont egales entr'elles par la 4. prop. 1. estant toutes les lignes couppees egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGkI a les quatre costez egaux, & les quatre triangles EHI, IHk, KHG, GHE, commençans sur iceluy quadrilatere, & finissans au poinçt H, sont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au dessous du quadrilatere, & finissans au poinçt F, sont aussi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4. precedans. Parquoy la figure EIKGHF composez d'iceux 8. triangles est vn octaedre, par la 26. def. 11. & par la 30. def. 11. il est inscrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les costez d'icelle pyramide. Nous auons donc fait ce qui estoit requis.

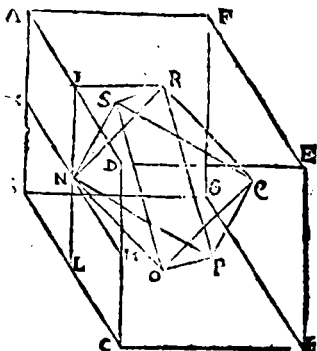


PROBL.

PROB. 3. PROP. III.

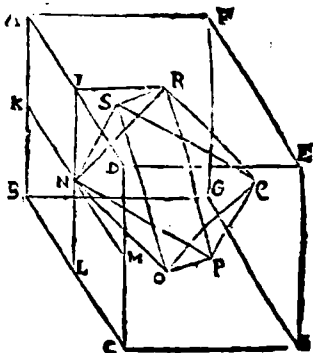
Dans vn cube donné, inscrire vn octaédre.

Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inscrire vn octaédre. Soient coupez en deux également les costez du quarré AC, és points I, k, L, M, & soient menées les deux lignes IL, KM, s'entre-couppans en N, lequel point sera le centre du quarré A



C, comme il appert par la demonstration de la 8. p. 4. Par la mesme maniere seront trouvez les centres des 5. autres quarréz du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R, S : Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres à chaque point de la section des costez de leurs quarréz, telles que sont NI, Nk, NL, NM, NR, &c. seront egales aux moitez d'iceux costez, comme il appert par la susdicte demonstration de la 8. prop. 4. Item soient tirees les quatre lignes droictes NP, PQ, QS, SN, lesquelles seront toutes egales, par la 4. prop. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Il est evident que icelles quatre lignes feront aussi vn quarré qui est au milieu de l'octaédre. Or des quatre angles d'iceluy quarré soient menées les quatre lignes NR, PR, QR, SR, vers le point R, lesquelles comme il

a esté dit cy dessus seront toutes égales tant entre elles qu'aux quatre précédentes, & seront les quatre triangles équilatéraux NRP , PRQ , QRS , NRS : Item des mesmes quatre angles au dessous du quarré vers le centre D , soient aussi menées les



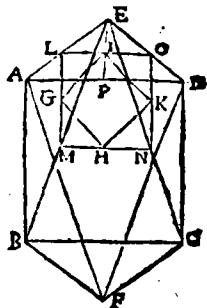
lignes NO , PO , QO , SO , qui seront égales comme dessus, & seront quatre autres triangles équilatéraux NOP , POQ , QOS , NOS , lesquels seront aussi égaux aux quatre premiers. Parquoy le solide $NOPQRS$ composé d'iceux 8. triangles équilatéraux & égaux entr'eux est octaèdre inscrit au cube donné, par les 26. & 30. def. 11. Nous auons donc inscrit vn octaèdre dans vn cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PRORL. 4. PROP. IIII.

Dans vn octaèdre donné, inscrire vn cube.

Soit donné l'octaèdre $ABCDEF$, dans lequel il faut inscrire vn cube. Des quatre triangles AEB , BEC , CED , AED , qui se terminent au point E , soient pris les centres G , H , I , k , & soient menées les lignes GH , HK , kI , GI : Il est euident que $GHIK$ sera quarré. Car si d'iceux quatre centres on mene les lignes droictes

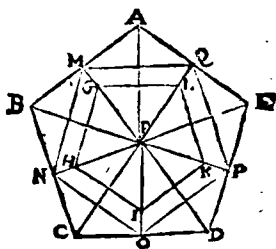
LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à son costé du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils sont semblables aux triangles equilateraux cy dessus par le corol. de la 4. prop. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les costez communs; & par consequent les quatre bases LM, MN, NO, LO sont egales. Item si de E par le centre I on meine EP: elle diuise l'angle E en deux egaleme[n]t: & par consequent LI sera egale à IO, c'est à dire que LO sera coupee en deux egaleme[n]t au centre I: Par mesme raison LM, MN, NO seront aussi coupez en deux egaleme[n]t aux centres G, H, K. Ainsi les 4. triangles GLI, IOK, GMH, HNK sont isosceles rectangles. (Car par la 10. prop. 11. les angles des poincts L, M, N, O, sont egaux aux droicts du quarré ABCD.) parquoy les 4. bases GI, IK, GH, HK seront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI est quarré. Que si semblablement des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres estans tous conioincts par lignes droictes, seront descrits encores 5. quarrés, lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy le cube composé d'iceux 6. quarrés sera inscrit dans l'octaedre donné, puisque les angles d'iceluy touchent les bases de l'octaedre; & par ainsi nous auons faict ce qui estoit requis.



PROB. 5. PROP. v.

Dans vn icosaedre donné, deſcrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on conſtruit l'icosaedre, ſur lequel ſoit vne des douze pyramides pentagonales de l'icosaedre, ayant pour ſommet le point F, auquel ſ'aſſemblent les 5. triangles equilateraux ABF, BCF, CDE, DEF, AEF, & ſoit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux points G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menees les lignes HG, GL, Lk, kI, IH: Item de F par iceux centres, ſoient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, lesquelles couperont en deux également les collez AB, BC, CD, DE, EA, comme il appert par le coroll. de la 10. prop. 13. & partant eſtant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il eſt euident par la 4. prop. 1. qu'elles ſeront egales; & que par la 8. prop. 1. les angles qu'elles ſouſtiennent au point F ſont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL ſont auſſi egales (car ce ſont demy diametres de cercles circonſcrivans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, kL, LG ſeront pareillement egales, & les angles de deſſus icelles auſſi egaux, par la 4. prop. 1. Parquoy le pentagone GHIKL eſt equilateral & equi-angle: & il ſe prouuera aiſement comme à la 17. p.



13. qu'il est aussi en vn mesme plan. Que si semblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres 11. pyramides de l'icosaedre, seront aussi descrits des pentagones equaliteraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des costez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icosaedre, puis que les 20. angles touchent les vingt bases de l'icosaedre : Nous auons donc inscrit vn dodecaedre, dans vn Icosaedre donné. Ce qu'il falloit faire.

Fin du quinziésme & dernier Element.

Prinilege du Roy.



O V Y s par la grace de Dieu Roy de France & de Nauarre. A noz amez & feaux Conseillers les gens tenans nos Cours de Parlement, Preuost de Paris, Bailly de Roüen, Seneschaux de Lyon, Thouloze, Bordeaux, & Poictou, & à tous nos autres officiers qu'il appartiendra, Salut. Nostre cher & bien aimé **LEANANTOINE LOALIN**, marchand Libraire en nostre bonne ville de Paris, Nous a fait remonstrer qu'il auroit fait achapt de la coppie des quinze liures, *des Elemens d'Euclide*, traduiete en François par M. D. **HENRION**, Professeur és Mathematiques, & par luy commentés & enrichis, tant en la matiere que és figures, le tout tres-necessaire à tous ceux qui font profession des sciences Mathematiques, lequel ledit **LOALIN** desireroit faire imprimer, & d'autant qu'il y conuient faire de grands frais, tant à cause des diuers chiffres & caracteres, que grand nombre de figures, & qu'il pourroit estre priué & frustré de son labeur par quelque Libraire & Imprimeur, s'il n'auoit sur ce nos lettres à ce necessaires, humblement reque-

rant icelles. A CES CAUSES inclinans liberalement à la requeste dudit exposant, Nous luy auons de nos graces speciales donné & octroyé, donnons & octroyons par ces presentes, congé & permission de faire imprimer, en telle marge, volume & caractère que bon luy semblera le susdict liure, durant le temps & espace de neuf ans, à commencer du iour & datte qu'il sera acheué d'imprimer, faisans deffences à tous autres Imprimeurs & Libraires de nostre royaume, & à toutes autres personnes de quelque qualité & condition qu'ils soient, d'imprimer ou faire imprimer, alterer ny extraire aucune chose dudit liure, d'achepter, vèdre, ny distribuer aucune induë impression, d'iceluy, sur peine de deux mil liures d'amende, applicable moitié aux pauvres, & l'autre moitié audit I O A L I N, & de confiscation des liures & exemplaires qui se trouueront d'autre impression, que celle qu'aura faicte ledit I O A L I N, & de tous despens, dommages & interests, à la charge de mettre en nostre Bibliothèque des Cordeliers à Paris, deux exemplaires dudit liure. Voulans en outre, qu'en exposant au commencement ou à la fin dudit liure vn extraict des presentes, elles soient renuës pour bien signifiées, nonobstât quelconques lettres à ce contraires. Car tel est

nostre plaisir. **D O N N E'** à Paris le 27. iour de
Ianuier, l'an de grace mil six cents vingt-vn,
& de nostre regne le vnzième.

Par le Roy en son Conseil.

D A M O N T.

Ceste seconde Edition a esté acheuée
d'imprimer, le sixiesme Mars 1621.
Par Fleury Bourriquant.